

竞赛辅导

专题 1 准静态问题的力三角形判断法

沈 晨

编者按 当今市场上各种高中物理竞赛辅导资料多以章节的形式罗列知识点,方法辅导较少,不利于激发学生学习的兴趣.因此,许多老师要求本刊编辑部组织一个有别于市场上的竞赛辅导资料,以给喜欢物理学,渴求获得比高中教材所提供的更多的基础物理知识与更妙的解决物理问题方法的中学生一套课外阅读材料,也便于普通中学用作竞赛辅导并且与高中现行物理教学同步的教材,在编排上,知识线与高中现行物理教材平行.对此,本刊编辑部特邀资深竞赛辅导老师——浙江省特级教师、宁波效实中学高级教师沈晨老师编写高中物理竞赛辅导专题.该专题内容以《全国中学生物理竞赛内容提要》为依据,不拘泥于其界定.数学涉及高中现行教材全部内容,但不需要用到微积分,对部分求导、积分与微分方程通过微元方法降解,是初等数学的物理;对高中物理内容不再作知识点的罗列,采用“点击式”介绍更高层面的物理知识,更巧妙的物理方法;例讲选题注重给学生以解决物理问题的具体操作方法与新信息传达;练习题全部给出详解或解答指要;选编练习题尽量少重复全国物理竞赛试题以增大新题容;国际物理奥林匹克题降解选用比例高.每个专题分“教你一手”与“小试身手”两个模块,前者点击精彩物理知识与方法,后者提供研讨、试手的问题与实例,以便老师辅导和学生自学.该系列专题共27讲,分别是准静态问题的力三角形判断法、点击静力学问题解答技巧、平衡问题探骊、矢量图解运动问题、物系相关速度、动力学特殊问题与特别方法、曲线运动曲直谈、功与能、动量与动量、曲线运动的动力学解、天体宇宙种种、谐振的认定与周期、波的描述与波现象、刚体的运动学与动力学问题、热力学基础、电容器、静电学问题的等效处理、电阻等效ABC、电路计算、电磁感应面面观、交流电路、费马原理及其运用、成像问题集成、光干涉研究、微观世界的规律与方法、相对论浅涉、微元法.这一系列专题将从本期连载.

教你一手

在静力学中,经常遇到在力系作用下处于准静态平衡的物体其所受诸力变化趋势判断问题.这种判断如果用平衡方程作定量分析往往很繁琐,而采用力三角形图解讨论则清晰、直观、全面.

我们知道,当物体受三力作用而处于平衡时,必有 $\sum F=0$,表示三力关系的矢量图呈闭合三角形,即三个力矢量(有向线段)依次恰好能首尾相接.当物体所受三力有所变化而又维系着平衡关系时,这闭合三角形总是存在而仅仅是形状发生改变.比较不同形状的力三角形各几何边、角情况,我们对相应的每个力大小、方向的变化及其相互间的制约关系将一目了然.所以,作出物体准静态平衡时所受三力矢量可能构成的一簇闭合三角形,是力三角形判断法的关键操作.

三力动态平衡的力三角形判断通常有三类情况.

类型一、三力中有一个力确定,即大小、方向不变,一个力方向确定,这个力的大小及第三个力的大小、方向变化情况待定

例 1 如图 1-1 所示,竖直杆 AB 在绳 AC 拉力作用下使整个装置处于平衡状态,若绳 AC 加长,使点 C 缓慢向左移动,杆 AB 仍竖直,且处于平衡状态,那么绳 AC 的拉力 T 和杆 AB 所受的压力 N 与原先相比,下列说法中正确的是()

- A. T 增大, N 减小
- B. T 减小, N 增大
- C. T 和 N 均增大
- D. T 和 N 均减小

分析与解 由于绳 AC 以不同方向拉杆,使杆 AB 有一系列可能的平衡状态.我们考察两

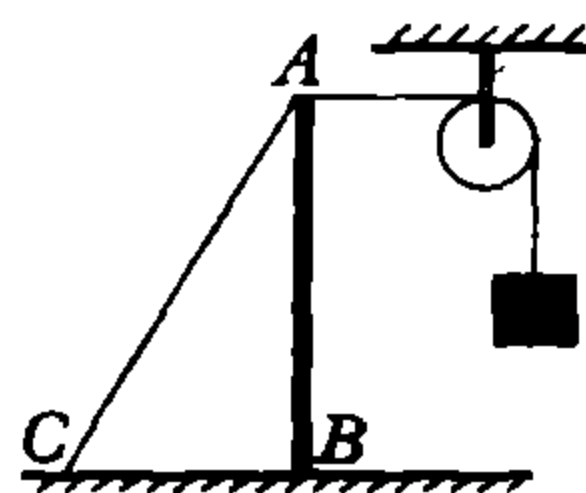


图 1-1

绳系在直立杆顶端的结点 A,它在绳 AC 的拉力 T、重物通过水平绳的拉力 $F(F=G)$ 和杆 AB 的支持力作用下平衡.三力中,水平绳拉力不变,杆支持力方向不

变,总是竖直向上,大小如何变化待定;而绳 AC 的拉力大小、方向均不确定.用代表这三个力的有向线段作出一簇闭合三角形如图 1-2 所示,取点 O 为始端,先作确定力 F 的有向线段①,从该线段箭头端点按已知方向力的方向作射线②,它是所有可能的力的作用线位置,从射线②上任意点指向 O 点且将图形封闭成三角形的有向线段③便是第三个力矢量,在所得三角形集合图上,根据题意,用曲箭头表示出动态变化的趋势.

从图 1-2 中可知,随着绳 AC 趋于水平,其上的拉力减小,杆的支持力亦减小.注意到杆对结点支持力与结点对杆压力是作用力与反作用力,故本题正确答案为选项 D.

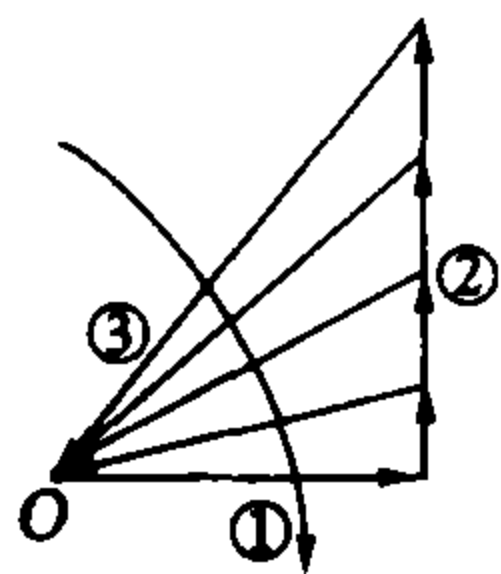


图 1-2

例 2 如图 1-3 所示,用绳通过定滑轮牵引物块,使物块在水平面上从图示位置开始沿地面做匀速直线运动,若物块与地面间的动摩擦因数 $\mu < 1$,滑轮的质量及摩擦不计,则在物块运动过程中,以下判断正确的是()

- A. 绳子拉力将保持不变
- B. 绳子拉力将不断增大
- C. 地面对物块的摩擦力不断减小
- D. 物块对地面的压力不断减小

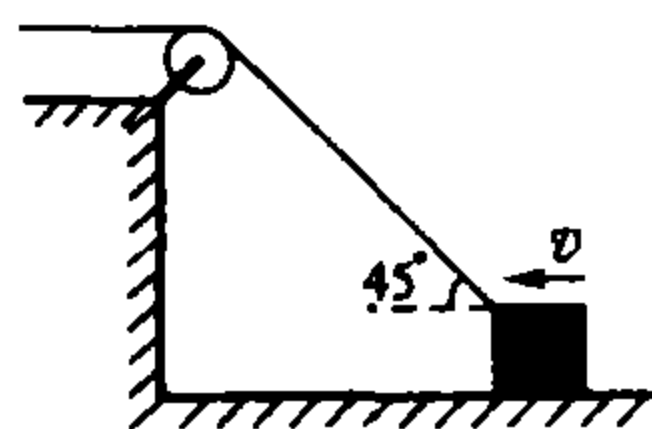


图 1-3

分析与解 本题中物块是在四个力作用下保持动态平衡.我们可先将地面施予物体的支持力 N 与摩擦力合成为地面作用力 F.由于 $f = \mu N' = \mu N$,可知力 F 的方向是确定的:与支持力的方向成 $\arctan \mu$ 角.支承面约束力(支持力与滑动摩擦力或最大静摩擦力的合力)与支持力间的这个角,通常称“摩擦角”,如图 1-4 所示.这样,问题转化为三力平衡,其中重力 G 为确定力,地面作用力 F 为方向确定力,属于类型一的问题.

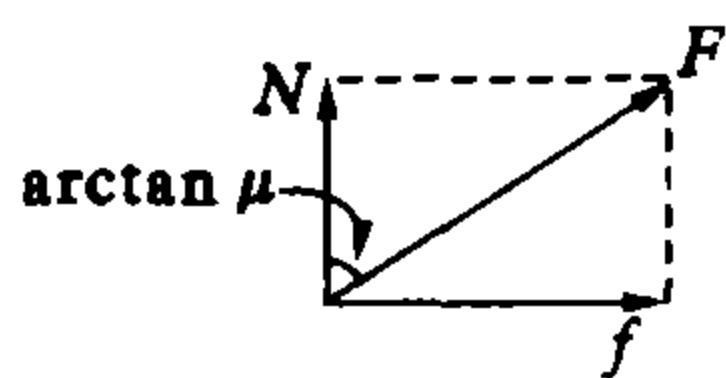


图 1-4

如图 1-5 所示,取点 O,作表示重力的有向线段①,从该线段箭头端点作地面作用力 F 的作用线所在射线②,作从射线②上任意点指向 O 点且将图形封闭成三角形的一系列有向线段③,它们就是绳拉力矢量,用曲箭头标明变化趋势.

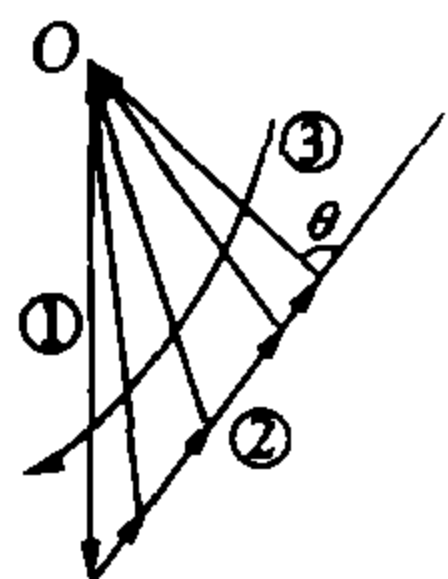


图 1-5

根据题给限制条件,由于 $\mu < 1$,

故力三角形中①、②两线间夹角小于 45° ;由于初始状态绳拉力与水平面成 45° ,故力三角形中线段③与线段①的夹角从 45° 开始减小,图 1-5 中 θ 角小于 90° .容易判断:绳子拉力不断增大,地面作用力不断减小;由图 1-4 所示关系显见,地面支持力与摩擦力均随之减小.本题正确答案为选项 BCD.

综上所述,类型一问题的作图方法是:以确定力矢量为力三角形系的基准边,在它的箭头端沿已知方向力的方向作射线,从射线上的点作指向确定力矢量箭尾的有向线段,勾画出一簇闭合的矢量三角形,用曲箭头标明动态趋势.由此可判断各个力的大小和方向的变化趋势.

类型二、三力中有一个力确定,即大小、方向不变,一个力大小确定,这个力的方向及第三个力的大小、方向变化情况待定

例 3 如图 1-6 所示,质量为 m 的小球,用一细线悬挂在点 O 处.现用一大小恒定的外力 F ($F < mg$) 慢慢将小球拉起,在小球可能的平衡位置中,细线最大的偏角 θ 是多少?

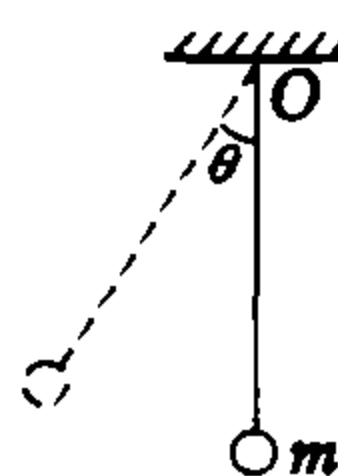


图 1-6

分析与解 本题中研究对象小球可在一系列不同位置处于静止,静止时小球所受重力、细线上拉力及大小恒定的外力的合力总是为零.三力关系由一系列闭合的矢量三角形来描述,这些三角形中表示重力的矢量边是公共边,有一条矢量边长度相同.现在来作出这样的三角形簇:

如图 1-7 所示,取点 O 为起始点,作确定不变的重力矢量①,以其箭头端点为圆心,表示外力 F 大小的线段长为半径作一圆,该圆上各条矢径②均可为已知大小的力矢量,该圆周上各点指向 O 点并封闭图形成三角形的有向线段③便是第三个力即细线拉力矢量.这样我们得到了全面反映小球在可能的平衡位置时力三角形集合图.

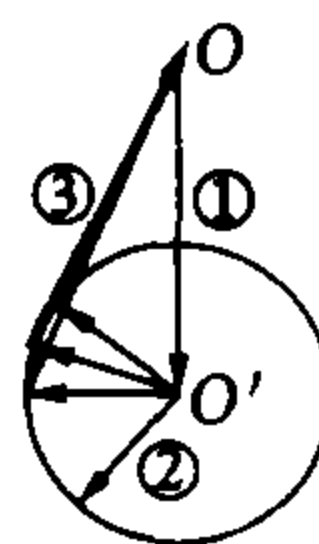


图 1-7

由图 1-7 可知,表示线拉力矢量与重力矢量的线段③与线段①间的夹角最大为 $\theta = \arcsin \frac{F}{G}$ (线段③作为圆的切线时),细线拉力总沿着线,故小球可能的平衡位置中,细线与竖直方向的偏角最大为 $\arcsin \frac{F}{G}$.

例 4 如图 1-8 所示,在“验证力的平行四边形定则”实验中,用两只弹簧秤 A、B 把橡皮条上的结点拉到某一位置 O,这时两绳套 AO、BO 的

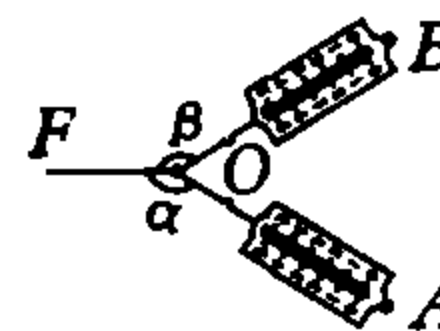


图 1-8

夹角 $\angle AOB$ 小于 90° 。现保持弹簧秤 A 的示数不变而改变其拉力方向使 α 角减小,那么要使结点仍在位置 O 处不动,就应调整弹簧秤 B 的拉力大小及 β 角,则下列调整方法中可行的是()

- A. 增大弹簧秤 B 的拉力、增大 β 角
- B. 增大弹簧秤 B 的拉力、 β 角不变
- C. 增大弹簧秤 B 的拉力、减小 β 角
- D. 弹簧秤 B 的拉力大小不变、增大 β 角

分析与解 本题中我们考察结点 O,使之处于平衡的三个力中,一个力(橡皮条上的拉力 F)大小方向均确定,一个力(弹簧秤 A 的拉力 F_A)大小确定,需判断第三个力(弹簧秤 B 的拉力 F_B)的变化情况。

如图 1-9 所示,取点 O 为起始点,先作力 F 的有向线段①,以其箭头端点为圆心,表示大小不变力 F_A 的线段长为半径作一圆,该圆的每条矢径②均为力 F_A 矢量,从该圆周上各点指向 O 点的各有向线段③便是弹簧秤 B 的拉力 F_B 矢量。这样我们勾画出表示可能的三力关系的三角形集合图。

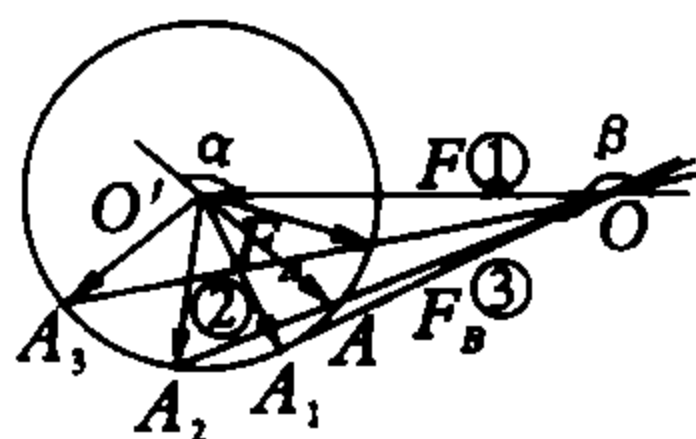


图 1-9

如图所示,若初始状态三力关系如 $\triangle OO'A$,在 α 角减小的前提下,线段③变长,即 F_B 增大,而 β 角可能减小、不变或增大,三力依次成 $\triangle OO'A_1$ 、 $\triangle OO'A_2$ 、 $\triangle OO'A_3$ 所示的关系,故正确答案为选项 ABC。

综上所述,类型二问题的作图方法是:以确定力矢量为力三角形系的基准边,在它的箭头端以已知方向力为矢径作圆,从圆周上的点作指向确定力矢量箭尾的有向线段,勾画出一簇闭合的矢量三角形。由此可判断未知力的大小和方向的变化趋势。

类型三、三力中有一个力大小方向确定,另二力方向变化有依据,判断二力大小变化情况

例 5 如图 1-10 所示,绳子 a 一端固定在杆上 C 点,另一端通过定滑轮用力拉住,一重物用绳 b 挂在杆 BC 上,杆可绕 B 点转动,杆、绳质量及摩擦不计,重物处于静止。若将绳子 a 慢慢放下,则下列说法正确的是()

- A. 绳 a 的拉力 F_a 减小,杆的压力 F 增大
- B. 绳 a 的拉力 F_a 增大,杆的压力 F 增大
- C. 绳 a 的拉力 F_a 不变,杆的压力 F 减小
- D. 绳 a 的拉力 F_a 增大,杆的压力 F 不变

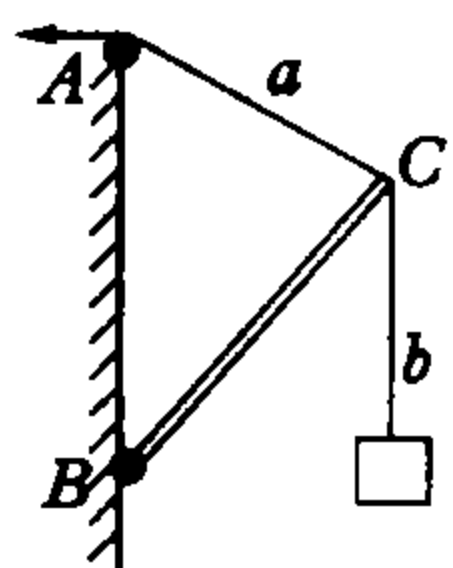


图 1-10

分析与解 使结点 C 在各个位置处于平衡的三

个力中只有绳 b 的拉力 F_b (大小等于重力,方向竖直向下)是确定的,另两个力的大小不定、方向变化,但这两个力的方向有依据:绳 a 的拉力 F_a 总沿绳 a 收缩的方向,杆 BC 支持力方向总是沿杆而指向杆恢复形变的方向,那么表示这两个力的有向线段与几何线段相关,任意位置时表示三力关系的矢量三角形与表示位置关系的某几何三角形一一对应。

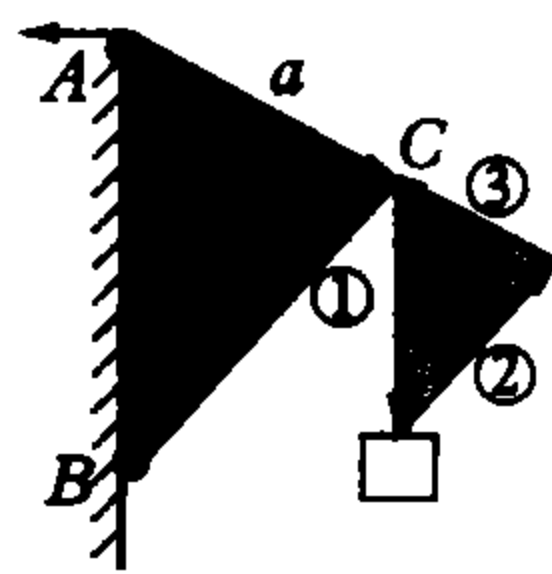


图 1-11

如图 1-11 所示,自结点 C 先作表示确定力 F_b 的有向线段

①,另两个变化力 F' 和 F_a 的有向线段②、③分别平行于杆 BC 及绳 a,且与有向线段①依次首尾相接构成闭合三角形,与该力三角形相似的是几何三角形 ABC. C 的位置改变时,由于力三角形与几何三角形总相似,可由几何边长的变化判定对应力大小的变化:随着绳子慢慢放下,几何边 AC 变长、BC 不变,则绳 a 的拉力 F_a 增大,杆 BC 对结点 C 支持力 F' 不变,即杆所受压力 F 不变。正确答案为选项 D。

例 6 如图 1-12 所示,重为 G 的物体用两根绳子 OA、OB 悬挂,开始时绳 OA 水平,现将两绳同时顺时针缓慢转过 90° ,始终保持 α 角大小不变,且物体始终静止,设绳 OA 的拉力为 T_1 ,绳 OB 的拉力为 T_2 ,则在此旋转过程中()

- A. T_1 先减小后增大
- B. T_1 先增大后减小
- C. T_2 逐渐减小
- D. T_2 最终变为零

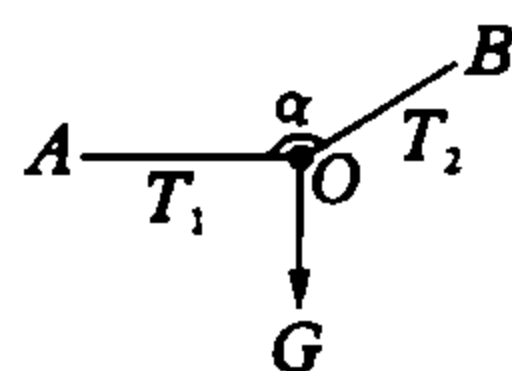


图 1-12

分析与解 物体在重力及两绳拉力作用下保持准静态平衡。

两绳拉力均变化,但方向总沿绳,随绳的方位而变化。本题属类型三情况,我们来做出绳处于各可能位置时对应的力三角形图。如图 1-13 所示,取点 O,作表示确定的重力 G 矢量的有向线段①,分别将表示 OA 绳拉力 T_1 和 OB 绳拉力 T_2 矢量的有向线段②、③与线段①依次首尾相接,构成闭合三角形,两绳在初始位置时,力三角形为图中的 $\triangle OO'C$,这应是一个直角三角形,此后两绳相对位置保持不变,同时顺时针缓慢转过 90° ,则总沿绳的两绳拉力方向也同时地缓慢变化 90° ,说明表示两绳拉力的有向线段②、③间夹角 α 保持不变。在 90° 范围内,与两绳各位置相对应的三力关系如图中 $\triangle OO'C_1$ 、 $\triangle OO'C_2$ ……这簇三角形有一公共边即有向线段①,而 $\angle C$ 、 $\angle C_1$ 、 $\angle C_2$ ……相同,根据

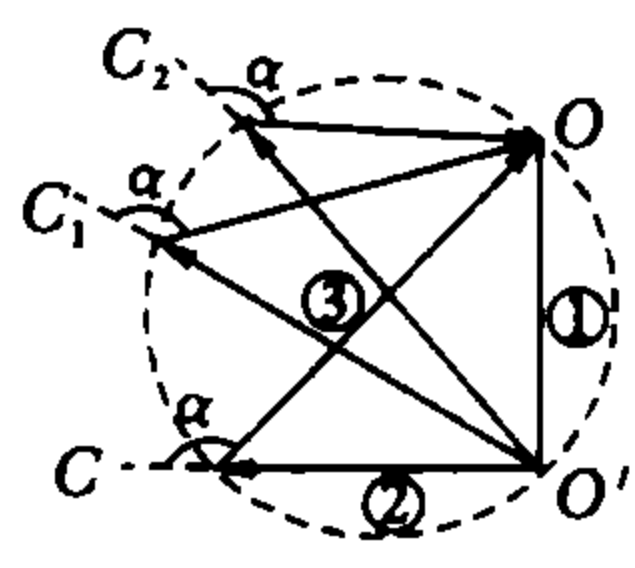


图 1-13

几何规律,这簇力三角形内接于同一个圆,有向线段①是此圆的一条弦, $\angle C$ 、 $\angle C_1$ 、 $\angle C_2$ ……是该弦对应的弧 \widehat{OC} 上的圆周角,同弧上的圆周角相等,初始时力三角形 $OO'C$ 为直角三角形,则此时的向线段③长度是该圆的直径 OC .

由图 1-13 可对照图形的几何性质,我们可以确定绳 OA 拉力 T_1 和绳 OB 拉力 T_2 的变化情况:有向线段②从 $O'C$ 到 $O'C_1$ 到 $O'C_2$ ……弦长增大到成为一条直径再逐渐减小,转过 90° 时为 $O'O$;有向线段③一开始处于直径位置,以后一直减小,到转过 90° 时减为零.故 T_1 是先增大后减小; T_2 则一直减小直至零.正确答案为选项 BCD.

综上所述,类型三问题的作图方法是:以确定力矢量为力三角形系的基准边,将另二力按方向依据来确定力矢量依次首尾相接,通过力三角形与相应的几何三角形的性质比照,勾画出闭合的矢量三角形.

小球受力分析

1. 如图 1-14 所示,用细绳通过定滑轮沿竖直光滑的墙壁匀速向上拉,则拉力 F 和墙壁对球的支持力 N 的变化情况是()

- A. F 增大, N 增大
- B. F 增大, N 不变
- C. F 减小, N 增大
- D. F 减小, N 不变

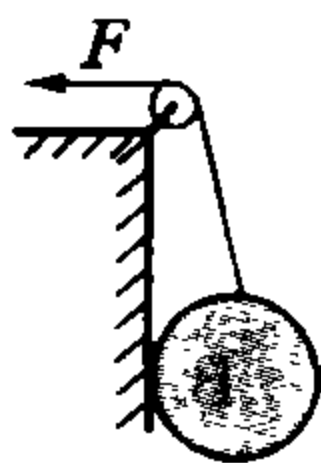


图 1-14

2. 如图 1-15 所示,用等长的细线 OA 、 OB 悬挂一重物,保持重物位置不变,使线的 B 端沿半径等于 OA 的圆周向点 C 移动,则在移动过程中 OB 线的拉力的变化情况是()

- A. 先减小后增大
- B. 先增大后减小
- C. 总是减小
- D. 总是增大

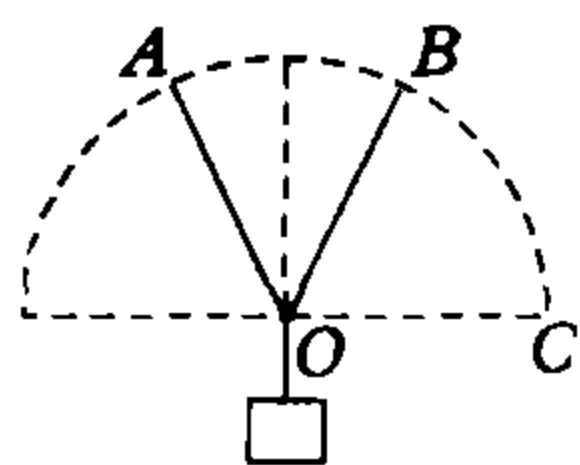


图 1-15

3. 在“验证力的平行四边形定则”的实验中,如图 1-16 所示,使弹簧秤 b 从图示位置开始顺时针缓慢转动.在此过程中,保持 O 点的位置和弹簧秤 a 的拉伸方向不变,则在整个过程中,两弹簧秤 a 、 b 的示数变化情况是()

- A. 弹簧秤 a 的示数增大,弹簧秤 b 的示数减小
- B. 弹簧秤 a 的示数减小,弹簧秤 b 的示数增大
- C. 弹簧秤 a 的示数减小,弹簧秤 b 的示数先增大后减小

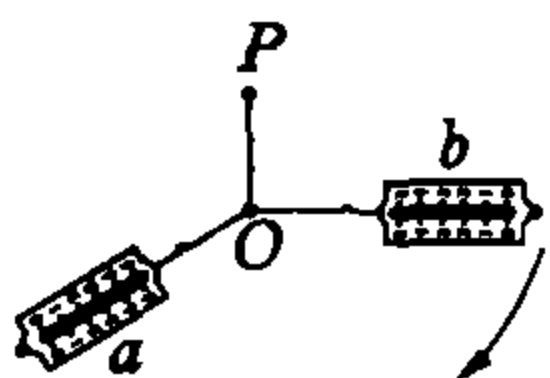


图 1-16

D. 弹簧秤 a 的示数减小,弹簧秤 b 的示数先减小后增大

4. 如图 1-17 所示,小球在光滑的墙与装有铰链的木板之间,当使木板与墙的夹角 θ 增大时($\theta < 90^\circ$),下列说法中正确的是()

- A. 小球对木板的压力增大
- B. 小球对木板的压力减小
- C. 木板对小球的弹力可能小于小球的重力
- D. 小球对木板的正压力对轴的力矩变大

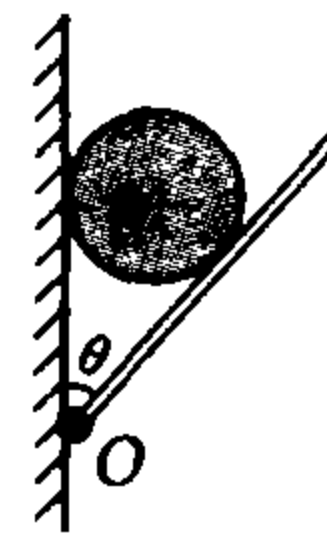


图 1-17

5. 如图 1-18 所示,两块互相垂直的板 AO 、 BO 和水平面的夹角均为 α ,板间放一光滑球,当板 AO 不动,而板 BO 绕两板交线沿逆时针缓慢转动时,球对板 BO 的压力将()

- A. 变大
- B. 变小
- C. 先增大后减小
- D. 先减小后增大

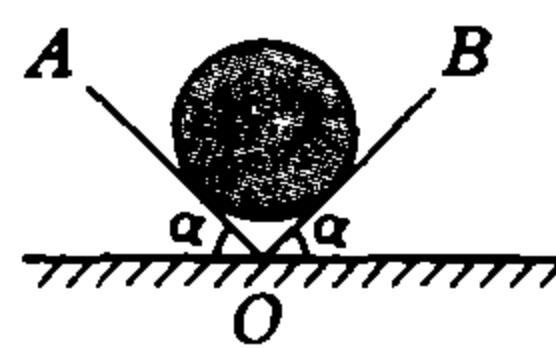


图 1-18

6. 如图 1-19 所示,在倾角 45° 的斜面上,放置一质量为 m 的小物块,小物块与斜面间的动摩擦因数 $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$,欲使小物块能静止在斜面上,应对小物块再施一力,该力最小时的大小与方向应该是()

- A. $mg \sin 15^\circ$,与水平成 15° 斜向右上
- B. $mg \sin 30^\circ$,竖直向上
- C. $mg \sin 75^\circ$,沿斜面向上
- D. $mg \tan 15^\circ$,水平向右

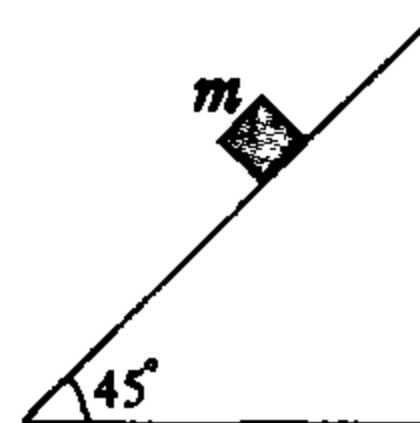


图 1-19

7. 如图 1-20 所示,杆 BC 的 B 端铰接在竖直墙上,另一端 C 为一滑轮.重物 G 上系一绳经过滑轮固定于墙上 A 点处,杆恰好处于平衡.若将绳的 A 端沿墙向下移到点 A' ,再使之平衡(BC 杆、滑轮、绳的质量及摩擦均不计),则()

- A. 绳的拉力增大,杆 BC 受到的压力增大
- B. 绳的拉力不变,杆 BC 受到的压力减小
- C. 绳的拉力不变,杆 BC 受到的压力增大
- D. 绳的拉力不变,杆 BC 受到的压力不变

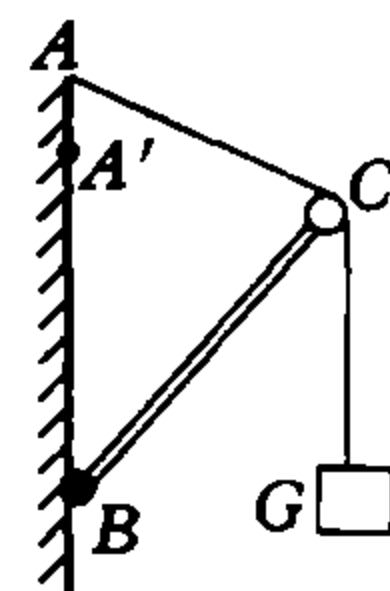


图 1-20

8. 如图 1-21 所示,竖直绝缘墙壁上点 Q 处固定一质点 A ,在点 Q 的正上方点 P 处用丝线悬挂另一质点 B . A 、 B 两质点因带电而互相排斥,由于漏电,使两

质点 A、B 带电量逐渐减少. 在电荷漏完之前, 悬线对质点 B 的拉力大小变化情况是()

- A. 逐渐变大
- B. 逐渐变小
- C. 大小不变
- D. 先变大后变小

9. 如图 1-22 所示, AB 为轻质杆, AC 为细绳, 在点 A 悬挂一重物 G, 将绳的固定点从点 C 逐渐向上移到点 C', 则绳的拉力 T_1 和杆受的压力 T_2 发生的变化是()

- A. T_1 逐渐增大, T_2 逐渐减小
- B. T_1 逐渐减小, T_2 逐渐减小
- C. T_1 先逐渐减小, 再逐渐增大, T_2 逐渐增大
- D. T_1 先逐渐减小, 再逐渐增大, T_2 逐渐减小

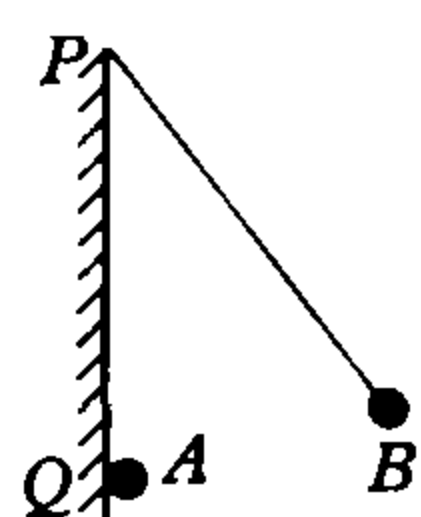


图 1-21

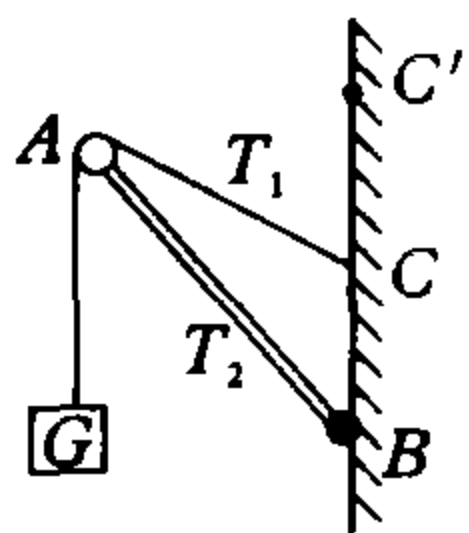


图 1-22

10. 建筑工人常通过如图 1-23 所示的安装在楼顶的一个定滑轮将建筑材料运送到高处, 为了防止建筑材料与墙壁相碰, 站在地面上的工人还另外用绳 CD 拉住材料, 使它与竖直墙面总保持距离 l . 不计两根绳的重力, 在建筑材料上升的过程中, 绳 AB 和绳 CD 上的拉力 T_1 和 T_2 的大小变化是()

- A. T_1 增大, T_2 增大
- B. T_1 增大, T_2 不变
- C. T_1 增大, T_2 减小
- D. T_1 减小, T_2 减小

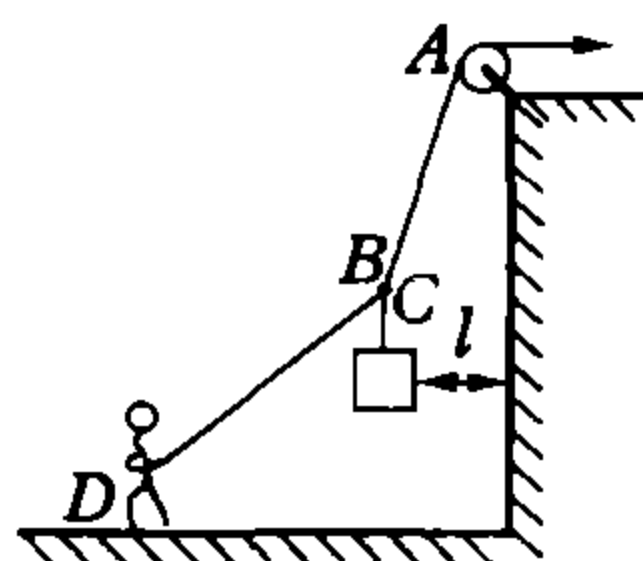


图 1-23

11. 如图 1-24 所示, 在悬点 O 处用细线拉着小球, 使它静止在半径一定的半圆柱面上, 现使半圆柱面从图示位置起沿水平面缓慢向左移动一些距离, 则()

- A. 小球对柱面的压力增大
- B. 细线对小球的拉力不变
- C. 柱面对小球的支持力不变
- D. 小球对细线的拉力减小

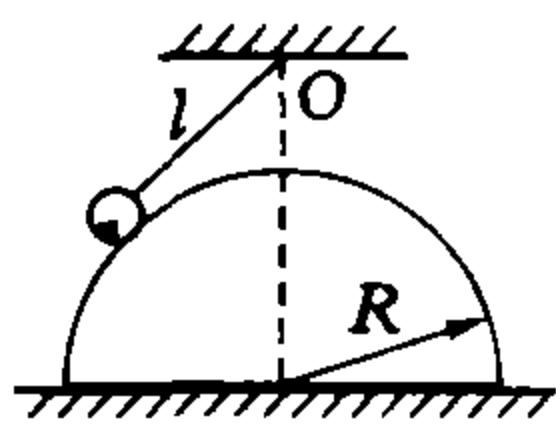


图 1-24

12. 如图 1-25 所示, 一球被绳子悬挂起来, 绳 AO 水平, 当小球被一水平力 F 向右缓慢拉起时, 绳 OC 上张力将 _____; 绳 OA 上张力将 _____; 而绳 OB 上张力则 _____。(填“变大”、“变小”或“不变”)

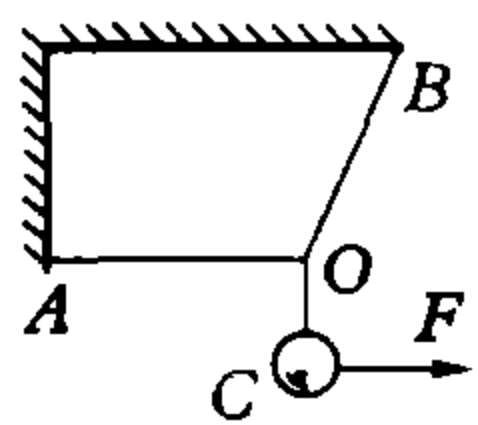


图 1-25

13. 如图 1-26 所示, 小球被细线吊着放在光滑的斜面上, 小球质量为 m , 斜面倾角为 θ , 在向左缓慢移

动斜面的过程中, 绳上张力最小值是 _____.

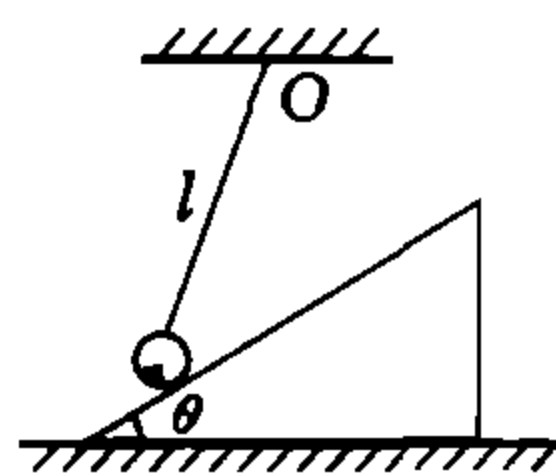


图 1-26

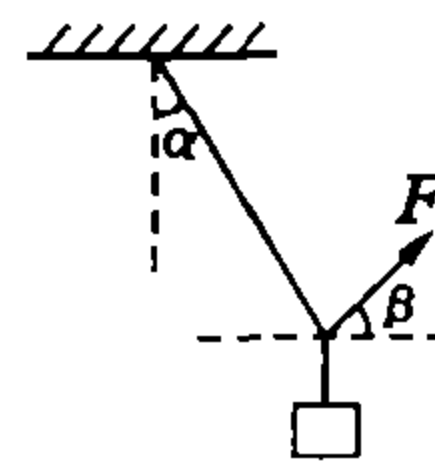


图 1-27

14. 如图 1-27 所示, 在绳下端挂一物体, 用力 F 拉物体使悬线偏离竖直方向 α 角, 且保持平衡, 若保持 α 角不变, 当拉力 F 与水平方向夹角 $\beta =$ _____ 时, F 有最小值.

15. 如图 1-28 所示, 在水平放置、半径为 R 的光滑圆弧槽内, 有两个半径均为 $R/3$ 、重分别为 G_1 、 G_2 的小球 A 和 B, 平衡时槽面圆心 O 与球 A 的球心连线与竖直方向的夹角 α 多大?

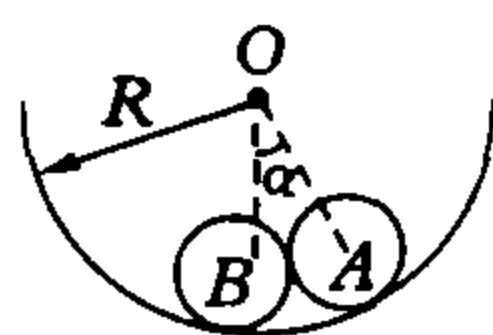


图 1-28

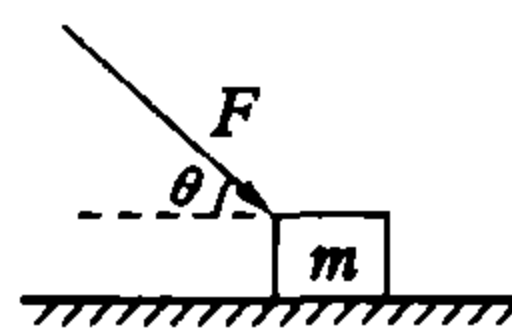


图 1-29

16. 如图 1-29 所示, 质量为 m 的物体放在水平地面上, 物体与地面间的动摩擦因数为 $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 想用大小恒定的力 F 推动物体沿水平地面滑动, 推力方向与水平面的夹角在什么范围内是可能的?

参考解答

1. A 2. A 3. D 4. B 5. A 6. A
7. C 8. C 9. B 10. A 11. AD 12. 变大
变大 不变 13. $mg \sin \theta$ 14. α 15. 几何
 $\triangle OAB$ 为正三角形, 两球三力
平衡的关系如图答 1-1, 则有

$$\frac{G_1}{\sin 60^\circ} = \frac{F_{BA}}{\sin \alpha};$$

$$\frac{G_2}{\sin 60^\circ} = \frac{F_{AB}}{\sin(60^\circ - \alpha)}.$$

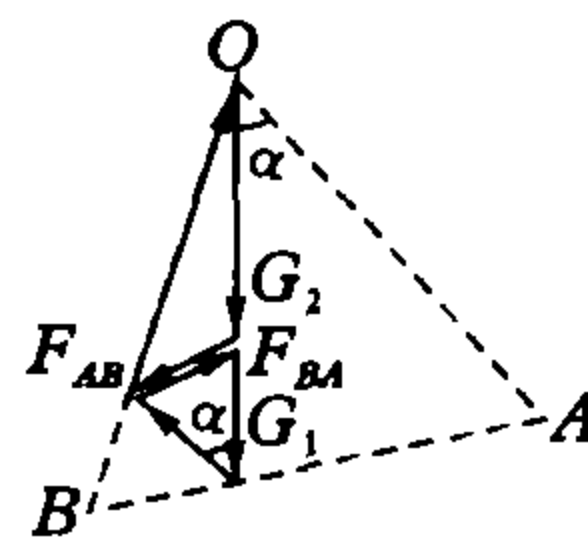
故 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}G_2}{2G_1 + G_2}.$

16. 如图答 1-2 所示, 摩擦角 $\varphi = \arctan \mu = 30^\circ$, 考虑临界情况, 重力 mg 、地面约束力及推力 F 构成闭合三角形时有

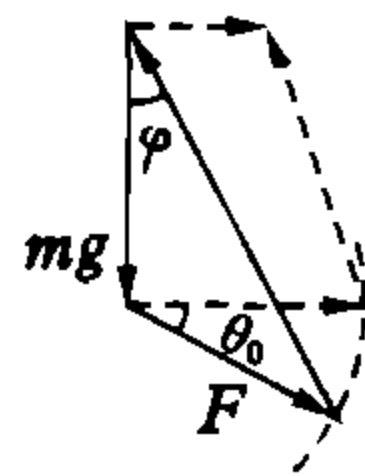
$$\frac{mg}{\sin(60^\circ - \theta_0)} = \frac{F}{\sin \varphi},$$

$$\theta_0 = 60^\circ - \arcsin \frac{mg}{2F}.$$

由图答 1-2 可知 $\theta \leq \theta_0$ 时, 物体可在地面滑动.



图答 1-1



图答 1-2

(未完待续)

专题2 点击静力学问题解答技巧

沈 晨

教你一手

物理学好学高,方法得巧得妙.解决任何问题都需要掌握方法,若方法得当,就能达到事半功倍的效果.处理静力学问题也是这样.专题1中我们曾介绍过的力三角形法、引入摩擦角与约束力概念,对处理平衡问题带来的便利已可见一斑.这里,我们将通过具体实例点击处理静力学问题之“三巧”:巧用矢量图解,巧取研究对象,巧解汇交力系.

一、巧用矢量图解

问题1 将合力 F 分解为 F_1 和 F_2 两个分力,若已知 F 的大小及 F_1 和 F_2 的夹角 θ ,且 θ 为钝角,则当 F_1 、 F_2 大小相等时,它们的大小为_____;当 F_1 有最大值时, F_2 大小为_____.

分析与解 将一个力分解成两个力,在没有附加条件时,可以有无数种解,在题给有限制条件时,也有解集.根据力合成的平行四边形定则,被分解的力与两分力之间关系是“对角线”与夹对角线的两“邻边”的关系,基于平行四边形对边平行且相等的性质,合力与它的两分力之间的关系还可以用更简单的矢量图形——三角形来表示,如图2-1所示.满足合力 F 的两分力 F_1 和 F_2 夹角 θ 且 θ 为钝角的矢量三角形是一解集,它们有公共外接圆,表示合力 F 的有向线段是该圆的一条弦,该弦所对的圆周角均为 $\pi - \theta$,如图2-2所示.

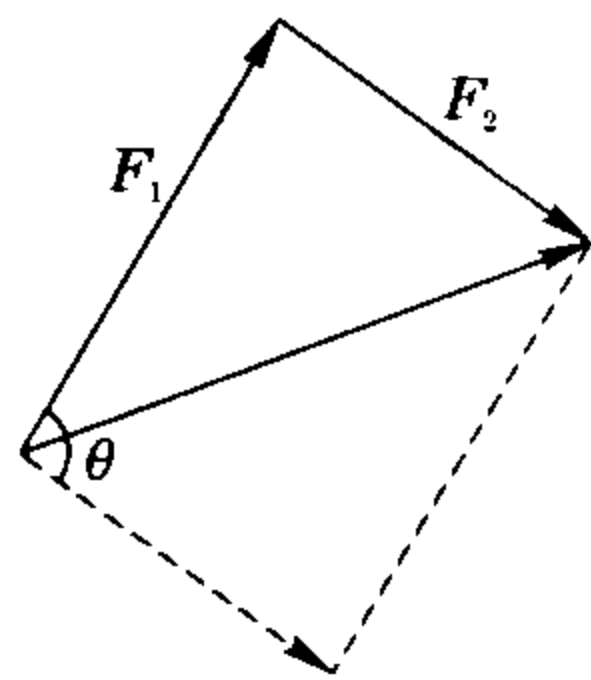


图 2-1

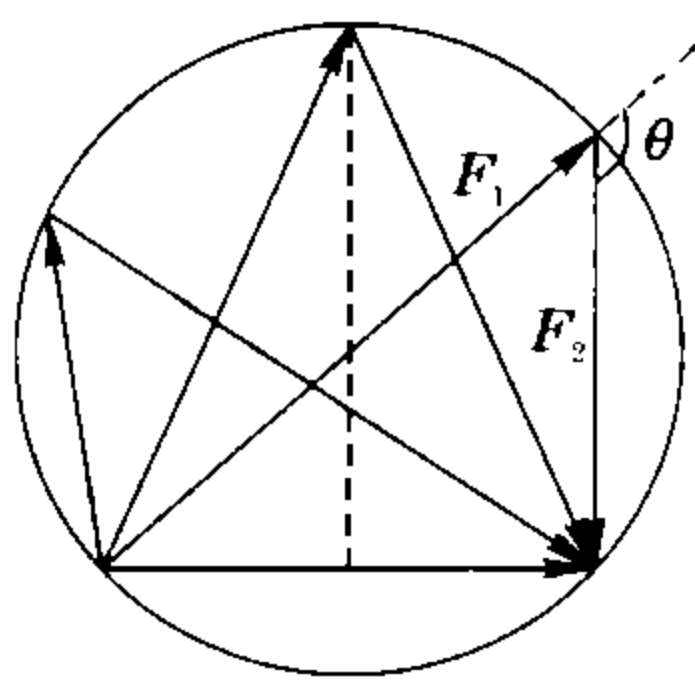


图 2-2

由图可知,当 F_1 、 F_2 大小相等时,对应的力矢量关系图为等腰三角形,表示 F_1 和 F_2 的线段为腰,底角为

$\frac{\theta}{2}$,故 F_1 和 F_2 的大小相等为 $F_1 = F_2 = \frac{F}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$.由图

还容易得知,当表示 F_1 (F_2) 的线段处于直径位置时,即表示相应的力有最大值,且三力关系矢量三角形呈直角三角形,这时 F_2 (F_1) 大小为 $F \cdot \cot(\pi - \theta) = -F \cot \theta$.

运用矢量图,我们了解了符合题目要求的力分解的全貌,并从中分检出两特殊解,解答过程非常简单清晰.

问题2 如图2-3所示,放在水平面上的质量为 m 的物体,在水平恒力 F_1 作用下,刚好做匀速直线运动.若再给物体加一个恒力 F_2 ,且使 $F_1 = F_2$ (指大小),要使物体仍按原方向做匀速直线运动,力 F_2 应沿什么方向?此时地面对物体的作用力大小如何?

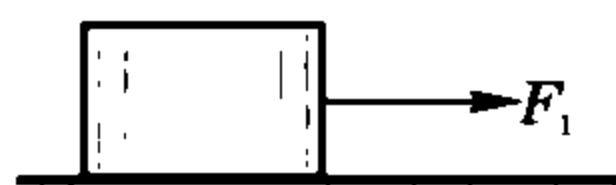


图 2-3

分析与解 首先分析未加力 F_2 时物体受力情况:物体在重力 mg 、水平恒力 F_1 以及地面作用力(支持力与滑动摩擦力的合力) F 作用下处于平衡状态,故三力矢量依次首尾相接构成闭合三角形,如图2-4(1)所示.在这个闭合三角形中,表示重力和水平恒力的有向线段大小方向都是确定的,表示地面作用力的有向线段方向总是与竖直(地面支持力作用线)成 $\tan^{-1} \mu$,但这个力的大小是可改变的.以此为基础,若要再加一个力而使物体仍处于平衡,这个力的作用线应沿 F 力,方向可与 F 力一致,如图2-4(2)所示;也可与力 F

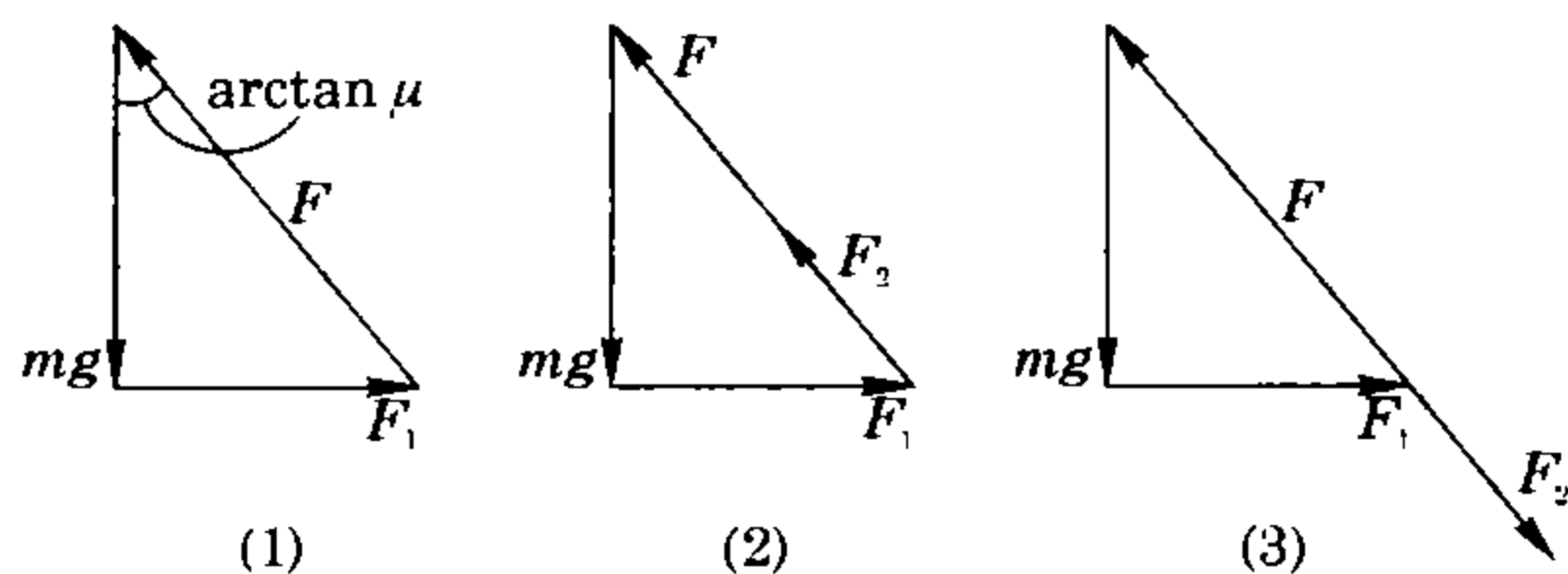


图 2-4

相反,如图2-4(3)所示,返还实体,即 F_2 力可以是与

竖直方向成 $\arctan \mu$ 斜向后上拉,也可以是和竖直方向成 $\arctan \mu$ 斜向前下推,相应地,地面对物体的作用力将减少或增加 F_2 .

由于以矢量图描述出物体平衡时的受力关系,我们理顺了如何加力的思路.

二、巧取研究对象

研究对象选取得当是成功解决问题的开端.选取研究对象一般遵循的原则是:尽量取“整体”,“化内为外”时或方程数不足时取“部分”,整分结合、方便解题.

问题 3 一个底面粗糙质量为 M 的劈放在粗糙的水平面上,劈的斜面光滑且与水平面成 30° 夹角,用一端固定的轻绳系一质量为 m 的小球,轻绳与斜面的夹角为 30° ,如图 2-5 所示.当劈静止时,绳中拉力的大小为 _____;若地面对劈的最大静摩擦力等于地面对劈的支持力的 k 倍,为使整个系统静止, k 值不能小于 _____.

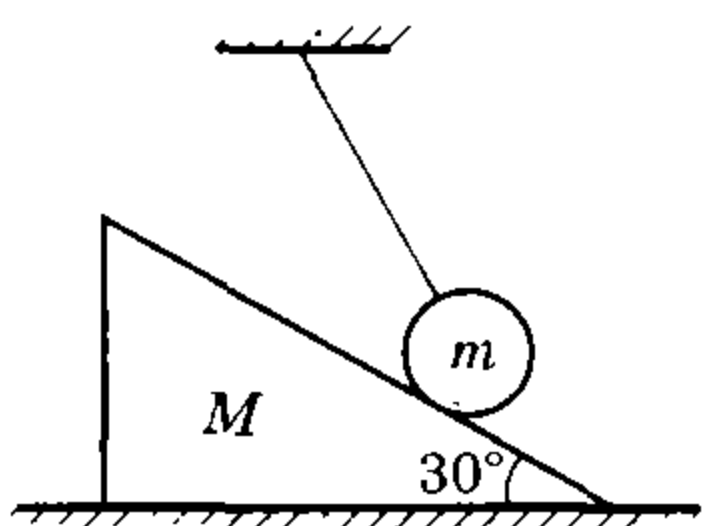


图 2-5

分析与解 这个问题中,要我们确定轻绳的拉力和地面的作用力,所以我们首先将小球及劈与轻绳、地面隔离,将小球及劈视为一体取作为研究对象.对这个整体分析受力图如图 2-6 所示,图中 F 是地面对研究对象的作用力,在 k 取最小值而整个系统静止的情况下,该力作用线与竖直方向成 $\theta = \arctan k$ 夹角;图中 F_T 是轻绳对研究对象的拉力.由于系统平衡,它们与重力 $(M+m)g$ 的合力为零,即三力矢量构成图中闭合三角形关系,根据正弦定理,力矢量满足如下方程:

$$\frac{(M+m)g}{\sin(30^\circ + \theta)} = \frac{F_T}{\sin \theta}$$

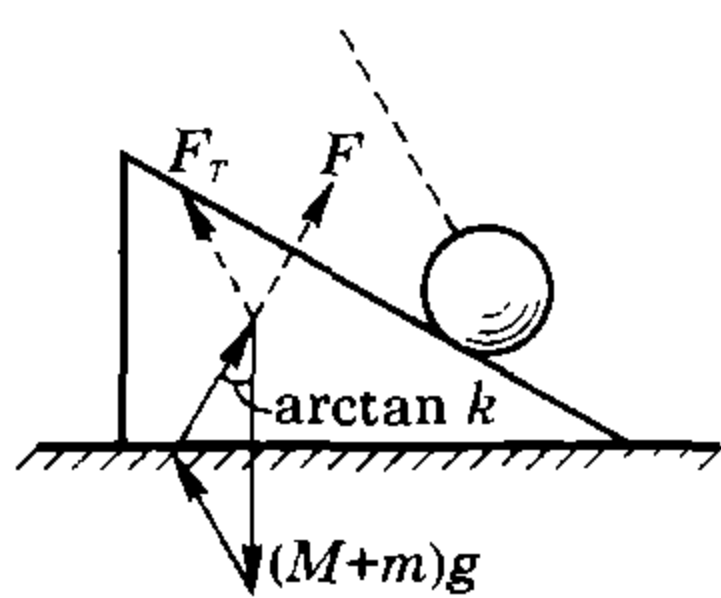


图 2-6

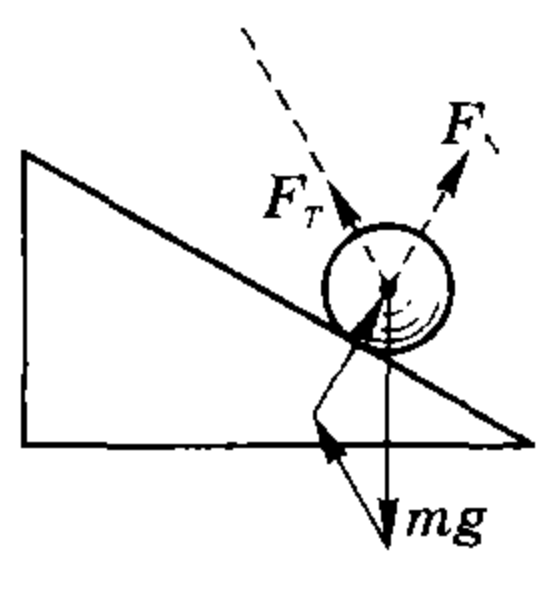


图 2-7

在上列方程中包含有两个未知量,所以我们需另取研究对象,以得到新的物理关系方程.我们可取小球为隔离体,分析它的受力如图 2-7 所示,由于小球平衡而得知其所受重力 mg 、斜面支持力 F_N 与轻绳拉力 F_T 构成图中矢量三角形关系,注意到题给条件,该三角形是底角 30° 的等腰三角形,由此又有方程

$$F_T = \frac{mg}{2\cos 30^\circ}$$

解这个方程可得轻绳拉力 $F_T = \frac{\sqrt{3}}{3}mg$;将此结果

代入上一方程,可得

$$\frac{M+m}{\sin(\theta+30^\circ)} = \frac{m}{\sqrt{3}\sin \theta}$$

$$\frac{\sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta}{\sqrt{3}\sin \theta} = 2 \frac{M+m}{m}, \cot \theta = \frac{2M+m}{m}\sqrt{3}$$

由于 $\theta = \arctan k$,于是可得

$$k = \frac{\sqrt{3}m}{6M+3m}$$

问题 4 如图 2-8 所示,一长 L 、质量均匀为 M 的链条套在一表面光滑、顶角为 α 的圆锥上,当链条在圆锥面上静止时,链条中的张力是多少?

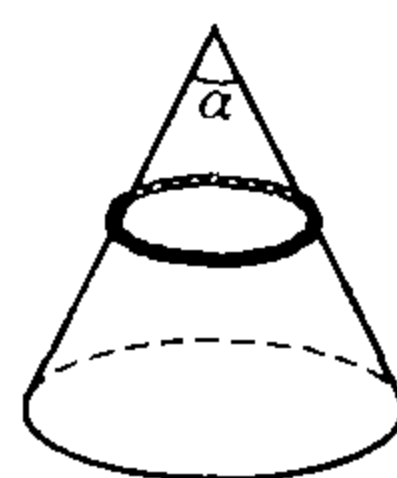


图 2-8

分析与解 这个问题要求链条中的张力,由于质量均匀且链条水平静止,链条的受力具有旋转对称性.如果我们以整个链条为研究对象,则链条各部分间的张力属于内力,无法求解.为了将内力转化为外力,我们可以在链条中隔离出任一微元作为研究对象,这时,链条其他部分对微元的拉力就成为外力了,于是可根据平衡规律去求解.

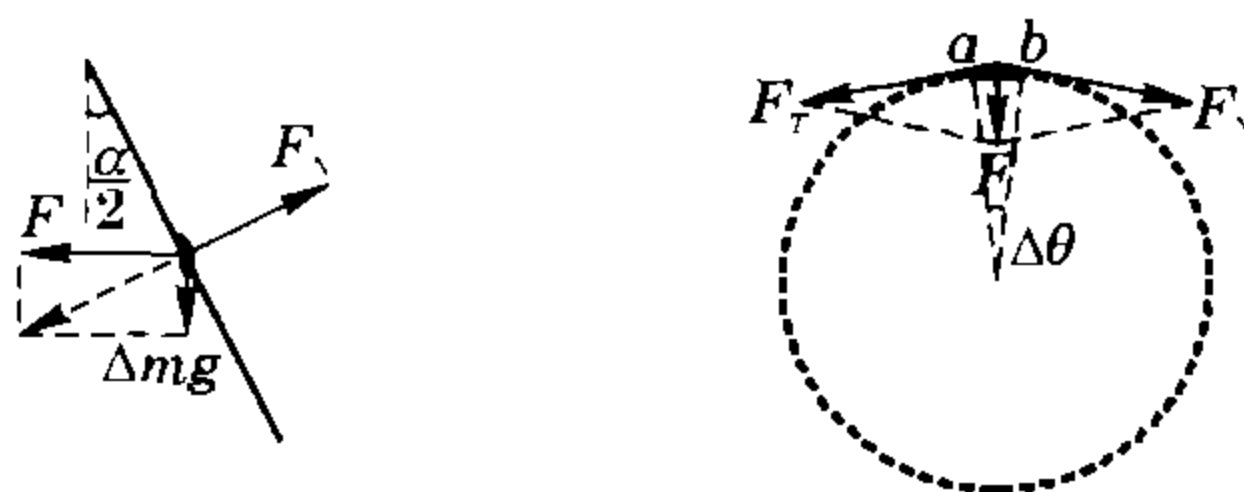


图 2-9

如图 2-9 所示,将链条均匀细分,取出链条微元 ab 研究,它所对的圆心角 $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n} \rightarrow 0$,微元受到的力有:重力 $\Delta mg = \frac{Mg}{n}$;两边链条对它的张力 F_T ,它们大小相等,方向各沿 a 、 b 点切线,合力为 F ;圆锥面支持力 F_N . 因为 $\Delta\theta$ 很小, $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$,两边链条对 ab 的张力的合力 $F = 2F_T \cdot \frac{\Delta\theta}{2}$. 又因为链条微元平衡,故有 $F = \Delta mg \cot \frac{\alpha}{2}$,于是有

$$2F_T \cdot \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{M}{n}g \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$F_T = \frac{1}{2\pi} \cdot Mg \cot \frac{\alpha}{2}$$

三、巧解汇交力系平衡

问题 5 如图 2-10 所示,光滑半球壳直径为 a ,与一光滑竖直墙面相切,一根均匀直棒 AB 与水平方

向成 60° 角靠墙静止, 求棒长.

分析与解 本题中均匀棒所受三力: 重力 G 、墙面支持力 F_A 、球壳支持力 F_B 互成角度, 作用在杆上不同点, 但由于三力共同作用效果是使杆处于静止, 故此三力合力必为零, 等效于三个共点力, 故三力作用线汇交于一点, 即如图 2-11 中 D 点, 三力汇交的关系制约了杆的长度. 现在我们利用图 2-11 所示关系来求出杆 AB 长度 L .

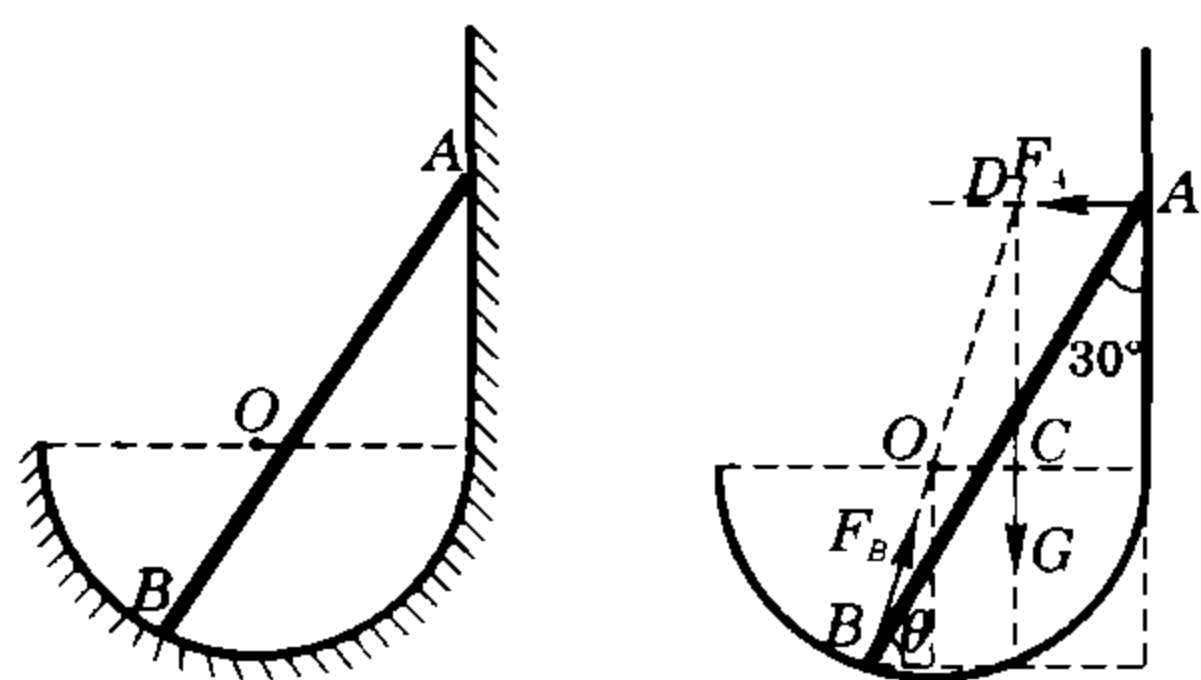


图 2-10

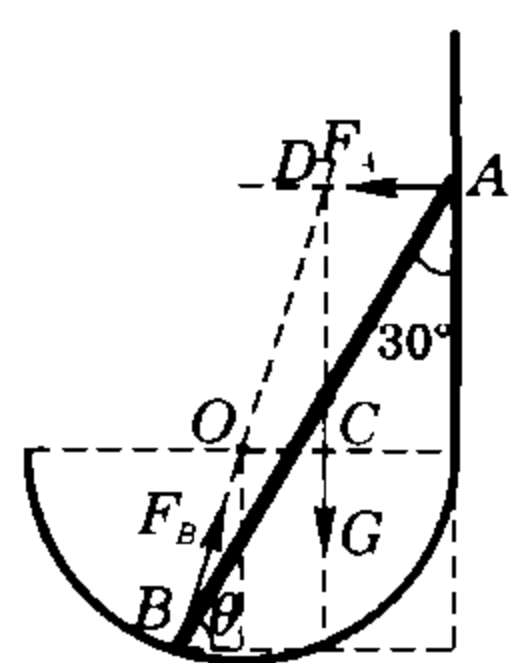


图 2-11

设 F_B 作用线与水平夹角为 θ , 在 $\triangle BCD$ 中运用正弦定理得

$$\frac{L/2}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{L/2 \cdot \sin 60^\circ}{\sin(\theta - 60^\circ)},$$

由此可解得

$$\theta = \arctan 2\sqrt{3}. \text{ 又 } \cos \theta = \frac{L \cos 60^\circ - \frac{a}{2}}{a/2} = \frac{L}{a} - 1,$$

于是求得
$$L = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)a.$$

问题 6 如图 2-12 所示, 在墙角处有一根质量为 m 的均匀绳, 一端悬于天花板上的 A 点, 另一端悬于竖直墙壁上的 B 点, 平衡后最低点为 C , 测得绳长 $AC = 2CB$, 且绳 B 点附近的切线与竖直墙成 α 角, 则绳在最低点 C 处的张力和在 A 处的张力各多大?

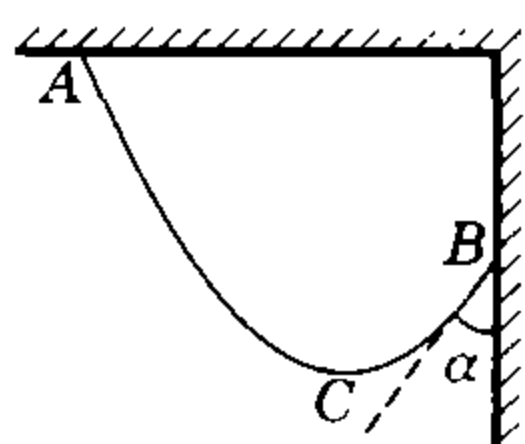


图 2-12

分析与解 我们要综合运用三项技巧求解本题. 首先要注意, 由于绳各部分受到重力而悬垂, 因而绳上各处张力并不相同. 为了求出绳之 C 处张力, 应“化内为外”从 C 处将绳隔离成 AC 、 BC 两段, 若选取 BC 段为研究对象, 则除受重力外, BC 段的 C 端受到 AC 段绳的拉力 F_C , 方向水平向左; B 端受到拉力 F_B , 方向与竖直成 α 角. 由于 BC 绳静止, 三力汇交, 合力为零, 构成如图 2-13(1) 所示矢量三角形关系, 由图可得

$$F_C = \frac{mg}{3} \tan \alpha.$$

为了求 A 端绳的张力, 我们应另取 AC 段绳为研

究对象, 分析受力如图 2-13(2) 所示, 其中重力大小为 $\frac{2mg}{3}$, C 端拉力已求知, 三力汇交构成闭合直角三角形, 由矢量图解得

$$F_A = \sqrt{F_C^2 + \left(\frac{2mg}{3}\right)^2} = \frac{mg}{3} \sqrt{\tan^2 \alpha + 4}.$$

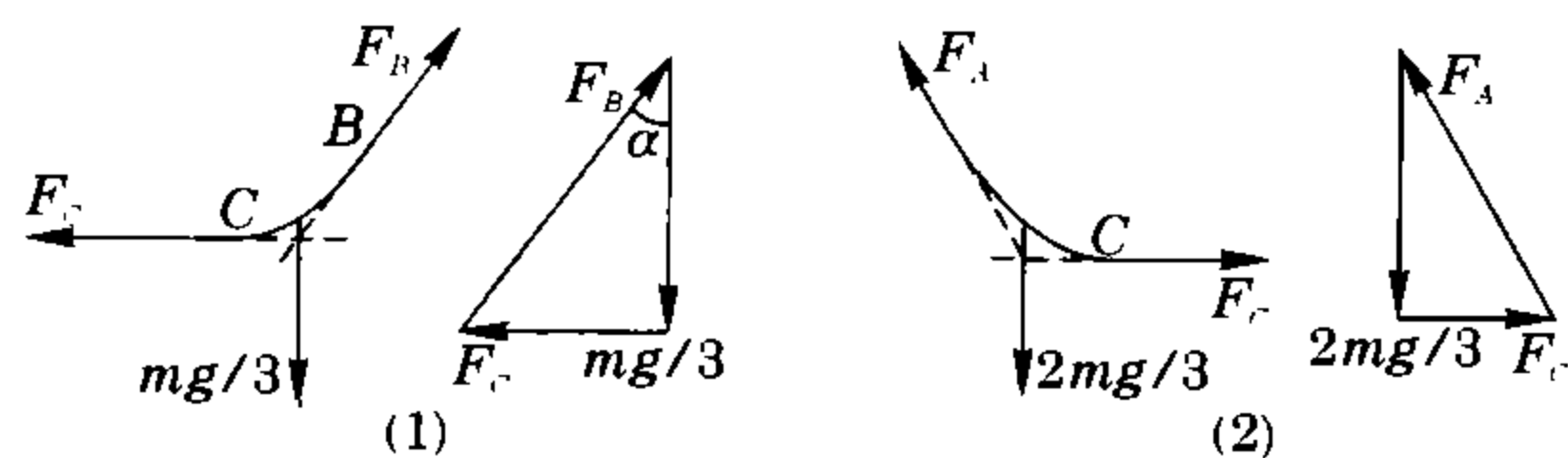


图 2-13

小球身事

1. 如图 2-14 所示, 有一轻杆 AO 竖直放在粗糙的水平地面上, A 端用细绳系住, 细绳另一端固定于地面上 B 点, 已知 $\theta = 30^\circ$, 若在 AO 杆中点施一大小为 F 的水平力, 使杆处于静止状态, 这时地面 O 端的作用力大小为 _____, 方向 _____.

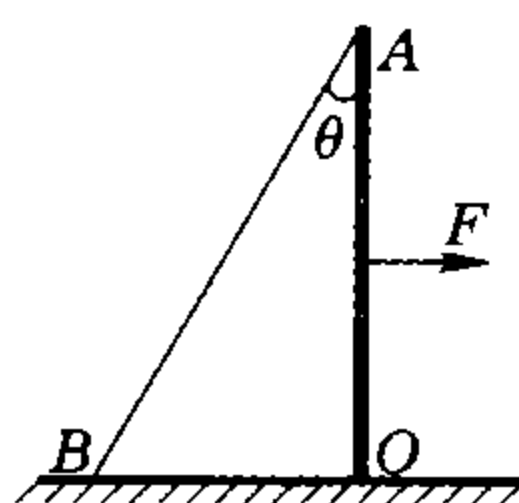


图 2-14

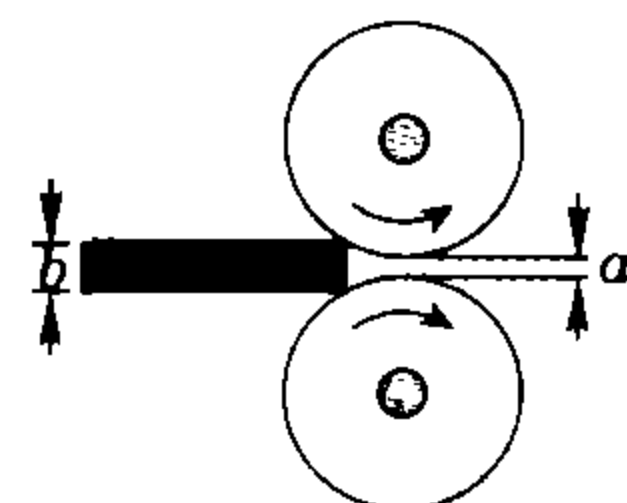


图 2-15

2. 压延机由两轮构成, 两轮直径各为 $d = 50$ cm, 两轮间的间隙为 $a = 0.5$ cm, 两轮按反方向转动, 如图 2-15 中箭头所示. 已知烧红的铁板与铸铁轮之间的摩擦系数 $\mu = 0.1$. 问能压延的铁板厚度是多少?

3. 一均匀光滑的棒, 长 l , 重 G , 静止在半径为 R 的半球形光滑碗内, 如图 2-16 所示, $R < \frac{l}{2} < 2R$. 假如 θ 为平衡时的角度, F 为碗边作用于棒上的力. 求证:

$$(1) F = \frac{l}{4R} G; \quad (2) \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{l}{4R}.$$

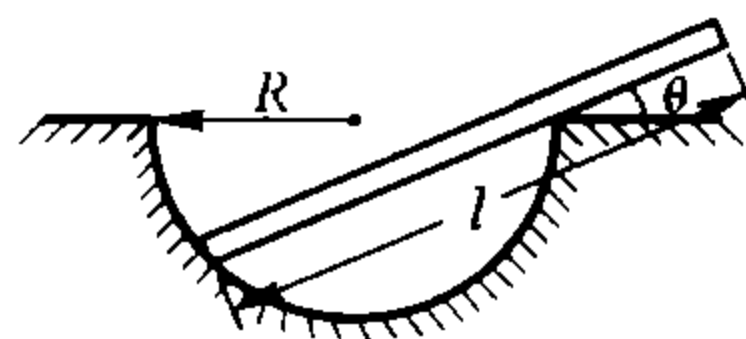


图 2-16

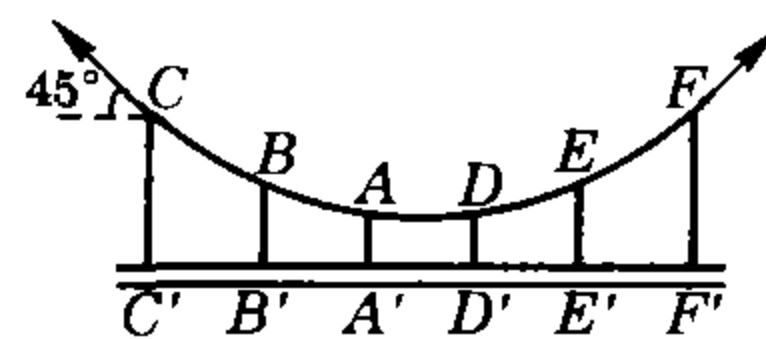


图 2-17

4. 一吊桥由六对钢杆悬吊着, 六对钢杆在桥面上分列两排, 其上端挂在两根钢绳上, 如图 2-17 所示为一侧截面图. 已知图中相邻两钢杆间距离均为 9 m, 靠桥面中心的钢杆长度为 2 m (即 $AA' = DD' = 2$ m), $BB' = EE'$, $CC' = FF'$, 又已知两端钢绳与水平成 45°

角,若不计钢杆自重,为使每根钢杆承受负荷相同,试求每根钢杆长度应各为多少米?

5. 如图 2-18 所示,一根重量为 G 的绳子,两端固定在高度相同的两个钉子上,在其最低点再挂上一重物. 设 α, β 分别是绳子在最低点和悬点处的切线与竖直方向的夹角,试求所挂物体的重量.

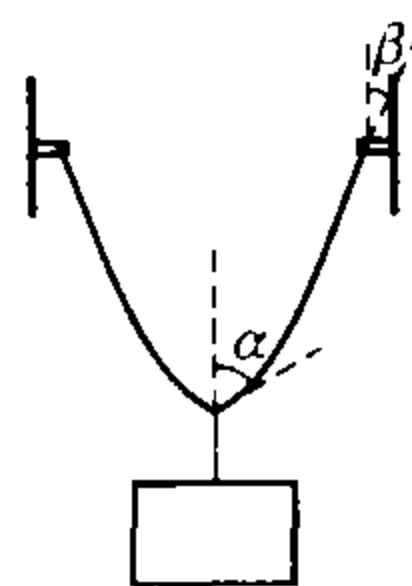


图 2-18

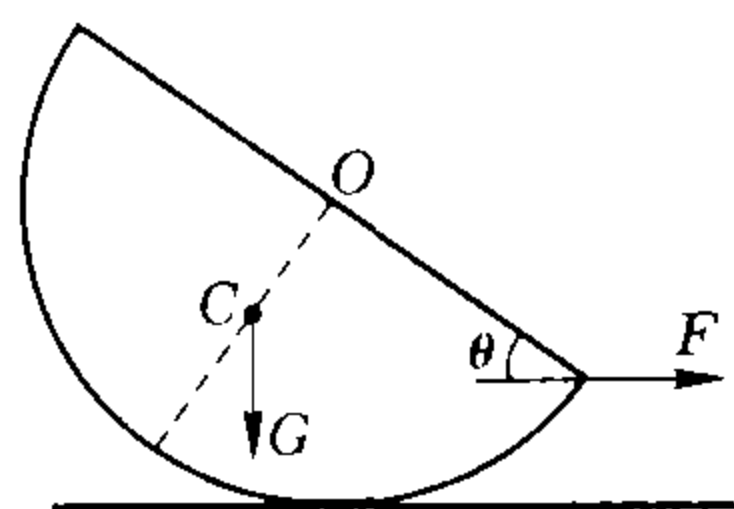


图 2-19

6. 如图 2-19,半圆柱体重 G ,重心 C 到圆心 O 的距离为 $a = \frac{4R}{3\pi}$,其中 R 为圆柱体半径. 如半圆柱体与水平面间的摩擦因数为 μ ,求半圆柱体被拉动时所偏过的角度 θ .

7. 如图 2-20 所示,一光滑三角支架,顶角为 $\theta = 45^\circ$,在 AB 和 AC 两光滑杆上分别套有铜环,两铜环间有细线相连,释放两环,当两环平衡时,细线与杆 AB 夹角 60° ,试求两环质量比 $\frac{M}{m}$.

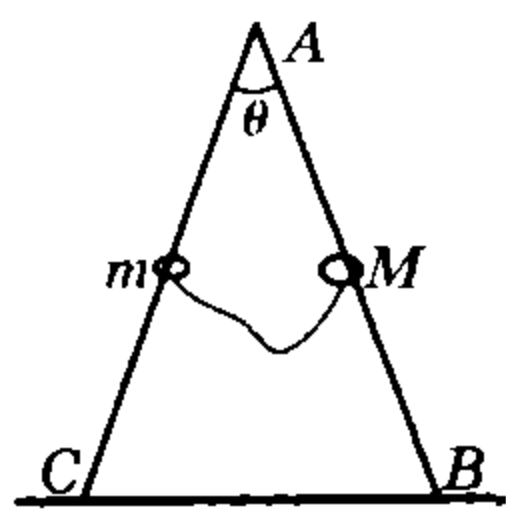


图 2-20

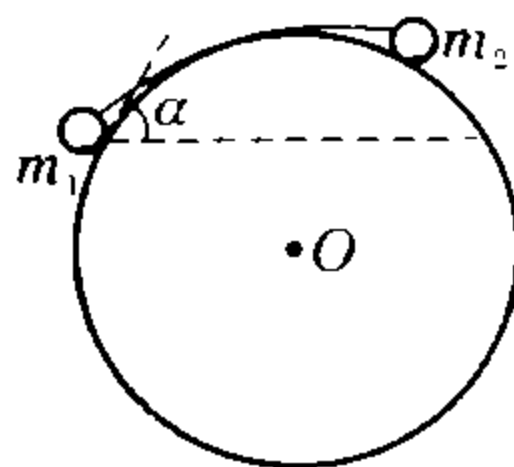


图 2-21

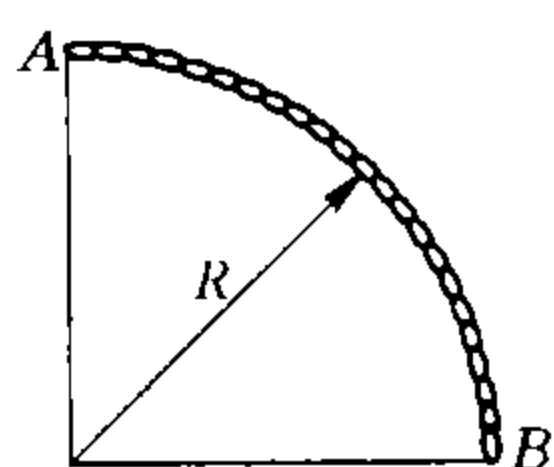


图 2-22

8. 如图 2-21 所示,用细绳拴住两个质量为 m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) 的质点,放在表面光滑的圆柱面上,圆柱的轴是水平的,绳长为圆柱横截面周长的 $\frac{1}{4}$. 若绳的质量及摩擦均不计,系统静止时, m_1 处细绳与水平夹角 α 是多少?

9. 如图 2-22 所示,一个半径为 R 的 $\frac{1}{4}$ 光滑圆柱面放置在水平面上. 柱面上置一线密度为 λ 的光滑均匀铁链,其一端固定在柱面顶端 A ,另一端 B 恰与水平面相切,试求铁链 A 端所受拉力以及均匀铁链的重心位置.

10. 如图 2-23 所示,对均匀细杆的一端施力 F ,力的方向垂直于杆. 要将杆从地板上慢慢地无滑动地抬起,试求杆与地面间的最小摩擦因数.

11. 如图 2-24 所示,两个质量相等而粗糙程度不同的物体 m_1 和 m_2 分别固定在一细棒的两端,放在一

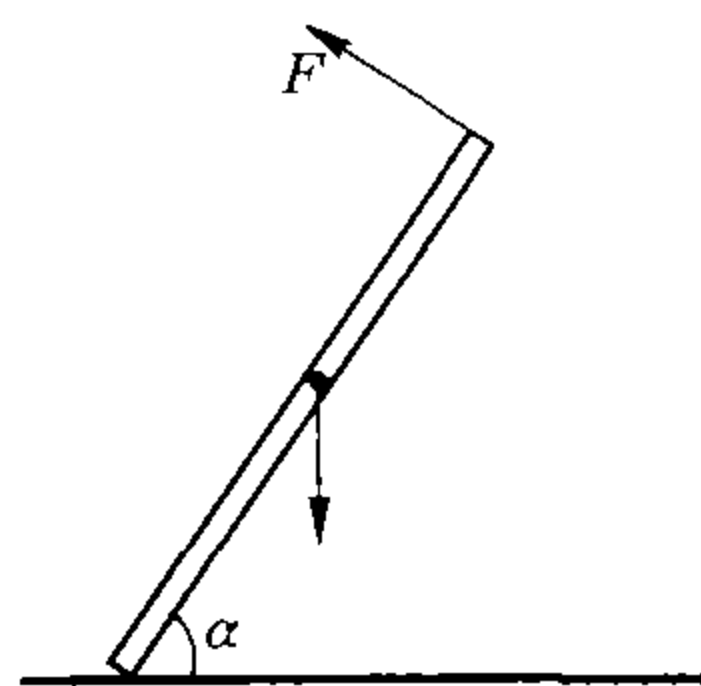


图 2-23

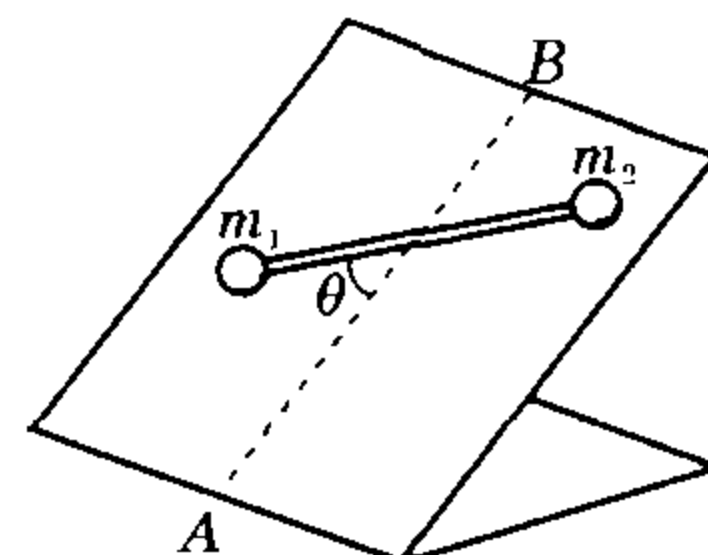


图 2-24

倾角为 α 的斜面上,设 m_1 和 m_2 与斜面的摩擦因数为 μ_1 和 μ_2 ,并满足 $\tan \alpha = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$,细棒的质量不计,与斜面不接触,试求两物体同时有最大静摩擦力时棒与斜面上最大倾斜线 AB 的夹角 θ .

参考解答

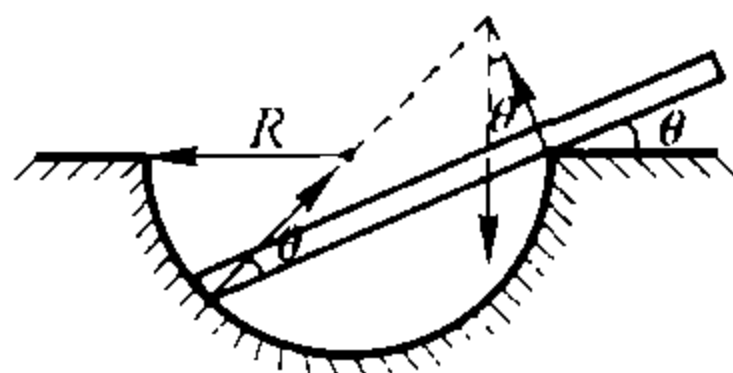
1. F 与 F 成 120°

2. 铁板能前进,应有 $\mu F_N \cos \theta \geq F_N \sin \theta$,而 $\tan \theta$

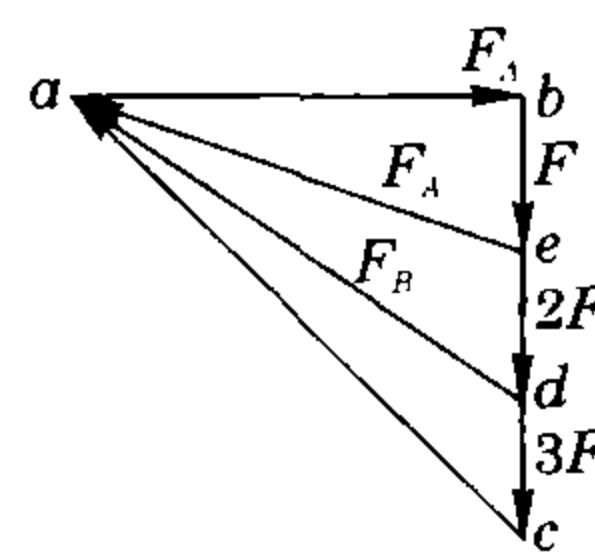
$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - \frac{b-a}{2}\right)^2} b^2}{\frac{d}{2} - \frac{b-a}{2}}, \text{解得 } b \approx 0.75 \text{ cm}$$

3. (1) 对杆上与碗内接触的 A 点,力矩平衡: $F \cdot \overline{AB} = G \cdot \frac{1}{2} \cos \theta$,而 $\overline{AB} = 2R \cos \theta$ 可证 (2) 如答图 2-1 所示,由杆三力平衡汇交及几何关系得

$$\frac{2R \cos \theta - \frac{l}{2}}{\sin \theta} = \frac{\frac{l}{2}}{\sin(90^\circ - 2\theta)}$$



答图 2-1



答图 2-2

4. 设每杆上承力 F ,绳的 AC 段、 AB 段及 A 处受力依次如答图 2-2 中矢量三角形 abc, abd, abe ,由图知, BC 上力 F_B 与水平夹角 $\alpha = \arctan \frac{2}{3}$, AB 上力 F_A 与水平夹角 $\beta = \arctan \frac{1}{3}$,则杆 BB' 比 AA' 长出 $9 \times \frac{1}{3} = 3 \text{ m}$;杆 CC' 比 BB' 长出 $9 \times \frac{2}{3} = 6 \text{ m}$;故 $BB' = 5 \text{ m}$; $BB' = 11 \text{ m}$.

5. 如答图 2-3,分解 G_0 得:

$$F_C = \frac{G_0}{2 \cos \alpha};$$

以半边绳为研究对象,三力汇交,有

$$\frac{G_0}{2\cos\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{G}{2\sin(\alpha-\beta)},$$

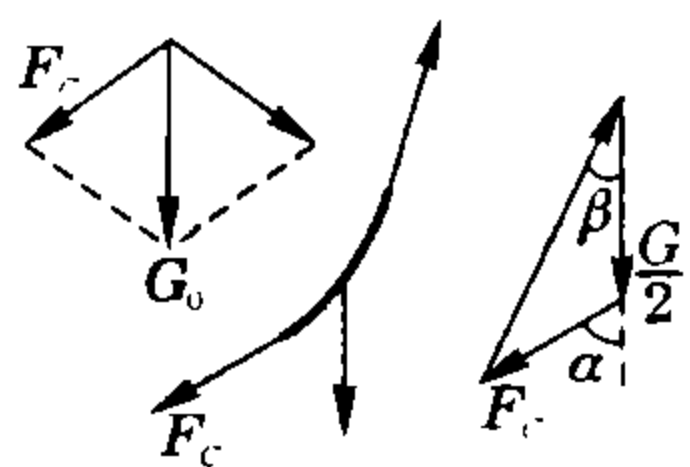
于是可得 $G_0 = \frac{G}{\tan\alpha \cot\beta - 1}$.

6. 以半圆柱与地切线为轴, 有

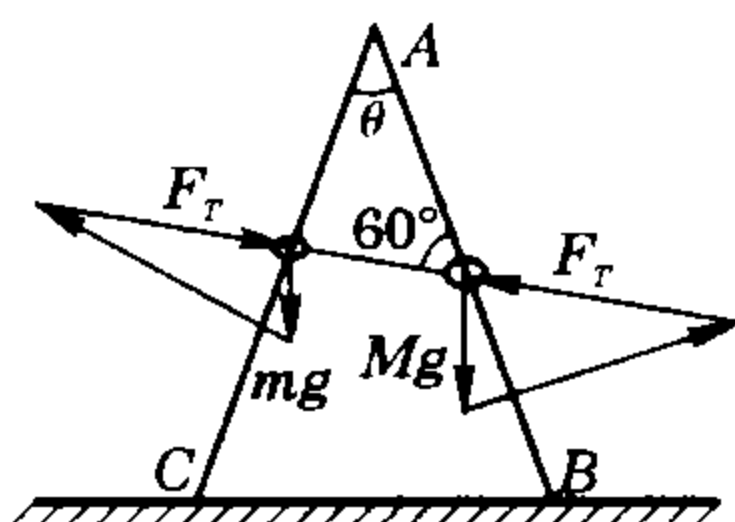
$$FR(1 - \sin\theta) = Gasin\theta;$$

由平衡得 G 、 F 及地面作用力(摩擦力与支持力之合力)三力合力为零, 有

$$\mu = \tan\varphi = \frac{F}{G}, \sin\theta\alpha = \frac{3\mu\pi}{3\mu\pi + 4}.$$



答图 2-3



答图 2-4

7. 平衡时, 两环所受绳拉力等值反向沿绳, 杆支持力与各杆垂直, 两环均三力平衡, 由答图 2-4, 对环 M 有

$$\frac{F_T}{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2})} = \frac{Mg}{\sin 30^\circ};$$

对环 m 有

$$\frac{F_T}{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2})} = \frac{mg}{\sin(60^\circ + \theta - 90^\circ)},$$

解得

$$\frac{M}{m} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

8. 对 m_1 : $F_T = m_1 g \sin\alpha$;

对 m_2 : $F_T = m_2 g \sin\beta$;

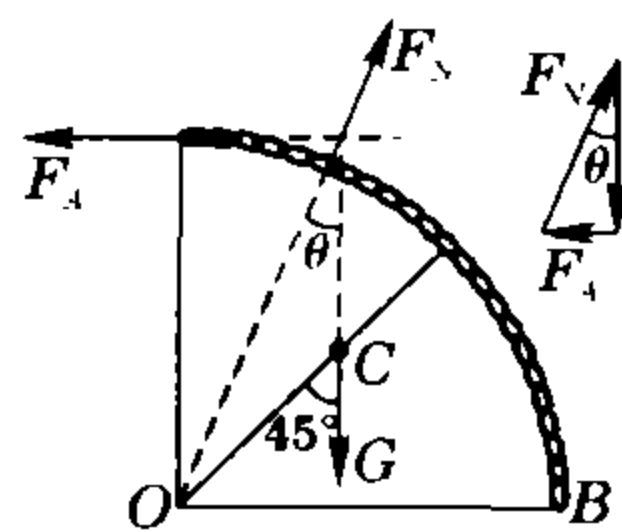
而 $\alpha + \beta = 90^\circ$, 得 $\alpha = \arctan \frac{m_2}{m_1}$.

9. 由 $F_A \cdot \Delta x = \lambda \cdot \Delta x g R$ 得 $F_A = \lambda g R$. 对链条, 重力、 A 处水平拉力与柱面支持力三力平衡汇交如答图 2-5, 有

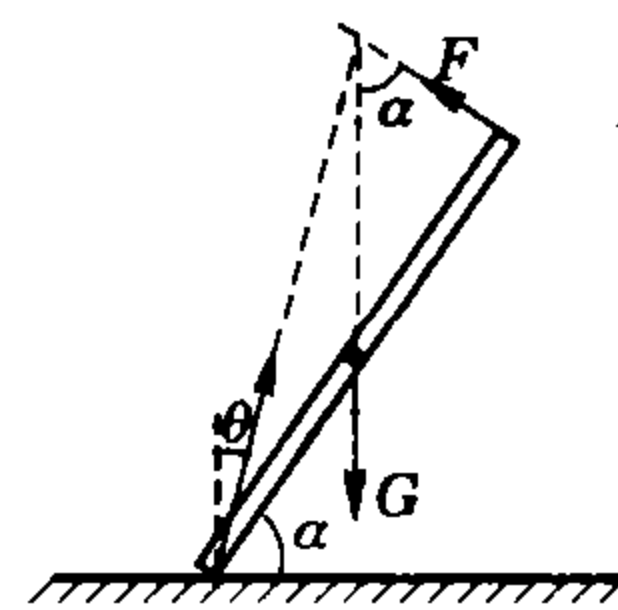
$$\frac{OC}{\sin\theta} = \frac{R}{\cos\theta \cdot \sin 45^\circ};$$

又 $\tan\theta = \frac{F_A}{G}$, 其中 $G = \frac{\lambda\pi R}{2}$.

得重心 C 距轴 O 为 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}R$.



答图 2-5



答图 2-6

10. 杆平衡时, 所受地面约束力、重力及 F 力汇交, 力矢量关系如答图 2-6, 则

$$\frac{l}{2} \cot\alpha = l \cot(\alpha + \theta).$$

其中 $\alpha = \arctan\mu$, 整理得

$$\cot\theta = 2\tan\alpha + \cot\alpha,$$

当 $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

$$\cot\theta = 2\sqrt{2}, \mu_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

11. 两物体此时受力关系如答图 2-7 所示, 设 $c = mg \sin\alpha$, $a = \mu_1 mg \cos\alpha$, $b = \mu_2 mg \cos\alpha$, φ 为上方物体摩擦力与下滑力(沿 AB)夹角, 由余弦定理, 有

$$\cos\varphi = \frac{4c^2 + a^2 - b^2}{4ac},$$

则 $\sin\varphi = \frac{\sqrt{(4ac)^2 - (4c^2 + a^2 - b^2)^2}}{4ac}$;

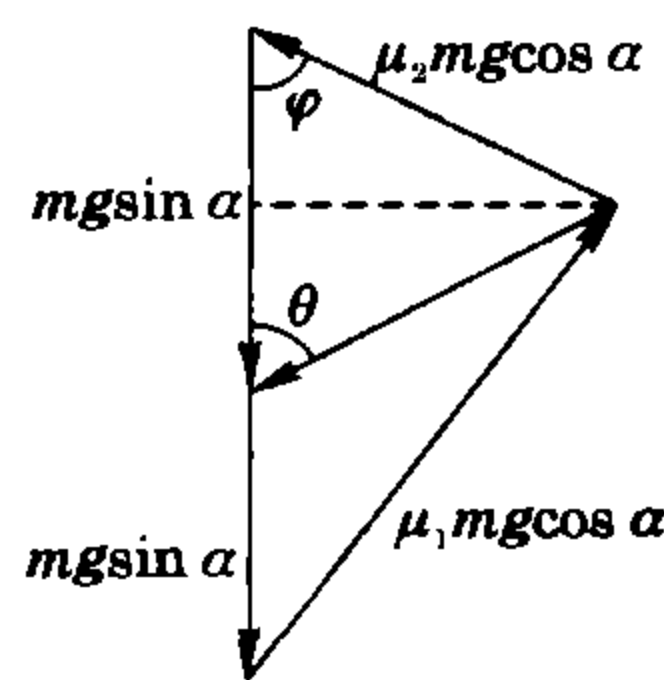
又由余弦定理 $(\frac{a \sin\theta}{\sin\theta})^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi$

$$\text{得 } \sin^2\theta = \frac{a^2 \sin^2\varphi}{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\varphi} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{8c^2(a^2 + b^2 - 2c^2)},$$

$$\cos\theta = \frac{(a^2 - b^2)}{\sqrt{8c^2(a^2 + b^2 - 2c^2)}}, \text{ 将 } a, b, c \text{ 及 } \tan\alpha = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$$

代入得

$$\theta = \arccos \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\sqrt{2\mu_1\mu_2}}.$$



答图 2-7

(上接第 36 面)

解 这是一个经常出现的问题. 该题中小球 A 及桌面距地面的高度, 小球 A 距桌面的距离均未知, 若采用第一种表达式列式, 则式子过于复杂(以地面或桌面为零势能参考面). 若采用第二种表达式, 不必考虑参考面的选取, 由机械能守恒定律得

$$2mg \frac{\pi R}{2} - mgR = \frac{1}{2}(2m+m)v^2.$$

可见, 列出的式子很简单, 当然, 计算量就小, 这样还能减小因大量的计算过程出错.

同一个物理规律, 其表达式可能有多个. 我们在教学中应让学生注意在不同的情况下选取不同的表达式, 这样会使解题的过程变得简捷一些.

竞赛辅导

专题3 平衡问题探骊

沈晨

教你一手

物体平衡的种类依稍微偏离平衡位置后是否能在原位置保持平衡而分为稳定平衡与不稳定平衡,能在随机位置保持平衡的则称随遇平衡.控制物体的不同平衡态势,增大物体平衡的稳度是有趣又有实际意义的事.

怎样甄别物体平衡的种类呢?以处于重力场的物体在重力和支持力作用下的平衡为例,一般操作步骤是:

1. 设计一个元过程,即设想对物体施一微扰,使之稍偏离原平衡位置;
2. 从能量角度考察受扰动后物体质心位置的高度变化,根据质心是升高、降低还是不变来判断物体原本是稳定平衡、不稳定平衡或是随遇平衡;或从受力角度考察受扰动后重力作用点的侧移量,即重力对扰动后新支点的力臂,从而判断物体原来的平衡态属于哪一种.这里,仅是问题切入的视角不同,但殊途同归,结论是一致的,故可依问题的具体情况,择简而从;
3. 为比较扰动前后物体的受力与态势,要做出直观明晰的图示;由于对微扰元过程作的是“低细节”的描述,故常需运用合理的近似这一数学处理手段.

例1 如图3-1所示,一个熟鸡蛋的圆、尖两端的曲率半径分别为 a, b ,且长轴的长度为 l ,蛋圆的一端可以在不光滑的水平面上稳定直立.求蛋尖的一端可以在一个半球形的碗内稳定地直立时,碗的半径 r 需满足的条件.

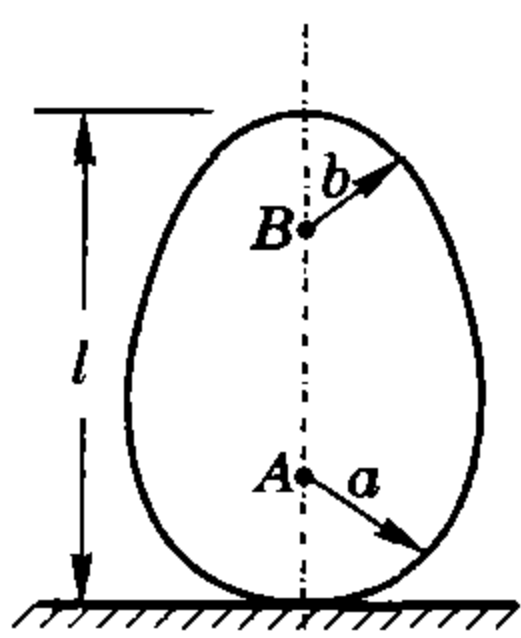


图3-1

分析与解 因蛋圆一端在水平面上可处于稳定平衡态,可知蛋的质心位置 C 应在图3-1中 A 点之下,设其距蛋尖顶点为 R ,则 $R > l - a$.现将蛋尖端直立于半径为 r 的球形碗底 M 点处,如图3-2中实线所示,设想当蛋尖外缘沿碗偏转过一小段弧长 \widehat{MN} ,则蛋在图3-2中虚

线所示位置.该图中, C 为蛋的质心,偏转后的质心位置在 C' , O 为碗球心, α, β 分别是弧长 \widehat{MN} 所对蛋尖圆和碗球的圆心角,即 $\widehat{MN} = r\beta = b\alpha$,其他几何关系如图3-2所示.

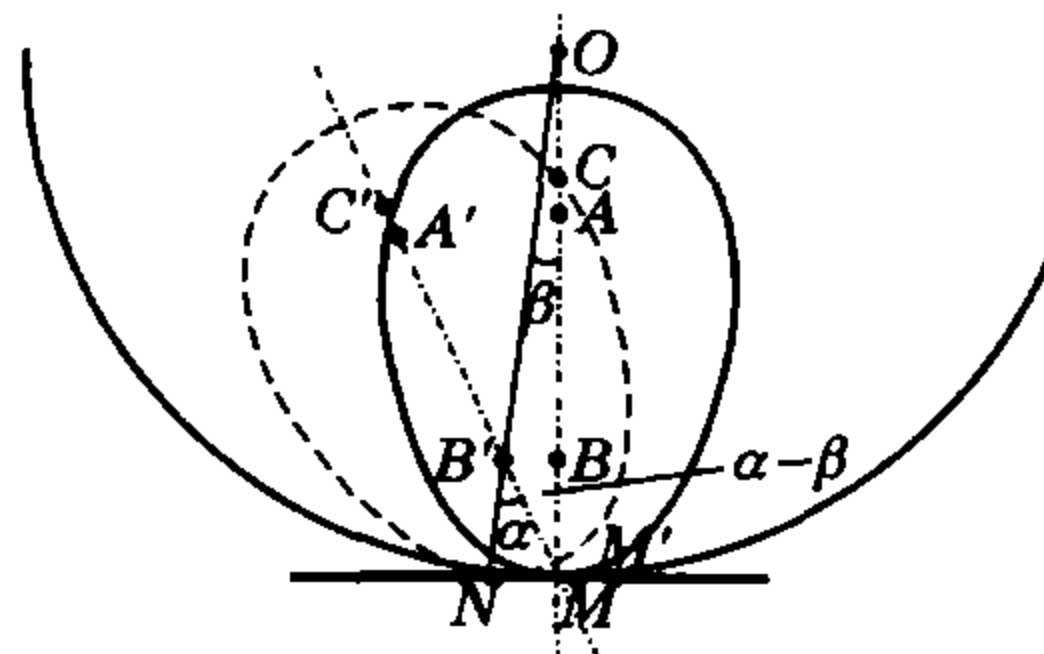


图3-2

解法一 考察质心位置高低变化

要满足蛋尖端在球形碗内有稳定平衡,应证明图3-2中的 C' 位置高于 C 位置,即需满足

$$C'M' \cos(\alpha - \beta) + NM \frac{\alpha - \beta}{2} > CM,$$

在微扰的情况下, α, β 都是小量,故有如下很好的近似

$$R \cos(\alpha - \beta) + r\beta \frac{\alpha - \beta}{2} > R,$$

$$\text{即 } r\beta \frac{\alpha - \beta}{2} > R[1 - \cos(\alpha - \beta)] = 2R \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

利用小角度的情况下, $\sin \alpha \approx \alpha, \sin \beta \approx \beta$,且注意到 $r\beta = b\alpha$,则有

$$r\beta \frac{\alpha - \beta}{2} > 2R \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2, \text{整理得 } r < \frac{bR}{R - b}.$$

由题给条件知 $R > l - a$,故有

$$r < \frac{bR}{R - b} = \frac{b}{1 - \frac{b}{R}} < \frac{b}{1 - \frac{b}{l - a}} = \frac{b(l - a)}{l - a - b}.$$

这就是说,碗的球半径尺寸不能太大,应满足条件为 $r < \frac{b(l - a)}{l - a - b}$.

解法二 考察质心位置侧移量

欲满足蛋保持稳定平衡的条件,重力对支持点 N 的力矩应可使蛋返回原处,故应有

$$C'M' \sin(\alpha - \beta) < MN,$$

即

$$R(\alpha - \beta) < r\beta.$$

将 $R > l - a, r\beta = b\alpha$ 代入上式整理即得

$$r < \frac{b(l-a)}{l-a-b}$$

例 2 如图 3-3 所示, 杆长 $l=a+b$, 质心在 C 点, 杆的 A, B 两端分别支于互相垂直的两个光滑斜面上而处于平衡. 试问在图示位置时, 此杆的平衡是稳定平衡、随遇平衡还是不稳定平衡? 并证明之.

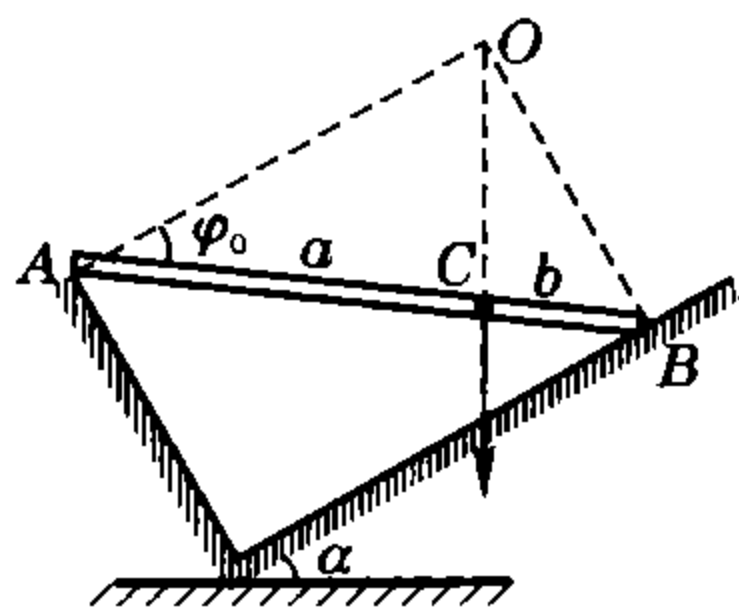


图 3-3

分析与解 杆 AB 受两斜面支持力及重力这三个不共点的力作用, 我们常称之为“三力杆”. 非平行力作用下的“三力杆”要处于平衡, 三力作用线必汇交, 在图 3-3 中, 三力交汇点 O 与杆 AB 的质心 C 连线是竖直的. 我们来研究一下杆平衡时的几何位置有什么特点: 设右斜面与水平成 α 角, 杆与右斜面成 φ_0 角, 在图 3-3 的 $\triangle BOC$ 中, 根据正弦定理有 $\frac{b}{\sin \alpha} =$

$\frac{(a+b)\sin \varphi_0}{\sin(\varphi_0 + 90^\circ - \alpha)}$, 由此式求得杆平衡时与右斜面夹角满足 $\tan \varphi_0 = \frac{b \cos \alpha}{a \sin \alpha}$. 下面来证明这根“偏心杆”在此位置的平衡是不稳定平衡.

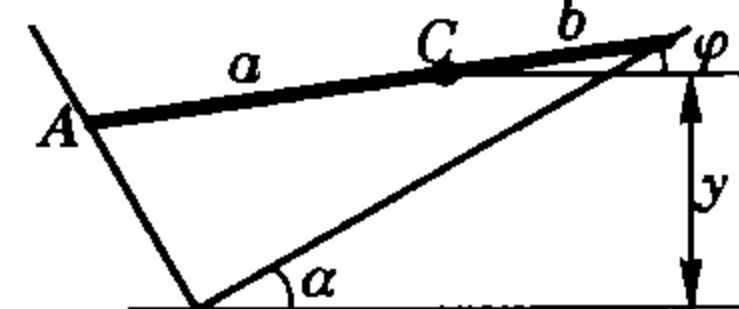


图 3-4

证法一 考察质心位置高低. 如图 3-4 所示, 当杆与斜面夹角为 φ 时, 质心 C 的高度以 y 表示, 则

$$\begin{aligned} y &= (a+b)\cos \varphi \sin \alpha - b \sin(\alpha - \varphi) \\ &= a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos \alpha \sin \varphi \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \cos\left(\varphi - \arctan \frac{b \cos \alpha}{a \sin \alpha}\right). \end{aligned}$$

即 $y = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \cos(\varphi - \varphi_0)$, 显见, 当 $\varphi = \varphi_0$ 时, 杆质心 C 的高度有最大值 $y = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$, 杆的位置稍有偏离, 质心高度就降低, 故属于不稳定平衡.

证法二 考察质心对杆的瞬时转动中心的侧移量.

如图 3-5 所示, 当杆的两端沿斜面移动时, 整根杆的转动中心也在变化. $\varphi = \varphi_0$ 时, O 为杆的瞬时转动中心, 重力作用线过 O 点, 力矩为零; 当杆转过一小角度, $\varphi = \varphi_1$ 时, 转动中心变成 O' , 质心位置为 C' , 比较 O' 和 C' 在 x 轴上投影坐标 x 与 x' 之大小, 从而确定重力对 O' 的力矩对杆的作用效果.

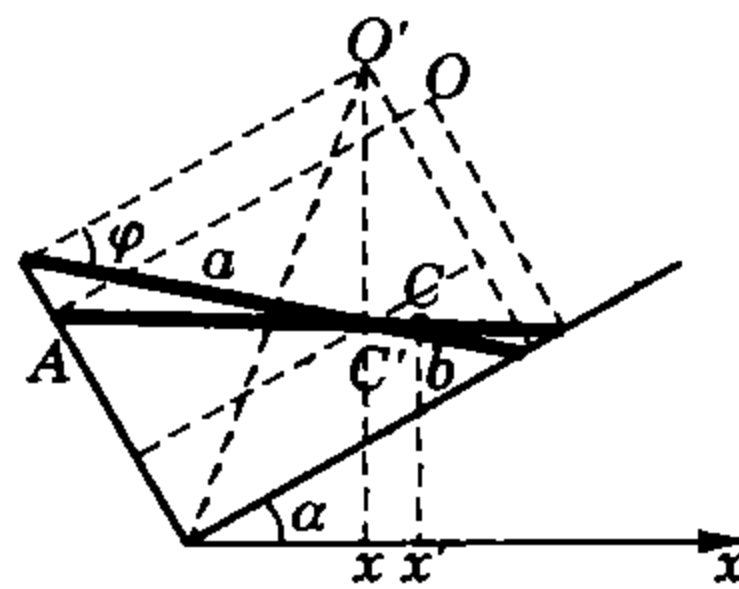


图 3-5

由图 3-5 所示关系得

$$x = (a+b)\cos(\varphi_1 + \alpha);$$

$$x' = a \cos \varphi_1 \cos \alpha - b \sin \varphi_1 \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } x - x' &= b \cos \varphi_1 \cos \alpha - a \sin \varphi_1 \sin \alpha \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \sin(\varphi_0 - \varphi_1). \end{aligned}$$

因 $\varphi_1 > \varphi_0$, 故有 x 小于 x' , 即重力将对瞬时转动中心 O' 构成一负力矩, 使杆继续顺时针转动而远离原平衡位置, 可见, 杆在两光滑斜面间如图 3-3 所示位置的平衡是不稳定平衡.

各种处于稳定平衡状态的物体, 其稳定程度不同; 处于不稳定平衡状态的物体, 也可以通过改变平衡条件使之达到稳定平衡状态, 如问题 1 中的那个熟鸡蛋, 以蛋尖端直立于水平面时是不稳定平衡, 但置于尺寸合适的球形碗内就可以达到稳定平衡. 在生产、生活中有许多实际问题, 需要控制物体的平衡条件, 提高物体的稳度, 我们来例析一二.

例 3 如图 3-6 所示, 课桌面与水平面夹角成 α , 在桌面上放一支正六棱柱形铅笔, 欲使铅笔既不向下滚动、又不向下滑动. 试求: (1) 在此情况下铅笔与桌面的静摩擦因数 μ . (2) 铅笔的轴与斜面母线(斜面与水平面的交线)应成多大的角度 φ 放置?

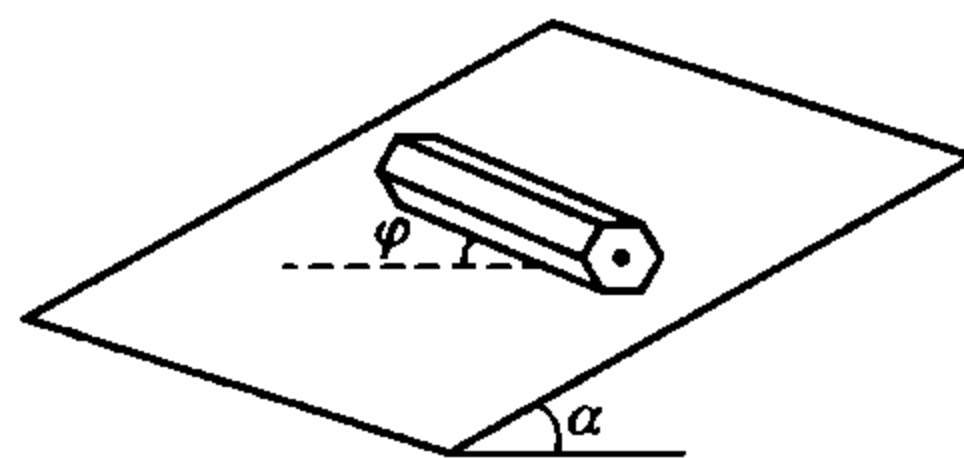


图 3-6

分析与解 根据日常我们学习生活的经验, 我们在倾斜桌面上放一枝六棱柱形铅笔, 当笔杆垂直于斜面母线时, 最不易滚下来而会先发生滑动. 事实上, 当放置在斜面上的铅笔恰能处于平衡时, 必有 $mg \sin \alpha = f = \mu mg \cos \alpha$, 式中 f 为最大静摩擦力, m 为铅笔质量. 则 $\mu = \tan \alpha$, 即静摩擦因数恰等于斜面倾角的正切值. 若 $\mu > \tan \alpha$, 放置在斜面上的笔无论以怎样的 φ 角放置, 总不会因发生滑动而破坏平衡.

但是, 还有一个向下滚动的问题存在. 就“稳度”而言, 当 φ 角为某一临界值 φ_0 时, 重力作用线超出斜面对铅笔的支持面, 则铅笔会在重力矩作用下离开原平衡位置而滚下来. 现在来求这个 φ_0 角.

如图 3-7 所示, 阴影部分表示笔与桌接触面, 正六

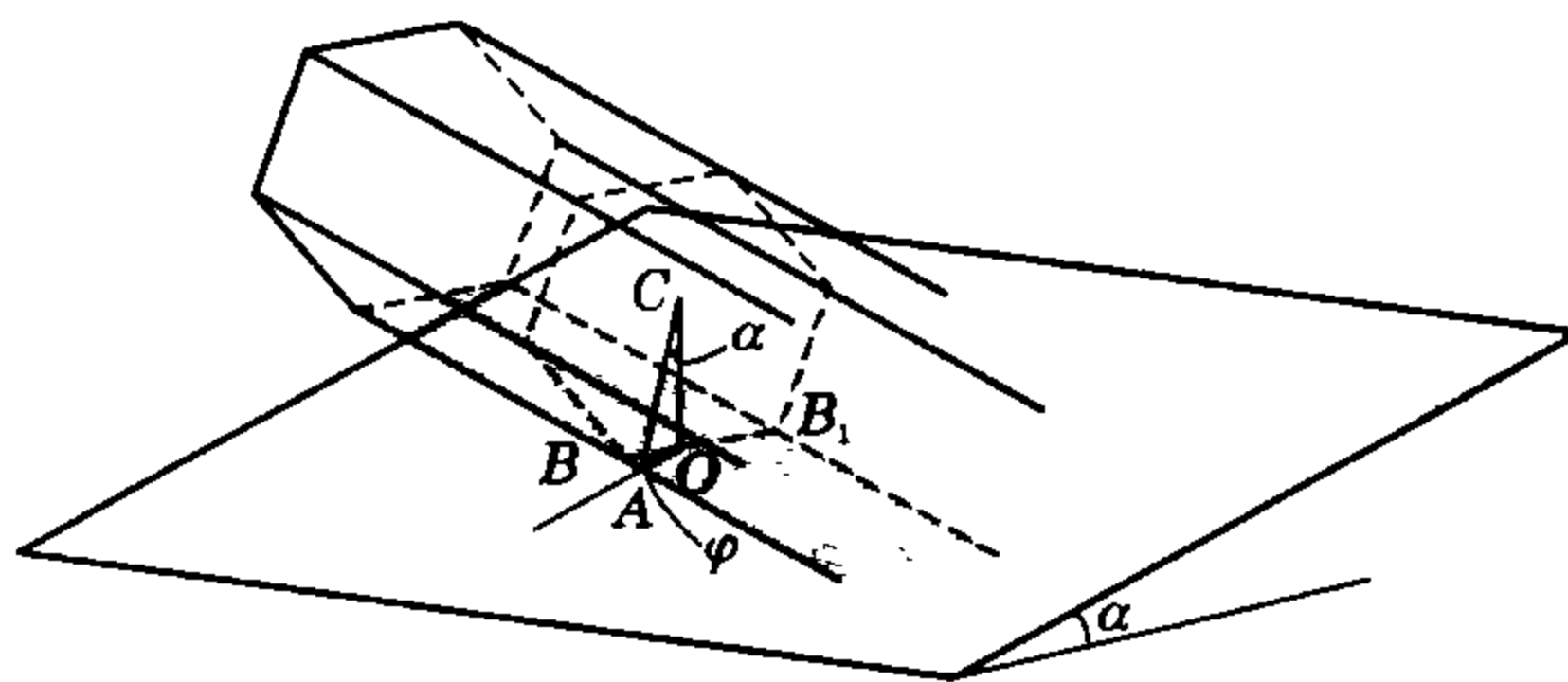


图 3-7

边形表示笔的横截面, C 为铅笔的质心, 它在斜面上的投影为 O , 重力作用线从接触面 A “擦边而过”. 由图示几何关系可知: $OC = a \sin 60^\circ$, a 为正六边形边长, $OB = \frac{a}{2}$, $\angle ACO = \alpha$, $\angle BOA = \varphi_0$ (注意: OA 垂直于母线,

OB 垂直于棱线), 在临界状态下 $\frac{OB}{\cos \varphi_0} = OC \tan \alpha$, 故

$$\varphi_0 = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \alpha \right).$$

只要重力作用线落在阴影区内, 即有

$$\frac{a}{2 \cos \varphi} \geq a \sin 60^\circ \tan \alpha,$$

$$\cos \varphi \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cot \alpha$$

笔就不会滚动, 故放置笔时, 应使铅笔的轴与斜面母线

所成的角 $\varphi > \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \alpha \right)$.

例 4 如图 3-8 所示, 建造屋顶边缘时, 用长度为 L 的长方形砖块, 一块压着下面一块并伸出砖长的 $\frac{1}{8}$, 如果不用水泥粘紧, 则最多可以堆几层同样的砖刚好不翻倒? 这样的几层砖最多可使屋檐“飞”出多长?

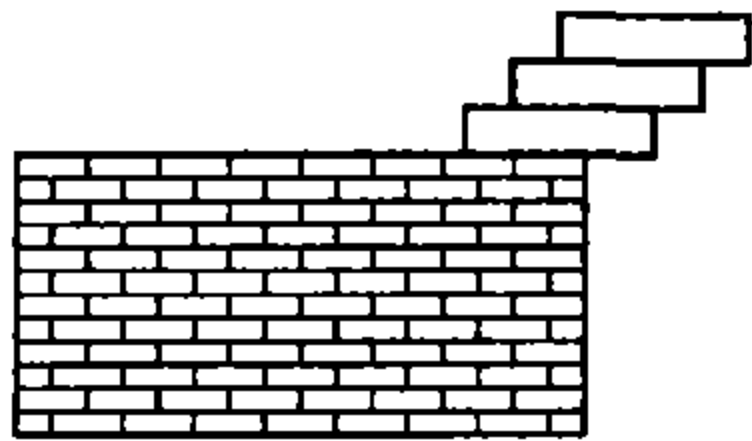


图 3-8

分析与解 一块砖的重心就在 $\frac{L}{2}$ 处, 叠放一块砖后, 由于伸出 $\frac{L}{8}$, 两砖总长 $\frac{9}{8}L$, 共同重心在总长的一半处. 设有 n 块相同砖叠放, 每块均伸出 $\frac{L}{8}$, 则总长为

$L + (n-1)\frac{L}{8}$, 而总重心在总长度的中间. 要使飞檐平衡, n 块砖所受总重力作用线不能超出墙壁的支面, 即

$$\frac{1}{2} \left[L + (n-1)\frac{L}{8} \right] \leq \frac{7}{8}L, \text{ 故 } n \leq 7.$$

如图 3-9 所示, 最上面第 1 块砖要处于平衡而不翻倒, 它的重力作用线不能超出其下第 2 块砖的边线, 所以第 1 块砖能伸出的最大长度为 $\frac{L}{2}$; 第 1 块砖和第 2 块砖合在一起总长度为 $\frac{3L}{2}$, 重心在中间, 即距

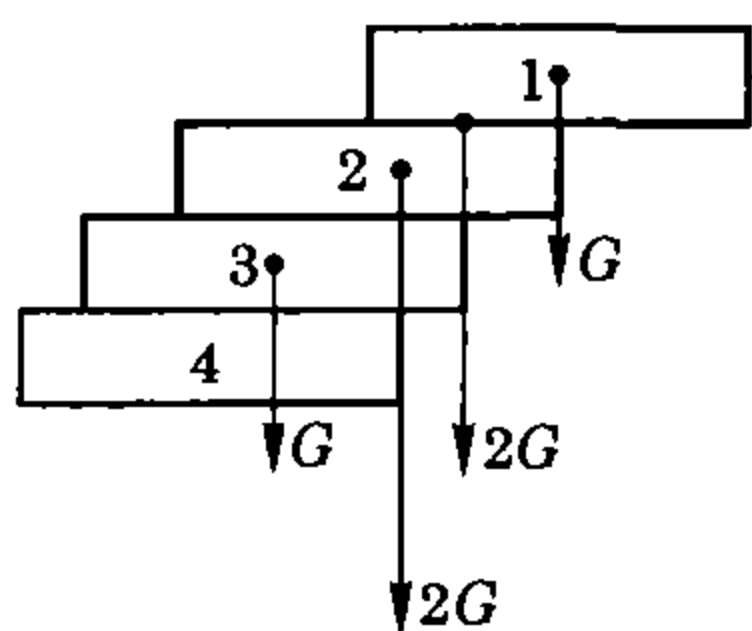


图 3-9

第 2 块砖边线 $\frac{L}{4}$, 第 2 块

砖放在第 3 块砖上时最多伸出 $\frac{L}{4}$. 现在来看三块砖的

重心位置: 设三块砖重心 C_3 距第 3 块砖边缘 x , 由力矩平衡关系知 $2Gx = G(\frac{L}{2} - x)$, 解得 $x = \frac{L}{6}$, 所以第 3

块砖只能比下一块砖边线伸出 $\frac{L}{6}$, 不难递推, 第 n 块

砖伸出量的通式是 $x_n = \frac{L}{2n}$, 那么七块砖均以最大量伸

出, “七级飞檐”最多能飞出的长度为 $s = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$+ \dots + \frac{1}{7}) \frac{L}{2}$.

小试身手

1. 如图 3-10 所示, 一矩形导电线圈可绕其中心轴 O 转动, 它处于与轴垂直的匀强磁场中, 在磁场的作用下, 线框开始转动, 最后静止的平面位置是图中的 ()

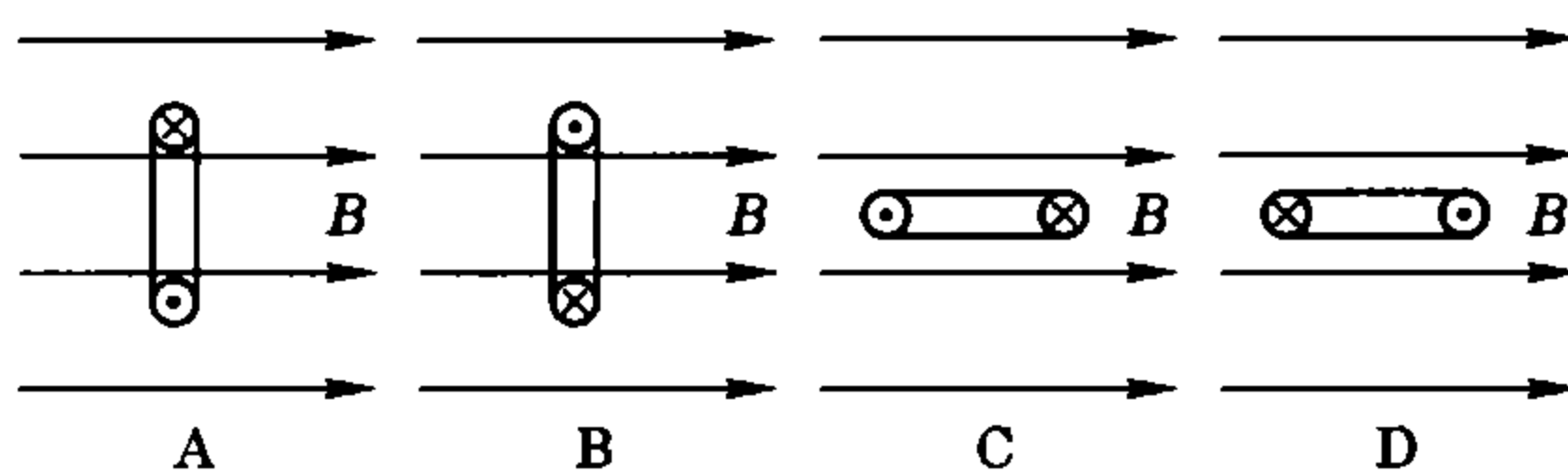


图 3-10

2. 图 3-11 中每一系统的两个球都用一跨过滑轮的线连接起来, 问每一种情况各属哪种平衡?

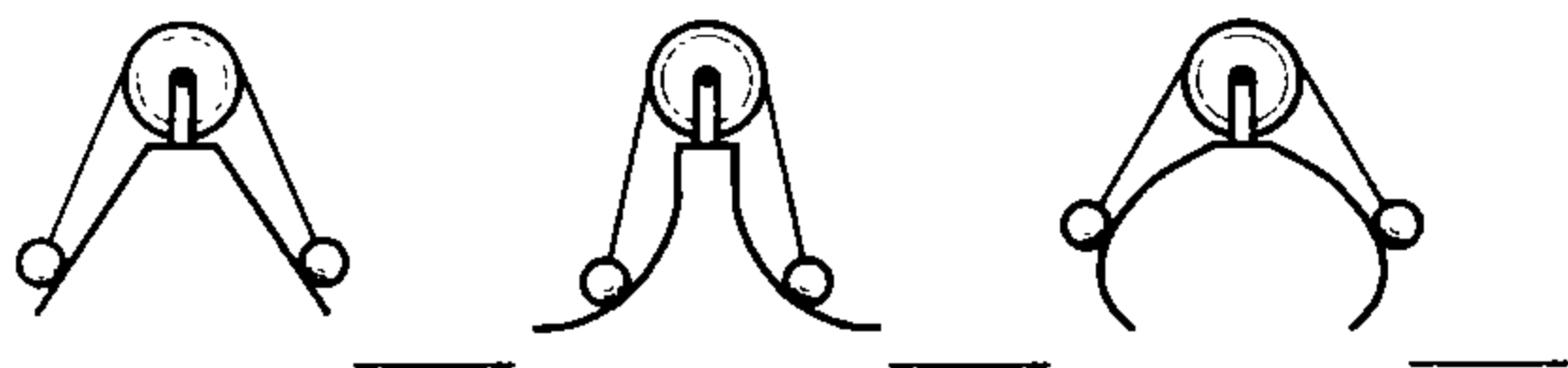


图 3-11

3. 如图 3-12 所示装置, 它是由一个长 L 的木钉, 从木钉上端向左右斜伸出两个下垂的、长为 l 的细木杆, 以及在木杆的末端装有质量同为 m 的小球而组成. 木钉及木杆的质量可忽略, 木杆与木钉间夹角为 α , 此装置放在硬质木柱上, 则 l 、 L 、 α 间应当满足

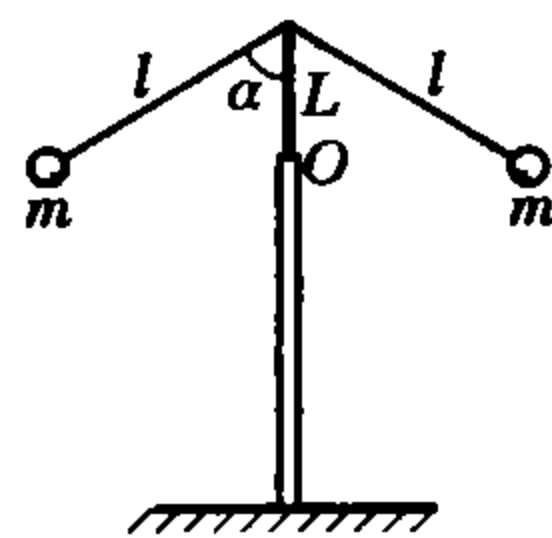


图 3-12

木钉由垂直位置稍微偏斜后, 此装置能以 O 点为支点摆动而不致倾倒.

4. 如图 3-13 所示, 长度为 $2L$ 、粗细均匀的杆, 一端靠在铅直的墙上, 而另一端靠在不动的光滑面上. 为了使杆即使没有摩擦仍能在任意位置处于平衡, 试写出这个表面的横截线的函数表达式 $y(x)$ (杆总是位于垂直于墙面的竖直平面内).

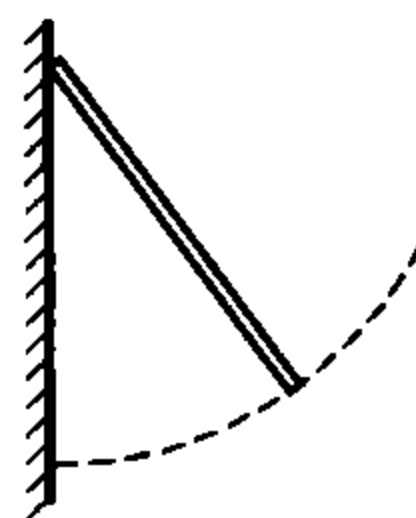


图 3-13

5. 如图 3-14 所示, 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小环能沿着一光滑的轻绳滑动. 绳的两端固定于直杆的两端, 杆与水平线成角度 θ . 在此杆上又套一轻小环, 绳穿过轻环并使 m_1 、 m_2 在其两边. 设环与直杆的接触是光滑的, 当系统平衡时, 直杆与轻环两边的绳夹角为 φ . 试证: $\frac{\tan \theta}{\tan \varphi} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$.

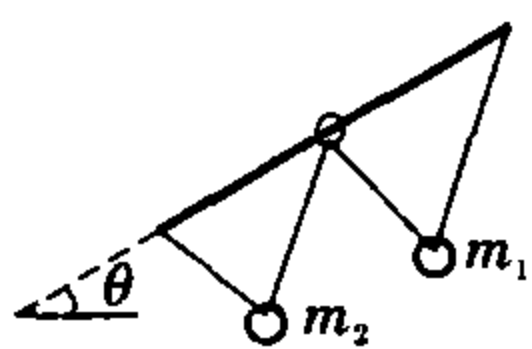


图 3-14

6. 一根质量为 m 的均匀杆, 长为 L , 处于竖直的位置, 一端可绕固定的水平轴转动, 如图 3-15 所示. 有两根水平弹簧, 劲度系数相同, 把杆的上端拴住, 如图所示, 问弹簧的劲度系数 k 为何值时才能使杆处于稳定平衡?

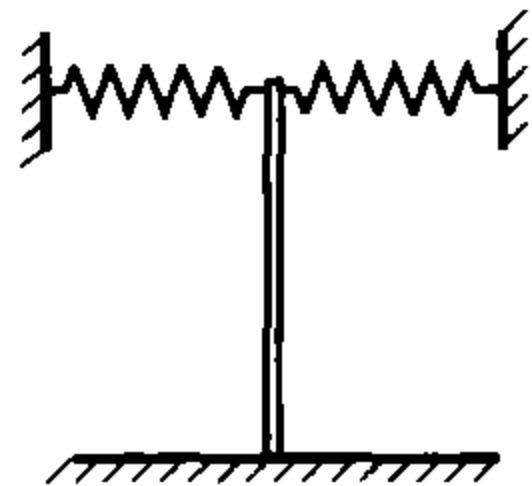


图 3-15

7. 如图 3-16 所示, 一块厚 d 的木板位于半径为 R 的圆柱上, 板的重心刚好在圆柱的轴上方. 板与圆柱的摩擦系数为 μ . 试求板可以处于稳定平衡状态的条件.

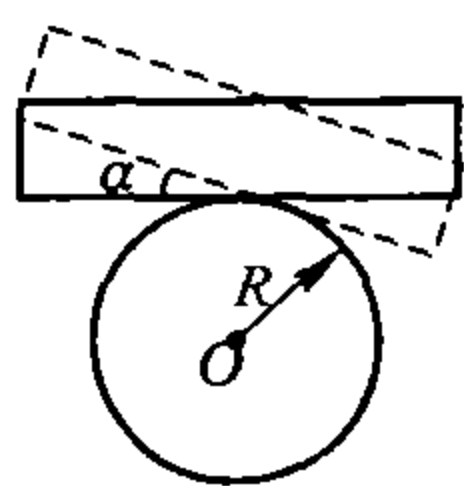


图 3-16

8. 用均匀材料制成的浮子, 具有两个半径均为 R 的球冠围成的外形, 像一粒豆子, 如图 3-17 所示. 浮子的厚度 $h < 2R$, 质量为 m_1 . 沿浮子对称轴向浮子插入一细辐条, 穿过整个厚度. 辐条长 $l > h$, 质量为 m_2 . 当将浮子辐条向上地浸于水中时, 浮子只有少部分没于水中. 浮子的状态是稳定的吗?

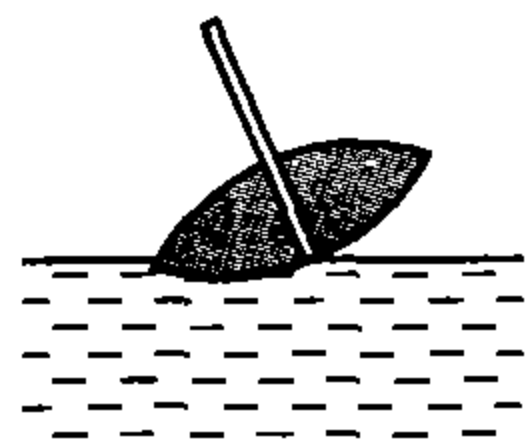


图 3-17

9. 如图 3-18 所示, 儿童玩具不倒翁高 $h = 21$ cm, 质量 $m = 300$ g, 相对轴 KD 对称分布. 不倒翁的下部是半径 $R = 6$ cm 的半球面, 如果不倒翁放在与水平面成角度 $\alpha = 30^\circ$ 的粗糙面上, 当它的轴 KD 与竖直方向倾角 $\beta = 45^\circ$, 则处于稳定平衡状态. 为了使它在水平面上失去稳定平衡, 试问最少需在头顶 K 处加多少塑泥?

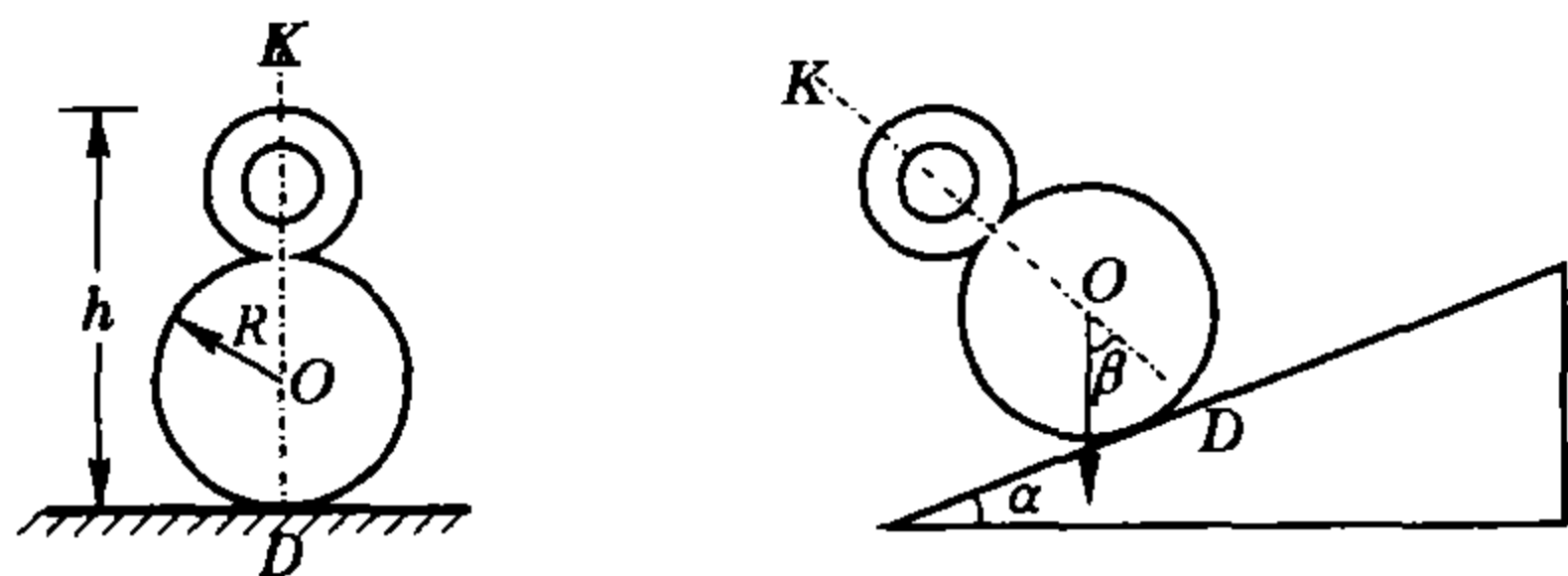


图 3-18

10. 有一长为 0.2 m、截面积为 2 cm^2 的均匀细棒, 密度为 $5 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$.

(1) 在细棒下端钉上一小铁片(不计体积), 让细棒

竖立在水面, 若细棒露出水面部分的长为 0.02 m, 则小铁片质量为多少?

(2) 不拿去浸在水中的小铁片, 在上端要截去多少长度, 恰好使上端与水面齐平?

(3) 要使细棒竖在水面是稳定平衡, 下端小铁片至少要多重?

11. 两个相同长方体处于如图 3-19 所示位置. 问当 α 角为多少时它们才可能平衡? 长方体与水平面间摩擦系数为 μ , 长方体长 b 宽 a . 长方体间无摩擦.

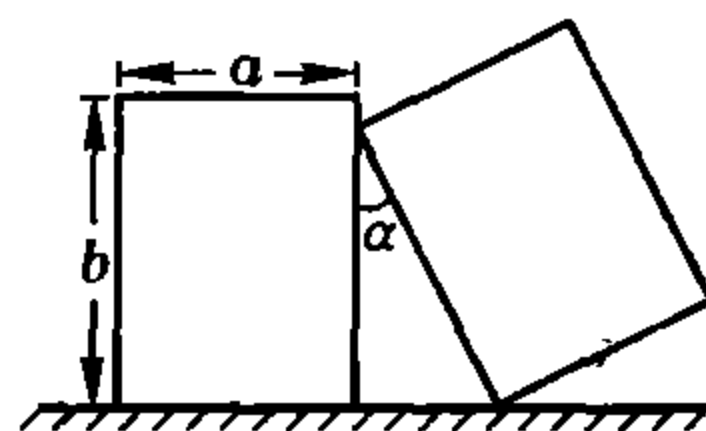


图 3-19

12. 如图 3-20 所示, 在互相垂直的斜面上放置一匀质杆 AB , 设各接触面的摩擦角均为 φ ($\mu = \tan \varphi$), 求平衡时杆 AB 与斜面 AO 交角 θ 的范围. 已知斜面 BO 与水平面交角为 α .

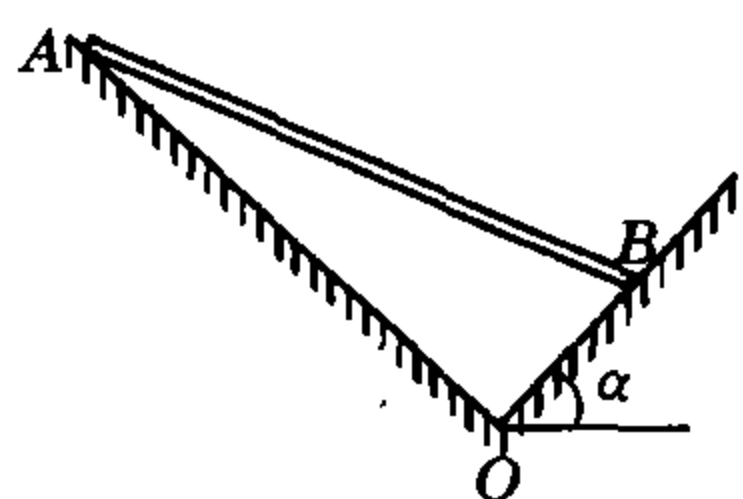


图 3-20

13. 4 个半径均为 R 的光滑球静止于一个水平放置的半球形碗内. 该 4 球球心恰在同一个水平面上, 现将相同的第 5 个球放在前述 4 球之上, 而此系统仍能维持平衡, 求碗的半径为多少?

参考解答

1. B 2. 随遇平衡 稳定平衡 不稳定平衡

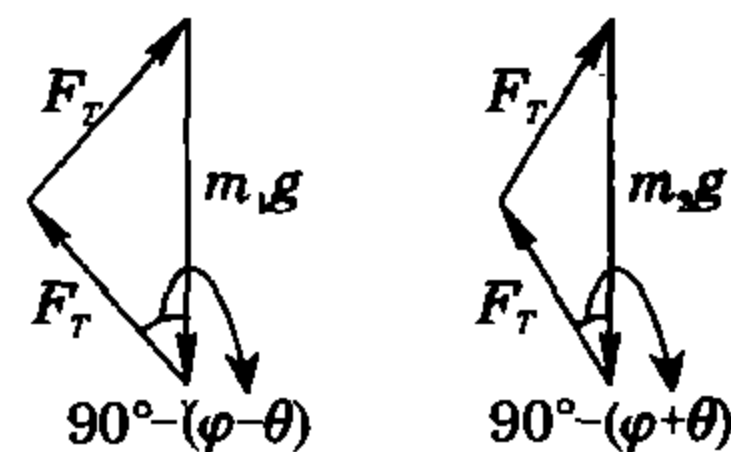
3. $l \cos \alpha \geq L$

4. 因为杆是随遇平衡, 重心始终在 x 轴上, 上端点坐标为 $x=0$, 下端点坐标满足 $x^2 + (2y)^2 = (2L)^2$.

5. 同一绳上张力处处相同设为 F_T , m_1 、 m_2 受力且平衡如图答 3-1 所示, 则

$$F_T = \frac{m_1 g}{2 \sin(\varphi - \theta)}$$

$$= \frac{m_2 g}{2 \sin(\varphi + \theta)},$$



图答 3-1

整理可得证.

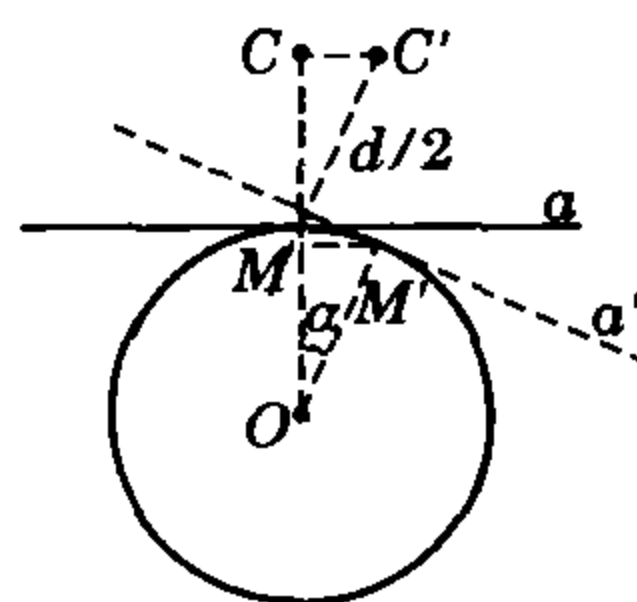
6. 要成稳定平衡, 应令

杆偏离平衡位置一小角度 $\Delta\theta$ 时, 弹力矩大于重力矩,

$$\text{即 } 2k(L \cdot \Delta\theta) \cdot L \geq mg \frac{L}{2} \cdot \Delta\theta,$$

$$\text{故 } k > \frac{mg}{4L}.$$

7. 如图答 3-2 所示, 板从原位置(a 为板下沿)偏转一小角度 α 到毗邻位置(a' 为板下沿), 与圆柱面切点从 M 移至 M' , $\widehat{MM'} = R\alpha$, 均匀板重心从 C 移至 C' , 稳定平衡条件是 C'



图答 3-2

位置高于C,则有

$$R \cos \alpha + a R \sin \alpha + \frac{d}{2} \cos \alpha > R + \frac{d}{2},$$

α 很小时,有 $\sin \alpha \approx \alpha$,

得 $d < 2R$, 且 $\alpha < \arctan \mu$.

8. 整体重心位置设为C,如图答3-3所示, $l_c = \frac{h}{2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\frac{l}{2} - \frac{h}{2})$, 偏转小角度 $\Delta\theta$, 浮心位置不变, 呈何种稳定视重心侧移后与浮心的位置关系:

若 $l_c = R, \frac{m_1}{m_2} = \frac{l-2R}{2R-h}$ 时为稳定平衡;

若 $l_c > R, \frac{m_1}{m_2} < \frac{l-2R}{2R-h}$ 时为不稳定平衡;

若 $l_c < R, \frac{m_1}{m_2} > \frac{l-2R}{2R-h}$ 时为稳定平衡.

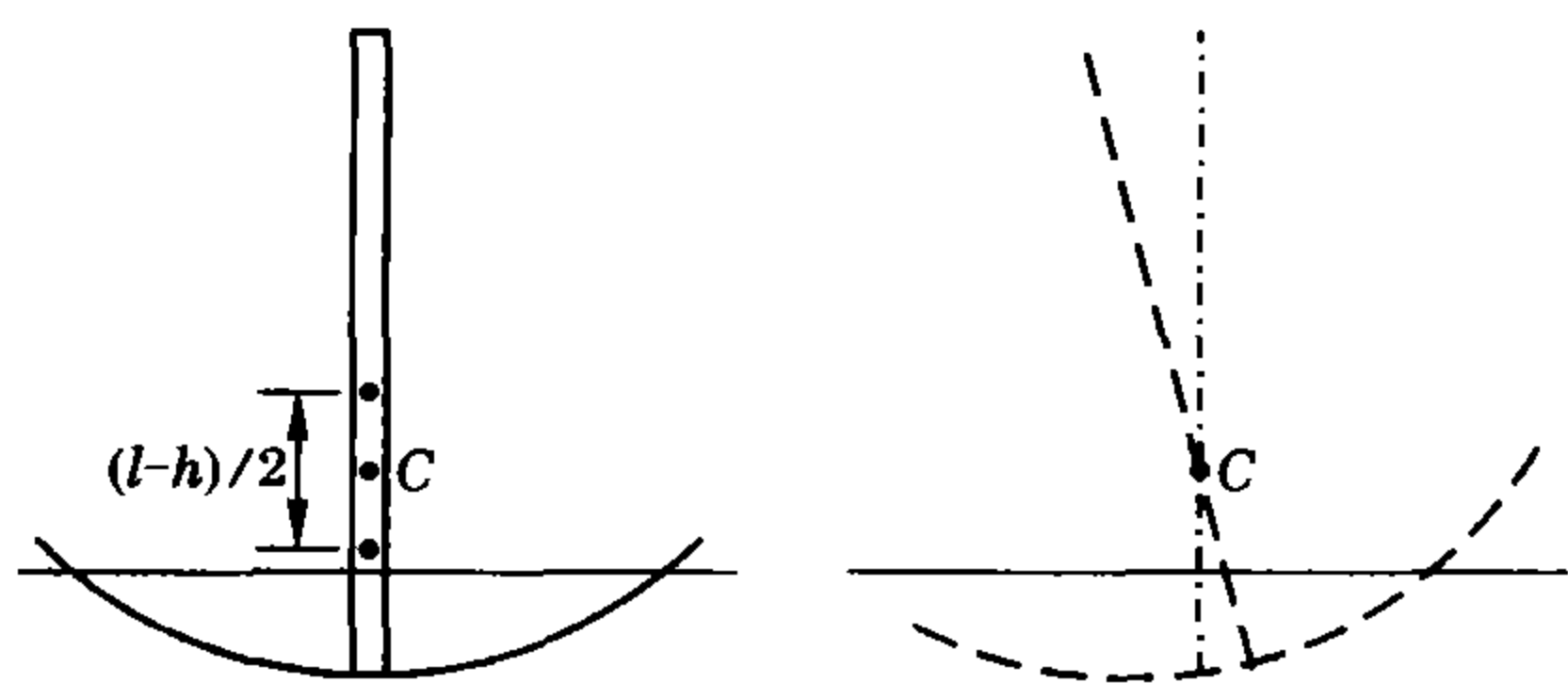


图 3-3

9. 整体重心设为 O' , 在斜面上时重力作用线过 D' , 如图答3-4所示, OD' 与竖直方向成 α 角, 在 $\triangle OD'O'$ 中, 有

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{OO'}{\sin \alpha},$$

得 $OO' = 3\sqrt{2} \text{ cm}$;

在水平面时要成稳定平衡, 至少要

$$OO' \cdot m = \Delta m \cdot (h-R),$$

解得 $\Delta m = 84 \text{ g}$.

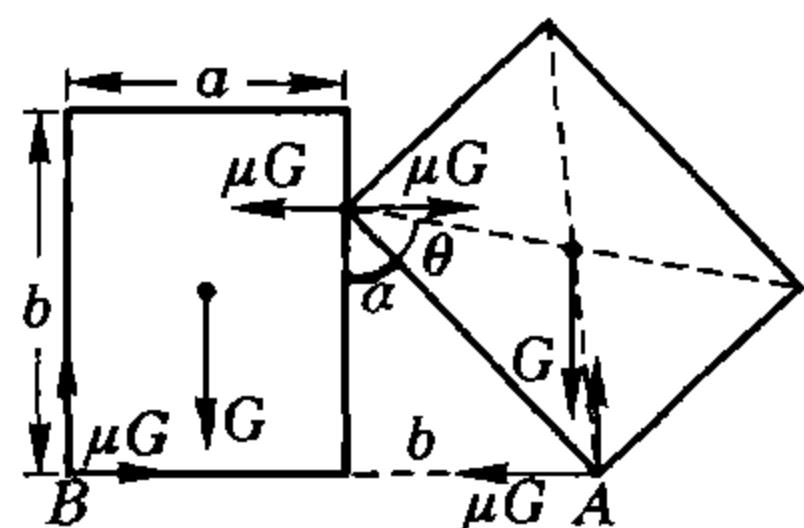
10. (1) 小铁片质量 $m = 16 \text{ g}$ (2) 截去 $\Delta x = 4 \text{ cm}$ (3) 应使浮心与质心重合或在质心之上, 则

$$\frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} \leq \frac{M+m}{2\rho_{\text{水}}S}, \text{ 解得 } m_{\text{min}} = 8 \text{ g}.$$

11. 受力情况如图答3-5所示, 当 $\alpha > \arctan \frac{a}{b} = \theta$

时, 系统可能平衡, 否则右块会右翻; 当 α 足够大, $f = \mu G$ 时, 右块满足

$$\mu G \cdot b \cos \alpha = G \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \sin(\alpha - \theta),$$



图答 3-5

故 $\alpha = \tan^{-1} (2\mu + \frac{a}{b})$;

左块应满足

$$\mu G \cdot b \cos \alpha = G \cdot \frac{a}{2} = G \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \sin(\alpha - \theta),$$

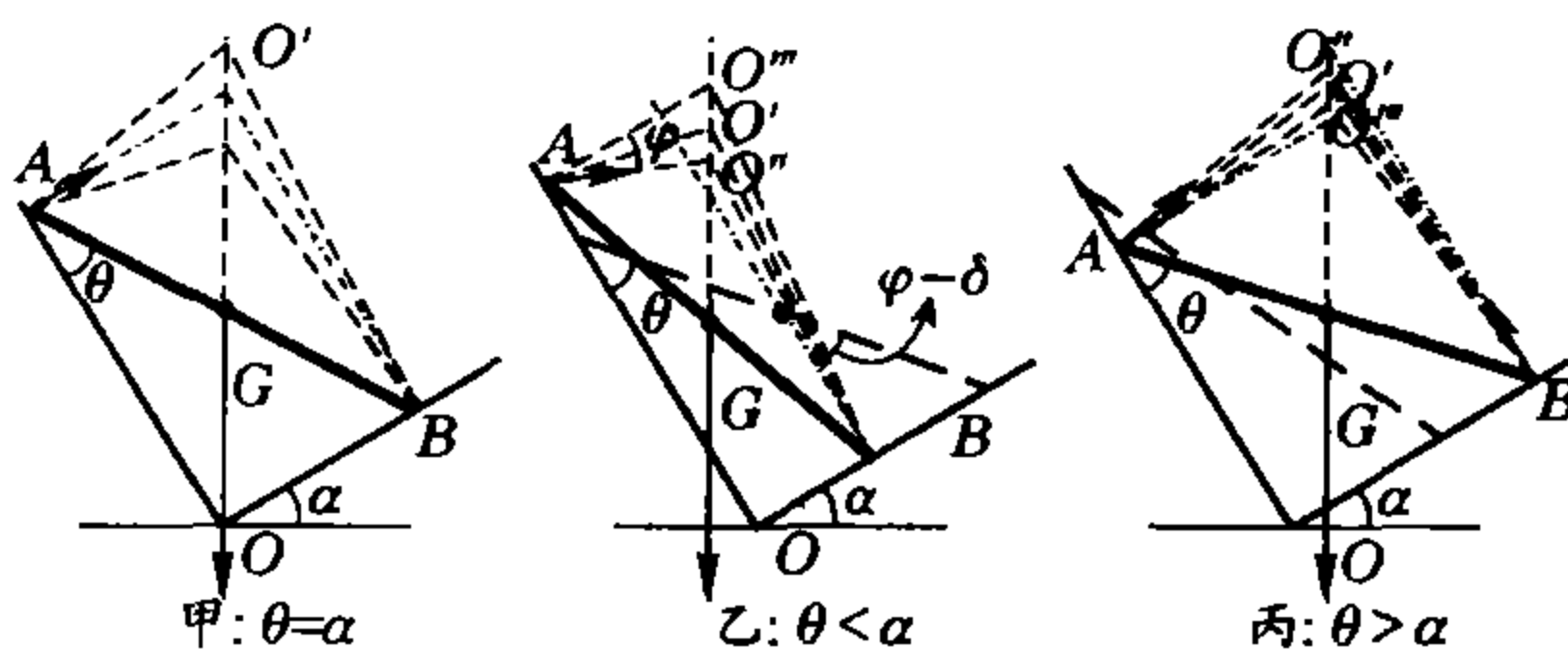
可得 $\sin(\alpha - \theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}, \alpha = 2 \arctan \frac{a}{b};$$

综上可得,

$$\arctan \frac{a}{b} < \alpha < \min \{ \arctan (2\mu + \frac{a}{b}), 2 \arctan \frac{a}{b} \}$$

12. 如图答3-6甲、乙、丙图分别表示杆与AO边所成



图答 3-6

角度 $\theta = \alpha, \theta < \alpha, \theta > \alpha$ 的情况, 由甲图可知杆处于不稳定平衡, 此时A、B两处静摩擦力可均为零; 受一微扰, 若杆向AO边移动, θ 角递减, 如图乙所示, A、B两处约束力同时达摩擦角 φ ($\mu = \tan \varphi$) 时, 有

$$\angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore O'G < AG$,

$$\therefore 90^\circ - \varphi - \theta = 90^\circ + \varphi - \alpha,$$

得 $\theta = \alpha - 2\varphi$.

若 $\varphi > \varphi_0$, 考虑A处约束力达摩擦角时, 有

$$\angle O'AG = 90^\circ - \varphi - \theta, \angle A'O'G = 90^\circ + \varphi - \alpha,$$

$\therefore O'G < AG$,

$$\therefore 90^\circ - \varphi - \theta < 90^\circ + \varphi - \alpha,$$

得 $\theta > \alpha - 2\varphi$.

同样考虑B处约束力达摩擦角时, 有

$$\angle O'BG = \theta + \varphi, \angle B'O'G = \theta + \alpha - (\theta + \varphi) = \alpha - \varphi,$$

$\therefore O'G > BG$,

$$\therefore \theta + \varphi > \alpha - \varphi, \text{ 亦得 } \theta > \alpha - 2\varphi.$$

若向BO边移动, θ 角递增, 如图丙, A、B两处约束力同时达摩擦角 φ 时, 有

$$\angle AOB = 90^\circ, \theta = \alpha + 2\varphi,$$

若 $\varphi > \varphi_0$, 考虑A处约束力达摩擦角时, 则有

$$\angle O'AG = 90^\circ + \varphi - \theta, \angle A'O'G = 90^\circ - \varphi - \alpha,$$

$\therefore O'G > AG$,

$$\therefore 90^\circ + \varphi - \theta > 90^\circ - \varphi - \alpha,$$

得 $\theta < \alpha + 2\varphi$.

同样考虑B处约束力达摩擦角时, 有

$$\angle O'BG = \theta - \varphi, \angle B'O'G = \theta + \alpha - (\theta - \varphi) = \alpha + \varphi,$$

10种新技术将改变世界

吴社英

(河北省鸡泽县第一中学 057350)

美国《技术评论》认为,有10种新兴技术在不久的将来会产生巨大影响.这些技术是全新的,很快就可以改变计算、医疗、制造、运输和能源基础设施.

1. 无线传感器网络 2002年夏季,研究人员把许多被称为“尘埃”的很小的监控装置装到了有海燕巢的洞穴中.这些装置的尺寸只有一对AA号电池那么大,并且装备了一个处理器,一个小量计算机存储器 and 监控光、湿度、压力和热量的传感器.这些“尘埃”还预示着一个到处是以电池为电源的无线传感器网络的未来,这些传感器可监控环境、机器甚至人类自己.

2. 可注入组织工程 在美国,每年有70万患者要做关节替换手术.这些用人造关节来取代膝关节或髋关节的手术是高度入侵性的,因此很多患者尽可能地推迟手术.霍普金斯大学生物医

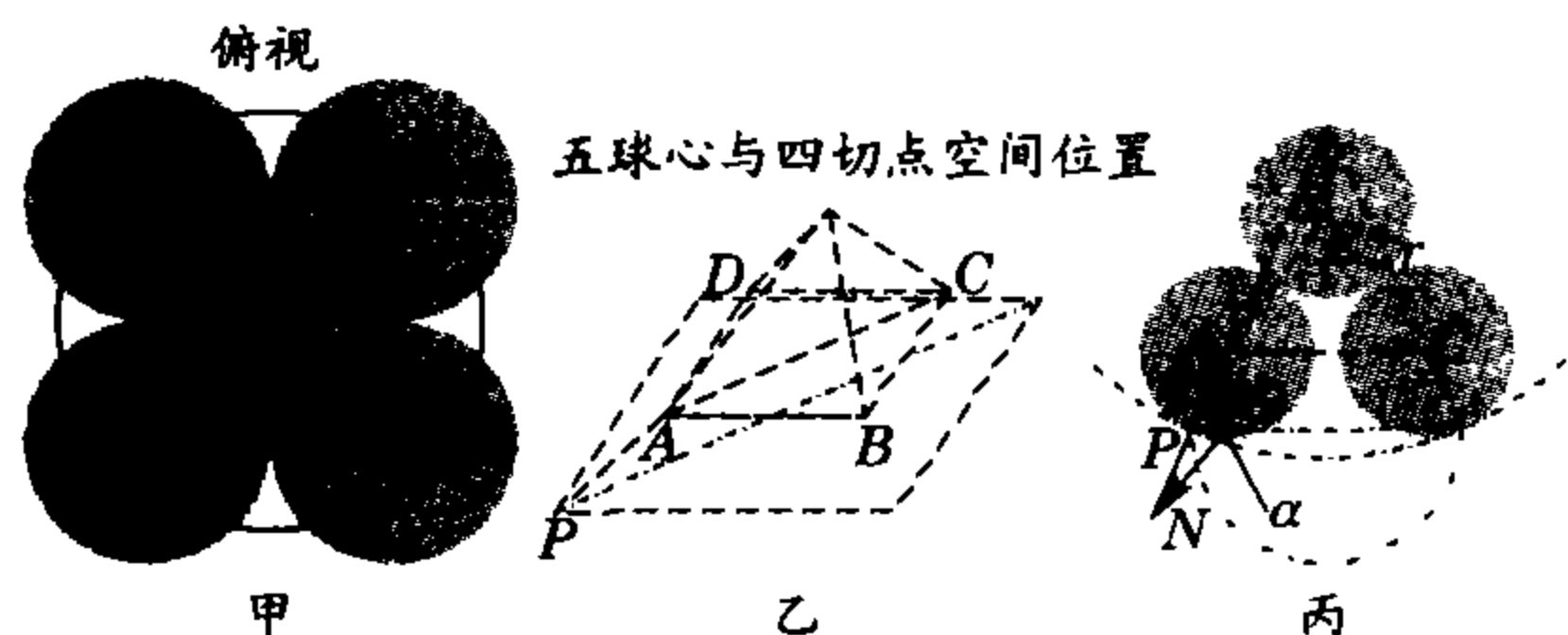
学工程师埃利西芙开发了一种方法来注射关节,用的是特殊设计的聚合物、细胞和生长刺激剂的混合物,这些混合物可以凝固并形成健康组织.尽管大部分可注入系统的研究都集中在软骨和骨上,但观察家们认为,这项技术应该可扩展到如肝脏和心脏的组织.这种方法可以用来替代一个器官的致病部分,或增强其功能.在出现心力衰竭时,不是打开胸腔植入一个人造瓣膜或肌肉组织,而是简单地注入合适的细胞和作为生长信号的物质混合物就可以了.

3. 纳米太阳能电池 加利福尼亚大学伯克利分校化学家阿利维萨特斯制造的原型太阳能电池由厚度仅为200纳米的纳米棒聚合物复合材料薄片组成.当阳光照到这些薄片时,它们就吸收光子,激发在复合材料中占90%的聚合物和纳米棒中的电子,从而在电池两极间产生了电势差.

$$\begin{aligned} &\because OG < BG, \\ &\therefore \theta - \varphi < \alpha + \varphi, \\ \text{亦得} &\quad \theta < \alpha + 2\varphi. \end{aligned}$$

综上所述得结论为 $\alpha - 2\varphi \leq \theta \leq \alpha + 2\varphi$.

13. 设碗半径为 r , 五球球心在棱长为 $2R$ 的正四棱锥顶点, 下四球与碗切于 P , 下四球接触而无挤压, 球在碗中



图答 3-7

方位如图答 3-7, 上球对每个下球压力设为 N , $N = \frac{G}{4} \cdot \sqrt{2}$, 碗对下球支持力设为 T , 方向与竖直方向成 α 角, 则有 $\frac{N}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin(45^\circ - \alpha)}$, 得 $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, 由丙图所示几何关系有 $\frac{r-R}{\sin 45^\circ} = \frac{2R}{\sin \alpha}$, 得 $r_{\max} = (1+2\sqrt{13})R$, r 增大, 平衡被破坏, r 减小, 五球方位不变, 但下四球间有挤压, 及至 r 最小时, 下四球恰切于碗边, 如丙图所示, 此时 $r_{\min} = r_{\max} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}+1}{\sqrt{26}}R$, 综上所述, 碗半径应为 $(1+2\sqrt{13})R \geq r \geq \frac{2\sqrt{13}+1}{\sqrt{26}}R$.

(待续)

竞赛辅导

专题 4 矢量图解运动问题

沈 晨

教你一手

一、矢量加、减运算的图示

矢量的加、减运算,即矢量的合成与分解是处理物理问题必备的数学方法.矢量加减依据平行四边形定则,也可简化为三角形(多边形)法.其图解方法如图4-1,若已知矢量 A 、 B 、(如图4-1(a)),当求 $R=A+B$,即作矢量的加法时,可将 A 、 B 两矢量依次首(有向线段箭头)尾(有向线段末端)相接后,由 A 的尾画到 B

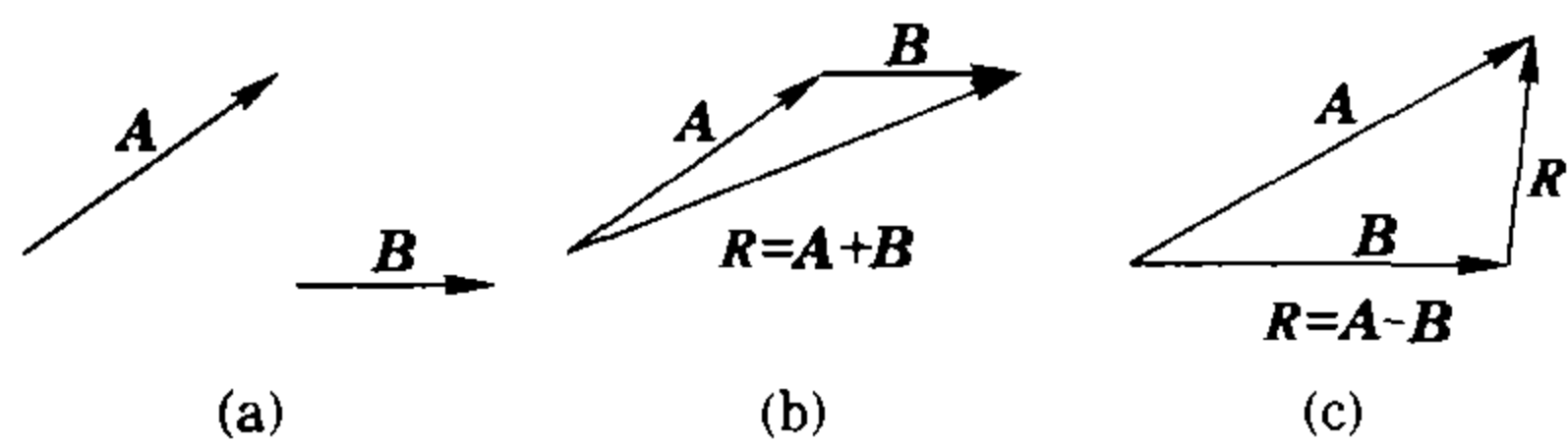


图 4-1

的首的有向线段即为 R (如图4-1(b));当求 $R=A-B$,即作矢量的减法时,通常将表示 A 、 B 两矢量的有向

线段末端重合,即从同一点出发分别画出两相减矢量,由 B 的有向线段箭头画到 A 矢量箭头的有向线段即为 R (如图4-1(c)).运用这种方法可以进行多个矢量的连续相加或相减.我们可归纳如下:

图解方法求矢量和:相加各矢量依次首尾相接后,连接第一个“加数”尾与最后一个“加数”头的有向线段即为各矢量之和.

图解方法求矢量差:末端共点地分别作相减二矢量,连接两箭头、方向指向“被减数”的有向线段即为该二矢量之差.

二、运动的合成与分解

当物体实际发生的运动较复杂时,我们可将其等效为同时参与几个简单的运动,前者称作合运动,后者则称作物体实际运动的分运动.这种双向的等效操作过程叫运动的合成与分解,是研究复杂运动的重要方法.运动的合成与分解遵循如下原理:

1. 独立性原理 构成一个合运动的几个分运动是彼此独立、互不相干的,物体的任意一个分运动,都按

绕地球运动,而不落回到地面上来.牛顿的草图指出了实验发展的一种预见性,这在牛顿时代是一种可能性,在今天变成了现实.

在物理竞赛中有这样一个问题:假设地球是一个密度均匀的球体,在地球上开凿一个穿过地心的直隧道,让一个物体从洞口自由下落,讨论物体在洞中的运动形式及其周期(如图3).这个问题不能看做是一种脱离实际的游戏,这是一个同样会出现在科学家的脑海里的思想实验.今天的人们是无法建成这样的隧道的,至于将来是否有可能造成,现在谁也不能妄下断言.

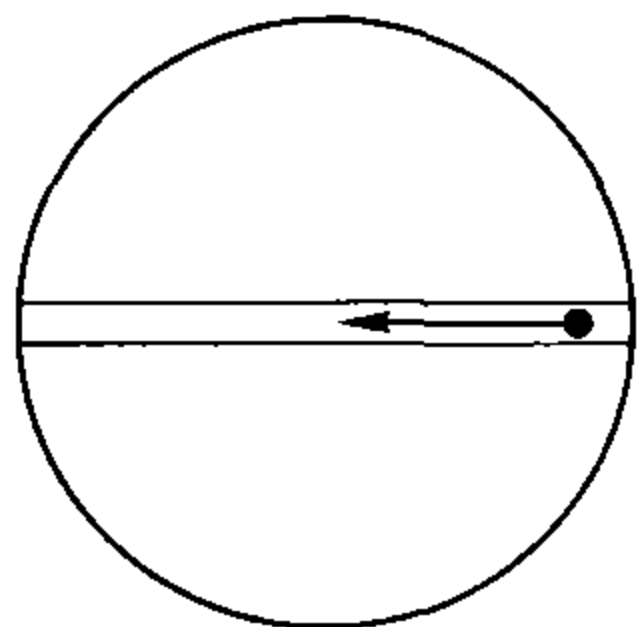


图 3

验的进展、数学方法的进展相比,的确是微不足道的.但是在人类进入20世纪的时候,思想实验突然被频繁地运用起来.爱因斯坦提出了狭义相对论,当人们的思想离开伽利略大船的船舱,来到爱因斯坦火车的时候,关于同时的相对性、关于尺缩效应……关于高速世界里才可能发生的一个个奇妙的情景,被爱因斯坦用思想实验论述得合情合理.玻尔和爱因斯坦关于量子的概率解释进行争论时,他们用思想实验进行的论辩,让人们看到世界上第一流的科学家是怎样畅游在理念的世界里.在科学发展到今天,人们建立了大爆炸宇宙模型,当代理论物理学家霍金在对我们这些普通的人演讲中谈到,世界是十维的,并说了一句意味深长的话:我们看到的世界就是火光照在山洞壁上的影子啊!

主要参考文献

黑格尔,哲学史讲演录(第二卷),北京:商务印书馆,1997

伽利略创立近代科学时用的三个方法,即实验方法、数学方法和思想实验方法,被其后的200年中的科学家继承的主要是前两个方法.思想实验的进展与实

其自身规律进行,不会因有其他分运动的存在而发生改变.

2. 等时性原理 合运动是同一物体在同一时间内同时完成几个分运动的结果,对同一物体同时参与的几个运动进行合成才有意义.

3. 矢量性原理 描述运动状态的位移、速度、加速度等物理量都是矢量,对运动进行合成与分解时应按矢量法则即平行四边形定则作上述物理量的运算.

将一个复杂运动分解为几个分运动,通常有两种方法:(1)引入中介参照系.例如船过河的运动,是以静止的河岸为参考的一个复杂运动,我们可以取一个动参考物——运动的河水为中介,那么,船的运动可分解为船相对水的运动与水相对岸的运动.若设质点 A 对静止参考系 C 的速度(绝对速度)为 v_{AC} ,动参考系 B 对 C 的速度(牵连速度)为 v_{BC} ,而 A 对动参考系 B 的速度(相对速度)为 v_{AB} ,则有 $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$, $v_{AB} = v_{AC} - v_{BC}$. 同样地,我们可以按这种方法进行位移或加速度的合成与分解,例如, $a_{AC} = a_{AB} + a_{BC}$, $a_{AB} = a_{AC} - a_{BC}$. 注意矢量运算式中下标的规律性.(2)依据实际效果分解运动.例如一架飞机以速度 v 与水平成 θ 角斜向上飞行,实际效果是在上升的同时水平向前移动了,我们可将飞机的运动分解为竖直方向与水平方向的两个分运动,若这两个分运动的速度依次为 v_1 和 v_2 ,则有 $v = v_1 + v_2$.

处理相对运动等复杂运动时,涉及速度、位移或加速度等矢量的加减运算,若用矢量图助解常会收到奇效.

例 1 假定某日刮正北风,风速为 u ,一运动员在风中跑步,他对地面的速度大小是 v ,试问他向什么方向跑的时候,他会感到风是从自己的正右侧吹来的? 这种情况在什么条件下成为无解? 在无解的情况下,运动员向什么方向跑时,感到风与他跑的方向所成夹角最大?

分析与解 设风相对于人的速度(即运动员感到的风速)为 V ,根据题给条件,有 $u = V + v$. 三个速度矢量中, u 大小、方向均确定, v 大小一定, V 与 v 两矢量互相垂直(所谓正右侧),故可断定三个矢量所构成的满足题意要求的关系三角形应为直角三角形.如图 4-2,取一点 O ,先作矢量 u ,以其矢端为圆心,表示 v 大小的线段长为半径作一圆,自 O 点向圆引切线 OA ,则矢量三角形 $\triangle OO'A$ 即为符合题意要求的 u 、 V 、 v 关系.由图显见,当运动员朝南偏西 $\theta = \arccos \frac{v}{u}$ 方向以速率 v 奔跑时会感觉风从自己右侧吹来,并且在 $v < u$ 时才可能有这种感觉.

若 $v > u$,绝对风速、风相对人的速度及人奔跑速度关系如图 4-3,在 $\triangle OO'A'$ 中运用正弦定理有 $\frac{v}{\sin \beta} =$

$\frac{u}{\sin \alpha}$,可知当 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\alpha = \arcsin \frac{u}{v}$ 为最大,即在运动员

向西偏南 $\arcsin \frac{u}{v}$ 方向奔跑时感觉风与自己跑的方向所成夹角最大.

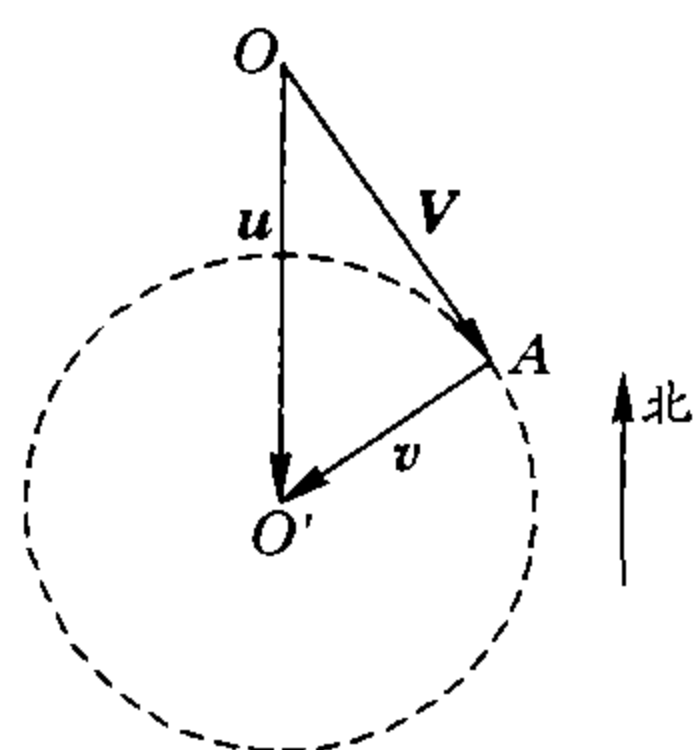


图 4-2

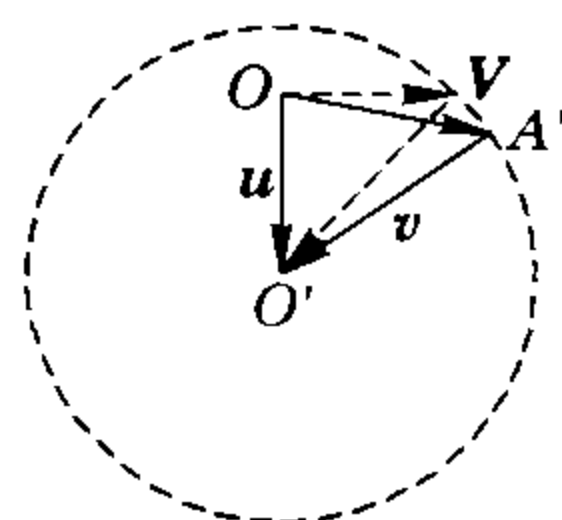


图 4-3

例 2 一只木筏离开河岸,初速度为 v ,方向垂直于岸,划行路线如图 4-4 虚线所示,经过时间 T ,木筏划到路线上 A 处,河水速度恒定为 u ,且木筏在水中划行方向不变.用作图法找到 $2T$ 、 $3T$ ……时刻此木筏在航线上的确切位置.

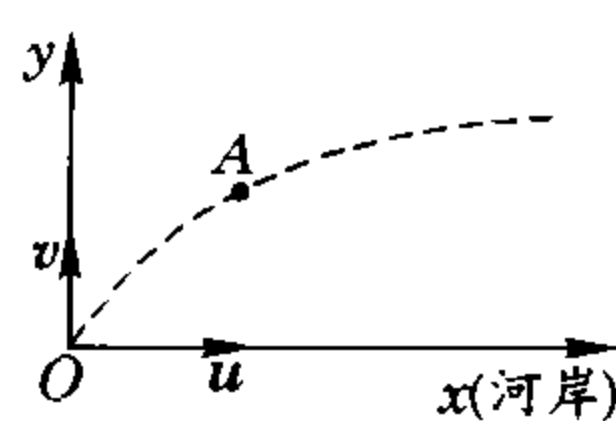


图 4-4

分析与解 设木筏相对于水的速度为 V ,则离岸时, $V = v - u$,其矢量关系如图 4-5(a) 所示,该图同时给出了此后木筏复合运动的速度情况:木筏相对于水的速度 V 方向不变、大小是变化的;木筏的绝对速度 v 大小、方向均有变化.故我们看到木筏的运动轨迹为一曲线.现如图 4-5 中(b)所示,连接 OA 的有向线段是时间 T 内木筏的绝对位移 $s_{\text{木}}$,而 $s_{\text{木}} = s_{\text{木对水}} + s_{\text{水}}$,其中 $s_{\text{水}}$ 沿 x 正方向, $s_{\text{木对水}}$ 平行于 V 方向.现作满足上式关系的位移矢量三角形,在 x 轴上得到 B 点,有向线段 OB 即为 $s_{\text{水}}$.由于水速 u 恒定,则各 T 时间内 $s_{\text{水}}$ 恒定,故可在 x 轴上得 $OB' = 2s_{\text{水}}$, $OB'' = 3s_{\text{水}}$,过 B' 、 B'' 点……作平行于 V 的直线交木筏轨迹于 A' 、 A'' ……各点,即得 $2T$ 、 $3T$ ……时刻此木筏的确切位置.

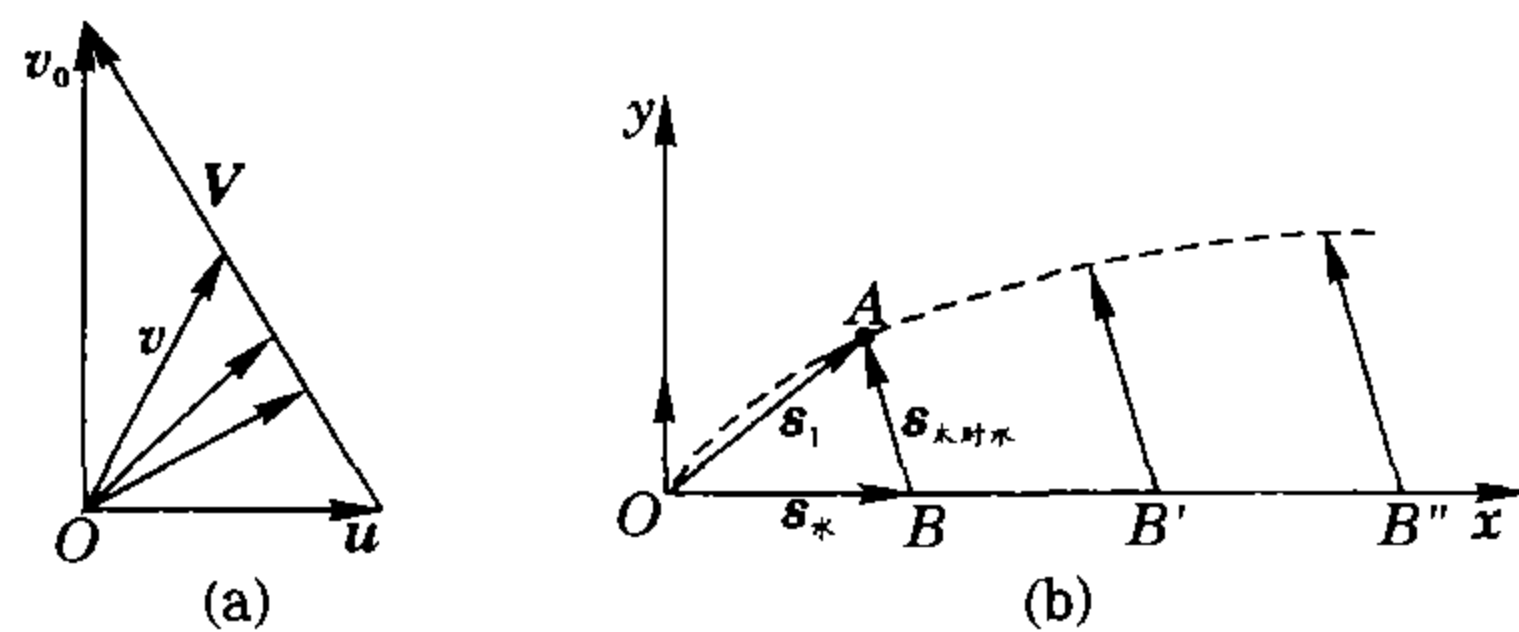


图 4-5

质点做变速运动时,若初速度为 v_0 ,末速度为 v_t ,则速度增量 $\Delta v = v_t - v_0$,这是一个矢量相减运算,其图解关系如图 4-1(c),利用这种矢量关系图解速度增量问题有其独到之处.

例 3 某一恒力作用在以恒定速度 v 运动的物体上,经过时间 t ,物体的速率减少一半,经过同样的时间

速率又减少一半,试求经过了 $3t$ 时间后,物体的速度 v_{3t} 之大小.

分析与解 由于物体受恒力作用,故在相同时间内,速度增量相同即 $\Delta v = v_1 - v = v_{2t} - v_1 = v_{3t} - v_{2t}$. 现作满足题给条件的矢量图如图 4-6 所示,图中有向线段 $AB = BC = CD = \Delta v$, $OB = v_1$, $v_1 = \frac{v}{2}$, $OC = v_{2t}$, $v_{2t} = \frac{v}{4}$, OD 为待求量 v_{3t} . 设恒力方向与 v 方向成 $\pi - \alpha$ 角,由图给几何关系,在 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OAC$ 、 $\triangle OAD$ 中运用余弦定理,得

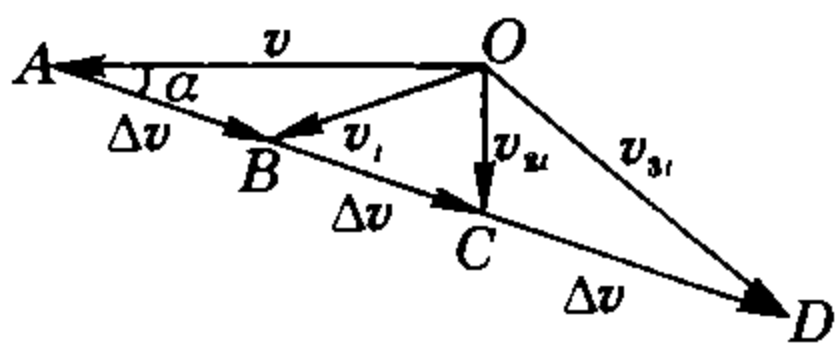


图 4-6

$$\begin{cases} (\frac{v}{2})^2 = v^2 + \Delta v^2 - 2v \cdot \Delta v \cdot \cos \alpha, \\ (\frac{v}{4})^2 = v^2 + (2\Delta v)^2 - 2v \cdot 2\Delta v \cdot \cos \alpha, \\ v_{3t}^2 = v^2 + (3\Delta v)^2 - 2v \cdot 3\Delta v \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

由此方程组可解得物体在恒力作用 $3t$ 时间后的速度大小为 $v_{3t} = \frac{\sqrt{7}}{4}v$.

例 4 从 h 高处斜向上抛出一初速度大小为 v_0 的物体,讨论抛出角 θ 为多大时物体落地的水平位移最大.

分析与解 物体做抛体运动时,只受重力作用.在落下 h 高度的时间 t 内,速度增量 Δv 恒为竖直向下,大小为 gt ,落地时速度 v 的大小为 $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$, v_0 、 v 与 Δv 构成如图

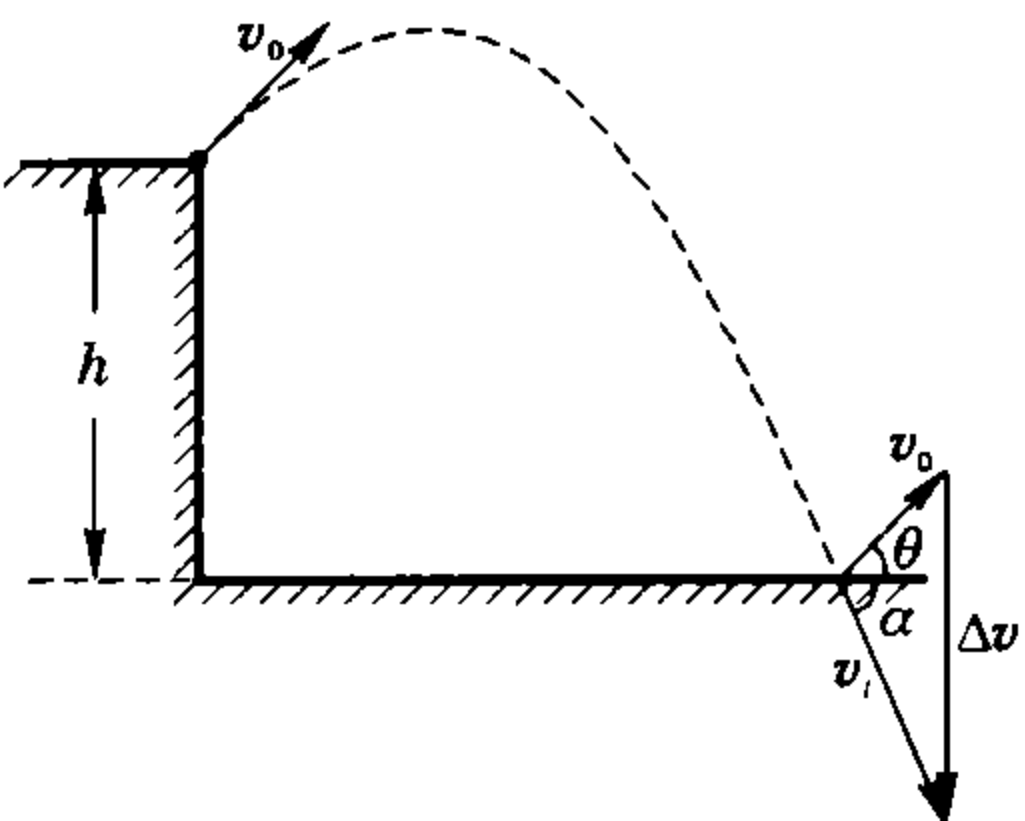


图 4-7

4-7 所示矢量三角形关系.图中 θ 角、 α 角分别是初速度、落地速度与水平方向的夹角.注意到在矢量三角形的面积 $S_{\Delta} = \frac{1}{2}gt \cdot v_0 \cos \theta$ 式中, $v_0 t \cos \theta$ 即为

抛体飞行的水平位移 x ,则有 $S_{\Delta} = \frac{1}{2}gx$. 这样,我们只须考虑何时矢量三角形有最大面积即可.由于 $S_{\Delta} = \frac{1}{2}v_0 \cdot v \sin(\theta + \alpha)$,而 v_0 、 v 大小确定,则当 $(\theta + \alpha) = 90^\circ$,即 $\theta = \arctan \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$ 时, S_{Δ} 有最大值: $\frac{1}{2}gx = \frac{1}{2}v_0 \cdot v$,亦即物体飞行的水平位移将达到最大,其值为 $x_m = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$.

例 5 网球以速度 v_0 落到一重球拍上后弹性地射回.为使球能沿着与原轨道垂直的方向射回,球拍应以什么样的速度 v_P 运动? 如果速度 v_0 和球拍面的法线的夹角是 α ,速度 v_P 和此法线的夹角 φ 是多少? 设任何时刻球拍和球都是做平动的.

分析与解 本题求解的关键是作满足题给条件的矢量关系图,而矢量图的完成又有赖于准确地把握各矢量间的关系,题中给出了三个重要的关于矢量间关系的隐含条件:第一,重球拍的“重”告诉我们,可以认为拍的速度 v_P 在碰球前后保持不变;第二,网球是弹性地射回,则告诉我们在碰撞前后,球相对于拍的速度大小相等、方向相反;第三,

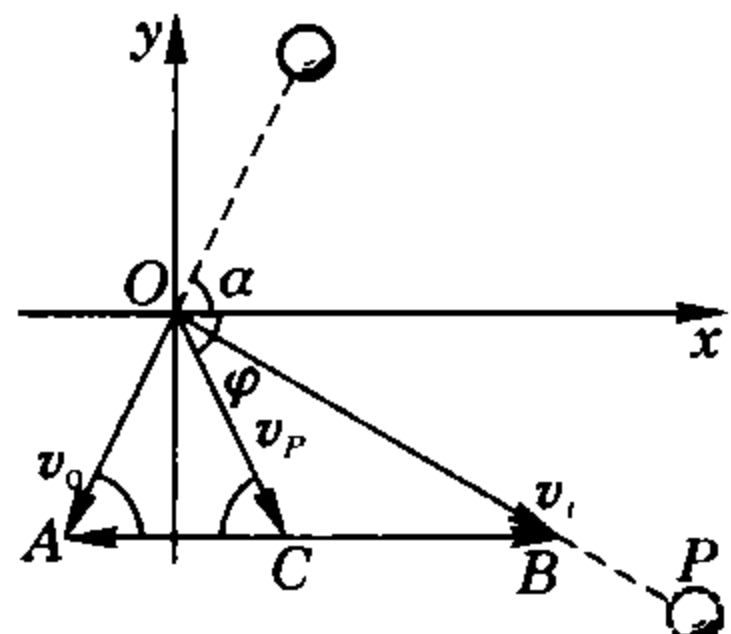


图 4-8

由于球和拍都是作平动的,故球相对于拍只有沿拍面法向速度而无切向速度分量.现取球拍面之法线为 x 轴,使 y 轴沿拍面, O 为网球入射点,如图 4-8 所示,从 O 点沿与 x 轴成 α 角方向作有向线段 $OA = v_0$,作射线 $OP \perp OA$,从 A 点作 x 轴平行线交 OP 于 B ,取 AB 中点 C ,则有向线段 OB 即是球离拍时的速度 v_1 ,有向线段 OC 则是球拍速度 v_P ,而有向线段 CA 、 CB 则是射入时球对拍速度 $v_0 - v_P$ 和弹回时球对球拍速度 $v_1 - v_P$,前面已经分析到,它们是等值、反向且沿球拍法向的.根据所作的矢量图,在直角三角形 OAB 中,斜边上的中线 $OC = \frac{AB}{2}$, $AB = \frac{OA}{\cos \alpha}$. 故 $v_P = \frac{v_0}{2 \cos \theta}$,而球拍速度与球拍法线方向夹角为 $\varphi = 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \pi - 2\alpha$.

嗨 小孩真手到

1. 甲、乙两船在静水中航行速度分别为 $v_{甲}$ 和 $v_{乙}$,两船从同一渡口向河对岸划去.已知甲船想以最短时间过河,乙船想以最短航程过河,结果两船抵达对岸的地点恰好相同,则甲、乙两船渡河所用时间之比 $t_{甲} : t_{乙} =$ _____.

2. 骑自行车的人以 20 km/h 的速率向东行驶,感到风从正北方吹来,以 40 km/h 的速率向东行驶,感到风从东北方向吹来,试求风向和风速.

3. 从离地面同一高度 h 、相距 l 的两处同时各抛出一个石块,一个以速度 v_1 竖直上抛,另一个石块以速度 v_2 向第一个石块原来位置水平抛出,求这两个石块在运动过程中,它们之间的最短距离.

4. 如图 4-9 所示,一条船平行于平直海岸线航行,船离岸的距离为 D ,船速为 v_0 ,一艘速率为 v ($v < v_0$) 的海上警卫小艇从港口出发沿直线航行去拦截这条船.(1)证明小艇必须在这条船驶过海岸线的某特定

点 A 之前出发, 这点在港口后面的 $\frac{\sqrt{v_0^2 + v^2}}{v}$ · D 处. (2) 如果快艇在尽可能迟的瞬间出发, 它在什么时候和什么地方截住这条船?

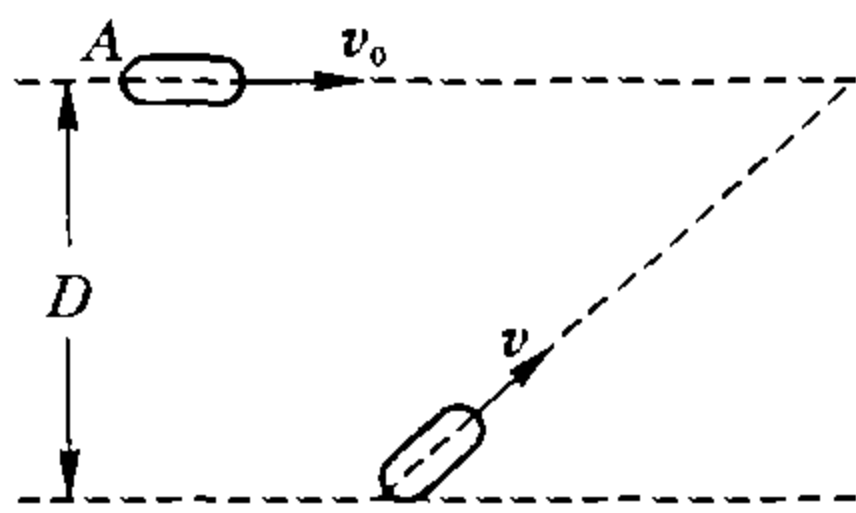


图 4-9

5. 一辆汽车的正面玻璃一次安装成与水平方向倾斜角为 $\beta_1 = 30^\circ$, 另一次安装成倾斜角度为 $\beta_2 = 15^\circ$, 问汽车两次速度之比 $v_1 : v_2$ 为多少时, 司机看见冰雹两次都是以竖直方向从车的正面玻璃上弹开? (冰雹相对地面是竖直下落的)

6. 敞开的旋转木马离转动轴距离为 r , 以角速度 ω 转动, 人站在木马上. 下雨了, 雨滴以速度 v_0 竖直下落. 试问人应该怎样支撑着雨伞才能够最有效地避开雨?

7. 如图 4-10 所示为从两列蒸汽机车上冒出的两股汽雾拖尾的照片(俯视). 两列车沿直轨道分别以速度 $v_1 = 50 \text{ km/h}$ 和 $v_2 = 70 \text{ km/h}$ 行驶, 行驶方向如图所示. 求风速.

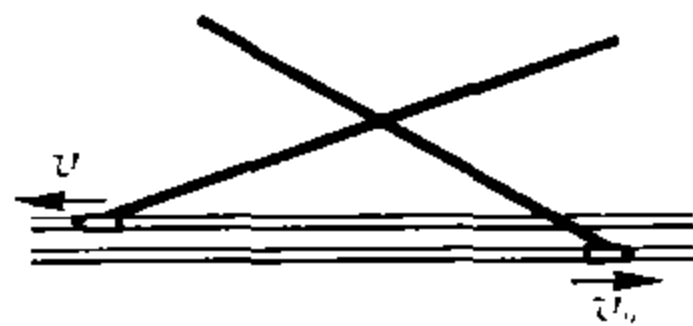


图 4-10

8. 磁带录音机的空带轴以恒定角速度转动, 重新绕上磁带. 绕好后带卷的末半径 $r_{末}$ 为初半径 $r_{初}$ 的 3 倍. 绕带的时间为 t_1 . 要在相同的带轴上重新绕上厚度为原磁带一半的薄磁带, 问需要多少时间?

9. 在听磁带录音机的录音时发觉: 带轴上带卷的半径经过时间 $t_1 = 20 \text{ min}$ 减小一半. 问此后半径又减小一半需要多少时间 t_2 ?

10. 快艇系在湖面很大的湖的岸边. 湖岸线可以认为是直线. 突然缆绳断开, 风吹着快艇以恒定的速度 $v_0 = 2.5 \text{ km/h}$ 沿与湖岸成 $\alpha = 15^\circ$ 角的方向飘去. 同时岸上一人从同一地点沿湖岸以速度 $v_1 = 4 \text{ km/h}$ 行走或在水中以速度 $v_2 = 2 \text{ km/h}$ 游去, 此人能否赶上快艇? 当快艇速度为多大时总可以被此人赶上?

11. 如图 4-11 所示, 在仰角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 的雪坡上举行跳台滑雪比赛. 运动员从坡上方 A 点开始下滑, 到起跳点 O 时借助设备和技巧, 保持在该点的速率而以与水平成 θ 角的方向起跳, 最后落在坡上 B 点, 坡上 O、B 两点距离 L 为此项运动的记录. 已知 A 点高于 O 点 $h = 50 \text{ m}$, 忽略各种阻力、摩擦, 求运动员最远可跳多少米, 此时起跳角为多大?

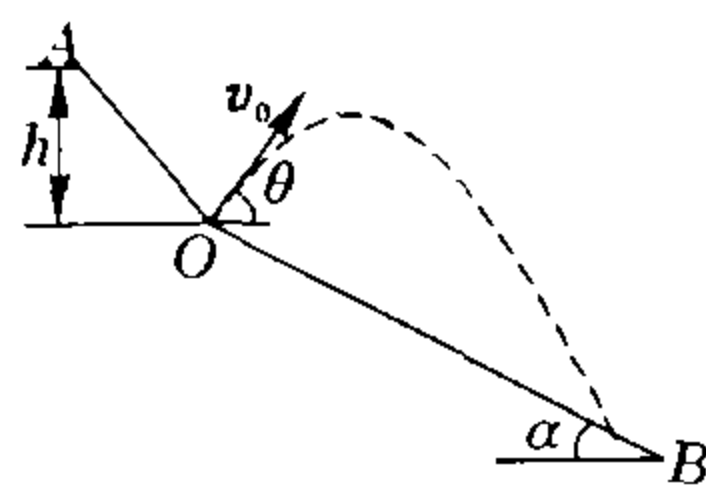


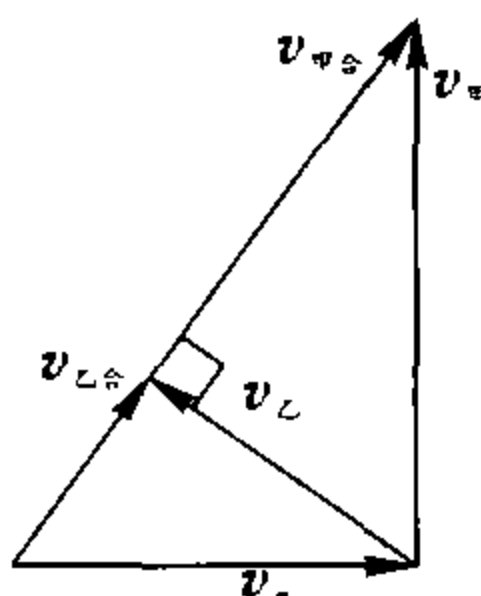
图 4-11

12. 一条在湖上以恒定速度行驶的船上, 有一与

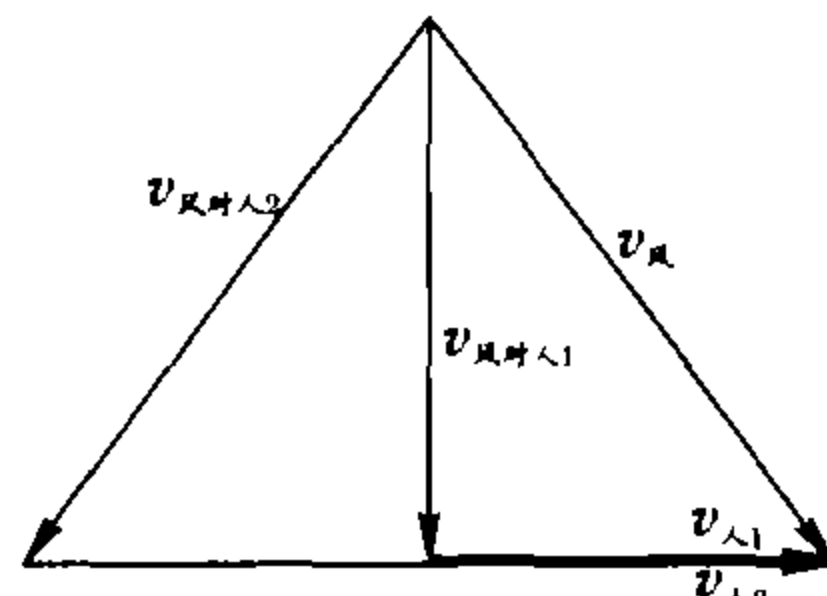
船固连的竖直光滑墙壁, 有一个小球沿水平方向射到墙上, 相对于岸, 小球速度的大小为 v_1 , 方向与墙的法线成 60° 角, 小球自墙反弹时的速度方向正好与小球入射到墙上时的速度方向垂直. 问船的速度应满足什么条件? 设小球与墙壁的碰撞是完全弹性的.

参考答案

1. 甲、乙船速度矢量关系如图答 4-1, 两船航程相同, 由图得 $\frac{t_{甲}}{t_{乙}} = \frac{v_{乙}^2}{v_{甲}^2}$.



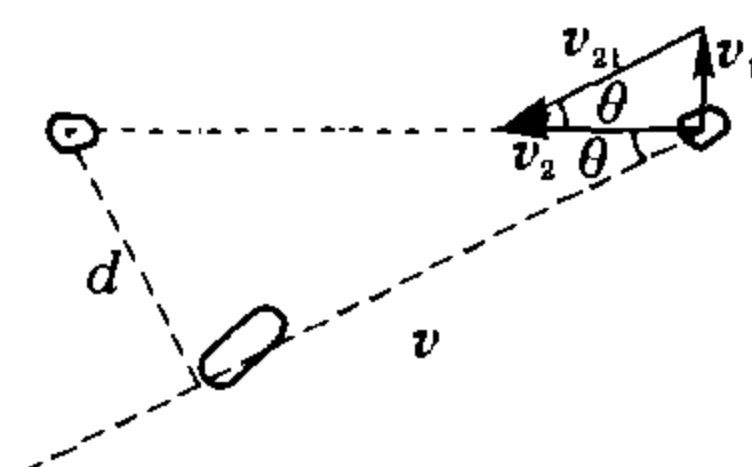
图答 4-1



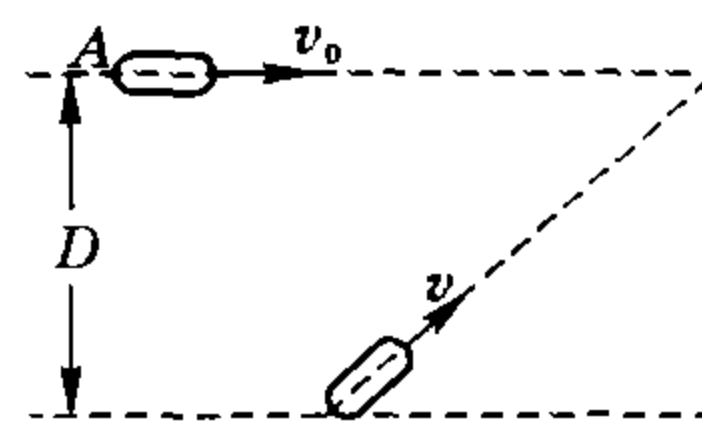
图答 4-2

2. 速度矢量 $v_{风} = v_{风对人} + v_{人}$ 的关系如图答 4-2, 由图易得 $v_{风} \approx 28 \text{ km/h}$.

3. 以竖直上抛的石块为参考系, 另一石块以相对速度 v_{21} 做匀速直线运动, 速度矢量关系如图答 4-3, 由图知 $v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, 两石块最短距离 $d = l \cdot \sin \theta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} l$, 这个最短距离适用于另一石块落地之前, 即 $\frac{l \cos \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{lv_2}{v_1^2 + v_2^2} \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时.



图答 4-3



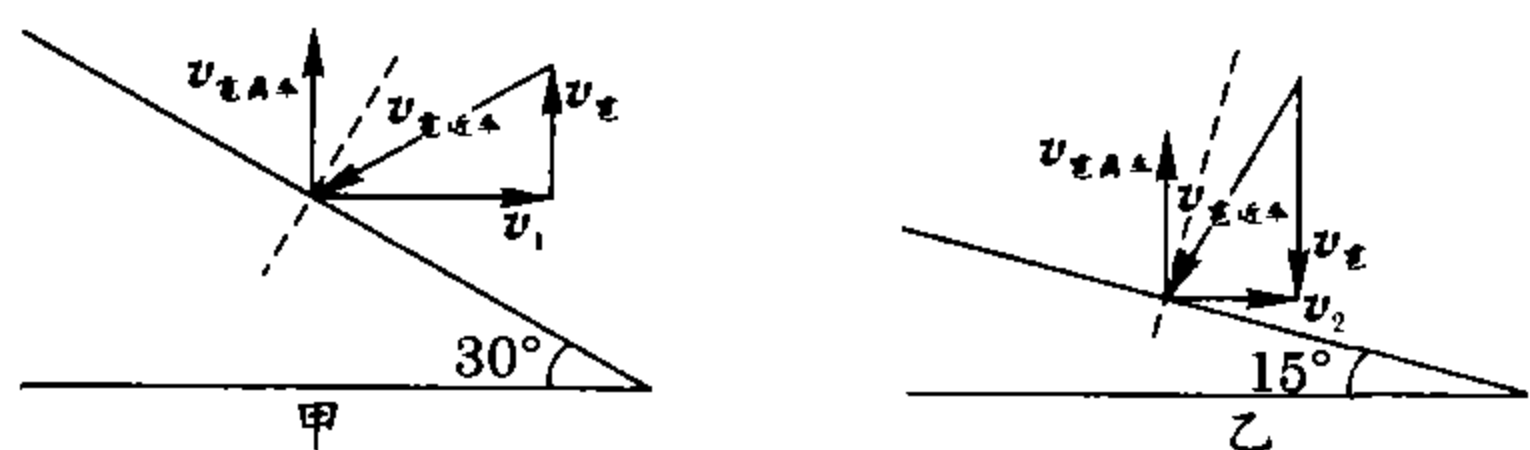
图答 4-4

4. (1) 艇相对船的速度方向不会超过 θ , 如图答 4-4 所示, $\cot \theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - v^2}}{v}$, A 点、港口间的连线与岸的夹角即两者相对位移方向不超过 θ , 则 A 点在港口后面 $s = D \cdot \cot \theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - v^2}}{v} D$.

(2) 当 $v_{相对} = \sqrt{v_0^2 - v^2}$ 时, 根据题目要求, 此时 $s_{相对} \frac{D}{\sin \theta} = \frac{Dv_0}{v}$, $t = \frac{Dv_0}{v_0 \sqrt{v_0^2 - v^2}}$, 截住船的位置在 A 前方 $v_0 t = \frac{Dv_0^2}{\sqrt{v_0^2 - v^2}}$ 处.

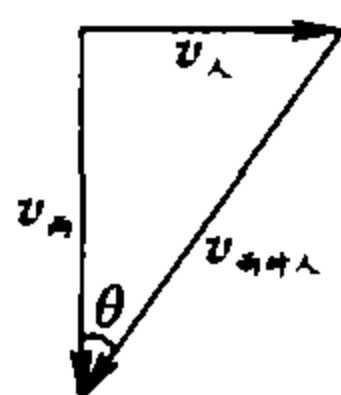
5. 冰雹落向车的速度与弹离车速度遵守“反射定律”, 故汽车以 v_1 运动时, $v_{雹近车}$ 的方向与车玻璃法线成 β_1 , 汽车以 v_2 运动时, 则成 β_2 角, 各速度矢量关系

如图答 4-5,由如图答 4-5 所示的甲、乙两图分别有 $v_1 = v_{\text{雷}} \cot 30^\circ, v_2 = v_{\text{雷}} \cot 60^\circ$, 则 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{1}$.

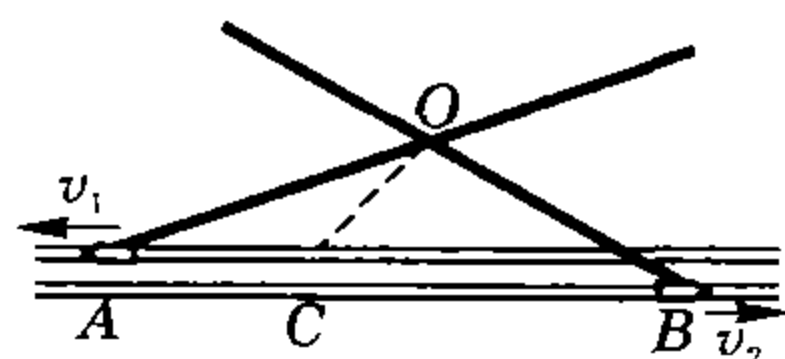


图答 4-5

6. $v_{\text{人}} = r\omega, v_{\text{雨}} = v_0, v_{\text{雨对人}} = v_{\text{雨}} - v_{\text{人}}$, 矢量关系如图答 4-6 所示, 由图可知, 相对于人, 雨的速度方向为 $\theta = \arctan \frac{r\omega}{v_0}$, 此即撑伞方向.



图答 4-6

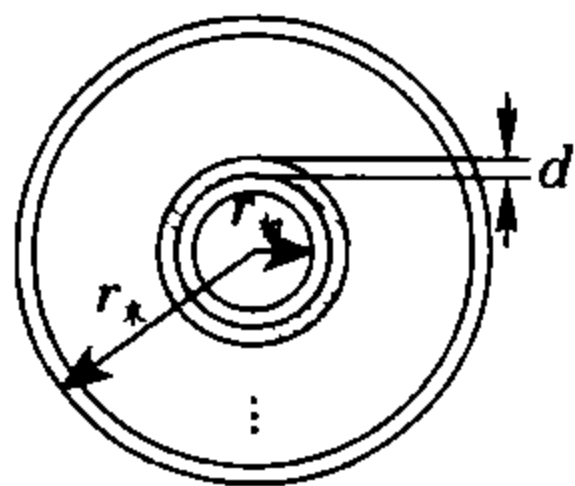


图答 4-7

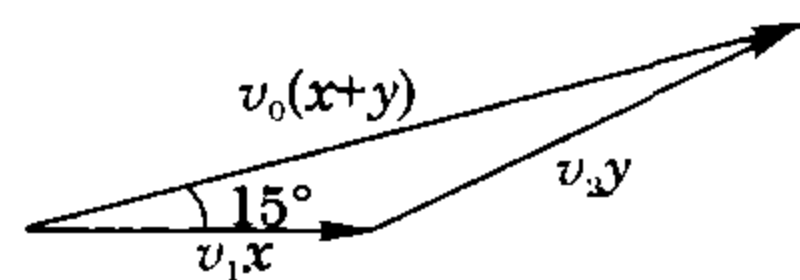
7. 观察照片, 将两车之距离 AB 按 5:7 比例分成左、右两部分, 分点 C 为两车相遇处, 汽雾交点为 O , CO 即为相遇时两车喷出之汽被风吹后的位移, 两车从相遇点 C 到照片上位置历时 $t = \frac{AB}{v_1 + v_2}$, 风速为 $\frac{CO}{t} \approx 35 \text{ km/h}$.

8. 如图答 4-8 所示, 设磁带的总长 l , 由题意当带厚为 d 时有 $ld = \pi(9r_{\text{初}}^2 - r_{\text{初}}^2)$, 当带厚为 $\frac{d}{2}$ 时有 $l \frac{d}{2} = \pi(R^2 - r_{\text{初}}^2)$, 得绕好后带卷半径 $R = \sqrt{5}r_{\text{初}}$, 因 $t_1 = \frac{2r_{\text{初}}}{d} \frac{2\pi}{\omega}; t_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)r_{\text{初}}}{d/2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$, 得 $t_2 = (\sqrt{5}-1)t_1$.

9. 与上题不同的是, 放音时磁带是匀速率地通过的, $t_1 = \frac{\pi(4r^2 - r^2)}{dv}, t_2 = \frac{\pi(r^2 - \frac{1}{4}r^2)}{dv}$, 则 $t_2 = \frac{t_1}{4} = 5 \text{ min}$.



图答 4-8



图答 4-9

10. 作快艇与人运动的位移矢量图, 人赶上艇, 两者位移矢量构成闭合三角形如图答 4-9, 设人以 v_1 速度运动时间 x , 以 v_2 速度运动时间 y , 则有

$(2y)^2 = (4x)^2 + [2.5(x+y)]^2 - 2 \times 4x \times 2.5(x+y) \cos 15^\circ$, 整理得

$$[89 - 20(\sqrt{6} + \sqrt{2})]x^2 + [50 - 20(\sqrt{6} + \sqrt{2})]xy +$$

$$9y^2 = 0,$$

因 $\Delta = [50 - 20(\sqrt{6} + \sqrt{2})]^2 - 4 \times 9[89 - 20(\sqrt{6} + \sqrt{2})] > 0$,

此式有解, 即人能赶上以 2.5 km/h 飘行的快艇; 推至一般, 只要

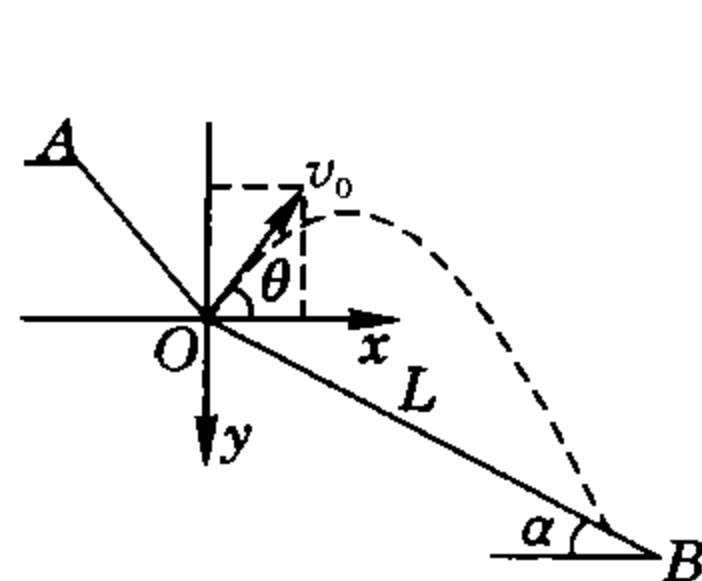
$$(2y)^2 = (4x)^2 + [v(x+y)]^2 - 2 \times 4x \times v(x+y) \cos 15^\circ$$

式成立, 即, 只要

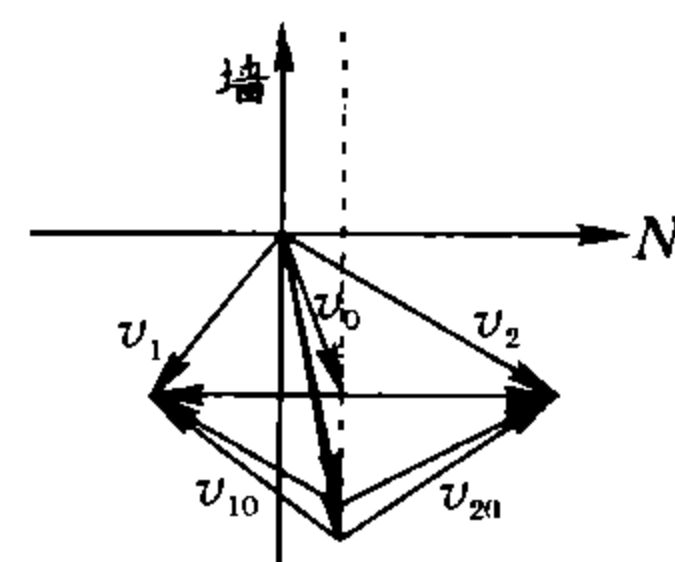
$$\Delta = (\sqrt{3}-1)v^2 - 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})v + 16 \geq 0, \\ v \leq 2\sqrt{2} \text{ km/h 总可赶上.}$$

11. 如图答 4-10 所示.

$$\begin{cases} x = L \cos \alpha, \\ y = L \sin \alpha. \end{cases} \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t, \\ y = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t \sin \theta. \end{cases}$$



图答 4-10



图答 4-11

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} g t - v_0 \sin \theta}{v_0 \cos \theta} \\ t = \frac{2(\tan \alpha v_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta)}{g}, \text{ 代入 } x = v_0 \cos \theta t,$$

$$v_0 = 10 \sqrt{10} \text{ m/s}, \alpha = \frac{\pi}{6}, g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$x = v_0 \cos \theta \frac{2(\tan \alpha v_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta)}{g} \\ = 2v_0^2 \frac{\tan \alpha \cdot \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$= 100 \frac{\sqrt{3}}{3} + 100(\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 2\theta)$$

$$\text{由 } a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(2\theta + \arctan \frac{b}{a}),$$

得

$$\text{上式} = 100 \frac{\sqrt{3}}{3} + 100 \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sin(2\theta + \frac{\pi}{6}).$$

$$\text{当 } 2\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } L \text{ 最大, 则 } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ 代入得}$$

$$L_{\text{max}} = 100\sqrt{3} \text{ (m).}$$

12. 设船速为 v_0 , 因为弹性碰撞, 小球相对墙的人射速度与反射速度大小相等, 速度方向遵守“入射角与反射角”, 如同例 5 作矢量关系图如图答 4-11, 由图知

只要 v_0 沿墙的法线方向分量 $v_{0N} = \frac{v_1}{2}$ 即可.

(未完待续)

专题5 物系相关速度

沈晨

教你一手

国内、外中学物理竞赛中多见求解物系相关速度，或解题的“瓶颈”卡在物系相关速度的试题，这类问题往往叙述简洁而条件隐蔽，情景相像而方法各异，使参赛者思路混沌，无从入手。例如：

类型1 质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 的三个质点 A、B、C 位于光滑的水平桌面上，用已拉直的不可伸长的柔软轻绳 AB 和 BC 连接， $\angle ABC = \pi - \alpha$ ， α 为锐角，如图 5-1 所示。今有一冲量 I 沿 BC 方向作用于质点 C，求质点 A 开始运动时的速度。（全国中学物理竞赛试题）

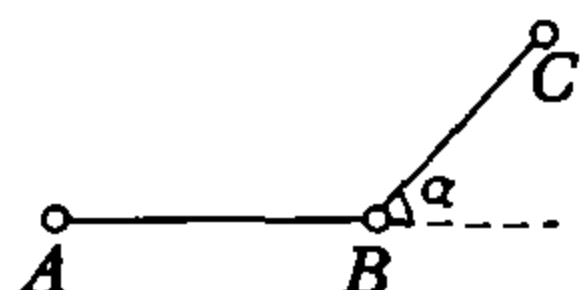


图 5-1

类型2 绳的一端固定，另一端缠在圆筒上，圆筒半径为 R ，放在与水平面成 α 角的光滑斜面上，如图 5-2 所示。当绳变为竖直方向时，圆筒转动角速度为 ω （此时绳未松弛），试求此刻圆筒轴 O 的速度、圆筒与斜面切点 C 的速度。（全国中学生奥林匹克物理竞

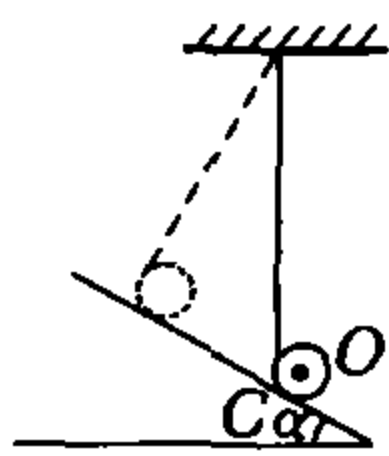


图 5-2

两小球在很远处时各自具有的电势能为零（因题目中描述电容器“产生的电场在很远处的电势为零”，再根据电势与电势能的关系就可以知道）。

两小球处于图示的静止状态时，设带正电小球的位置为 a ，该点的电势为 U_a ，带负电小球所在位置为 b ，该点的电势为 U_b ，则带正电小球电势能为 qU_a ，带负电小球电势能为 $-qU_b$ ，两小球的电势能之和为 $q(U_a - U_b)$ 。这就将求电势能之和的问题转化为求匀强电场中两点间电势差的问题了。两小球在图示的静止状态时所处的环境中存在向下的匀强电场，且两小球位于同一条电场线上（题目中叙述“杆与板面垂直”）。设电容器极板间匀强电场场强为 E ，极板间的电势差为 U ，则有

赛试题)

类型3 直线 AB 以大小为 v_1 的速度沿垂直于 AB 的方向向上移动，而直线 CD 以大小为 v_2 的速度沿垂直于 CD 的方向向左上方移动，两条直线交角为 α ，如图 5-3 所示。求它们的交点 P 的速度大小与方向。（全国中学生力学竞赛试题）

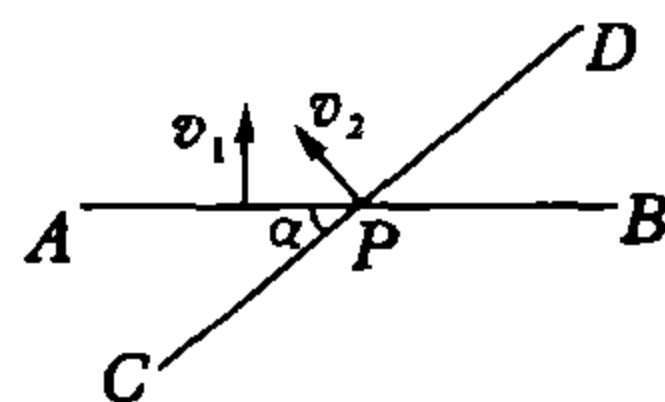


图 5-3

以上三例展示了三类物系相关速度问题。类型 1 求的是由杆或绳约束物系的各点速度；类型 2 求接触物系接触点速度；类型 3 则是求相交物

系交叉点速度。三类问题既有共同遵从的一般规律，又有由各自相关特点所决定的特殊规律，我们若能抓住它们的共性与个性，解决物系相关速度问题便有章可循。

首先应当明确，我们讨论的问题中，研究对象是刚体、刚性球、刚性杆或拉直的、不可伸长的线等，它们都具有刚体的力学性质，是不会发生形变的理想化物体，刚体上任意两点之间的相对距离是恒定不变的；任何刚体的任何一种复杂运动都是由平动与转动复合而成的。如图 5-4 所示，三角板从位置 ABC 移动到位置 A'B'C'，我们可以认为整个板一方面做平动，使板上点 B

$$q(U_a - U_b) = qEl = q \frac{U}{d} l = q \frac{Q}{Cd} l = \frac{Qlq}{Cd}$$

其值为正，故两小球的电势能相对于很远处来说是增大的，则两小球从无穷远处移到图示位置只能是杆与球克服电场力做功。设杆与球在很远处时电势能为 $E_{初}$ ，杆与球在图示的静止状态时电势能为 $E_{末}$ ，电场力对两小球做的总功为 W ，则

$$E_{初} = 0, E_{末} = \frac{Qlq}{Cd}$$

$$\text{所以 } W = E_{初} - E_{末} = 0 - q(U_a - U_b) = -\frac{Qlq}{Cd}$$

功是一个标量，它的大小是包含正负的，这里的负号是不能随便省略的。省略了负号的性质就由负功变为正功了。这是命题专家的失误之处。

移到点 B' , 另一方面又以点 B' 为轴转动, 使点 A 到达点 A' 、点 C 到达点 C' 。

由于前述刚体的力学性质所致, 点 A 、 C 及板上各点的平动速度相同, 否则板上各点的相对位置就会改变。这里, 我们称点 B' 为基点。

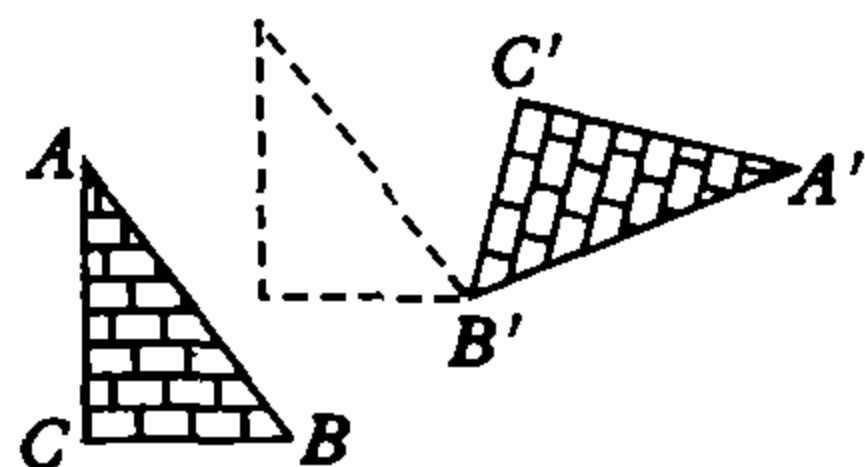


图 5-4

分析刚体的运动时, 基点可以任意选择。于是我们得到刚体运动的速度法则: 刚体上每一点的速度都是与基点速度相同的平动速度和相对于该基点的转动速度的矢量和。我们知道转动速度 $v = r\omega$, r 是转动半径, ω 是刚体转动角速度, 刚体自身转动角速度则与基点的选择无关。

根据刚体运动的速度法则, 对于既有平动又有转动的刚性杆或不可伸长的线绳, 每个时刻我们总可以找到某一点, 这一点的速度恰是沿杆或绳的方向, 以它为基点, 杆或绳上其他点在同一时刻一定具有相同的沿杆或绳方向的分速度 (与基点相同的平动速度)。因此, 我们可以得到下面的结论。

结论 1 杆或绳约束物系各点速度的相关特征是: 在同一时刻必具有相同的沿杆或绳方向的分速度。

我们再来研究接触物系接触点速度的特征。由刚体的力学性质及“接触”的约束可知, 沿接触面法线方向, 接触双方必须具有相同的法向分速度, 否则将分离或形变, 从而违反接触或刚性的限制。至于沿接触面的切向接触双方是否有相同的分速度, 则取决于该方向上双方有无相对滑动, 若无相对滑动, 则接触双方将具有完全相同的速度。因此, 我们可以得到下面的结论。

结论 2 接触物系接触点速度的相关特征是: 沿接触面法向的分速度必定相同, 沿接触面切向的分速度在无相对滑动时相同。

相交物系交叉点速度的特征是什么呢? 我们来看交叉的两直线 a 、 b , 如图 5-5 所示, 设直线 a 不动, 当直线 b 沿自身方向移动时, 交点 P 并不移动, 而当直线 b 沿直线 a 的方向移动时, 交点 P 便沿直线 a 移动, 因交点 P 亦是直线 b 上一点, 故与直线 b 具有相同的沿直线 a 方向的平移速度。同理, 若直线 b 固定, 直线 a

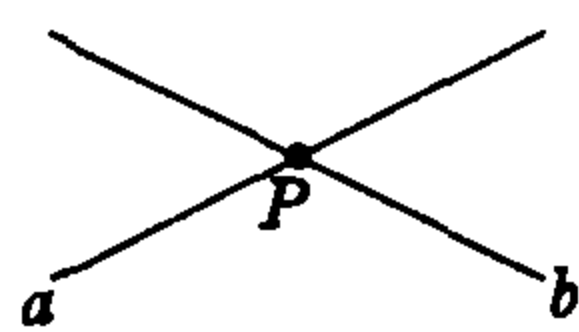


图 5-5

移动, 交点 P 的移动速度与直线 a 沿直线 b 方向平动的速度相同。根据运动合成原理, 当两直线 a 、 b 各自运动, 交点 P 的运动分别是两直线沿对方直线方向运动的合运动。于是我们可以得到下面的结论。

结论 3 线状相交物系交叉点的速度是相交双方

沿对方切向运动分速度的矢量和。

这样, 我们将刚体的力学性质、刚体运动的速度法则运用于三类相关速度问题, 得到了这三类相关速度特征, 依据这些特征, 并运用速度问题中普遍适用的合成法则、相对运动法则, 解题便有了操作的章法。

下面我们对每一类问题各给出 3 道例题, 展示每一条原则在不同情景中的应用。

例 1 如图 5-6 所示, 杆 AB 的 A 端以速度 v 做匀速运动, 在杆运动时恒与一静止的半圆周相切, 半圆周的半径为 R , 当杆与水平线的交角为 θ 时, 求杆的角速度 ω 及杆上与半圆相切点 C 的速度。

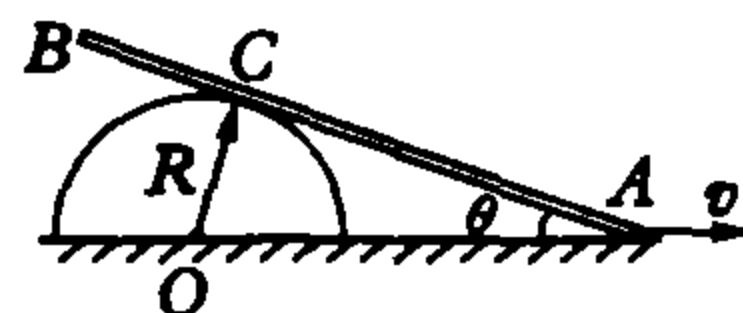


图 5-6

分析与解 考察切点 C 的情况。由于半圆静止, 杆上点 C 速度的法向分量为零, 故点 C 速度必沿杆的方向。以点 C 为基点, 将杆上点 A 速度 v 分解成沿杆方向分量 v_1 和垂直于杆方向分量 v_2 (如图 5-7 所示), 则 v_1 是点 A 与点 C 相同的沿杆方向平动速度, v_2 是点 A 对点 C 的转动速度, 故可求得点 C 的速度为

$$v_C = v_1 = v \cdot \cos \theta,$$

又

$$v_2 = v \cdot \sin \theta = \omega \cdot \overline{AC}.$$

由题给几何关系知, A 点对 C 点的转动半径为

$$\overline{AC} = R \cdot \cot \theta,$$

代入前式中即可解得

$$\omega = \frac{v \sin^2 \theta}{R \cos \theta}.$$

例 2 如图 5-8 所示, 合页构件由三个菱形组成, 其边长之比为 $3:2:1$, 顶点 A_3 以速度 v 沿水平方向向右运动, 求当构件所有角都为直角时, 顶点 B_2 的速度 v_{B_2} 。

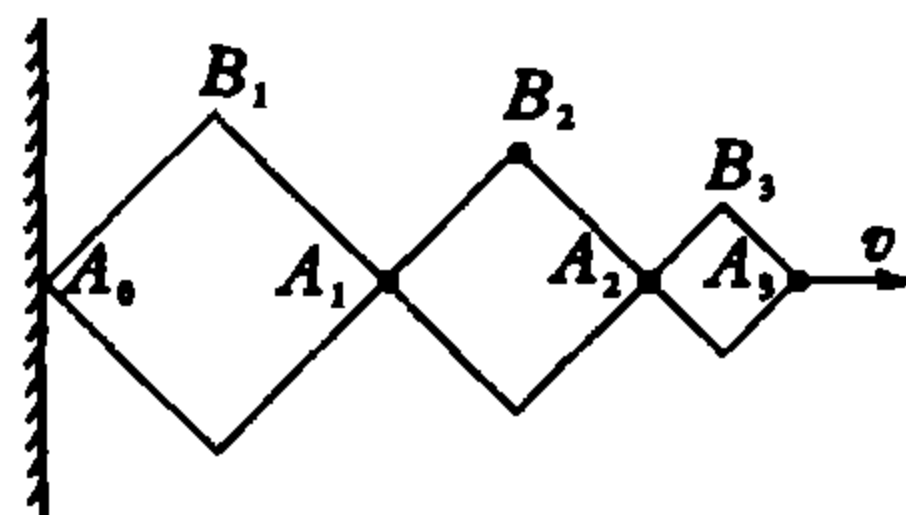


图 5-8

分析与解 顶点 B_2 作为 B_2A_1 杆上的一点, 其速度是沿 B_2A_1 杆方向的速度 v_1 及垂直于 B_2A_1 杆方向速度 v_1' 的合成; 同时作为杆 B_2A_2 上的一点, 其速度又是沿 B_2A_2 杆方向的速度 v_2 及垂直于 B_2A_2 杆方向的速度 v_2' 的合成。由于两杆互成直角的特定条件, 由

图 5-9 显见, $v_2 = v_1'$, $v_1 = v_2'$. 故顶点 B_2 的速度可通过 v_1 、 v_2 速度的矢量和求得, 而根据杆的约束的特征, 得

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A_1};$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{A_2},$$

于是可得

$$v_{B_2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_{A_2}\right)^2}.$$

由几何关系可知

$$\begin{aligned} v_{A_1} : v_{A_2} : v_{A_3} &= \overline{A_0 A_1} : \overline{A_0 A_2} : \overline{A_0 A_3} \\ &= 3 : 5 : 6, \end{aligned}$$

则

$$v_{A_1} = \frac{v}{2}, v_{A_2} = \frac{5}{6} v,$$

由此求得

$$v_{B_2} = \frac{\sqrt{17}}{6} v.$$

上述解析, 我们是选取了速度为沿杆方向的某一点为基点来考察顶点 B_2 的速度的. 当然我们也可以选取其他合适的点为基点来分析. 如图 5-10 所示, 若以 A_1 、 A_2 点为基点, 则 B_2 点作为

$B_2 A_1$ 杆上的点, 其速度是与 A_1 点相同的平动速度 v_{A_1} 和对 A_1 点的转动速度 v_{n_1} 之合成, 同时 B_2 点作为 $B_2 A_2$ 杆上的点, 其速度是与 A_2 点相同的平动速度 v_{A_2} 和对 A_2 点的转动速度 v_{n_2} 之合成, 再注意到题给的几何条件, 从矢量三角形中由余弦定理得

$$v_{B_2} = \sqrt{v_{A_1}^2 + v_{n_1}^2 - 2v_{A_1} v_{n_1} \cos 135^\circ},$$

而由矢量图可知

$$v_{n_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} (v_{A_2} - v_{A_1}),$$

代入前式可得

$$v_{B_2} = \frac{\sqrt{17}}{6} v.$$

两解殊途同归.

例 3 如图 5-11 所示, 物体 A 置于水平面上, 物体 A 上固定有动滑轮 B , D 为定滑轮, 一根轻绳绕过滑轮 D 、 B 后固定在 C 点, BC 段水平. 当以速度 v 拉绳头时, 物体 A 沿水平面运动, 若绳与水平面夹

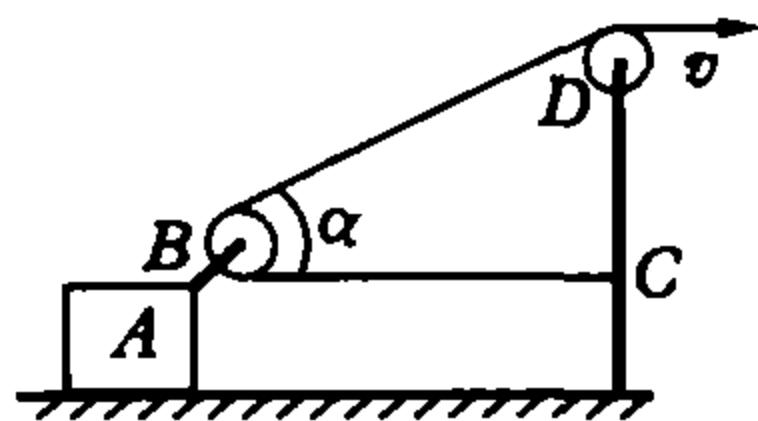


图 5-11

角为 α , 物体 A 运动的速度是多大?

分析与解 首先根据绳约束特点, 任何时刻绳 BD 段上各点有与绳端 D 相同的沿绳 BD 段方向的分速度 v , 再看绳的这个速度与物体 A 移动速度的关系: 设物体 A 右移速度为 v_x , 则相对于物体 A (或动滑轮 B 的轴心), 绳上 B 点的速度为 v_x , 即

$$v_{BA} = v_x,$$

方向沿绳 BD 方向; 而根据运动合成法则, 在沿绳 BD 方向上, 绳上 B 点速度是相对于参照系 A (或动滑轮 B 的轴心) 的速度 v_x 与参照系 A 对静止参照系速度 $v_x \cos \alpha$ 的合成, 即

$$v = v_{BA} + v_x \cos \alpha;$$

由上述两方面可得

$$v_x = \frac{v}{1 + \cos \alpha}.$$

例 4 如图 5-12 所示, 半径为 R 的半圆凸轮以等速 v_0 沿水平面向右运动, 带动从动杆 AB 沿竖直方向上升, O 为凸轮圆心, P 为其顶点. 求当 $\angle AOP = \alpha$ 时, AB 杆的速度.

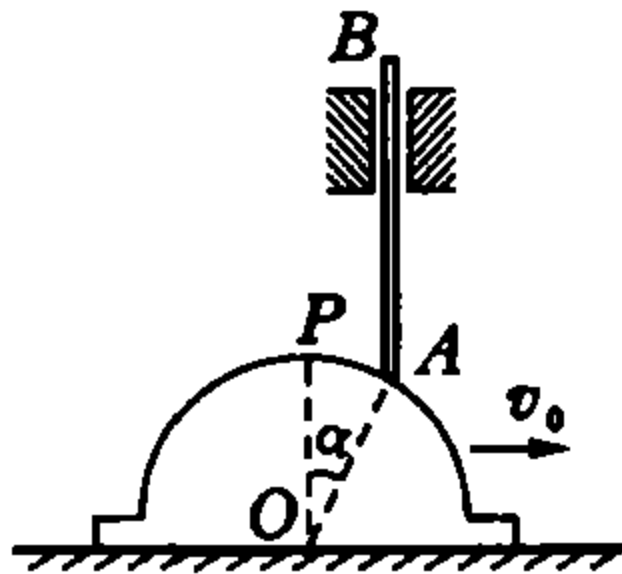


图 5-12

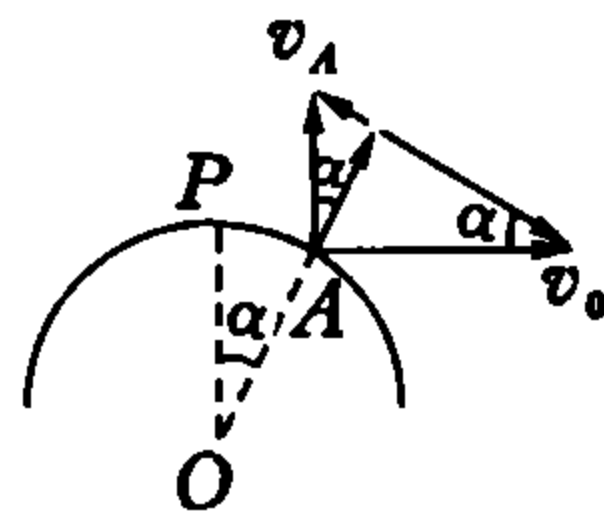


图 5-13

分析与解 这是接触物系相关速度问题. 由题可知, 杆与凸轮在 A 点接触, 杆上 A 点速度 v_A 是竖直向上的, 轮上 A 点的速度 v_0 是水平向右的, 根据接触物系触点速度相关特征, 两者沿接触面法向的分速度相同, 如图 5-13 所示, 即

$$v_A \cos \alpha = v_0 \sin \alpha,$$

则

$$v_A = v_0 \tan \alpha.$$

故 AB 杆的速度为 $v_0 \tan \alpha$.

例 5 如图 5-14 所示, 缠在线轴上的绳子一头搭在墙上的光滑钉子 A 上, 以恒定的速度 v 拉绳, 当绳与竖直方向成 α 角时, 求线轴中心 O 的运动速度 v_0 . 设线轴的外径为 R , 内径为 r , 线轴沿水平面做无滑动的滚动.

分析与解 当线轴以恒定的速度 v 拉绳时, 线轴沿顺时针方向运动. 从绳端速度 v 到轴心速度 v_0 , 是通过绳、轴相切接触相关的. 考察切点 B 的速度: 本题中绳与线轴间无滑动, 故绳上 B 点与轴上 B 点速度完全相同, 即无论沿切点法向或切向, 两者均有相同的分速度. 图 5-15 是轴上 B 点与绳上 B 点速度矢量图: 轴

上 B 点具有与轴心相同的平动速度 v_0 及对轴心的转动速度 $r\omega$ (ω 为轴的角速度), 那么沿切向轴上 B 点的速度为 $r\omega - v_0 \sin \alpha$; 而绳上 B 点速度的切向分量正是沿绳方向、大小为速度 v , 于是有关系式, 即

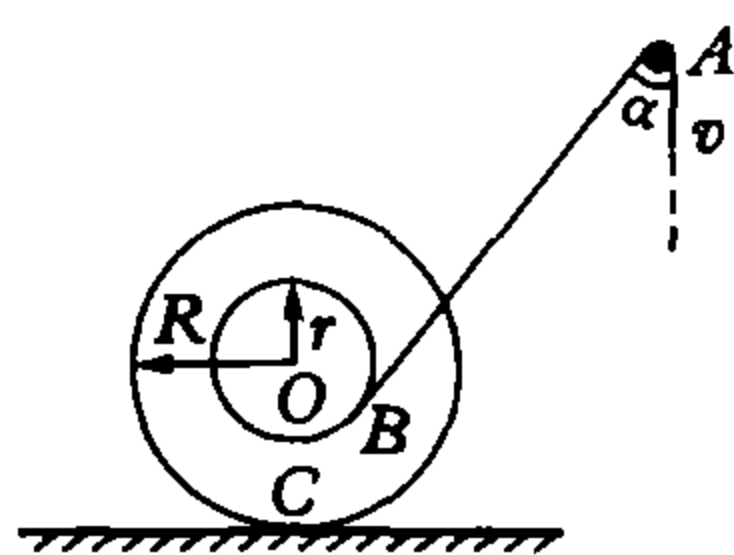


图 5-14

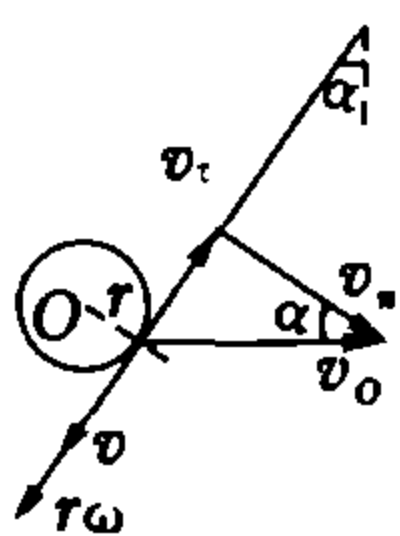


图 5-15

$$r\omega - v_0 \sin \alpha = v. \quad (1)$$

又由于线轴沿水平地面做纯滚动, 故与水平地面相切点 C 的速度为零, 则轴心速度为

$$v_0 = R\omega, \quad (2)$$

由①、②两式可解得

$$v_0 = \frac{Rv}{r - R \sin \alpha}.$$

若绳拉线轴使线轴逆时针转动, $v_0 = \frac{Rv}{r - R \sin \alpha}$.

请读者自行证明.

例 6 如图 5-16 所示, 线轴沿水平面做无滑动的滚动, 并且线端 A 点速度为 v , 方向水平. 以铰链固定于点 B 的木板靠在线轴上, 线轴的内、外径分别为 r 和 R . 试确定木板的角速度 ω 与角 α 的关系.

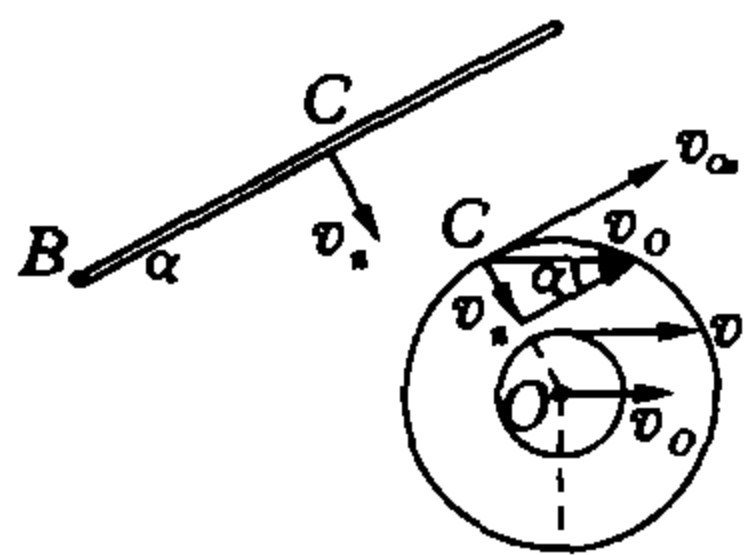


图 5-16

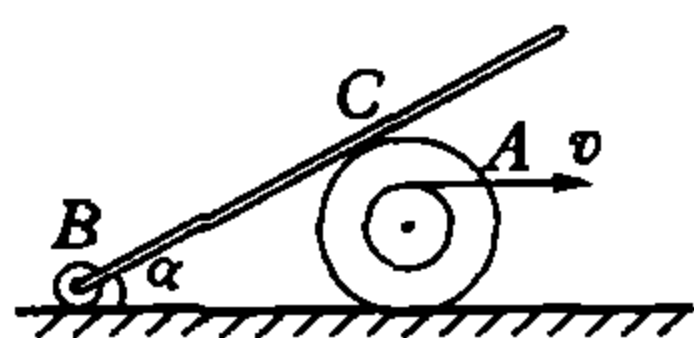


图 5-17

分析与解 设木板与线轴相切于 C 点, 则板上 C 点与线轴上 C 点有相同的法向速度 v_n , 而板上 C 点的这个法向速度正是 C 点关于 B 轴的转动速度, 如图 5-17 所示, 即

$$v_n = \omega \cdot \overline{BC} = \omega \cdot R \cot \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

现在再来考察线轴上 C 点的速度: 它应是 C 点对轴心 O 的转动速度 v_{C_n} 和与轴心相同的平动速度 v_0 的矢量和, 而 v_{C_n} 是沿 C 点切向的, 则 C 点法向速度 v_n 应是

$$v_n = v_0 \sin \alpha. \quad (2)$$

又由于线轴为刚体且做纯滚动, 故以线轴与水平面切点为基点, 应有

$$\frac{v}{R+r} = \frac{v_0}{R}. \quad (3)$$

将②、③两式代入①式中, 得

$$\omega = \frac{1 - \cos \alpha}{R+r} v.$$

例 7 如图 5-18 所示, 水平直杆 AB 在圆心为 O、半径为 r 的固定圆圈内以匀速 u 竖直下落, 试求套在该直杆和圆圈的交点处一小滑环 M 的速度, 设 OM 与竖直方向的夹角为 φ .

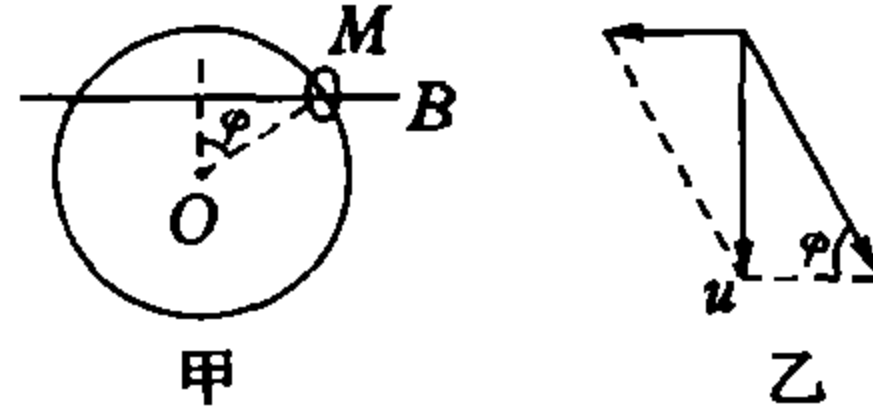


图 5-18

分析与解 当小环从圆圈顶点滑过圆心角为 φ 的一段弧时, 据交叉点速度相关特征, 将杆的速度 u 沿杆方向与圆圈切线方向分解, 则 M 的速度为

$$v = \frac{u}{\sin \varphi}.$$

例 8 如图 5-19 所示, 直角曲杆 OBC 绕 O 轴在如图 5-19 所示的平面内转动, 使套在其上的光滑小环沿固定直杆 OA 滑动. 已知 $\overline{OB} = 10$ cm, 曲杆的角速度 $\omega = 0.5$ rad/s, 求 $\varphi = 60^\circ$ 时, 小环 M 的速度.

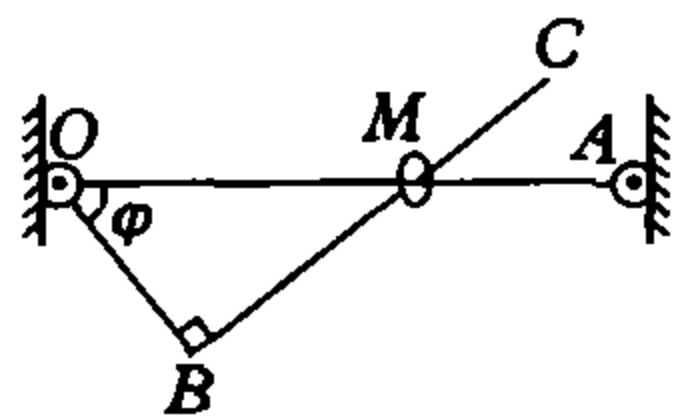


图 5-19

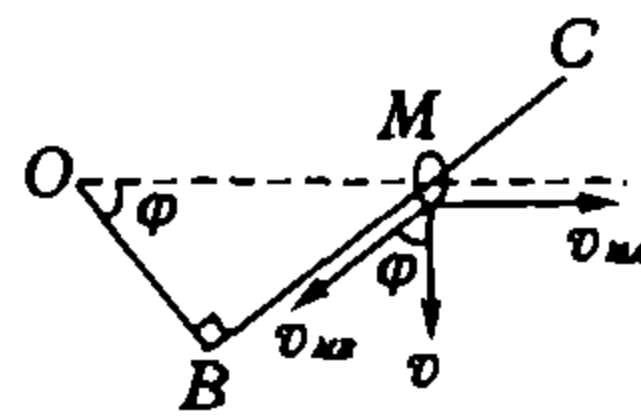


图 5-20

分析与解 本题首先应该求出交叉点 M 作为杆 BC 上一点的速度 v , 而后根据交叉点速度相关特征, 求出该速度沿 OA 方向的分量即为小环速度.

由于刚性曲杆 OBC 以 O 为轴转动, 故其上与 OA 直杆交叉点的速度方向垂直于转动半径 \overline{OM} 、大小是

$$v = \omega \cdot \overline{OM} = 10 \text{ cm/s}.$$

将其沿 MA、MB 方向分解成两个分速度, 如图 5-20 所示, 即得小环 M 的速度为

$$v_M = v_{MA} = v \cdot \tan \varphi = 10\sqrt{3} \text{ cm/s}.$$

例 9 如图 5-21 所示, 一个半径为 R 的轴环 O_1 立在水平面上, 另一个同样的轴环 O_2 以速度 v 从这个轴环旁通过, 试求两轴环上部交叉点 A 的速度 v_A 与两环中心之距离 d 之间的关系. 轴环很薄且第二个轴环紧邻第一个轴环.

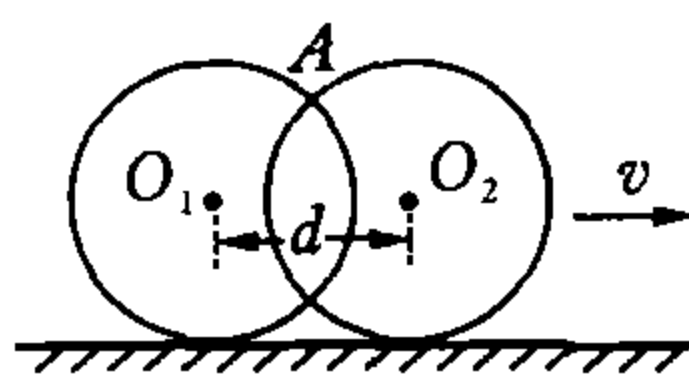


图 5-21

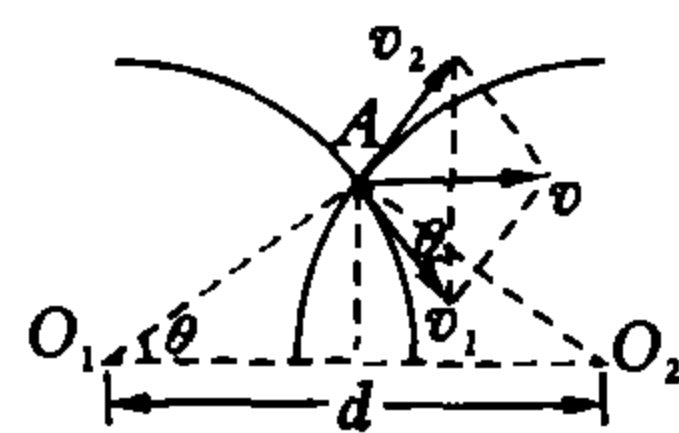


图 5-22

分析与解 轴环 O_2 速度为 v , 将此速度沿轴环 O_1 、 O_2 的交叉点 A 处的切线方向分解成 v_1 、 v_2 两个分量, 如图 5-22, 由线状相交物系交叉点相关速度规律可知, 交叉点 A 的速度即为沿对方速度分量 v_1 . 注意到图 5-22 中显示的几何关系便可得

$$v_A = \frac{v}{2\sin\theta} = \frac{v}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{4R^2 - d^2}} v.$$

小球身手

1. 顶杆 AB 可在竖直滑槽 K 内滑动, 其下端由凸轮 M 推动. 凸轮绕 O 轴以匀角速 ω 转动, 在图 5-23 所示时刻, $\overline{OA} = r$, 凸轮轮缘与 A 接触处法线 n 与 OA 之间的夹角为 α , 试求顶杆的速度.

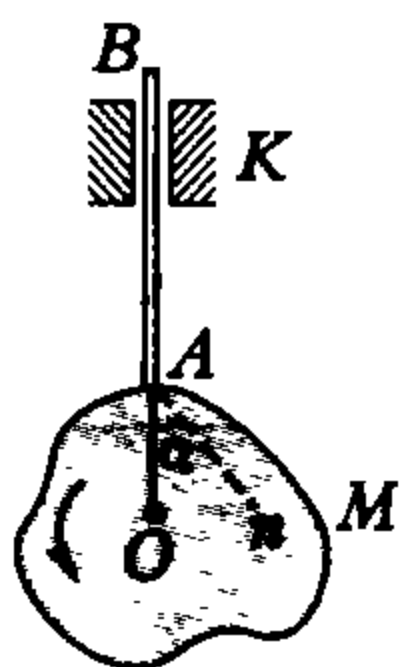


图 5-23

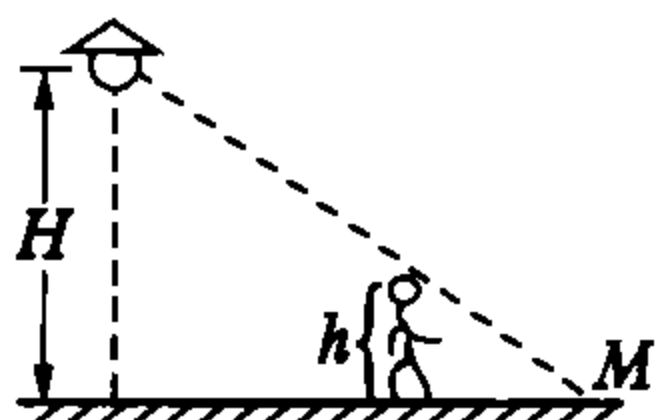


图 5-24

2. 一人身高为 h , 在灯下以匀速率 v_A 沿水平直线向右行走. 如图 5-24 所示, 设灯距地面高度为 H , 求人影的顶端 M 点沿地面移动的速度.

3. 如图 5-25 所示, 缠在线轴 A 上的线被绕过滑轮 B 以恒定速率 v_0 拉出, 这时线轴沿水平面做无滑动滚动. 求线轴中心 O 点的速度随线与水平方向的夹角 α 的变化关系. 设线轴的内、外半径分别为 R 与 r .

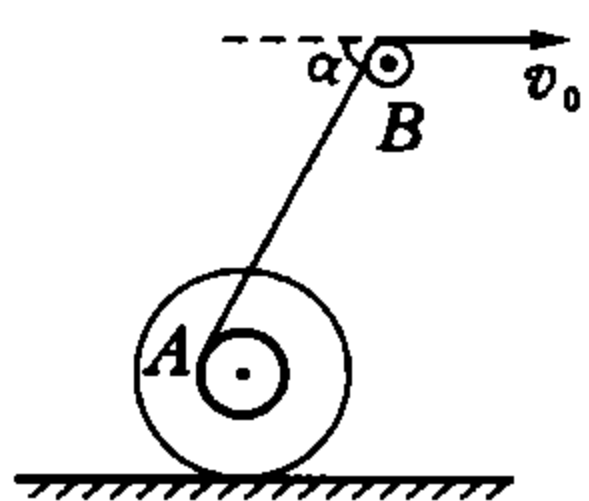


图 5-25

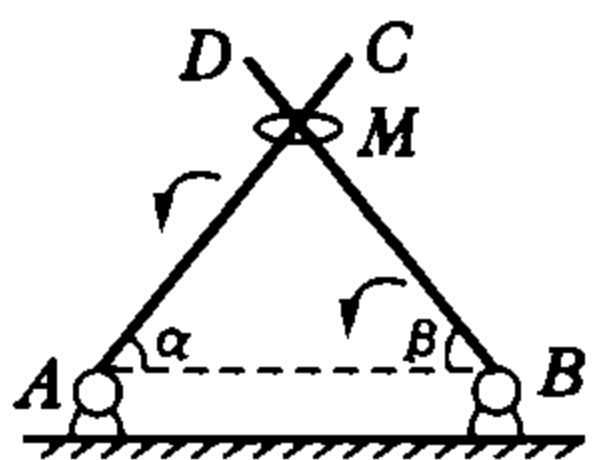


图 5-26

4. 图 5-26 中的两杆 AC 、 BD 以匀角速度 ω 分别绕两固定轴 A 、 B 在同一竖直面上转动, 转动方向如图所示. 小环 M 套在两杆上, $t=0$ 时图中 $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\overline{MA} = \overline{MB} = l$. 试求此后任意时刻 t 小球 (未落地) M 运动的速度大小.

5. 如图 5-27 所示, 一个球以速度 v 沿直角斜槽 ABC 的棱角做无滑动的滚动, AB 等效于球的瞬时转轴. 试问球上哪些点的速度最大? 最大速度为多少?

6. 如图 5-28 所示, 由两个圆环所组成的滚珠轴承, 其内环半径为 R_2 , 外环半径为 R_1 , 在二环之间分

布的小圆球 (滚珠) 半径为 r , 外环以线速度 v_1 沿顺时针方向转动, 而内环则以线速度 v_2 沿顺时针方向转动, 试求小球中心围绕圆环的中心顺时针转动的线速度 v 和小球自转的角速度 ω , 设小球与圆环之间无滑动发生.

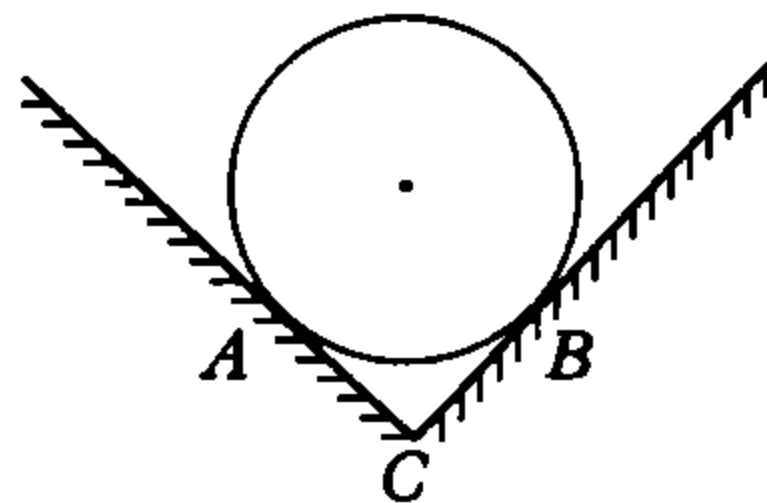


图 5-27

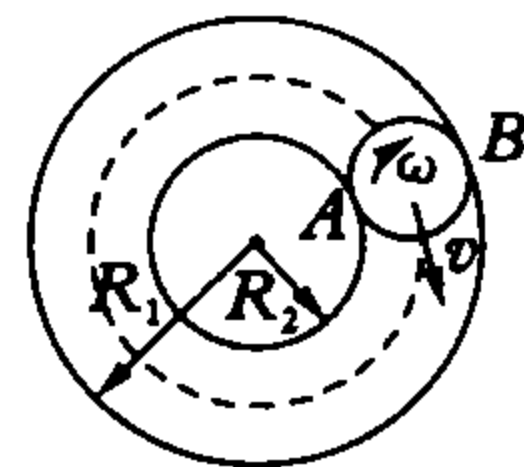


图 5-28

7. 一片胶合板从空中下落, 发现在某个时刻板上 a 点速度和 b 点速度相同, 即 $v_a = v_b = v$, 且方向均沿板面; 同时还发现板上 c 点速度大小比速度 v 大一倍, c 点到 a 、 b 两点的距离等于 a 、 b 两点之间距离. 试问板上哪些点的速度等于 $3v$?

8. 如图 5-29 所示, 三位芭蕾演员 A 、 B 、 C 同时从边长为 l 的三角形顶点 A 、 B 、 C 出发, 以相同的速率 v 运动, 运动中始终保持 A 朝着 B , B 朝着 C , C 朝着 A . 试问经多少时间三人相聚? 每个演员跑了多少路程?

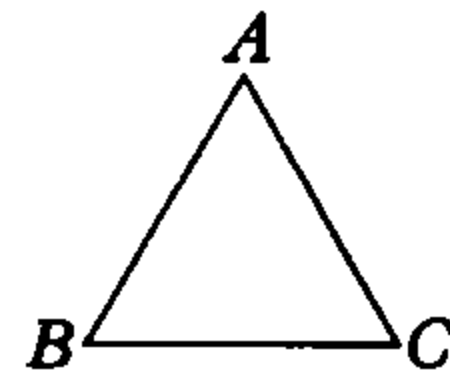


图 5-29

9. 如图 5-30 所示, 一个圆台的上底半径为 r , 下底半径为 R , 其母线 AB 长为 L , 放置在水平地面上. 推动它以后, 它自身以角速度 ω 旋转, 整体绕 O 点做匀速圆周运动. 若接触部分不打滑, 求旋转半径 \overline{OA} 及旋转一周所需时间 T .

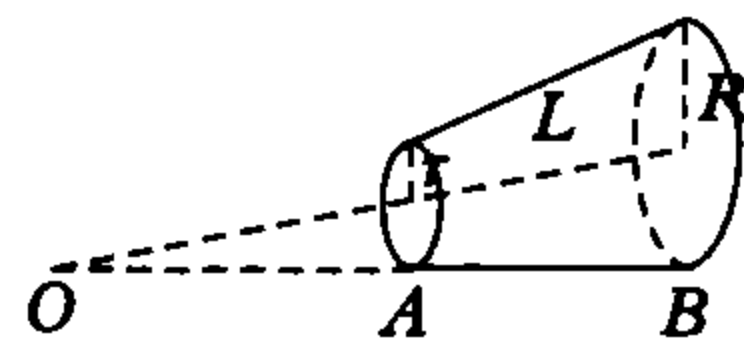


图 5-30

10. 如图 5-31 所示, 绳的一端固定, 另一端缠在圆筒上, 圆筒半径为 R , 放在与水平面成 α 角的光滑斜面上. 当绳变为竖直方向时, 圆筒转动角速度为 ω (此时绳未松弛), 试求此刻圆筒与绳分离处 A 的速度以及圆筒与斜面切点 C 的速度.

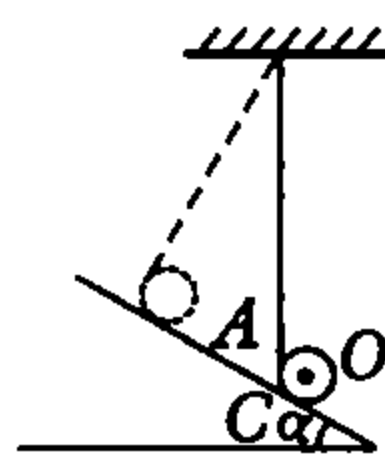


图 5-31

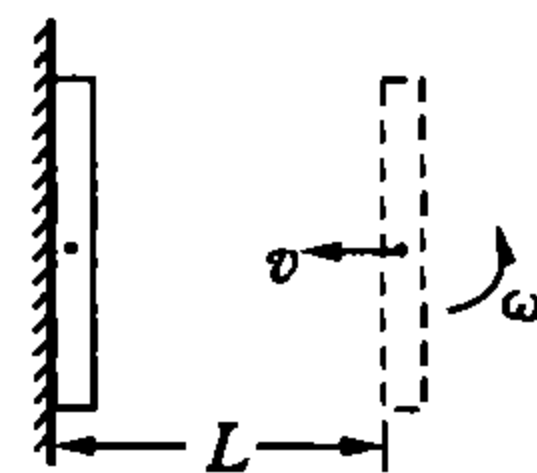


图 5-32

11. 如图 5-32 所示, 长度 $l = 10$ cm 的棒在光滑水平面上转动, 同时, 以速度 $v = 10$ cm/s 滑动, 离棒的中心距离 $L = 50$ cm 处有竖直的墙. 要使棒平着与墙相撞, 试问棒的角速度 ω 应为多少?

12. 如图 5-33 所示, 一块坯料夹在两块平板之

间,平板水平运动.上板向右,速度为 v_1 ,下板向左,速度为 v_2 .若 $v_1 = 2v_2$,某时刻切点 1、2 在同一条竖直线上且两板与坯料之间无相对滑动.请作图指出该时刻坯料上速度大小分别为 v_1 和 v_2 的点的集合.



图 5-33

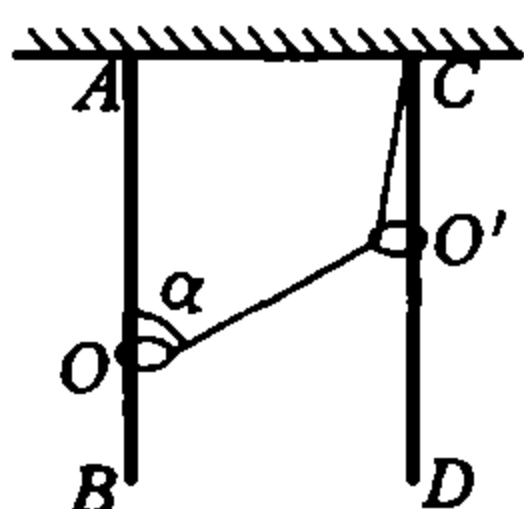


图 5-34

13. 如图 5-34 所示,两只小环 O 和 O' 分别套在静止不动的竖直杆 AB 和 CD 上.一根不可伸长的绳子一端系在 C 点上,穿过环 O' ,另一端系在环 O 上.若环 O' 以恒定速度 v_1 向下运动,当 $\angle AOO' = \alpha$ 时,求环 O 的速度.

14. 如图 5-35 所示,两条位于同一竖直平面内的水平轨道相距为 h .轨道上有两个物体 A 和 B ,它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接.物体 A 在下面的轨道上以匀速率 v 运动.在轨道间的绳子与轨道成 30° 角的瞬间,绳子 BO 段的中点处有一与绳相对静止的小水滴 P 与绳子分离,设绳长 BO 远大于滑轮直径,求小水滴 P 脱离绳子落地时速度的大小.

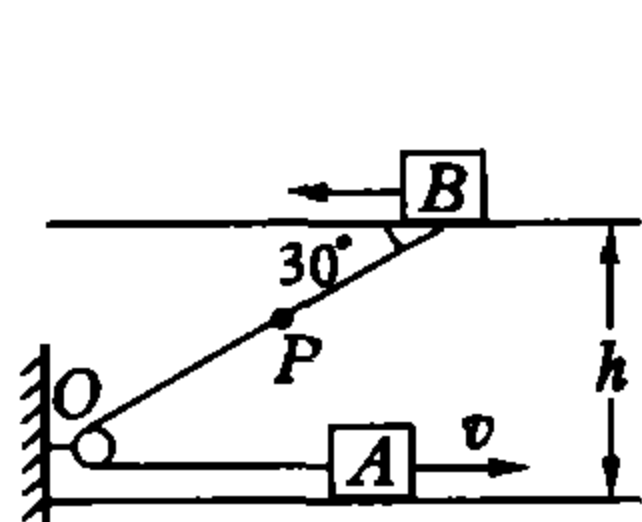


图 5-35

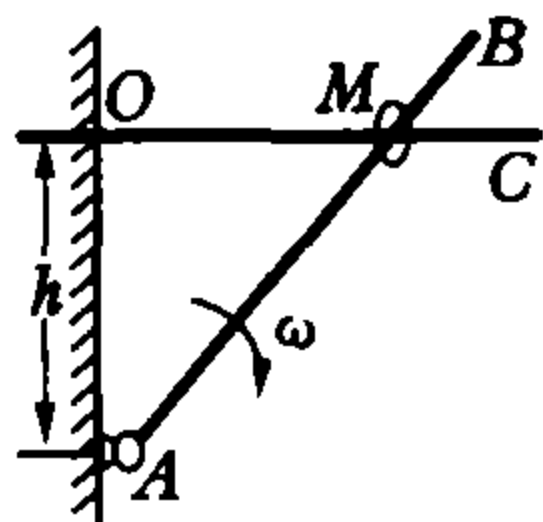


图 5-36

15. 如图 5-36 所示, AB 杆以角速度 ω 绕 A 点转动,并带动套在水平杆 OC 上的小环 M 运动.运动开始时, AB 杆在竖直位置,设 $\overline{OA} = h$.求:

- (1) t 时刻小环 M 沿 OC 杆滑动的速度;
- (2) t 时刻小环 M 相对于 AB 杆运动的速度.

16. 如图 5-37 所示的曲柄滑杆机构中,滑杆上有圆弧形滑槽,其半径为 R ,圆心在导杆 BC 上,曲柄 OA 长 R ,以角速度 ω 转动.当机构在图示位置时,曲柄与水平线交角 $\theta = 30^\circ$,求此时滑杆的速度.

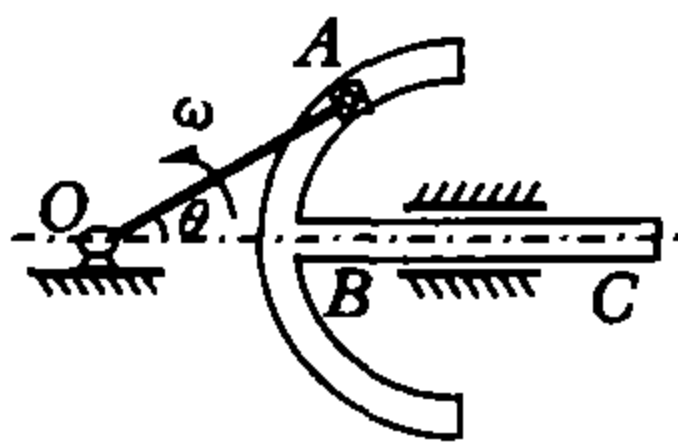


图 5-37

参考答案

1. 接触点 A 处杆与凸轮有相同的法向速度,即

$$\omega r \sin \theta = v_{\text{杆}} \cos \theta,$$

故 $v_{\text{杆}} = \omega r \tan \theta$.

2. 由 $\frac{v_{\text{影}} t}{v_A t} = \frac{H}{H-h}$ 可得

$$v_{\text{影}} = \frac{H}{H-h} v_A.$$

3. 如图答 5-1 所示的线轴中心 O 速度为 $V_O = r\omega$,线与线轴接触点 A 的速度为

$$v_A = V + V_O \cos \alpha,$$

其中 V 是线轴上接触点 A 对轴心 O 的速度,其大小为

$$V = R\omega = \frac{R}{r} V_O,$$

则 $V_O = \frac{r}{R + r \cos \alpha} v_A$.

4. 因两杆角速度相同, $\angle AMB = 60^\circ$ 不变,两杆交点 M 在一半径为 $\frac{l}{2 \cos 30^\circ} = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 的圆

周上,如图答 5-2 所示,杆 BD 转过 θ 圆周角,小环 M 转过周弧上 2θ 的圆心角.故小环 M 绕圆心 O 转动的角速度为 2ω ,则

$$v_M = 2\omega \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega l.$$

5. 设球心速度为 v ,则对瞬时转轴 AB , $v = \frac{\sqrt{2}}{2} R\omega$,得球角速度 $\omega = \frac{\sqrt{2}v}{R}$,球表面与瞬时转轴距离最大的点有最大速度,即

$$v_{\text{max}} = \omega R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2} + 1)v.$$

6. 因为滚珠与两环无滑动,所以接触处 A 、 B 切向速度相同,设滚珠球心速度为 v ,角速度为 ω ,则有

$$v_A = v - r\omega = v_2; v_B = v + r\omega = v_1,$$

得 $v = \frac{v_1 + v_2}{2}, \omega = \frac{v_1 - v_2}{2r}$.

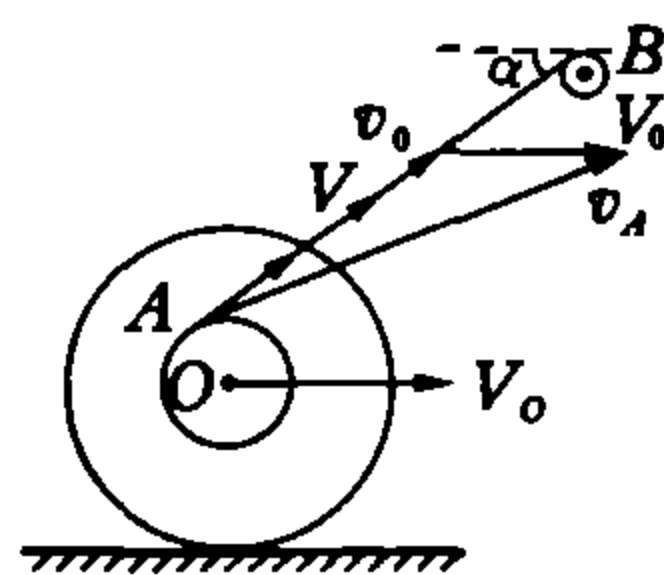
7. 由于板上 a 、 b 两点速度相同,故点 a 、 b 的连线即为板瞬时转动中心,设 $\overline{ab} = l$,对 c 点,如图答 5-3 所示,由 $v_c = v + v_{c_n}$ 得

$$(2v)^2 = v^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l \omega\right)^2.$$

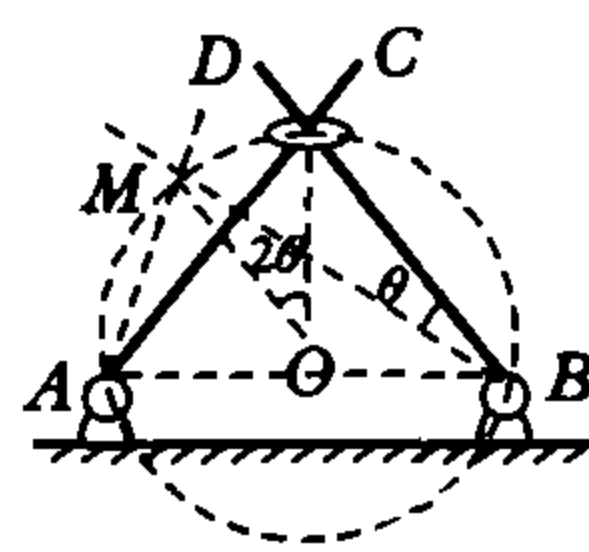
则板的角速度为

$$\omega = \frac{2v}{l},$$

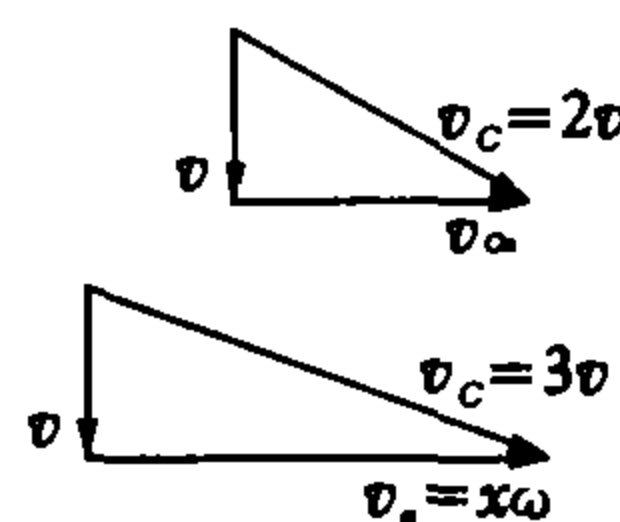
则瞬时速度为 $3v$ 的点有



图答 5-1



图答 5-2



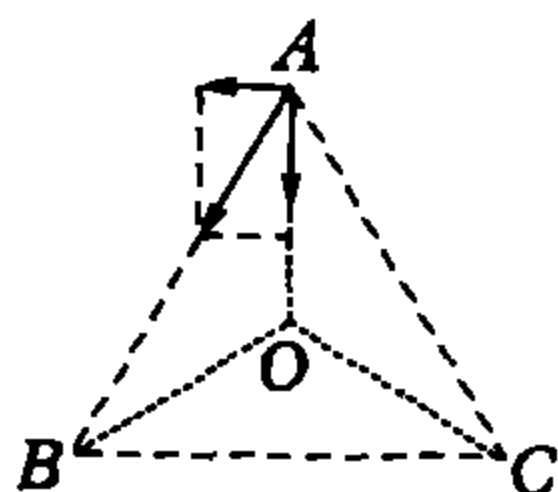
图答 5-3

$$(3v)^2 = v^2 + (x\omega)^2 = v^2 + \left(x \frac{2v}{l}\right)^2,$$

$$x = \sqrt{2}l,$$

即到 a, b 连线的距离为 $\sqrt{2}l$ 的点的速度大小等于 $3v$.

8. 由三位舞者运动的对称性可知, 他们的会合点在三角形 ABC 的中心 O , 每人的运动均可看做绕 O 转动并且同时向 O 运动, 如图答 5-4 所示, 以 A 处舞者沿 AO 方向分运动考虑: 到达 O 点历时



图答 5-4

$$t = \frac{\overline{AO}}{v \cos 30^\circ} = \frac{2l}{3v}.$$

由于运动速率不变, 则

$$s = vt = \frac{2l}{3}.$$

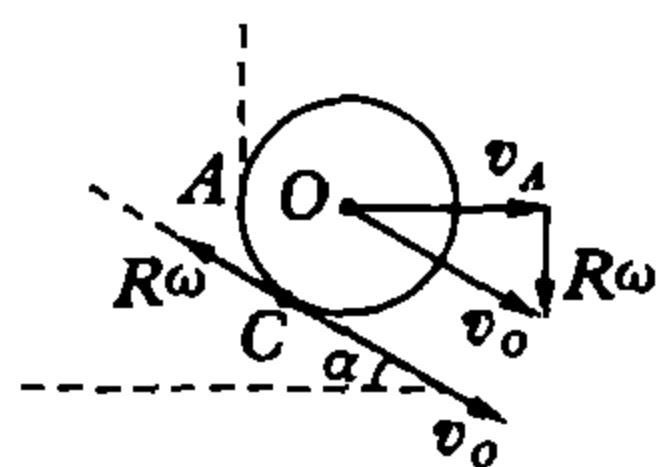
9. 设旋转半径为 x , 则

$$x = \frac{r}{R-r}L,$$

接触处不打滑, 则 A 点速度为

$$v_A = r\omega, \text{ 则 } T = \frac{2\pi x}{v_A} = \frac{2\pi L}{(R-r)\omega}.$$

10. 以 A 点为基点, 圆筒中心 O 速度 (沿斜面向下) 是与 A 点相同的速度 v_A 及对 A 点的转动速度 $v_n = R\omega$ 之和, 如图答 5-5 所示, 故



图答 5-5

$$v_A = R\omega \cdot \cot \alpha.$$

以 O 点为基点, C 点速度为与

O 点相同的平动速度及对 O 点的转动速度 $R\omega$ 之和, 即

$$v_C = v_O - R\omega = \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} R\omega.$$

11. 棒要平着与竖墙相撞应满足:

(1) 棒中心完成位移 L 时棒与墙平行;

(2) 无沿棒法向向右的离开墙的速度, 棒在向墙移动时每半周与墙平行一次.

满足(1)应有

$$\frac{L}{v} = n \frac{\pi}{\omega}, \text{ 即 } \omega = n \cdot \frac{\pi}{5},$$

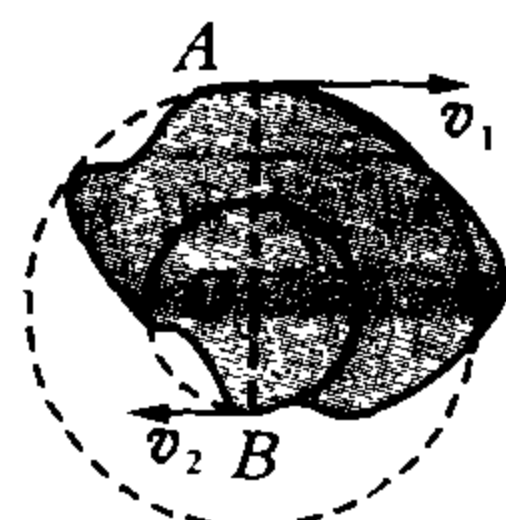
满足(2)时棒端点速度为

$$\frac{l}{2}\omega - v \leq 0, \text{ 即 } \omega \leq 2 \text{ rad/s}.$$

$$\text{则当 } n=1, \omega = \frac{\pi}{5}; n=2, \omega = \frac{2\pi}{5}; n=3, \omega = \frac{3\pi}{5}.$$

12. 如图答 5-6 所示, 连接两切点 $A(1), B(2)$, 以 $1:2$ 截分线段 BA , 得瞬时转动中心 O , 以 OA 为半径

作圆, 交在坯料上的各点均速度为 v_1 ; 以 OB 为半径作圆, 交在坯料上的各点均速度为 v_2 .



图答 5-6

13. 以环 O' 为参考, 绳的速度大小为 v_1 , 沿绳 $OO'C$ 运动; 环 O 速度设为 v_2 , 方向沿杆 AB 向上, 如图答 5-7 所示, 则环 O 相对环 O' 的速度大小为

$$v_{OO'} = v_2 + v_1,$$

方向向上, 这个速度沿绳 OO' 方向分量应与 OO' 段绳相对环 O' 的速度相同, 即有

$$(v_2 + v_1) \cos \alpha = v_1,$$

得 $v_2 = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} v_1.$

14. 如图答 5-8 所示, 绳上各点有相同的沿绳方向速度, 故

$$v_{B_n} = v \tan 30^\circ,$$

而绳 OB 中点对 O 的转动速度

$$v_{\text{中}n} = \frac{v}{2} \tan 30^\circ,$$

水滴 P “刚脱离”绳, 隐喻与绳中点恰有相同的速度, 故此时水滴速度为

$$v_P = \sqrt{v^2 + v_{\text{中}n}^2} = \sqrt{\frac{13}{12}} v,$$

落地时水滴速度为

$$v_{Pz} = \sqrt{v_P^2 + gh} = \sqrt{\frac{13}{12} v^2 + gh}.$$

15. (1) 经时间 t , 杆转过 ωt 角, 杆 AB 上 M 点速度为

$$v = \omega \cdot \frac{h}{\cos \omega t},$$

小环速度亦即两杆交叉点速度为速度 v 沿 OC 方向分量, 即

$$v_M = \frac{v}{\cos \omega t} = \frac{\omega h}{\cos^2 \omega t}, \text{ 方向向右};$$

(2) 小环相对于 AB 杆的速度大小等于速度 v 沿 AB 杆方向分量, 即

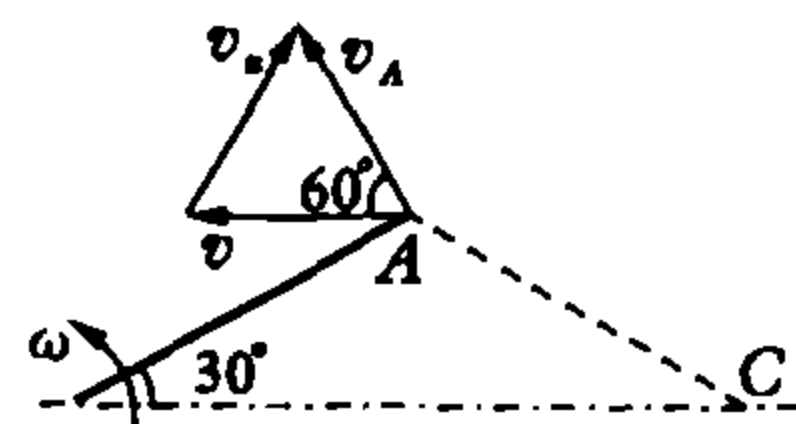
$$v' = v \tan \omega t = \frac{\omega h \sin \omega t}{\cos^2 \omega t}, \text{ 方向沿 } AB.$$

16. 曲柄 OA 上 A 点速度为 $v_A = R\omega$, 此时滑杆速度设为 v , A 在圆形槽中的转动速度设为 v_n , 有

$$v_A = v + v_n,$$

矢量关系如图答 5-9 所示, 由图知

$$v = R\omega.$$



图答 5-9

竞赛辅导

专题6 动力学特殊问题与方法

沈晨

教你一手

这里,我们要介绍动力学的几个特殊问题及处理方法.

一、质点系的牛顿第二定律

牛顿第二定律也可运用于由加速度不同的质点组成的系统. 设系统中各质点的质量为 $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$; 系统以外物体对系统的力有 $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$, 这些力可能作用在系统内不同的质点; 系统各质点的加速度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$, 则有

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n m_i a_i.$$

与单独质点的牛顿第二定律一样, 上述关系具有矢量性、瞬时性、独立性且有相同的适用范围.

在处理静力学问题时, 我们曾讲到选取研究对象一般应遵循“尽量取整体”的原则, 以回避对象各部分间相互作用的“纠葛”关系; 在处理动力学问题时, 质点系的牛顿第二定律使我们对那些各部分加速度不同的质点系也能用整体方法去解决.

例1 如图6-1所示, 跨过定滑轮的一根绳子, 一端系着 $m=50\text{ kg}$ 的重物, 一端握在质量 $M=60\text{ kg}$ 的人手中. 如果人不把绳握死, 而是相对地面以 $a=\frac{1}{18}g$ 的加速度下降, 设绳子和滑轮的质量、滑轮轴承处的摩擦均可不计, 绳子长度不变, 试求重物的加速度与绳子相对于人手的加速度.

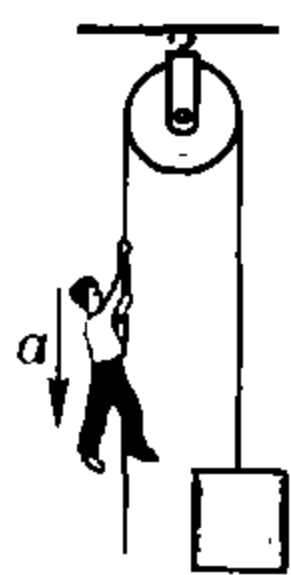


图6-1

分析与解 本题中, 人与重物通过绳相关联, 若取人、绳、物组成的系统为研究对象, 则可不必考虑人与绳之间的相互作用, 根据系统的牛顿第二定律, 在图6-2所示坐标轴上建立运动方程为

$$Mg - mg = Ma + ma_m,$$

于是可得

$$a_m = \frac{M(g-a)}{m} - g$$

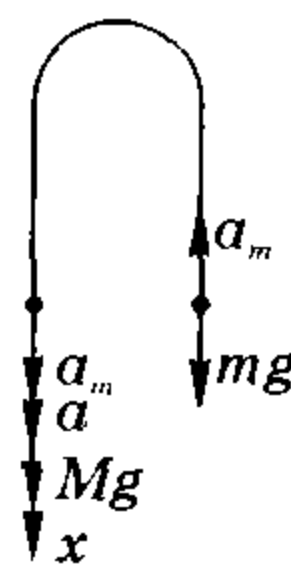


图6-2

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{17}{18}g - g = \frac{2}{15}g.$$

由图6-2可知, 绳的加速度(即重物加速度)与人的加速度同方向, 则绳相对于人的加速度

$$a_{\text{绳对人}} = a_m - a = \frac{2}{15}g - \frac{1}{18}g = \frac{7}{90}g.$$

例2 如图6-3所示, 滑块A、B质量分别是 m_A 和 m_B , 斜面倾角为 α , 当滑块A沿斜面体D下滑, 滑块B上升时, 地板突出部分E对斜面体D的水平压力F为多大? (绳子质量及一切摩擦不计)

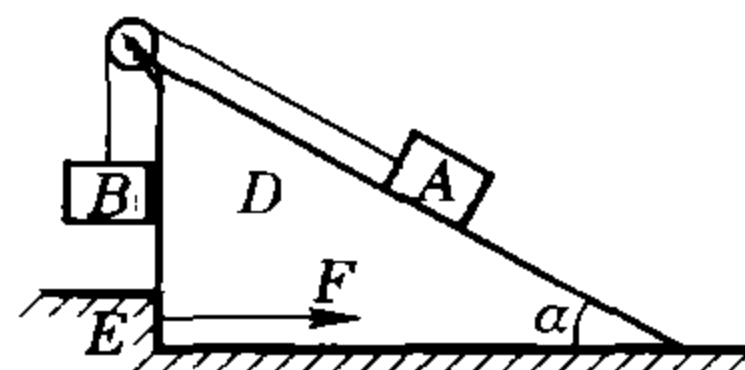


图6-3

分析与解 题目要求确定地板突出部分E对斜面体D的水平压力F, 我们的思路依“尽量取整体”应首先选定A、B、D构成的系统为研究对象, 对这个系统而言, 水平压力F只引起质点A水平方向加速度, 因滑块B、斜面体D在水平方向加速度均为零. 只要求出质点A的加速度, 其水平分量唾手可得, 为了求A的加速度, 我们可另取以绳相连的A、B为研究对象, 在图6-4所示坐标中建立牛顿第二定律方程.

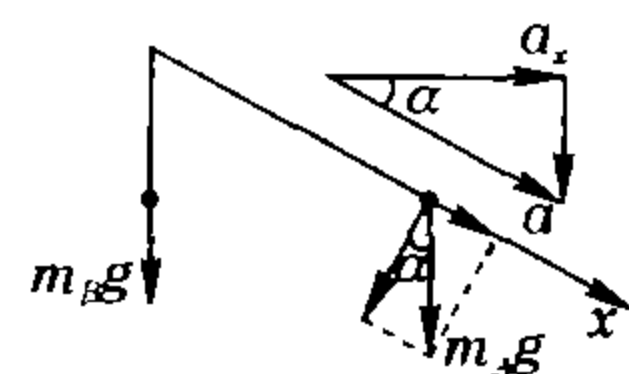


图6-4

$$\text{对 A、B、D 构成的系统有 } F = m_A a_x;$$

$$\text{对 A、B 构成的系统有}$$

$$m_A g \sin \alpha - m_B g = (m_A + m_B) a;$$

又有

$$a_x = a \cos \alpha.$$

$$\text{由上三式易得 } F = m_A \frac{m_A \sin \alpha - m_B}{m_A + m_B} g \cos \alpha.$$

我们看到借助于质点系的牛顿第二定律, 一些联结体问题的解答大为简化了.

二、加速度相关关系

绳、杆等约束物系或接触物系各部分加速度往往有相关联系, 确定它们的大小关系的一般方法是: 设想物系各部分从静止开始匀加速运动同一时间 Δt , 则由

$s = \frac{1}{2}at^2$ 知, 加速度与位移大小成正比, 确定了相关物体在同一时间内的位移比, 便确定了两者加速度大小关系.

例 3 如图 6-5 所示, 质量为 m 的物体静止在倾角为 θ 的斜面体上, 斜面体的质量为 M , 斜面体与水平地面间的动摩擦因数为 μ . 现用水平拉力 F 向右拉斜面体, 要使物体与斜面体间无相互作用力, 水平拉力 F 至少要达到多大?

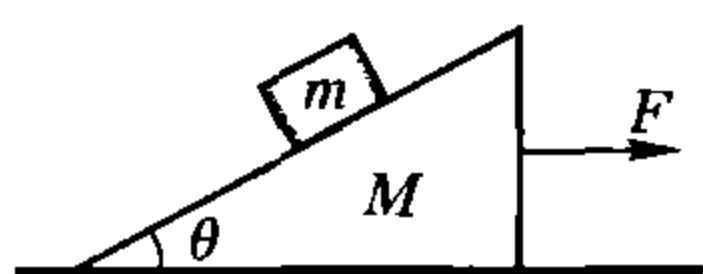


图 6-5

分析与解 当物体与斜面体间无作用力时, 显然物体的加速度为 g , 只要找到斜面体与物体加速度的关系, 确定斜面体的加速度, 即可由牛顿第二定律求出 F . 考虑临界情况, 斜面体至少具有这样的加速度 a : 在物体自由下落了斜面体高度 h 的时间 t 内, 斜面体至少右移了 $h \cdot \cot \theta$, 即 $\frac{a}{g} \geq \frac{h \cot \theta}{h}$, 故 $a \geq g \cot \theta$.

对斜面体而言, 因与物体无相互作用, 故有

$$F - \mu Mg = Ma \geq Mg \cot \theta, F \geq (\mu + \cot \theta) Mg.$$

水平拉力至少是 $(\mu + \cot \theta) Mg$.

例 4 如图 6-6 所示, A 为固定斜面体, 其倾角 $\alpha = 30^\circ$, B 为固定在斜面下端与斜面垂直的木板, P 为动滑轮, Q 为定滑轮, 两物体的质量分别为 $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ 和 $m_2 = 0.2 \text{ kg}$, m_1 与斜面间无摩擦, 斜面上的绳子与斜面平行, 绳不可伸长, 绳、滑轮的质量及摩擦不计, 求 m_2 的加速度及各段绳上的张力.

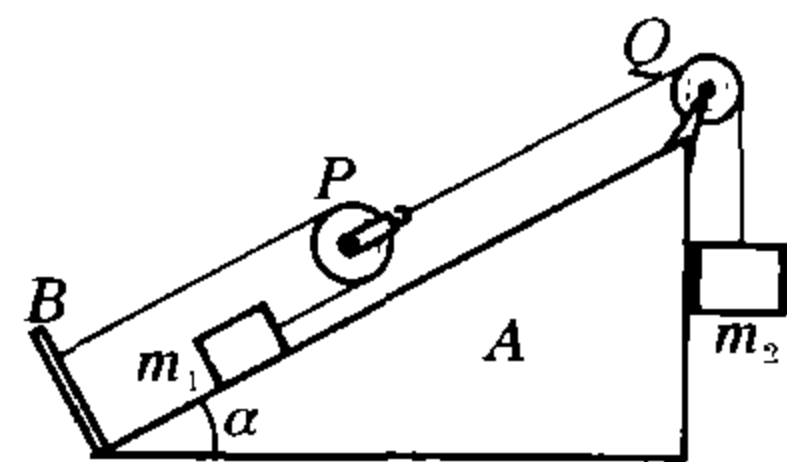


图 6-6

分析与解 根据题给条件, 可以判断 m_1 将沿斜面下降, m_2 则上升, 但加速度的大小不同, 由几何关系可知, 若 m_1 沿斜面下降 s , m_2 向上升高 $s/2$, 故两者加速度大小关系是 $a_1 = 2a_2$. 设跨过滑轮 P 的绳上张力为 T_1 , 跨过滑轮 Q 的绳上张力为 T_2 , 先研究由 m_1 、 m_2 两段绳及滑轮 P 组成的系统, 系统受力如图 6-7, 按图示坐标建立的牛顿第二定律方程为

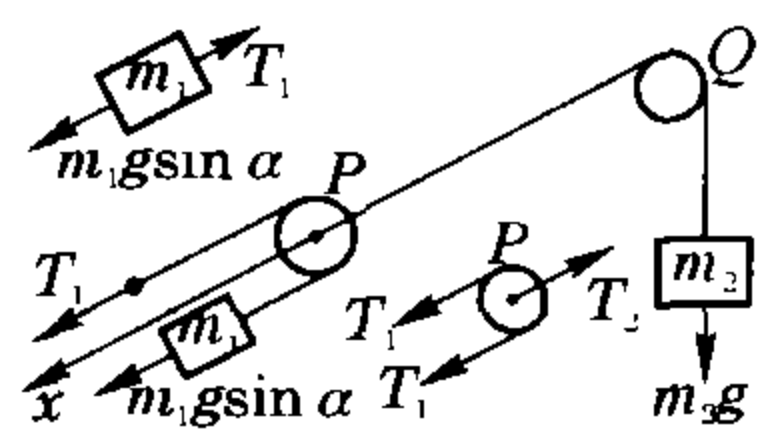


图 6-7

$$T_1 + m_1 g \sin \alpha - m_2 g = m_1 2a_2 + m_2 a_2 \quad (1)$$

再对 m_1 建立方程: $m_1 g \sin \alpha - T_1 = m_1 2a_2$,

$$\text{得 } T_1 = m_1 g \sin \alpha - m_1 2a_2 \quad (2)$$

将②式代入①式中即得

$$2m_1 g \sin \alpha - m_1 2a_2 - m_2 g - m_2 g = m_1 2a_2 + m_2 a_2,$$

$$a_2 = \frac{2m_1 g \sin \alpha - m_2 g}{4m_1 + m_2},$$

代入数据可得 $a_2 = \frac{g}{9} \approx 1.09 \text{ m/s}^2$. 将 a_2 代入②

式得 $T_1 \approx 1.09 \text{ N}$, 则 $T_2 = 2T_1 \approx 2.18 \text{ N}$.

三、力的加速度效果分配法则

如图 6-8 所示物理情景同属于这样一类问题: 联结体在外力作用下各部分具有相同的加速度, 根据 $F = ma$, 如果引起整体加速度的外力大小为 F , 则引起各部分同一加速度的力大小与各部分质量成正比, F 这个力的加速度效果将依质量正比例地分配. 根据这个分配规律, 我们可以简捷地确定联结体之间的相互作用. 例如图 (a)、(b) 中, m 与 M 间拉力大小均为 $\frac{m}{M+m}F$; 图 (c)、(d) 中 m 与 M 间压力大小均为 $\frac{m}{M+m}F$; 图 (e) 中绳上张力大小为 $\frac{m}{M+m}Mg$; 图 (f) 中 m 与 M 间静摩擦力大小为 $\frac{m}{M+m}F$. 在图 (a)、(c) 中,

如果物体与地面间动摩擦因数为 μ , 整体所受摩擦力产生的加速度为 μg , 而各部分引起 μg 的力大小与各部分质量是成正比的, 根据力的独立作用原理, m 与 M 间相互作用力不会发生变化, 仍依质量正比例分配 F , 即大小为 $\frac{m}{M+m}F$.

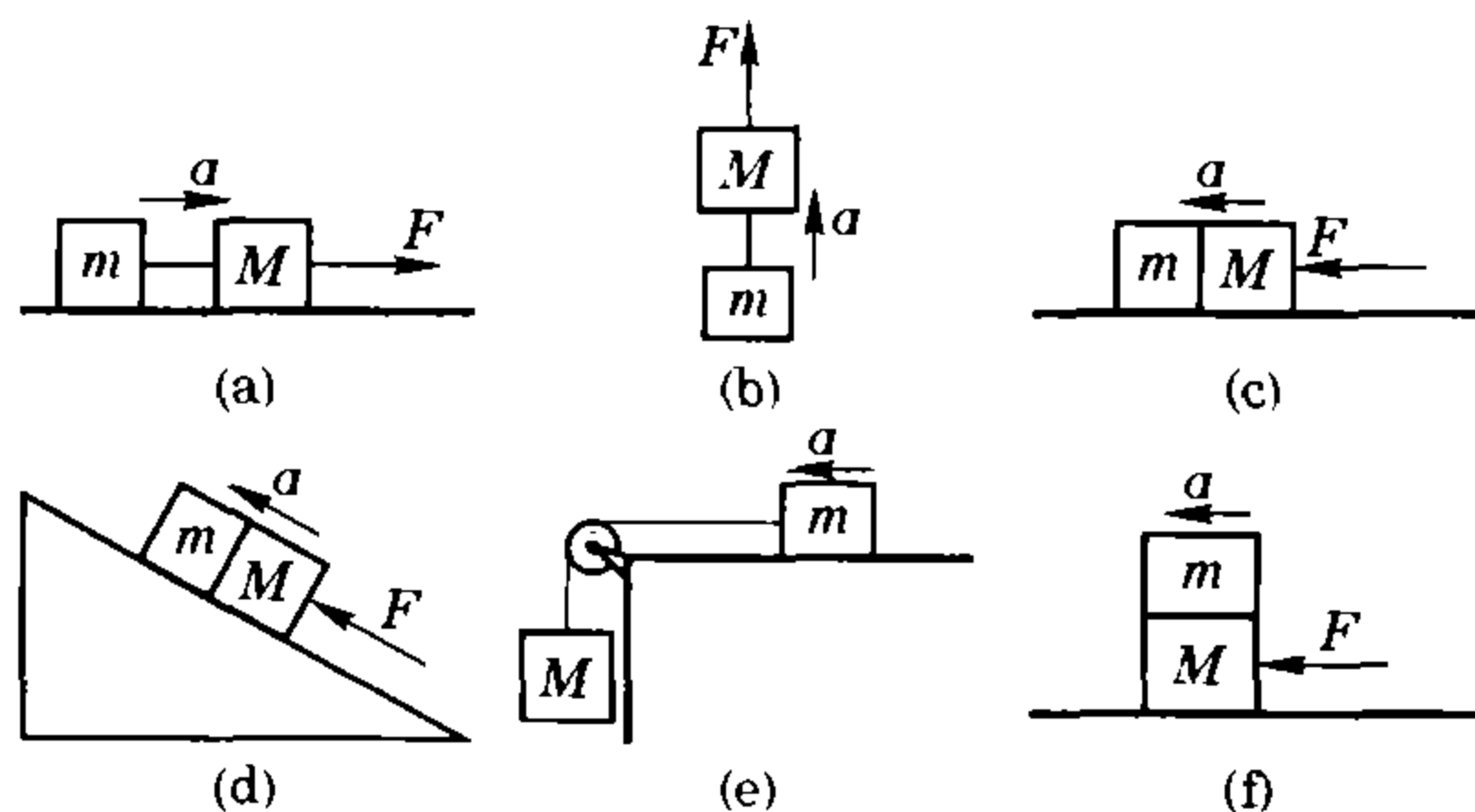


图 6-8

例 5 如图 6-9 所示, 木块 A 、 B 静止叠放在光滑水平面上, A 的质量为 m , B 的质量为 $2m$. 现施水平力 F 拉 B , A 、 B 刚好不发生相对滑动而一起沿水平面运动; 若改用水平力 F' 拉 A , 要使 A 、 B 不发生相对滑动, 求 F' 的最大值.

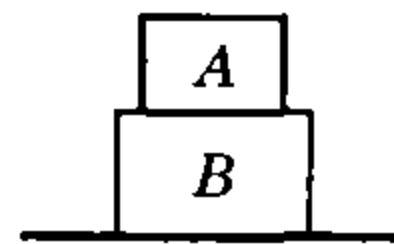


图 6-9

分析与解 本题中, 所谓 A 、 B 刚好不发生相对滑动而一起沿水平面运动, 意即系统有相同的加速度, 但 A 、 B 间静摩擦力已达最大值. 当水平力 F 作用在 B 时, 使 A 产生加速度的力是 B 对 A 的最大静摩擦力 F_{fm} , 根据力的加速度效果分配法则, 有 $F_{fm} = \mu mg = \frac{m}{2m+m}F$; 同理, 当水平力 F' 作用在物体 A , 而 A 、 B 也保持相对静止, 一起沿水平面运动, 应满足 $F_{fm} = \mu mg$

$\geq \frac{2m}{2m+m}F'$. 由以上两式相除可得 $F' \leq \frac{F}{2}$, 即 F' 不得超过 $\frac{F}{2}$.

四、牛顿第二定律的瞬时性

从时间效应上说, 加速度与力是瞬时对应的, 有力时才有加速度, 外力一旦改变, 加速度也立即改变, 力与加速度的因果对应具有同时性, 这是我们在运用运动定律时要把握好的一条特性. 确定某瞬时质点的加速度, 关键在分析该瞬时质点的受力, 特别是当研究对象运动状态发生突变时, 须对制约着对象运动状态的各个力的情况做出准确判断.

例 6 如图 6-10 所示, 木块 A、B 的质量分别为 $m_A = 0.2 \text{ kg}$, $m_B = 0.4 \text{ kg}$, 盘 C 的质量 $m_C = 0.6 \text{ kg}$, 现挂于天花板 O 处, 整个装置处于静止. 当用火烧断 O 处的细线的瞬间, 木块 A 的加速度 a_A 及木块 B 对盘 C 的压力 F_{BC} 各是多少?

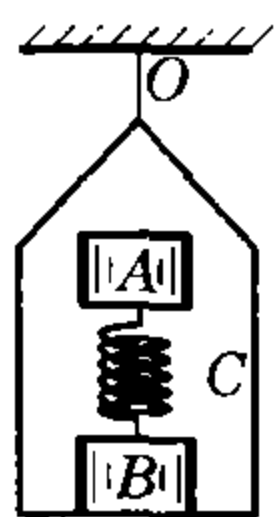


图 6-10

分析与解 本题研究对象为一质点系, 先后涉及两个不同状态: 用火烧断 O 处细线之前, 整体均处于静止, A、B、C 所受合力为零; 线断后它们的受力情况发生了变化, 加速度如何要由木块所受合力决定. 我们先来看木块 A, A 受重力与弹簧弹力, 前者是恒力不变, 后者在线断的瞬间, 由于弹簧长度未及改变因而也未变, 所受合力与线断之前一样为零, 故加速度 a_A 为 0; 再看 B、C 组成的系统, 与线断前相比, 所受重力 $(m_B + m_C)g$ 、弹簧弹力(大小等于 $m_A g$)未变, 只是少了线上张力 $F = (m_A + m_B + m_C)g$, 故线断瞬间, B、C 所受合力大小为 $(m_A + m_B + m_C)g$, 方向竖直向下, 则 $a_B = a_C = \frac{m_A + m_B + m_C}{m_B + m_C}g = 1.2g$, 方向竖直向下. 由于 B、C 加速度相同, 则产生 C 加速度的力为

$$F_{BC} = m_C a_C - m_C g = m_C \frac{m_A + m_B + m_C}{m_B + m_C} g - m_C g$$

$$= \frac{m_C}{m_B + m_C} m_A g,$$

得 $F_{BC} = 1.2 \text{ N}$.

上例中, 还请读者注意到, 由弹簧形变引起的弹力和由(杆、绳等)微小形变引起的弹力的相异之处: 弹簧弹力取决于弹簧形变情况, 而弹簧形变的发生与变化是有一过程的, 本题中, 在线刚断的瞬间, 弹簧长度未及变化, 故弹力维持原状, 事实上到下一瞬时 A、B 间相对位置变化, 弹力就会减小; B、C 间的弹力则是由两者接触处微小形变引起的, 刚体、刚性杆、不可伸长的绳等其模型特征就是不发生形变但却有弹性, 实际物体只有微小形变即可视作刚体, 与弹簧相比, 刚体就

是劲度系数 $k \rightarrow \infty$ 的弹簧, 弹力的变化是瞬间发生的, 故本题中当线一断, B、C 的状态改变, B、C 间的弹力立即就发生了变化. 读者在“小试身手”第 7、11 和 12 题时可留意.

五、非惯性系与惯性力

相对于惯性系以加速度 a 运动的参考系称为非惯性系, 在惯性系中的适用的动力学规律, 在非惯性系中是不适用的. 我们来研究相对于惯性参考系作加速度运动的参考系: 如图 6-11 所示, 小车车厢内一光滑平板上放一质量为 m 的光滑小球, 当小车相对地以加速度 a 向右运动时, 地面观察者

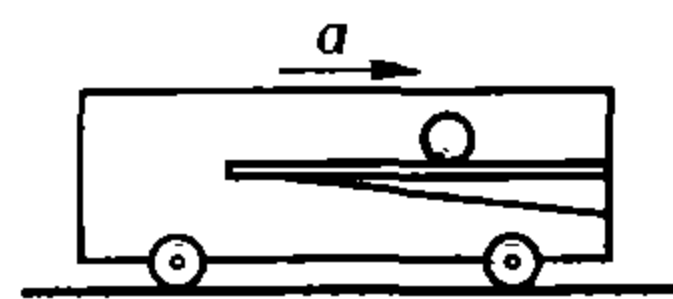


图 6-11

看到小球是静止的, 因为小球不受外力, 但是车中观察者却看到小球在向左以加速度 a 运动, 也就是说以加速度运动着的小车为参考系, 牛顿第二定律不适用了. 为了使牛顿定律在非惯性系中具有与惯性系相同的形式, 我们可以引入一个虚拟的力叫惯性力: 车中观察者可设想小球受到一个大小等于 ma 、方向与小车对地加速度方向相反的力 $F_i = -ma$, 这样, 车中观察者仍可用牛顿运动定律解释小球的运动——是小球所受惯性力 F_i 使小球产生了向左的加速度. 惯性力这个名称是依其作用效果命名的. 虚拟惯性力, 牛顿第二定律形式仍为 $\sum F + F_i = ma_{\parallel}$, 但它已可适用于非惯性系. 惯性力与物体实际受到的力(按性质命名的力)不同, 它是虚构的, 没有施力物, 不属于哪种性质的力.

引入惯性力概念, 在处理某些动力学问题时, 会比较简便, 请看下面一例.

例 7 如图 6-12 所示, 在光滑水平桌面上有一质量为 M 的劈形物体, 它的斜面倾角为 α , 在这斜面上放一质量为 m 的物体, 物体与斜面间摩擦因数为 μ . 当用方向水平向右的力 F 推劈形物体时, μ 等于多少时物体间才没有相对运动?

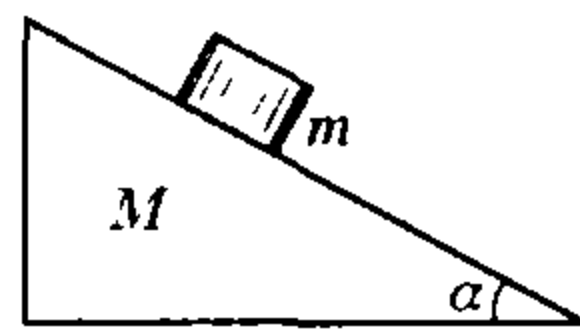


图 6-12

分析与解 取劈形物体 M 为参考系, 设 M 相对地面的加速度为 a , 方向向右, 在这个参考系中, m 受到的是重力、劈形物体斜面支持力 F_N (垂直斜面向上)、最大静摩擦力 F_f 和惯性力 F_i , 惯性力大小为 ma , 方向水平向左; 斜面支持力与最大静摩擦力合力即斜面约束力方向与斜面法线成夹角 $\varphi = \arctan \mu$, 由于相对劈形物体 m 是静止的, 视其合力为零, 力矢量构成如图 6-13

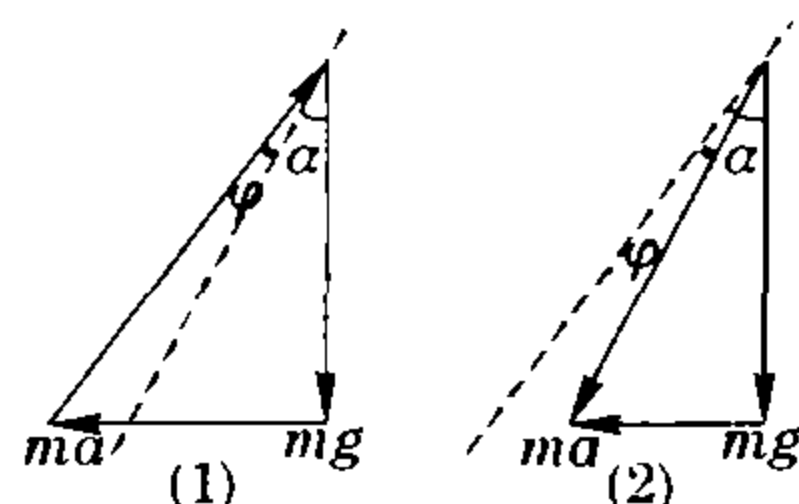


图 6-13

是静止的, 视其合力为零, 力矢量构成如图 6-13

(1)、(2)所示两种可能关系,它们分别对应于最大静摩擦力沿斜面向下、向上.由图 6-13(1)可得 $F_f = ma = mg \tan(\alpha + \varphi)$,由图 6-13(2)可得 $F_f = ma = mg \tan(\alpha - \varphi)$,而对整体在水平方向有 $F = (M+m)a$,则

$$\begin{cases} \tan(\alpha + \varphi) = \frac{F}{(M+m)g}; \\ \tan(\alpha - \varphi) = \frac{F}{(M+m)g}. \end{cases}$$

由此可解得

$$\frac{(M+m)g \sin \alpha - F \cos \alpha}{F \sin \alpha + (M+m)g \cos \alpha} \leq \mu \leq \frac{F \cos \alpha - (M+m)g \sin \alpha}{F \sin \alpha + (M+m)g \cos \alpha}$$

现在我们综合运用动力学问题的特殊处理方法解下面例题.

例 8 如图 6-14 所示,一质量为 M 、斜面倾角为 α 的三棱柱体,放在粗糙的水平面上,它与水平面间的摩擦因数为 μ ,若将一质量为 m 的光滑质点轻轻地放在斜面上, M 发生运动,试求 M 的加速度大小 a .

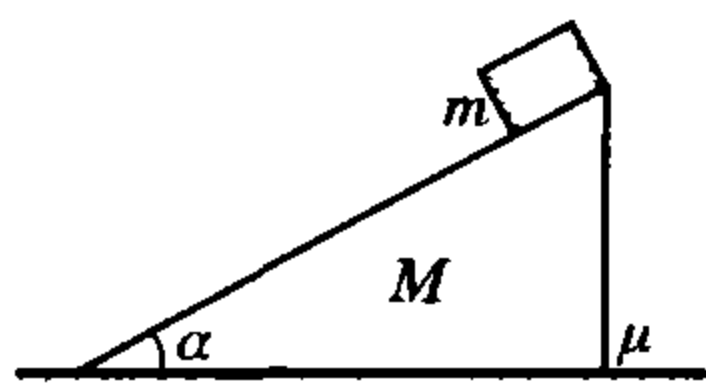


图 6-14

分析与解 设 M 运动的加速度为 a ,显然 a 的方向水平向右;设 m 相对于 M 的加速度为 $a_{\text{非}}$, $a_{\text{非}}$ 的方向与水平成 α 角向下,即沿三棱柱体的斜面;设水平面对三棱柱体的摩擦力为 F_f ,支持力为 F_N ,研究 M 、 m 构成的系统,在水平方向有

$$F_f = -Ma + m(-a + a_{\text{非}} \cos \alpha); \quad (1)$$

在竖直方向有

$$(M+m)g - F_N = ma_{\text{非}} \sin \alpha; \quad (2)$$

而

$$F_f = \mu F_N. \quad (3)$$

上列三个方程中有四个未知量,尚需再建立方程,为此,另取 m 为研究对象,以加速运动的 M 为参考系,分析质点 m 的受力情况如图 6-15,其中重力 mg 、斜面支持力 F_n ,惯性力 F_i 的大小为 ma ,方向水平向左,则在沿斜面方向建立牛顿第二定律方程为

$$mg \sin \alpha + ma \cos \alpha = ma_{\text{非}}, \quad (4)$$

由④式得

$$a_{\text{非}} = g \sin \alpha + a \cos \alpha,$$

由①、②、③式得

$$\mu[(M+m)g - ma_{\text{非}} \sin \alpha] = m(a_{\text{非}} \cos \alpha - a) - Ma,$$

$$a_{\text{非}} = \frac{(M+m)(\mu g + a)}{m \cos \alpha + \mu m \sin \alpha},$$

将 $a_{\text{非}} = g \sin \alpha + a \cos \alpha$ 代入即得

$$a = \frac{m \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu M}{m \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + M} g.$$

例 9 某人质量 $M = 60 \text{ kg}$,一重物质量 $m = 50$

kg ,分别吊在一个定滑轮的两边.人握住绳子不动,则他落地的时间为 t_1 ,人若沿绳子向上攀爬,则他落地时间 $t_2 = \sqrt{2}t_1$.若滑轮、绳子的质量及摩擦可不计,求此人往上爬时相对于绳子的加速度.

分析与解 首先,前后两次人是从同一高度落地的,则两次人落地过程的加速度之比与时间平方成反比,即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} = 2$,得 $a_2 = \frac{a_1}{2}$.第一次人握住绳不动,人与重物的加速度相同,对整体有

$$(M-m)g = (M+m)a_1, \text{ 代入数据得 } a_1 = \frac{g}{11}.$$

第二次,人与重物的加速度不同,设重物的加速度为 a' ,则对系统有

$$(M-m)g = Ma_2 + ma' = M \frac{a_1}{2} + ma',$$

将 $a_1 = \frac{g}{11}$ 代入可得 $a' = \frac{8}{55}g$.此亦即人手中的绳的加速度大小,其方向与人对地加速度方向一致,是竖直向下的,那么,人相对绳的加速度

$$a_{\text{人对绳}} = a_2 - a' = \frac{g}{22} - \frac{8}{55}g = -0.1g, \text{ 负号表示方向向上,即人相对绳以 } 0.1g \text{ 的加速度向上爬.}$$

动手动脑

1. 关于惯性力,下列说法中正确的是 ()

- A. 惯性力有反作用力
- B. 惯性力是由非惯性系中物体施予的
- C. 同一物体对不同参考系有不同惯性力
- D. 惯性力与合外力一定平衡

2. 如图 6-16 所示,在与水平地面成 α 角的静止的劈面上放一根不可伸长的轻绳.绳的一端系在墙上 A 点,小物体系在绳子 B 点上.某一时刻劈开始以恒定加速度 a_1 向右运动.求物体在劈上所具有的加速度 a_2 ?

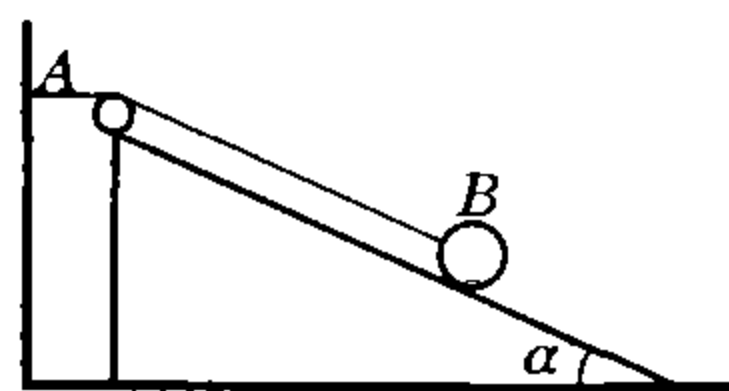


图 6-16

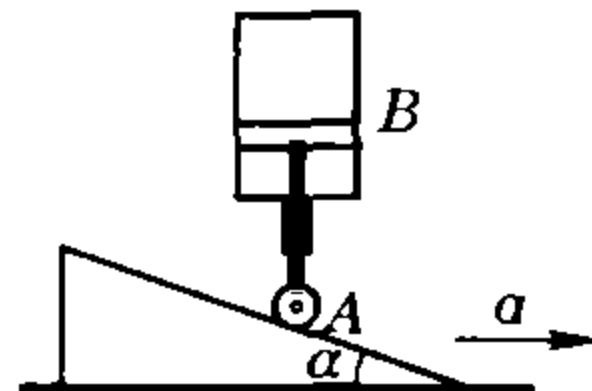


图 6-17

3. 如图 6-17 所示,三角凸轮沿水平运动,其斜边与水平线成 α 角.杆 AB 的 A 端依靠在凸轮上,另一端的活塞 B 在竖直筒内滑动.如凸轮以匀加速度 a_0 向右运动,求活塞 B 的加速度 a_B .

4. 如图 6-18 所示,质量为 m_2 的立方块放在光滑的地面上,质量为 m_1 的劈(劈角为 α),直角边靠在光滑的竖直墙上,斜边压在立方体上,试求劈和立方块的

加速度.

5. 如图 6-19 所示, 已知方木块的质量为 m , 楔形体的质量为 M , 斜面倾角为 θ , 滑轮及绳子的质量可忽略, 各接触面之间光滑, 求楔形体 M 的加速度.

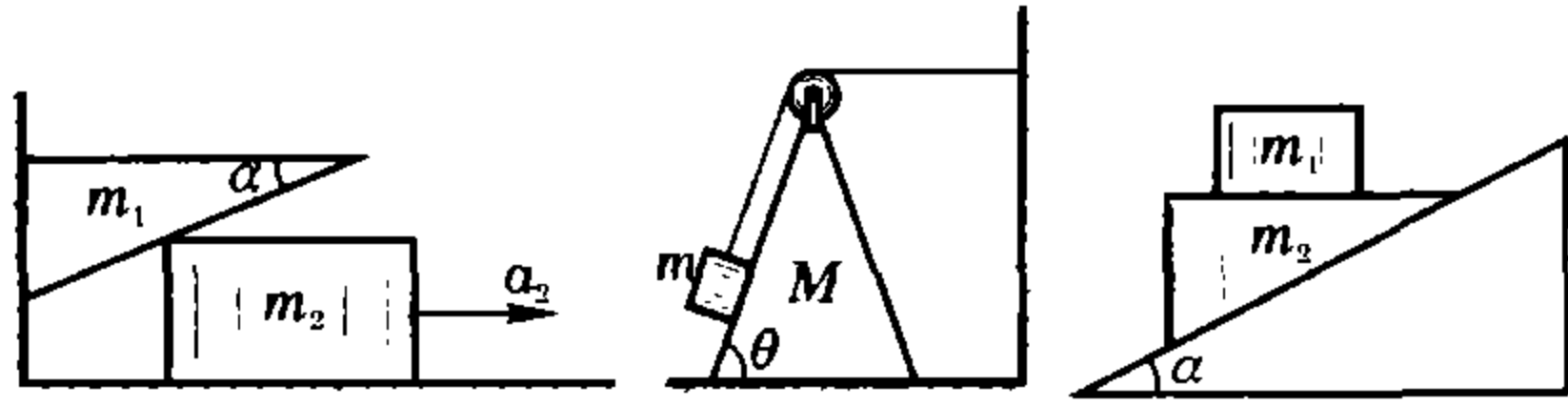


图 6-18 图 6-19 图 6-20

6. 如图 6-20 所示, 在倾角为 α 的光滑斜面上, 放有一个质量为 m_2 的斜块, 斜块上表面水平, 在它的上面放有质量为 m_1 的物块. 摩擦不计, 求两个物块的加速度.

7. 如图 6-21 所示, 绳子不可伸长, 绳和滑轮的质量不计, 摩擦不计. A 和 B 的质量分别为 m_1 和 m_2 , 求当左边绳的上端剪断后, 两重物的加速度.

8. 如图 6-22 所示, A 为定滑轮, B 为动滑轮, 摩擦不计, 滑轮及线的质量不计, 三物块的质量分别为 m_1 、 m_2 、 m_3 , 求: (1) 物块 m_1 的加速度; (2) 两根绳的张力 T_1 和 T_2 .

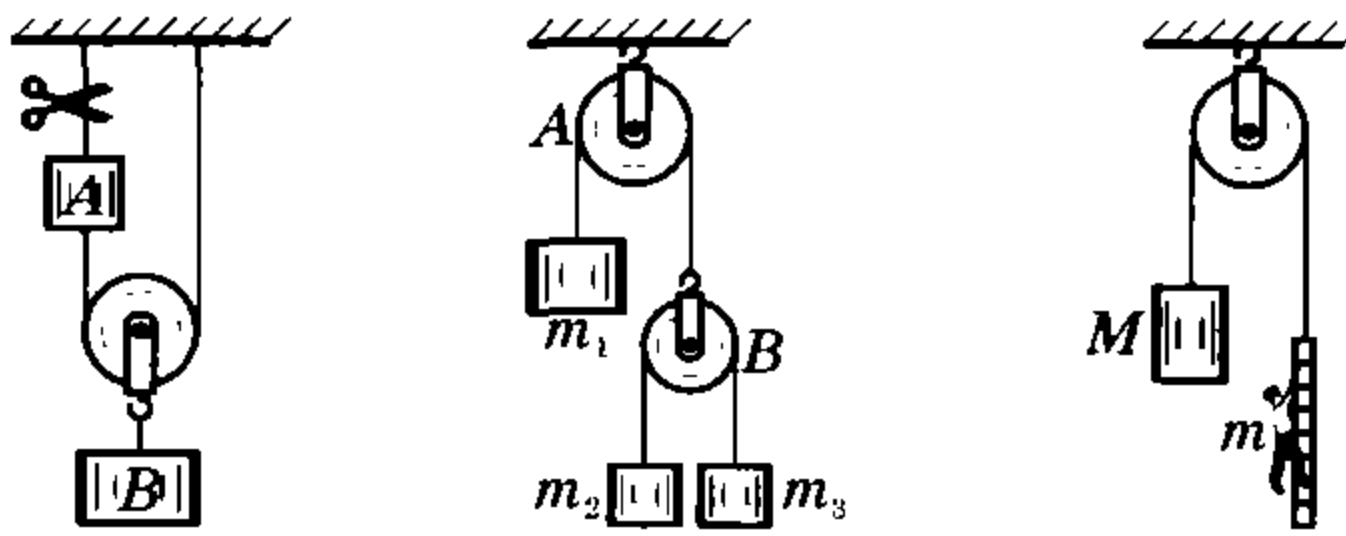


图 6-21 图 6-22 图 6-23

9. 如图 6-23 所示, 一根绳跨过装在天花板上的滑轮, 一端接质量为 M 的物体, 另一端吊一载人的梯子而平衡. 人的质量为 m , 若滑轮与绳子的质量均不计, 绳绝对柔软, 不可伸长. 问为使滑轮对天花板的反作用力为零, 人相对于梯子应按什么规律运动?

10. 如图 6-24 所示, 离桌边左方 l 处放一石块, 一根长度为 $2l$ 的不可伸长的轻绳将它与另一个相同质量的石块连接起来, 搭在轻滑轮上, 两石块维持在同一高度, 绳既不拉伸也不下垂, 然后放下右边石块. 问: 左边石块先到达桌边碰到滑轮, 还是右边石块先碰到桌子? (不计摩擦)



图 6-24 图 6-25

11. 如图 6-25 所示, 质量为 m 的两个相同的重物, 分别固定在轻杆的两端, 杆用铰链与轴相连, 轴将杆长分为 $2:1$, 维持杆的水平, 试求释放时两个物体的加速度及杆对轴的压力.

12. 如图 6-26 所示, 一根长度为 $3l$ 的轻杆上固定质量分别为 m_1 和 m_2 的两个重物, 它们之间的距离以及它们分别到杆两端的距离相等. 用两根竖直的绳子系在杆的两端, 使杆水平放置且保持平衡状态. 试求当右边绳子被剪断时左边绳子的拉力 T .

13. 如图 6-27 所示, 在以加速度 a 行驶的车厢内, 有一长为 L , 质量为 m 的棒 AB 靠在光滑的后壁上, 棒与车厢底面间的摩擦因数为 μ . 为了使棒不滑动, 棒与竖直平面所成的夹角 θ 应在什么范围内?

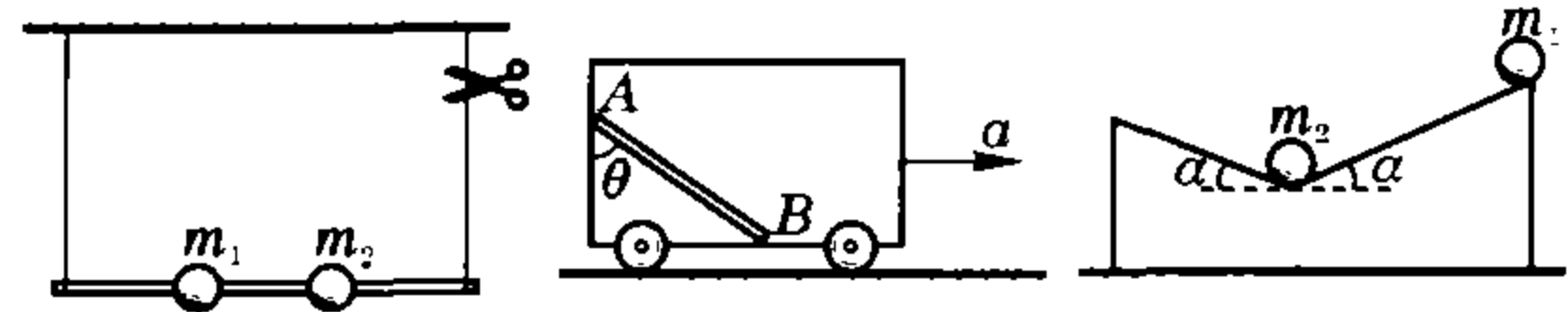


图 6-26 图 6-27 图 6-28

14. 两块与水平成 α 角的光滑斜面构成轻架, 架上有如图 6-28 所示那样放置的两个小球, 架可以沿水平面作无摩擦滑动, 释放质量为 m_1 的上球, 试问在什么条件下, 质量为 m_2 的下球将沿架子滚上?

参考答案

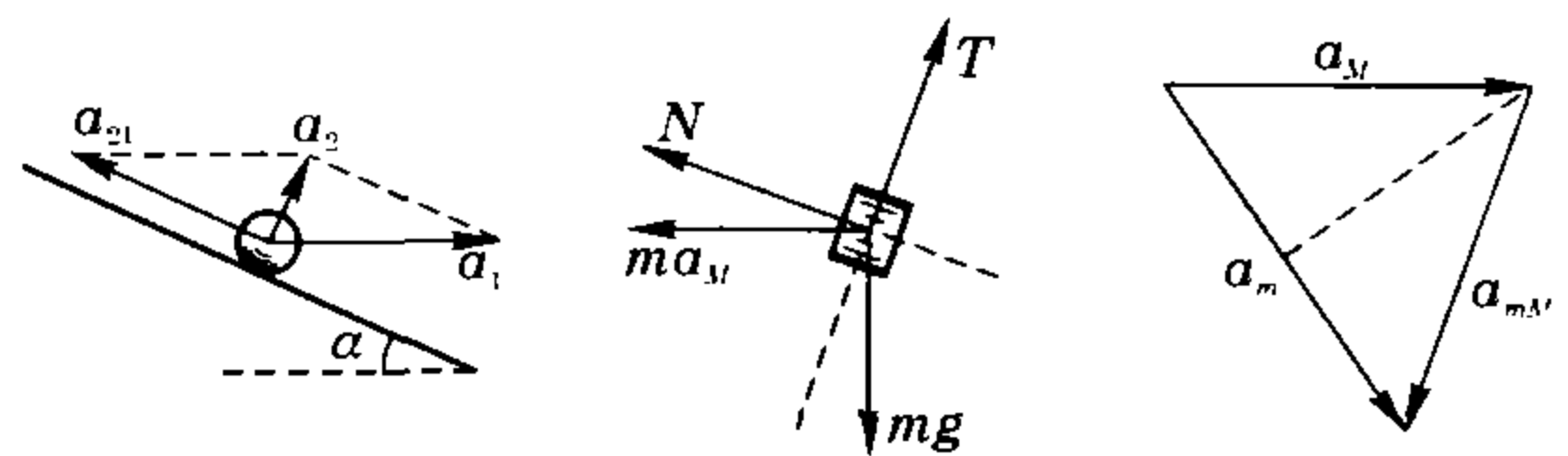
1. C.

2. 如图答 6-1 所示, a_2 为小物体相对地面的加速度, a_{21} 为小物体相对劈面的加速度, $a_2 = a_{21} + a_1$, 而 $a_{21} = a_1$, 则 $a_2 = 2a_1 \sin \frac{\alpha}{2}$, 方向与竖直方向成 $\frac{\alpha}{2}$.

3. 设三角形高为 h 、底边长为 b , 由加速度相关关系 $\frac{a_0}{a_B} = \frac{b}{h} = \cot \alpha$, 故 $a_B = a_0 \tan \alpha$.

4. a_1 方向竖直向下, a_2 方向水平向右, 且 $a_1 = a_2 \tan \alpha$; 设 m_1 、 m_2 间压力的竖直分量为 F_N , 则对 m_1 有 $F_N \tan \alpha = m_2 a_2$, 对 m_2 有 $m_1 g - F_N = m_1 a_1$, 可解得

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 \cot^2 \alpha}; a_2 = \frac{m_1 g}{m_1 \tan \alpha + m_2 \cot \alpha}.$$



图答 6-1 图答 6-2 图答 6-3

5. 以 M 为参照系, m 受力如图答 6-2 所示, 有 $m g \sin \theta - T + m a_M \cos \theta = m a_m$; m 对地的加速度 a_m 与 M 加速度 a_M 关系如图答 6-3 所示, $a_m = 2a_M \sin \frac{\theta}{2}$; 对

整体: $T = M a_M + m a_m \cos \left(90^\circ - \frac{\theta}{2} \right)$, 可解得

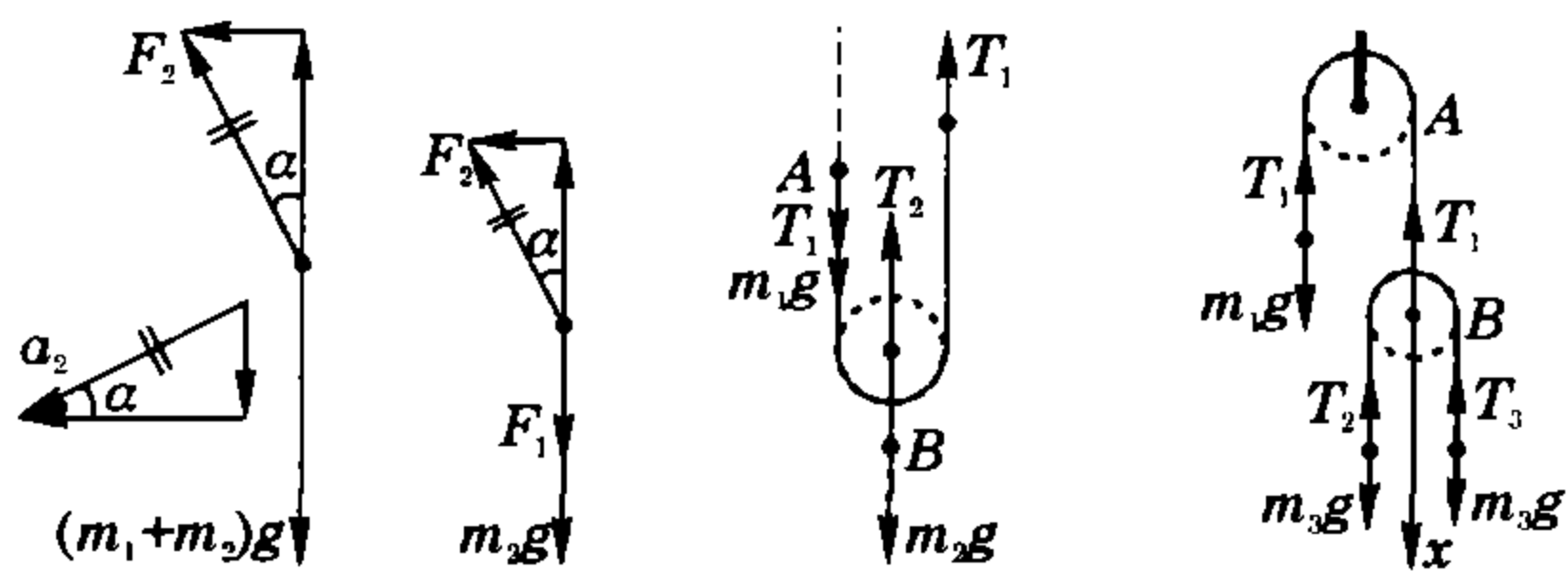
$$a_M = \frac{m g \sin \theta}{M + m(1 - \cos \theta)}.$$

6. 设斜面对 m_2 支持力为 F_2 , m_2 对 m_1 支持力为

F_1, m_1, m_2 整体受力分析如图答 6-4 所示, 在竖直方向有 $(m_1 + m_2)g - F_2 \cos \alpha = (m_1 + m_2)a_2 \sin \alpha$; m_2 水平方向受力有 $F_2 \sin \alpha = m_2 a_2 \cos \alpha$, 而 $a_1 = a_2 \sin \alpha$, 解得: $a_1 = \frac{(m_1 + m_2)g \sin^2 \alpha}{m_2 + m_1 \sin^2 \alpha}$, $a_2 = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \alpha}{m_2 + m_1 \sin^2 \alpha}$.

7. 左边上端绳断瞬时, 其余绳上力尚未及改变, A、B 受力如图答 6-5 所示, 则有 $T_1 + m_1 g = m_1 a_1$; $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$, 又 $T_2 = 2T_1$, $a_1 = 2a_2$, 可得

$$a_1 = \frac{4m_1 + 2m_2}{4m_1 + m_2} g, a_2 = \frac{2m_1 + m_2}{4m_1 + m_2} g.$$



图答 6-4

图答 6-5

图答 6-6

8. 如图答 6-6 所示, 设定坐标方向及线上拉力, 对 m_1, m_2, m_3 建立运动方程

$$F_{T_1} - m_1 g = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$F_{T_2} - m_2 g = m_2 a_2, \quad (2)$$

$$m_3 g - F_{T_2} = m_3 a_3, \quad (3)$$

$$\text{又} \quad F_{T_1} = 2F_{T_2}, \quad (4)$$

而由三者位移关系; 设三者位移各为 s_1, s_2, s_3 , m_2 与 m_3 相对滑轮 B 的位移设为 x , 对 m_2 有 $x = s_2 + s_1$, 对 m_3 有 $x = s_3 - s_1$, 则 $2s_1 = s_3 - s_2$, 故加速度关系为

$$a_1 = \frac{a_3 - a_2}{2}, \quad (5)$$

由上列五式可得

$$a_1 = \frac{4m_2 m_3 - m_1 m_2 - m_1 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3} g,$$

$$T_1 = \frac{8m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3} g,$$

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3} g.$$

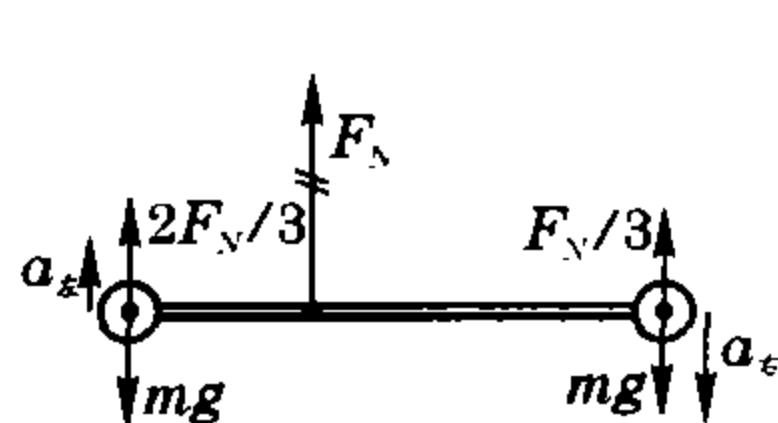
9. 由“滑轮对天花板的反作用力为零”知绳上张力为零, 则 $a_M = g$, 梯的加速度大小亦为 g , 方向向上, 人与梯的动力学方程为 $Mg = ma_A - (M - m)g$, 得 $a_A = \frac{2M - m}{m}g$, 方向向下, 则人相对梯的加速度为 $a_{人梯} = \frac{2M}{m}g$, 方向向下.

10. 各时刻, 绳上张力大小 T 总处处相等, 但左石块水平加速度 $a_{左} = \frac{T}{m}$, 右石块水平加速度 $a_{右} = \frac{T \cos \theta}{m} < a_{左}$, 可判断同样时间内左边石块位移大于右边石块, 故左边石块先到达桌边.

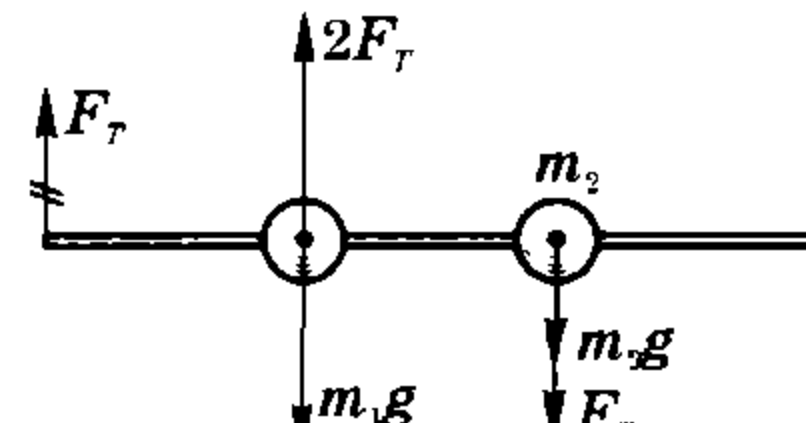
11. 释放瞬时对杆与两重物系统分析受力如图答

6-7, 动力学方程为 $F_N - 2mg = m(a_{左} - a_{右})$ 由两球位移关系知 $a_{右} = 2a_{左}$, 将力 F_N 分解为对左、右两球的两分力 $F_{N右} = \frac{1}{3}F_N, F_{N左} = \frac{2}{3}F_N$, 左、右两球有 $\frac{2}{3}F_N - mg = ma_{左}, mg - \frac{1}{3}F_N = ma_{右}$, 可得 $F_N = \frac{9}{5}mg$.

12. 剪断瞬间, 两重物加速度关系为 $a_2 = 2a_1$, 受力情况如图答 6-8 所示, 图中, F_T 为右边绳上张力, 将它分解为对两重物的两个分力 $2F_T$ (向上) 与 F_T (向下), 对两重物给出牛二定律方程 $m_1 g - 2F_T = m_1 a_1$, $m_2 g + F_T = m_2 a_2$, 由上得 $F_T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g$.



图答 6-7



图答 6-8

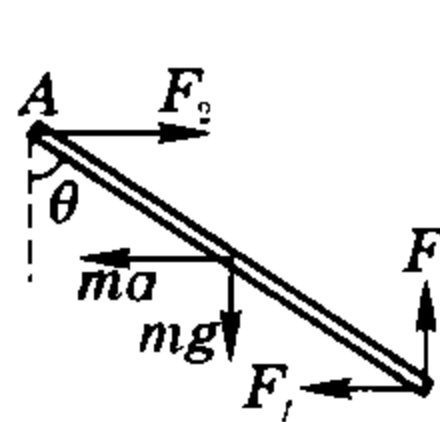
13. 棒不向右滑, 受力如图答 6-9 所示, 水平方向: $F_f = \mu mg$, 竖直方向: $F_N = mg$, 以 A 端为支点, 应满足: $ma \frac{L}{2} \cos \theta + \mu mg L \cos \theta + mg \frac{L}{2} \sin \theta \geq mg L \sin \theta$,

可得 $\tan \theta \leq \frac{a}{g} + 2\mu$. 棒不向左滑, 受力如图答 6-10 所示, 对 A 端有

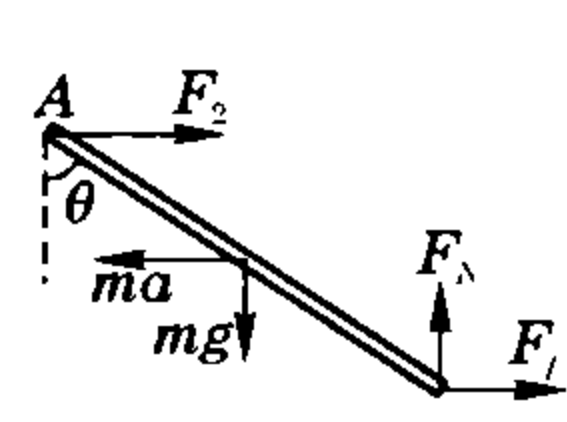
$$ma \frac{L}{2} \cos \theta + mg \frac{L}{2} \sin \theta \leq mg L \sin \theta + \mu mg L \cos \theta,$$

$$\text{得} \quad \tan \theta \geq \frac{a}{g} - \mu,$$

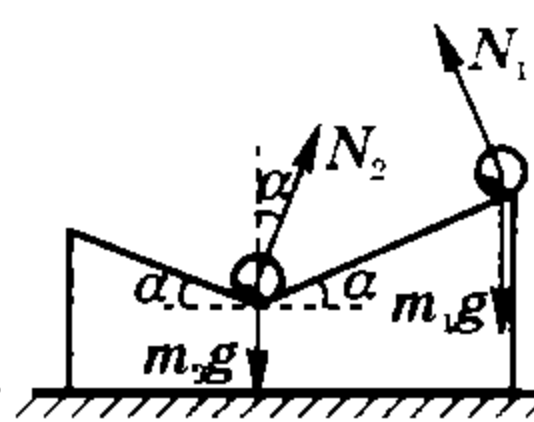
$$\text{所以} \quad \arctan \left(\frac{a}{g} - 2\mu \right) \leq \theta \leq \arctan \left(\frac{a}{g} + 2\mu \right).$$



图答 6-9



图答 6-10



图答 6-11

14. 临界时 m_2 已不再压右边斜架, 两球受力如图答 6-11 所示, 因为是轻架, 所以两球对架压力的水平分力应相等, 有 $N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \alpha$. m_1, m_2 在斜面法线上的加速度应满足: $a_{1m} > a_{2n}$ 即

$$\frac{m_1 g \cos \alpha - N_1}{m_1} > \frac{m_2 g \cos \alpha - N_2 \sin (90^\circ - 2\alpha)}{m_2},$$

$$\text{可得} \quad m_2 < m_1 \cos 2\alpha.$$

更正 本刊 2004 年第 9 期中专题 4“小试身手”第 11 题参考答案中“ $L_{\max} = 100\sqrt{3}(\text{m})$ ”更正为: $x_{\max} = 100\sqrt{3}(\text{m}), L_{\max} = \frac{x_{\max}}{\cos \frac{\pi}{6}} = 200(\text{m})$.

竞赛辅导

专题7 曲线运动曲直谈

沈晨

教你一手

物体在平面所做的曲线运动是较直线运动复杂得多的变速运动,处理曲线运动问题的基本思路是根据运动叠加原理,把曲线运动视作互相垂直的两个分运动,这种分解往往还可“化曲为直”,将复杂的曲线运动化解为两个较为简单的直线运动。

曲线运动是变速运动,速度的大小与方向同时不断变化.曲线运动质点的瞬时速度定义为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

式中 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 为一段时间内的平均速度,瞬时速度是平均速度在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限,方向沿该点轨迹的切向。

由于曲线运动是变速运动,故肯定有加速度,质点的瞬时加速度定义为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

式中 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 为一段时间内的平均加速度,瞬时加速度是平均加速度在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限.加速度方向肯定与速度方向不在同一直线。

一般的曲线运动,为求在任一点的瞬时加速度,通常将其分解为法向加速度 a_n 与切向加速度 a_t .如图7-1所示,设质点沿曲线运动,在A、B两点的瞬时速度各为 v_A 与 v_B ,间隔时间 Δt ,速度增量为 Δv ,将 Δv 分解为法向分量 Δv_n 与切向分量 Δv_t ,法向分量 Δv_n 表示速度方向的变化,切向分量表示速度大小的变化,则法向加速度 a_n 与切向加速度 a_t 分别为

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t}; a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t}$$

先确定 a_n . 设A是半径为 ρ 的圆周上一点(该圆称曲线A点的曲率圆, ρ 称曲率半径),曲线AB近似为该圆上的弧 \widehat{AB} , 矢量三角形BED与几何三角形

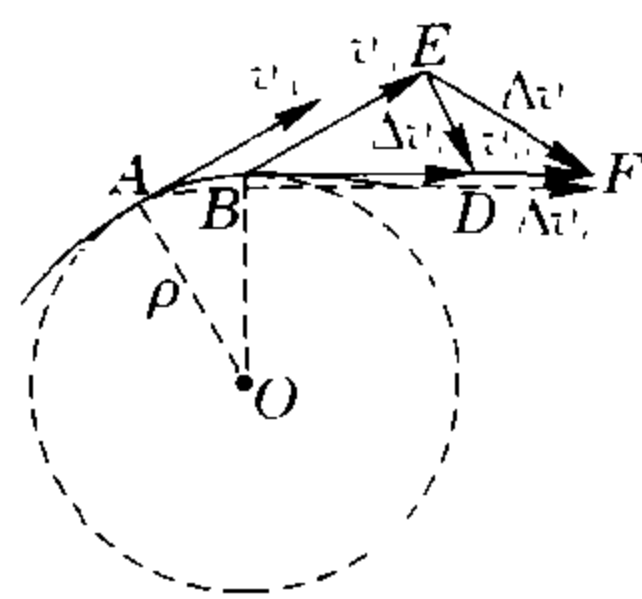


图7-1

OAB相似,故有 $\frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v_A}{\rho}$, $\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v_A \cdot \widehat{AB}}{\Delta t \cdot \rho}$, 则

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_A \cdot \widehat{AB}}{\Delta t \cdot \rho} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_A \cdot \widehat{AB}}{\Delta t \cdot \rho} = \frac{v_A^2}{\rho}$$

方向垂直于 v_A , 指向曲率圆圆心, 故通常称法向加速度为向心加速度。

至于切向加速度, 则与直线运动中一样, 等于速度大小的变化率。

曲线运动的瞬时加速度是切向加速度与向心加速度的矢量和, 方向与速度方向成 $\theta = \arctan \frac{a_n}{a_t}$ 。

一般的曲线运动, 同时有切向加速度与向心加速度, 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, 速率增大, 当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, 速率减小; 若切向加速度为零, 速率不变, 即为匀速率曲线运动, 例如匀速圆周运动, 其加速度即为向心加速度大小 $a = \frac{v^2}{R}$ 不变, 方向与速度方向垂直而指向圆心, 匀速圆周运动是切向加速度为零而向心加速度大小不变的曲线运动; 若法向加速度为零, 则运动方向不变, 即为变速直线运动. 可见, 直线运动是曲线运动的特例. 曲线运动也可以是匀变速运动, 即合加速度的大小、方向均不变, 例如斜(平)抛运动就是加速度恒为 g 的匀变速曲线运动。

求解曲线运动的瞬时速度与瞬时加速度的运动学基本方法都是通过矢量的分解与合成, 从定义出发, 用微元法解决。

例1 在离水面高度为 h 的岸边, 有人用绳子拉船靠岸, 若人收绳的速率恒为 v_0 , 试求船在离岸边 s 距离处时的速度与加速度的大小各为多少?

分析与解 首先我们依据实际运动效果如图7-2所示分解船的运动: 船及与船相系的绳端A的实际运动是水平向左的, 这可看做是绳之A端一方面沿绳方向向“前方”滑轮处“收短”, 同时以滑轮为圆心转动而成, 即将实际速度 v 分解成沿绳方向“收短”的分速度

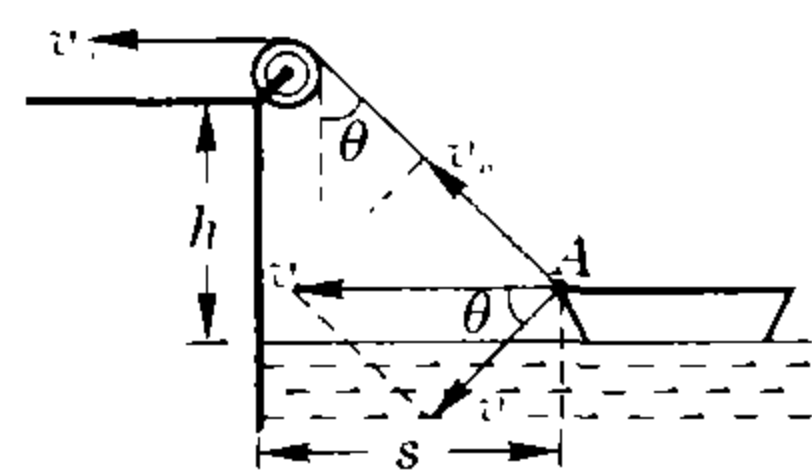


图7-2

v_n 和垂直于绳方向的转动分速度 v_t , 注意到绳子是不可伸长的, 人收绳的速率 v_0 也就是绳端 A 点沿绳方向移动速率 v_n . 由图 7-2 所示 v, v_t, v_n 矢量关系及位置的几何关系易得:

$$v_n = v_0, v_t = v_0 \cot \theta = \frac{h}{s} v_0,$$

而
$$v = \frac{v_0}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s} v_0.$$

下面来求此位置的瞬时加速度 a . 由于船实际是沿水平方向做直线运动, 我们只须确定速度大小变化率. 如图 7-3 所示, 取一小段时间 $\Delta t \rightarrow 0$, 船头从 A 点

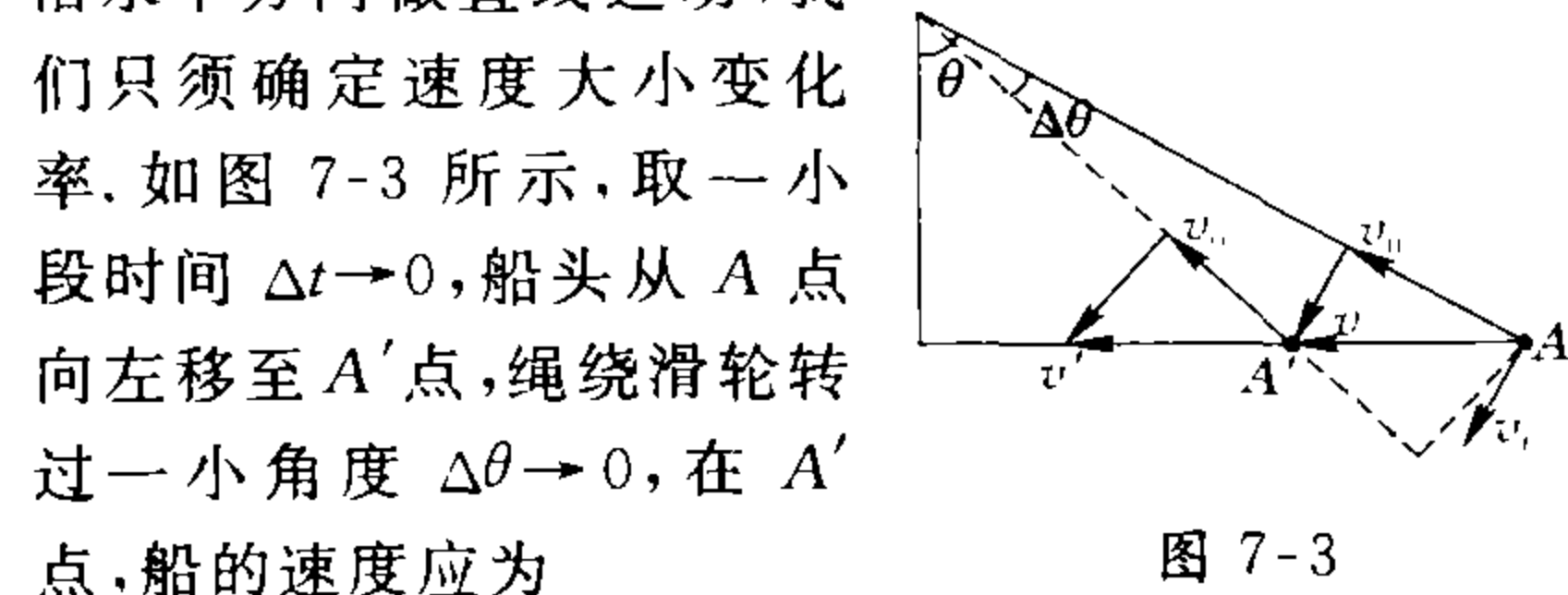


图 7-3

在 A' 点, 船的速度应为

$$v' = \frac{v_0}{\sin(\theta - \Delta\theta)},$$

则速度增量 $\Delta v = v_0 \left(\frac{1}{\sin(\theta - \Delta\theta)} - \frac{1}{\sin \theta} \right),$

而 $\Delta t = \frac{\left(\frac{h}{\cos \theta} \cdot \Delta\theta \right)}{v_t} = \frac{h \cdot \Delta\theta}{v_0 \cos \theta} \tan \theta,$

由加速度定义 $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, 则有

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{v_0 \left(\frac{1}{\sin(\theta - \Delta\theta)} - \frac{1}{\sin \theta} \right)}{\frac{h \cdot \Delta\theta}{v_0 \cos \theta} \tan \theta} \\ &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{v_0^2 \cos \theta}{h \tan \theta} \cdot \frac{\sin \theta - \sin(\theta - \Delta\theta)}{\Delta\theta \cdot \sin(\theta - \Delta\theta) \cdot \sin \theta} \\ &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{v_0^2 \cos \theta}{h \tan \theta} \frac{\cos\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2} \cdot \sin(\theta - \Delta\theta) \cdot \sin \theta} \\ &= \frac{v_0^2}{h} \cot^3 \theta = \frac{v_0^2}{h} \cdot \left(\frac{h}{s} \right)^3 = \frac{v_0^2 h^2}{s^3}. \end{aligned}$$

即船在离岸 s 远处的加速度

$$a = \frac{v_0^2 h^2}{s^3}.$$

例 2 如图 7-4 所示, 质点从 O 点由静止开始沿半径为 R 的圆周做速率均匀增大的运动, 到达 A 点时质点的加速度与速度方向夹角为 α , 质点通过的弧 s 所对的圆心角为 β . 试确定 α 与 β 间的关系.

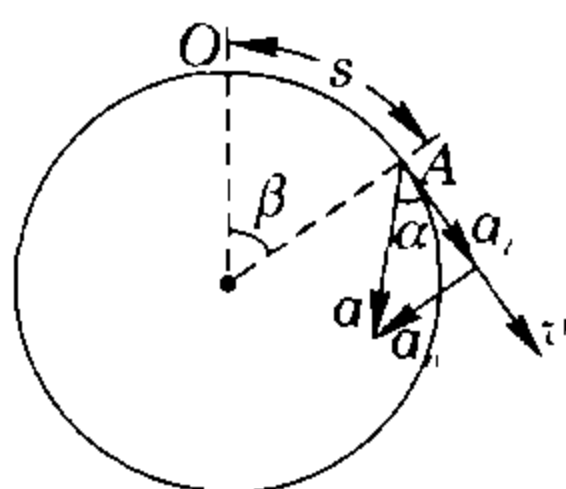


图 7-4

分析与解 根据题意可知, 质点沿圆周做速度大小、方向均变化的运动. 每个瞬时的加速度均可分解为切向加速度 a_t 与法向加速度 a_n , 前者反映质点速率变化快慢, 后者反映质点速度方向变化快慢. 由题给条件, 质点经

A 点时的这两个分加速度分别为

$$a_t = \frac{2s}{t^2}, a_n = \frac{v_A^2}{R}.$$

而 $v_A^2 = (a_t t)^2, s = R\beta,$

t 是质点由 O 点运动到 A 点的时间, 则有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_t^2 t^2}{R}, \\ \frac{a_n}{a_t} &= \frac{2st^2}{t^2 R} = \frac{2R\beta}{R} = 2\beta, \end{aligned}$$

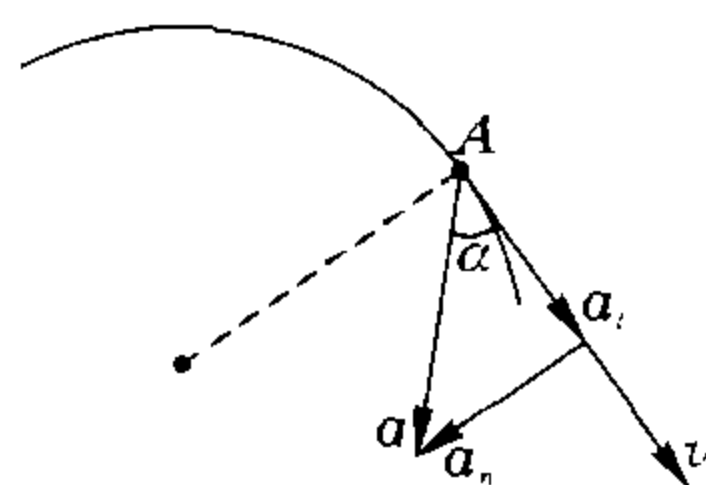


图 7-5

由图 7-5 显见, $\frac{a_n}{a_t} = \tan \alpha,$

于是可确定 α 与 β 间的关系为 $\tan \alpha = 2\beta.$

例 3 如图 7-6 所示, 圆盘半径为 R . 以角速度 ω 绕盘心 O 转动, 一质点沿径向槽以恒定速率 u 自盘心向外运动, 试求质点的加速度.

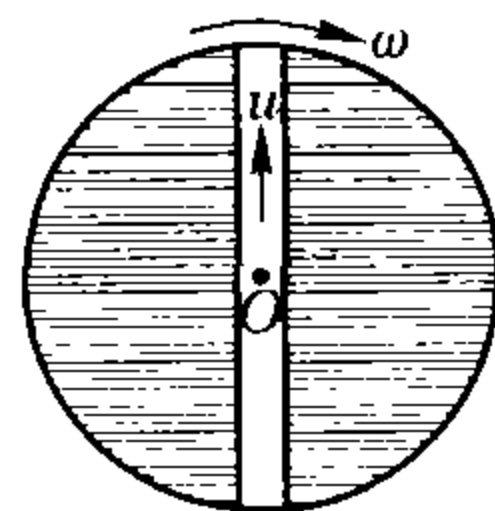


图 7-6

分析与解 这里, 质点的运动是质点相对槽的运动及与槽一起转动两者之合运动. 设某一瞬时质点沿槽运动到与 O 相距 r 的位置 A. 槽在盘上的方位记为 y 方向, 质点在位置 A 的速度是其对槽速度 u (沿 y 方向) 与槽的 A 点速度 ωr (沿 x 方向) 的矢量和. 为了求质点在 A 处的瞬时加速度, 我们取一小段时间 Δt , 在时刻 $t + \Delta t$, 若盘不动, 质点运动到 B 位置, 其与盘心 O 相距 $r + u\Delta t$, 但因盘是以角速度 ω 转动的, 在 Δt 时间内, 盘转过了角度 $\Delta\theta = \omega\Delta t$, 故质点随槽移过一段弧长, 实际应在位置 B', 如图 7-7 所示. 质点在 B' 处的速度是质点对槽的速度 u (沿 OB' 方向) 与槽上 B 点速度 $v = \omega(r + u\Delta t)$ (垂直于 OB' 方向) 的合成, 在 Δt 时间内, 质点沿 y 方向速度增量为

$$\Delta v_y = [u \cos \omega\Delta t - \omega(r + u\Delta t) \sin \omega\Delta t] - u;$$

质点沿 x 方向速度增量为

$$\Delta v_x = [u \sin \omega\Delta t + \omega(r + u\Delta t) \cos \omega\Delta t] - \omega r.$$

注意到 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$\cos \omega\Delta t \rightarrow 1; \sin \omega\Delta t \rightarrow \omega\Delta t; (\Delta t)^2 \rightarrow 0,$$

则

$$\begin{aligned} a_{Ay} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[u - \omega(r + u\Delta t)\omega\Delta t] - u}{\Delta t} \\ &= -\omega^2 r, \end{aligned}$$

这里“-”号表示该加速度方向指向盘心, 这就是盘上 A 点的向心加速度, 或称质点的牵连加速度.

$$\begin{aligned} a_{Ax} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(r + u\Delta t) + u\omega\Delta t - \omega r}{\Delta t} \\ &= 2\omega u, \end{aligned}$$

这个加速度是由于参考系(圆盘)转动及质点对参考系有相对运动而产生的,方向指向 u 沿 ω 方向转过 90° 的方向,通常称之为科里奥利加速度.(简称科氏加速度)

由上可知,质点在 A 处的加速度大小为

$$a_A = \omega \sqrt{(\omega r)^2 + 4u^2},$$

方向与 x 成 $\arctan \frac{\omega r}{2u}$ 角.

本题展示了中介参考系以 ω 匀速转动时,质点加速度的构成:质点相对中介参考系的加速度为 $a_{\text{相对}}$ (本题该项为零),牵连加速度 $a_{\text{牵连}} = -\omega^2 r$ 以及科氏加速度 $2\omega u$,对此三项求矢量和即为质点对静参考系的加速度.

曲线运动的加速度也可根据受力条件,用牛顿第二定律求动力学解.我们将在后面的专题中介绍,此处不赘.

曲线运动的轨迹是曲线,在数学上,曲率描述曲线(连续函数)弯曲程度,曲线上某点的曲率定义为

$$k = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|,$$

$\Delta \alpha$ 为弧长 Δs 两端切线方向变化角度,如图 7-8 所示.圆上各点曲率相同,即

$$k = \frac{\Delta \alpha}{R \cdot \Delta \alpha} = \frac{1}{R},$$

对曲线上各点,对应地有半径 $R = \frac{1}{k}$ 的圆,叫做曲率圆,曲率圆圆心叫做曲率中心.圆是曲率处处相同的曲线,一般曲线各点曲率不尽相同,下面展示两例运用物理方法求曲线上某点的曲率或曲率半径的问题.

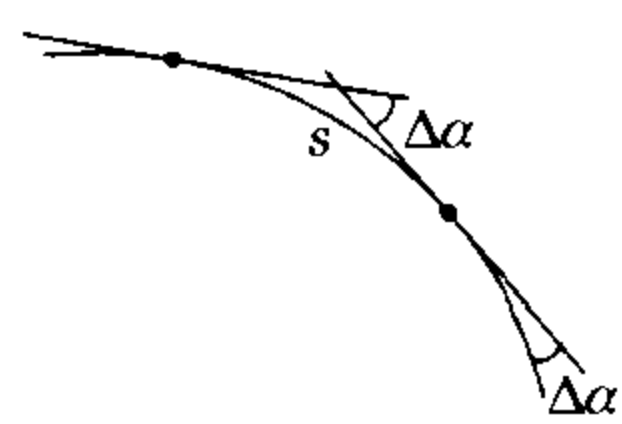


图 7-8

例 4 用矢量分解法求椭圆长轴与短轴端点的曲率半径,已知长半轴与短半轴分别为 a 和 b .

如图 7-9 所示,设质点在 M 平面内沿椭圆轨道以速率 v 运动,这个运动在 M_1 平面的一个分运动轨道恰成半径为 b 的圆,则两

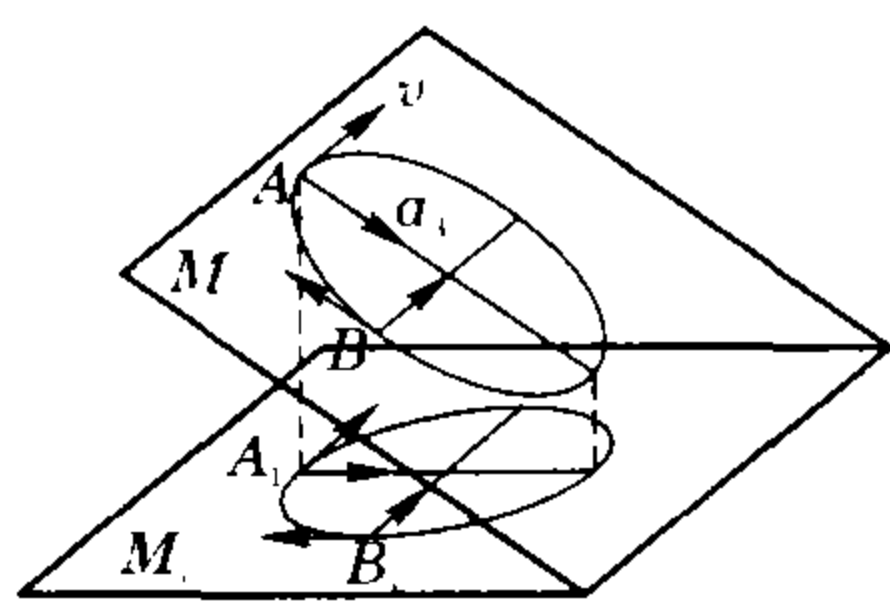


图 7-9

平面间夹角 $\theta = \arccos \frac{b}{a}$.

对于椭圆上 A 点,设曲率半径为 ρ_A ,质点以线速度 v 通过 A 点,则该点的向心加速度

$$a_A = \frac{v^2}{\rho_A}, \quad (1)$$

对 A 点在 M_1 平面上的投影 A_1 点,其线速度为 v ,向心加速度 a_{A_1} 为 a_A 沿 M_1 平面方向分量,则

$$a_{A_1} \frac{b}{a} = \frac{v^2}{b}, \quad (2)$$

比较①、②两式可得

$$\frac{a v^2}{b^2} = \frac{v^2}{\rho_A}, \rho_A = \frac{b^2}{a}.$$

同理,对 B 点及其投影 B_1 点有

$$\begin{cases} a_B = \frac{v^2}{\rho_B} \\ a_B = a_{B_1} = \frac{\left(\frac{b}{a}v\right)^2}{b} \end{cases}, \text{即 } \rho_B = \frac{a^2}{b}.$$

例 5 用运动分解方法求抛物线上某点的曲率半径.

设有图 7-10 甲所示抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$,为求其上某点例如 $(\frac{p}{2}, p)$ 点处的曲率半径,可设想一质点以速度 v_0 做平抛运动,平抛运动是水平方向的匀速直线运动与竖直方向自由落体运动的合成,设运动 t 时间质点水平位移 s ,竖直下落高度 h ,则

$$\begin{cases} s = v_0 t, \\ h = \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$

消去 t ,得

$$s^2 = \frac{2v_0^2}{g} h.$$

可知平抛物体运动的轨迹为一条抛物线,如图 7-10 乙所示.若取 $\frac{v_0^2}{g} = p$,则该轨迹即是旋转了 90° 的抛物线

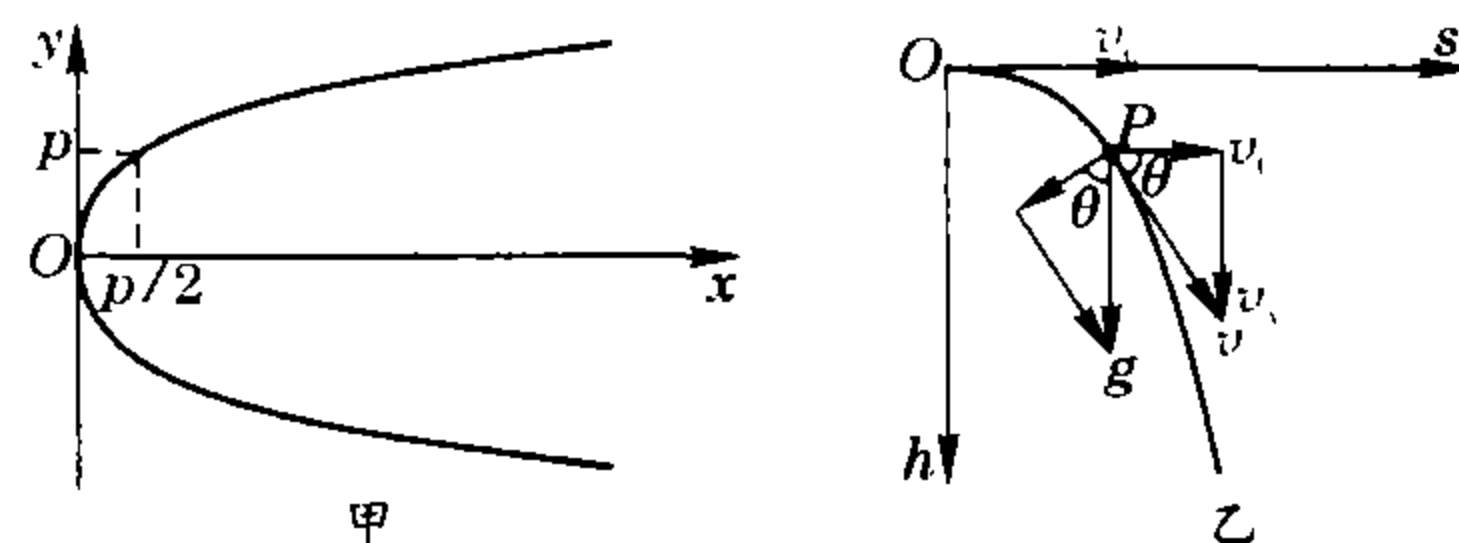


图 7-10

$y^2 = 2px$. 取平抛轨迹上任意一点 P ,该点速度为 v ,与水平成 θ 角,加速度为 g ,该点曲率半径以 ρ 表示,向心加速度是 g 的分量且有

$$g \cos \theta = \frac{v^2}{\rho}.$$

根据运动的合成,式中

$$v^2 = v_0^2 + 2gh, \cos \theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}},$$

则有

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{v_0^2 + 2gh}{g \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}} = \frac{v_0^2 \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{g} \\ &= p \left(1 + \frac{2h}{p}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

将变量 s, h 对应于 y, x ,则抛物线上各点的曲率半径

为

$$R = \frac{1}{k} = \rho \left(1 + \frac{2x}{\rho} \right)^{\frac{3}{2}}$$

将 $x = \frac{\rho}{2}$ 代入, 指定点曲率半径为 $2\sqrt{2}\rho$.

抛体运动与匀速圆周运动是曲线运动中较为简单与特别的, 前者加速度恒定, 后者只有向心加速度且大小恒定. 对这两种运动问题的处理, 即要把握处理曲线运动问题的共性, 又要充分运用自身的特有规律.

例 6 如图 7-11 所示, 从倾角为 θ 的斜坡顶端以初速度 v_0 水平抛出一小球, 不计空气阻力, 若斜坡足够长, 则小球抛出后离开斜坡的最大距离 H 是多少?

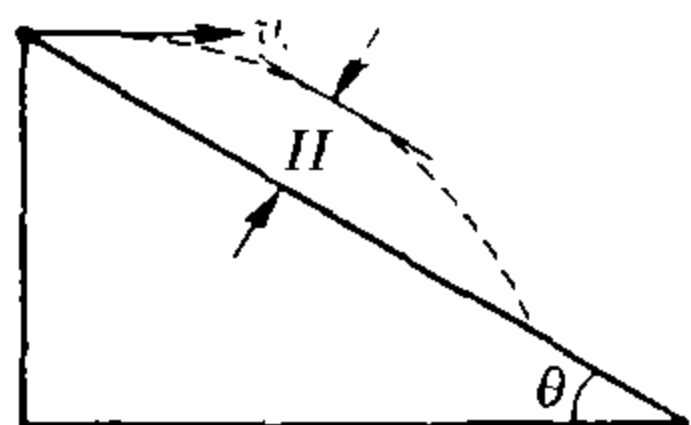


图 7-11

分析与解 这道题要我们确定小球运动过程中离开斜坡的最大距离, 如果我们仍以通常的水平、竖直坐标系来考察是很麻烦的, 既然要求的是“离开斜坡的最大距离”, 何不以小球抛出点为原点, 建立沿斜坡向下及垂直于斜坡向上的 x 轴和 y 轴坐标系来进行解析?

在这样的坐标系中, 如图 7-12 所示, 小球的运动被分解为沿 x 轴和 y 轴的两个分运动, 其中, 小球沿 y 轴方向的分运动是初速度 $v_y = v_0 \sin \theta$ 、加速度 $a_y = -g \cos \theta$ 的匀变速直线运动, 小球匀减速地沿 y 轴远离斜面, 当速度减为零时, 与斜面距离最大, 而后又匀加速地返回斜面. 小球与斜面的距离只须考察垂直于斜面方向的分运动, 离开斜面上升过程的最大位移即

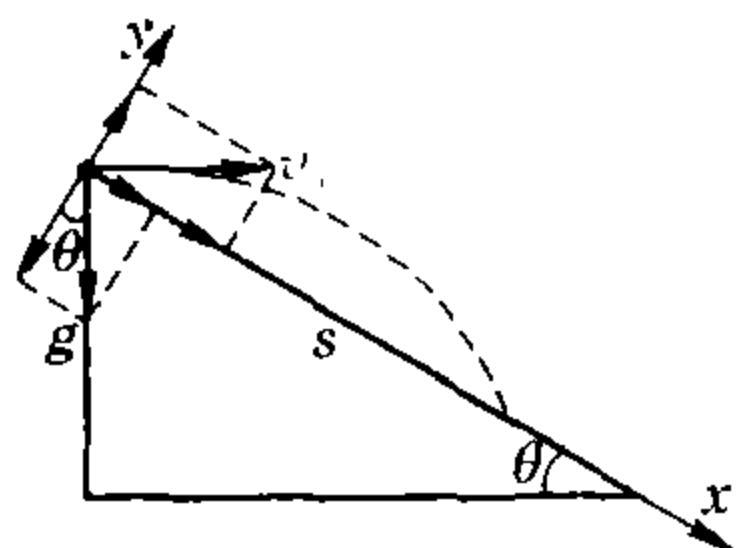


图 7-12

$$H = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g \cos \theta}$$

我们对斜面上的抛体运动问题再展开一下. 若小球初速度为 v_0 , 方向与水平成 α 角 ($-\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 则小球沿斜面方向的分运动是初速度为 $v_r = v_0 \cos(\theta \pm \alpha)$ 、加速度为 $a_r = g \sin \theta$ 的匀加速运动; 对于确定的斜面, 小球落回斜面的时间

$$t = 2 \cdot \frac{v_0 \sin(\theta \pm \alpha)}{g \cos \theta}$$

取决于初速度, 而在斜面上的落点与抛出点的距离即小球在 t 时间内的位移, 应为

$$s = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot t}{\cos \theta} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha \pm \theta)}{g \cos^2 \theta}$$

上式与 v_0 的平方成正比.

研究斜面上的抛体运动问题, 还是要合理地将运动进行分解, 正确地判断分运动的性质, 根据基本的运

动规律, 对分运动建立运动方程, 同时注意由斜面倾角制约着的各分运动与合运动间的几何关系.

一试身手

1. 如图 7-13 所示, 质点沿一圆周运动, 过 M 点时速度大小为 v , 做加速度矢量与圆相交成弦 $MA = l$, 试求此加速度的大小.

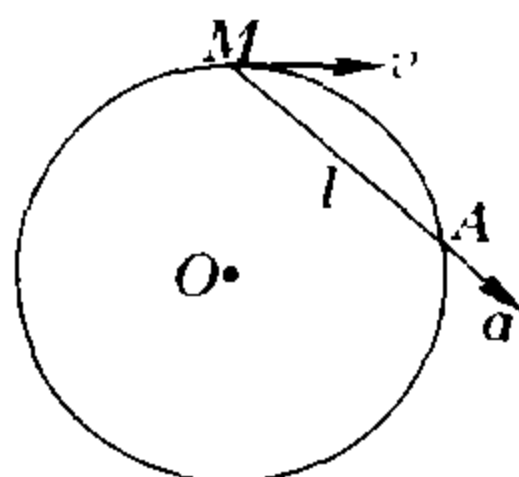


图 7-13

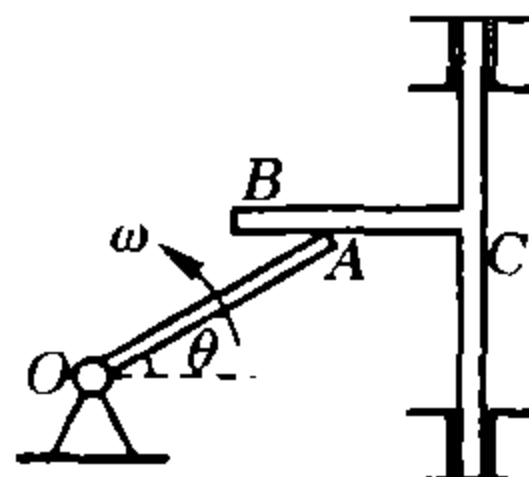


图 7-14

2. 如图 7-14 所示, 曲柄 OA 长 40 cm, 以等角速度 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ 绕 O 轴反时针方向转动. 由于曲柄的 A 端推动水平板 B 而使滑竿 C 沿竖直方向上升, 求当曲柄与水平线夹角 $\theta = 30^\circ$ 时, 滑竿 C 的加速度.

3. 有一只狐狸以不变的速度 v_1 沿着直线 AA' 逃跑, 一猎犬以不变的速率 v_2 追击, 其运动方向始终对准狐狸. 某时刻狐狸在 F 处, 猎犬在 D 处, $FD \perp AB$, 且 $FD = L$, 如图 7-15 所示. 试求此时猎犬的加速度的大小.

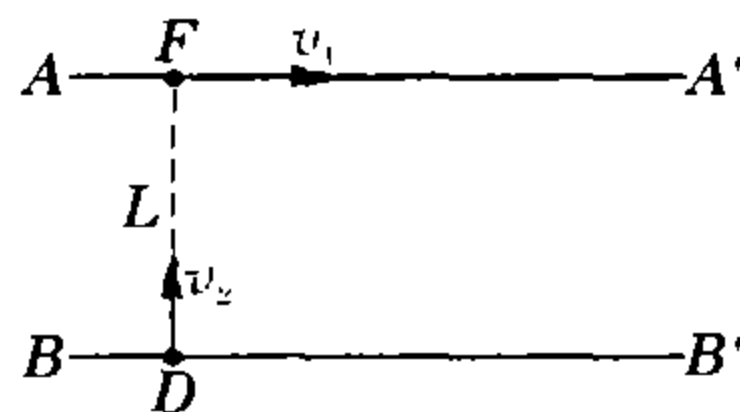


图 7-15

4. 赛车在公路的平直段上以尽可能大的加速度行驶, 在 0.1 s 内速度由 10.0 m/s 加大到 10.5 m/s, 那么该赛车在半径为 30 m 的环形公路段行驶中, 要达到同样大的速度需要多少时间? 当环形公路段的半径为多少时, 赛车的速度就不可能增大到超过 10 m/s? (公路的路面是水平的)

5. 如图 7-16 所示, 一等腰直角三角形 OAB 在其自身平面内以等角速度 ω 绕顶点 O 转动, 某一点 M 以等相对速度沿 AB 边运动, 当三角形转了一周时, M 点走过了 AB , 如已知 $AB = b$, 试求 M 点在 A 时的速度与加速度.

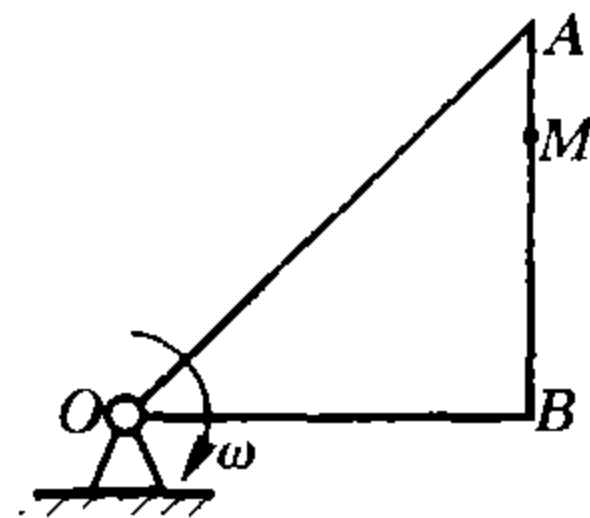


图 7-16

6. 质点沿半径为 R 的圆周运动, 初速度的大小为 v_0 . 在运动过程中, 点的切向加速度与法向加速度大小恒相等, 求经时间 T 质点的速度 v .

7. 旋转半径为 r 、螺距为 h 的等距螺旋线, 曲率半径 ρ 处处相同. 试用运动学方法求解 ρ 值.

8. 如图 7-17 所示, 小冰球从高为 H 的光滑坡顶 A 点由静止开始下滑, 这个坡的末端 B 形如水平跳板. 当跳板高 h 为何值时, 冰球飞过的距离 s 最远? 它

等于多少?

9. 两个质点以加速度 g 在均匀重力场中运动. 开始时两个质点位于同一点, 且其中一个质点具有水平速度 $v_1 = 3.0 \text{ m/s}$; 另一个质点水平速度 $v_2 = 4.0 \text{ m/s}$, 方向与前者相反. 求当两个质点的速度矢量相互垂直时, 它们之间的距离.

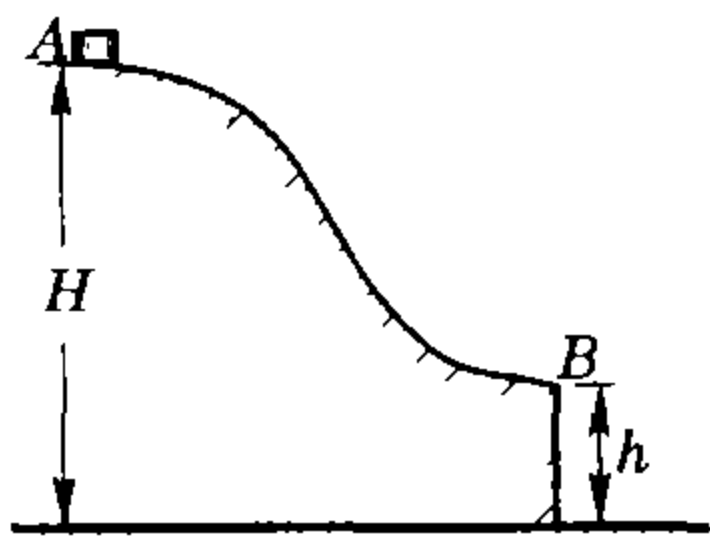


图 7-17

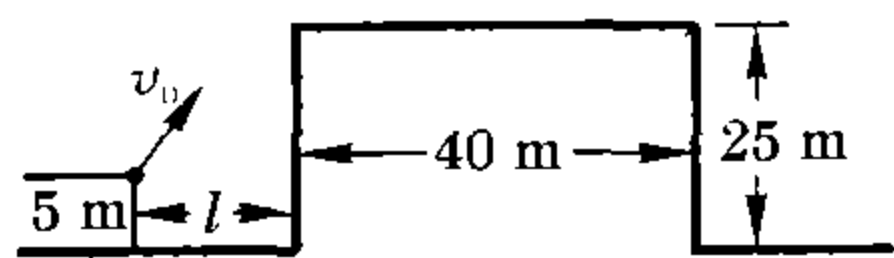


图 7-18

10. 如图 7-18 所示, 一仓库高 25 m, 宽 40 m. 今在仓库前 $l \text{ m}$ 、高 5 m 的 A 处抛一石块, 使石块抛过屋顶, 问距离 l 为多大时, 初速度 v_0 之值最小? (g 取 10 m/s^2)

11. 木排停泊在河上, 到岸的距离 $L = 60 \text{ m}$. 流水速度 u 同离岸的距离 x 成比例地增大, 在岸边 $u_0 = 0$, 而在木排边流速 $u_L = 2 \text{ m/s}$. 小汽船离开岸驶向木排. 船对水的速度 $v = 7.2 \text{ km/h}$. 问驾驶员在起航前应该使船指向何方, 使以后无须校正船速就能靠上与起航处正对面的木排? 这时船航行多少时间?

12. 如图 7-19 所示, 一个完全弹性小球自由下落, 下落 5 m 后碰到斜面上的 A 点. 同时斜面正以 $v = 10 \text{ m/s}$ 在水平面上做匀速运动, 斜面与水平面的倾角为 45° . 问在离 A 点多远处, 小球将与斜面发生第二次碰撞?

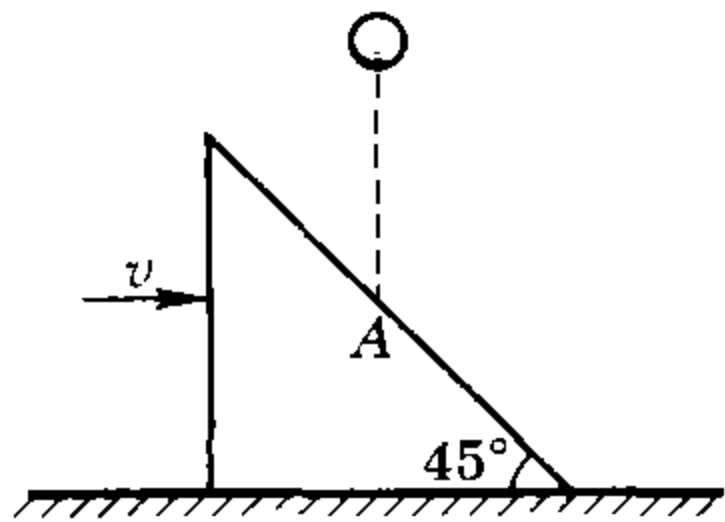


图 7-19

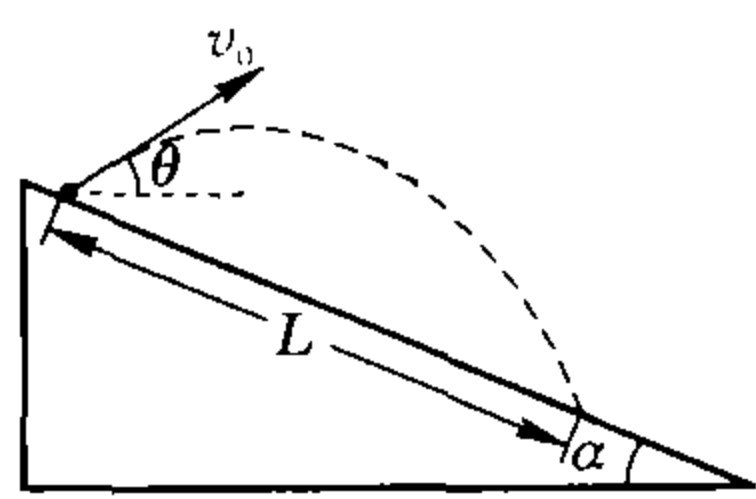


图 7-20

13. 如图 7-20 所示, 一人站在一平滑的山坡上, 山坡与水平面角度 α . 他与水平成 θ 仰角扔出的石子儿落在斜坡上距离为 L , 求其抛出时初速度 v_0 及以此大小初速度抛出的石子儿在斜坡上可以达到的最大距离.

14. 小球以恒定速度 v 沿水平面运动, 在 A 点坠落于半径为 r 和深为 H 的竖直圆柱形井中. 小球速度 v 与过 A 点井的直径成 α , 俯视如图 7-21 所示. 问 v, H, r, α 之间关系如何, 才能使小球与井壁和井底弹性碰撞后, 能够从井里“跳出来”(不

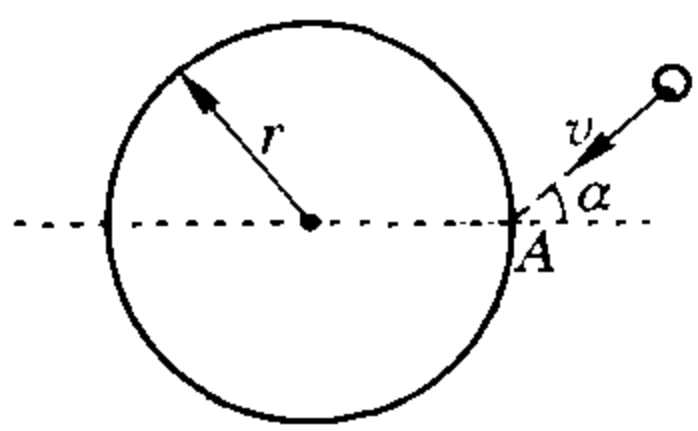


图 7-21

计摩擦).

15. 如图 7-22 所示, 一位网球运动员用拍朝水平方向击球, 第一只球落在自己一方场地上后弹跳起来刚好擦网而过, 落在对方场地 A 处. 第二只球直接擦网而过, 也落在 A 处. 球与地面的碰撞是完全弹性的, 且空气阻力不计, 试求运动员击球高度为网高的多少倍?

16. 初速度为 v_0 的炮弹向空中射击, 不考虑空气阻力, 试求空间安全区域的边界方程.

17. 机车以等速率 v_0 沿直线轨道行驶. 机车车轮半径为 r . 如车轮只滚动不滑动, 将轮缘上的点 M 在轨道上的起点位置取为坐标原点, 并将轨道取为 x 轴, 如图 7-23 所示, 求 M 点的运动轨迹方程以及轨迹的曲率半径, 并求当 M 点所在的车轮直径在水平位置时, 该点的速度与加速度.

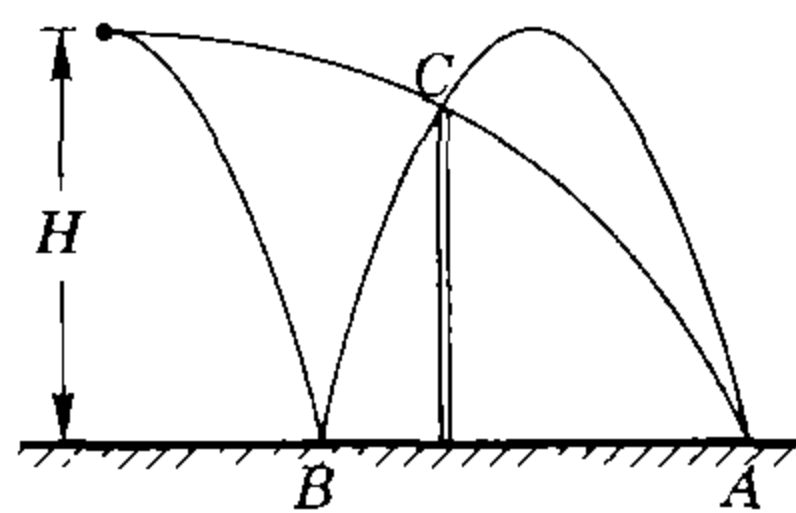


图 7-22

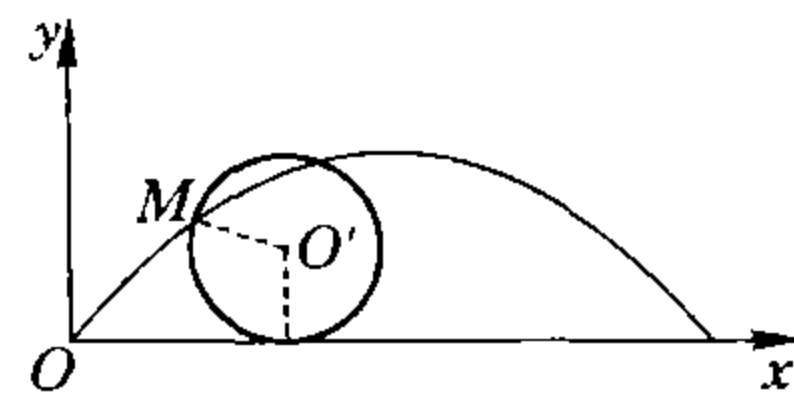


图 7-23

参考答案

1. 如图答 7-1 所示, 法向加速度 $a_n = a \sin \alpha$, 而 $\sin \alpha = \frac{l}{2R}$, 得 $a = \frac{2v^2}{l}$.

2. 杆上 A 点加速度 $a_A = l \cdot \omega^2$, 而 B 板与杆 A 接触, 有相同沿竖直方向的加速度

$$\begin{aligned} a_B &= a_A \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} l \cdot \omega^2 \\ &= 0.05 \text{ m/s}^2, \end{aligned}$$

此即滑杆 C 的加速度.

3. 如图答 7-2 所示, 设 Δt 时间内, v_2 方向变化 $\Delta \theta$, 当 $\Delta \theta \rightarrow 0$ 时, 则

$$\tan \Delta \theta = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{L} \rightarrow \Delta \theta,$$

由加速度定义, 猎犬加速度

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_2 \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = \frac{v_1 v_2}{L}.$$

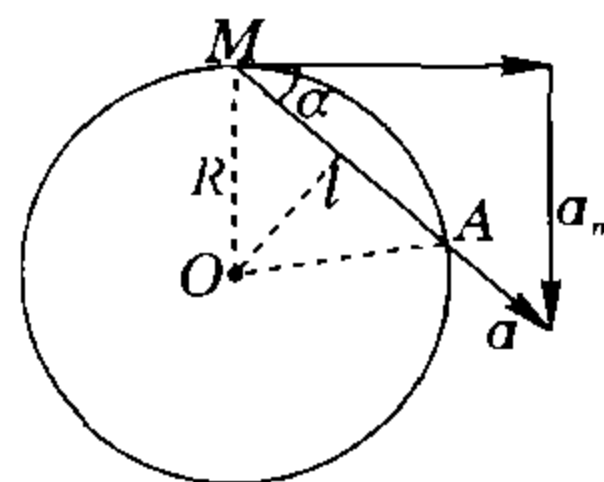
4. 直线加速时车的加速度

$$a_0 = \frac{v_t - v_0}{t_0} = 5 \text{ m/s}^2,$$

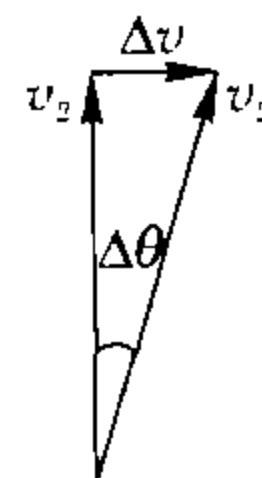
在环形公路上, 法向加速度

$$a_n = \frac{v_t^2}{R},$$

切向加速度



图答 7-1



图答 7-2

$$a_t = \frac{v_t - v_0}{t},$$

则有

$$a_n^2 + a_t^2 = a_0^2,$$

代入数据得

$$\frac{0.25}{t^2} + \frac{10.5^4}{900} = 25, t = 0.15 \text{ s}.$$

所以当轨道半径令法向加速度大小等于 a_0 时, 即 $\frac{v_0^2}{R_m} = a_0$, 无切向加速度, 赛车速率不会增加, 得 $R_m = 20 \text{ m}$.

5. M 点相对于 AB 的速度大小 $v_{MA} = \frac{b\omega}{2\pi}$, 而 A 点对惯性参考系 O 的速度大小

$$v_A = \omega \cdot \sqrt{2b},$$

\therefore

$$v_M = v_{MA} + v_A,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } v_M &= \sqrt{2b^2\omega^2 + \frac{b^2\omega^2}{4\pi^2} + 2 \cdot \sqrt{2b\omega} \cdot \frac{b\omega}{2\pi} \cos 45^\circ} \\ &= \frac{b\omega}{2\pi} \sqrt{8\pi^2 + 4\pi + 1}; \end{aligned}$$

方向与 AB 夹角

$$\arctan \frac{2\pi}{2\pi + 1};$$

M 的加速度

$$a_M = a_{MA} + a_A + a_{斜},$$

其中 $a_{MA} = 0, a_{斜} = 2\omega \cdot$

$\frac{b\omega}{2\pi}$, 方向与 AB 垂直, a_A

$= \omega^2 \sqrt{2b}$, 如图答 7-3, M 的加速度大小为

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{(\omega^2 \sqrt{2b})^2 + (2\omega \cdot \frac{b\omega}{2\pi})^2 + 2(\omega^2 \sqrt{2b})(2\omega \cdot \frac{b\omega}{2\pi}) \cos 45^\circ} \\ &= \frac{\omega^2 b}{\pi} \sqrt{2\pi^2 + 2\pi + 1}, \end{aligned}$$

方向与 AO 夹角为 $\arctan \frac{1}{2\pi + 1}$.

6. 取运动过程中第 i 个极短时间 Δt_i , 有

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t} = \frac{v_i^2}{R},$$

则 $T = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum \Delta t_i$

$$= R \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{v_i - v_{i-1}}{v_i^2}$$

$$= R \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{v_{i-1}} - \frac{1}{v_i} \right)$$

$$= R \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_{n-1}} - \frac{1}{v} \right)$$

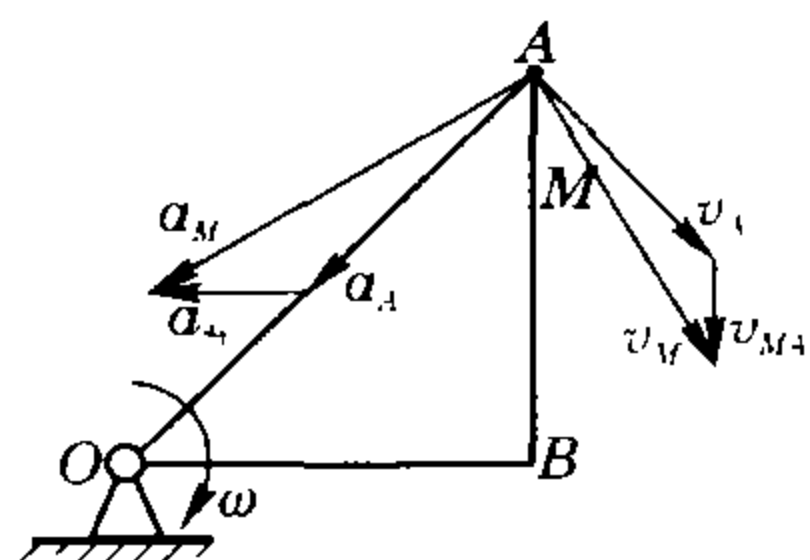
$$= R \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right),$$

得

$$v = \frac{Rv_0}{R - v_0 T},$$

这是设定速率增加的结论, 若速率减小则

$$v = \frac{Rv_0}{R + v_0 T}.$$



图答 7-3

7. 设物体以 v_0 做匀速率的圆周运动, 同时以 v_h 沿垂直于 v_0 方向做匀速直线运动, 每前进一个螺距, 完成一次圆周, 即有 $\frac{2\pi r}{v_0} = \frac{h}{v_h}$, 设曲率半径为 ρ , 则有

$$a_n = \frac{v_0^2}{r} = \frac{v_0^2 + v_h^2}{\rho},$$

则由此两式可得

$$\rho = \left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 r^2} \right) r.$$

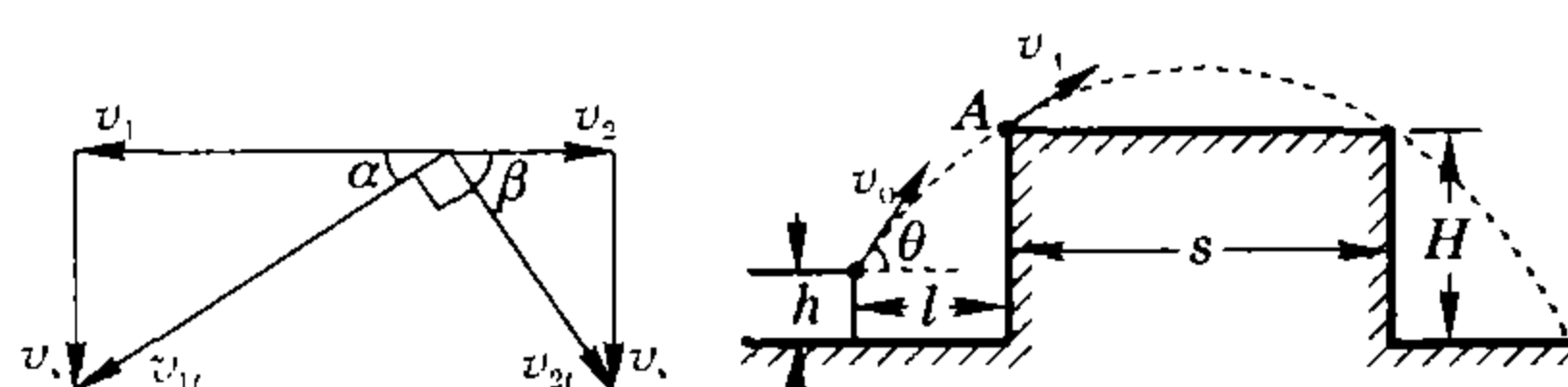
8. $s = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H-h) \cdot h}$, 当 $H-h=h$, 即 $h = \frac{H}{2}$ 时, $s = s_m = H$.

9. 落地时两质点速度矢量关系如图答 7-4 所示, 则有

$$v_1 \tan \alpha = v_2 \cot \alpha, \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

而 $v_y = v_1 \tan \alpha = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$, $t = \frac{v_y}{g}$, 则

$$s = (v_1 + v_2)t = \frac{7\sqrt{3}}{5} \text{ m}.$$



图答 7-4

图答 7-5

10. 如图答 7-5 中 A 点的速度方向与水平成 45° 时, 可以最小的 v_A 越过 40 m 仓库顶, 则

$$v_A = \sqrt{gs} = 20 \text{ m/s},$$

设 v_0 方向与水平成 θ 角, 则有

$$(v_0 \sin \theta)^2 - (v_A \sin 45^\circ)^2 = 2g(H-h);$$

$$l = v_A \cos 45^\circ \cdot \frac{v_0 \sin \theta - v_A \sin 45^\circ}{g},$$

得

$$l = 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m} \approx 14.6 \text{ m}.$$

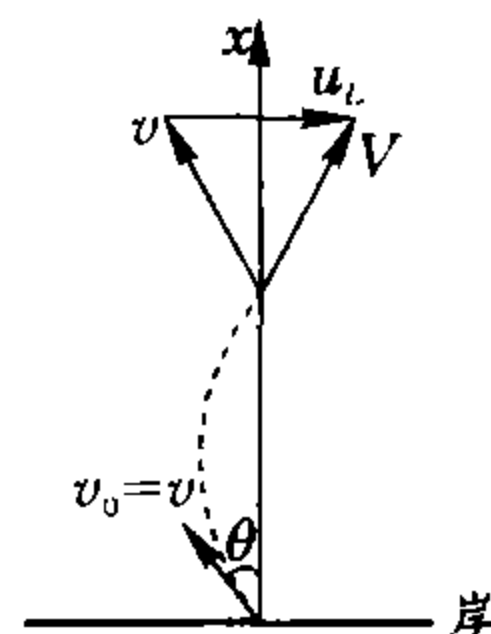
11. 水流速 $u_L = kx$, 船的合速度 $V = u_L + v$, 在岸边 $V_0 = 2 \text{ m/s}$, 要在正对面靠上木排, 航线应如图答 7-6 所示, 时间

$$t = \frac{L}{v \cos \theta},$$

中间时刻合速度应沿 x 方向, 木排边 V, u_L, v 应构成如图答 7-6 所示正三角形, 可知船头方向 (即船相对水的速度方向) 应与航线成 30° , 于是

$$t = \frac{L}{v \cos 30^\circ} = 20\sqrt{3} \text{ s}.$$

12. 球以 $v = 10 \text{ m/s}$ 入射, 与斜面的接近速度 $v_{球 \rightarrow \Delta} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$, 方向垂直于斜面向下, 则分离速度 $v_{球 \rightarrow \Delta}' = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$, 方向垂直于斜面向上, 对斜面, 从



图答 7-6

分离到第二次落回历时为 $t = 2 \frac{v_0 \sin 45^\circ}{g \cos 45^\circ} = 4 \text{ s}$. 注意到球沿斜面体方向初速度为零, 加速度为 $g \sin 45^\circ$. 则沿斜面方向位移为

$$\overline{AA'} = \frac{1}{2} (g \sin 45^\circ) \cdot t^2 = 40\sqrt{2} \text{ m}.$$

13. 距离 L 的表达式为

$$L = \frac{v_0 \cos \theta \cdot 2v_0 \sin(\theta + \alpha)}{g \cdot \cos^2 \alpha},$$

得
$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2 \cos \theta \sin(\theta + \alpha) \cos \alpha}},$$

设抛出石子的仰角为 β , 则

$$\begin{aligned} L_{(\beta)} &= \frac{2v_0^2}{g \cdot \cos^2 \alpha} \cos \beta \cdot \sin(\beta + \alpha) \\ &= \frac{v_0^2}{g \cdot \cos^2 \alpha} [\sin(2\beta + \alpha) - \sin \alpha], \end{aligned}$$

当 $2\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g \cdot \cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha).$$

14. 小球运动轨迹的俯视图如图答 7-7 所示, 两次与壁相碰间水平射程为

$$2r \cos \alpha, \text{ 历时 } t_1 = \frac{2r \cos \alpha}{v};$$

从进入至与底碰撞, $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}},$

则应有 $nt_1 = 2kt_2$, 即

$$n \frac{r \cos \alpha}{v} = k \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

(n, k 均为正整数).

15. 设 C 点高度为 h , 由题意球 1 运动时间为

$$3\sqrt{\frac{2H}{g}}, \text{ 球 2 运动时间为 } \sqrt{\frac{2H}{g}}, \text{ 水平总射程相同,}$$

故
$$v_2 = 3v_1,$$

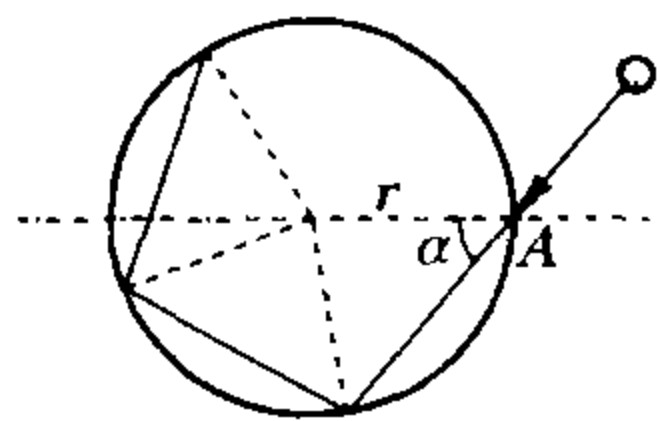
又
$$v_2 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = v_1 \left[2\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \right],$$

解得
$$H = \frac{4}{3}h.$$

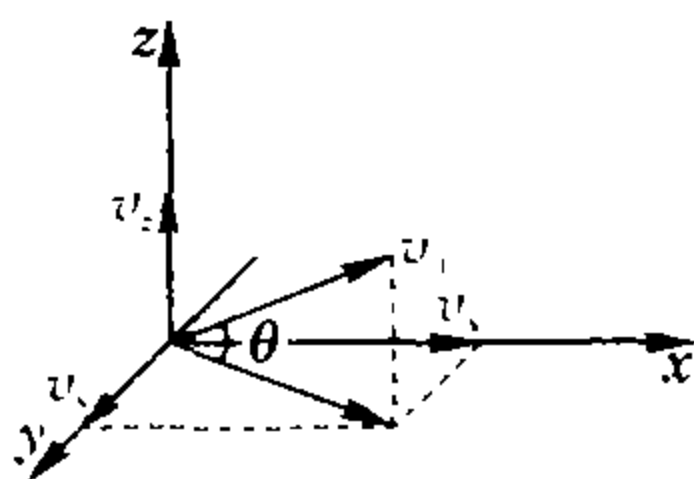
16. 这个问题可抽象为一个求射出炮弹在空中可能轨迹的包络线方程问题, 包络线以外即为安全区域.

如图答 7-8 所示, 在三维空间坐标中, 设初速度方向与 xy 平面成 θ 角. 由抛体运动规律可建立时间 t 的三个参数方程

$$\begin{cases} x = v_x t, \\ y = v_y t, \\ z = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$



图答 7-7



图答 7-8

而
可得

$$x^2 + y^2 = (v_0 \cos \theta)^2 t^2.$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2 + y^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2 + y^2}{v_0^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} g \frac{x^2 + y^2}{v_0^2} \tan^2 \theta. \end{aligned}$$

即
$$\frac{g(x^2 + y^2)}{2v_0^2} \tan^2 \theta - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \tan \theta + \frac{g(x^2 + y^2)}{2v_0^2} + z = 0.$$

这是发射角 θ 各不相同的炮弹的空间轨迹方程, 此式有解时, 必满足

$$\begin{aligned} \Delta &= x^2 + y^2 - 4 \cdot \frac{g(x^2 + y^2)}{2v_0^2} \cdot \left[\frac{g(x^2 + y^2)}{2v_0^2} + z \right] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

整理得包络线方程为

$$x^2 + y^2 + \frac{2v_0^2}{g} z - \frac{v_0^4}{g^2} = 0.$$

该方程即为所求安全区域的边界方程. 这里我们运用了曲线簇的包络线的数学模型处理了一个有实际意义的物理问题.

17. (1) M 点的轨迹方程: 设时间 t , 则

$$\begin{cases} x = v_0 t - r \cdot \sin\left(\frac{v_0}{r} t\right), \\ y = r - r \cos\left(\frac{v_0}{r} t\right), \end{cases}$$

得
$$\begin{aligned} r^2 &= (v_0 t - x)^2 + (r - y)^2 \\ &= \left(r \cdot \arccos \frac{r - y}{r} - x \right)^2 + (r + y)^2. \end{aligned}$$

(2) M 点速度矢量与加速度矢量关系如图答 7-9 所示, M 点的加速度, 即

$$a_M = \frac{v_0^2}{r},$$

其法向分量

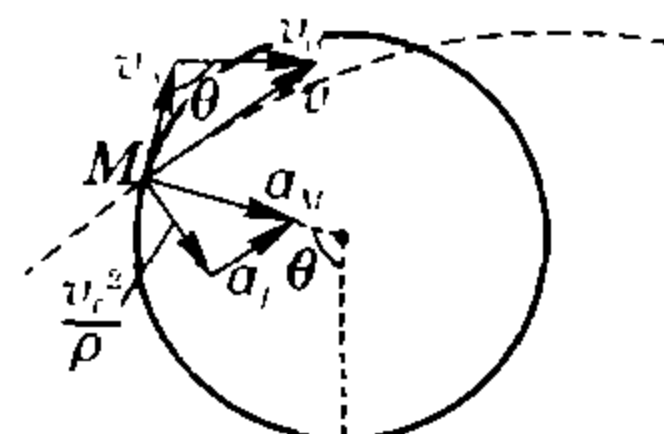
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2}{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2},$$

M 点的速度 v 沿轨迹切线方向, 即是 x 方向速度 v_0 与对车轮圆心 O' 点转动速度 v_0 的合成, 且 $v = 2v_0 \sin \frac{\theta}{2}$, 则

$$\frac{v_0^2}{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \frac{v_0^2 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\rho},$$

得
$$\rho = 4r \sin \frac{\theta}{2}.$$

(3) 圆分运动转过 90° , 合速度 $v_M = \sqrt{2}v_0$, 方向与 x 轴成 45° ; $a = \frac{v_0^2}{r}$, 方向沿 x .



图答 7-9

专题8 功与能

沈 晨

教你一手

一、变力做功的求解方法

1. 利用图象法求功

利用图象求功的方法主要用于当力对位移的关系为线性时,或在 $F-s$ 图中表示力变化的图线与 s 轴围成的图形“面积”有公式可依时,因为在 $F-s$ 图中,这种“面积”的物理意义就是功的大小。

例1 锤子打击木桩,如果锤每次以相同的动能打击木桩,而且,每次均有80%的能量传给木桩,且木桩所受阻力 f 与插入深度 x 成正比,试求木桩每次打入的深度比.若第一次打击使木桩插入了全长的 $\frac{1}{3}$,那么木桩全部插入必须锤击多少次?

分析与解 该题中木桩受到的阻力 f 为一与位移 x 成正比的变力,我们可以作如图8-1所示的 $f-x$ 图,用图象法求解.图中“面积” S_1, S_2, \dots 表示第1,2,……次锤击中,木桩克服阻力做的功,数值上等于锤传给木桩的能量,设为 W_0 . 根据三角形面积与高的平方成正比,有

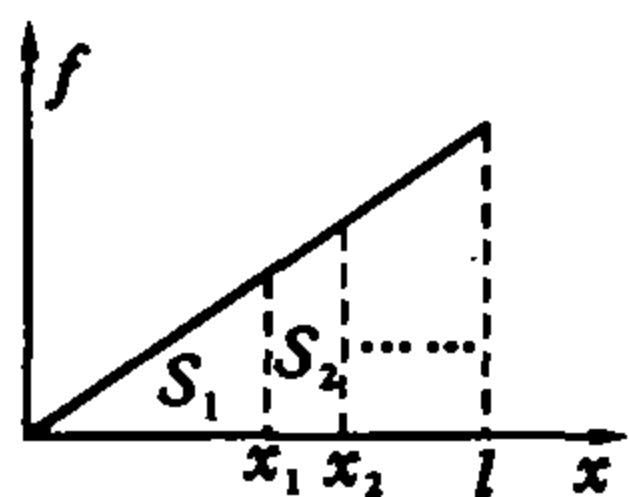


图 8-1

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : \dots : x_n^2 = W_0 : 2W_0 : 3W_0 : \dots : nW_0,$$

$$\text{则 } x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \dots : \sqrt{n},$$

每次打入深度 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$,故木桩每次打入的深度比为

$$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 : \dots : \Delta x_n = 1 : (\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{3} - \sqrt{2}) : \dots : (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

由上述比例关系可知,当 $x_n = l$ 时,得

$$\frac{l}{3} = \frac{\sqrt{n}}{1}, \text{ 即 } n=9(\text{次}).$$

例2 某质点受到 $F=6x^2$ 的力的作用,从 $x=0$ 处移到 $x=2.0\text{ m}$ 处,试求力 F 做了多少功?

分析与解 根据题给条件作图,如图8-2所示.在 $F-x$ 坐标系中,质点所受力 F 随位移 x 变化的图线为

抛物线,图线与 x 轴 $0\sim 2$ 区间围成的曲边三角形“面积”(竖划线部分)即表示力 F 的功,而由图可知这个面积是矩形面积与抛物线弓形面积(横划线部分)一半之差.我们知道,阿基米德对抛物线弓形面积公式的著名推导:抛物线所包含的弓形面积等于它的底与高之积的 $\frac{2}{3}$. 于是利用图8-2,我们所求的功大小是

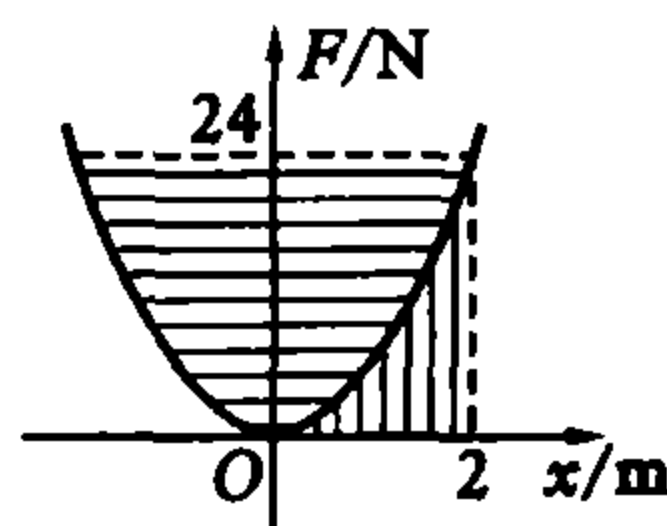


图 8-2

$$W = (24 \times 2 - \frac{2}{3} \times 24 \times 2) \text{ J} = 16 \text{ J}.$$

2. 用微元法求功

如果在某一位移区间,力随位移变化的关系为 $F=f(s)$,求该变力的功通常用微元法,即将位移区间分成 $n(n \rightarrow \infty)$ 个小区间 $\frac{s}{n}$,在每个小区间内将力视为恒定,求其元功 $W_i = F_i \cdot \frac{s}{n}$,由于功是标量,具有“可加性”,那么总功等于每个小区间内元功之代数和 $\sum_{i=1}^n W_i$ 的极限,即变力在这段位移中所做的功为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i.$$

在数学上,确定元功相当于给出数列通项式,求总功即求数列 n 项和当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限。

例3 半径等于 r 的半球形水池内充满了水,把池内的水完全抽出至少要做多少功?

分析与解 如图8-3所示,沿着容器的竖直直径,我们将水池内的水均匀细分成 n 层,每一元层水的高度 $\Delta h = \frac{r}{n}$, Δh 很小,故每一层水均可看做是一个薄圆柱,水面下第 i 层水柱底面的半径 $r_i^2 = r^2 - (\frac{ir}{n})^2$. 这层水的质量为



图 8-3

$$m_i = \rho \cdot \pi [r^2 - (\frac{ir}{n})^2] \cdot \frac{r}{n}.$$

那么将这层水抽出至少应做的功是

$$W_i = \rho g \pi [r^2 - (\frac{ir}{n})^2] \cdot \frac{r}{n} \cdot \frac{ir}{n}.$$

而将池内水完全抽出至少要做的功就是

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i = \rho g \pi r^4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\frac{i}{n^2} - \frac{i^3}{n^4}] \\ &= \rho g \pi r^4 \lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{n^2} (1+2+3+\dots+n) - \frac{1}{n^4} (1^3+2^3 \\ &\quad +3^3+\dots+n^3)] \\ &= \rho g \pi r^4 \lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}] \\ &= \frac{1}{4} \rho g \pi r^4. \end{aligned}$$

例 4 一个质量为 m 的机动小车,以恒定速度 v 在半径为 R 且固定在地面上的竖直圆轨道内做圆周运动.已知动摩擦因数为 μ ,问在小车从最低点运动到最高点过程中,摩擦力做了多少功?

分析与解 小车沿竖直圆内轨匀速率运动到最高点的过程中,由于轨道支持力是变力,故而摩擦力为一随位置变化的力,现在我们来求此变力功.

如图 8-4 所示,将小车运动的半个圆周均匀细分成 $n(n \rightarrow \infty)$ 段,每段圆弧

长 $\frac{\pi R}{n}$ 所对应的圆心角为

$\frac{\pi}{n}$. 小车在每段长为 $\frac{\pi R}{n}$ 的

圆弧上运动时,可认为轨道对小车支持力 N_i 为一恒力,因而小车所受的摩擦力 f_i 不变,摩擦力的功可用功的公式 $W = F_s$ 计算. 当小车运动在图 8-4 所示 A

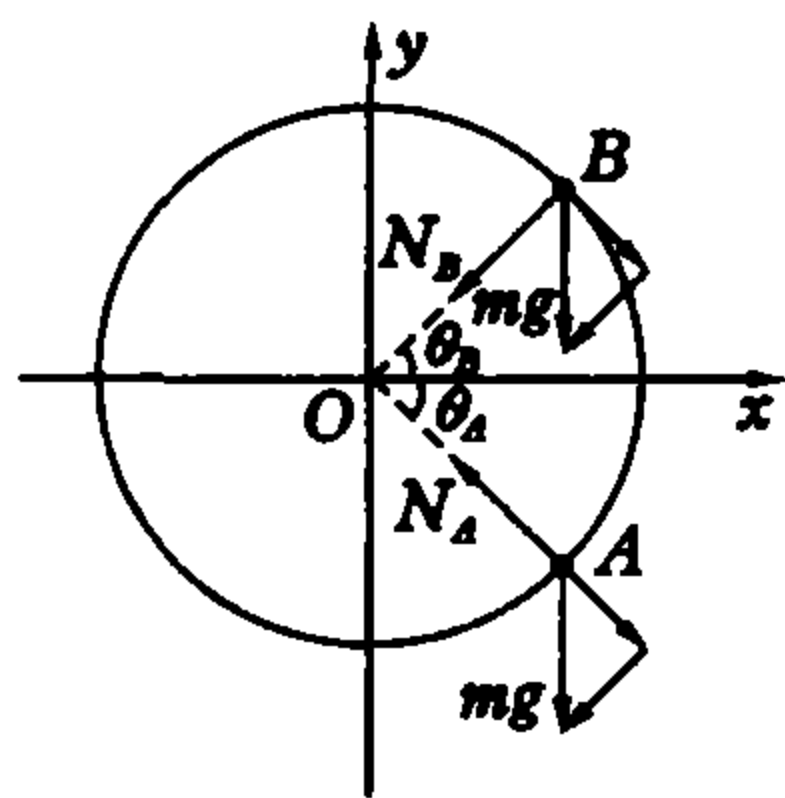


图 8-4

处(即在水平直径下方与 x 轴成 $\theta_A = i \frac{\pi}{n}$)时,有

$$N_A - mg \sin \theta_A = m \cdot \frac{v^2}{R},$$

$$f_A = \mu N_i = \mu (m \frac{v^2}{R} + mg \sin \theta_A),$$

则此处元功为

$$W_A = \mu (m \frac{v^2}{R} + mg \sin \theta_A) \cdot \frac{\pi R}{n}.$$

当小车运动在图 8-4 所示的与 A 处关于 x 轴对称的 B 处圆弧段时,则有

$$N_B + mg \sin \theta_B = m \cdot \frac{v^2}{R},$$

$$f_B = \mu N_i = \mu (m \frac{v^2}{R} - mg \sin \theta_B),$$

那么 B 处元功为

$$W_B = \mu (m \frac{v^2}{R} - mg \sin \theta_B) \cdot \frac{\pi R}{n}.$$

由此,小车在关于水平直径对称的轨道两元段上摩擦力元功之和为

$$W_i = 2\mu m \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\pi R}{n},$$

于是可知,小车沿该半圆周从最低点匀速运动到最高点时,摩擦力做的总功为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} W_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{2\mu\pi m v^2}{n} = \mu\pi m v^2.$$

上面我们利用了对称性,使 $\frac{n}{2}$ 对元功之和为常量,大大简化了求和的运算.如果要计算小车在水平直径以下或以上两段运动过程摩擦力分别做多少功,则必须用到三角数列 $a_n = \sin(n\theta)$ 前 n 项之和 S_n 的结论,即

$$S_n = \frac{\sin(\frac{n}{2}\theta) \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

下面我们先来计算水平直径以下段摩擦力的功.

$$\begin{aligned} W_{\text{下}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} W_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \mu [m \frac{v^2}{R} + mg \sin(i \frac{\pi}{n})] \cdot \frac{\pi R}{n} \\ &= \frac{n}{2} \cdot \mu m \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\pi R}{n} + \mu mg R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot [\sin \frac{\pi}{n} + \\ &\quad \sin 2(\frac{\pi}{n}) + \dots + \sin(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n})] \\ &= \frac{\mu\pi m v^2}{2} + \mu mg R \cdot \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin(\frac{n}{4} \cdot \frac{\pi}{n}) \cdot \sin(\frac{n+2}{4} \cdot \frac{\pi}{n})}{\sin \frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{\mu\pi m v^2}{2} + \mu mg R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\frac{n+2}{n} \cdot \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{\mu\pi m v^2}{2} + \mu mg R. \end{aligned}$$

同理,在水平直径以上段,摩擦力做的功为

$$W_{\text{上}} = \frac{\mu\pi m v^2}{2} - \mu mg R,$$

上下两段摩擦力的功相差 $2\mu mg R$. 故摩擦力做的总功为

$$W = W_{\text{上}} + W_{\text{下}} = \mu\pi m v^2.$$

3. 从能量变化角度求功

这种求功方法依据功对能量变化的量度关系,只需了解初、末能量状态,得到能量的增量便是相应的功量.

例 5 一质量均匀的粗绳长为 $2a$, 质量为 $2m$, 两端悬于水平天花板上相距为 a 的两点而悬垂静止,其重心位于天花板下且到天花板的距离为 b , 如图 8-5 所示. 现施一力于绳的最低点 C 并将绳拉直至 D 点, 求拉力所做的功.

分析与解 由于拉力做功,使绳的重心高度变化,

因而重力势能发生变化,重力势能的增量即为所求拉力功量.由几何知识可知,拉直后两段绳的重心位置距天花板为

$$h = \frac{a}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a,$$

重心升高,重力势能增加了

$$\Delta E_p = 2mg(b - \frac{\sqrt{3}}{4}a),$$

故拉力做的功为

$$W = 2mg(b - \frac{\sqrt{3}}{4}a).$$

例 6 一质量为 m 的皮球从高为 h 处自由下落(不计空气阻力),反弹起来的高度为原来的 $\frac{3}{4}$,要使皮球反弹回高 h 处,求每次拍球需对球做的功.

分析与解 皮球的能量损耗在与地碰撞的过程中:在球与地面接触期间,地面对球的弹力对球做负功,使球的动能减少,在从 h 高处自由下落的情况下,地面弹力功设为 W_1 ,对全过程有

$$W_1 = mgh - \frac{3}{4}mgh = \frac{1}{4}mgh;$$

在从高 h 处被拍击后下落的情况下,地面弹力功设为 W_2 ,则有

$$W_{拍} - W_2 = mgh - mgh, W_2 = W_{拍},$$

所以求出 W_2 ,就可得每次拍球要做的功,亦即球需获得的初动能.但是地面弹力功是一个变力功,很难直接用功的公式去求.那么两次与地碰撞过程中地面对球做的功是否相同,即 $W_2 = W_1$ 吗?或者说,两种情况下,球在与地碰撞中损失的动能是否相同?结论是否一定呢?牛顿在研究碰撞问题时总结实验结果提出碰撞定律:若两球碰撞前速度依次为 v_{10} 、 v_{20} ,碰撞后速度为 v_1 、 v_2 ,则两者的分离速度 $v_2 - v_1$ 与碰撞前两者的接近速度 $v_{20} - v_{10}$ 成正比,比值 e ($e \leq 1$) 称恢复系数(或反弹系数),比值由两者的质料决定,即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{20} - v_{10}}.$$

在我们的问题中,球对地的接近速度就是球落地速度,而分离速度即起跳速度,因为地的速度为零.现在我们可以根据两种情况下球与地碰撞的恢复系数相同为等量关系列出下列方程.即

$$\frac{\sqrt{2g(\frac{3}{4}h)}}{\sqrt{2gh}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh + \frac{2W_{拍}}{m}}},$$

由此解得 $W_{拍} = \frac{1}{3}mgh$.

二、功能关系面面观

功是力的空间积累作用,能是对物体运动的一种量度.功的作用效应是使物体的能量状态发生变化,做功的过程就是物体能量转化的过程,转化了的能量都

可以由做功的多少来量度,这是我们对功与能之间关系的基本认识,也是我们从能量角度解决运动问题的依据.

各种形式的能与物体的各种运动形式相联系,描述出物体不同的运动状态.当物体的运动由一种形式变成另一种形式时,能量也相应变化,一定的能量变化由相应的功来量度.例如,合力(可以是重力、弹力、摩擦力、电场力、磁场力或其他力)做的总功量度动能的变化(动能定理),即

$$\sum W = W_k - E_{k0};$$

重力功量度重力势能的变化,即

$$W_g = E_{pg0} - E_{pg},$$

弹力功量度弹性势能的变化,即

$$W_Q = E_{pq0} - E_{pq},$$

引力功量度引力势能的变化,即

$$W_G = E_{pG0} - E_{pG},$$

电场力功量度电势能的变化,即

$$W_e = E_{pe0} - E_{pe};$$

非重力和弹力功量度机械能的变化(功能原理),即

$$W_{非} = E_t - E_0.$$

这是我们对功与能之间关系的一些具体认识,并籍此对运动的量度作出正确的操作.

上述功对能量转化量度的对应关系中,动能定理是最常用的一条.应用动能定理建立方程的具体操作步骤是:(1)选定研究的对象与过程;(2)在受力分析的基础上,确定有哪些力对研究对象做了正功或负功,以代数和的形式完成定理中等号左边对合外力的功的表述;(3)分析所研究过程的初、末两状态的动能,完成等号右边对动能变化的表述.

例 7 如图 8-6 所示,一水塔的蓄水箱底离地面的高度为 $H_0 = 20$ m,其横断面是半径 $R = 2$ m 的圆.储水深 $h = 1$ m,如果用装在高 $H_1 = 5$ m 处、截面积为 2 cm² 的水龙头放水,问需要多久才能将水放完?

分析与解 水箱中的水从底部截面积为 S 的小孔流出,若流速为 v ,则时间 t_i 内的水流量 $Q_i = v_i t_i S$,总水量 Q 全部流尽的时间 $t = \sum_{i=1}^n t_i$.我们先根据动能定理推导出小孔流速 v .如图 8-7 所示,一容器底部小孔截面积为 S ,容器内液体深为 h ,密度为 ρ .取正欲从小孔流出的一液片考察:若其厚 Δx ($\Delta x \rightarrow 0$),则质量为 $\rho S \cdot \Delta x$,其上表面受到向下的压力 $F_{上} = (p_0 + \rho gh)S$;下表面则受到向上的压力 $F_{下} = p_0 S$,式中 p_0 为大气压强.若液片离开小孔时速度为 v ,由动能定理得

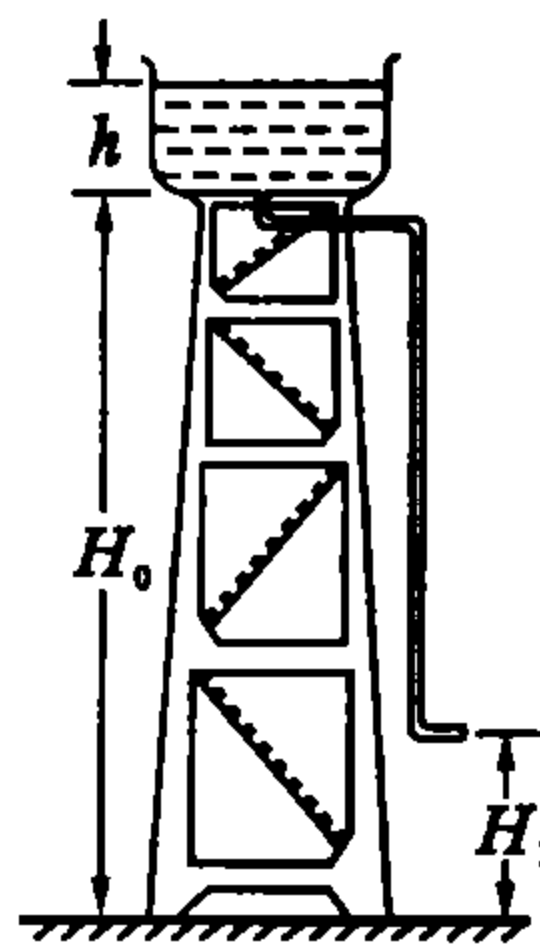


图 8-6

由此解得 $W_{拍} = \frac{1}{3}mgh$.

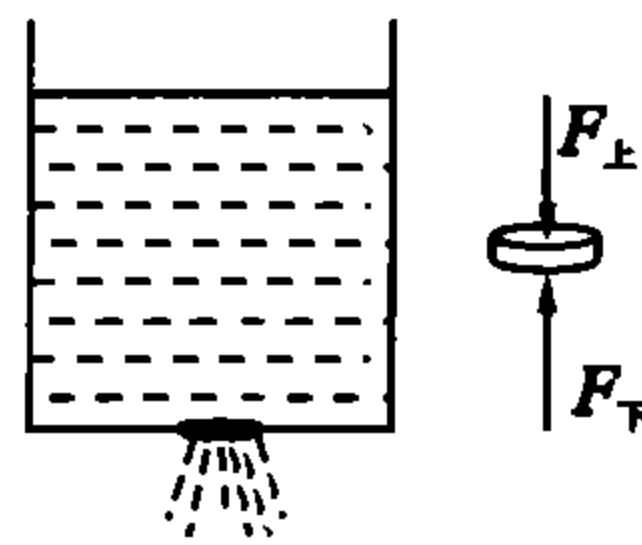


图 8-7

$$\rho ghS \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \rho S \cdot \Delta x \cdot v^2,$$

可得 $v = \sqrt{2gh}$.

这里,小孔流速大小与液面距小孔高度 h 有关.

现在回到我们的水塔.如同在例 3 中曾经的做法,

将 h 深的蓄水箱储水均匀分成 n 层,如图 8-8 所示.

每层水的容量 $Q_i = \frac{\pi R^2 h}{n}$, $n \rightarrow \infty$,故可认为每层水以相同流速流出水龙头,则 $Q_i = v_i \cdot t_i \cdot S$,其中 v_i 是对应于第 i 层水从水箱流出时,龙头处的“小孔流速”,它表述为

$$v_i = \sqrt{2g(H_0 + h - H_1 - i \frac{h}{n})}, \quad \text{图 8-8}$$

t_i 是放出该层水所需的时间,于是每层水放出时间的通项式为

$$t_i = \frac{Q_i}{v_i S} = \frac{\frac{\pi R^2 h}{n}}{\sqrt{2g(H_0 + h - H_1 - i \frac{h}{n})} \cdot S}$$

那么,全部水箱储水放尽的时间为

$$\begin{aligned} t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n t_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\pi R^2 h}{n}}{\sqrt{2g(H_0 + h - H_1 - i \frac{h}{n})} \cdot S} \\ &= \frac{\pi R^2 h}{S \sqrt{2g}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{(H_0 + h - H_1 - i \frac{h}{n})}} \\ &= \frac{\pi R^2 h}{S \sqrt{2g(H_0 + h - H_1)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - i \cdot \frac{h}{n(H_0 + h - H_1)}}} \end{aligned}$$

至此,物理问题已然解决,下面是运用数学工具求数列和极限.为方便起见,令 $\frac{h}{(H_0 + h - H_1)} = k$ ($k = \frac{1}{16}$),则有

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - i \cdot \frac{k}{n})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} i \cdot \frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{1}{2} i \cdot \frac{k}{n}) \\ &= 1 + \frac{k}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= 1 + \frac{k}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \frac{k}{4}. \\ t &= \frac{\pi R^2 h}{S \sqrt{2g(H_0 + h - H_1)}} \cdot (1 + \frac{k}{4}), \end{aligned}$$

代入题给数据,得

$$t = \frac{\pi \times 2^2 \times 1}{2 \times 10^{-4} \sqrt{2g \times 16}} \cdot (1 + \frac{1}{64}) \text{ s} = 3.6 \times 10^3 \text{ s}.$$

上面对每一层水流出时间的运算中,我们用到了一个常用的近似处理——对牛顿二项式 $(1+x)^a$ 的展开式取前两项作为近似值,即

$$(1+x)^a \approx 1+ax \quad (-1 < x < 1).$$

例 8 质量为 m 的小球以某一初速度竖直上抛,若运动中所受阻力 $F_f = kv^2$,最大阻力为重力的 0.44 倍,试求小球上升的最大高度 H 及落回抛出点时的速度 v_t .

分析与解 这个问题中,有两个力对小球做功,即重力与阻力.重力功为保守力功,阻力则做耗散功,并且阻力是变力,故本题用微元方法求解.

这里,我们先介绍一个重要的极限,即

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

现在,取上升过程中的某一元过程,该过程小球上升了 $\frac{H}{n}$ ($n \rightarrow \infty$),速度从 v_i 减少为 v_{i+1} ,由于 $\frac{H}{n} \rightarrow 0$,各元过程中的阻力可视为不变,即 $F_{fi} = kv_i^2$,合外力为

$$\Sigma F_i = mg + kv_i^2,$$

根据动能定理,对该元过程有

$$(mg + kv_i^2) \cdot \frac{H}{n} = \frac{1}{2} m(v_i^2 - v_{i+1}^2),$$

$$\text{即} \quad \frac{v_i^2 - v_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} = \frac{2H}{nm},$$

对该式变形有

$$\frac{mg + kv_i^2 - mg - kv_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} = \frac{2kH}{nm},$$

$$1 - \frac{mg + kv_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} = \frac{2kH}{nm},$$

$$\text{即} \quad \frac{mg + kv_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} = 1 - \frac{2kH}{nm}.$$

由上式我们得知,在各相同的上升高度 $\frac{H}{n}$ 微元中,由于合外力大小 ΣF_i 近似恒定不变,因而动能的增量是成等比数列递减的,其公比为 $1 - \frac{2kH}{nm}$,于是有

$$\begin{aligned} \left(\frac{mg + kv_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} \right)^n &= \left(1 - \frac{2kH}{nm} \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{2kH}{nm} \right)^{-\frac{nm}{2kH} \cdot \left(\frac{2kH}{m} \right)}. \end{aligned}$$

两边取极限,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{mg + kv_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2kH}{nm} \right)^{-\frac{nm}{2kH} \cdot \left(\frac{2kH}{m} \right)},$$

注意到小球抛出时所受阻力最大,合外力为 $1.44mg$,上升到最高点时速度为零,合外力的大小为 mg ,以及

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, \text{ 得}$$

$$\text{左边} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{mg + kv_{i+1}^2}{mg + kv_i^2} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{mg + kv_2^2}{mg + kv_1^2} \cdot \frac{mg + kv_3^2}{mg + kv_2^2} \cdot \dots \cdot \frac{mg}{mg + kv_{n-1}^2} \right]$$

$$= \frac{mg}{mg + kv_1^2} = \frac{mg}{1.44mg},$$

$$\text{右边} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2kH}{nm} \right)^{-\frac{nm}{2kH}} = e^{-\frac{2kH}{m}}.$$

$$\text{则} \quad \frac{mg}{1.44mg} = e^{-\frac{2kH}{m}},$$

$$\text{于是求得} \quad H = \frac{m}{k} \ln \frac{6}{5}.$$

在下落阶段,我们用同样的方法,对下降第 i 个元高度 $\frac{H}{n}$ 的元过程给出动能定理表达式,即

$$(mg - kv_i^2) \cdot \frac{H}{n} = \frac{1}{2}m(v_i^2 - v_{i-1}^2),$$

$$\text{变形、整理后得} \quad \frac{mg - kv_{i-1}^2}{mg - kv_i^2} = 1 + \frac{2kH}{nm},$$

两边取 n 次方,得

$$\left(\frac{mg - kv_{i-1}^2}{mg - kv_i^2} \right)^n = \left(1 + \frac{2kH}{nm} \right)^{\frac{nm}{2kH}} = e^{\frac{2kH}{m}}.$$

两边取极限,并注意到初始时(最高点)合力为 mg ,回到抛出点时合力为 $mg - kv_i^2$,得

$$\frac{mg}{mg - kv_i^2} = e^{\frac{2kH}{m}},$$

$$\text{两边取对数得} \quad H = \frac{m}{2k} \ln \frac{mg}{mg - kv_i^2}.$$

$$\text{则} \quad \frac{m}{2k} \ln \frac{mg}{mg - kv_i^2} = \frac{m}{k} \ln \frac{6}{5},$$

$$\text{即} \quad \left(\frac{mg}{mg - kv_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5},$$

$$\text{解得} \quad v_i = \sqrt{\frac{0.44mg}{1.44k}} = \sqrt{\frac{11mg}{36k}}.$$

将 $kv_0^2 = 0.44mg$ 代入上式得

$$v_i = \frac{5}{6}v_0.$$

故小球落回抛出点时的速度是抛出时速度的 $\frac{5}{6}$.

例 9 一质点位于光滑的固定半球面上距球心高度为 H 的任意点 P 处,在重力作用下质点由静止开始往下滑,从 Q 点离开球面,求 P 、 Q 两点的高度差 h .

分析与解 如图 8-9 所示,质点从 P 处运动至 Q 处,除重力外,无其他力做功,是一个机械能守恒的过程:重力势能的减少等于动能的增加;质点在 Q 点只受重力,设球半球为 R ,质点速度为 v ,由机械能守恒定律得

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2;$$

在 Q 点的动力学方程为

$$mgsin \theta = m \frac{v^2}{R},$$

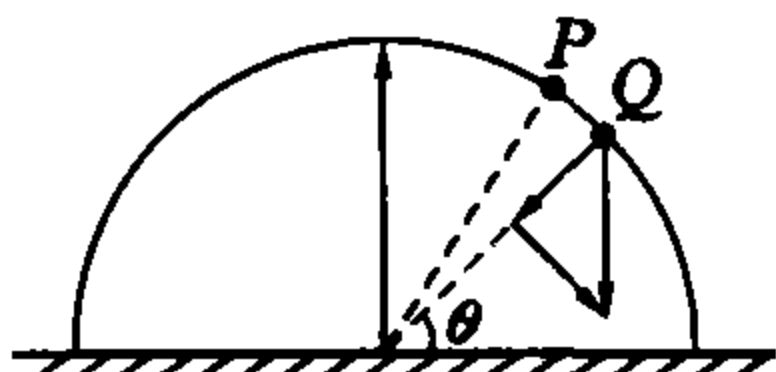


图 8-9

$$\text{其中} \quad \sin \theta = \frac{H-h}{R}.$$

解以上各式得

$$h = \frac{H}{3},$$

即 P 、 Q 两点的高度差总等于释放点 P 与球心高度差的三分之一.若 H 等于 R ,即质点从球顶部无初速滑下,则可沿球面滑过 $\arccos \frac{2}{3}$ 的弧,释放高度 H 越小,在球面上滑过的弧长亦短.这是一个有趣又有用的模型.

三、初涉元功法

取元功作微元,以功能原理为基本物理规律求得一类物理问题解答的方法,我们称之为“元功法”,从下面展示的例解中,读者将发现,用元功法可以处理某些平衡问题,并且颇为简单.

例 10 如图 8-10 所示,质量为 m 、长度为 l 的均匀柔软粗绳穿过半径为 R 的滑轮,绳的两端吊在天花板上的两个钉子上,两钉间距离为 $2R$,滑轮轴上挂一重物,重物与滑轮总质量为 M ,且相互间无摩擦,求绳上最低点 C 处的张力.

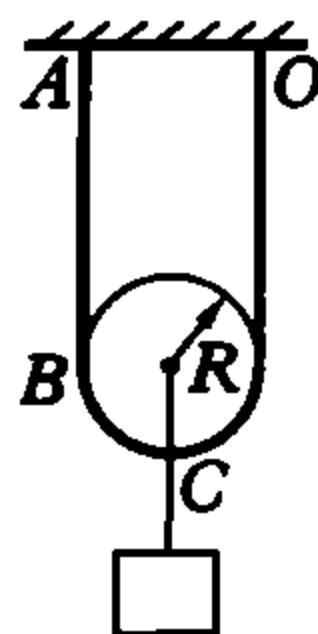


图 8-10

分析与解 分析粗绳、滑轮和重物构成的系统的受力情况可知,悬点 $A(O)$ 处绳子的张力 $T_A = \frac{m+M}{2}g$;分析绳之一半,

例如图 8-10 中所示 ABC 段受力情况是:这段绳的重力; A 处钉对绳的拉力 T_A , C 处绳之张力 T_C 及 BC 段滑轮的正压力.现设想在 A 处以力 T_A 将 ABC 段绳竖直向上拉过一极小距离 Δx ,在此微动过程中, T_A 所做元功 $\Delta W_A = T_A \cdot \Delta x$, T_C 所做元功 $\Delta W_C = T_C \cdot \Delta x$,正压力不做功.绳势能增加相当于 C 端长为 Δx 的一段绳元移至 A 处,即为 $\frac{\Delta x m}{l}gH$,其中 H 是 C 到天花板的垂直距离,即

$$H = R + \frac{l - \pi R}{2}.$$

由功能原理得

$$\frac{M+m}{2}g \cdot \Delta x - T_C \cdot \Delta x = \frac{\Delta x \cdot m}{l}g \left(R + \frac{l - \pi R}{2} \right),$$

即得

$$T_C = \frac{M}{2}g + \frac{(\pi - 2)R \cdot m}{2l}g.$$

例 11 如图 8-11 所示,一轻质三足支架每边长度均为 l ,每边与竖直线成同一角度 θ ,三足置于一光滑水平面上,且恒成一正三角形.现用一绳圈套在三足支架的三足上,使其不能改变与竖直线间的夹角,设三足支架负重为 G ,试求绳中张力 F_T .

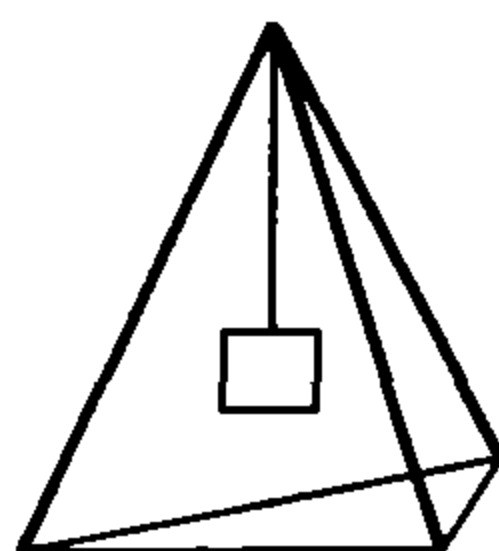


图 8-11

分析与解 分析支架受力:由于负重受到重力 G ,支架的每边足

部同时受到两侧绳的拉力 F_T , 易得其合力为 $\sqrt{3}F_T$, 方向指向三足构成的正三角形的几何中心, 支架三边足部受水平地面支持力 F_N , 此力方向竖直向上. 现设想支架各边足部在 $\sqrt{3}F_T$ 力作用下向正三角形中心移动一极小位移 Δx , 因而支架的高度升了高 Δy , 则在此虚拟的微动过程中, $\sqrt{3}F_T$ 力有一元功, F_N 力不做功, 负重重力势能增大. 对系统用功能原理得

$$3 \cdot \sqrt{3}F_T \cdot \Delta x = G \cdot \Delta y.$$

上式中, 支架升高 Δy 与 Δx 关系如图 8-12, 图中支架一边位置从 ab 变为 $a'b'$, 作 $b'b'' \perp ab$, $aa'' \perp a'b'$, 由于 Δx 很小, ab 边转过的角度 $\Delta\theta$ 也很小, 故可认为 $\overline{a''b''} = \overline{ab}$, 且 $a'b'$ 边与竖直方向夹角为 θ , 则有

$$\Delta x \sin \theta = \Delta y \cos \theta,$$

$$\Delta y = \Delta x \cdot \tan \theta,$$

于是可得

$$3\sqrt{3}F_T \cdot \Delta x = G \cdot \Delta x \cdot \tan \theta,$$

即

$$F_T = \frac{G \tan \theta}{3\sqrt{3}}.$$

通过例 10、11 两道题试解, 我们可以归纳出“元功法”处理平衡问题的基本思路: 取与原平衡状态逼近的另一平衡状态, 从而虚设了一个元过程, 此过程中所有元功之和为零, 以此为基本关系列出方程, 通过极限处理, 求得终解. 这种解法所循基本原理是分析力学中的“虚功原理”, 该原理是由伯努利首先提出的.

小球身手记

1. 将木板在水平地面上绕其一端转动的角度为 α , 求所需要做的功. 木板长度为 L , 质量为 M , 木板与地面之间的动摩擦因数为 μ .

2. 一质量为 m 、长为 l 的柔软绳索的一部分平直地放在桌面上, 另一部分跨过桌面边缘的光滑定滑轮下垂, 如图 8-13 所示, 柔绳与桌面间的动摩擦因数为 μ .

(1) 柔绳能由静止开始下滑, 求下垂部分长度至少多长?

(2) 由这一位置开始运动, 柔绳刚离开桌面时的速度多大? (设桌面足够高)

3. 如图 8-14 甲所示, 把质量均为 m 的两个小钢球用长为 $2L$ 的细线连接, 放在光滑的水平面上, 在线的中央 O 处作用一个恒定的拉力, 其大小为 F , 其方向沿水平方向且与开始时连线的方向垂直, 连线是非常柔软且不会伸缩的, 质量可忽略不计. 试求:

(1) 当两连线的张角为 2θ 时, 如图 8-14 乙所示, 在与力 F 垂直的方向上钢球所受的作用力是多大?

(2) 钢球第一次碰撞时, 在与力 F 垂直的方向上, 钢球的对地速度为多大?

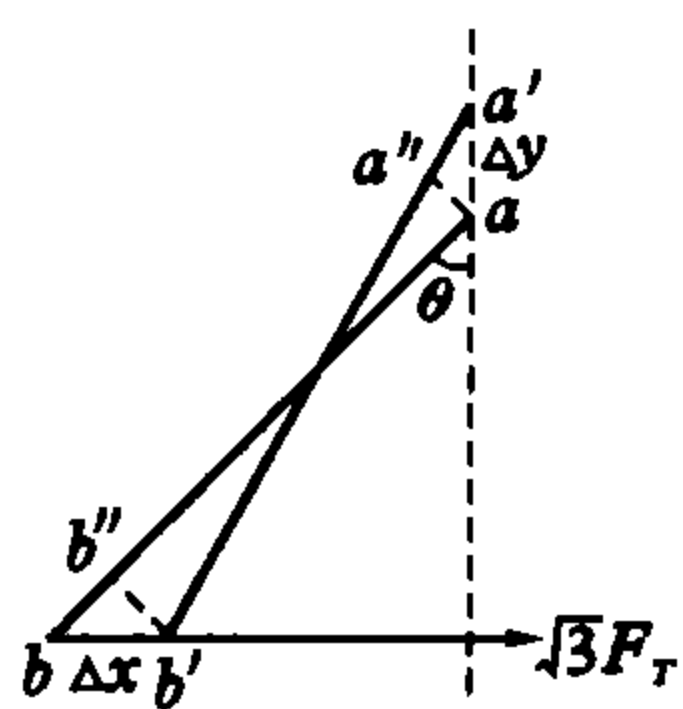


图 8-12

(3) 经过若干次碰撞, 最后两个钢球一直处于接触状态下运动, 试求由于碰撞而失去的总能量为多大?

4. 从一个容器里向外抽空气, 直到压强为 p . 容器上有一小孔, 用塞子塞着. 现把塞子拔掉, 问空气最初以多大速率冲进容器? 设外界大气压强为 p_0 , 大气密度为 ρ .

5. 一质点的质量为 m , 被固定中心排斥, 斥力的大小 $F = \mu mr$, 其中 r 为质点离开此中心的距离. 在开始时, $r_0 = a$, $v_0 = 0$, 求质点经过位移 a 时所达到的速度大小.

6. 军训中, 战士距墙 s_0 以速度 v_0 起跳, 如图 8-15 所示, 再用脚蹬墙面一次使身体变为竖直向上的运动以继续升高, 墙面与鞋底之间的静摩擦因数为 μ . 求能使人体重心有最大总升高 H_{\max} 的起跳角 θ .

7. 质量为 M 、长为 l 的光滑木板放在冰面上, 在木板的一端坐着质量为 m 的小猫要跳到板的另一端, 问小猫对冰面的最小速度 $v_{0\min}$ 应为多少? 小猫欲一次跳到板的另一端所消耗的能量最少, 问它的初速度 v_0 应该与水平面成多大角 α ?

8. 跳水运动员从高于水面 $H = 10 \text{ m}$ 的跳台自由落下, 运动员的质量 $m = 60 \text{ kg}$, 其体形可等效为长度 $l = 1.0 \text{ m}$ 、直径 $d = 0.30 \text{ m}$

的圆柱体, 略去空气阻力, 运动员入水后水的等效阻力 F 作用圆柱体下端, 力 F 的大小随入水深度 y 变化如图 8-16 所示, 该曲线近似为椭圆的一部分, 长轴和短轴分别与 OY 和 OF 重合, 为了确保运动员绝对安全, 试计算水池中水的深度 h 至少应等于多少?

9. 如图 8-17 所示, 有两个薄壁圆筒. 半径为 R 的圆筒绕自己的轴以角速度 ω 转动, 而另一个圆筒静止. 使两圆筒相接触并且它们的转轴平行, 过一会儿, 由于摩擦两圆筒开始做无滑动的转动. 问有多少机械能转换成内能? (两圆筒的质量分别为 m_1 、 m_2)

10. 如图 8-18 所示, 厚度不计的圆环套在粗细均匀、长度为 L 的棒的上端, 两者质量均为 m , 圆环与棒间的最大静摩擦力等于滑动摩擦力 kmg ($k > 1$), 大小

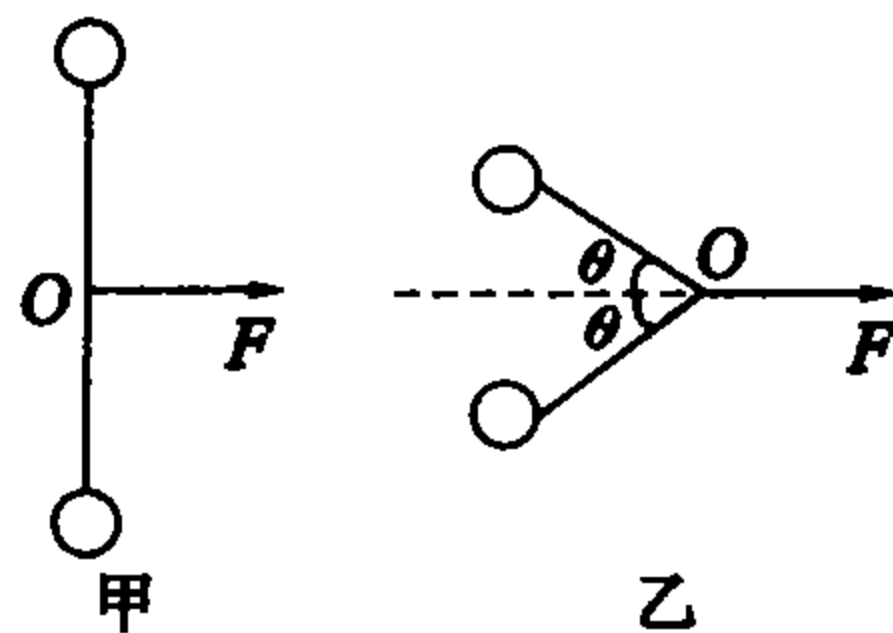


图 8-14

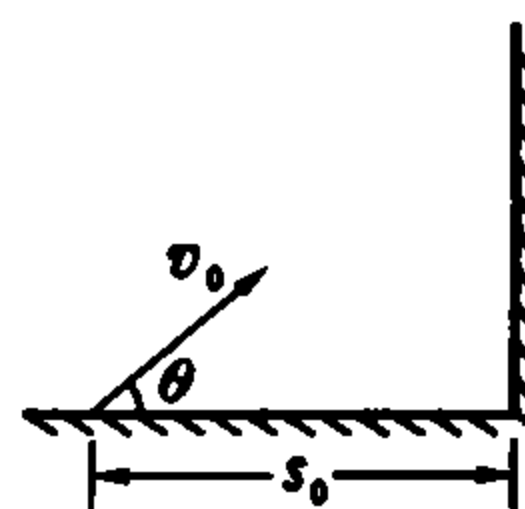


图 8-15

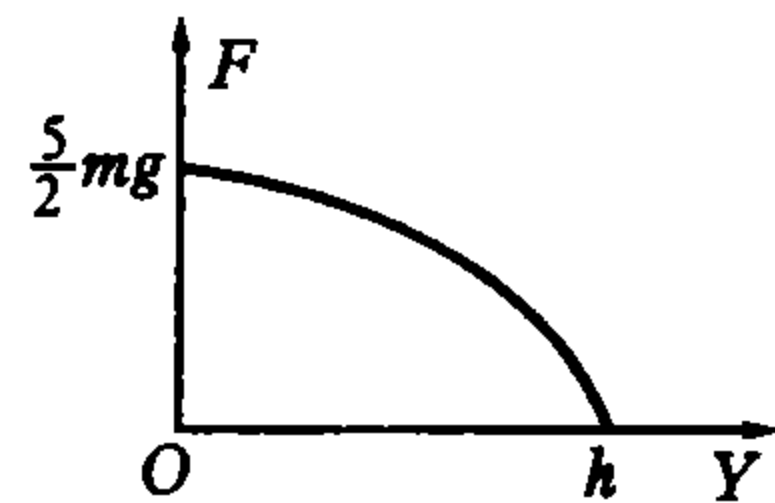


图 8-16

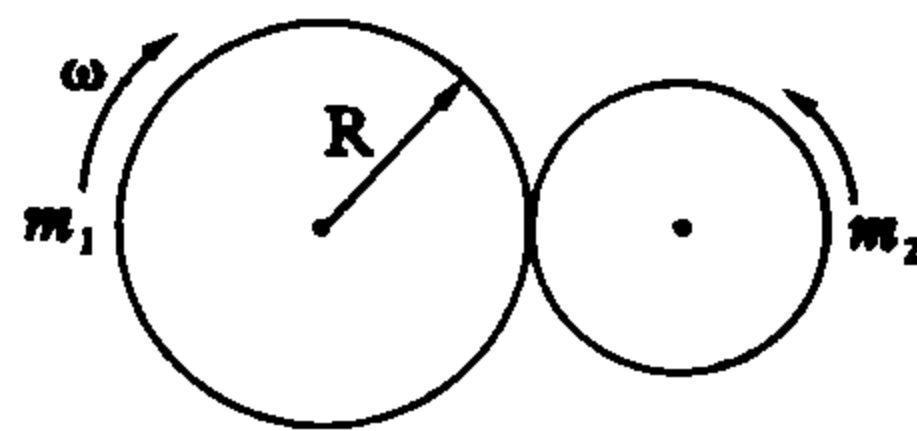


图 8-17

专题9 动量与动量守恒

沈 晨

教你一手

在这个专题中,我们将枚举动量定理之妙用,点击动量守恒常见模型特征,纵观过程中动量与能量的变化规律.

与速度、加速度、动能等物理量一样,动量也是描述物体机械运动状态的一个物理量.用质量与速度的乘积来表述的这个对应于状态的物理量,体现质点机械运动的“运动量”.举一个形象的例子:速度相同的一只蚊子和一辆汽车扑向我们,我们的感受是不一样的,这就是因为它们的“运动量”大小迥异;一辆汽车以同样的速度从我们身边飞驰而过和向我们飞奔而来,我们的感受也是不同的.这说明动量所描述的运动状态既有大小又有方向,动量是一个矢量.

我们知道,力是改变运动(速度)状态、产生加速度的原因,这个关系就是我们熟谙的牛顿第二定律,它揭示了力的瞬时作用效应;力对位移的积累即功,其效应是改变物体的能量状态,功对相应的能量变化的量度关系在上个专题中已经熟稔;力对时间的积累是冲量,冲量改变物体的动量状态,它们间的关系遵从动量定理 $\sum I = \Delta p$.

与牛顿第二定律一样,动量定理既可用于单个质点单一过程,也可用于质点系多过程.对质点系,动量定理表述为 $\sum I_i = \sum \Delta p_i$,在特殊条件——当 $\sum I_i = 0$ 时,质点系总动量增量为零,即质点系动量守恒.

运用动量定理解决问题时,既要关注其矢量性、独立性与适用性,又要充分利用其特殊性,巧用动量定理,解决牛顿第二定律所不及的问题.

例1 如图9-1所示,椭圆规的尺AB质量为 $2m$,曲柄OC质量为 m ,而套管A、B质量均为 M .已知 $OC = AC = CB = l$;曲柄和尺的重心分别在其中点上;曲柄绕O轴转动的角速度 ω 为常量;开始时曲柄水平向右.求:曲柄转成竖直向上的过程中,外力对系统施加的平均冲量.

分析与解 动量定理给出了外力冲量对系统动量

增量的量度关系,本题中,由给定条件可求出质点系的动量:由动量定义 $p = mv$,质点系总动量是各质点动量的矢量和;再根据动量

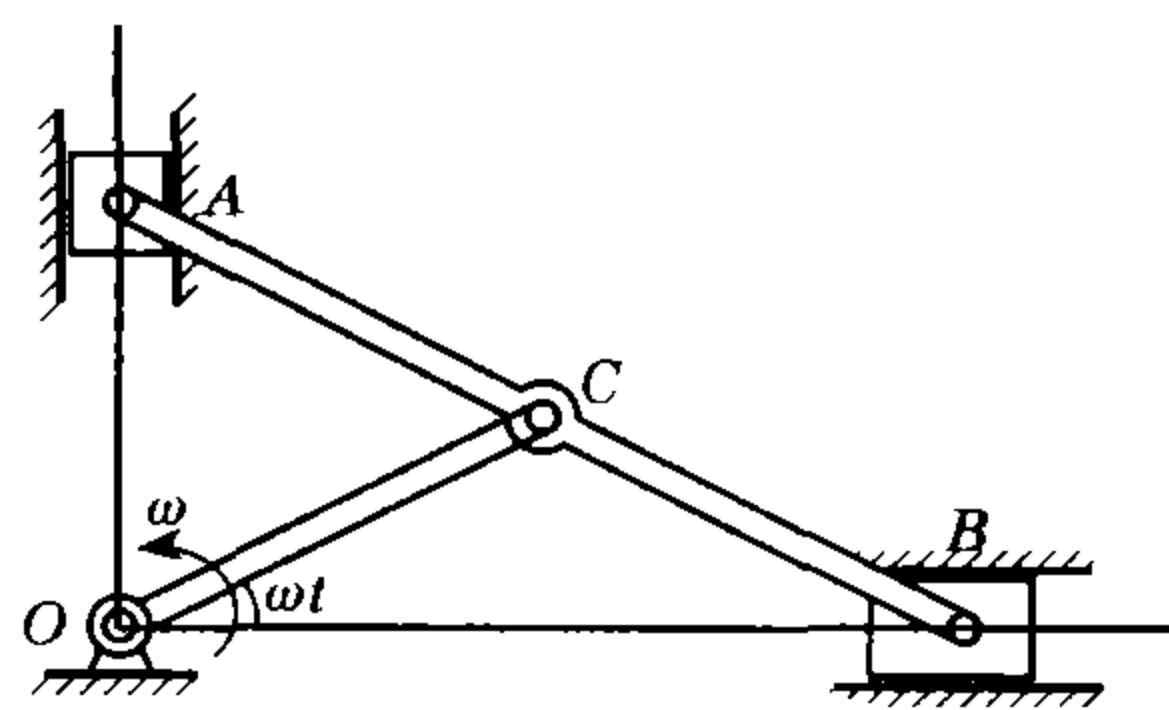


图9-1

变化情况确定质点系所受外力的平均冲量.

四质点构成的质点系中,曲柄与尺的动量容易求得,且方向总相同;求套管A、B的动量时,先要清楚这两个质点的速度与尺重心C点速度的相关关系.曲柄OC匀速转动,故其重心及端点C速度分别为 $\frac{l\omega}{2}$ 及 $l\omega$,

方向垂直于OC,则曲柄与尺的动量之和为 $p_1 = m \frac{l\omega}{2} + 2ml\omega = \frac{5}{2}ml\omega$;根据杆约束速度相关关系,如图9-2

所示,套管A、B的速度分别满足 $v_A = v_C + v_{A_C}$, $v_B = v_C + v_{B_C}$,两套管对C点的转动速度 v_{A_C} 、 v_{B_C} 大小相等 ($\frac{l\omega}{2}$)、方向相反,故两套管在垂直于尺方向上的动量之和为零;在垂直于曲柄OC方向上,两套管具有与C点相同的平动速度

v_C ,故两套管的动量均为 $Ml\omega$.于是可得系统的总动量大小不变,为 $p = \frac{5}{2}ml\omega + 2Ml\omega = \frac{l\omega}{2}(5m + 4M)$;方向总与曲柄垂直,

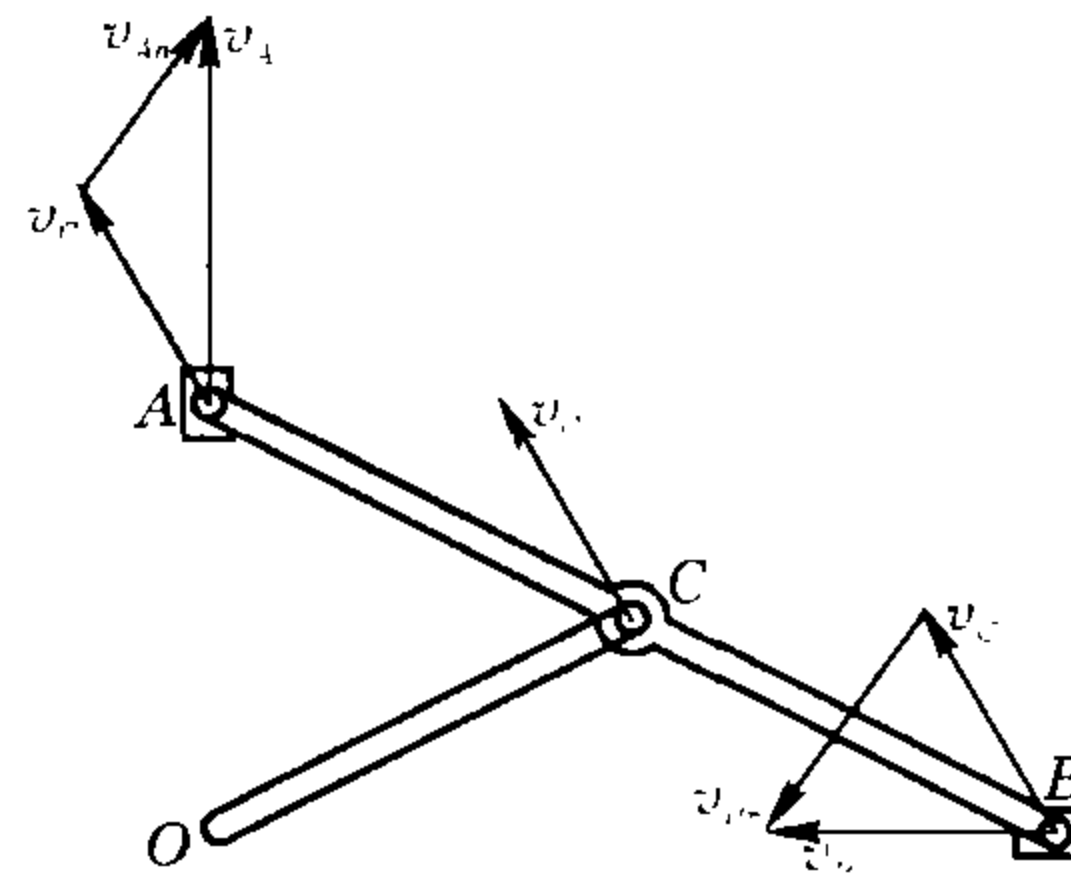


图9-2

沿其转动方向。

为了求得外力作用的平均冲量,只须确定质点系动量的变化量,如图 9-3 所示反映了系统初、末动量及其变化量间的矢量关系,则由动量定理有 $\bar{I} = \Delta p = \sqrt{2} \frac{l\omega}{2} (5m + 4M)$, 方向与末状态时质点系动量方向成 45° 角斜向下。

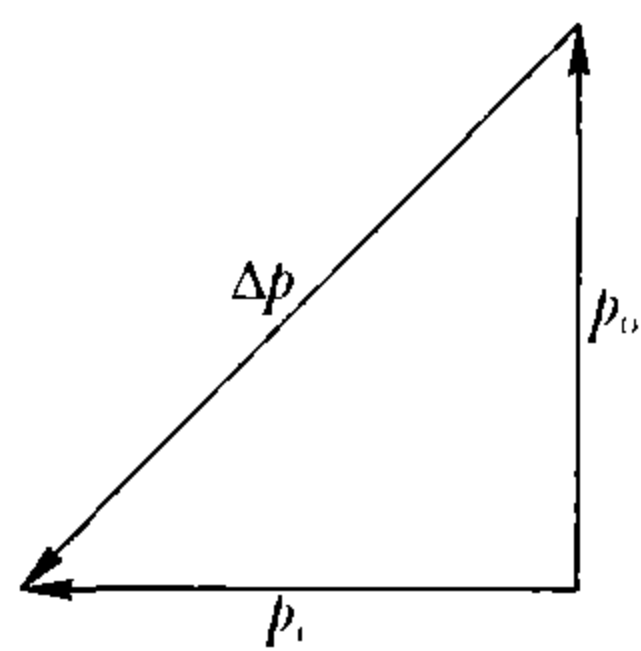


图 9-3

本题中涉及的“椭圆规”可视为四个质点构成的质点系,实际上它们的“质心”(这个概念将在专题 14 中系统介绍)是在作匀速圆周运动,质点系动量是变量,外力冲量也是变量,故我们求出的只是质心运动 $\frac{1}{4}$ 圆周过程中的平均冲量。

用质点系的动量定理处理多质点多过程问题可以免去繁杂的递推、归纳,体现出物理学常用的整体方法的功能。

例 2 如图 9-4 所示,光滑的水平面上停着一只木球和载人小车,木球质量为 m ,人和车总质量为 M ,已知 $M:m=16:1$,人以速率 v 沿水平面将木球推向正前方的固定挡板,木球被挡板弹回之后,人

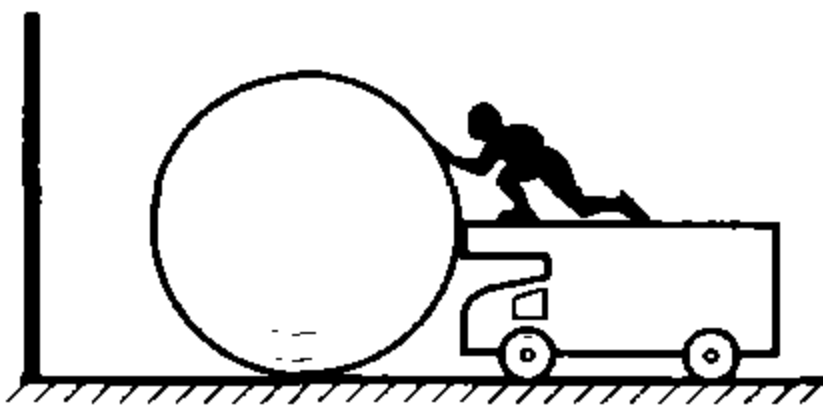


图 9-4

接住球后再以同样的对地速率将球推向挡板. 设木球与挡板相碰时无动能损失. 求经过几次推木球后,人再也不能接住木球?

分析与解 这个问题的处理,我们将选取适当的研究对象,对质点系运用动量定理做出巧解。

首先明确,人“再也不能接住木球”的条件是载人小车速度大小至少等于被挡板弹回后的木球速度 v . 我们取木球与载人小车这个系统为研究对象,系统初始时总动量为零,最后要求总动量至少为 $(M+m)v$, 引起这个动量增量的外力冲量是固定挡板施予系统中的木球部分的. 对木球而言,每一次被挡板弹碰,均有 $I=2mv$, 则人推 n 次木球,挡板对人、车、木球质点系的总冲量为 nI , 对质点系运用动量定理,有

$$n \cdot 2mv \geq (M+m)v,$$

代入题给数据可得 $n=9$ (次)。

对一类变质量过程,或冲击、碰撞、爆炸等短瞬间变冲量问题,往往可用动量定理处理。

例 3 一根均匀的不可伸缩的软缆绳全长为 l 、质量为 M . 开始时,绳的两端都固定在邻近的挂钩上,自由地悬着,如图 9-5 甲. 某时刻绳的一端松开了,缆绳

开始下落,如图 9-5 乙,每个挂钩可承受的最大负荷为 F_T (大于缆绳的重力 Mg),为使缆绳在下落时,其上端不会把挂钩拉断, Mg 与 F_T 必须满足什么条件? 假定下落时,缆绳每个部分在达到相应的最终位置之后就都停止不动。

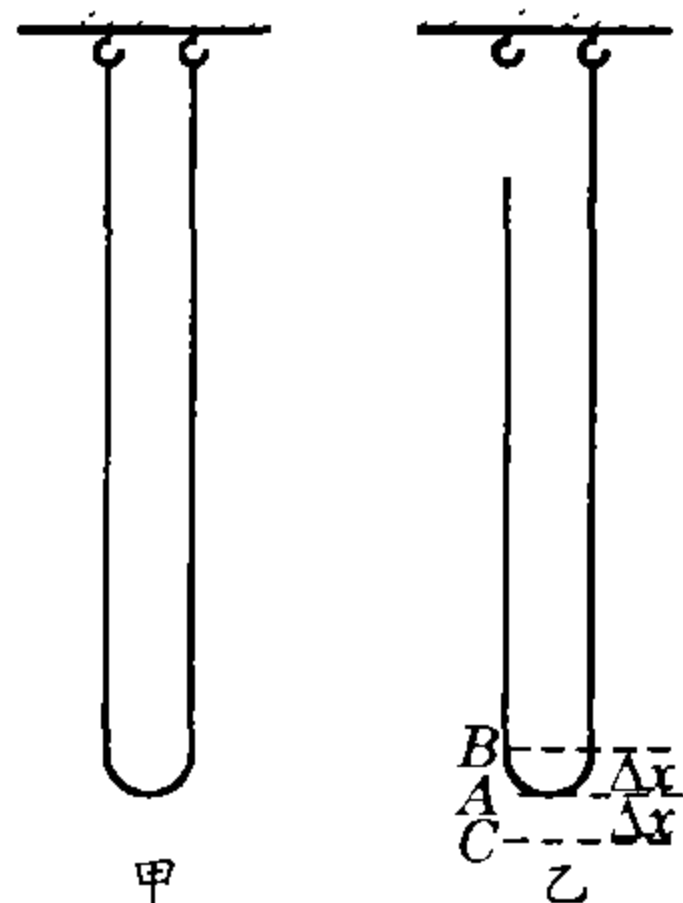


图 9-5

分析与解 在缆绳下落过程中,挂钩所受的力由两部分组成:一是承静止悬挂在钩下的那部分缆绳的重;一是受紧接着落向静止部分最下端的绳元段的冲力 F , 挂钩不被拉断,这两部分力的总和不得超过钩的最大负荷。

取如图 9-5 乙所示情况,左边绳最下边一个绳元段,长度设为 Δx , $\Delta x \rightarrow 0$, 其速度 v 是左边绳自由下落 h 高度而获得的, $v = \sqrt{2gh}$; 其质量 $\Delta M = \frac{M}{l} \cdot \Delta x$. 设在 Δt 时间内,这个微元段的上端走过 $2\Delta x$ (图中 $B \rightarrow C$)而停住,动量从 ΔMv 变为零. 动量的变化是由挂钩通过静悬绳对微元段的冲力 F' 引起的,对微元段应用动量定理,得

$$F' \cdot \Delta t = \Delta M \cdot v = \frac{M}{l} \cdot \Delta x \cdot \sqrt{2gh};$$

注意到在极短的 Δt 时间内,微元段的运动可视为匀减速直线运动,平均速度等于初、末速度的算术平均

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}, \text{ 有}$$

$$F' = \frac{M}{l} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \sqrt{2gh} = \frac{M}{l} \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{2} \cdot \sqrt{2gh} = \frac{h}{l} \cdot Mg.$$

显然,这个力可能的最大值出现在当 $h=l$, 即左边绳全部落下并恰好伸直时 $F'_m = Mg$. 这时,挂钩承受的力 F_T 是绳重 Mg 及 F'_m 的反作用力 F_m ($F_m = Mg$). 那么,要挂钩不断,就必须满足下面不等式给出的关系

$$F_T > 2Mg.$$

例 4 逆风行船问题。

帆船在逆风的情况下仍然能只依靠风力破浪航行. 设风向从 B 向 A , 如图 9-6 所示. 位于 A 点处的帆船要想在静水中最后驶达目标 B 点,应如何操纵帆船? 要说明风对船帆的作用力是如何使船逆风前进到达目标的。

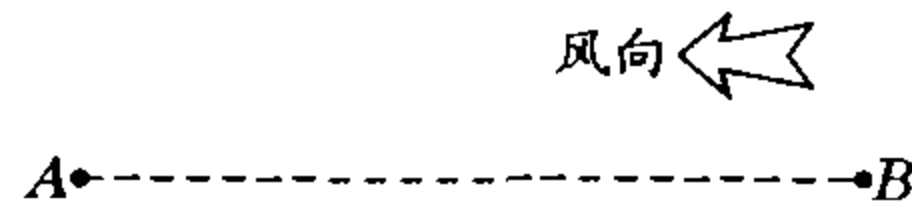


图 9-6

分析与解 可以采取如图 9-7 中虚线所示的锯齿形路线,达到使船“顶风前进”的效果. 我们作如下一些假设:航行中,航向与风向成 θ 角,风帆与船身轴向(即船行方向)成 φ 角,风以 $(90^\circ - \theta + \varphi)$ 的入射角吹到帆

面,与帆面发生弹性碰撞后以同样的反射角折回.风与帆的碰撞,就对帆面施加了一个冲量,使船受到了一个方向与帆面垂直的压力 F ,这个力沿船身方向及垂直于船身方向的分力分别是图 9-7 中 F_2 和 F_1 ,其中 F_2

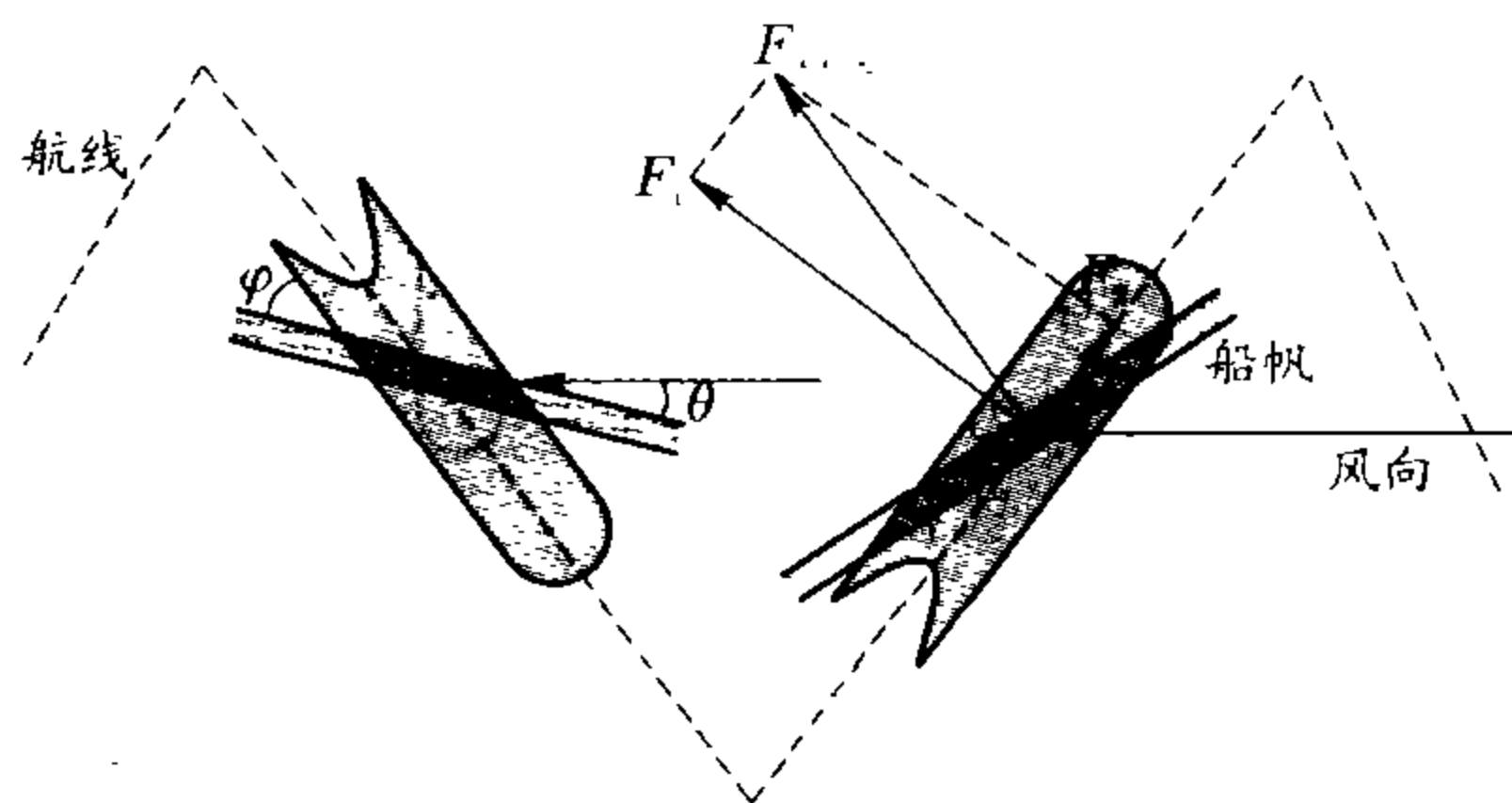


图 9-7

正是船沿航线前进的动力, F_1 则有使船侧向漂移的作用,可以认为被水对船的横向阻力平衡.故只要适时地改变船身走向,同时调整帆面的方位,船就可以依靠风力沿锯齿形航线从 A 驶向 B.

现在,我们定量探讨一下在上述情景中,船获得的前进的动力 F_2 .如图 9-8 所示,设帆面受风面积为 S ,空气密度为 ρ ,风速为 v ,在 Δt 时间内到达帆面并被反弹的空气质量是

$\Delta m = \rho \cdot v \sin(\theta - \varphi) \cdot \Delta t \cdot S$;
则由动量定理,可得

$$\begin{aligned} F' \cdot \Delta t &= \Delta p \\ &= 2\Delta m \cdot v \sin(\theta - \varphi) \\ &= 2\rho S \cdot v^2 \sin^2(\theta - \varphi) \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

所以 $F' = 2\rho S \cdot v^2 \sin^2(\theta - \varphi)$,

则 $F_2 = F' \sin \varphi = 2\rho S v^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin^2(\theta - \varphi)$.

由以上分析可知,船沿航线方向的动力大小与扬帆方向有关,帆面与船行方向的夹角 φ 适当,可使船获得尽量大的动力.注意,我们在讨论上面的讨论中,将风——运动的空气——与帆面的碰撞简化为弹性碰撞了,实际情况则要复杂得多.

下面,讨论常用的动量守恒模型

总动量为零的反冲运动模型 这类问题的模型特征是系统不受外力,总动量为零,两个质点系统动量守恒关系可被表述为 $0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$,在系统各部分相互作用过程的各瞬间,总有 $v_1 : v_2 = \frac{s_{m1}}{\Delta t} : \frac{s_{m2}}{\Delta t}$,则在动量守恒式中可用各质点在同一时间内的位移来表示速度,即有 $0 = m_1 s_{m1} + m_2 s_{m2}$.这里,用来表示速度的位移是矢量,对于一维方向的反冲运动,要注意正确使用“+”、“-”号来确定动量的方向.

例 5 如图 9-9 所示浮动起重机(浮吊)从岸上吊起 $m=2\text{ t}$ 的重物.开始时起重杆 OA 与竖直方向成 60° 角,当转到杆与竖直成 30° 角时,求起重机的水平方向的位移.设起重机质量为 $M=20\text{ t}$,起重杆长 $l=8\text{ m}$,水的阻力与杆重均不计.

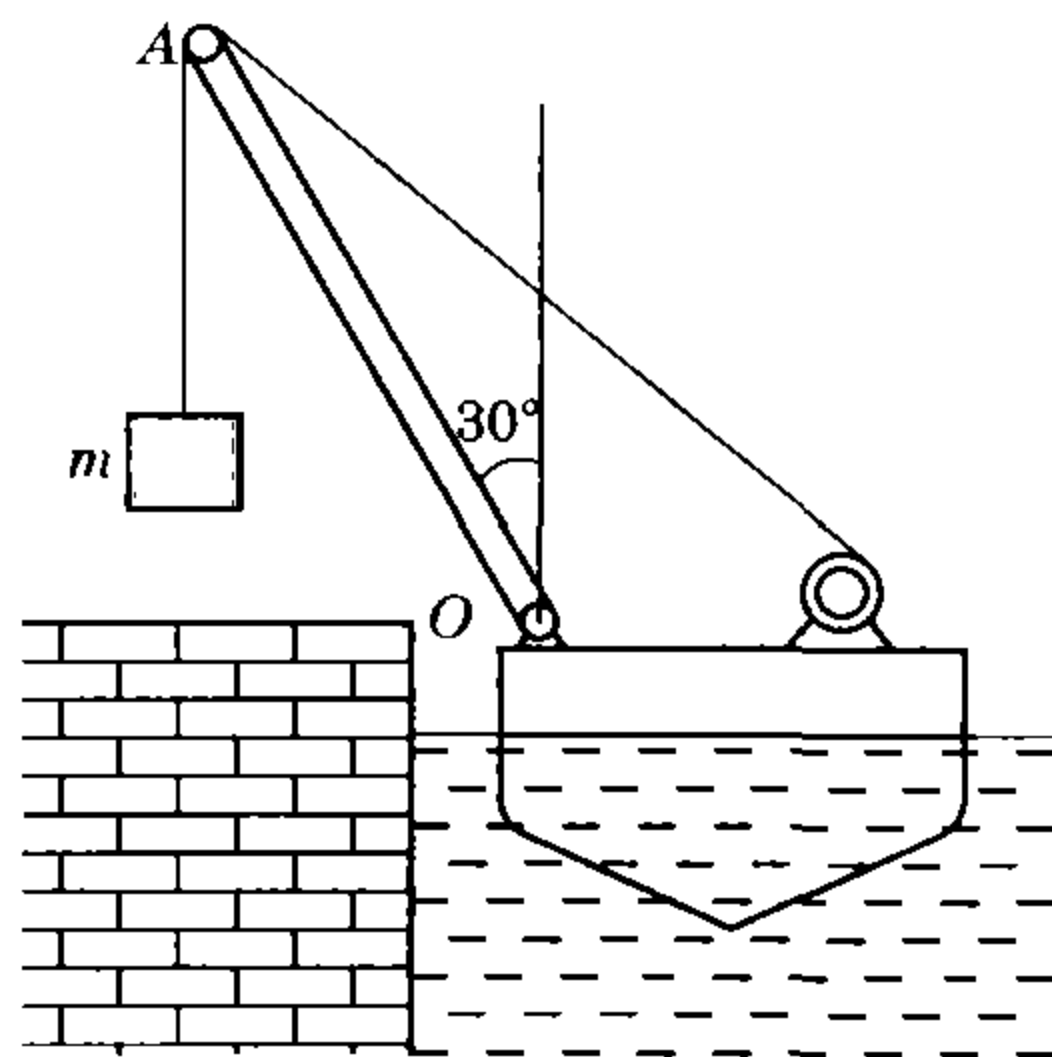


图 9-9

分析与解 本题中,我们研究起重机和重物组成的系统,忽略阻力,系统在水平方向不受外力,动量守恒,水平方向总动量始终为零.以水平向右为正方向,则有

$$0 = m[l(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) + x] + Mx.$$

式中 $l(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)$ 是重物相对于起重机的位移.由此可得 $x = -0.266\text{ m}$ ，“-”号表示起重机位移的方向向左.

“子弹打木块”模型 这是指由两个物体组成的系统,所受合外力为零且相互作用力为一对恒力的一类问题,以子弹水平射入置于光滑水平面上的木块为代

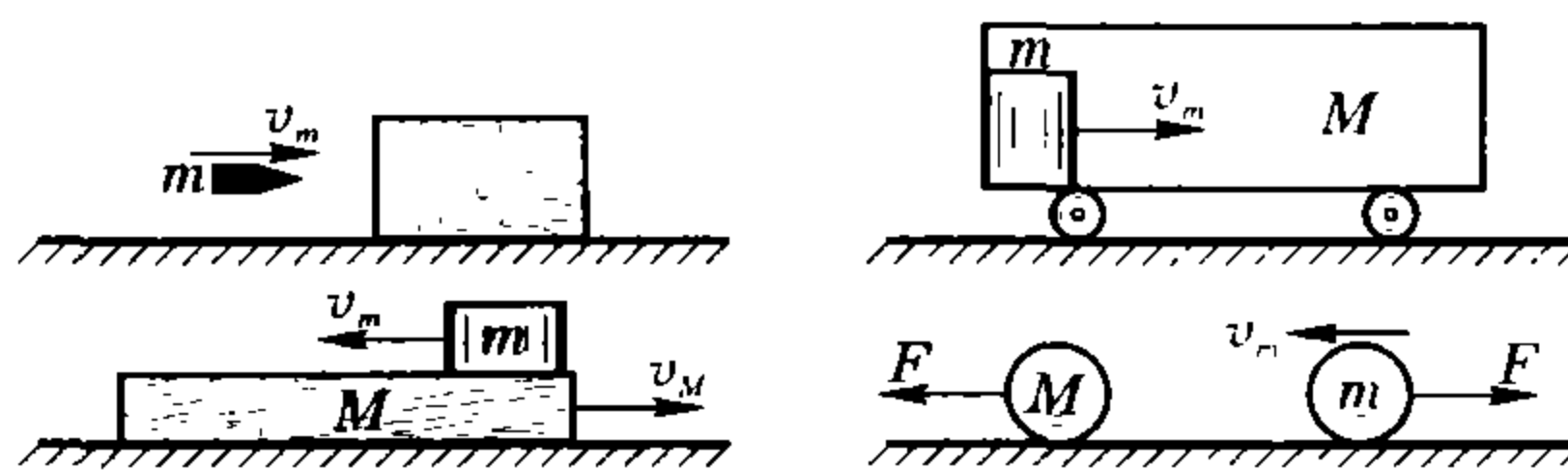


图 9-10

表,其他情景各异、模型同属,称为“子弹打木块”,典型情景如图 9-10 所示.

“子弹打木块”问题具有下列主要的力学规律:

(1) 动力学规律

两物体的加速度大小与质量成反比,方向相反.

(2) 运动学规律

是两个做匀变速运动物体的追及问题或是一个相对运动问题.

(3) 动量规律

系统的总动量守恒.

(4) 能量规律

力对“子弹”做的功等于“子弹”动能的增量

$$-F s_m = \frac{1}{2} m v_m^2 - \frac{1}{2} m v_{m0}^2;$$

力对“木块”做的功等于“木块”动能增量

$$F' s_M = \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{1}{2} M v_{M0}^2;$$

一对力的功等于系统动能增量

$$-F(s_m - s_M) = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 - (\frac{1}{2} m v_{m0}^2 + \frac{1}{2} M v_{M0}^2);$$

并且“一对力的功”大小可用其中一个力的大小与两物体相对位移大小的乘积来计算。

(5) 图象描述

描述“子弹打木块”类问题的模型特征时, 图象语言具有最丰富的表现力, 通常用速度—时间($v-t$)图象将系统方方面面的特征同时展现, 图 9-10 中具体情景不同的“子弹打木块”问题, 可依次表述为图 9-11 中的 A、B、C、D。

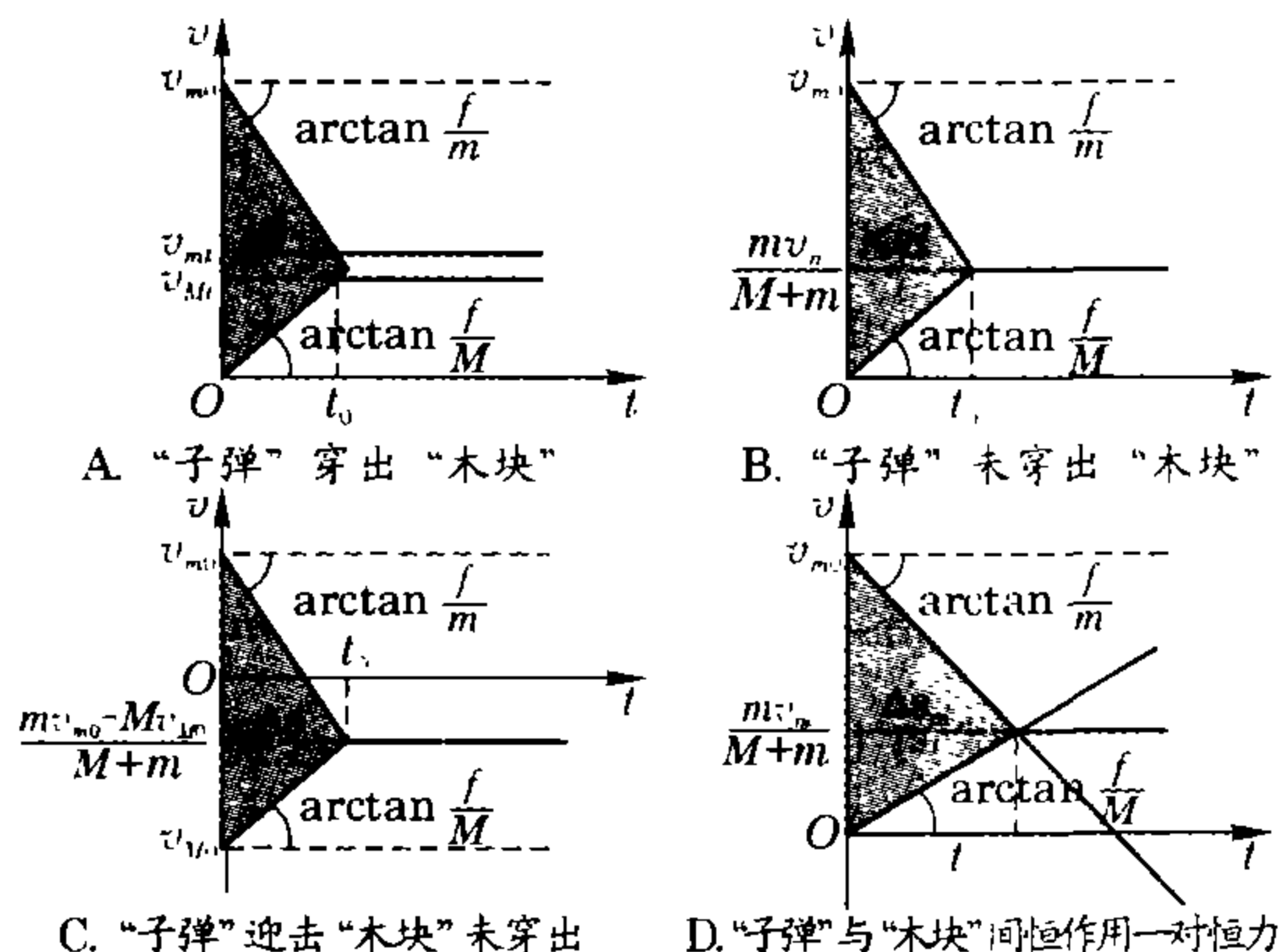


图 9-11

在处理“子弹打木块”问题时, 我们要注意模型特征的分析, 领悟其丰富的内涵, 举一反三、触类旁通, 还应善于用图象涵盖题意, 尽量做出最简答案。

例 6 如图 9-12 所示, 长为 L 的木板 A 右边固定着一个挡板, 包括挡板在内的总质量为 $1.5M$, 静止在光滑水平面上, 有一质量为 M 的小木块 B, 从木板 A 的左端开始以初速度 v_0 在木板 A 上滑动, 小木块 B 与木板 A 间的动摩擦因数为 μ , 小木块 B 滑到木板 A 的右端与挡板发生碰撞. 已知碰撞过程时间极短, 且碰后小木块 B 恰好滑到木板 A 的左端就停止滑动. 求:

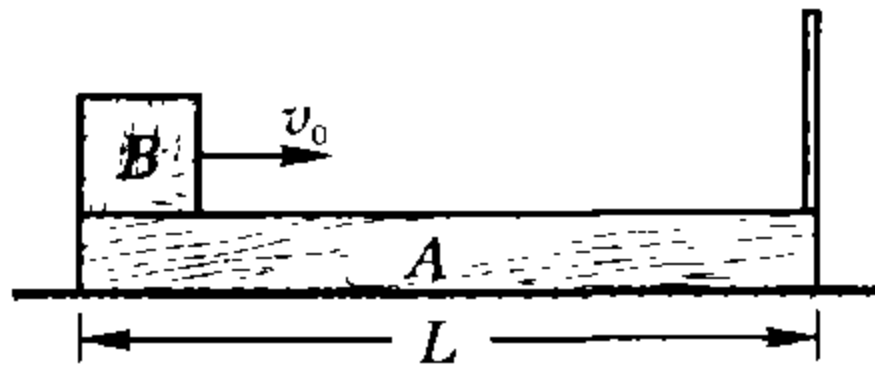


图 9-12

(1) 若 $\mu L = \frac{3v_0^2}{160g}$, 在小木块 B 与挡板碰撞后的运动过程中, 摩擦力对木板 A 做正功还是做负功? 做多少功?

(2) 讨论木板 A 和小木块 B 在整个运动过程中, 是否有可能在某段时间里相对地面运动方向是向左的? 如果不可能, 说明理由; 如果可能, 求出能向左滑动, 又能保证木板 A 和小木块 B 刚好不脱离的条件。

分析与解 这是典型的“子弹打木块”模型: A、B 间相互作用着一对等大、反向的摩擦力 $F_f = \mu Mg$ 且系统不受外力, 它的变化在于过程中发生系统内部瞬时的相互碰撞. 小木块 B 与挡板碰撞前、后及整个过程均遵从动量守恒规律; A、B 两者加速度大小与质量成反比; 碰撞前木块“追”木板, 碰撞后则成木板“追”木块;

用 $v-t$ 图展示系统的运动过程如图 9-13 所示. 图中, t_1 是木块 B 以 v_0 开始运动至与挡板碰撞历时, 碰后直至木块 B 滑到板 A 左端历时为 t_2 , A、B 碰撞前 A 加速、B 减速, 碰撞后, A 减速而 B 加速, 加速度大小 (即图线

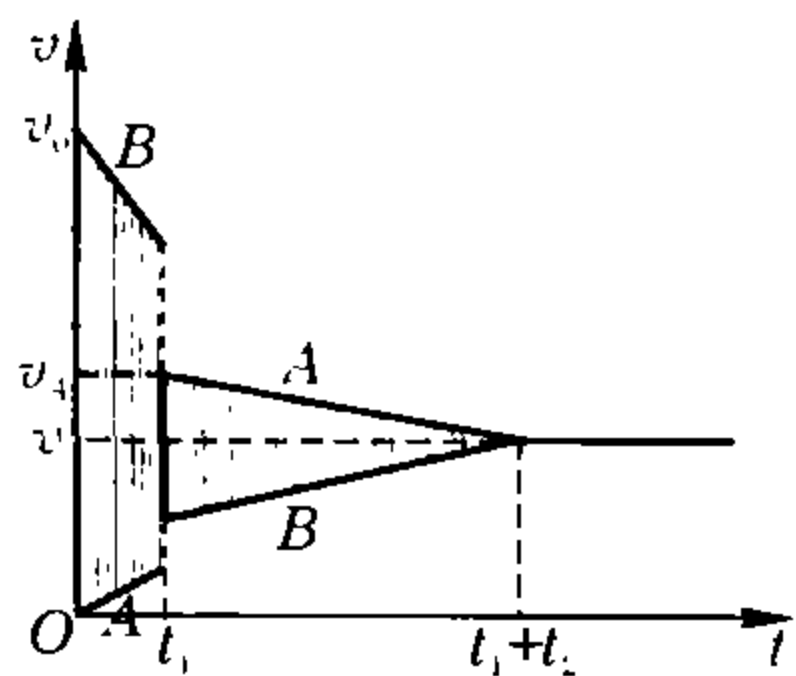


图 9-13

的斜率大小) 分别为 $a_A = \frac{2}{3}\mu g$, $a_B = \mu g$. 由于最终 A、B 具有共同速度, 系统全过程属完全非弹性碰撞, 由动量守恒关系: $Mv_0 = (M + 1.5M)v$ 可得, 当 B 恰停止在 A 左端时, 两者共同速度 $v = \frac{2}{5}v_0$. 图 9-13 中, 梯形及三角形划阴影线部分“面积”各表示 A、B 相对运动位移 L . 利用图象先求出木块 B 与挡板碰后滑行时间 t_2 :

$$L = \frac{1}{2} t_2 \cdot t_2 (a_A + a_B) \\ = \frac{1}{2} \cdot t_2^2 \cdot \frac{5}{3} \mu g,$$

得
$$t_2 = \sqrt{\frac{6L}{5\mu g}};$$

随后可得碰后板 A 的速度 $v_A = v + \frac{2}{3}\mu g \cdot t_2 = \frac{v_0}{2}$; 那么, 由动能定理, 摩擦力在此过程中对木板 A 做的功 $W_f = \frac{1}{2} 1.5M [(\frac{2v_0}{5})^2 - \frac{v_0^2}{4}] = -\frac{27}{400} M v_0^2$, 做负功.

从 $v-t$ 图上容易看出, 相对地面运动方向向左的情况只可能发生在木块 B 上, 木块 B 与挡板相碰后若速度变为向左, 就会在一段时间内先向左减速而后向右加速地运动, 而木板一直向右减速, 直至两者以共同速度向右运动. 木块 B 能有向左运动的阶段而又刚好不落下板 A 应满足两个条件:

一是木块 B 与挡板碰后 B 速度为负, 即

$$v_B = \frac{2}{5}v_0 - \mu g \cdot t_2 < 0, \mu L > \frac{2v_0^2}{15g};$$

二是一对摩擦力在 $2L$ 的相对位移上做的功不大于系统动能的增量, 即

$$\mu Mg \cdot 2L \leq \frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2} (1.5M + M) \left(\frac{2}{5} v_0\right)^2,$$

$$\mu L \leq \frac{3v_0^2}{20g};$$

综上,在满足 $\frac{2v_0^2}{15g} < \mu L \leq \frac{3v_0^2}{20g}$ 条件时,木块 B 可在与挡板碰撞后的一段时间内相对地面向左运动并刚好相对静止在板 A 的左端.

弹性碰撞的一条常用规律,我们通过下面一个具体情景进行推证.

例 7 推证两光滑物体发生弹性碰撞时,接近速度与分离速度大小相等,方向遵守“光反射定律”,即入射角等于反射角.

分析与解 这个结论,我们在专题四、专题七的例题或练手中已然运用,这里,我们将以动量与动能守恒为基本条件做出推证.

如图 9-14,设小球与平板均光滑,小球与平板发生完全弹性碰撞,木板质量为 M ,小球质量为 m ,沿板的法向与切向建立坐标系,设碰撞前,板的速度为 V ,球的速度为 v ,碰撞后,分别变为 V' 和 v' . 因为两者发生完全弹性碰撞,系统同时满足动量与动能守恒,即

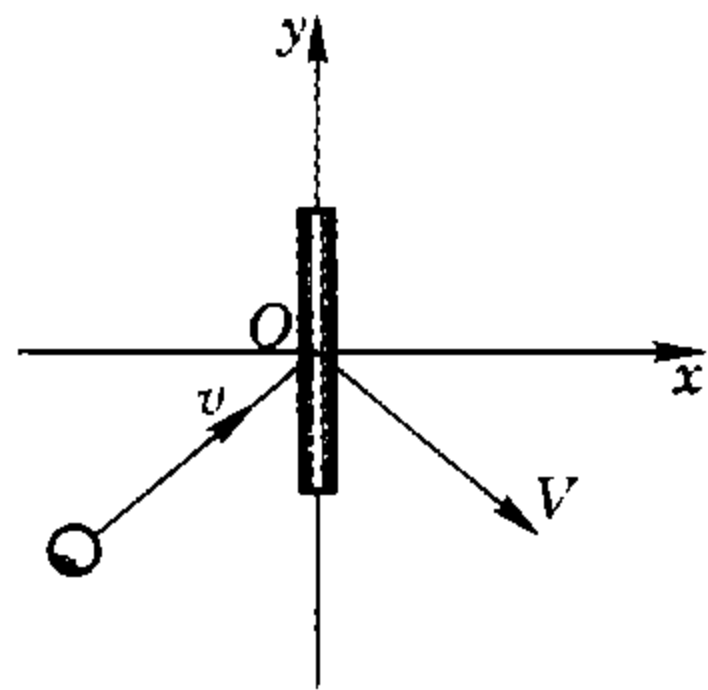


图 9-14

$$MV_x + mv_x = MV_x' + mv_x', \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} M(V_x^2 + V_y^2) + \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} M(V_x'^2 + V_y'^2) + \frac{1}{2} m(v_x'^2 + v_y'^2). \quad (2)$$

在 y 方向,由于光滑,无相互作用的力,故两者在这个方向的动量不变,即有 $V_y = V_y'$, $v_y = v_y'$. 对①、②两式移项变形为

$$M(V_x - V_x') = m(v_x' - v_x), \quad (3)$$

$$M(V_x^2 + V_y^2 - V_x'^2 - V_y'^2) = m(v_x'^2 + v_y'^2 - v_x^2 - v_y^2). \quad (4)$$

由③、④两式,可得

$$V_x + V_x' = v_x' + v_x, \text{ 因此}$$

$$v_x - V_x = -(v_x' - V_x').$$

该式意义是:在 x 方向上小球对木板的接近速度与对木板的分离速度大小相等,方向相反;在 y 方向,显然两者的相对速度不变,故在我们所设定的情景中,球与木板的接近速度与分离速度大小相等,即我们在专题 8 中介绍的,恢复系数 $e=1$. 现在关注一下方向. 设小球入射角,即以木板为参考系而言小球的“接近速度”与法线(x 轴)的夹角为 α ;反射角即“分离速度”与法线(x 轴)的夹角为 β ,有

$$\tan \alpha = \frac{|v_y - V_y|}{|v_x - V_x|}; \tan \beta = \frac{|v_y' - V_y'|}{|v_x' - V_x'|}.$$

所以, $\tan \alpha = \tan \beta$, $\alpha = \beta$. 这样我们证明了在满足完全弹性碰撞的条件下,小球相对于木板,总是遵守入射角等于反射角的规律.

例 8 “弹弓效应”.

如图 9-15,质量为 m 的小球放在质量为 M 的大球顶上,从高 h 处释放,紧挨着落下,撞击地面后跳起. 所有的碰撞都是完全弹性碰撞,且都发生在竖直轴上. (1) 小球弹起可能达到的最大高度? (2) 如在碰撞后,物体 M 处于平衡,则质量之比应为多少? 在此情况下,物体 m 升起的高度为多少?

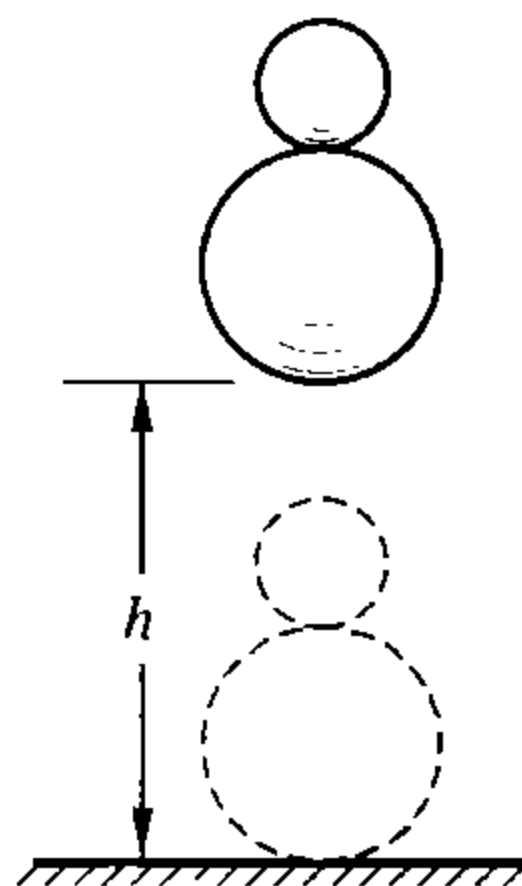


图 9-15

分析与解 这是一个有趣的问题. 结果也是特别的.

将两球无初速释放后,两球均自由下落,大球刚触地时两球速度 v 均为 $\sqrt{2gh}$,大球与地发生完全弹性碰撞,速度立即变为向上,大小仍为 v ,这时小球速度是向下的,大小为 v ,则相对于大球以 $2v$ 的速度接近,随即与大球发生对心碰撞,并以 $2v$ 的速度与大球分离,若小球质量远小于大球,两球碰后大球对地速度仍是向上的 v ,可知小球相对地面向上运动的速度已是 $3v$,为小球直接接触地弹起速度的三倍,由机械能守恒定律 $\frac{1}{2} m(3\sqrt{2gh})^2 = mgH$,小球向上弹起的高度最大可达到 $H=9h$,其效果就如同被大球这个“弹弓”弹射出去的一样.

在太空中,也会有这种“弹弓效应”. 如图 9-16,设相对恒星,大行星的速度为 V ,卫星(质量远小于行星)以速度 v 经历了一次与大行星的弹性碰撞——在万有引力作用下靠近行星,后又远离,碰撞后的分离速度大小是 $V+v$,则对恒星而言,卫星以大小为 $2V+v$ 的速度被行星“弹射”出去,这种类似的“弹弓效应”,已被应用于空间探测,研究太阳系中诸多行星的大环游.

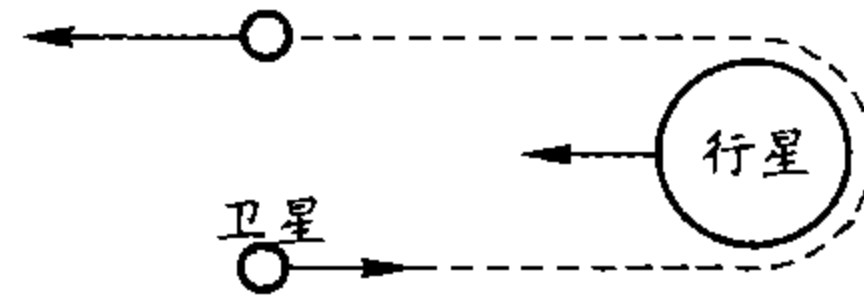


图 9-16

如大球在与小球迎面相碰后处于平衡,则由动量守恒定律

$$Mv - mv = m \cdot 2v,$$

两球质量之比为 $M:m=3$. 这种质量关系下,小球以速度 $2v$ 向上弹出,由机械能守恒定律, $\frac{1}{2} m(2\sqrt{gh})^2 = mgH$,小球跳起高度 H 为下落高度 h 的 4 倍.

小球身事

1. 如图 9-17 所示,三个重物质量为 $m_1 = 20 \text{ kg}$,

$m_2 = 15 \text{ kg}$, $m_3 = 10 \text{ kg}$, 直角梯形物块质量为 $M = 100 \text{ kg}$. 三个重物由一根绕过两个定滑轮 P 和 Q 的绳子相连. 当重物 m_1 下降时, 重物 m_2 在梯形物块的上面向右移动, 而重物 m_3 则沿斜面上升. 如忽略一切摩擦和绳子质量, 求当重物 m_1 下降 1 m 时, 梯形物块的位移.

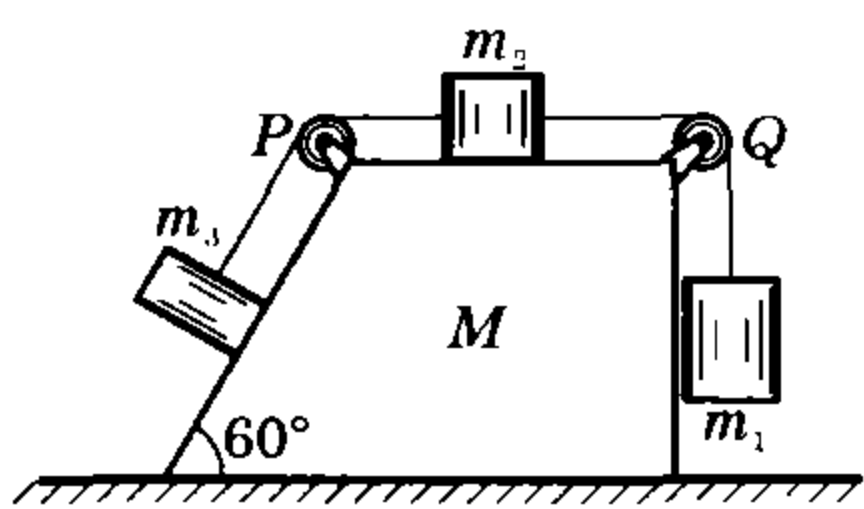


图 9-17

2. 放风筝时, 风沿水平方向吹来, 要使风筝得到最大上升力, 求风筝平面与水平面的夹角. 设风被风筝面反射后的方向遵守反射定律.

3. 一根铁链, 平放在桌面上, 铁链每单位长度的质量为 λ . 现用手提起链的一端, 使之以速度 v 竖直地匀速上升, 试求在从一端离地开始到全链恰离地, 手的拉力的冲量, 链条总长为 L .

4. 如图 9-18 所示, 水车有一孔口, 水自孔口射出. 已知水面距孔口高 h , 孔口截面积为 a , 水的密度为 ρ . 若不计水车与地面的摩擦, 求水车加于墙壁的水平压力.

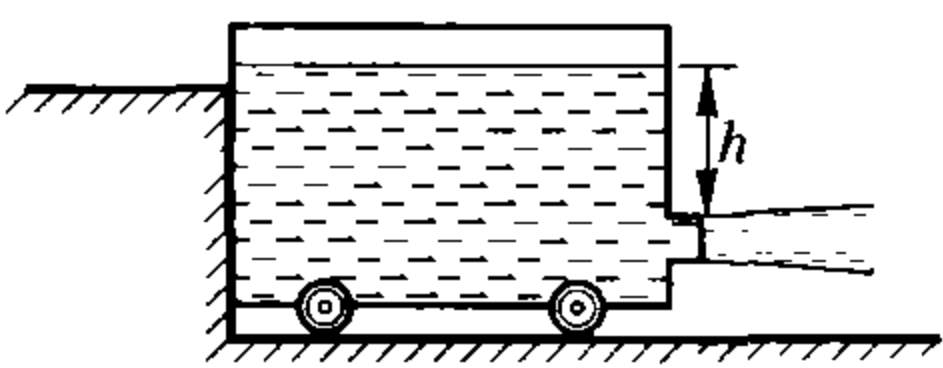


图 9-18

5. 图 9-19 中, AB 部分是一光滑水平面, BC 部分是倾角为 θ ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$) 的光滑斜面 ($\theta = 90^\circ$ 时为竖直面). 一条伸直的、长为 l 的匀质光滑柔软细绳绝大部分与 B 棱垂直地静止在 AB 面上, 只是其右端有极小部分处在 BC 面上, 于是绳便开始沿 ABC 下滑

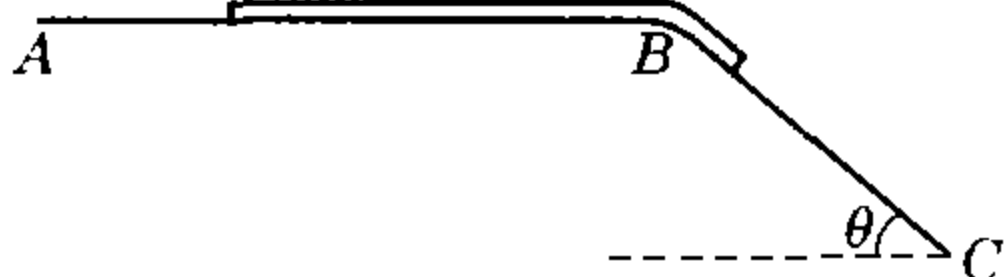


图 9-19

(1) 取 $\theta = 90^\circ$, 试定性分析细绳能否一直贴着 ABC 下滑直至绳左端到达 B ?

(2) 事实上, 对所给的角度范围 ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$), 细绳左端到 B 棱尚有一定距离时, 细绳便会出现脱离 ABC 约束 (即不全部紧贴 ABC) 的现象. 试求该距离 x .

6. 质量为 0.1 kg 的皮球, 从某一高度处自由下落到水平地板上, 皮球与地板碰一次, 上升的高度总等于前一次的 0.64 倍. 如果某一次皮球上升最大高度为 1.25 m 时拍一下皮球, 给它一个竖直向下的冲力, 作用时间为 0.1 s , 使皮球与地板碰后跳回前一次高度. 求这个冲力多大?

7. 一袋面粉沿着与水平面倾斜成角度 $\alpha = 60^\circ$ 的光滑斜板上, 从高 H 处无初速度地滑下来, 落到水平地板上. 袋与地板之间的动摩擦因数 $\mu = 0.7$. 试问袋停在何处? 如果 $H = 2 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $\mu = 0.5$, 袋又将停在何处?

何处?

8. 一球自高度为 h 的塔顶自由下落, 同时, 另一完全相同的球以速度 $v = \sqrt{2gh}$ 自塔底竖直上抛, 并与下落的球发生正碰. 若两球碰撞的恢复系数为 e , 求下落的球将回跃到距塔顶多高处?

9. 如图 9-20, 定滑轮两边分别悬挂质量是 $2m$ 和 m 的重物 A 和 B , 从静止开始运动 3 s 后, A 将触地 (无反跳). 试求从 A 第一次触地后: (1) 经过多少时间, A 将第二次触地? (2) 经过多少时间系统停止运动?

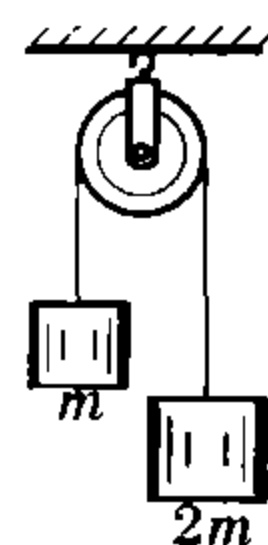


图 9-20

10. 如图 9-21 所示, 质量为 m_1 、 m_2 的物体, 通过轻绳分别挂在双斜面的两端. 斜面的质量为 m , 与水平面的夹角为 α_1 和 α_2 . 整个系统起初静止, 求放开后斜面的加速度和物体的加速度. 斜面保持静止的条件是什么? 忽略摩擦.

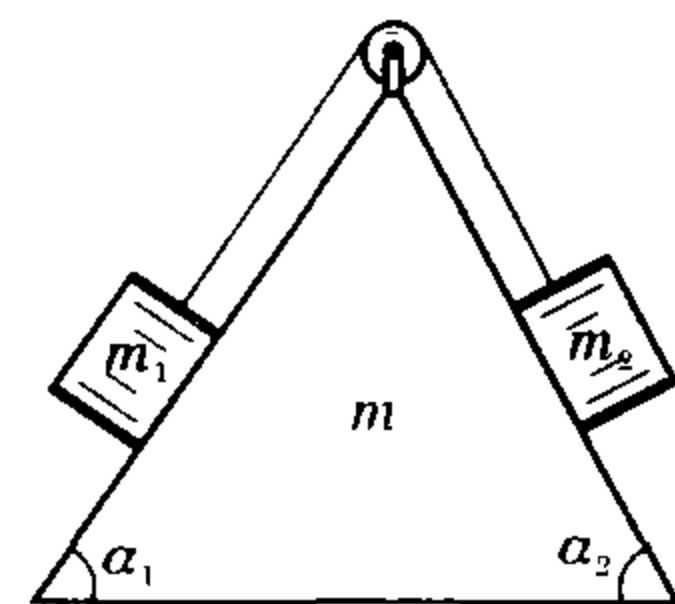


图 9-21

11. 小滑块 A 位于光滑的水平桌面上, 小滑块 B 处在位于桌面上的光滑小槽中, 两滑块的质量都是 m , 并用长 L 、不可伸长、无弹性的轻绳相连, 如图 9-22. 开始时 A 、 B 间的距离为 $\frac{L}{2}$, A 、 B 间连线与小槽垂直. 今给滑块 A 一冲击, 使其获得平行于槽的速度 v_0 , 求滑块 B 开始运动时的速度.

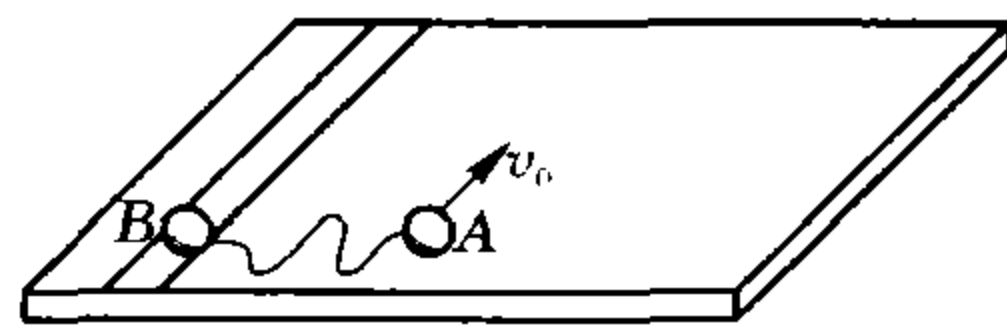


图 9-22

12. 如图 9-23 所示, 将一边长为 l 、质量为 M 的正方形平板放在劲度系数为 k 的轻弹簧上, 另有一质量为 m ($m < M$) 的小球放在一光滑桌面上, 桌面离平板的高度为 h . 如果将小球以水平速度 v_0 抛出桌面后恰与平板在中点 O 处做完全弹性碰撞, 求: (1) 小球的水平初速度 v_0 应多大? (2) 弹簧的最大压缩量是多大?

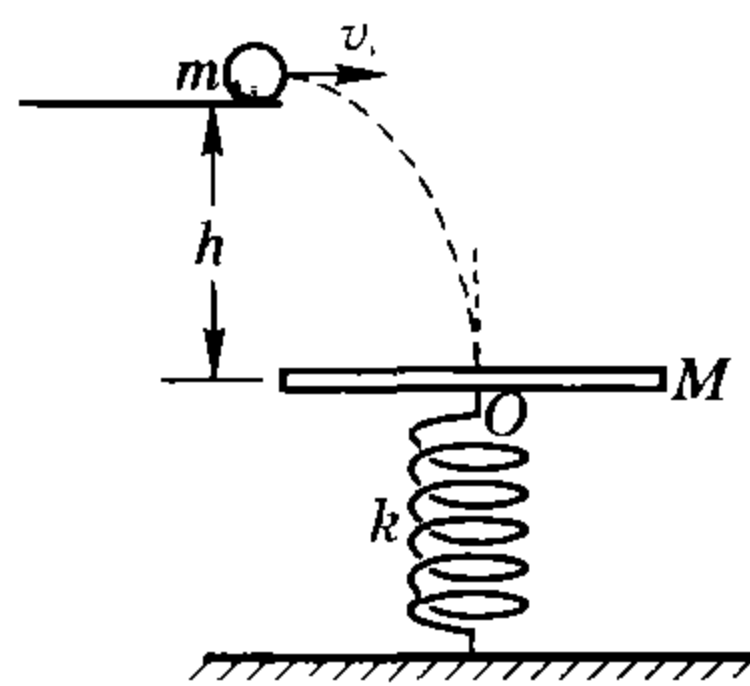


图 9-23

13. 物体以速度 $v_0 = 10 \text{ m/s}$ 从地面竖直上抛, 落地时速度 $v_t = 9 \text{ m/s}$, 若运动中所受阻力与速度成正比, 即 $f = kmv$, m 为物体的质量, 求物体在空中的运动时间.

14. 如图 9-24 所示, 四个质量均为 m 的质点, 用

同样长度且不可伸长的轻绳联结成菱形 $ABCD$, 静止放在水平光滑的桌面上. 若突然给质点 A 一个历时极短沿 CA 方向的冲击, 当冲击结束的时刻, 质点 A 的速度为 v , 其他质点也获得一定的速度, $\angle BAD = 2\alpha$ ($\alpha < \frac{\pi}{4}$). 求此质点系统受冲击后所具有的总动量与总动能.

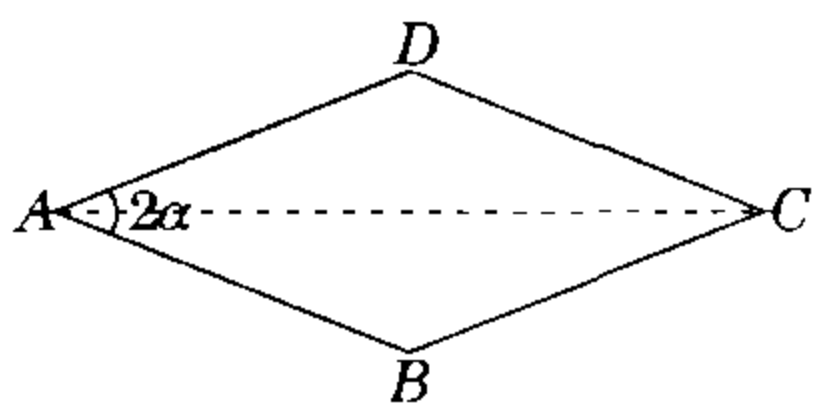


图 9-24

参考答案

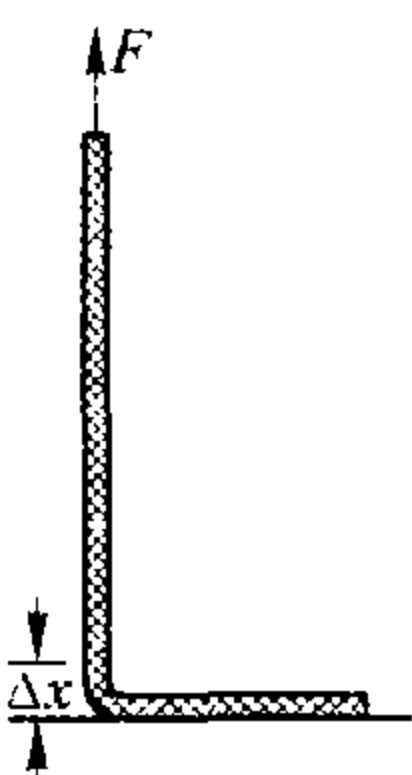
1. 本题属总动量为零的反冲问题, 设梯形物块位移为 x , 并以向右为正方向. 系统的水平方向动量守恒, 有 $0 = (m_1 + M)x + m_2(h + x) + m_3(h \cos 60^\circ + x)$, 得 $x \approx -0.14 \text{ m}$, 方向向左.

2. 设风筝面与水平方向成 θ 角, 风对风筝的冲力为 F , 其中作为风筝升力的分量为 F_y , 风筝面积为 S , 如图答 9-1 给出各矢量之间的关系, 由动量定理得 $Ft = 2\rho v^2 S \sin^2 \theta$, 式中 ρ 为空气密度, v 为风速大小; 则升力 $F_y = 2\rho v^2 S \sin^2 \theta \cdot \cos \theta$, 对该式求最值: $F_y = 2\rho S v^2 \sqrt{\sin^4 \theta \cos^2 \theta} = 2\rho S v^2 \sqrt{(1 - \cos^2 \theta)^2 \cos^2 \theta}$. 由不等式性质, 当 $2\cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 时,

$$F_y = F_{\max} = \frac{4\sqrt{3}\rho S v^2}{9}.$$

3. 图答 9-2 所示是链的一微元段离地的情景, 该

段微元长 $\Delta x = \frac{L}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), 质量 $\Delta m = \lambda \cdot \Delta x$. 设该元段从静止到被提起历时 Δt , 那么竖直上升部分链条在手的拉力 F 、重力 $\lambda x g$ 的冲量作用下, 发生了末段微元动量的变化, 由动量定理: $(F - \lambda x g) \Delta t = \Delta m \cdot v \Rightarrow F - \lambda x g = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot v^2$, 得 $F = \lambda v^2 + \lambda x g$. 注意到整个提起过程中, 链条匀速上升, 力 F



图答 9-2

是变化的, 变化规律是 $F(x) = \lambda g v t + \lambda v^2$, $t \in [0, \frac{L}{v}]$, 即力随时间线性变化, 故可用算术平均力求整个过程手拉力 F 的总冲量

$$I = (\lambda \cdot v^2 + \frac{1}{2} \lambda g L) \cdot \frac{L}{v} = \frac{\lambda g L^2}{2v} + \lambda L v.$$

4. 首先求水从孔口射出的速度 v : 由动能定理, 对处于孔口的一片水, 有 $\rho g h a \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \rho a \cdot \Delta x \cdot v^2$, 得 $v = \sqrt{2gh}$, 此即小孔流速; 对整个水车, 水平方向受墙壁的压力 F , 在 Δt 时间内有质量为 $\rho \sqrt{2gh} \cdot \Delta t \cdot a$ 的水获得速度 $\sqrt{2gh}$, 由动量定理 $F \cdot \Delta t = \rho \sqrt{2gh} \cdot \Delta t \cdot a \cdot \sqrt{2gh}$, $F = 2\rho a h g$, 而水车加于墙壁的压力是该力的反作用力, 大小为 $F' = 2\rho a h g$.

5. (1) $\theta = 90^\circ$, 细绳贴着 ABC 下滑, 到达 B 处的绳元水平速度越来越大, 这需要有更大的向左的力使绳元的水平动量减为零, 但事实上尚在水平面上的绳段对到达 B 处的绳元向左的拉力先增大后减小, 故细绳做不到一直贴着 ABC 下滑直至绳左端到达 B .

(2) 设有 x 长的一段绳滑至斜面时绳与棱 B 间恰无作用, 设此时绳的速度为 v , 则由机械能守恒, 得

$$\frac{x}{l} m g \cdot \frac{x}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2, \text{ 则 } v = x \sqrt{\frac{g \sin \theta}{l}}.$$

考察在 B 处的微元绳段 $\Delta m = \frac{v \cdot \Delta t}{l} m$, 其受力情况如图答 9-3 所示: 两侧绳的拉力 F_T , 重力 $\Delta m g$. 在水平方向上, 绳元的速度从 v 减为 $v \cos \theta$, 由动量定理

$$(F_T \cos \theta - F_T) \Delta t = \frac{v \cdot \Delta t}{l} \cdot m v (\cos \theta - 1),$$

式中 $F_T = \frac{l-x}{l} (\frac{x}{l} m g \sin \theta)$, 代入整理得 $x = \frac{l}{2}$, 即细绳左端到 B 棱尚有一半绳长的距离时, 便会出现不全部紧贴 ABC 的现象.

6. 球与地碰撞恢复系数 $e = \frac{\sqrt{0.64}}{1} = 0.8$. 某一次, 皮球获得的初动能 $E_k = \frac{(Ft)^2}{2m}$, 落地时的速度由

$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g h + \frac{(Ft)^2}{2m}$ 可得 $v_1 = \sqrt{2gh + \frac{(Ft)^2}{m^2}}$, 起跳时

速度 $v_2 = \sqrt{2gh}$, 则 $\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh + \frac{(Ft)^2}{m^2}}} = e$, 代入数据得

$$e = \frac{5}{\sqrt{25 + \frac{F^2 \cdot 0.1^2}{0.1^2}}} = 0.8, \text{ 则 } F = 3.75 \text{ N}.$$

7. 本题要特别关注从斜板到水平地板的拐点, 袋的动量的及其所受的摩擦力与支持力冲量的变化情况. 在 $\mu = 0.7, \alpha = 60^\circ$ 的情况下, 摩擦角 $\tan \varphi = \frac{F_f}{F_N} =$

0.7, 袋的动量 p ($p = m\sqrt{2gH}$) 在斜板底端时方向与水平成 60° 角向下, 它的水平分量 $p_x = p\cos 60^\circ$, 竖直分量 $p_y = p\sin 60^\circ$, 到水平板时, 两个方向动量减为零

所需冲量可由动量定理确定, 由 $\begin{cases} F_f t_x = p_x, \\ F_N t_y = p_y, \end{cases}$ 得 $\frac{t_x}{t_y} =$

$\frac{\sqrt{3}}{0.7 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2.1} < 1$, 可知水平分量先减为零, 故袋就停在斜面底端; 而在 $\mu = 0.5, \alpha = 45^\circ$ 的情况下, $\frac{t_x}{t_y} =$

$\frac{1}{0.5 \times 1} > 1$, 是竖直方向的动量先减为零, 此时水平动量由动量定理有 $-\mu p_y = p_x' - p_x$, $\mu m\sqrt{2gH}\sin 45^\circ =$

$m\sqrt{2gH}\cos 45^\circ - p_x'$, 得 $p_x' = \frac{m\sqrt{gH}}{2}$, 袋将离开斜板底端, 滑行距离 s 后停止, 由 $\mu mgs = \frac{p_x'^2}{2m} = \frac{mgH}{8}$, 求得

$s = \frac{H}{4} = 0.5 \text{ m}$.

8. 两球相对速度(即接近速度)为 $\sqrt{2gh}$, 相遇历时 $t = \frac{h}{\sqrt{2gh}}$, 此时两球的速率相同 $v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{gh}{2}}$. 上球下落了 $\frac{h}{4}$, 由于两球完全相同, 碰撞后分离速度为

$e\sqrt{2gh}$, 则上球回跳速率为 $e\sqrt{\frac{gh}{2}}$, 设回跳高度距塔顶 H , 则 $(e\sqrt{\frac{gh}{2}})^2 = 2g(\frac{h}{4} - H)$, 得 $H = \frac{h}{4}(1 - e^2)$.

9. (1) 整个系统一起运动时, $a = \frac{g}{3}$, 并可求出初时, 质量为 $2m$ 的物块 A 离地高度 $h = \frac{1}{2}at_1^2 = 15 \text{ m}$; A 着地后, 绳松, B 以初速度 $v_1 = at = 10 \text{ m/s}$ 做竖直上抛运动, 经 $2\frac{v_1}{g} = 2 \text{ s}$ 落回原处并将绳拉紧, 此瞬间 A、B 相互作用, A 被拉离地面, 由动量守恒可得

$$mv_1 = 3mv_2, \text{ 则 } v_2 = \frac{v_1}{3} = \frac{at_1}{3},$$

此后, 两者以 v_1 为初速度, $a = \frac{g}{3}$ 做匀变速运动(先逆时针匀减速、后顺时针匀加速), 回到初位置即 A 第二次触地须经时间 $\Delta t = 2\frac{v_2}{a} = 2\frac{3v_1}{g} = 2 \text{ s}$, 则 A 的第一、第二次着地总共相隔为 $2\frac{v_1}{g} + 2\frac{v_1}{g} = 4 \text{ s}$.

(2) 第二次着地时两物块的速度 $v_2 = \frac{v_1}{3}$, A 再次被拉离地面及第三次着地时两物块的速度

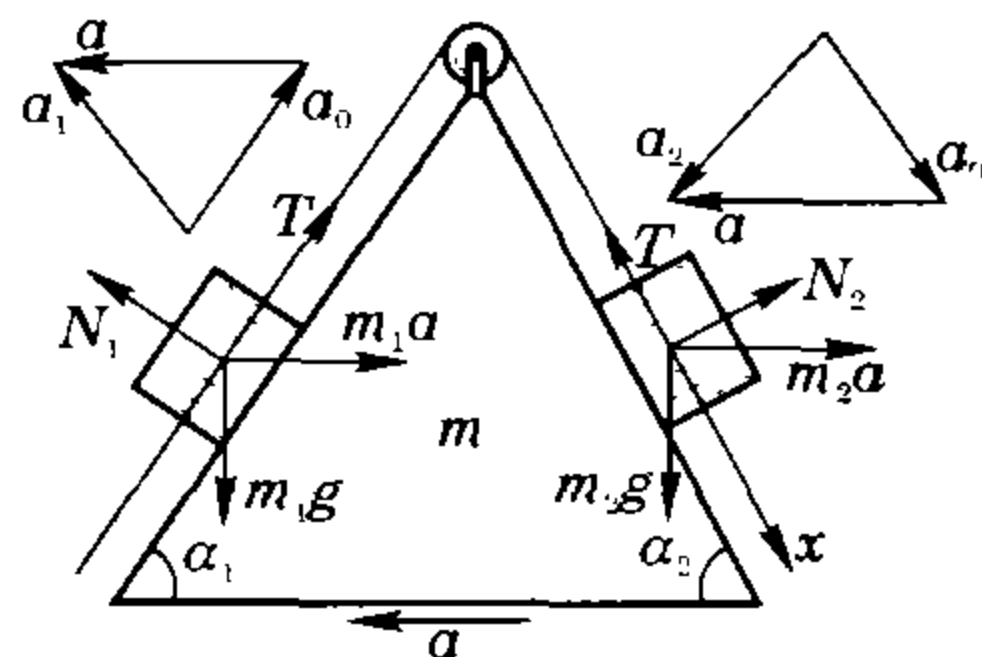
$$v_3 = \frac{v_2}{3} = \frac{v_1}{3^2},$$

第二、第三次着地间隔时间为 $2\frac{v_1}{3g} + 2\frac{3v_1}{3^2g} = \frac{4v_1}{3g}$, 依次类推, 到第 n 次着地时共用时

$$T = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{v_1}{3^{n-2}g} = 6 \text{ s},$$

故自开始运动到最终停止共用时 $6 \text{ s} + 3 \text{ s} = 9 \text{ s}$.

10. 设斜面加速度为 a , 而物体对斜面的加速度为 a_0 , 在图答 9-4 所示的坐标下, 由系统水平方向动量守恒, 即



图答 9-4

$$0 = m_1(a_0 \cos \alpha_1 - a) + m_2(a_0 \cos \alpha_2 - a) - ma. \quad \text{①}$$

又对 m_1, m_2 分别列出动力学方程

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin \alpha_1 + m_1 a \cos \alpha_1 = m_1 a_0, \\ m_2 g \sin \alpha_2 - T + m_2 a \cos \alpha_2 = m_2 a_0. \end{cases} \quad \text{②}$$

由①、②解得

$$a_0 = \frac{(m_1 + m_2 + m)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g}{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 - (m_1 + m_2 + m)(m_1 + m_2)},$$

$$a = \frac{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g}{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 - (m_1 + m_2 + m)(m_1 + m_2)},$$

由此得

$$a_1 = \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g}{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 - (m_1 + m_2 + m)(m_1 + m_2)}$$

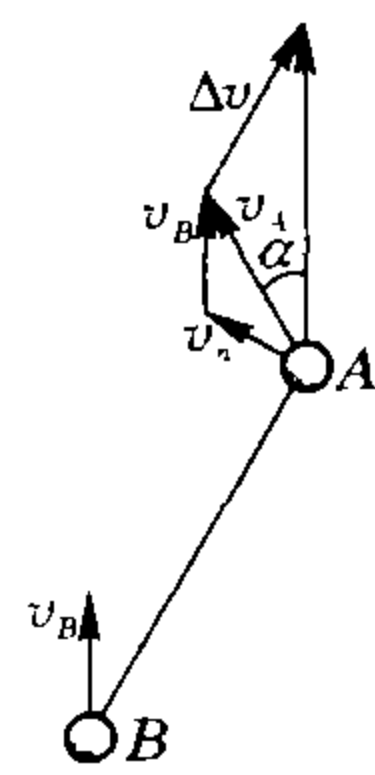
$$\sqrt{(m_1 + m_2 + m)^2 + (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 - 2(m_1 + m_2 + m)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) \cos \alpha_1},$$

$$a_2 = \frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g}{(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 - (m_1 + m_2 + m)(m_1 + m_2)}$$

$$\sqrt{(m_1 + m_2 + m)^2 + (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2 - 2(m_1 + m_2 + m)(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2) \cos \alpha_2}.$$

当 $a = 0$, 即 $m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2 = 0$, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$ 时, 斜面静止.

11. 当轻绳刚拉直时滑块 A 速度由 v_0 变为 v_A , 速度增量沿绳方向, 滑块 B 速度为 v_B , 各速度矢量间关系如图答 9-5 其中 v_n 表示 A 对 B 的转动速度. 沿槽方向系统动量守恒 $mv_0 = mv_B + mv_A \cdot \cos \alpha$ ①



图答 9-5

又由图有

$$\frac{v_0}{\sin(30^\circ + \alpha)} = \frac{v_A}{\sin 30^\circ}, \quad \text{②}$$

$$\frac{v_0}{\sin 60^\circ} = \frac{v_B}{\sin(60^\circ - \alpha)}, \quad \text{③}$$

由②、③式得 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}(v_0 - v_B)}{3v_B + v_0}$, $v_A =$

$$\frac{v_0}{\cos \alpha(1 + \sqrt{3} \tan \alpha)}, \text{ 代入①式得 } v_0 = v_B + \frac{v_0}{1 + \sqrt{3} \tan \alpha} =$$

$$v_B + \frac{v_0}{1 + \frac{3(v_0 - v_B)}{3v_B + v_0}} = v_B + \frac{v_0(3v_B + v_0)}{4v_0}, \text{ 解得 } v_B = \frac{3}{7}v_0.$$

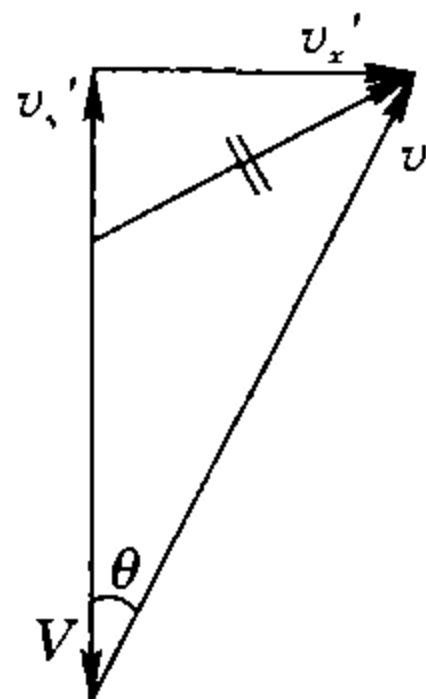
12. (1) 设球对板的入射速度 v 与竖直方向成 θ 角, 大小即平抛运动末速度, $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\cos \theta}$, 平抛初速度 $v_0 = \sqrt{2gh} \tan \theta$, 而 $\tan \theta = \frac{1}{4h}$, 故 $v_0 = \sqrt{2gh} \frac{1}{4h}$.

(2) 根据弹性碰撞性质, 设球与板碰后速度变为 v' , 板速度为 V , 球离开板的速度大小为 v , 方向遵守反射定律, 由图答 9-6, 有

$$\begin{cases} v_x' = v \sin \theta, \\ v_y' = v \cos \theta - V. \end{cases}$$

又由动能守恒, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} m (v_x'^2 + v_y'^2) + \frac{1}{2} M V^2 \\ &= \frac{1}{2} m (v \cos \theta - V)^2 + \frac{1}{2} M V^2 \\ &+ \frac{1}{2} (v \sin \theta)^2. \end{aligned}$$



图答 9-6

解得
$$V = \frac{2m \cos \theta}{M+m} v = \frac{2m \sqrt{2gh}}{M+m},$$

此后根据板在运动中机械能守恒, 可得板向下运动

$x = \frac{2m}{M+m} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}$, 则弹簧总压缩量为

$$\Delta l = \frac{Mg}{k} + \frac{2m}{M+m} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}.$$

13. 设上升时间为 T , 取上升过程中的某一元过程: 该过程小球上升了 $\frac{T}{n}$ ($n \rightarrow \infty$) 时间, 速度从 v_i 减少

为 v_{i+1} , 由于 $\frac{T}{n} \rightarrow 0$, 各元过程中的阻力可视为不变,

$F_f = kmv_i$, 合外力 $\Sigma F_i = mg + kmv_i$, 根据动量定理,

对该元过程有 $(mg + kmv_i) \cdot \frac{T}{n} = m(v_i - v_{i+1})$, 即

$$\frac{v_i - v_{i+1}}{g + kv_i} = \frac{T}{n}, \text{ 对该式变形有 } \frac{g + kv_i - g - kv_{i+1}}{g + kv_i} = \frac{kT}{n},$$

则 $1 - \frac{g + kv_{i+1}}{g + kv_i} = \frac{kT}{n}$, 得 $\frac{g + kv_{i+1}}{g + kv_i} = 1 - \frac{kT}{n}$.

由上式我们得知, 在各相同的上升时间 $\frac{T}{n}$ 微元中, 合外力大小、动量的增量是成等比数列递减的, 其公比为

$1 - \frac{kT}{n}$, 于是有

$$\left(\frac{g + kv_{i+1}}{g + kv_i}\right)^n = \left(1 - \frac{kT}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{kT}{n}\right)^{-\frac{n}{kT} \cdot (-kT)},$$

两边取极限, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g + kv_{i+1}}{g + kv_i}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{kT}{n}\right)^{-\frac{n}{kT} \cdot (-kT)},$$

注意到小球抛出时所受阻最大, 合外力为 $mg + 10mk$, 上升到最高点时速度为零, 合外力为 mg , 以及

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 得 $\frac{g}{10k+g} = e^{-kT}$, 于是

$$T = \frac{1}{k} \ln \frac{g+10k}{g}, \quad \text{①}$$

上升过程的动量定理表达式为

$$mgT + km \Sigma v_i \cdot \frac{T}{n} = mv_0, \quad \text{②}$$

式中 $\Sigma v_i \cdot \frac{T}{n}$ 即上升高度; 在下落阶段, 我们用同样的

方法, 对下降第 i 个 $\frac{T'}{n}$ 的元过程给出动量定理表达式

$(mg - kmv_i) \cdot \frac{T'}{n} = m(v_i - v_{i-1})$, 变形、整理后得

$$\frac{g - kv_{i-1}}{g - kv_i} = 1 + \frac{kT'}{n}, \text{ 两边同时取 } n \text{ 次方 } \left(\frac{g - kv_{i-1}}{g - kv_i}\right)^n =$$

$$\left(1 + \frac{kT'}{n}\right)^n \cdot kT', \text{ 两边取极限, 并注意初始时 (最高点)}$$

合力为 mg , 回到抛出点时合力为

$$mg - kmv_i, \text{ 得 } T' = \frac{1}{k} \ln \frac{g}{g-9k}, \quad \text{③}$$

下落过程的动量定理表达式为

$$mgT' - km \Sigma v_i \cdot \frac{T'}{n} = mv_i, \quad \text{④}$$

式中 $\Sigma v_i \cdot \frac{T'}{n}$ 为下落高度, 则由①、③两式得

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{g}{g-9k} + \frac{1}{k} \ln \frac{g+10k}{g} = \frac{1}{k} \ln \frac{g+10k}{g}$$

$$= \frac{1}{k} \ln \frac{g+10k}{g-9k},$$

由②、④两式解得

$$t = \frac{m(v_0 + v_i)}{mg} = 1.9 \text{ s},$$

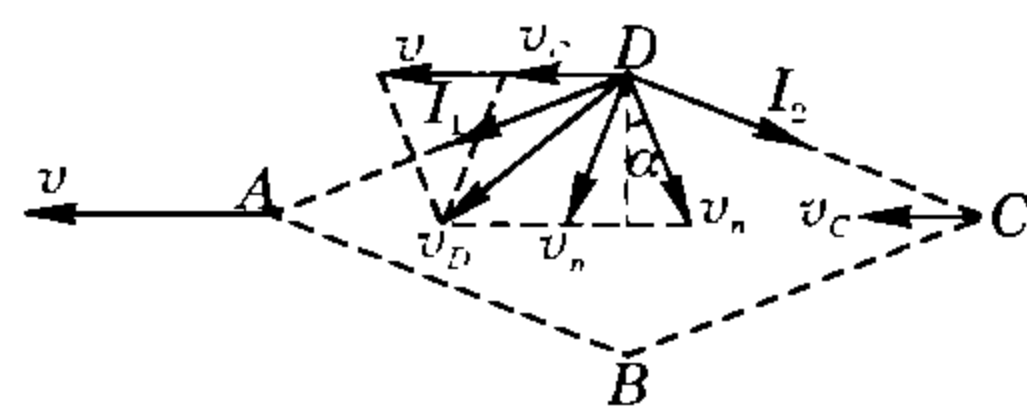
则 $\frac{1}{k} \ln \frac{g+10k}{g-9k} = 1.9 \text{ s}, k \approx 0.058 \text{ s}^{-1}$.

14. 根据 D 点速度与 A 点速度及 C 点速度相关关系, 如图答 9-7,

有 $v = v_c + 2v_n \sin \alpha$,

设 AD 绳上力的冲量为 I_1 , CD 绳上力的

冲量为 I_2 , 则



图答 9-7

$$\begin{cases} (I_1 - I_2) \cos \alpha = mv_{D_x} = m \frac{v + v_c}{2}, \\ (I_1 + I_2) \sin \alpha = mv_{D_y} = m \frac{v - v_c}{2} \cot \alpha, \\ 2I_2 \cos \alpha = mv_c. \end{cases}$$

得 $v_c = \frac{\cos 2\alpha}{1 + 2\sin^2 \alpha} v$, 所以

$$\begin{cases} p = m(v + v_c + 2 \frac{v + v_c}{2}) = \frac{4mv}{1 + 2\sin^2 \alpha}, \\ E = \frac{1}{2} m \left[v^2 + v_c^2 + 2 \left(\frac{v + v_c}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{v - v_c}{2} \cot \alpha\right)^2 \right] \\ = \frac{2mv^2}{1 + 2\sin^2 \alpha}. \end{cases}$$

竞赛辅导

专题 10 曲线运动的动力学解

沈 晨

教你一手

专题7《曲线运动直谈》中,我们从运动学角度研究了曲线运动,在那里,我们熟悉了描述曲线运动的运动学方法,对圆周运动与抛体运动的运动学规律做了较深入的研究.在这个专题里,我们将从动力学角度研究曲线运动,即掌握各种曲线运动形成及运动状态变化的原因,这对于人们能动地掌控曲线运动是至为重要的.

牛顿第二定律阐述了力与加速度的普遍关系,通俗地说就是:什么样的力产生什么样的加速度.在曲线运动中,我们通常将物体所受外力沿切线方向分量的代数和 ΣF_t 称为切向力,而外力沿法线方向分量的代数和 ΣF_n 称为法向力.切向力产生切向加速度、决定曲线运动物体速率变化的快慢,法向力产生法向加速度、决定物体运动方向变化的快慢.在曲线运动中,牛顿第二定律的切向与法向的分量式(动力学方程)为

$$\Sigma F_t = ma_t = m \frac{\Delta v}{\Delta t}; \Sigma F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}.$$

当物体所受外力与运动速度方向不在同一直线时,物体一定做曲线运动,其中,若物体所受外力为恒力,物体做匀变速曲线运动,例如抛体运动;若物体所受外力方向与运动方向总垂直,则切向加速度为零,物体做匀速率的曲线运动,例如做等距螺旋线运动的物体;再如物体所受总垂直于速度的方向的外力大小不变,则法向加速度大小不变,这就是匀速圆周运动.

动力学方法求解曲线运动的加速度,首先要作好两项分析,即物体的受力情况分析与运动情况分析,当外力与运动方向不在同一直线的情况下,通常将物体所受各力按运动速度的切向与法向作正交分解,通过建立两个方向上的牛顿第二定律的分量式求得.

例 1 如图 10-1 所示,滑块 A 的质量为 M,由于绳子的牵引而沿水平导轨滑动,绳子的另一端缠绕在半径为 r 的鼓轮 O 上,鼓轮以等角速度 ω 转动.不计导轨与滑块间的摩擦,求绳子的拉力 F_T 与距离 x 之间的关系.

分析与解 先分析滑块 A 受力:重力 Mg 、导轨支持力 F_N , 绳子拉力 F_T ;再分析滑块的运动:速度沿导轨的运动可视作沿绳向绳与轮切点 B 的平动及以切点 B 为中心的转动的合成,这两个方向的分运动速度分别为

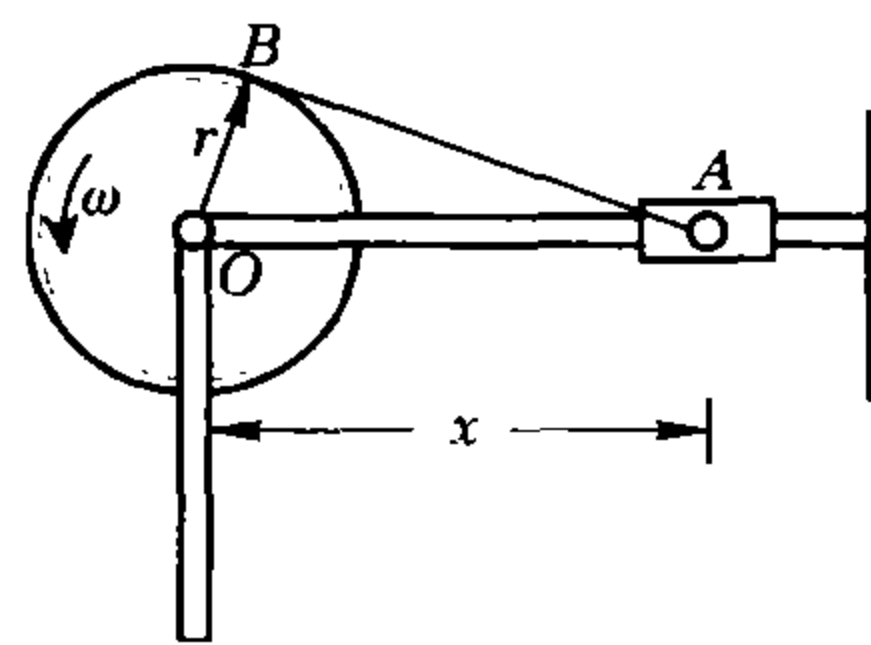


图 10-1

$$v_n = r\omega, v_t = r\omega \cdot \tan \theta,$$

其中 θ 为对应于 x, 绳与导轨的夹角.以切点为中心转动的分运动的向心加速度由该方向的合力产生.如图 10-2 所示,取 AB 方向为 x 轴正方向建立直角坐标系 xOy , 并按坐标方向正交分解滑块所受各力,则由牛顿第二定律,在 x(轴)方向有

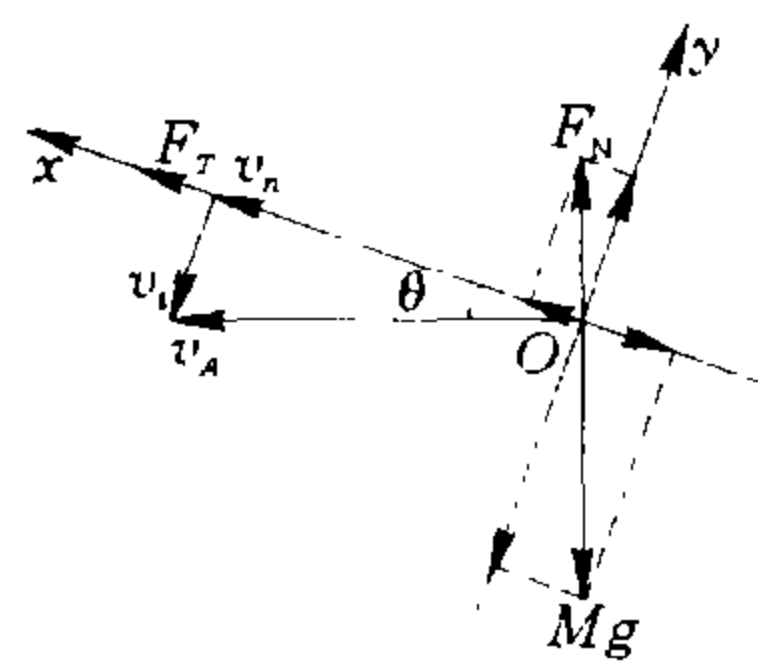


图 10-2

$$F_T + F_N \sin \theta - Mg \sin \theta = M \frac{v_t^2}{x \cos \theta}.$$

又由于滑块实际运动方向沿水平导轨,故在竖直方向满足

$$Mg = F_T \sin \theta + F_N.$$

由以上两式可得

$$F_T (1 - \sin^2 \theta) = M \frac{(r\omega \tan \theta)^2}{x \cos \theta},$$

注意到 $\sin \theta = \frac{r}{x}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$,

$$\text{则 } F_T = M \frac{(r\omega \tan \theta)^2}{x \cos^3 \theta} = \frac{Mr^2 \omega^2 \left(\frac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}} \right)^2}{x \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x} \right)^3},$$

整理后即可得到 F_T 与 x 的关系为

$$F_T = \frac{Mr^4 \omega^2 x^2}{(x^2 - r^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

竖直平面内的圆周运动有一些规律性的结论,我

们略作些盘点. 首先, 在竖直平面内发生的圆周运动, 是有重力参与提供向心力的, 如果没有其他切向力, 竖直面上的圆周运动肯定是非匀速率的, 机械能是守恒的, 在水平直径以上, 各点均存在一速度的临界值. 如图 10-3 所示, 小物体连接在轻杆一端, 在竖直平面内绕杆的另一端做圆周运动, 通过水平直径以上位置, 杆与水平线间的夹角为 θ 并正沿圆周向上运动时. 将重力沿切向与法向分解, 可知, 重力的切向分力 $mg\cos\theta$, 方向与速度方向相反, 说明物体正做减速率地运动; 重力的法向分力 $mg\sin\theta$ 与杆的拉力的合力作为向心力, 应有

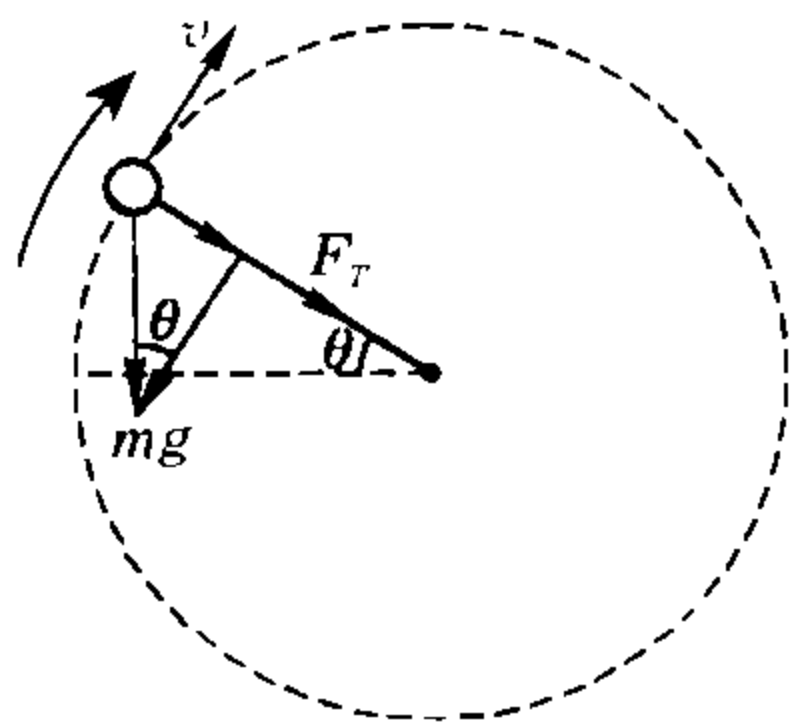


图 10-3

式中的 R 为圆轨道半径. 从该式可知, 线速度 v 越大, 沿轨道运动通过该点时的加速度越大, 所需向心力越大, 这要靠杆的拉力来适调, 因为杆的拉力是微小形变引起的弹力, 是一种“适应性力”而重力则是恒力. 若速度 v 较小, 向心加速度较小, 致使只须重力的法向分量提供向心力即可, 即

$$F_T + mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R},$$

其中 R 为圆轨道半径. 从该式可知, 线速度 v 越大, 沿轨道运动通过该点时的加速度越大, 所需向心力越大, 这要靠杆的拉力来适调, 因为杆的拉力是微小形变引起的弹力, 是一种“适应性力”而重力则是恒力. 若速度 v 较小, 向心加速度较小, 致使只须重力的法向分量提供向心力即可, 即

$$mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}, v_0 = \sqrt{Rg\sin\theta},$$

这时杆上的弹力为零. 若小物体速度小于 v_0 , 杆上弹性拉力将转为支持力, 此时有

$$mg\sin\theta - F_T = m\frac{v^2}{R}.$$

故 $v_0 = \sqrt{Rg\sin\theta}$ 是杆牵引小物体在竖直平面内做圆周运动时, 杆恰无形变, 弹力为零. 杆对小物体的作用效果在“拉”与“推”之间转换的临界速度, 而小物体能

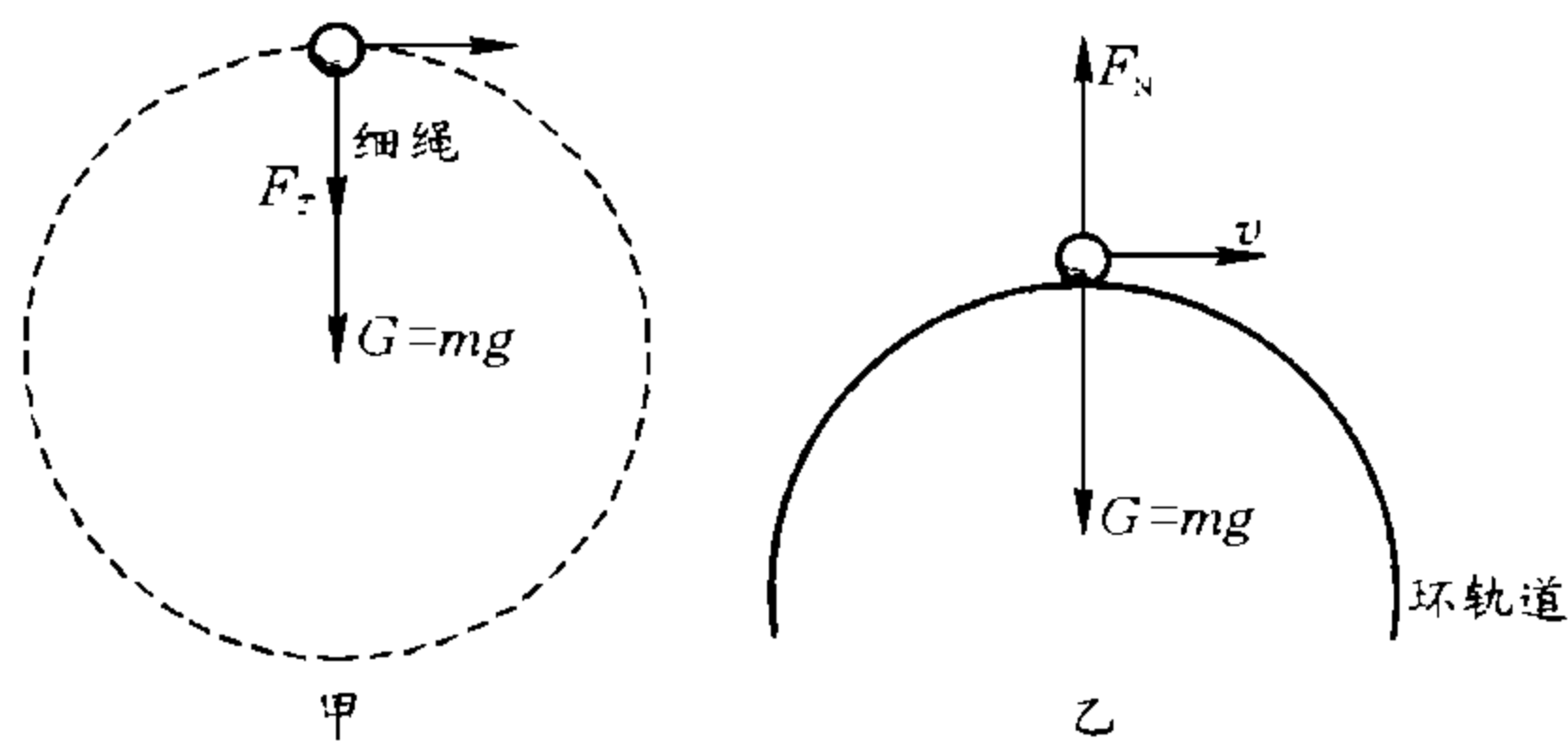


图 10-4

在竖直面内做完整的圆周运动的条件是到达最高点时的速度 $v=0$.

若用绳来替换杆, 如图 10-4 甲所示, 因绳对小物体不可能产生支持力作用, 则在达到临界速度 v_0 时, 绳长仍为 R 但已不张紧, 这是物体能在半径为 R 的竖

直圆轨道运动的临界状态, 此后绳完全松弛, 小物体只受重力作用而做抛体运动. 这说明, 对应于绳与水平线成 θ 角的位置, 物体可沿圆周运动的最小速度 $v_{\min} = \sqrt{Rg\sin\theta}$, 在最高点, 这一临界速度值应为 \sqrt{Rg} , 小物体做完整的竖直平面内的圆周运动的条件是通过最高点时的速度不小于 \sqrt{Rg} . 再若将杆替换成环形轨道, 如图 10-4 乙所示, 小物体沿光滑轨道外侧运动时, 由于轨道对小物体只可能产生“顶”的作用效果, 故 $v_0 = \sqrt{Rg\sin\theta}$ 就成为小物体不脱离轨道可取的最大速度, 而要在轨道最高点不脱轨, 小物体的速度不得超过 \sqrt{Rg} .

例 2 一长为 a 的细线系着一小球悬挂在 O 点静止不动. 若使小球获得一个水平初速度 $v_0 = \sqrt{(2+\sqrt{3})ag}$, 略去空气阻力. 证明: 小球的运动轨迹经过悬点 O .

分析与解 小球运动轨迹会通过悬点 O , 是因为线绳在水平直径上方与水平线成某一角度 α 时, 绳恰好不再张紧, 小球开始脱离圆轨道而做斜上抛运动, 如图 10-5 所示. 我们先来求出绳上张力为零时, 小球达临界速度 $v = \sqrt{ag\sin\alpha}$ 时的方位角 α . 整个运动过程中只有重力做功, 机械能守恒, 则有

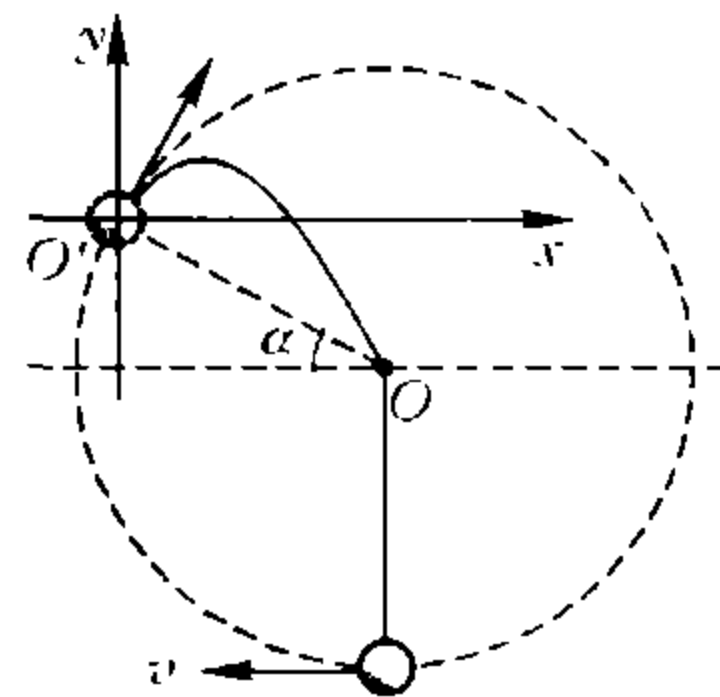


图 10-5

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{ag\sin\alpha})^2 + mga(1 + \sin\alpha),$$

$$\text{故 } 3ag\sin\alpha = v_0^2 - 2ag, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

这个位置在距水平直径 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ 高处, 此位置小球的

$$\text{瞬时速度 } v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}ag}.$$

此后, 小球做斜上抛运动, 以抛出点为原点建立直角坐标系 $xO'y$, 我们从斜上抛的竖直方向上的分运动求得当小球在竖直方向的位移为 $-h$ 时, 经历时间为 t , 因此有

$$-h = vt\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

将 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}ag}$ 代入上式整理得

$$3gt^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}agt - 2\sqrt{3}a = 0.$$

由此方程解得符合题意的时间 $t = \sqrt{2\sqrt{3}\frac{a}{g}}$, 这段时间

内小球完成的水平位移为

$$x = v t \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} a = a \cos \alpha.$$

说明小球做斜抛运动过程中,通过了坐标为 $(\frac{\sqrt{6}}{3}a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a)$ 的悬点 O .

例 3 图 10-6 所示中, A 是一带有竖立柱的木块,总质量为 M ,位于水平地面上. B 是一质量为 m 的小球,通过一不可伸长的轻绳挂于立柱的顶端.现拉动小球,使绳伸直并处于水平位置.然后让小球从静止状态自由下摆.

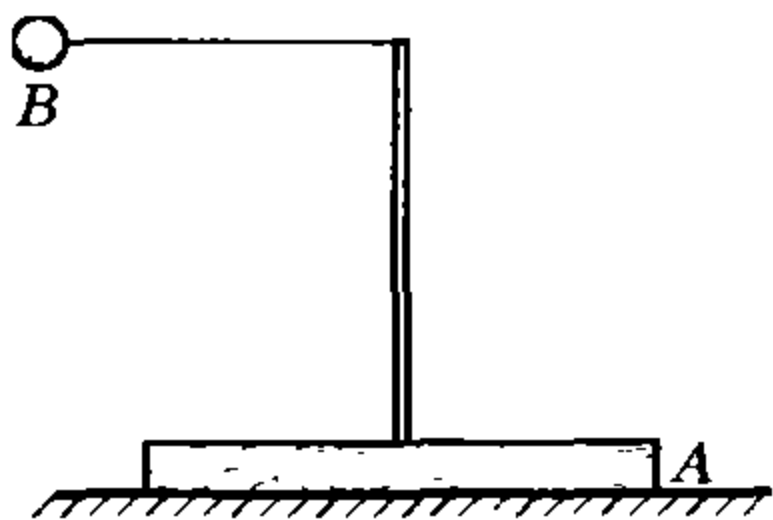


图 10-6

如在小球与立柱发生碰撞前,木块 A 始终未发生移动,则木块与地面间的静摩擦因数至少为多大?

分析与解 在小球 B 下摆过程中,通过轻绳对木块 A 施以竖直向下的压力及水平向左的拉力,随着下摆角度的增大,竖直向下的压力逐渐增大,而水平向左的拉力则是先增大后减小.我们要求的是:小球下摆于任一位置水平拉力与最大静摩擦力恰能平衡,需要的静摩擦因数的最大值.设轻绳长 L ,小球摆至与水平线成 θ 角的位置时绳上张力为 F_T ,小球 B 的速度为 v ,此时小球受力情况如图 10-7 甲所示,对小球列出动力学方程为

$$F_T - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{L},$$

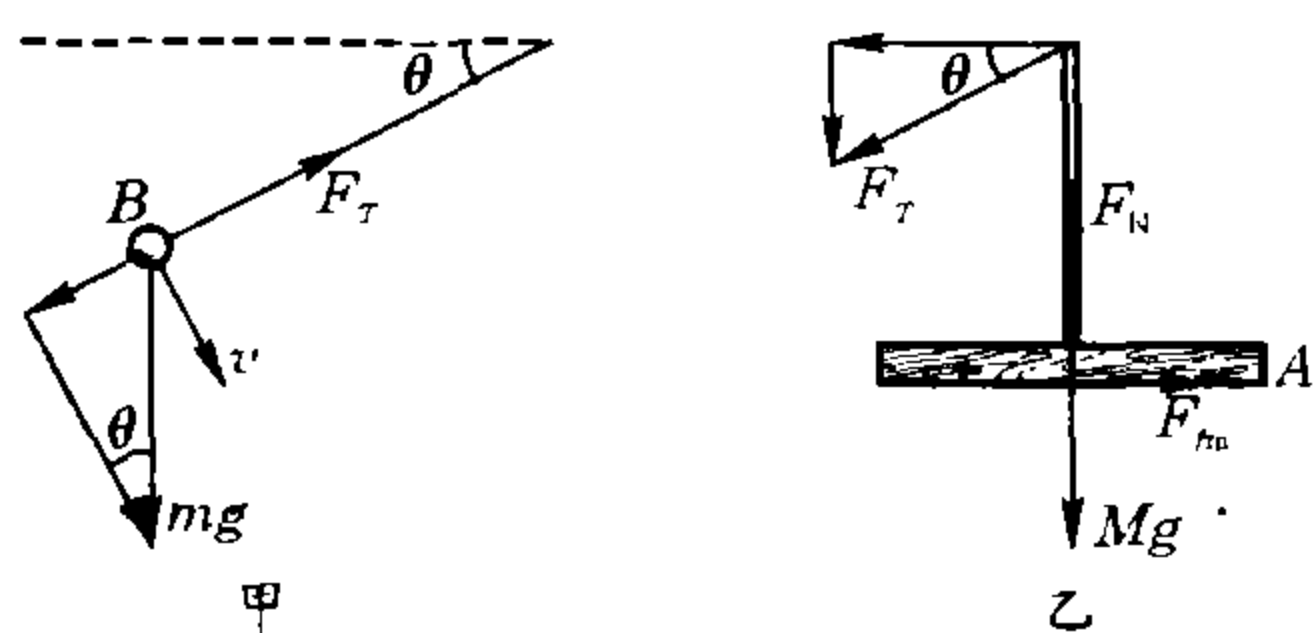


图 10-7

又,小球 B 下摆过程中机械能守恒,有

$$mgL \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2,$$

分析木块 A 的受力情况如图 10-7 乙所示,由于木块静止,故有

$$F_T \cos \theta = F_{fm} = \mu (Mg + F_T \sin \theta).$$

对应于角度 θ ,恰能令木块静止的静摩擦因数应符合由以上三式联立的方程

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{3m \sin \theta \cos \theta}{M + 3m \sin^2 \theta} = \frac{3m \cos \theta}{\sin \theta [M(1 + \cot^2 \theta) + 3m]} \\ &= \frac{3m}{(M + 3m) \tan \theta + M \cot \theta}. \end{aligned}$$

因 $(M + 3m) \tan \theta \cdot M \cot \theta = M(M + 3m)$ 为定值,则当 $(M + 3m) \tan \theta = M \cot \theta$,即 $\tan \theta = \sqrt{\frac{M}{M + 3m}}$ 时,两项之和有最小值且为 $2 \sqrt{M(M + 3m)}$,摩擦因数 μ 则有最大值

$$\mu_{\max} = \frac{3m}{2 \sqrt{M(M + 3m)}}.$$

故在小球 B 下摆过程中,要使木块 A 始终与地面保持相对静止,木块与地面之间的静摩擦因数不得小于 $\frac{3m}{2 \sqrt{M(M + 3m)}}$.

例 4 如图 10-8 所示,有一个质量均匀的大球壳,正好静止在桌边上,球壳与桌子无摩擦,对球壳轻轻一推,使其滚下桌子,试计算球壳脱离桌子的瞬间,球壳中心的速率.

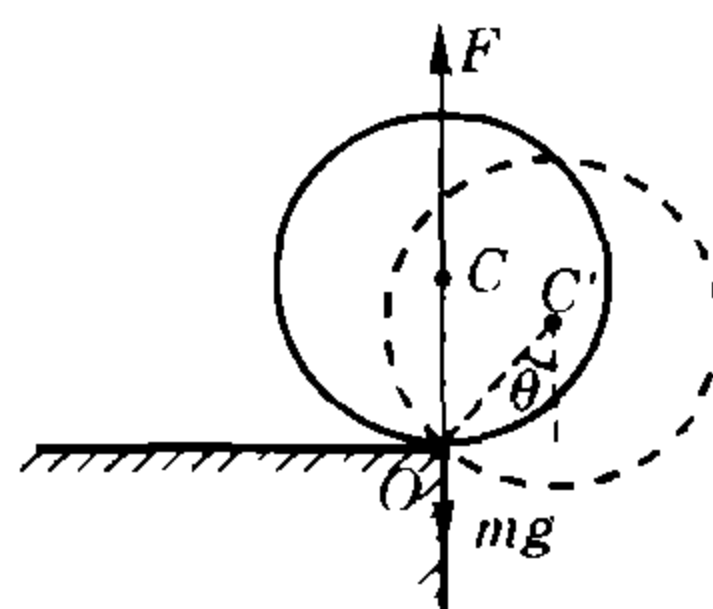


图 10-8

分析与解 由题给条件,球壳在静止时,与桌边接触的一点 O 为其支点,轻推球壳,即给球壳一微扰,球壳的质心 C 将以支点 O 为轴,以球半径 R 为转动半径在竖直面内从初速度为零开始做圆周运动,其间重力势能减少,动能增加;当球壳质心做圆运动所需向心力仅由重力来提供时,球与桌支持点间无挤压,即开始脱离桌子.故球壳“不再接触桌子的瞬时速度”受到两方面关系的制约:即力与运动的因果关系和机械能的守恒关系.

大球壳恰与桌边无挤压时,重力的法向分力承担向心力,设此时球心速度为 v ,有

$$mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}, \quad (1)$$

由机械能守恒定律,有

$$mgR(1 - \cos \theta) = E_k. \quad (2)$$

以上两式中,当球壳质心速率为 v 时,球壳的动能 E_k 可视为质心对 O 点的转动动能 E_o 及球壳对质心 C 的转动动能 E_c 之和,前者 $E_o = \frac{1}{2} m v^2$,后者 E_c 我们用微元法来计算.如图 10-9 所示,取质心 C 为坐标原点,球壳转轴为 y 轴,在球的

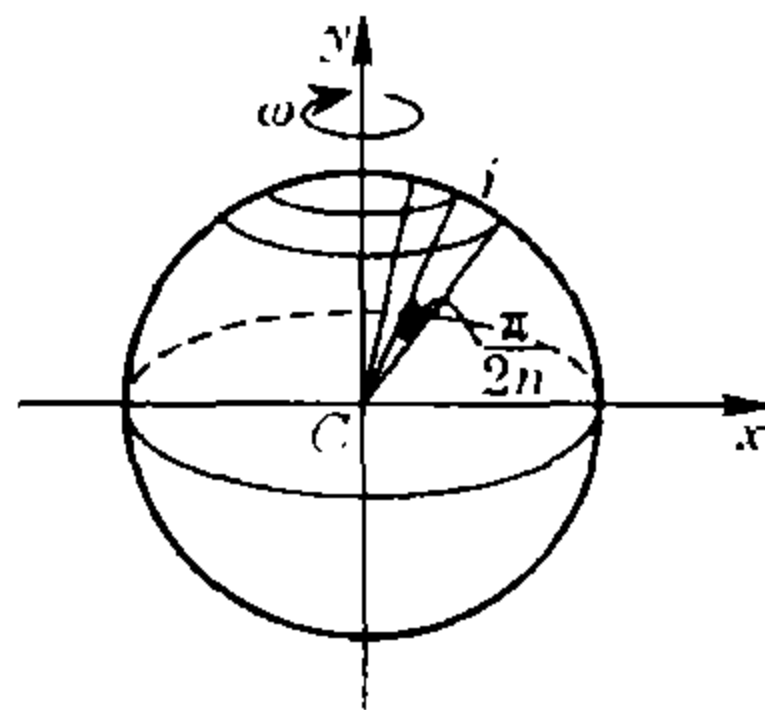


图 10-9

$x-C-y$ 截面圆上,将 $\frac{\pi}{2}$ 弧度均分成 $n(n \rightarrow \infty)$ 等份.

进而将球壳面分割成宽为 $dn = R \cdot \frac{\pi}{2n}$ 的一条一条极细的环带,第 i 条环带的周长

$$C_i = 2\pi R \sin i \frac{\pi}{2n},$$

则相应环带的质量

$$\begin{aligned} m_i &= d_n \cdot C_i \cdot \rho = R \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot 2\pi R \sin i \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{m}{4\pi R^2} \\ &= \frac{\pi m}{4n} \sin i \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

速率 $v_i = \omega r_i = \frac{v}{R} \cdot R \sin i \frac{\pi}{2n}$, 转动动能 $E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

整个球壳对过 C 而垂直于竖直面的轴转动动能为

$$\begin{aligned} E_C &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{\pi m}{4n} \sin^2 i \frac{\pi}{2n} \left(\frac{v}{R} \cdot R \sin i \frac{\pi}{2n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \cdot \sin^3 i \frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{4} \left(3 \sin i \frac{\pi}{2n} - \sin 3i \frac{\pi}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{8} m v^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3\pi \sin \frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n} \sin \frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} \sin \frac{n}{2} \cdot \frac{3\pi \sin \frac{n+1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n}}{\sin \frac{3\pi}{4n}}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \right] \\ &= \frac{1}{8} m v^2 \left(3 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} m v^2. \end{aligned}$$

$$\therefore E_k = E_C + E_o = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{3} m v^2 = \frac{5}{6} m v^2,$$

将 E_k 及由①式得 $\cos \theta = \frac{v^2}{gR}$, 代入②式, 得

$$mgR \left(1 - \frac{v^2}{gR} \right) = \frac{5}{6} m v^2.$$

所以球壳中心的速率 $v = \sqrt{\frac{6}{11}} Rg$.

例 5 筑路工人为了提高工作效率, 把从山上挖出来的土石, 盛在一个箩筐里, 沿一条钢索道滑至山下. 如索道形状为 $x^2 = 4ay$ 的抛物线, 且箩筐及它所盛的土石可以看做质量为 m 的质点, 求箩筐自 $x=2a$ 处自由滑至抛物线顶点时的速度, 并求此时箩筐对钢索的压力.

分析与解 如图 10-10 所示, 以 $O(0,0)$ 点为原点, 以竖直向上方向为 y 轴正方向建立的直角坐标系 xOy 中, 钢索呈顶点为坐标原点、开口向上的抛物线. 质量为 m 的物体, 是从高 $y=a$ 处沿索道自由下滑的, 不计摩擦及其空气阻力由机械能守恒

$$mga = \frac{1}{2} m v^2,$$

容易求得箩筐抵达钢索道底部(即抛物线顶点)时的速度大小 $v = \sqrt{2ag}$, 方向沿该点轨道的切向, 也就是图

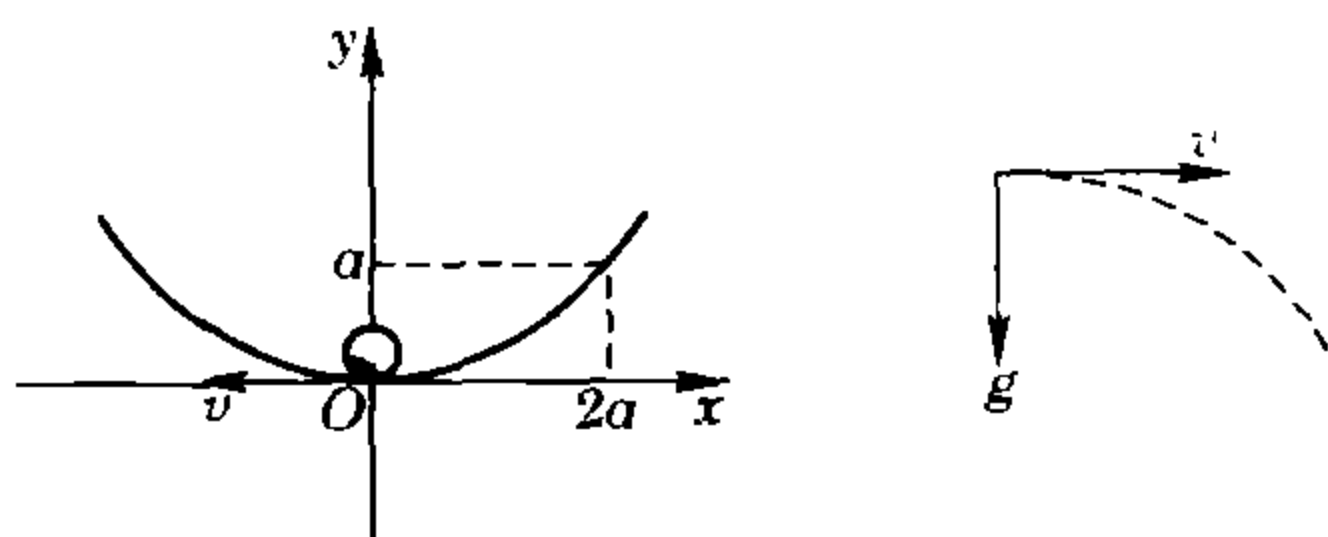


图 10-10

示水平相左方向.

为了求这时箩筐对钢索的压力, 我们取箩筐为研究对象, 在 y 方向建立动力学方程. 在该方向上合外力引起法向加速度 $F_N - mg = m \frac{v^2}{\rho}$. 式中 ρ 是抛物线顶点处的曲率半径. 借助于初速度为 v 的平抛运动, 在抛出点物体的法向加速度即为 g , 由 $g = \frac{v^2}{\rho}$ 可知该抛物线顶点处的曲率半径 $\rho = \frac{v^2}{g}$. 于是有

$$F_N - mg = m \frac{v^2}{\rho} = mg,$$

求出

$$F_N = 2mg.$$

在专题 6 中, 我们曾介绍过做直线加速运动的非惯性系与惯性力, 我们知道, 引入惯性力后, 牛顿第二运动定律 $\sum \mathbf{F} + \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_{||}$ 即可适用于非惯性系. 这里, 我们介绍“惯性离心力”:

做匀角速度转动的非惯性参考系中的惯性力叫做惯性离心力. 如图 10-11 所示, 水平转台以恒定的角速度 ω 相对于惯性参考系

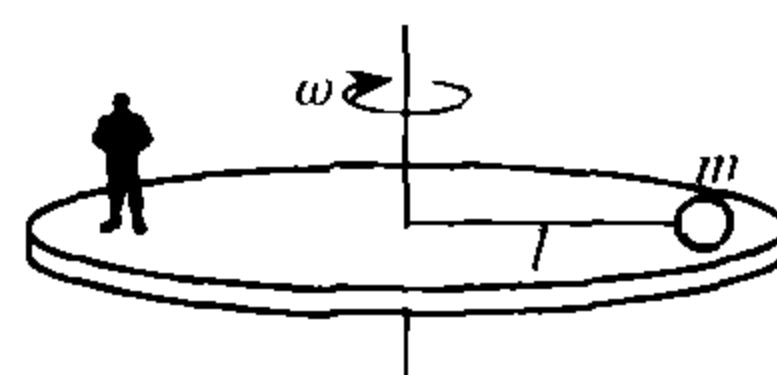


图 10-11

(如地面) 转动, 平台上一小球用长为 l 的绳子与转台的轴相连, 地面观察者看到小球与转台一起匀速转动. 这是因为绳子对小球的拉力提供了球所需的向心力 $F_r = ma_n = m\omega^2 r$; 对于转台上的观察者而言, 他看到小球是静止的, 他认为小球除受绳子的拉力外, 还受到一个大小与 F_r 相等、方向相反、沿半径方向背离圆心的力 F_i , 由于 $F_r = F_i$, 故小球静止. 这种在相对于惯性参考系具有向心加速度的参考系中所引入的使牛顿定律仍能适用的力就是惯性离心力, 与直线加速运动的参考系中的惯性力一样, 惯性离心力是假想的力, 是为在匀角速度转动着的非惯性系中简化力学问题的处理而采用的一种等效方法. 惯性离心力

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_n = -m\omega^2 \mathbf{r}.$$

相对于匀角速度转动的参考系静止的物体, 引入惯性离心力后, 对转动参考系, 仍能满足合力为零的力

与运动关系.若物体相对于转动参考系做相对运动而不是静止,则对转动参考系,为使牛顿运动定律适用,除引入惯性离心力外,还要虚设另一称为“科里奥利力”的惯性力.在专题7例3的讲解中,我们曾展示过,当如图10-12所示半径为 R 的圆盘,以角速度 ω 绕盘心 O 转动,而质点沿盘上径向槽以恒定速度 u 自盘心向外运动,在槽内任一位置 $A(OA=r)$ 质点加速度由两方面构成:中介参考系以 ω 匀速转动的牵连加速度 $a_{牵连}=\omega^2 r$ (方向指向转动中心 O)以及科里奥利加速度 $2\omega u$ (方向沿盘面且垂直于 u).对地面观察者而言,这两个加速度都是由质点所受的真实力——盘面的摩擦力和槽的左侧壁弹力引起的,且 $F_f = m\omega^2 r$, $F_N = 2mu\omega$.对相对盘静止的观察者而言,质点沿槽做速度为 u 的匀速直线运动,他的解释是,质点除了受盘面的摩擦力和槽的左侧壁弹力外,还受到惯性离心力 $F_i = -m\omega^2 r$,科里奥利力 $F_k = -2m\omega u$,于是转动参考系中的观察者就可以解释质点的运动了:合力为零,质点做匀速直线运动.

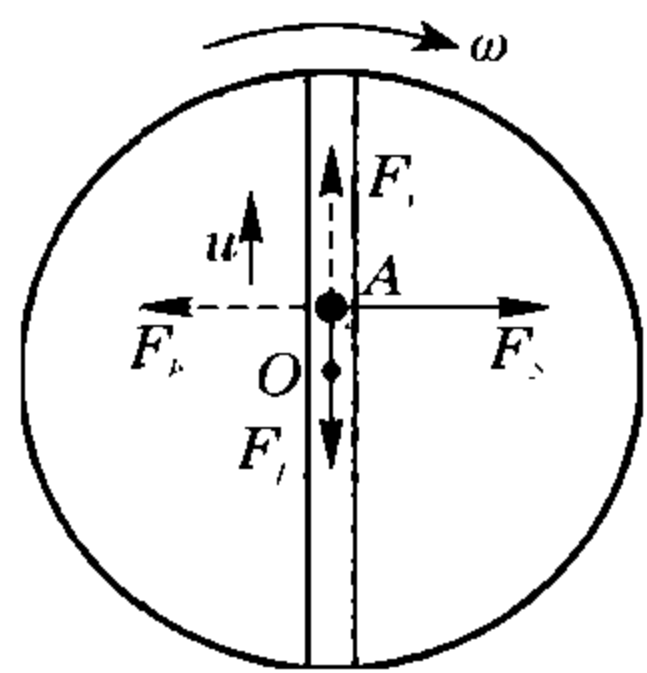


图 10-12

科里奥利力是转动参考系中引入的假想的惯性力,其大小等于引起科里奥利加速度的真实力,方向相反.物体在转动平面上沿任何方向运动时,都将受到一个与运动方向垂直的科里奥利力,大小 $F_k = -2m\omega u$.

地球是一个转动的非惯性参考系,地球自转的证据之一是傅科摆实验.第一次做这个实验的是法国科学家傅科,他在巴黎一个庙宇的圆屋顶的水平架上用67 m的铁丝下端悬挂了一个大球,让球在竖直面内往复摆动,在球的每一次摆动中,摆动平面都会发生明显的偏转.我国北京

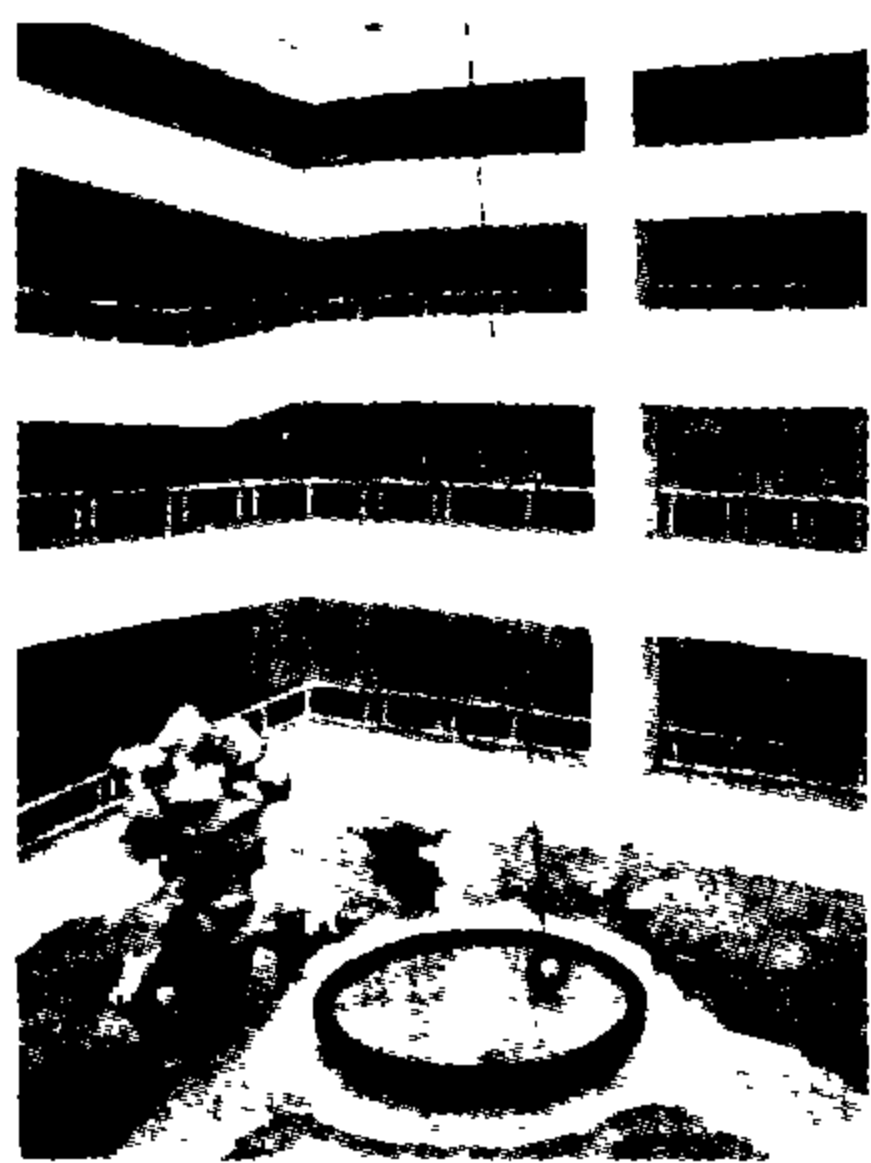


图 10-13

天文馆陈列的傅科摆,它的摆长是10 m,每37 h 15 min,摆平面转动一周.在一些中学,学生们自行设计傅科摆,作为演示地球自转的校园科技景观.图示10-13是宁波效实中学学生设计并将建造的大型校园科技景观傅科摆效果图.

现在我们假设傅科摆实验在北极进行.如图10-

14所示,一个悬挂在北极的傅科摆,给摆球一个水平初速度,摆球开始在初速度所在竖直面内往复运动,考察摆平面 M ,可以发现它相对地球不断地旋转,每昼夜转一周,俯视旋转方向为顺时针.

以太阳为参考系解释这一现象:摆球受到两个实际力的作用,重力 mg 和摆线拉力 F_T .这两个力都在摆动平面内,不可能使摆

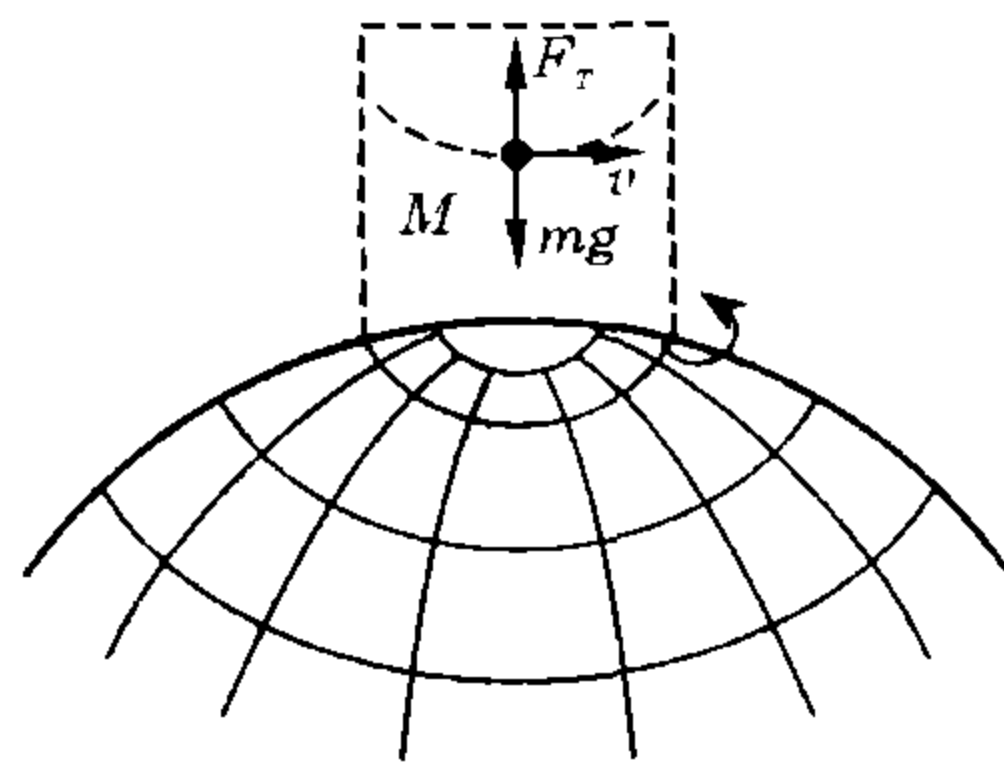


图 10-14

平面发生转动,故摆平面是静止的,但由于地球在逆时针自转,故摆平面相对于地球反向转动;地球上的观察者要解释傅科摆现象必须引入科里奥利力:除了重力 mg 和摆线拉力 F_T 外,摆球还受到一个方向与摆平面、亦即摆球相对地球运动方向垂直的惯性力.例如,当图10-14所示的摆球过平衡位置向右运动时,科里奥利力向外,摆球过平衡位置向左运动时,科里奥利力向里……这样,北极的这只傅科摆其摆平面在科里奥利力作用下顺时针地转动了.

例6 如图10-15所示,在以角速度 ω 绕中心轴 O 匀速转动的太空实验室里,一长为 l 的细线,一端固定在中心轴 O ,另一端系一质量为 m 的小球,小球在实验室里以速度 v 匀速转动,转动方向与 ω 相反,求细线上的拉力 F_T 的大小.

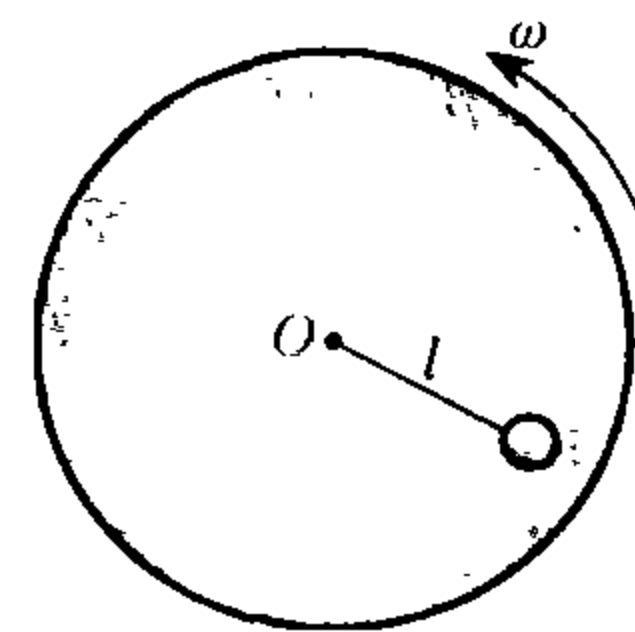


图 10-15

分析与解 取太空实验室

为参考系,小球受到线的拉力 F_T 和惯性力 F_i .设小球对太空实验室的加速度为 a' ,则由牛顿第二定律,有

$$F_T + F_i = ma'$$

上式中 $F_i = -ml\omega^2$;而 $a' = \left(-\frac{v}{l} + \omega\right)^2 l - \omega^2 l$,代入

上式中即可得 $F_T = m\omega^2 l + m \frac{v^2}{l} - 2m\omega v$.

例中我们先求出小球对惯性系的角速度为 $\omega - \frac{v}{l}$ (负号是因为小球反向转动),进而求得对惯性参考系的加速度 $\left(-\frac{v}{l} + \omega\right)^2 l$,最终得到对太空实验室的加速度为 a' .

也可以这样解:太空实验室中,小球做匀速圆周运动,是因为受到绳拉力 F_T 和惯性力 F_i 及科里奥利力 F_k ,三力均沿径向,则有

$$F_T + F_i + F_k = m \frac{v^2}{l},$$

即
$$F_T - ml\omega^2 + 2mv\omega = m \frac{v^2}{l},$$

$$F_T = m\omega^2 l + m \frac{v^2}{l} - 2mv\omega.$$

结果与前解一致.

高手身手

1. 长度为 l 的不可伸长的细线系在竖直轴的顶端, 在线的下端悬挂质量为 m 的一重物. 再在这重物上系同样长度的另一根线, 线的下端悬挂质量也为 m 的另一个重物, 如图 10-16 所示. 竖直轴以恒定角速度 ω 转动. 试证明第一根线与竖直线所成角度小于第二根线与竖直线所成角度.

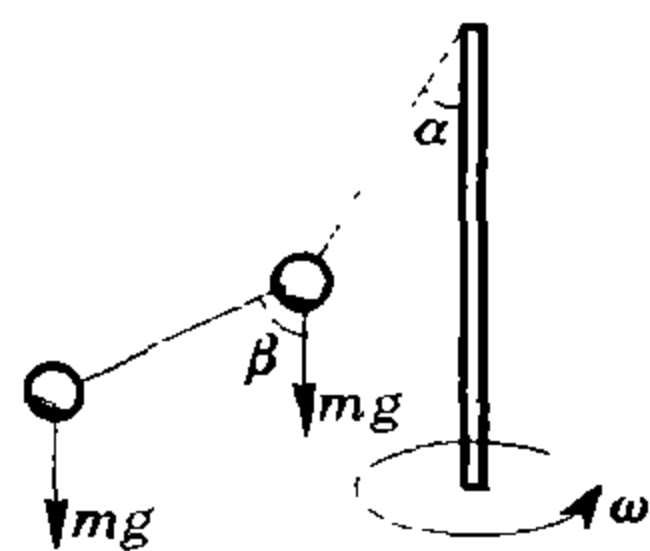


图 10-16

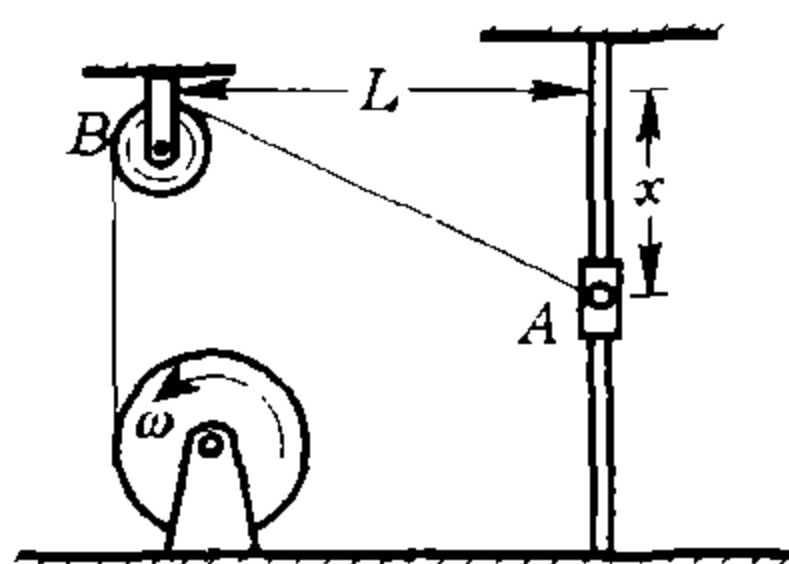


图 10-17

2. 如图 10-17 所示, 套管 A 的质量为 M , 因受绳子牵引沿竖直杆向上滑动. 绳子另一端绕过离杆距离为 L 的滑轮 B 而缠绕在鼓轮 C 上. 当鼓轮 C 转动时, 其边缘上各点的速度大小为 v_0 . 求绳子拉力和距离 x 之间的关系.

3. 橡皮圈挂在钉子上, 如图 10-18 所示. 这时它的长度为 $2h$. 然后使橡皮圈在水平面上旋转起来, 当转动角速度达到 ω 时, 它的长度也为 $2h$. 求橡皮圈转动的角速度.

4. 如图 10-19 所示, 小物块质量为 m , 在半径为 r 的圆柱面上沿螺旋线形的滑槽滑动, 运动的切向加速度大小为 $a_t = g \sin \alpha$, 式中 α 为螺旋线的切线与水平面的夹角, 求由于小物块沿槽滑下而使圆柱面绕其中心轴转动的力矩大小.

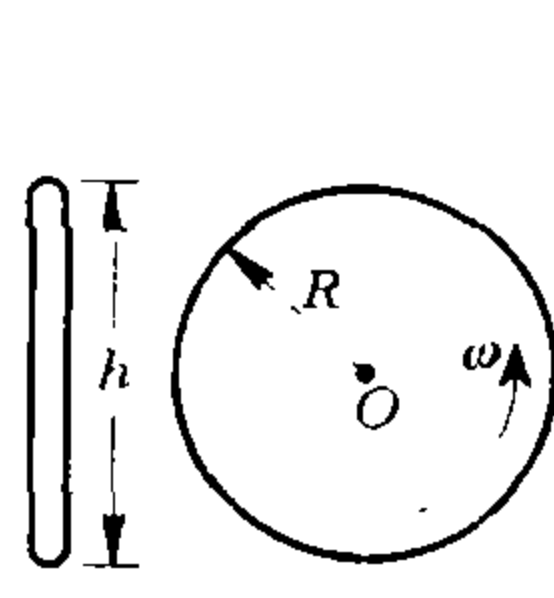


图 10-18

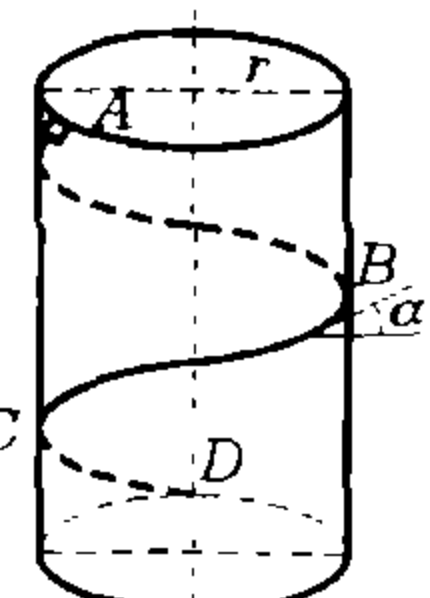


图 10-19

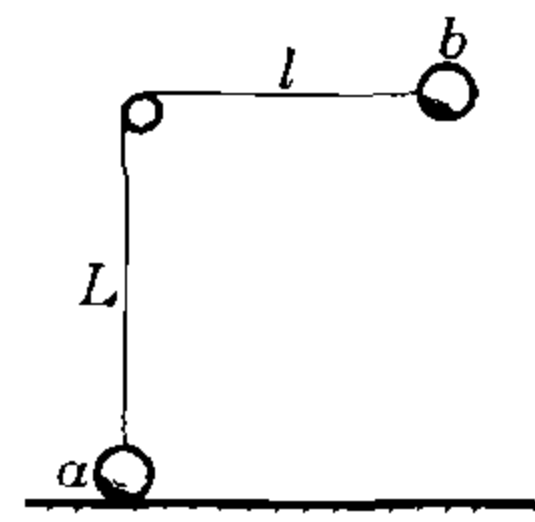


图 10-20

5. 如图 10-20 所示, 一轻绳跨越一固定水平光滑

细杆, 其两端各系一小球, 球 a 置于地面, 球 b 从水平位置由静止向下摆动, 设两球质量相同. 求 a 球恰要离开地面时跨越细杆的两绳之间的夹角.

6. 长为 l 的轻杆上端有一个质量为 m 的小重物 A, 杆被铰链固接在 O 点, 如图 10-21 所示. 并处于竖直位置, 同时与质量为 M 的物体 B 互相接触. 由于微小扰动使系统发生运动. 试问质量之比 M/m 为多少的情况下, 杆在脱离物体 B 的时刻与水平面成角 $\alpha = \pi/6$, 这时物体 B 的速度 u 为多少?

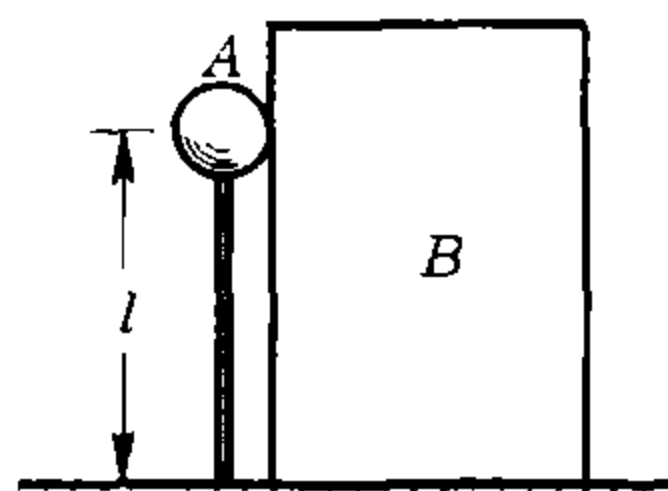


图 10-21

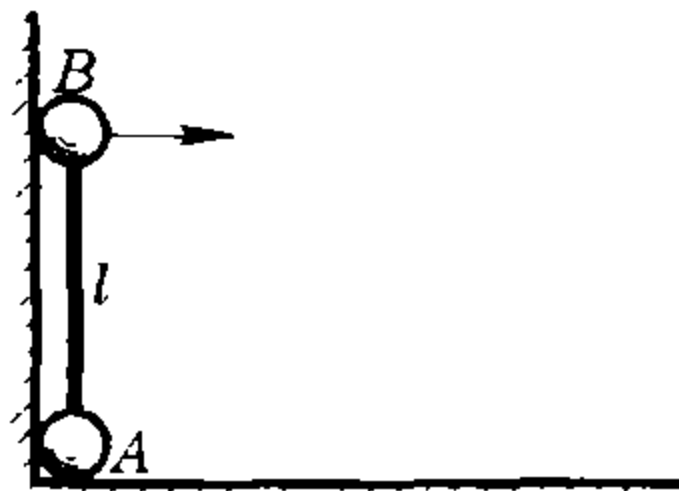


图 10-22

7. 质量均为 m 的两个小球固定在长度为 l 的轻杆两端, 如图 10-22 所示, 直立在相互垂直的光滑墙壁和地板交界处. 突然发生微小的扰动使杆无初速倒下, 求当杆与竖直方向成角 α 时, A 球对墙的作用力.

8. 质量为 m , 半径为 r 的圆木搁在两个高度相同的支架上, 如图 10-23 所示. 右支架固定不动, 而左支架以速度 v 从圆木下面向左滑动. 求当两个支点距离 $AB = \sqrt{2}r$ 时, 圆木对固定支架的压力 F_{NA} . (两支架开始彼此靠得很近, 圆木与支架之间的摩擦不计)

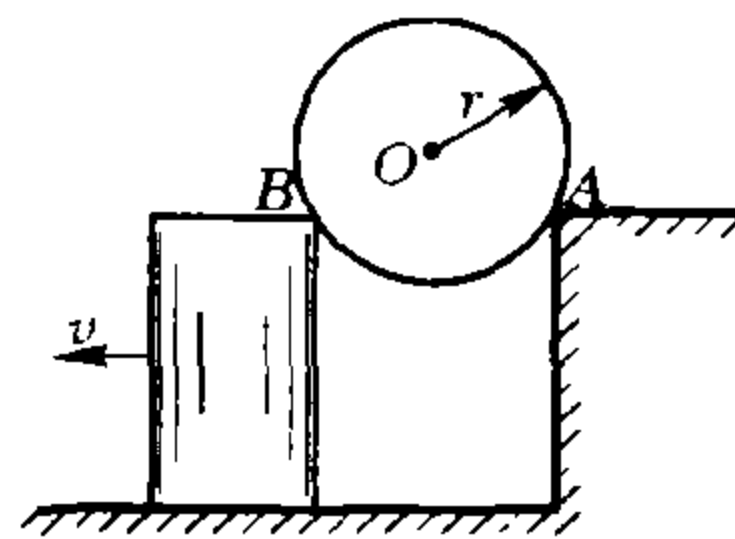


图 10-23

9. 一对绕固定水平轴 O 和 O' 同步转动的凸轮, 使传送装置的水平平板发生运动, 如图 10-24 所示. 问凸轮以多大角速度转动时, 放在平板上的零件开始移动? 当凸轮按顺时针方向转动的情况下, 零件将向什么方向移动? 零件与平板之间的动摩擦因数为 μ . 凸轮半径为 r .



图 10-24

10. 用手握着一绳端在水平桌面上做半径为 r 的匀速圆周运动, 圆心为 O , 绳长为 L , 质量可以忽略, 绳的另一端系着一个质量为 m 的小球, 恰好也沿着一个以 O 点为圆心的大圆在桌面上运动, 小球和桌面之间有摩擦, 如图 10-25 所示. 求:

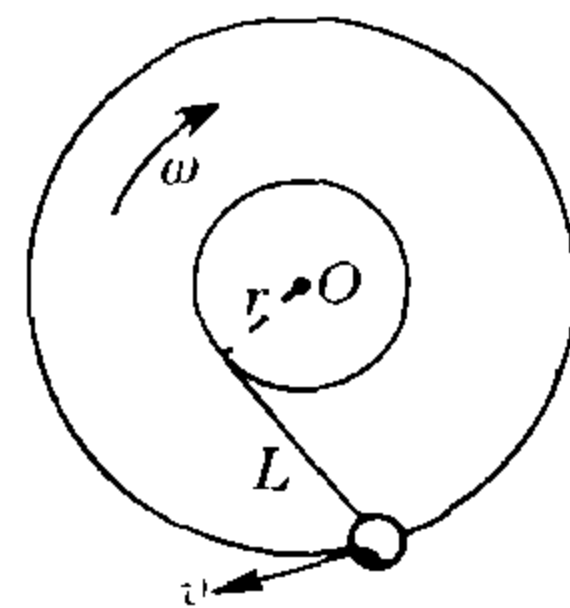


图 10-25

(1) 手对细绳做功的功率 P .

(2) 小球与桌面之间的动摩擦因数 μ .

11. 一个半径 $r=10\text{ cm}$ 的金属小圆环, 从高度 $h=20\text{ cm}$ 处掉到桌上, 如图 10-26 所示, 此小圆环在空气中绕其中心轴旋转, 轴在竖直方向, 角速度 $\omega_0=21\text{ rad/s}$. 圆环与桌面的碰撞为非弹性的, 且碰撞时间很短. 小圆环与桌面间摩擦因数 $\mu=0.3$, 求小圆环与桌面接触到旋转停止所转的圈数. (取 $g=10\text{ m/s}^2$)

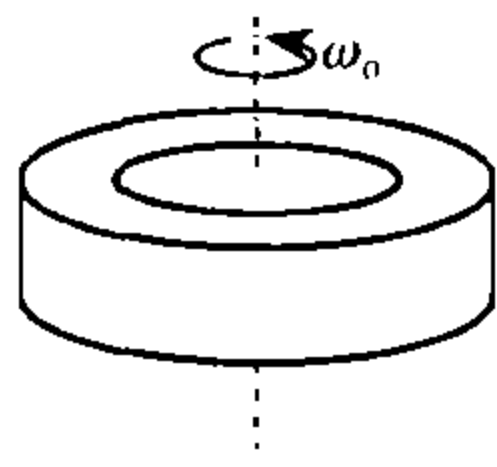


图 10-26

12. 有两个相同的单摆, 把一个拴在另一个的下面, 使它们各在一个水平面内做匀速圆周运动, 设两条摆线(长 L)与竖直线所成的夹角都很小. 已知在运动过程中两条摆线一直保持在同一平面内, 求此平面转动的角速度, 以及两质点轨道半径之比.

13. 半径为 R 的水平圆台, 可绕通过圆心 O 的竖直光滑细轴 CC' 转动, 如图 10-27 所示, 圆台上沿相互垂直的两个半径方向刻有槽, 质量为 m_A 的物体 A 放在一个槽内, 物体 A 与槽底间的静摩擦因数为 μ_0 , 质量为 m_B 的物体 B 放在另一槽内, 此槽是光滑的. AB 间用一长为 l ($l < R$) 且不可伸长的轻绳绕过细轴相连. 试求当圆台做匀角速率转动且 A, B 两物体相对圆台不动时, 转动角速度 ω 和物体 A 到圆心的距离 x 所应满足的条件. (设此时物体 A 与槽的侧面之间没有作用力)

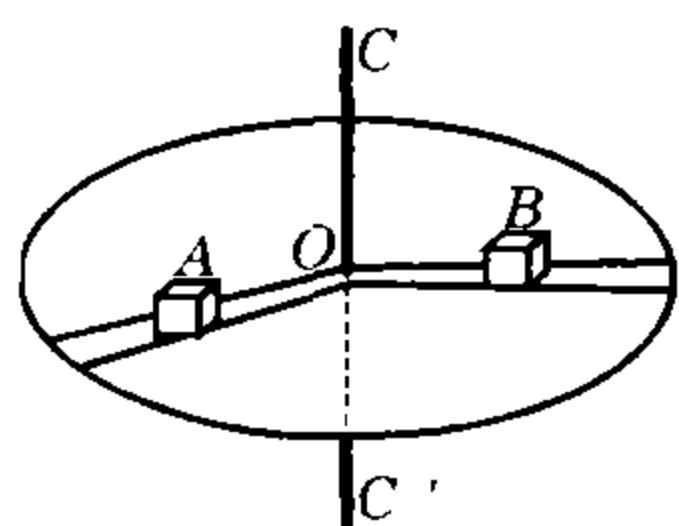


图 10-27

14. 质量为 M 、半径为 R 的光滑匀质半球, 静止在光滑水平面上, 在球顶有一质量为 m 的质点, 由静止沿球面下滑, 求 m 离开 M 以前的轨迹方程和 m 绕球心 O 的角速度.

15. 轮船以等速率 v 沿赤道向东航行, 试计算, 由此使船上物体重量产生的相对误差, 地球自转角速度为 ω_0 .

16. 半径为 $R=0.5\text{ m}$ 的空心球绕本身的竖直直径旋转, 如图 10-28 所示, 角速度为 $\omega=5\text{ rad/s}$. 在空心球内高度为 $R/2$ 处有一小木块同球一起旋转, g 取 10 m/s^2 . 求:

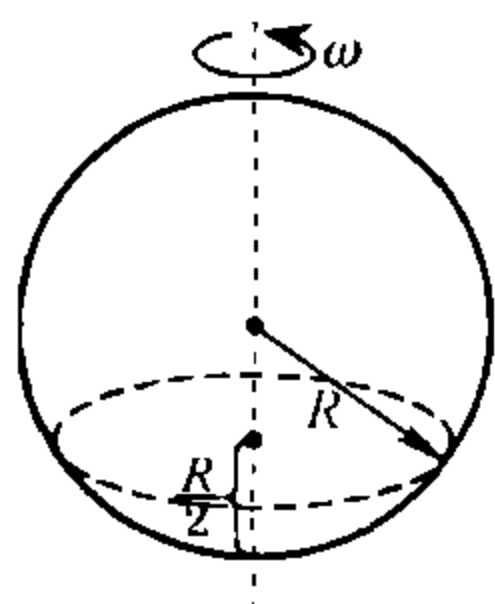


图 10-28

(1) 实现这一情况所需的最小摩擦因数为多少?

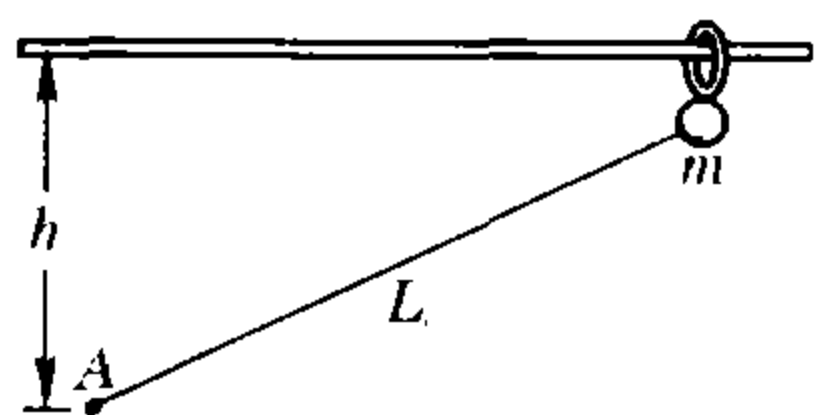


图 10-29

(2) 求 $\omega=8\text{ rad/s}$ 时实现这一情况的条件.

17. 一根不可伸长的轻绳, 穿上一粒质量为 m 的小珠子, 绳的一端固定在 A 点, 另一端系在轻环上, 环可以沿水平杆无摩擦自由滑动, 如图 10-29 所示. 开始珠子被维持在轻环旁边. 绳是直的, 但未被拉紧, 绳子长度为 L_0 , A 点到杆的距离为 h , 绳能承受最大张力为 T_0 . 试求当绳子被拉断时珠子的速度. (摩擦不计)

参考答案

1. 设第一根线上拉力为 T_1 , 第二根线上拉力为 T_2 , 在竖直方向有

$$T_1 \cdot \cos \alpha = 2mg, \quad (1)$$

$$T_2 \cdot \cos \beta = mg. \quad (2)$$

在水平方向有

$$mg \tan \beta (\sin \alpha + \sin \beta), \quad (3)$$

$$T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = m\omega^2 \sin \alpha. \quad (4)$$

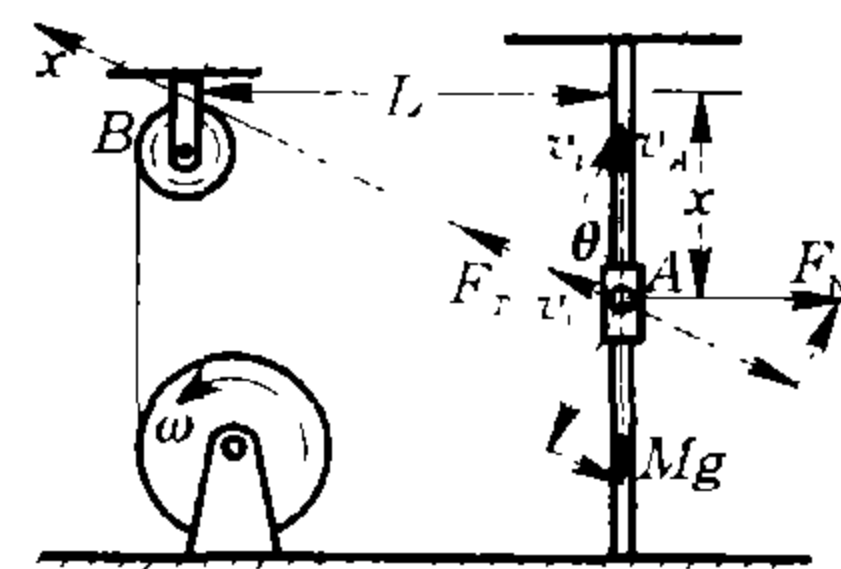
由此四式解得

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{l\omega^2}{2g} \cdot \sin \alpha > 0,$$

即

$$\tan \beta > \tan \alpha, \beta > \alpha.$$

2. 套管 A 受重力 Mg 、竖直杆对套管的支持力 F_N 、绳子拉力 F_T ; 滑块沿导轨向上的运动速度 v_A 可视作沿绳向滑轮 B 的法向速度 v_0 及以滑轮 B 为中心转动的切向速度 v_t 的合成 $v_t = v_0 \tan \theta$, 其中 θ 为对应于 x , 绳与竖杆的夹角.



图答 10-1

以 B 点为中心转动的分运动的向心加速度由沿法向的合力产生. 如图答 10-1 所示, 取 AB 方向为 x 轴正方向建立直角坐标系, 并按坐标方向正交分解套管所受各力, 则由牛顿第二定律, 在 x 方向(法向)有

$$F_T - F_N \sin \theta - Mg \cos \theta = M \frac{v_t^2}{\sqrt{x^2 + L^2}}. \quad (1)$$

又由于套管实际运动方向沿竖直杆, 故在水平方向满足

$$F_T \sin \theta = F_N. \quad (2)$$

将②式代入①式可得

$$F_T \cdot \cos^2 \theta = Mg \cos \theta + M \frac{\left(v_0 \frac{L}{x}\right)^2}{\sqrt{x^2 + L^2}}.$$

将 $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}}$ 代入上式, 整理后即可得到

F_T 与 x 的关系为

$$F_T = M(x^3 g + L^2 v_0^2) \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{x^4}.$$

3. 橡皮圈竖直悬挂时, 橡皮圈的张力从上到下线性变化, 最上面张力设为 T_A , $T_A = \frac{mg}{2}$, 最下面张力为

零,则平均张力为 $mg/4$;橡皮圈水平旋转时,在圈上取一微元 B ,如图答 10-2 所示,则有 $\Delta m = \frac{m}{n}$, $n \rightarrow \infty$,微元

所对圆心角 $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n} \rightarrow 0$,两端所受拉力设为 T' ,于是有

$$2T' \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{h}{\pi} \omega^2,$$

注意到当 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 时, $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$, $T' = \frac{mh}{2\pi^2} \omega^2$, 又因两种情

况下橡皮圈形变量相同,故 $T' = mg/4$,得 $\omega = \pi \sqrt{\frac{g}{2h}}$.

4. 小物块切向加速度的水平分量为

$$a_{tx} = g \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

则切向水平力大小

$$F_{tx} = mg \sin \alpha \cos \alpha,$$

此力的反作用力为圆柱面所受沿柱面且方向水平的力,其对轴产生的力矩为使柱面绕中心轴转动的力矩

$$M = mg \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot r = \frac{1}{2} mgr \sin 2\alpha.$$

5. 如图答 10-3 所示,设 a 球恰要离地时两绳夹角为 θ ,绳上张力恰与 a 球重力相等, b 球从静止摆到此位置过程中机械能守恒,有

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgl \cos \theta, \quad (1)$$

又,此时对 b 球的动力学方程为

$$mg - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l}, \quad (2)$$

由①、②两方程有

$$mg - mg \cos \theta = 2mg \cos \theta, \quad 3 \cos \theta = 1.$$

所以 $\theta = \arccos \frac{1}{3}$.

6. 如图答 10-4 所示,未脱离时,有

$$a_M = a_t \sin \alpha - a_n \cos \alpha,$$

α 为杆与水平线夹角,恰要

脱离时, $a_M = 0$, $\frac{a_t}{a_n} = \cot \alpha$,

小重物 A 只受重力,小重物 A 的水平速度 v_x 与物体 B 的速度 u 相同,即

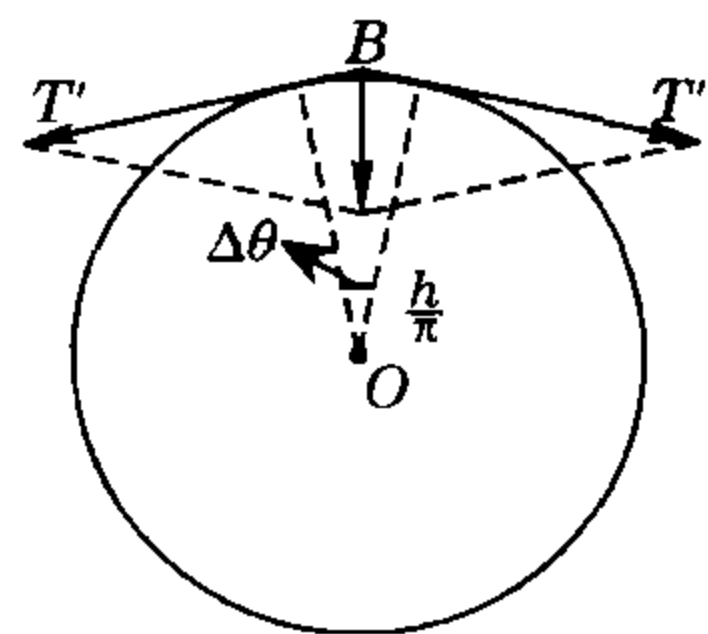
$v \sin \alpha = u$. 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时,有

$u = \frac{1}{2} v$, $\frac{a_t}{a_n} = \frac{g \cos \alpha}{v^2/l} = \cot \alpha$, 即

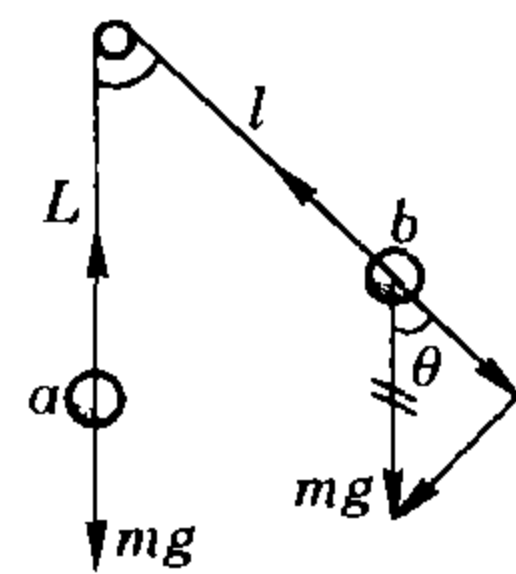
$$\frac{v^2}{gl} = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

由系统机械能守恒关系有

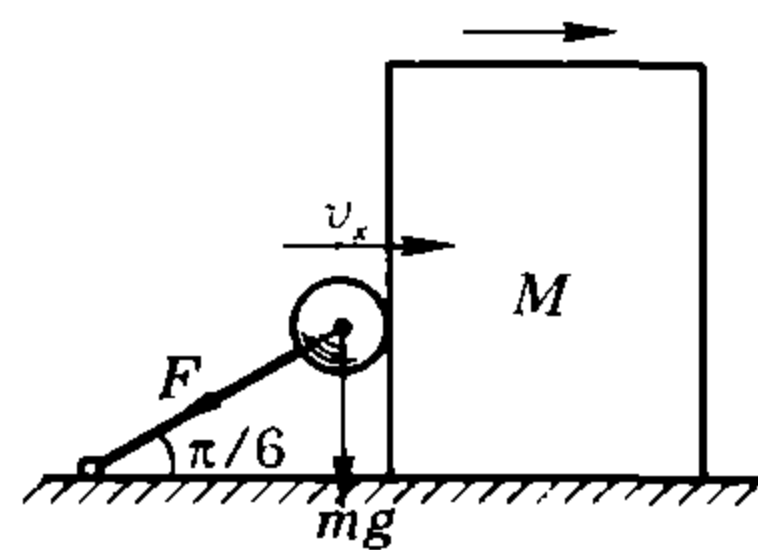
$$mgl \left(1 - \sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mu^2, \quad (2)$$



图答 10-2



图答 10-3



图答 10-4

联立①、②两式可得

$$M = 4m. \quad (3)$$

再将③式代入②式即得 $v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$; $u = \frac{1}{2} v = \frac{1}{4} \sqrt{2gl}$.

7. 先求出当 A 球对墙恰无作用力时,杆与竖直方向所成临界角 φ . 设此时 B 球速度为 v_0 ,由机械能守恒,得

$$mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} mv_0^2,$$

由牛顿第二定律,得

$$mg \cos \varphi = m \frac{v_0^2}{l},$$

由以上两式求得 $\varphi = \arccos \frac{2}{3}$,

那么,当杆与竖直方向所成角 $\alpha \geq \varphi$ 时, A 球对墙无作用力,而当 $\alpha < \varphi$ 时,如图答 10-5 所示, B 球受到重力与杆的支持力 F_N ,有

$$mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} mv^2,$$

$$mg \cos \alpha - F_N = m \frac{v^2}{l},$$

由此二式解得

$$F_N = mg(3 \cos \alpha - 2),$$

那么球 A 对墙的作用力 F_T 是支持力 F_N 的反作用力的水平分量,即为

$$F_T = mg(3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha.$$

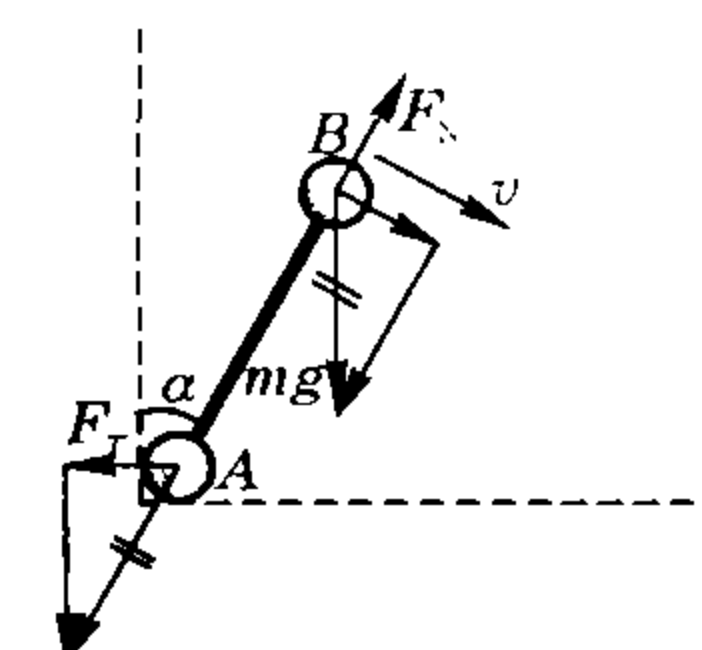
8. 由几何关系知两支点距离为 $\sqrt{2}r$ 时, $\angle AOB = \pi/2$,此时圆木受力如图答 10-6 所示:两支架支持力 F_{NA} 、 F_{NB} 及重力 mg ;再看 O 点速度: O 点绕 A 点转动,圆木与 B 点接触,故 O 点与 B 点具有相同的法向速度 $\frac{\sqrt{2}}{2}v$,而这正是 O 对 A

点转动的线速度,于是由牛顿第二定律,有

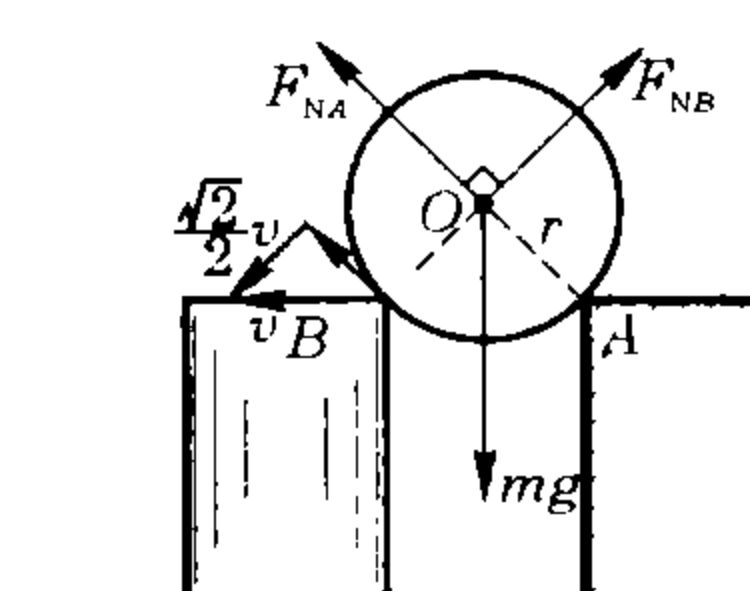
$$\frac{\sqrt{2}}{2} mg - F_{NA} = m \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}v\right)^2}{r} = \frac{mv^2}{2r},$$

求得 $F_{NA} = m \left(\frac{\sqrt{2}}{2}g - \frac{v^2}{2r}\right)$ ($v^2 \leq \sqrt{2}gr$, 否则圆木已脱离).

9. 以具有加速度 $\omega^2 r$ 的板为参考系,零件处于平衡,其所受力有重力 mg ,板约束力(摩擦力与支持力合力)及惯性力 $m\omega^2 r$,其中静摩擦力达最大时板约束力方向与竖直方向成摩擦角 $\varphi = \arctan \mu$,三力应构成闭合三角形,如图答 10-7 甲所示,惯性力与约束力垂直的情况所对应的 ω 是零件开始滑动的临界值,故有



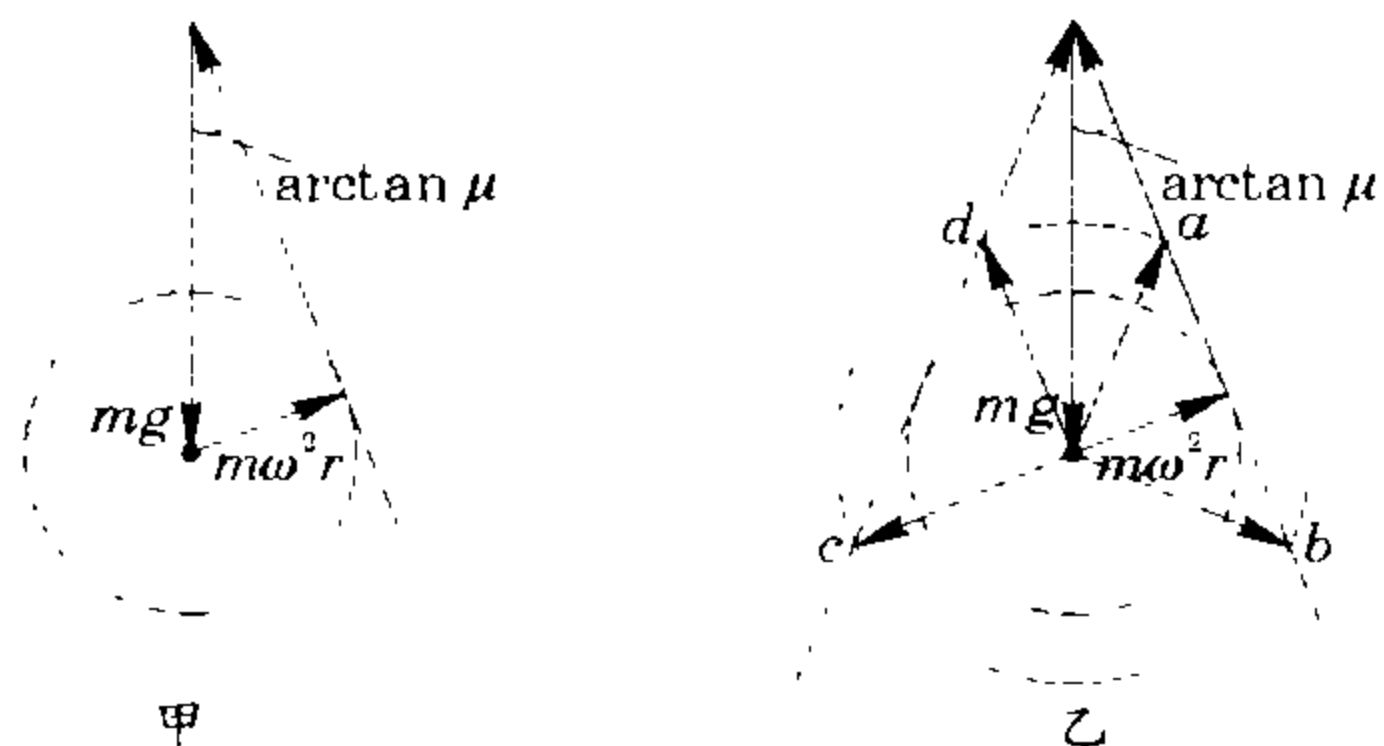
图答 10-5



图答 10-6

$$\sin \varphi = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \omega_{\min} = \sqrt{\frac{\mu g}{r\sqrt{1+\mu^2}}}$$

若凸轮顺时针转动、角速度大于 ω_{\min} , 惯性力大小以图答 10-7 乙所示的外圆半径, 随着所受惯性力方向变化, 矢量端点从 a 点到 b 点时, 零件向右滑, 从 c 点到 d 点时零件向左滑。



图答 10-7

10. 如图答 10-8 所示, (1) 设小球运动轨道圆半径为 R , 则 $R = \sqrt{r^2 + L^2}$, 设绳上张力方向与小球线速度方向成 θ 角, 则功率 $P = Fv \cos \theta$

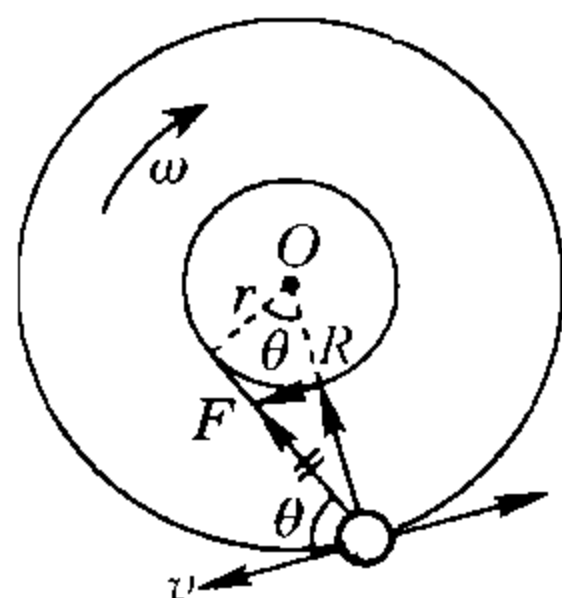
$= F\omega r$, 由牛顿第二定律, 得

$$F \sin \theta = m\omega^2 \sqrt{r^2 + L^2},$$

$$\text{又 } \sin \theta = \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}},$$

$$\text{则 } P = \frac{m\omega^2 (r^2 + L^2)}{L} \omega r$$

$$= \frac{m\omega^3 (r^2 + L^2) r}{L}.$$



图答 10-8

(2) 又由于球做匀速率圆周运动在切向有

$$F \cos \theta = \mu mg,$$

$$\text{则 } \mu = \frac{F \cos \theta}{mg} = \frac{m\omega^2 \sqrt{r^2 + L^2}}{mg} \cdot \frac{r}{L} = \frac{\omega^2 r \sqrt{r^2 + L^2}}{gL}.$$

11. 小圆环刚着地的瞬时竖直速度为 $v_y = \sqrt{2gh} = 2 \text{ m/s}$, 绕轴转动线速度为 $v_t = \omega_0 r = 2.1 \text{ m/s}$, 着地后, 由于桌面弹力及摩擦力作用, 先在极短时间 Δt 内使竖直速度变为零, 同时绕轴转动速度减为 ω , 而后转动速度亦减为零. 根据动量定理, 在 Δt 时间内, 竖直方向有

$$F_N \cdot \Delta t = mv_y = m \sqrt{2gh},$$

$$\text{在切向有 } \mu F_N \cdot \Delta t = m(\omega_0 - \omega)r,$$

$$\text{得 } \omega = \omega_0 - \frac{\mu \sqrt{2gh}}{r} = 15 \text{ rad/s}.$$

此后摩擦力减小为 μmg , 小圆环转 n 圈停止, 由动能定理, 得

$$\mu mg \cdot n \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} m(\omega r)^2, \quad n = \frac{\omega^2 r}{4\pi\mu g} \approx 0.6.$$

12. 两线两球在竖直面内的态势可以有图答 10-9 甲与乙两种可能. 甲种情况下, 设上、下两球圆轨道半径依次为 r, R , 绳上张力依次为 F_1, F_2 , 有

$$mg \tan \beta = mR\omega^2,$$

$$F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta = m r \omega^2.$$

$$\text{其中 } F_1 = \frac{2mg}{\cos \alpha}, F_2 = \frac{mg}{\cos \beta},$$

$$\text{可得 } \frac{\tan \beta}{2 \tan \alpha - \tan \beta} = \frac{R}{r} = \frac{L(\sin \alpha + \sin \beta)}{L \sin \alpha},$$

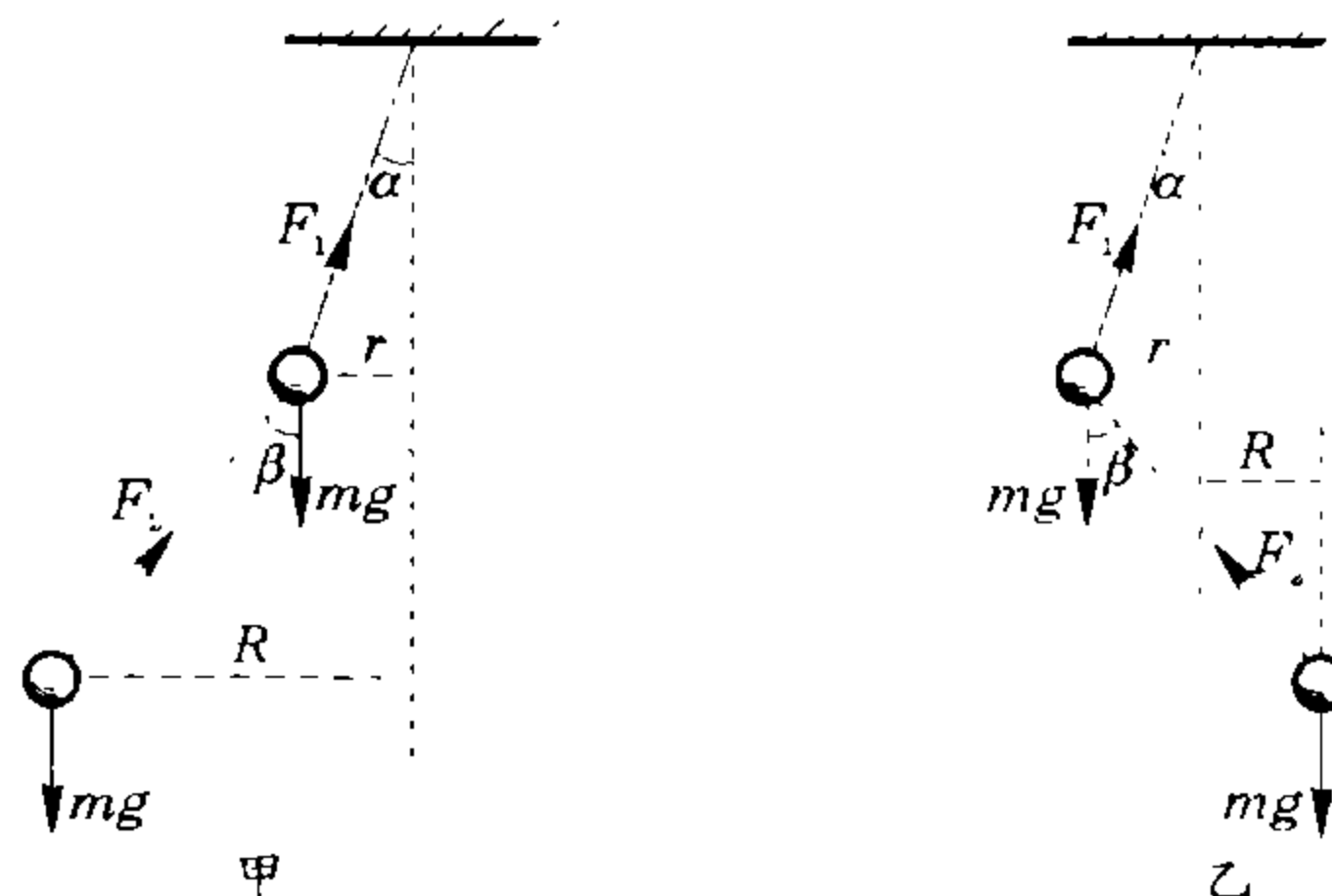
在 α, β 小角度的条件下, 有 $\sin x \approx x \approx \tan x$,

$$\text{则 } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{R}{r} = \sqrt{2} + 1, \omega = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{L}};$$

$$\text{乙种情况下有 } \begin{cases} mg \tan \beta = mR\omega^2, \\ F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = m r \omega^2. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } \frac{\tan \beta}{2 \tan \alpha + \tan \beta} = \frac{R}{r} = \frac{L(\sin \beta - \sin \alpha)}{L \sin \alpha},$$

$$\text{于是有 } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{R}{r} = \sqrt{2} - 1, \omega = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{L}}.$$



图答 10-9

13. 如图答 10-10 所示, 设 $OA = x$, 绳上张力为 F , 当 A、B 物体相对于转盘静止且恰无摩擦时, 物体 A、B 的动力学方程为

$$F = m_A \omega^2 x, F = m_B \omega^2 (l - x).$$

$$x = \frac{m_B}{m_A + m_B} l; \text{ 当物体 A、B 相}$$

对于转盘静止且物体 A 恰未做远离轴心移动时, A、B 物体的动力学方程为

$$F + \mu_0 m_A g = m_A \omega^2 x, F = m_B \omega^2 (l - x).$$

$$\text{由此得 } \omega = \sqrt{\frac{\mu_0 m_A g}{(m_A + m_B)x - m_B l}}, x > \frac{m_B}{m_A + m_B} l.$$

当物体 A、B 相对于转盘静止且物体 A 恰未做向轴心移动时, 物体 A、B 的动力学方程为

$$F - \mu_0 m_A g = m_A \omega^2 x; F = m_B \omega^2 (l - x).$$

$$\text{可得 } \omega = \sqrt{\frac{\mu_0 m_A g}{m_B l - (m_A + m_B)x}}, x < \frac{m_B}{m_A + m_B} l.$$

综上所述:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } l \geq x > \frac{m_B}{m_A + m_B} l \text{ 时, } \omega \leq \sqrt{\frac{\mu_0 m_A g}{(m_A + m_B)x - m_B l}};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } x = \frac{m_B}{m_A + m_B} l \text{ 时, } \omega \text{ 可任取};$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 0 \leq x < \frac{m_B}{m_A + m_B} l \text{ 时, } \omega \leq \sqrt{\frac{\mu_0 m_A g}{m_B l - (m_A + m_B)x}}.$$

14. 确定 m 沿球面下滑的轨迹: 在如图答 10-11 所示坐标系中, 沿 x 方向系统动量守恒, 有

$$0 = Mx_M + m(R \sin \theta + x_M),$$

式中 x_M 为半球位移, θ 是 m 在半球上滑过的圆心角,

由此式得

$$x_M = -\frac{mR\sin\theta}{M+m},$$

则 m 的坐标

$$\begin{cases} x = R\sin\theta + x_M = \frac{MR\sin\theta}{M+m} \\ y = R\cos\theta. \end{cases}$$

此即 m 轨迹的参数方程, 消去参数 θ 得其在直角坐标系中的方程为

$$\left(\frac{M+m}{MR}x\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1,$$

可知 m 在球面上运动时轨迹为椭圆. 设对应于 θ 角, m 绕球心 O 的角速度为 ω , 其速度

$$v_x = R\omega\cos\theta + V_M, v_y = R\omega\sin\theta.$$

而半球速度根据 x 方向动量守恒应为

$$V_M = -\frac{m}{M}v_x = -\frac{m}{M}(R\omega\cos\theta + V_M),$$

$$V_M = -\frac{m}{M+m}R\omega\cos\theta,$$

所以 $v_x = \frac{M}{M+m}R\omega\cos\theta$, 由系统机械能守恒关系, 有

$$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2),$$

将 v_x, v_y, V_M 代入整理得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(M+m)(1 - \cos\theta)}{R(M+m\sin^2\theta)}}.$$

15. 设地球半径为 R , 自转角速度为 ω , 赤道上重力加速度为 g , 对地球参考系, 船静止在赤道上时货物重即支持面支持力

$$mg = F_{引} - mR\omega^2, \quad (1)$$

当船以速率 v 沿赤道向东航行时, 货物受地心引力 $F_{引}$ 、支持力 F 、惯性力 $F_i = -mR\omega^2$ 及科里奥利力 $F_k = -2m\omega v$, 有

$$F_{引} + F_i + F_k - F = m\frac{v^2}{R}, \quad (2)$$

比较①、②两式知由于速率 v 引起货物重量相差

$$\Delta = F_{引} - mR\omega^2 - F = mg - F = m\frac{v^2}{R} + 2m\omega v,$$

相对误差为

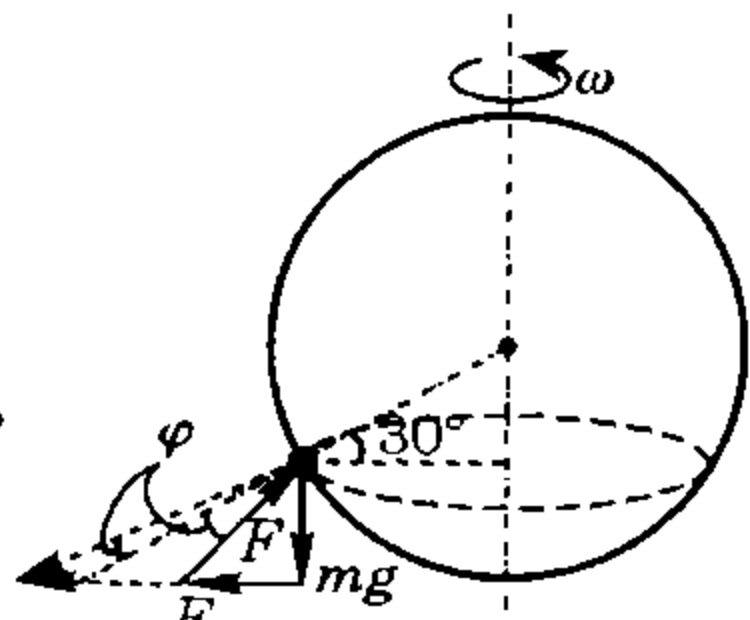
$$\delta = \frac{m\frac{v^2}{R} + 2m\omega v}{mg} = \frac{v^2 + 2vR\omega}{gR} \approx \frac{2v\omega}{g}.$$

16. (1) 以球为参考系, 小木块受力情况如图答 10-12 所示, 其中惯性力大小 $F_i = mR\omega^2 \cos 30^\circ$, 球壳约束力 F 与法向成角 $\varphi \leq \arctan \mu$, 由图得

$$mR\omega^2 \cos 30^\circ = mg \cot(\varphi + 30^\circ),$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{\cot(\varphi + 30^\circ)}{\cos 30^\circ}$$

$$\geq \frac{g}{R} \cdot \frac{\cot(\arctan \mu + 30^\circ)}{\cos 30^\circ},$$



图答 10-12

代入数据得 $\mu \geq \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.23$.

(2) 若角速度增大, F_i 增大, 当 $mR\omega_0^2 \cos 30^\circ = mg \cot 30^\circ$, 即 $\omega_0 = 2\sqrt{10}$ rad/s 时, 木块不受摩擦力, 当 $\omega > \omega_0$ 时, 摩擦力将沿切线向下, 于是有

$$mR\omega^2 \cos 30^\circ = mg \cot(30^\circ - \varphi),$$

将 $\omega = 8$ rad/s 代入得 $\mu \geq \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.18$.

17. 在图答 10-13 甲所示坐标中, 由方程

$$x^2 + (y-h)^2 = (L_0 - y)^2,$$

得珠子运动轨迹方程为

$$y = \frac{h+L_0}{2} - \frac{x^2}{2(L_0-h)}.$$

这是开口向上、顶点为 $(0, \frac{h+L_0}{2})$ 的抛物线; 设当珠子坐标为 (x, y) 时绳上张力达到 T_0 , 此时珠子速率 $v^2 = 2gy$, 由于绳张力不做功, 两侧绳拉力合力与 v 垂直, 大小为 $T = 2T_0 \sin \theta$, θ 为速度方向与竖直方向夹角. 对珠子的动力学方程为

$$2T_0 \sin \theta - mg \sin \theta = m \frac{2gy}{\rho}, \quad (1)$$

ρ 为此处绳的曲率半径. 利用运动学方法可求得抛物线的曲率半径: 如图答 10-13 乙所示, 将珠子的运动等效为从高 $\frac{h+L_0}{2}$ 处水平抛出、射程为 $\sqrt{L_0^2 - h^2}$ 的平抛运动, 则水平速度

$$v_0 = \frac{\sqrt{L_0^2 - h^2}}{\sqrt{\frac{L_0+h}{g}}} = \sqrt{g(L_0 - h)},$$

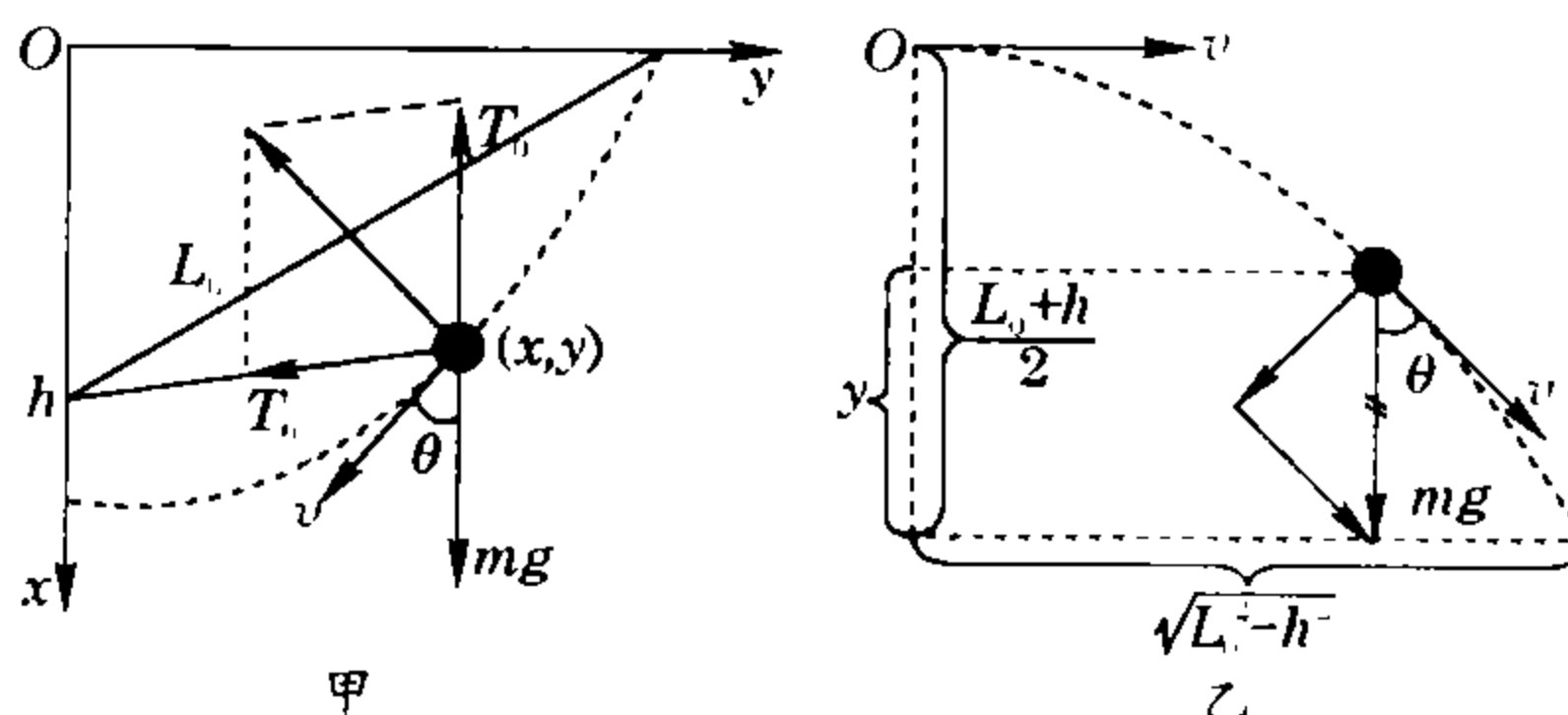
对应于 (x, y) 处, 有 $g \sin \theta = \frac{v^2}{\rho}$, 而

$$v^2 = v_0^2 + v_y^2 = g(L_0 - h) + 2g\left(\frac{L_0+h}{2} - y\right),$$

于是得 $\rho = \frac{2(L_0 - y)}{\sin \theta}$, 代入①式得

$$2T_0 - mg = m \frac{2gy}{2(L_0 - y)}, y = \frac{L_0(2T_0 - mg)}{2T_0},$$

那么珠子速度 $v = \sqrt{\frac{gL_0(2T_0 - mg)}{T_0}}$.



图答 10-13

竞赛辅导

专题 11 天体运动种种

沈 晨

教你一手到

卫星、行星、恒星、星团、星系、星系团、超星系团，各种不同层次的天体世界由小到大组成了整个宇宙，宇宙是那么的广袤浩瀚，深邃奇妙，然而，它们又是有序的，一些基本的规律支配着天体星球的种种行为，开普勒三定律描述了星体的运动学规律，牛顿运动定律及万有引力定律更揭示出天体运动的动力学原因。

一、牛顿的草图

牛顿在说明人造地球卫星原理时画的草图如图 11-1 所示，在离地面一定高度水平抛出一物体，当初速度较小时，物体沿椭圆曲线 a 落地；当初速度较大时，物体沿椭圆曲线 a' 落地，落地点较远；当初速度达到第一宇宙速度时，物体沿圆轨道 b 运行；当初速度大于此值时，物体沿椭圆曲线 c 绕地运行；当初速度等于第二宇宙速度时，物体沿抛物线轨道 d 离开地球不再回来；当初速度大于此速度时，物体沿双曲线 e 离开地球。

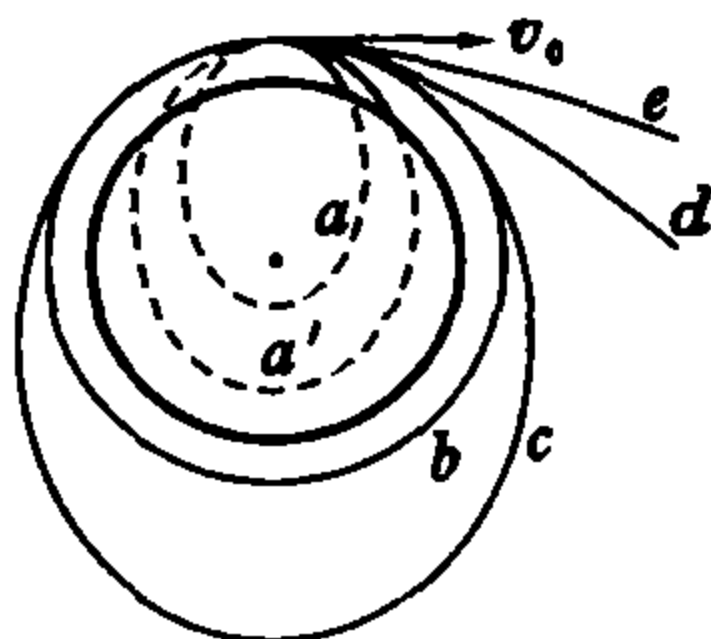


图 11-1

物体在有心力场中的运动轨迹是圆锥曲线，地球的中心是曲线的焦点，图 11-1 所示的几条轨道中，圆轨道 b 是一个临界轨道，在 b 以内的椭圆（如 a ），抛出点是椭圆的远地点，在 b 以外的椭圆轨道（如 c ），抛出点是椭圆的近地点。抛物线轨道 d 又是一个临界轨道，在 d 以内的轨道（如 a 、 b 、 c ）是封闭的椭圆，在 d 以外的轨道（如 e ）是不封闭的双曲线。牛顿的这张草图不仅对于任何一个绕地球运行的卫星是适用的，而且对于任何一个绕中心天体运行的星体都是适用的。

二、守恒定律

支配天体运动最基本的规律当然是万有引力定律、牛顿运动定律和开普勒定律，除此之外，守恒定律也是十分重要的。

1. 机械能守恒

物体只在引力作用下绕中心天体运行，其机械能

守恒。引力是保守力，引力场是势场，在平方反比引力场中，质点的引力势能取决于其在有心力场中的位置。

如图 11-2 所示，在质量为 M 的中心天体的引力场中，一质量为 m 的物体由点 A_1 （距中心 r_1 ）经点 A_2 、 A_3 ……运动到点 A_n （距中心 r_n ）， M 对它的引力做负功，其大小是



图 11-2

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{GMm}{r_i^2} (r_{i+1} - r_i) \\ &= GMm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(r_{i+1} - r_i)}{r_i \cdot r_{i+1}} \\ &= GMm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) \\ &= GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n} \right). \end{aligned}$$

如果物体从点 A_1 运动到无限远，即 $r_n = \infty$ ，引力做负功 $W = \frac{GMm}{r_1}$ 。可见，令无穷远处为零引力势能位置，物体在距中心天体 r 处的势能是 $E_p = -\frac{GMm}{r}$ 。

在上述引力场中，机械能守恒的表达式是

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{恒量}.$$

天体运动取何种圆锥曲线取决于其总机械能 E 。以地球卫星为例，当 $E=0$ 时地球卫星的轨迹为抛物线，此时地球卫星到达离地球无限远处时速度变为零，即刚好能脱离地心引力的束缚，设地球半径为 R ，卫星在地球表面发射时的初速度用 v_d 表示，有

$$\frac{1}{2}mv_d^2 - G\frac{Mm}{R} = 0, v_d = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

此即卫星脱离地心引力束缚所需最小初速度——第二宇宙速度；当 $E < 0$ 时地球卫星的轨迹为椭圆，其中特例是圆，这时有

$$v_b = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{v_d}{\sqrt{2}},$$

此即第一宇宙速度——环绕地球运动的最小初速度，而当 $E > 0$ 时，地球卫星沿双曲线脱离地心引力，在离

地球无限远时动能仍不为零,这种轨道要求初始时速度满足

$$v_r > \frac{2GM}{R}.$$

牛顿曾证明:一个均匀球壳质量 M 对球壳内物质的万有引力为零,如图 11-3 所示,球壳半径为 R ,壳内任一位置放质量为 m 的质点,通过质点 m 作两条夹角极小的弦,作为两个顶点相同的圆锥面的母线,两个圆锥面对质点 m 张开的立体角 $\Delta\Omega$ (在 $\Delta\Omega \rightarrow 0$ 时)相同,两个圆锥面与半径为 R 的球面相截所得球壳面积分别是 ΔS_1 和 ΔS_2 ,两面元法线各沿 OA 、 OB 方向,两面元的质量各为 $\sigma \cdot \Delta S_1$ 和 $\sigma \cdot \Delta S_2$,其中 σ 为球壳质量面密度, $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$,两面元极小而可看做质点,设两面元到 m 的距离分别为 r_1 和 r_2 ,那么有

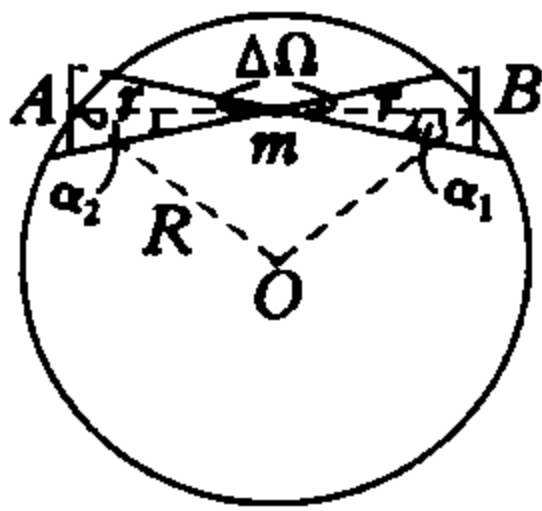


图 11-3

$$F_1 = G \frac{\sigma \cdot \Delta S_1 \cdot m}{r_1^2}, F_2 = G \frac{\sigma \cdot \Delta S_2 \cdot m}{r_2^2},$$

由几何关系知,两个面元 ΔS_1 、 ΔS_2 在垂直 r_1 、 r_2 方向的投影面积相等,即

$$\Delta S_1 \cdot \cos \alpha_1 = r_1^2 \cdot \Delta\Omega, \Delta S_2 \cdot \cos \alpha_2 = r_2^2 \cdot \Delta\Omega,$$

而 $\alpha_1 = \alpha_2$,故有 $F_1 = F_2$.

此二力方向相反,合力为零,对球面上其他质量对 m 的力均如此,故整个球壳对球壳内物质的万有引力为零.对于一个质量均匀半径为 R 的实心球,在距球心 r ($< R$)处质点只受半径为 r 的球内质量的万有引力,而 r 以外球壳(即以 R 为外径、 r 为内径的球壳)则对质点无引力的作用.若均匀球质量为 M ,则距球心 r 处所置质点受到引力大小为

$$F = G \frac{Mm}{R^3} r,$$

显见引力 F 与 r 成正比,质点在距球心 r ($< R$)处具有的引力势能可由引力功求得,即

$$G \frac{Mm}{R^3} \cdot \frac{R+r}{2} \cdot (R-r) = \frac{GMm}{R} - E_p,$$

$$E_p = G \frac{Mm}{2R^3} (r^2 - 3R^2).$$

2. 动量守恒

两个天体相互作用过程中,如果其他星系离它们很遥远,对它们的作用可以忽略的话,这两个天体的总动量守恒,两个天体从相距很远到相互作用直到远离,它们的始末速度满足弹性碰撞的方程组,那么在它们相互作用的前后相对速度遵守“反射定律”,如果是一维方向上的“弹性碰撞”,则相对速度等值反向,如同我们在专题 9 中讨论过的.若一个飞船向外喷气或抛射

物体,则系统的动量守恒而机械能不守恒.

3. 角动量守恒

在描述物体围绕一定中心的转动情况时,我们常引入角动量的概念,它与描述做平动的物体的运动状态量——(线)动量 $p = mv$ 相当.如图 11-4 所示,质量为 m 的质点做半径为 r 的圆周运动,其位置可用从圆心 O 到质点的有向线段 r 来表示,矢量 r 称位置矢量,或称矢径.做圆周运动的质点,矢径大小等于轨迹圆半径,方向从圆心指向质点所在位置.质点的线速度矢量为 v ,方向沿切线方向,则质点的(线)动量为 $p = mv$,方向总是与矢径 r 垂直.

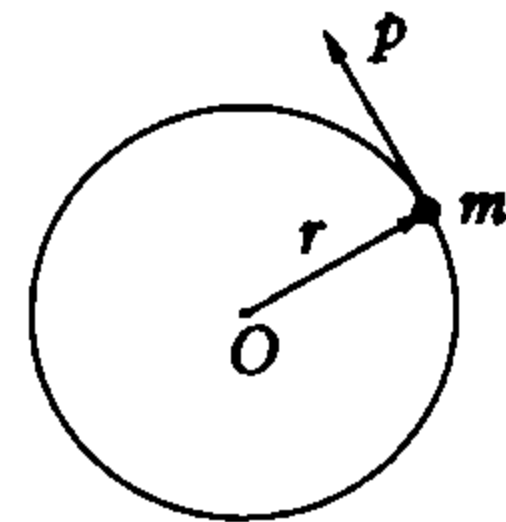


图 11-4

我们定义质点动量大小 mv 与矢径大小 r 的乘积为质点对定点(圆心) O 的角动量,即

$$L = pr.$$

当 p 与 r 方向不垂直而成角度 θ 时,例如行星绕日在椭圆轨道运动(除经近日点或远日点)时,如图 11-5 所示,行星在公转轨道任意位置 A 时,动量 p 与矢径 r 成 θ 角,此时,行星对 O 点的角动量大小为

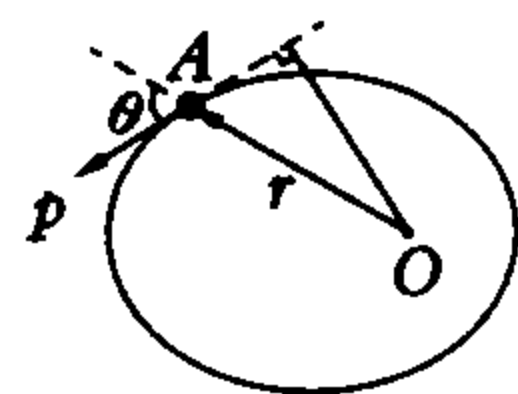


图 11-5

$$L = pr \sin \theta.$$

即等于动量大小与 O 点到动量矢量 p 的垂直距离的乘积.角动量也是矢量,方向垂直于矢径 r 与动量 p 所在平面,遵守右手螺旋定则,角动量定义的矢量式写作

$$L = r \times p.$$

它表示角动量矢量是动量与矢径两矢量的矢积.我们看到角动量的表达式与力矩的表达式 $M = FL \sin \theta$ (或 $M = r \times F$) 是置换对称的,故角动量也常称做动量矩.

若作用在质点上的力对某定点的力矩为零,则质点对该定点的角动量保持不变,这就是质点的角动量守恒定律.物体在受有心力作用而绕着中心天体运动,或几个天体互相绕其系统质心运动时,由于有心力必过力心,对力心的力矩为零,故系统的角动量守恒.即

$$\sum mvr \sin \theta = \text{恒量}.$$

三、常用模型与方法

处理天体运动问题,不仅需要必要的有关天体运动规律的知识,而且需要掌握解决这类问题的有用的模型与方法,常用的有以下几种:

1. 理想化方法

由于天体运行规律相当复杂,所以应根据其实际情况,忽略次要因素,使问题简化,比如宇宙尘埃凝聚成星球时假设它们之间不互相超越,彗星绕日运行时忽略行星对它的引力,飞船着陆时忽略其登陆细节等.这样使实际问题在较理想的情景下进行处理.

2. 轨道极限模型

物体在中心天体的引力作用下做直线运动时,其运动是加速度变化的变速运动,可以将它看做绕中心天体的椭圆轨道运动,将此椭圆轨道短轴取为无限小,即中心天体为力心的有心力作用下物体的直线运动是椭圆运动的极限.

3. 微元方法与矢量方法

天体运动问题的计算要根据具体情况进行等效变换,运用微元法或进行矢量运算,使原本复杂的计算问题得以在初等数学的范围内解决.下面我们列举天体运动的一些典型问题,整合天体运动问题的常用模型与处理方法.

例 1 试推导地球上的第三宇宙速度 v_3 .

分析与解 以多大的初速度 v_3 从地球上发射物体,可以使物体挣脱太阳的引力而逃逸出太阳系?对太阳这个中心天体而言,原处于太阳系中地球轨道位置的物体要离开太阳系所需对太阳而言的“第二宇宙速度”为

$$v_2' = \sqrt{\frac{2GM_s}{R}} = 42.1 \text{ km/s},$$

式中 M_s 是太阳的质量, R 是地球公转轨道半径.这是以日为参考系之速度,而地球对太阳的公转速度为 $v_{地日} = 29.8 \text{ km/s}$;则以地球为参考系,物体要脱离太阳束缚所需速度为 $(v_2' - v_{地日})$,而由能量守恒可知,质量为 m 的物体从地球发射时要满足

$$\frac{1}{2} m v_3^2 - \frac{GM_{地} m}{R_{地}} = \frac{1}{2} m (v_2' - v_{地日})^2,$$

$$\text{则 } v_3 = \sqrt{\frac{2GM_{地}}{R_{地}} + (v_2' - v_{地日})^2} = 16.7 \text{ km/s}.$$

故地球上的第三宇宙速度大小是 16.7 km/s .

例 2 要发射一台探测太阳的探测器,使其与地球具有相同的绕日运动周期,以便发射一年后又将与地球相遇而发回探测资料.由地球发射这样一台探测器,应使其具有多大的绕日速度?

分析与解 如图 11-6 所示,地球绕日运动轨道理想化为以太阳为中心的圆 O ,探测器绕日轨道应设计为近日点接近焦点——太阳的一个椭圆,设发射点为 P .由于探测器与地球具有相同的绕日周期,故椭圆轨道半长轴 a 与日地距离 R 相等(开普勒第三定律),即 $\overline{OP} = R$,可知 P 点为椭圆轨道半短轴 b 的顶点.发射时应使探测器绕行速度沿椭圆上 P 点切线方向(平行于长轴).图 11-6 中, v_p 表示探测器发射时相对太阳的速度, v_0 表示地球公转速度.现在来求探测器的发射速度 v_p .

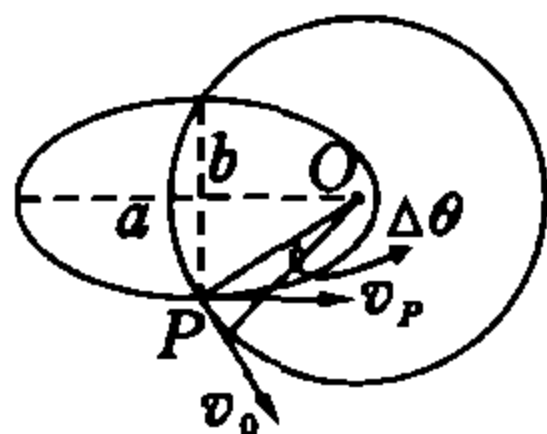


图 11-6

设想从发射经极短的时间 Δt ,此间矢径 \overline{OP} 扫过一个极小的角度 $\Delta\theta$,由于 $\Delta\theta$ 之小,使我们可以将 \overline{OP} 在圆和椭圆上扫过的两个曲边三角形面积近似地以三角形面积公式计算之,并且认为在这极短时间内,探测器速度未及改变,所以有

$$\Delta S_{圆} = \frac{1}{2} v_0 \cdot \Delta t \cdot R, \Delta S_{椭} = \frac{1}{2} v_p \cdot \Delta t \cdot b;$$

又由开普勒第二定律知

$$\Delta S_{圆} = \frac{\pi R^2}{T} \cdot \Delta t; \Delta S_{椭} = \frac{\pi ab}{T} \cdot \Delta t = \frac{\pi Rb}{T} \cdot \Delta t;$$

$$\text{联立求解得 } v_p = v_0 = \frac{2\pi R}{T}.$$

即探测器发射速度应与地球的公转速度的大小相等.

例 3 火箭从地面上以第一宇宙速度竖直向上发射,返回时落回离发射场不远处.空气阻力不计,试估算火箭飞行的时间,地球半径取 $R = 6400 \text{ km}$.

分析与解 火箭向上发射又落回地面,它在地心力场中的运动轨道是以地心为一个焦点、最高点为远地点的椭圆的一部分,如图 11-7 所示.由开普勒第二定律可知,火箭在空中运动时间正比于矢径扫过的面积,由于落地点离发射点不远,可见轨道椭圆很“扁”,其焦点即力心离轨道近地点很近,则物体上升的最高点与地心成为轨道椭圆长轴的两个端点.

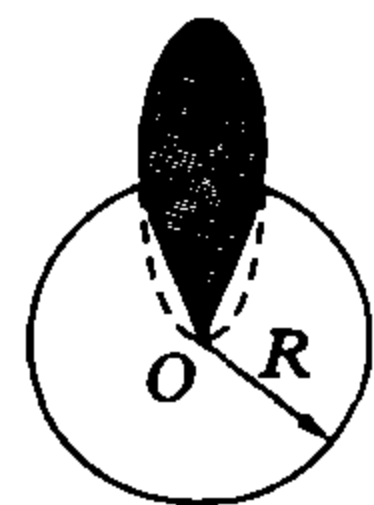


图 11-7

设轨道椭圆的长轴为 r ,火箭在远地点时速度可认为零,由机械能守恒关系可得,火箭发射时总机械能与到达离地面最高处总机械能满足方程

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{r}.$$

式中 M, m 分别表示地球与火箭的质量, v_1 是第一宇宙速度 $v_1 = \sqrt{gR}$,可得轨道椭圆的长轴 $r = 2R$.再设火箭在长轴为 $2R$ 的扁椭圆轨道运动周期为 T_0 ,而在空中段运动时间为 t ,由开普勒第二定律得

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{S}{t}.$$

式中 S_0 是轨道椭圆面积, $S_0 = \pi Rb$ (b 为该轨道椭圆半短轴); S 是火箭飞行时间 t 内,矢径扫过的图 11-7 中划斜线部分的面积,它可近似地看做半个椭圆(地面以上部分)与一个三角形(地面以下部分)的面积之和,即

$$S = \frac{\pi Rb}{2} + \frac{1}{2} R \cdot 2b = \frac{\pi Rb}{2} + Rb,$$

于是得

$$t = \frac{S}{S_0} T_0 = \frac{\pi Rb + 2Rb}{2\pi Rb} T_0 = \frac{\pi + 2}{2\pi} T_0.$$

而由开普勒第三定律知,因该轨道半长轴与近地轨道半径相同,故周期亦相同,有

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

则

$$t = \frac{\pi+2}{2\pi} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \\ \approx (\pi+2)\sqrt{\frac{6.4 \times 10^6}{10}} \text{ s} \\ \approx 4.11 \times 10^3 \text{ s}.$$

通常情况下,研究地面上物体的竖直上抛运动时,我们忽略了地心引力随引力距离平方反比递减的极小变化而被看做是匀变速直线运动,当要考虑这种变化时,处理方法就如同例3的求解方法。

例4 竖直上抛运动中,以 T 表示到达最高点所用时间,以 H 表示最高点离地球表面的距离, R 表示地球半径, M 表示地球质量, G 为万有引力常量,不计空气阻力,从考虑万有引力是“平方反比力”出发,确定时间 T 的数学表达式。

分析与解 通常情况下,我们将竖直上抛运动看做加速度为 g 的匀变速运动,上升高度 H 历时

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2HR^2}{GM}};$$

从考虑万有引力出发,物体在平方反比力作用下所做的“竖直上抛运动”,其轨迹应是以地心为焦点的一个狭长的椭圆上的一部分,该椭圆的长轴可取作 $R+H$,假设该椭圆是许多绕地卫星可能的开普勒轨道中的一个,如图 11-8 所示。

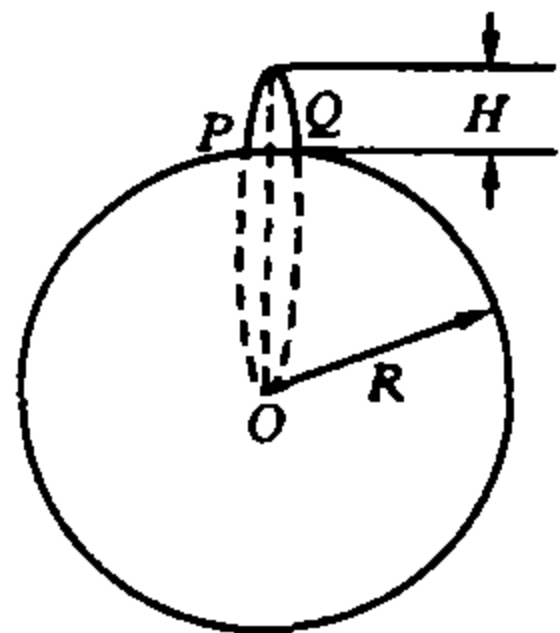


图 11-8

根据开普勒第三定律可知,在这样的轨道上运动的物体的运行周期 T' 与沿地表附近的圆轨道运行的周期 T_0 的关系为

$$\frac{T'^2}{T_0^2} = \frac{\left(\frac{R+H}{2}\right)^3}{R^3},$$

$$\text{又 } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}},$$

$$\text{故 } T' = \pi(R+H)\sqrt{\frac{R+H}{2GM}}. \quad (1)$$

根据开普勒第二定律,物体沿椭圆轨道运行的时间应与从地心 O 引出的矢径所扫过的面积成正比.设物体从 P 点被抛出至落回地面 Q 点历时 Δt ,则有

$$\frac{\Delta t}{T'} = \frac{S}{S'}. \quad (2)$$

式中 S 是图 11-9 中划斜线部分图形的面积,它是由椭圆冠与一个等腰三角形组成的, S' 是轨道椭圆面积,由此式求出 Δt ,题目所欲求的便是 $t = \frac{\Delta t}{2}$.

解题思路确定后,问题症结在于求出物体飞行期间,其矢径扫过的面积 S ,我们用初等数学方法来求解。

先计算等腰三角形部分的面积 S_1 ,设狭长椭圆半短轴为 b ,该椭圆在如图 11-10 所示坐标系中的解析方程为

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R+H}{2}\right)^2} = 1,$$

故可求出 Q 点(物体落地点)的横坐标为

$$x = \frac{2\sqrt{RH}b}{R+H},$$

则等腰三角形之底边长为

$$PQ = \frac{4\sqrt{RH}b}{R+H},$$

$$\text{由此得 } S_1 = \frac{2\sqrt{RH}b}{R+H} \cdot R.$$

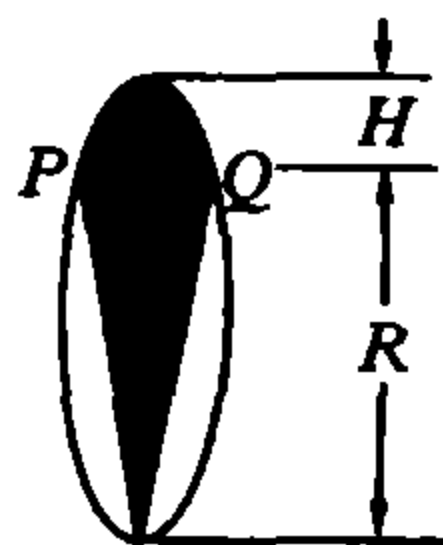


图 11-9

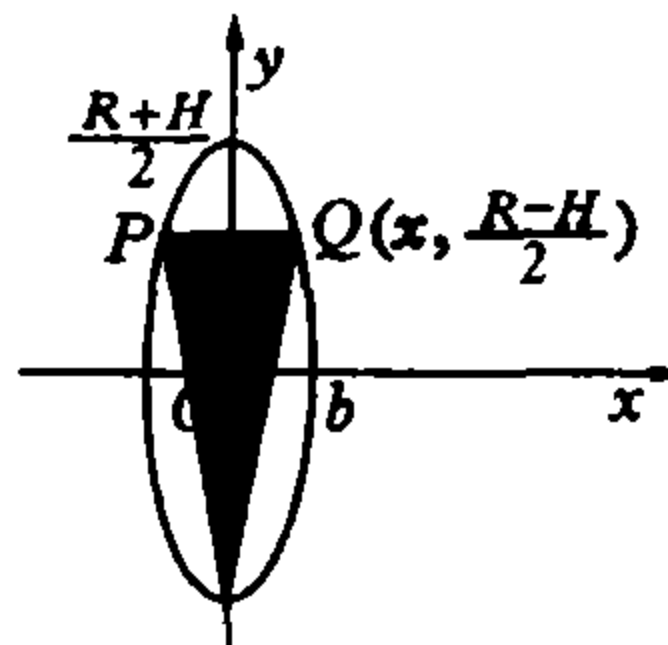


图 11-10

再计算椭圆冠的面积 S_2 ,如图 11-11 所示,以椭圆中心 O' 为圆心作一半径为 $\frac{R+H}{2}$ 的辅助圆,连接 P, Q 并延长成为辅助圆之弦 MN ,由于 MN 与椭圆长轴垂直,故其在圆及椭圆上截出的两冠面积满足的关系为

$$\frac{S''}{S_2} = \frac{\pi \left(\frac{R+H}{2}\right)^2}{\pi \cdot \frac{R+H}{2} \cdot b} = \frac{R+H}{2b}.$$

其中圆冠面积为

$$S'' = \frac{1}{2} \left(\frac{R+H}{2}\right)^2 \cdot 2\arccos \frac{R-H}{R+H} - \sqrt{RH} \cdot \frac{R-H}{2},$$

故可计算椭圆冠部分面积 S_2 为

$$S_2 = \frac{1}{2} b(R+H) \cdot \arccos \frac{R-H}{R+H} - \frac{b\sqrt{RH}(R-H)}{R+H},$$

则图 11-9 中阴影部分的总面积为 $S = S_1 + S_2$,即

$$S = \frac{1}{2} b(R+H) \cdot \arccos \frac{R-H}{R+H} + b\sqrt{RH}. \quad (3)$$

将①、③两式代入②式,然后利用 $t = \frac{\Delta t}{2}$ 便可最终计算得物体从抛出达到最高点所用时间为

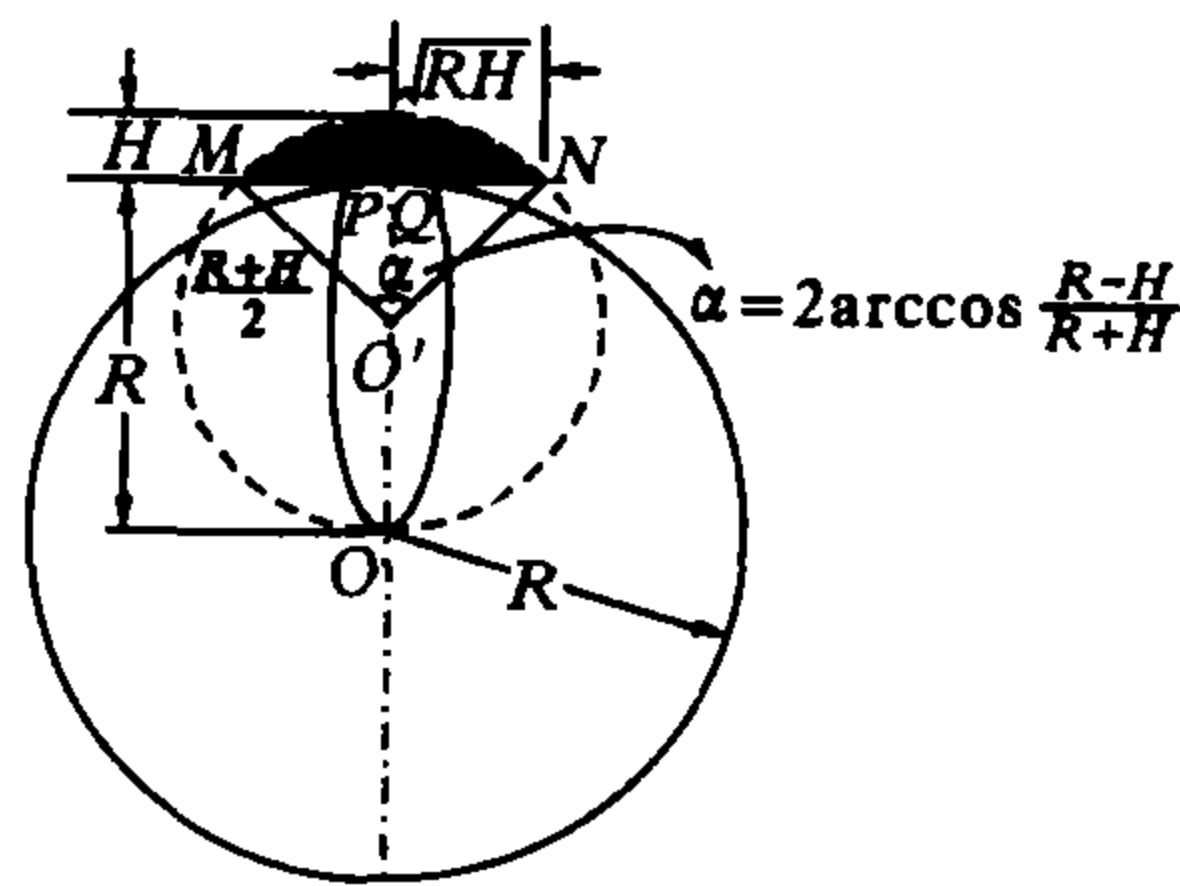


图 11-11

$$t = \sqrt{\frac{R+H}{2GM}} \left[\sqrt{RH} + \frac{(R+H)}{2} \arccos \frac{R-H}{R+H} \right].$$

上面问题的处理中,我们运用了天体的椭圆轨道模型,巧妙地运用开普勒天体运动学定律求得结果.下面我们运用动力学规律与矢量方法讨论天体运动问题.

例 5 设想宇宙中有一由质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_N 的星体 1, 2, \dots, N 构成的孤立星团,各星体空间位置间距离均为 a ,系统总质量为 M .由于万有引力的作用, N 个星体将同时由静止开始运动.试问经过多长时间各星体将会相遇?

分析与解 设系统的质心为 O ,由于系统不受外力作用而系统内各质点均受平方反比引力,根据系统的牛顿第二定律可知,系统的合加速度为零,用质量为 $\sum m_i$ 、加速度为零的质点 O 来等效系统的运动, O 称为系统的质心.而对各质点而言,它们将最终相遇在质心所在位置.先研究质量为 m_1 的质点 1,它将受到其他各质点的引力 $F_{21}, F_{31}, \dots, F_{N1}$,这些力均遵守万有

引力定律,大小为 $F_{i1} = G \frac{m_1 m_i}{a^2}$;方向沿两质点连线而指向对方.如图 11-12 所示, O 为系统质心位置, r_1, r_i 为质点 1 与质点 i 对质心 O 的位置矢径.由图 11-12 可知, r_1 与 r_i 两矢量差的大小为 a ,方向同 F_{i1} ,故

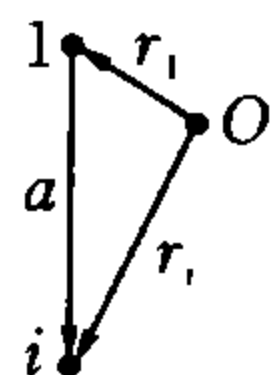


图 11-12

$$F_{i1} = G \frac{m_1 m_i}{a^3} (r_i - r_1),$$

$$\text{即 } F_{21} = \frac{Gm_1 m_2}{a^3} (r_2 - r_1);$$

$$F_{31} = \frac{Gm_1 m_3}{a^3} (r_3 - r_1);$$

.....

$$F_{N1} = \frac{Gm_1 m_N}{a^3} (r_N - r_1);$$

上列各式中, $r_i (i=1, 2, \dots, N)$ 为各质点对质心 O 位置的矢径.则,质点 1 所受合力为

$$\begin{aligned} \sum F_1 &= \frac{Gm_1}{a^3} [m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_N r_N \\ &\quad - (m_1 + m_2 + \dots + m_N) r_1]. \end{aligned}$$

由于点 O 为质心, $\frac{\sum m_i r_i}{m} = 0$, 即 $\sum m_i r_i = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \sum F_1 &= \frac{Gm_1}{a^3} [-(m_1 + m_2 + \dots + m_N) r_1] \\ &= -\frac{Gm_1 M}{a^3} r_1. \end{aligned}$$

若设矢量 r_1 的大小为 $r_1 = ka$, 那么质点 1 所受其他质点引力之合力大小为

$$\sum F_1 = \frac{Gm_1 M}{a^3} ka = \frac{Gm_1 k^3 M}{r_1^2}.$$

由上式可知,质点 1 所受各质点引力之合力等效于在 O 点的质量为 $k^3 M$ 的质点对它发生的引力,质点 1 在这个平方反比力作用下,在以 O 为一个焦点,以 $ka/2$ 为长半轴而短半轴逼近于零的“椭圆轨道”运动,初始位置为“远力心点”,经半个周期,到达“近力心点” O .对于其他各质点,情况相同,故相遇经历时间为

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{ka}{2}\right)^3}{Gk^3 M}} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{8GM}}.$$

例 6 远点在木星轨道而绕日运行的彗星称为木星彗星,它的形成可看成是从无限远处落向太阳的天体经木星吸引偏转而成为太阳的彗星,求其近日点.(已知木星的公转轨道半径为 R)

分析与解 我们首先将问题理想化为这样一个模型:从无限

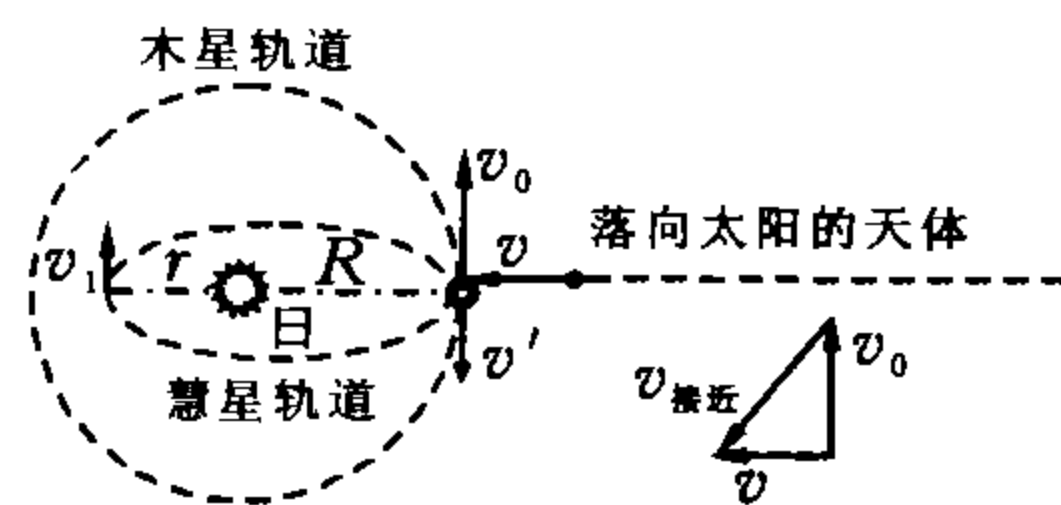


图 11-13

远处落向太阳的天体在木星轨道经与木星发生“弹性碰撞”改变运动方向进入绕日轨道,如图 11-13 所示.这里,天体在无限远处的速度取为零,天体质量 m 远小于木星质量 M ,在与木星发生“弹性碰撞”时,只有木星与天体间的万有引力而不计其他外力,与木星远离后,则在太阳引力作用下做远地点与木星轨道相切的椭圆运动,成为绕日的彗星.

设木星公转速度为 v_0 ,公转轨道半径为 R ,由 $G \frac{M_{\text{日}} M}{R^2} = M \frac{v_0^2}{R}$ 可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_{\text{日}}}{R}};$$

又由机械能守恒,天体从无限远处被太阳吸引到木星轨道附近时速度 v 满足

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_{\text{日}} m}{R} = 0,$$

$$\text{则 } v = \sqrt{\frac{2GM_{\text{日}}}{R}} = \sqrt{2} v_0.$$

与木星相互作用过程,理想化为“完全弹性碰撞”,接近速度与分离速度大小相等,其中,接近速度大小为 $\sqrt{3} v_0$ (见图 11-13 中矢量三角形),则分离速度大小亦为 $\sqrt{3} v_0$,由于木星质量远大于天体质量,可认为其速度不变,则天体相对太阳的速度为 $v' = (\sqrt{3} - 1) v_0$,这也是天体接着做绕日运动在远日点时的速度.此后,忽略远去的木星的作用,天体进入太阳彗星轨道,设其绕日轨

道近日点距太阳 r , 过近日点时速度为 v_1 , 由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{M_{\text{日}}m}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_{\text{日}}m}{r}, \quad (1)$$

由角动量守恒有

$$mv'R = mv_1r. \quad (2)$$

由①、②两式消去 v_1 , 并代入 $v' = (\sqrt{3}-1)v_0$ 得

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}R.$$

例 7 如图 11-14 所示, 地球沿半径为 R_0 的圆轨道绕太阳运动, 彗星绕太阳沿抛物线轨道运动. 已知此抛物线与地球圆轨道一直径的两端相交, 不计地球与彗星之间的引力, 试求彗星在地球轨道内的运行时间.

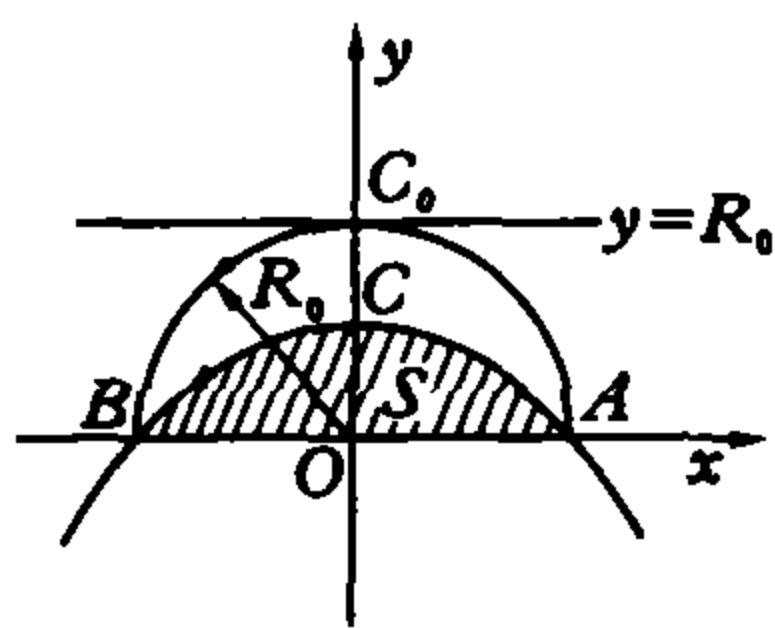


图 11-14

分析与解 本题中, 彗星和地球均以太阳为环绕中心(即彗星抛物线轨道的焦点、地球圆轨道的圆心), 图 11-14 的坐标系中给出了两轨道关系. 其中, O 为太阳位置, C 为抛物线顶点, $\overline{OC} = R_0$; 由抛物线性质可知, 直线 $y = R_0$ 为抛物线准线, $\overline{OC} = \frac{R_0}{2}$.

根据开普勒第二定律, 天体在运行中, 其矢径在相同时间 Δt 内扫过相同面积 ΔS , 那么, 彗星沿抛物线轨道 ACB 从 A 运动到 B 历时 t 与彗星对太阳的矢径扫过的面积 S (即图 11-14 中划斜线部分) 的关系是

$$S = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot t,$$

而地球沿圆轨道 AC_0B 从 A 运动到 B 历时 t_0 与地球对太阳的矢径扫过的面积 S_0 的关系是

$$S_0 = \frac{\Delta S_0}{\Delta t_0} \cdot t_0.$$

比较面积 S 与 S_0 、“面积速度” $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 与 $\frac{\Delta S_0}{\Delta t_0}$, 可得出 t 与 t_0 的关系而求得 t .

如图 11-15, 设地球在轨道 C_0 处的速率为 v_0 , 彗星在 C 处速率为 v . 若太阳、彗星、地球质量依次为 M 、 m 、 m_0 , 彗星因机械能守恒, 有关系式

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R_0/2} = 0,$$

则 $v = 2\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$;

而地球绕日运行有关系式

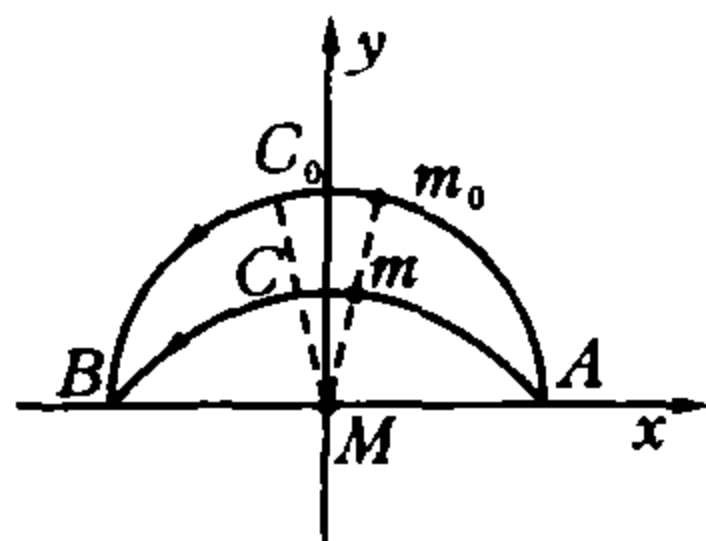


图 11-15

$$G\frac{Mm_0}{R_0^2} = m_0\frac{v_0^2}{R_0},$$

则 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$, 即 $v = 2v_0$.

设彗星以速率 v 通过其轨道顶点 C 历时 Δt ($\Delta t \rightarrow 0$), 这时其矢径扫过的面积为

$$\Delta S = \frac{1}{2}v \cdot \Delta t \cdot \frac{R_0}{2}, \quad (1)$$

而地球以速率 v_0 通过其轨道顶点 C_0 历时 Δt_0 ($\Delta t_0 \rightarrow 0$), 这时其矢径扫过的面积 ΔS_0 为

$$\Delta S_0 = \frac{1}{2}v_0 \cdot \Delta t_0 \cdot R_0. \quad (2)$$

于是得

$$\frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\frac{\Delta S_0}{\Delta t_0}} = \frac{v}{2v_0} = 1.$$

这就是说, 两天体具有相同的“面积速度”.

至于 S 与 S_0 , 我们已经知道 AB 与抛物线 ACB 所围成的弓形面积为

$$S = \frac{2}{3} \cdot 2R_0 \cdot \frac{R_0}{2} = \frac{2}{3}R_0^2,$$

而半圆面积为 $S_0 = \frac{1}{2}\pi R_0^2$,

于是有

$$t = \frac{S}{S_0}t_0 = \frac{4}{3\pi}t_0.$$

由于地球绕日运动半个圆轨道历时 $t_0 = \frac{1}{2}a$ (地球年), 那么, 彗星在地球轨道以内运行的时间为

$$t = \frac{2}{3\pi}a.$$

例 8 一卫星在半径为 r 的圆形轨道上绕地球运动, 旋转周期为 T , 如果给卫星一个附加的径向速度 u_n 或一个附加的切向速度 u_t , 卫星都将沿一个椭圆轨道运动.

(1) 确定在上述两种情况中卫星的旋转周期.

(2) 所附加的径向速度 u_n 和切向速度 u_t 必须满足什么关系, 才能使两种情况下, 卫星旋转周期相等?

分析与解 卫星在半径为 r 的圆上运动时, 速度大小为

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

式中 M 设为环绕中心天体的质量. 当附加速度 u_n 为径向时(如图 11-16), 根据机械能守恒与角动量守恒有

$$\frac{1}{2}(v^2 + u_n^2) - \frac{1}{2}V^2 = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right),$$

$$v \cdot r = V \cdot r_n,$$

则

$$r_n = \frac{v}{v \pm u_n}r.$$

上式中 r_n 是“远地点”或“近地点”的矢径长, V 为对应位置时的速度. 若轨道的长半轴以 a_n 表示, 可知

$$2a_n = \left(\frac{v}{v+u_n} + \frac{v}{v-u_n} \right) r,$$

即
$$a_n = \frac{v^2}{v^2 - u_n^2} r,$$

由开普勒第三定律, 卫星在新轨道的周期 T_n 与在原轨道上周期关系为

$$\frac{T_n}{T} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{v^2 - u_n^2} \right)^3},$$

即
$$T_n = T \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 r^2}{4\pi^2 r^2 - u_n^2 T^2} \right)^3}.$$

当附加速度 u_i 为切向时 (如图 11-17), 由于卫星初位置在椭圆轨道的“近地点”, 以 a_i 表示新轨道长半轴, “远地点”的矢径长为 $2a_i - r$, 设对应的速度为 V_1 , 同样有

$$\frac{1}{2}(v+u_i)^2 - \frac{1}{2}V_1^2 = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a_i - r}\right),$$

$$v \cdot r = V_1 \cdot (2a_i - r),$$

则
$$a_i = \frac{v^2}{v^2 - 2vu_i - u_i^2} r,$$

故
$$T_i = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 r^2}{4\pi^2 r^2 - 4\pi r u_i T - u_i^2 T^2} \right)^3}.$$

(2) 要使 $T_n = T_i$, 根据开普勒第三定律, 必须有 $a_n = a_i$, 即

$$v^2 - u_n^2 = v^2 - 2vu_i - u_i^2,$$

得径向速度 u_n 和切向速度 u_i 必须满足

$$u_n^2 = u_i^2 + \frac{4\pi r}{T} u_i.$$

趣味题

1. 设有两个地球人造卫星 M 和 N 沿同一椭圆轨道运动, 地球中心在这椭圆的一个焦点 F 上, 又设 M 和 N 相距不远, 因此可将椭圆弧看做直线. 已知 MN 的中点经近地点时 $\overline{MN} = a$, 近地点到地心的距离为 r , 远地点到地心的距离为 R , 求 M, N 的中点经远地点时两颗卫星间的距离.

2. 空间两质点的质量分别为 m_1 和 m_2 , 彼此以万有引力相互作用. 开始时两质点静止, 相距 r_0 , 在引力作用下彼此接近并相碰, 试求两质点从开始运动到相碰所经历的时间.

3. 一质点受一与距离 $\frac{3}{2}$ 次方成反比引力作用而在一直线上运动. 试证此质点自无穷远处到达距力心

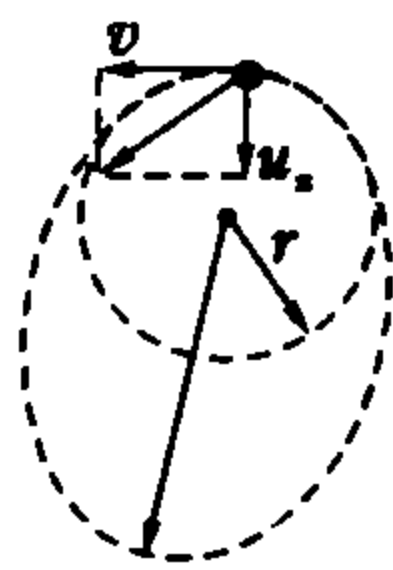


图 11-16



图 11-17

a 处时的速率与从 a 处由静止出发, 到达 $\frac{a}{4}$ 处时的速率相同.

4. 有一个质量大而体积小的星球, 一个物体离这个星球的距离为 r , 物体从静止出发自由落向此星球, 求物体落到这个星球上经历多少时间? (已知星球的质量为 M)

5. 根据某种假设, 星球是由星际物质 (宇宙尘埃) 在万有引力的作用下经压缩而成的. 试估算由密度 $\rho = 2 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$ 的宇宙尘埃组成的巨大的云团到生成一颗星球需要多长时间?

6. 如行星突然在其轨道上某处停止运动 (假定轨道为圆形) 则将被吸引而至太阳, 试求其所需时间, 设太阳的高斯常数 (GM) 为 k , 行星质量为 m .

7. 某彗星的轨道为抛物线, 其近日点距离为地球轨道 (假定为圆轨道) 半径的 $\frac{1}{n}$, 求此彗星运行时, 在地球轨道内停留的时间.

8. 如图 11-18, 从地球发射火箭到火星去进行探测, 发射后火箭绕太阳椭圆轨道运行. 为了节省能源, 火箭离开地球的速度方向与地球绕太阳公转的速度方向一致, 并且选择适当的发射时机, 使火箭椭圆轨道的远日点为火星, 轨道近日点为地球. 假定地球和火星均绕太阳做圆周运动, 圆轨道半径分别为 r 与 R , 忽略其他行星对火箭的作用, 求火箭应以多大的对地速度离开地球? 火箭到达火星要用多长时间?

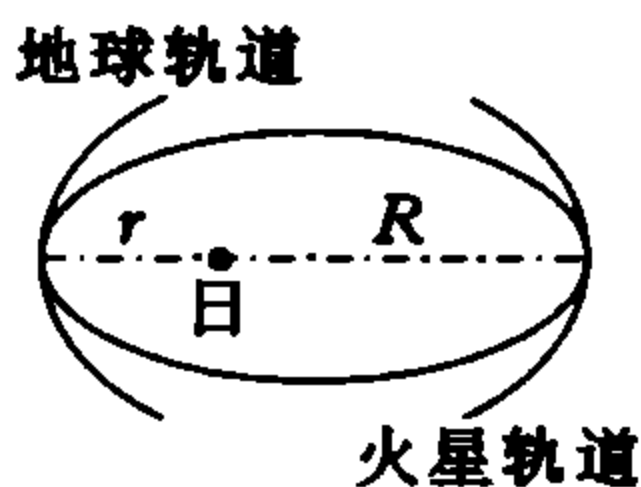


图 11-18

9. 假设地球是一个均匀球体, 现在地球的东半球北纬 30° 的 a 处开一个穿过地轴的直线隧道直通西半球北纬 30° 的 b 处, 如图 11-19 所示. 已知地球的半径是 6370 km , 地面的重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 第一宇宙速度 $v_1 = 7.9 \text{ km/s}$, 假设隧道光滑. 现将一个物体以 $v = \frac{1}{3} v_1$ 的初速度从 a 处抛入隧道, 问物体从 b 处出来后能飞离地面的最大高度是多少?

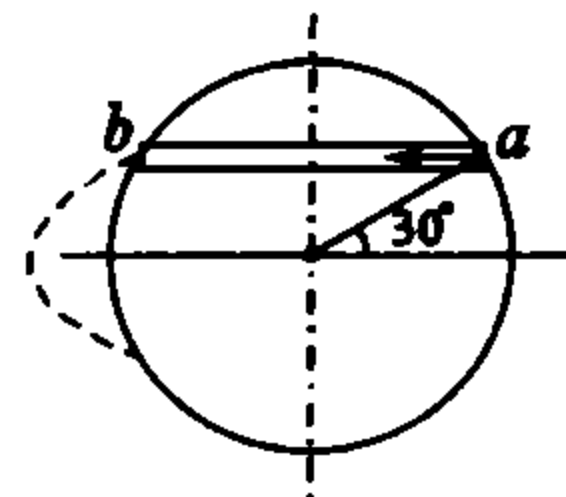


图 11-19

10. 有一航天器 (不带动力装置) 自远方以速度 v_0 射向某一行星, 计划在行星上着陆, 如图 11-20. 如以 b 表示初速度 v_0 的直线路径与行星的垂直距离 (称为瞄准距离), 求 b 最大值为多少时, 航天器

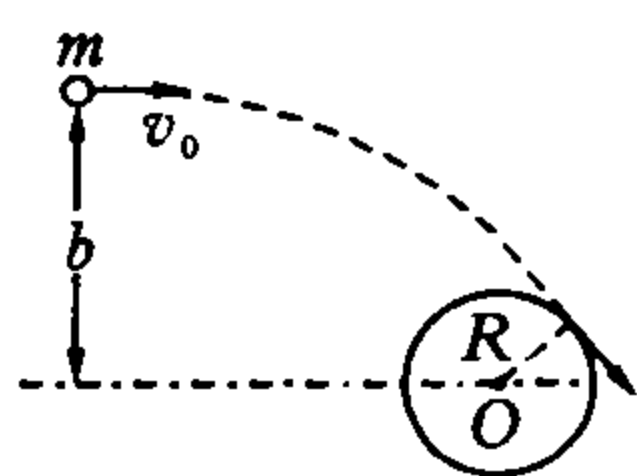


图 11-20

可以在行星上着陆. 已知航天器质量为 m , 行星的质量为 M , 半径为 R .

11. 如图 11-21, 一质量为 $m=12\text{ t}$ 的太空飞船在围绕月球的圆轨道上旋转, 其高度 $h=100\text{ km}$. 为使飞船降落到月球表面, 喷气发动机在 X 点作一次短时间发动. 从喷口喷出的热气流相对飞船的速度为 $u=10\text{ km/s}$. 月球半径 $R=1\,700\text{ km}$, 月球表面上自由落体的重力加速度为 $g_{\text{月}}=1.7\text{ m/s}^2$. 飞船可用两种不同方式到达月球:

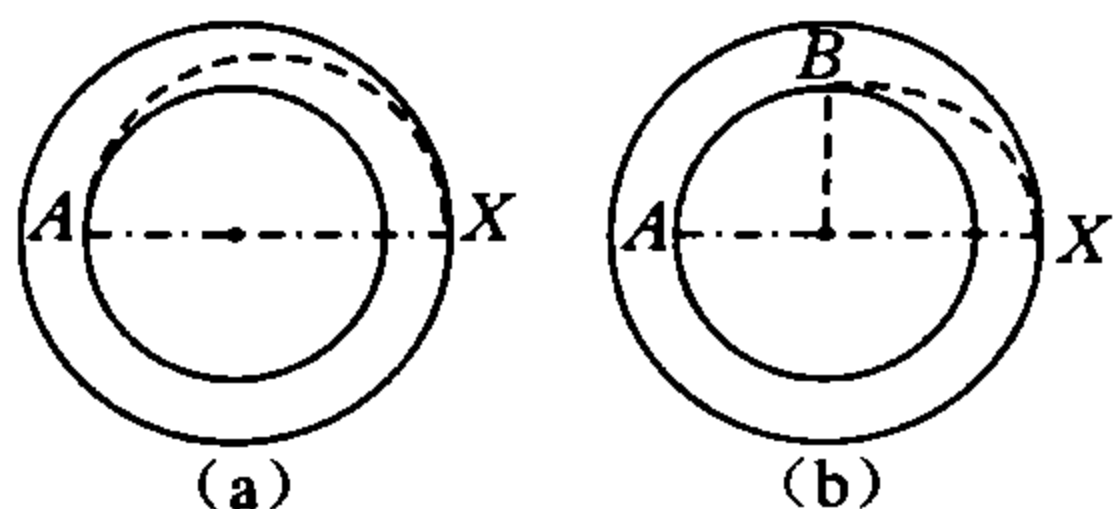


图 11-21

(1) 到达月球上的 A 点, 该点正好与 X 点对, 如图 11-21(a) 所示; (2) 在 X 点给一指向

月球中心的动量后, 与月球表面相切于 B 点, 如图 11-21(b) 所示. 试计算上述两种情况下所需的燃料量.

12. 质量为 M 的宇航站和与其对接上的质量为 m 的飞船一起沿圆形轨道围绕地球运动着, 其轨道半径为地球半径 R 的 n 倍 ($n=1.25$). 某一瞬间, 飞船从宇航站沿运动方向射出后沿椭圆轨道运动, 其最远点到地心的距离为 $8nR$. 质量比 m/M 为何值时, 飞船绕地球运行一周后正好与宇航站相遇? (一般认为 $M>m$)

13. 质量为 m 的人造卫星沿半径为 r_0 的圆轨道飞行, 地球质量为 M . 若卫星运动中受到微弱的摩擦阻力 f (大小恒定), 则将缓慢地沿一螺旋形轨道接近地球. 将每周的旋转近似处理成半径为 r_i 的圆轨道. 试求每旋转一周, 轨道半径的改变量 Δr 及卫星轨道减少一半时减少的机械能.

14. 如图 11-22, 宇宙飞船沿圆轨道绕火星运行, 运动速度为 v_0 . 已知火星半径为 R , 飞船圆轨道离火星表面的高度为 H . 今飞船在极短时间内, 沿圆轨道径向向外侧点火喷气, 使飞船获得指向火星的径向速度

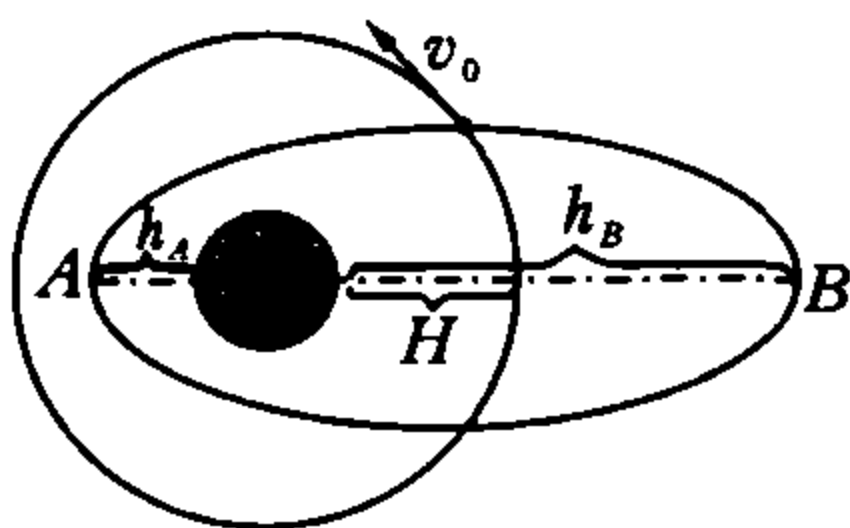


图 11-22

为 av_0 , a 是远小于 1 的常数. 因喷气量很小, 喷气后飞船的质量可视为不变. 喷气后, 飞船绕火星沿新的轨道运行. 试求飞船椭圆轨道近火星点距火星表面的高度 h_A 和远火星点距火星表面的高度 h_B , 以及飞船绕椭圆轨道的运行周期.

15. 一宇宙飞船环绕一行星做匀速圆周运动, 轨道半径为 R , 飞船速率为 v_0 . 飞船上发动机突然点火, 使飞船速率从 v_0 变到 $\sqrt{3}v_0$, 加速度方向与速度方向相

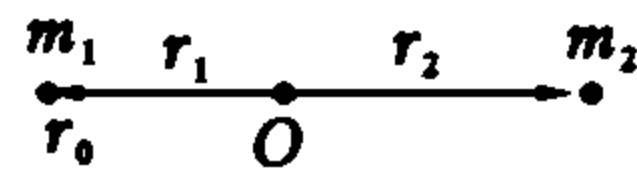
同, 飞船沿新轨道运动. 设 φ 为发动机点火时飞船速度方向与飞船离行星最远处时的速度方向之间的夹角, 求角 φ , 并画出飞船运动轨迹的图示.

参考答案

1. 设在远地点时两卫星距离 l , 由开普勒第二定律 $\frac{1}{2}a \cdot r = \frac{1}{2}l \cdot R$, 得 $l = \frac{r}{R}a$.

2. 如图答 11-1, m_1 、 m_2 相遇中心为 O , 对 O 的矢径为 r_1 、 r_2 , 对 m_1 有

$$\begin{aligned} F_{21} &= G \frac{m_1 m_2}{r_0^3} (r_2 - r_1) \\ &= G \frac{m_1}{r_0^3} (-m_1 r_1 - m_2 r_1 + m_1 r_1 + m_2 r_2) \\ &= -G \frac{m_1}{r_0^3} (m_1 + m_2) r_1, \end{aligned}$$



图答 11-1

令 $r_1 = kr_0$, 得 m_2 对 m_1 引力的大小为

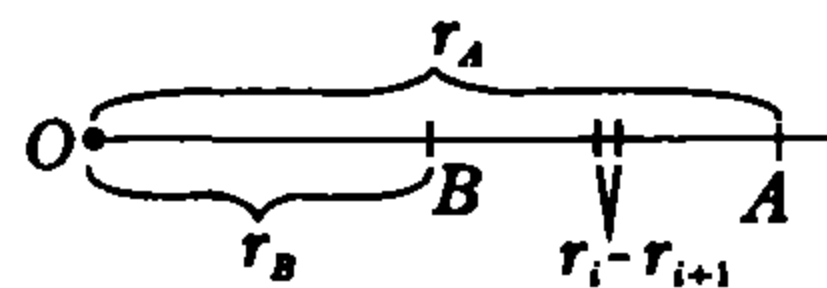
$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{Gm_1(m_1+m_2)kr_0}{r_0^3} \\ &= \frac{Gm_1(m_1+m_2)k}{\left(\frac{r_1}{k}\right)^2} \\ &= \frac{Gm_1(m_1+m_2)k^3}{r_1^2}, \end{aligned}$$

等效于中心质量为 $k^3(m_1+m_2)$, 两质点各在以中心为焦点、到中心距离为长轴的退化为直线的扁椭圆上向中心运动, 经半周期相遇, 故

$$\begin{aligned} t &= \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{kr_0}{2}\right)^3}{Gk^3(m_1+m_2)}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}. \end{aligned}$$

3. 导出此力场中的势能公式, 如图答 11-2, 设在引力作用下质点从 A 点

向力心移到 B 点, A 距力心 r_A , B 距力心 r_B , 取其间任意一小段 $(r_i - r_{i+1})$, 认为引力 $F_i =$



图答 11-2

$\frac{k}{r_i^{\frac{3}{2}}}$ 不变, 所做的元功为

$$W_i = \frac{k}{r_i^{\frac{3}{2}}} (r_i - r_{i+1}),$$

则 $W_{AB} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{k}{r_i^{\frac{3}{2}}} (r_i - r_{i+1})$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{r_i^{\frac{1}{2}} \left(r_i^{\frac{1}{2}} - \frac{r_{i+1}}{r_i^{\frac{1}{2}}} \right)}{r_{i+1}^{\frac{1}{2}} \cdot r_i}$$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i^{\frac{1}{2}} - r_{i+1}^{\frac{1}{2}})}{r_{i+1}^{\frac{1}{2}} \cdot r_i^{\frac{1}{2}}}$$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i+1}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_i^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_{i+1}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_i^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_A^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{r_3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} +$$

$$\frac{1}{r_4^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_3^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{1}{r_B^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_{n-1}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r_B^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_A^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{则 } W_{AB} = k \left(\frac{1}{\sqrt{r_B}} - \frac{1}{\sqrt{r_A}} \right),$$

质点 m 引力势能的增量为

$$\Delta E_p = -k \left(\frac{1}{\sqrt{r_B}} - \frac{1}{\sqrt{r_A}} \right),$$

对题中质点, 自无穷远处到达距力心 a 处时由机械能守恒有

$$k \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} m v_1^2, \text{ 即 } v_1 = \sqrt{\frac{2k}{m\sqrt{a}}}$$

从 a 处由静止出发, 到达 $\frac{a}{4}$ 处时有

$$k \left(\frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2} m v_2^2, \text{ 即 } v_2 = \sqrt{\frac{2k}{m\sqrt{a}}}$$

4. 将此星球看做质点, 落向此星球的物体的轨道看做退化为直线的椭圆, 其半长轴为 $\frac{r}{2}$, 若周期为 T , 则自由下落到星球历时 $T/2$; 设想同一环绕系统另有一物体在半径为 r 的圆轨道运动, 其周期为

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

根据开普勒第三定律, 得

$$T = \frac{T'}{2\sqrt{2}} = \pi \sqrt{\frac{r^3}{2GM}}$$

$$\text{于是 } t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r^3}{2GM}}$$

5. 仍取理想化模型: 认为尘埃组成的巨大云团是密度均匀分布的质点, 每个质点自由落向云团中心, 最后密集成一颗星球, 星球形成所需时间即是最外层尘埃落至中心的时间即

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

$$\approx 1.5 \times 10^{13} \text{ s} \approx 48 \text{ 万年.}$$

6. 若设行星在力 $F = \frac{km}{r^2}$ 作用下绕日做半径为 r

的匀速圆周运动, 则有

$$\frac{k}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r,$$

可知

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{k}}$$

对于从距日为 r 处静止出发的行星, 其轨道可看做退化为直线的半长轴为 $\frac{r}{2}$ 的椭圆, 出发于远日点, 经半个周期到近日点, 故

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r^3}{2k}}$$

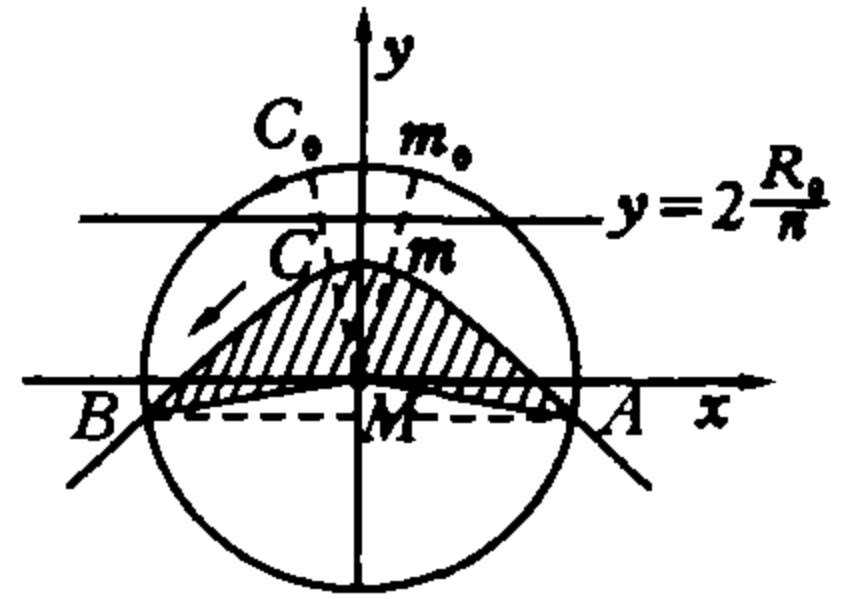
7. 地球绕日线速度为 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$, 彗星过近日点时

速度为 $v = \sqrt{\frac{2GMn}{R_0}}$, 如图答 11-3 确定彗星与地球绕日运动的面积速度之比为

$$\frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\frac{\Delta S_0}{\Delta t_0}} = \frac{v}{n v_0} = \sqrt{\frac{2}{n}}$$

在图答 11-3 所示坐标中, 彗星轨道方程为

$$y = \frac{R_0}{n} - \frac{n}{4R_0} x^2,$$



图答 11-3

矢径扫过的地球轨道内面积为图答 11-3 中阴影面积, 是抛物线弓形面积减去三角形 AMB 面积, 即

$$S = \frac{2}{3} \cdot 2x \cdot \left(y + \frac{R_0}{n} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y,$$

其中 x, y 为彗星与地球绕日轨道交点 A, B 的坐标值, 则

$$y = - \left(R_0 - \frac{2}{n} R_0 \right), x = \pm \frac{2}{n} \sqrt{n-1} R_0,$$

$$\text{故 } S = \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \sqrt{n-1}}{n} \cdot \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{n} \right) R_0^2$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \sqrt{n-1}}{n} \cdot \frac{n-2}{n} R_0^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{n-1}(n+2)}{n^2};$$

地球从 A 到 B 矢径扫过面积设为 S_0 , 则

$$\frac{S_0}{\pi R_0^2} = \frac{t_0}{T_0},$$

故彗星从 A 到 B 时间为

$$t = \frac{S}{\sqrt{\frac{2}{n}} \cdot S_0} t_0$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{n-1}(n+2)}{n^2 S_0} R_0^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{S_0}{\pi R_0^2} T_0$$

$$= \frac{(n+2)\sqrt{2n(n-1)}}{3\pi n^2} \quad (\text{a}).$$

8. 设太阳、火箭质量分别为 M 、 m ，火箭在近日点和远日点的速度分别为 v_1 、 v_2 ，由机械能守恒及角动量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R},$$

$$rv_1 = Rv_2,$$

由此二式得
$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}},$$

这是火箭在离开地球时对日速度而 $v_{\text{地}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ ，则火箭相对地球的速度为

$$v = v_1 - v_{\text{地}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \left(\sqrt{\frac{2R}{R+r}} - 1 \right),$$

而到达火星的时间是火箭运动半个周期 T ，则

$$T = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2r}\right)^3} T_0, \text{ 故 } t = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R+r}{2r}\right)^3} \quad (\text{a}).$$

9. 考虑对称性，物体从 b 处飞出的速度大小为 $\frac{v_1}{3}$ ，此后在地心引力作用下沿一椭圆轨道的远地椭圆弧运动；由机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_1}{3}\right)^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+h}.$$

式中 v 为到远地点速度， $GM = Rv_1^2$ ，由角动量守恒可得

$$\frac{v_1}{3} R \sin 30^\circ = v(R+h);$$

由此二式可解得 $h \approx 285 \text{ km}$ 。

10. 由机械能守恒，飞行器到达行星时的速度设为 v ，总有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R},$$

即
$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{R}},$$

由角动量守恒，以 r 表示飞行器到达行星表面时角动量矢径大小，有

$$mv_0 b = mvr,$$

则
$$b = \frac{v}{v_0} r \leq \frac{v}{v_0} R = \sqrt{1 + \frac{2GM}{v_0^2 R}} R.$$

11. (1) 按此方式，飞船椭圆轨道 X 为远月点， A 为近月点， XA 为长轴，月心为焦点，由牛顿草图可知，飞船在 X 点是向运动方向喷气减速而成，设飞船做圆运动时速率为 v_0 ，则

$$v_0 = \sqrt{\frac{R^2 g_{\text{月}}}{R+h}},$$

飞船喷气后速度设为 v_x ， A 处“登月”时速度为 v_A ，故

$$\frac{1}{2}(m-\Delta m)v_x^2 - \frac{GM(m-\Delta m)}{R+h} = \frac{1}{2}(m-\Delta m)v_A^2 - \frac{GM(m-\Delta m)}{R},$$

$$(m-\Delta m)v_x(R+h) = (m-\Delta m)v_A R,$$

其中 $GM_{\text{月}} = R^2 g_{\text{月}}$ ，解得

$$v_x = \sqrt{\frac{2g_{\text{月}} R^3}{(R+h)(2R+h)}};$$

而飞船喷气过程动量守恒，即

$$mv_0 = (m-\Delta m)v_x + \Delta m(u+v_x),$$

代入 v_x 、 v_0 ，及题给数据，得喷气质量为

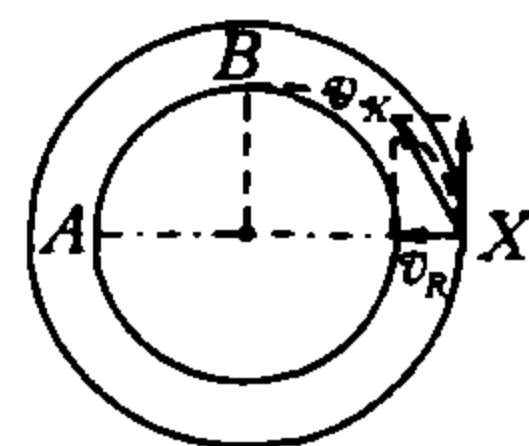
$$\Delta m = m \frac{(v_0 - v_x)}{u} \approx 29 \text{ kg}.$$

(2) 在这种情况下飞船向背

离月球方向喷气后获得的指向月心的速度 v_R ，飞船在 X 点的速度变为

$$v_x = \sqrt{v_0^2 + v_R^2},$$

如图答 11-4 所示。B 处“登月”时



图答 11-4

速度设为 v_B ，仍由机械能守恒与角动量守恒得

$$\frac{1}{2}(m-\Delta m)v_x^2 - \frac{GM(m-\Delta m)}{R+h} = \frac{1}{2}(m-\Delta m)v_B^2 - \frac{GM(m-\Delta m)}{R};$$

$$(m-\Delta m)v_x(R+h) \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_R^2}} = (m-\Delta m)v_B R,$$

则
$$v_R = \sqrt{\frac{h^2 g_{\text{月}}}{R+h}}.$$

喷气过程中沿径向动量守恒得

$$0 = (m-\Delta m)v_R + \Delta m(-u + v_R),$$

则
$$\Delta m = \frac{m}{u} \sqrt{\frac{h^2 g_{\text{月}}}{R+h}} \approx 116 \text{ kg}.$$

12. 在半径为 $\frac{5R}{4}$ 绕地圆轨道时宇航站及飞船速度

为 $v_0 = \sqrt{\frac{4GM_0}{5R}}$ (M_0 表示地球质量)，飞船与宇航站分

离时，飞船速度为 v_m ，根据两个守恒有

$$\frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{4GM_0 m}{5R} = \frac{1}{2}mV_m^2 - \frac{GM_0 m}{10R},$$

$$mv_m \cdot \frac{5}{4}R = mV_m(10R),$$

则
$$v_m = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{GM_0}{5R}}.$$

式中 V_m 表示飞船在远地点时的速度；设宇航站的轨道半长轴为 R_M ，到远地点时速度为 V_M ，宇航站初速度

v_M , 则

$$\frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{4GM_0 M}{5R} = \frac{1}{2} M V_M^2 - \frac{GM_0 M}{2R_M - 1.25R},$$

$$M v_M \cdot \frac{5}{4} R = M V_M (2R_M - 1.25R),$$

$$\text{则 } v_M = \sqrt{\frac{(8R_M - 5R)GM_0}{5RR_M}};$$

由分离时飞船、宇航站系统动量守恒得

$$(M+m)v_0 = m v_m + M v_M,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{m}{M} &= \frac{v_M - v_0}{v_0 - v_m} = \frac{\sqrt{\frac{(8R_M - 5R)GM_0}{5RR_M}} - \sqrt{\frac{4}{5R}}}{\sqrt{\frac{4}{5R}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{5R}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{8R_M - 5R}{R_M}} - 2}{2 - \frac{8}{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{\frac{8R_M - 5R}{R_M}}}{2} > 0, \end{aligned}$$

又宇航站周期 T_M 与飞船周期 T_m 满足

$$\frac{T_M}{T_m} = \sqrt{\left(\frac{R_M}{R_m}\right)^3}, \text{ 又 } R_m = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}R + 10R\right) = \frac{45}{8}R.$$

$$\text{则 } \frac{T_M}{T_m} = \sqrt{\left(\frac{8R_M}{45R}\right)^3} = \frac{1}{k}, \text{ 即 } R_M = \frac{45R}{8\sqrt[3]{k^2}},$$

$$\text{则 } \sqrt{\frac{8 \cdot \frac{45R}{8\sqrt[3]{k^2}} - 5R}{\frac{45R}{8\sqrt[3]{k^2}}}} < 2, \text{ 即 } k > \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 9.5,$$

又 $2R_M \geq (n+1)R$, 即

$$\frac{45R}{4\sqrt[3]{k^2}} \geq 2.25R, k \leq 5\sqrt{5} \approx 11.2,$$

可见 k 可取 10, 11; 当 $k=10$ 时, $\frac{m}{M} = 0.048$; 当 $k=11$

时, $\frac{m}{M} = 0.153$.

13. 在第 i 圈运动时, 摩擦力的功为

$$W_f = -f \cdot 2\pi r_i,$$

$$\text{引力功为 } W_G = GMm \left(\frac{1}{r_i - \Delta r_i} - \frac{1}{r_i} \right),$$

由动能定理得

$$-f \cdot 2\pi r_i + GMm \left(\frac{1}{r_i - \Delta r_i} - \frac{1}{r_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} GMm \left(\frac{1}{r_i - \Delta r_i} - \frac{1}{r_i} \right),$$

$$\Delta r_i = \frac{4\pi f r_i^3}{GMm + 2\pi f r_i^2} \approx \frac{4\pi f r_i^3}{GMm};$$

$$\text{机械能减少了 } \Delta E = GMm \left[\frac{1}{2 \frac{r_0}{2}} - \frac{1}{2r_0} \right] = \frac{GMm}{2r_0}.$$

14. 飞船进入椭圆轨道的初速度为

$$V_0 = \sqrt{v_0^2 + (av_0)^2} = v_0 \sqrt{1+a^2},$$

由机械能守恒及角动量守恒得

$$\frac{1}{2} (1+a^2)v_0^2 - \frac{GM}{R+H} = \frac{1}{2} V_A^2 - \frac{GM}{R+h_A}$$

$$= \frac{1}{2} V_B^2 - \frac{GM}{R+h_B};$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a^2}v_0 \cdot (R+H) \cdot \frac{v_0}{\sqrt{1+a^2}v_0} &= V_A(R+h_A) \\ &= V_B(R+h_B), \end{aligned}$$

注意到飞船原飞行速度 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+H}}$, 可得

$$h_A = \frac{H-aR}{1+a}, h_B = \frac{H+aR}{1-a}.$$

再根据开普勒第三定律求周期得

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\left(\frac{2R+h_A+h_B}{2(R+H)}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{1}{1-a^2}\right)^3},$$

其中火箭沿圆运动时, 有

$$T_0 = \frac{2\pi(R+H)}{v_0},$$

$$\text{则 } T = \frac{2\pi(R+H)}{v_0} \sqrt{\left(\frac{1}{1-a^2}\right)^3}.$$

15. 先确定飞船的新轨道是哪种圆锥曲线, 为此计算加速后飞船的总机械能 E . 则

$$E = \frac{1}{2} m(\beta v_0)^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$= \frac{1}{2} m(\sqrt{3}v_0)^2 - m v_0^2 > 0,$$

故飞船将沿双曲线轨道远离行星. 如图答 11-5 画出的

一支双曲线表示飞船轨道, 直线

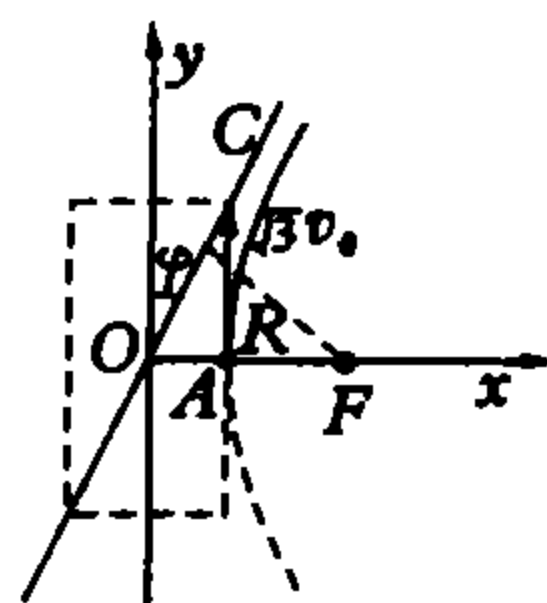
C 为其渐近线, 行星位于其焦点,

飞船点火位置在双曲线顶点 A ,

\overline{OA} 长度设为 a , 飞船在离行星无

限远处速度设为 v , 由机械能守

恒关系得



图答 11-5

$$\frac{1}{2} m(\sqrt{3}v_0)^2 - m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1)$$

由角动量守恒关系得

$$\sqrt{3}v_0 \cdot R = v \cdot (a+R) \cos \varphi, \quad (2)$$

又由双曲线解析性质得

$$(a+R) \sin \varphi = a, a = \frac{R \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad (3)$$

将①式所得 $v = v_0$ 与③式代入②式, 得

$$\frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \sqrt{3},$$

解得

$$\varphi = 30^\circ.$$

专题 12 机械振动二三事

沈 晨

教你一手

广义地说,振动不仅存在于所有的物理现象中,在化学、生物学、气象学等许多自然科学分支中都会涉及各种各样的振动,各种不同本质的振动会有各自不同的特点,但又具有其共同性——振动是一种往复性的变化.物体位置的往复变化即为机械振动.在这个专题中,我们将探究机械振动中的一些有趣的规律,这些规律中的很多都适用于其他的振动.

我们知道,简谐运动是最简单、最基本的振动,任何复杂的振动总可以分解成几个简谐运动,一切振动都是若干个简谐运动合成的结果.弹簧振子、单摆(数学摆)、复摆(物理摆)、扭摆、沉浮子……的小幅振动都是简谐运动.简谐运动发生的动力学原因是受到一个与位移 x 大小成正比(线性)而方向相反的回弹力: $F = -kx$,这是振动系统做谐振的充要条件.通常我们以此为据认定物体的振动是否属于简谐运动.

例 1 质点以角速度 ω 沿半径为 R 的圆轨道做匀速圆周运动,试证明:质点 P 在某直径上的投影的运动为简谐运动.

分析与解 如图 12-1 所示,将质量为 m 的质点 P 的运动正交分解为沿水平(x 轴)与竖直(y 轴)直径的两个分运动,质点 P 在水平直径上的投影 P' 的运动即质点 P 在 x 方向的分运动.显然,质点 P 沿圆周运动一个周期, P' 沿 x 轴向直径以 O 为中心往复运动完成一个全振动.我们将质点做匀速圆周运动的合外力(即向心力 F_n)分解为 F_x 与 F_y 两个分力, F_x 即是 P' 做振动的回复力,它的方向总是指向平衡位置 O 而与 P' 对 O 的位移 x 相反.以位移方向为正,容易得到

$$F_x = -m\omega^2 R \cdot \frac{x}{R} = -m\omega^2 \cdot x.$$

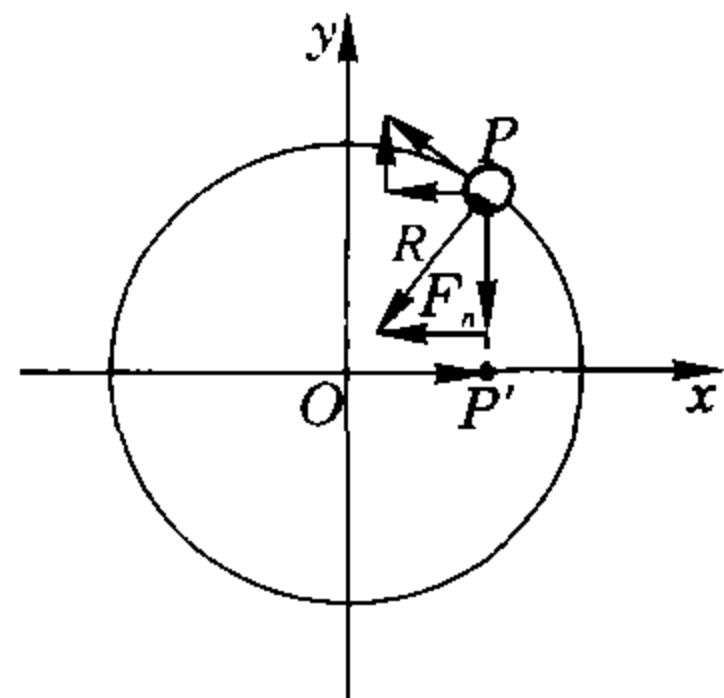


图 12-1

m, ω 均确定,我们令 $k = m\omega^2$,有 $F_x = -kx$,可见, P' 的运动是简谐运动.

从上面的讨论中可知,一个匀速圆周运动可以正交分解成两个简谐运动,每个简谐运动的振幅 $A = R$,周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.若 P 点初始位置坐标为 (x_0, y_0) ,初相位 $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$,则在图 12-1 所示坐标中,两个分运动的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

$$y = A\sin(\omega t + \phi_0) = A\cos(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}).$$

速度公式为

$$v_x = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0), v_y = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}).$$

加速度公式为

$$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0),$$

$$a_y = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}).$$

这是两个相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 的完全相同的谐振.反之,任何一个简谐运动,都可以回归于某一个匀速圆周运动,这个圆叫做简谐运动的参考圆.利用参考圆来描述简谐运动是我们常用的一种方法.

例 2 如图 12-2 所示,密度为 ρ 的液体注入一弯折细管中,弯折管之两段与水平面的交角为 α, β ,液柱总长为 l .若对液体的平衡状态加一扰动,则管中液柱即开始往复振动,求证:其属简谐运动并求振动周期.毛细管作用及摩擦忽略不计.

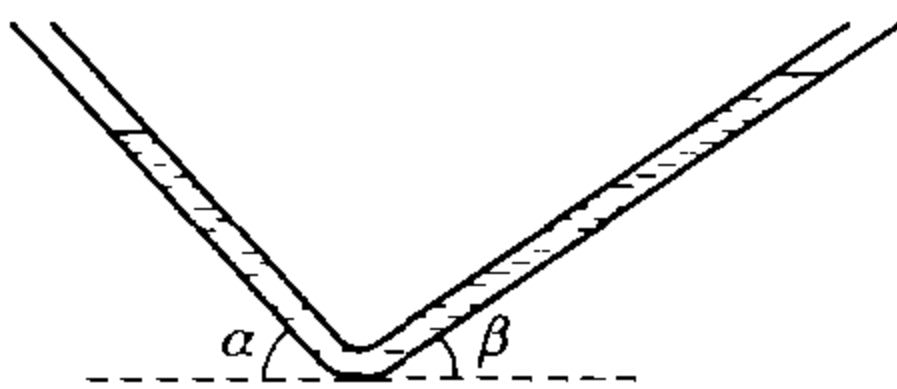


图 12-2

分析与解 当液体平衡被破坏而做往复运动时,整个液柱受到怎样的回复力的作用是解决问题的关键.只要找到整个液柱往复运动的回复力所遵循的规律,即可认定液柱的振动性质.

先分析液柱处于平衡状态时的受力. 这时, 设左臂液柱长 l_1 , 右臂液柱长 l_2 . 由于液体处于平衡, 取弯管底部截面积为 S 的液片为隔离体研究其受力, 两臂液柱对该液片的压力大小相等, 方向相反, 故有

$$\rho l_1 g S \sin \alpha = \rho l_2 g S \sin \beta. \quad (1)$$

再假设在振动过程中, 液柱沿管有一位移 x , 使左臂液柱长变为 $(l_1 - x)$, 右臂液柱长则变为 $(l_2 + x)$, 如图 12-3, 整个振动系统——质量为 $\rho l S$ 的液柱所需的

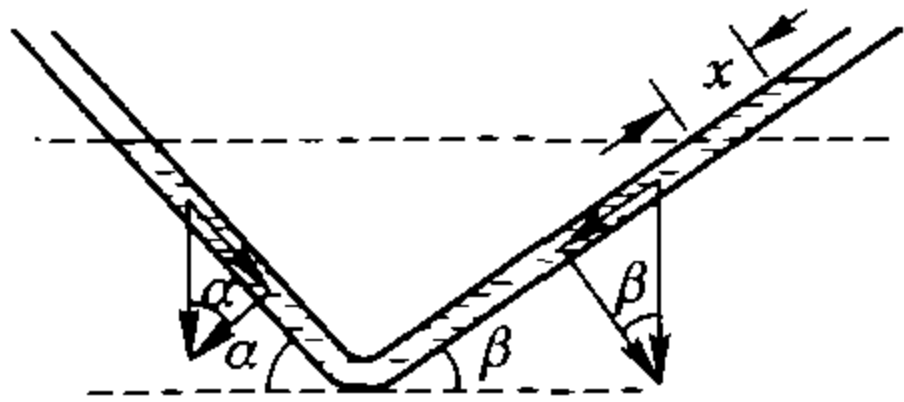


图 12-3

回复力是由两管臂中液柱重力沿管方向的分力来提供的. 其中, 左臂液体重力的沿管方向分力与位移方向相同, 右臂液体重力的沿管方向分力与位移方向相反. 以位移方向为正, 回复力为

$$\sum F = \rho g S (l_1 - x) \sin \alpha - \rho g S (l_2 + x) \sin \beta. \quad (2)$$

由①、②两式可得

$$\sum F = -\rho g S (\sin \alpha + \sin \beta) \cdot x.$$

令 $k = \rho g S (\sin \alpha + \sin \beta)$, 可见, 弯管中液柱受一与位移大小成正比而方向相反的回复力的作用, 故此振动属简谐运动, 且由简谐运动周期公式知

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

我们看到, 利用简谐振动的充要条件, 在证明回复力大小与位移成正比, 得到回复力常数 k 的同时, 也就求得了谐振周期.

例 3 如图 12-4 所示, 设想在地球表面的 A、B 两地之间开凿一直通隧道, 在 A 处放置一小球, 小球在地球引力的作用下从静止开始在隧道内运动, 忽略一切摩擦阻力. 试求小球的最高速度以及小球从 A 到 B 所需时间. 已知地球半径为 R , 地球表面的重力加速度为 g , A 和 B 之间的直线距离为 L , 地球内部质量密度设为均匀, 不考虑地球自转.

分析与解 在专题 11 中, 我们介绍了牛顿证明过的一个结论: 对于一个质量均匀半径为 R 的实心球, 在距球心 r ($r < R$) 处质点只受半径为 r 的球内质量的万有引力, 而 r 以外球壳 (即 R 为外径 r 为内径的球壳) 则对质点无引力的作用. 若均匀球质量为 M , 则距球心 r 处所置质点受到的引力大小

$$F = G \frac{Mm}{R^3} r,$$

与 r 成正比.

这里, 我们将证明, 小球在隧道 AB 中的运动是简谐运

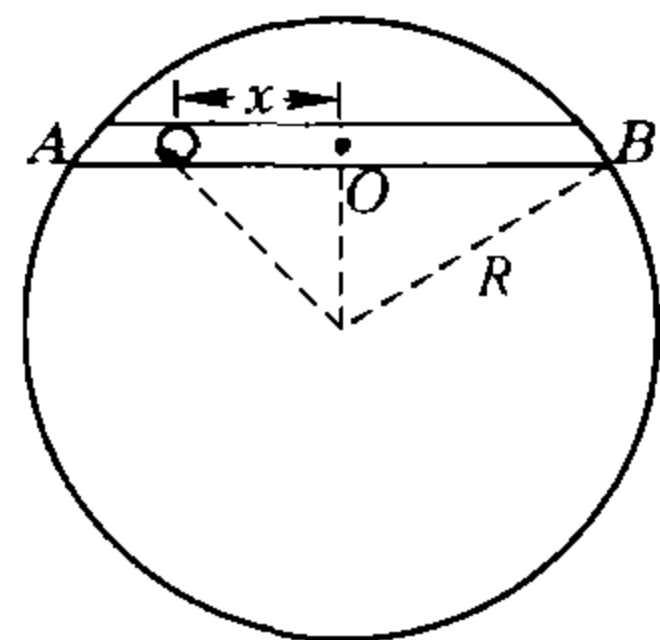


图 12-4

动, 这只需证明小球在隧道中受线性回复力. 如图 12-4 所示, 设地心到隧道的距离为 d , 取隧道中点为坐标原点 O, 当小球的位置矢量为 x 时, 所受引力大小为

$$F = \frac{GMm}{R^3} \sqrt{x^2 + d^2}.$$

此力沿隧道方向的分力为

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{GMm}{R^3} \sqrt{x^2 + d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \\ &= -\frac{GMm}{R^3} \cdot x = -\frac{mg}{R} \cdot x. \end{aligned}$$

可见小球在隧道中受到大小与位移成正比而方向相反的回复力作用, 它使小球在隧道中做简谐运动, 回复力

常数 $k = \frac{mg}{R}$, 振幅 $A = \frac{L}{2}$, 圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

由于小球的运动方式为谐振, 从 A 点由静止出发穿越隧道到达 B 点历时恰为半个周期, 即

$$t = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

关注一下这个结论可以发现, 穿越地球隧道的时间是一个定值, 与隧道长度并无关系, 而这个时间又是近地卫星绕地球半周所需时间: 第一宇宙速度 $v_1 = \sqrt{gR}$, $t = \frac{\pi R}{v_1} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$. 这个有趣的巧合并非偶然, 而正说明近地卫星的匀速圆周运动与小球沿隧道的简谐运动的相关性.

小球的最高速度出现在过 O 点时

$$v_{\max} = \omega A = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

若以谐振的平衡位置 O 为零势能位置, 小球振动的总能量

$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2.$$

本题中, 当小球运动到隧道两端时, 在 O 点处的动能全部转化为势能, 大小为

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{R} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mgL^2}{8R}.$$

例 4 力心 A、B 相距 l , 一质量为 m 的质点受与距离平方成反比的有心斥力作用而平衡于两点连线上的 O 点, 若将质点稍稍偏离其原平衡位置, 试确定其运动情况.

分析与解 如图 12-5 所示, 设力心 A、B 所施平方反比力之比例系数为

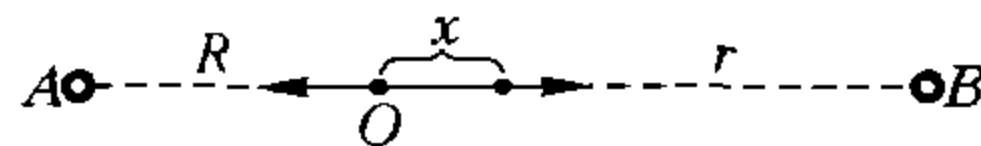


图 12-5

K, k , 则质点在 O 点时的受力满足 $\frac{K}{R^2} = \frac{k}{r^2}$, 式中 R, r 为 O 点到力心 A、B 的距离

$$R = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} + \sqrt{k}} l, r = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{K} + \sqrt{k}} l.$$

现取质点对 O 有一小位移 x , 此时 A 、 B 对质点的斥力大小分别为

$$F_A = \frac{K}{(R+x)^2} = \frac{K}{R^2} \left(1 + \frac{x}{R}\right)^{-2};$$

$$F_B = \frac{k}{r^2} \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-2}.$$

考虑到小幅振动, x 远小于 R 、 r , 运用牛顿二项式展开 $\left(1 + \frac{x}{R}\right)^{-2}$ 与 $\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-2}$, 舍去高阶小量而取前两项得

$$F_A = \frac{K}{R^2} \left(1 - 2 \frac{x}{R}\right); F_B = \frac{k}{r^2} \left(1 + 2 \frac{x}{r}\right).$$

那么, 质点所受合力

$$\begin{aligned} \Sigma F &= F_A - F_B = \frac{K}{R^2} \left(1 - 2 \frac{x}{R}\right) - \frac{k}{r^2} \left(1 + 2 \frac{x}{r}\right) \\ &= \frac{K}{R^2} - \frac{k}{r^2} - 2 \left(\frac{K}{R^3} + \frac{k}{r^3}\right) x, \end{aligned}$$

注意到 $K/R^2 = k/r^2$, 则

$$\Sigma F = -2 \left(\frac{K}{R^3} + \frac{k}{r^3}\right) x = -2 \frac{(\sqrt{K} + \sqrt{k})^4}{\sqrt{Kk} l^3} x.$$

可见质点受一线性回复力作用, 故而做简谐运动, 因回

复力常数为 $2 \frac{(\sqrt{K} + \sqrt{k})^4}{\sqrt{Kk} l^3}$, 则谐振周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2 \frac{(\sqrt{K} + \sqrt{k})^4}{\sqrt{Kk} l^3}}} = \frac{\pi l}{(\sqrt{K} + \sqrt{k})^2} \sqrt{2ml \sqrt{Kk}}.$$

单摆在做小幅振动、回复力可视为 $F = -\frac{mg}{l} \cdot x$

时, 亦为谐振, 其周期 $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. 式中, l 即摆长, g 是重力加速度. 一个形式复杂的摆动实体, 如若它的动力学描述及运动基本形态类同于单摆, 我们便可以通过适当的变换, 使它与某一理想单摆等效而成为一个等效单摆, 这时等效单摆的周期可运用公式 $T = 2\pi$

$\sqrt{\frac{l}{g}}$ 求得.

通常寻求单摆等效的途径有三条:

(1) 考察提供回复力的是重力的哪一部分, 或还有其他何种力参与提供回复力, 以确定单摆周期公式中 g 的等效值——寻求等效的 g' .

(2) 考察摆球运动围绕哪个中心, 即等效的悬点何在, 以确定摆长 l 的等效值——寻求等效的 l' .

(3) 考察等效摆振动的圆频率 ω , 由于 $\omega^2 = \frac{g}{l}$, 便可确定等效的 $\sqrt{l/g}$ ——寻求等效的 ω' .

下面, 我们对每种情况给出示例, 展示这三种等效过程的特色与操作方法.

★确定等效的重力加速度 g' .

例 5 如图 12-5, 摆线长为 l 的单摆悬于架上, 架固定于小车. 使小车沿倾角为 φ 的斜面以加速度 a 做匀加速运动, 求此时单摆振动的周期.

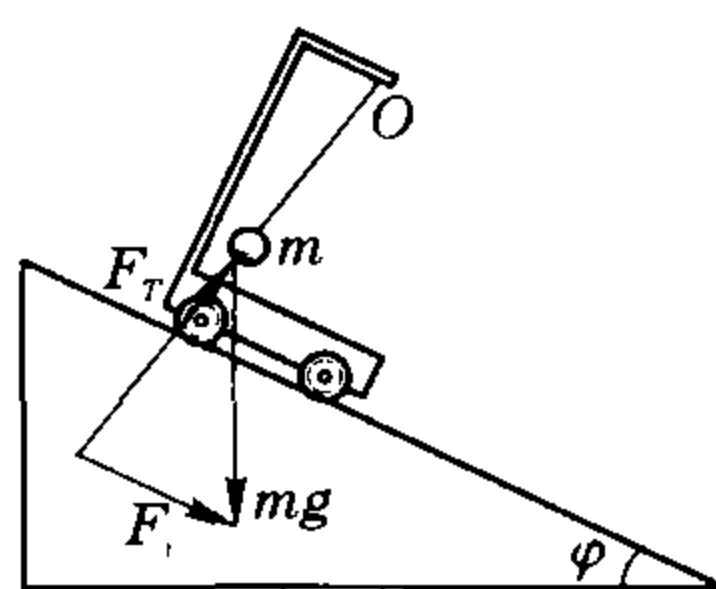


图 12-5

分析与解 摆球在线绳拉力及重力作用下, 同时做沿斜面方向、加速度为 a 的匀加速运动和对悬点 O 的摆动.

以加速下滑的小车为参考系, 在振动的平衡位置时, 小球受到重力 mg 、绳拉力 F_T 、及惯性力 $F_i = ma$, 如图 12-5. 由三力平衡, 得

$$\begin{aligned} F_T &= m \sqrt{g^2 + a^2 - 2ag \cos(90^\circ - \varphi)} \\ &= m \sqrt{g^2 + a^2 - 2agsin \varphi}. \end{aligned}$$

与理想摆相比较, 此单摆摆动过程中的回复力就是由 $m \sqrt{g^2 + a^2 - 2agsin \varphi}$ 的切向分力来提供的, 等效的 $g' = \sqrt{g^2 + a^2 - 2agsin \varphi}$, 于是该摆周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + a^2 - 2agsin \varphi}}.$$

容易得到, 若小车加速度沿斜面向上, 则

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + a^2 + 2agsin \varphi}}.$$

由上, 确定等效的 g' 的操作方法是

- ① 确定摆球振动的平衡位置;
- ② 确定摆在此位置时摆线上的力 F_T ;
- ③ 等效的重力加速度 $g' = \frac{F_T}{m}$.

★确定等效悬点及摆长 l'

例 6 如图 12-6, 光滑的细杆组成夹角为 α 的人字架. 一根长度为 l 的轻线套在架子上, 线的两端共系一个重球 C , 架竖直放置, 试求重球在人字架平面内做小振动的周期.

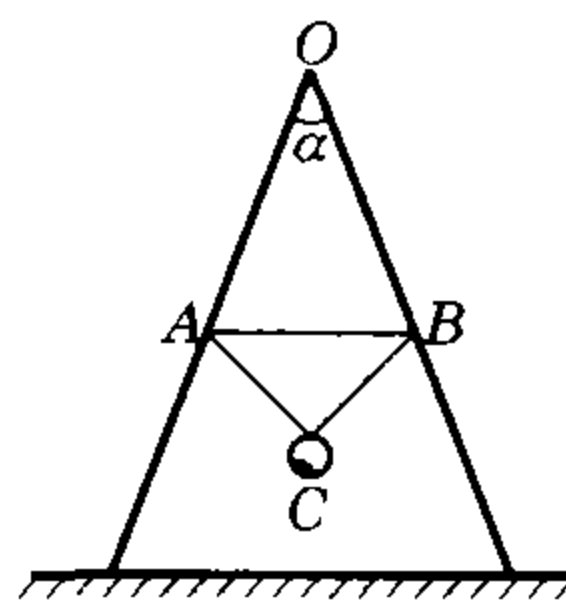


图 12-6

分析与解 在图 12-6 所示位置时, 重球在重力及两边线拉力作用下平衡, 显然, 重力及两线拉力的合力作用线过人字架顶点 O , 故推测 O 点可等效为悬点, 而 \overline{OC} 为等效的摆长. 摆球在人字架平面内的小幅振动是在重力与两线拉力作用下发生的, 其动力学机制与单摆相同, 本题难点在确定重球摆动中与 O 点的距离始终等于 \overline{OC} .

首先, 应注意到根据题给条件, 不管摆球在什么位置, 套在光滑杆上的两边线与杆所成的角总相等, 如图

12-7 所示. 因为两边线上等大力的合力必垂直于杆, 否则线不可能平衡.

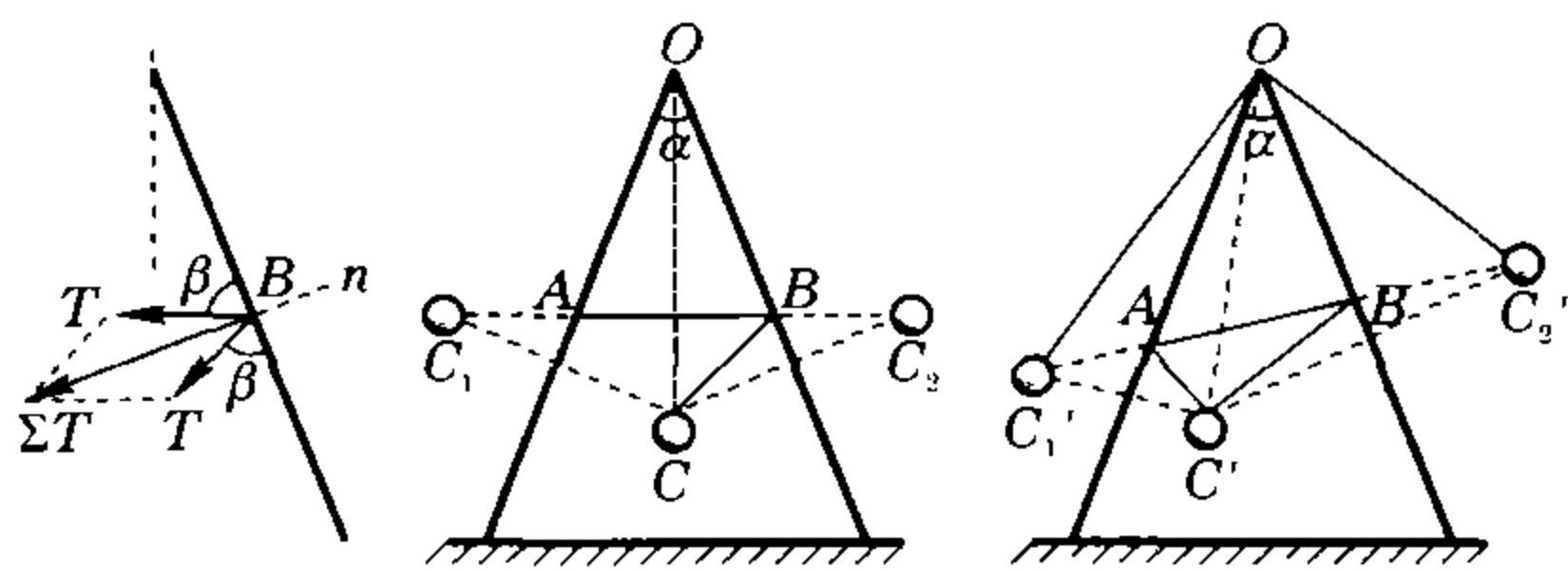


图 12-7

图 12-8

图 12-9

考察球在初始位置 C 时, 取 C 关于两杆对称位置 C_1, C_2 , 如图 12-8 所示. 由于前述两线与杆所成角度相同, C_1, C_2 与线、杆相套点 A, B 在一直线, 且 $\overline{C_1 C_2} = l, \angle C_1 O C_2 = 2\alpha, \overline{OC} = \overline{OC_1} = \overline{OC_2}$. $\triangle C_1 O C_2$ 是顶角为 2α 、底边长 l 的等腰三角形.

当摆球处于振动中任一位置 C' , 同样地, 取 C' 关于两杆的对称位置 C_1', C_2' , 如图 12-9, C_1', C_2' 连线也必过此时线、杆相套点 A, B , 且 $\overline{C_1' C_2'} = l, \angle C_1' O C_2' = 2\alpha, \overline{OC'} = \overline{OC_1'} = \overline{OC_2'}$, $\triangle C_1' O C_2'$ 仍是顶角为 2α 、底边长 l 的等腰三角形, 与 $\triangle C_1 O C_2$ 全等, 可见 $\overline{OC} = \overline{OC'}$, 即摆球在摆动过程中, 到 O 点的距离是确定的, 始终等于 \overline{OC} , 则 O 点等效为悬点, 而 \overline{OC} 等效为摆长的推测成立.

由图 12-8 可知, 等效摆长即 $\triangle C_1 O C_2$ 腰长, 故 $l' = \frac{l}{2\sin \alpha}$, 于是我们求得重球做小振幅振动时的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g\sin \alpha}}$$

例 7 如图 12-10, 秋千的一根绳子的固定点 A 比另一根绳的固定点 B 高 b , 秋千两根支架相距为 a , 两根绳子长度分别是 l_1 和 l_2 , 并且 $l_1^2 + l_2^2 = a^2 + b^2$. 试求人坐在这样的秋千上小摇荡的周期. (人的大小与上述长度相比可忽略不计)

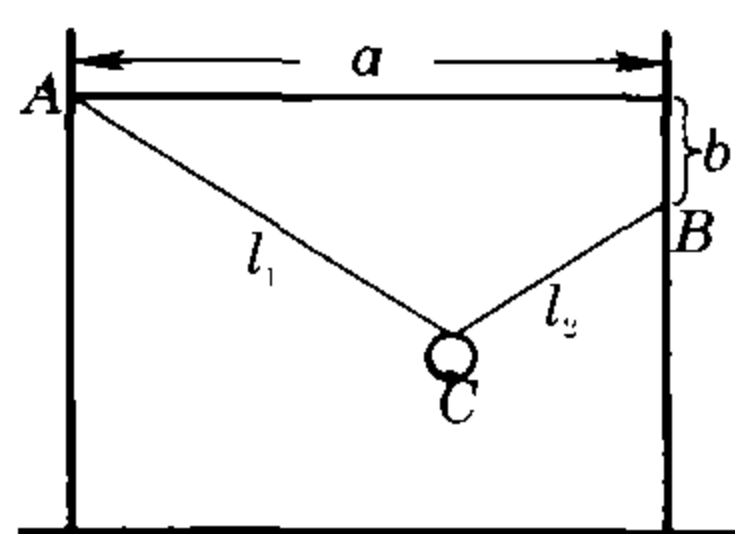


图 12-10

分析与解 秋千振动时, 人与两绳构成的面绕过 A, B 的轴摆动, 像这类关于固定轴的小幅振动, 事实上可以用一系列相互等效的单摆来等效替代. 如图 12-11 所示, 这些单摆的等效悬点可以取轴上的任意一点, 因为摆球的振动是对固定轴上所有点发生的, 这些单摆的等效摆长也就相应地取等效悬点到摆球球心的距离, 显然, 其长度在振动过程中不会变. 当我们把固定轴上某一点视作等效悬点时, 尚须等效变换重力加速度 g : 将重力在竖直面内沿平行于转轴方向及等效摆线(悬点到摆球的平衡位置 C) 的方向分解, 前者

不影响振动, 后者的切向分力提供该悬点、摆长下振动的回复力. 在所有可行的等效悬点中, O 点是一个特殊的点: 重力就在 OC 方向上, 当我们取 O 为等效悬点、 \overline{OC} 为等效摆长时, 重力加速度 g 无须作等效变换, 只要确定等效摆长, 即可确定摆的周期. 这当然是最妙的等效操作法了.

回到秋千. 如图 12-12, 取秋千处于平衡位置 C , 连接秋千绳的两个固定点 A, B , 将秋千所受重力作用线反向延长与 \overline{AB} 交于 O 点, 取 O 点为秋千摆的等效悬点, O 点到秋千平衡位置 C 的距离 \overline{OC} 为等效单摆摆长 l' , 由几何关系得 C 到 AB 的距离为 $x = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$l' = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{l_1 l_2}{a}, \text{ 则秋千小幅摆动的周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 l_2}{ag}}$$

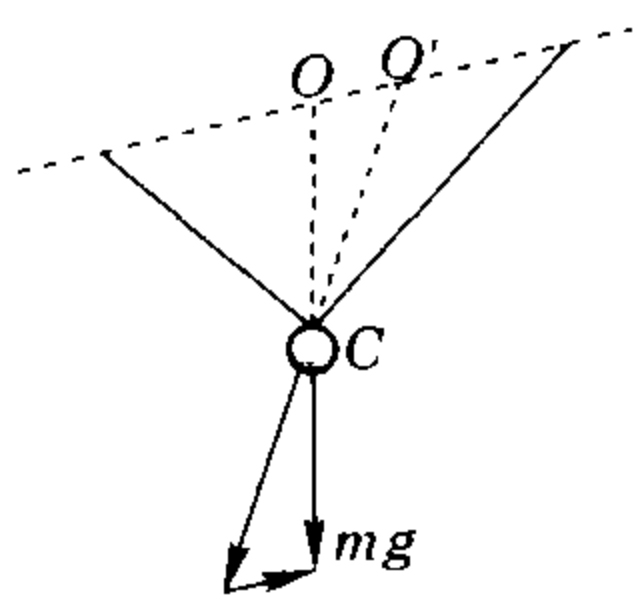


图 12-11

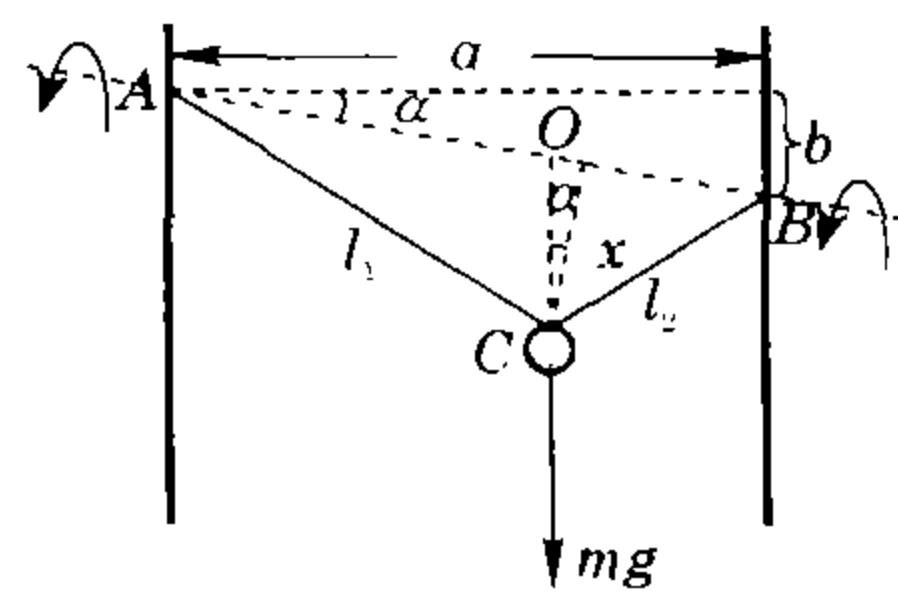


图 12-12

在有多多个可等效的悬点、摆长时, 首选等效悬点及摆长的操作是

- ① 连接两悬点的直线为转轴;
- ② 摆球所受重力作用线反向延长与转轴的交点为首选等效悬点;
- ③ 取首选等效悬点与摆球间的距离为等效摆长 l' .

★ 确定等效的 $\sqrt{\frac{l}{g}}$

例 8 如图 12-13, 摆球质量为 m , 凹形滑块质量为 M , 摆长为 l . m 与 M, M 与水平面之间光滑, 令摆线偏转很小角度后, 从静止释放, 求系统的振动周期 T .

分析与解 本题中, 加上一个凹形滑块后, 振动系统欲等效为某理想摆, 即要考虑等效 g 值, 又要考虑等效摆长, 故我们可循第三条途径——寻求其圆频率与理想单摆圆频率的关系以期求解.

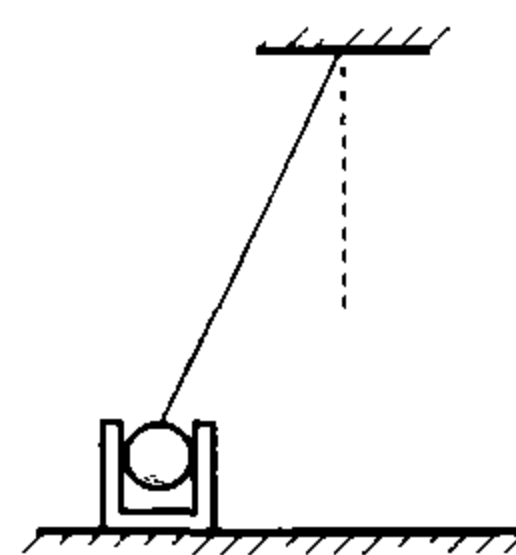


图 12-13

未放凹形滑块的单摆, 是以圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 振动的, 设振幅(即参考圆半径)为 A , 最大偏角为 $\theta (A = l\theta)$, 由系统振动能量守恒, 有

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}m(\omega A)^2. \quad ①$$

现设想带有凹形滑块的异形摆以同样的振幅做圆频率为 ω' 的振动, 则有

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}(m+M)(\omega' A)^2. \quad ②$$

比较①、②两式, 可得

$$(M+m)\omega'^2 = m\omega^2,$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{m}{M+m}}\omega = \sqrt{\frac{mg}{(M+m)l}}.$$

即该摆等效于圆频率为 $\sqrt{\frac{mg}{(M+m)l}}$ 的理想单摆, 则周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+m)l}{mg}}.$$

例 9 一个单摆, 由一根刚性轻杆和杆端质量为 m 的重物组成, 做小振幅的自由振动. 如果在杆上某点再固定一个和杆端重物质量相同的重物, 使原单摆变成一个异形复摆, 其振动周期最多改变百分之几?

分析与解 本题中摆的周期也须通过寻求等效的圆频率来确定.

设未加另一质量亦为 m 的重物时, 单摆圆频率为 ω , 振幅为 A , 最大偏角为 θ , 以 l 表示杆长, 应有

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}m(\omega A)^2. \quad ①$$

设复摆以同样的振幅做圆频率为 ω' 的振动, 另一重物位置在杆悬挂端下 x 处, 其振幅应为 $\frac{x}{l}A$, 则有

$$\begin{aligned} mgl(1 - \cos \theta) + mgx(1 - \cos \theta) \\ = \frac{1}{2}m(\omega' A)^2 + \frac{1}{2}m(\omega' \cdot \frac{x}{l}A)^2. \end{aligned} \quad ②$$

比较①、②两式, 得

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{l(l+x)}{l^2+x^2}}.$$

$$\text{则 } \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l^2+x^2}{l(l+x)}}, \delta = \frac{\Delta T}{T} = 1 - \sqrt{\frac{l^2+x^2}{l(l+x)}}.$$

现在来求 δ 的最值

$$\begin{aligned} \frac{l^2+x^2}{l(l+x)} &= \frac{(l+x)^2 - 2lx}{l(l+x)} = \frac{l+x}{l} - \frac{2x+2l-2l}{l+x} \\ &= \frac{l+x}{l} + \frac{2l}{l+x} - 2, \end{aligned}$$

该式当 $\frac{l+x}{l} = \frac{2l}{l+x}$, $x = (\sqrt{2}-1)l$ 时有最小值 $2(\sqrt{2}-1)$, 故 $\frac{\Delta T}{T}$ 的最大值为 $1 - \sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \approx 0.0898$, 即异形复摆振动周期最多改变约 9%.

归纳以上两例, 当一个振动系统的动力学原因和表观均较单摆有变异、因而难以单独地确定等效的 g

值或 l 值时, 可以通过对圆频率这个表征单摆运动的重要参量, 利用参考圆, 利用谐振中能量守恒来寻求等效, 从而解决单摆振动周期公式中 $\sqrt{l/g}$ 这个因子的取值.

关于复摆的更多内容, 我们将在专题 14 中进行研究. 下面我们讨论振动的动力学问题

例 10 如图 12-14, 质量为 M 的小平板固定在劲度系数为 k 的轻弹簧上, 弹簧的另一端固定在地上, 有一质量为 m 的小球沿入射角 θ 方向以速度 v_0 射向小平板, 并发生完全弹性碰撞. 忽略一切摩擦, 求碰撞后小平板的振动方程.

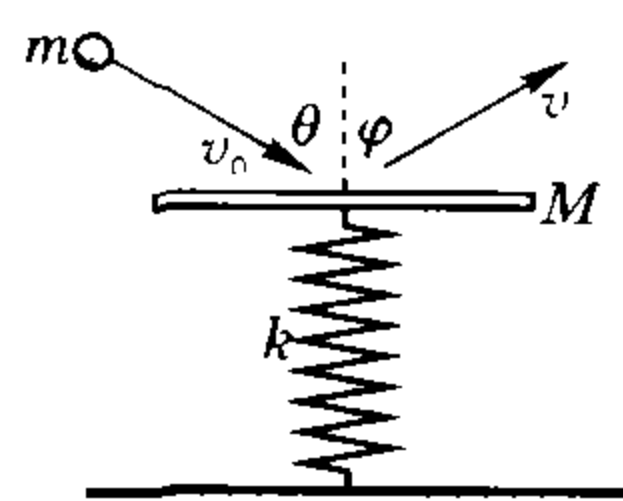


图 12-14

分析与解 为了得到小平板的振动方程, 我们需要确定平板做简谐运动的振幅、圆频率与初相位. 平板振动的圆频率即 $\sqrt{\frac{k}{M}}$; 由于碰撞发生在板的平衡位置, 可知其振动的初相位为 $\frac{\pi}{2}$; 根据小球与平板所发生的完全弹性碰撞的规律, 可以求出平板开始振动的初速度, 再由能量守恒关系, 求出平板下降的最大高度即其振幅 A .

球对板的入射速度为 v_0 , 方向与竖直成 θ 角, 设球与板碰后速度变为 v' , 平板获得速度为 V , 球离开板的速度大小为 v , 方向遵守反射定律, 亦与竖直成 θ 角, 根据弹性碰撞规律, 各速度矢量间关系如图 12-15 所示, 由图得

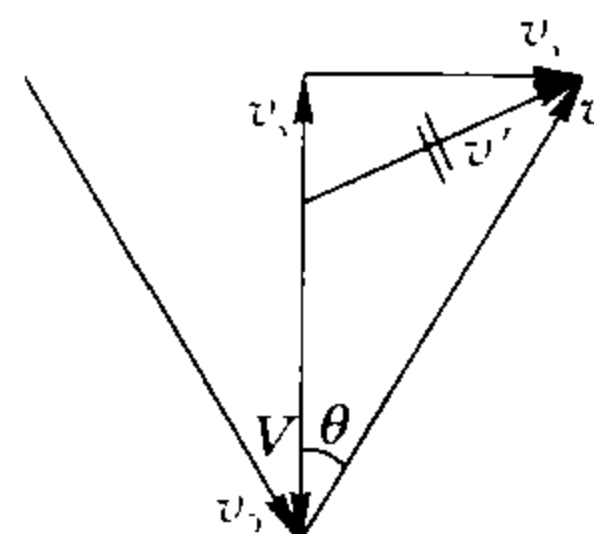


图 12-15

$$v_x' = v_0 \sin \theta,$$

$$v_y' = v_0 \cos \theta - V.$$

又由动能守恒, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) + \frac{1}{2}MV^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_0 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}m(v_0 \cos \theta - V)^2 + \frac{1}{2}MV^2. \end{aligned}$$

$$\text{解得 } V = \frac{2m \cos \theta}{M+m} v_0.$$

此后根据平板开始在竖直方向做简谐运动, 机械能守恒, 当速度为零时, 板有最大位移 A , 有

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{2m \cos \theta}{M+m} v_0\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

$$\text{则振幅为 } A = \frac{2mv_0 \cos \theta}{M+m} \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

于是可得平板振动方程为

$$x = \frac{2mv_0 \cos \theta}{M+m} \sqrt{\frac{M}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

例 11 如图 12-16 所示, 小车质量 $M=4 \text{ kg}$, 由静止开始沿倾角 $\alpha=30^\circ$ 的斜面自 $h=5 \text{ m}$ 高处滑下, 与一弹簧缓冲器相碰而自由振动, 然后又冲上斜面. 若缓冲器弹簧的劲度系数 $k=100 \text{ N/m}$. 求缓冲器弹簧的最大压缩量及小车被缓冲的时间.

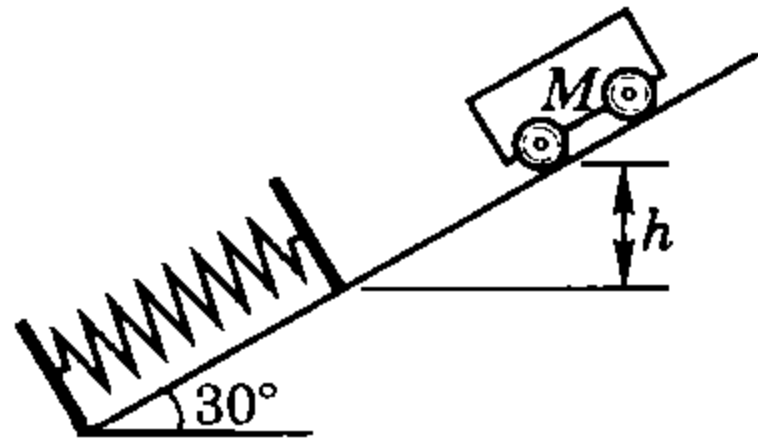


图 12-16

分析与解 小车从 5 m 高处滑下, 以 $v=\sqrt{2gh}=10 \text{ m/s}$ 的速度与缓冲器相碰, 继而压缩弹簧到最低点, 而后被弹簧重新推上斜面, 将车与弹簧接触过程视作自由振动, 这个振动的圆频率为 $\sqrt{k/M}$, 若小车在平衡位置时弹簧压缩量为 x_0 , 则 $x_0=\frac{Mg\sin\alpha}{k}$. 以平衡位置为零势能位置, 能量关系满足

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}MV^2.$$

式中 V 为过平衡位置时小车具有的最大速度, 由此式解得

$$V = \sqrt{\frac{Mg^2 \sin^2 \alpha}{k} + 2gh} \approx 10.05 \text{ m/s}.$$

若设振幅为 A , 则由 $V=A\omega$, 可得

$$A = \sqrt{\frac{Mg^2 \sin^2 \alpha}{k} + 2gh} \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \approx 2 \text{ m}.$$

弹簧的最大压缩量

$$x = x_0 + A = 2.2 \text{ m}.$$

缓冲时间也就是小车简谐运动历时. 这里要注意, 小车与弹簧从相碰到分离并不是一个整周期, 我们利用参考圆来分析, 如图 12-17, 以沿斜面向上为 x 轴正方向, 小车刚碰着弹簧开始振动的位置距坐标原点(平衡位置)为 x_0 ,

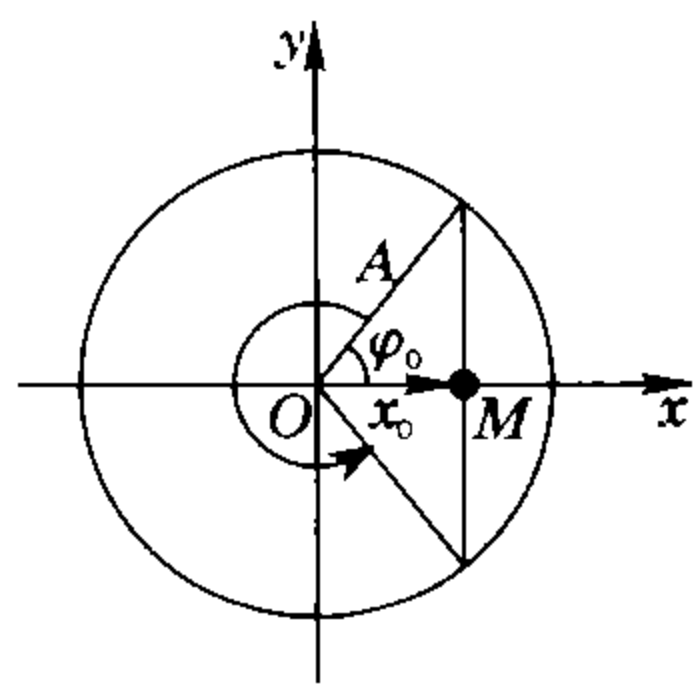


图 12-17

相位为 φ_0 , $\varphi_0 = \arccos \frac{x_0}{A} =$

$\arccos \frac{1}{10}$. 于是可求出缓冲过程总共历时

$$t = \frac{\pi - \varphi_0}{\pi} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \approx 0.7 \text{ s}.$$

振幅随时间而减小的振动称为阻尼振动, 阻尼振动也就是能量减少的振动. 能量减少的方式通常为摩擦阻力的存在使振动能量转变为热以及振动能量以波的形式向四周辐射. 摩擦阻力中一般以粘滞阻力最重要. 在速度不大时, 振动物体受到的粘滞阻力与速度成

正比: $f = \gamma v$, γ 称为阻力系数, 由介质的性质和振动物体的形状所决定. 在有阻力的情况下, 物体振动所受力为在线性力 kx 上增加一个力 f , 相应地振动圆频率将由固有圆频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 变为 ω , ω 与 ω_0 有 $\omega^2 = \omega_0^2 -$

$(\frac{\gamma}{2m})^2$ 的关系, 式中 $\frac{\gamma}{2m}$ 称做阻尼因数 β . 阻尼振动的振幅随时间逐渐减小, 相隔一个周期 T 的两个相继振幅的比值为 $e^{-\beta T}$, βT 称做对数减缩. 阻尼振动的周期保持定值, 只是较无阻尼时长 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

例 12 用如图 12-18 所示的实验装置可以测定液体的粘滞系数: 在弹簧上悬挂一薄板 A , 测定它在空气中的周期 T_0 , 然后把薄板放在欲测粘滞系数的液体中, 令其振动, 测定周期 T . 已知薄板质量为 m , 表面积为 S , 液体的粘滞阻力 $f = 2S\eta v$, v 为运动速度. 确定液体的粘滞系数.

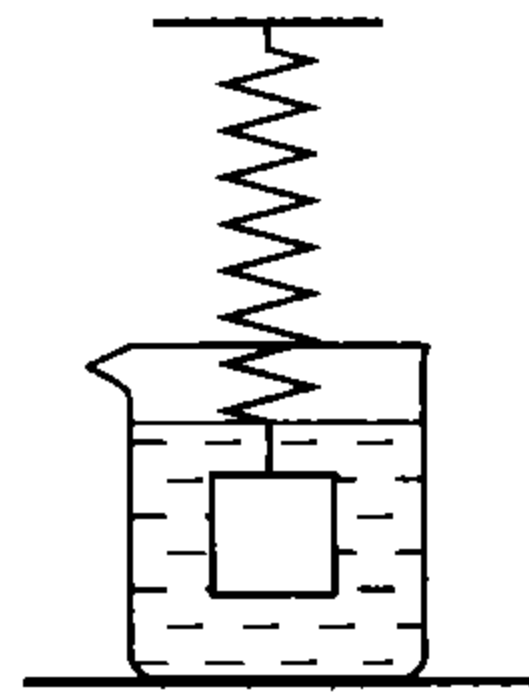


图 12-18

分析与解 粘滞阻力 $f = 2S\eta v$, 则薄板在液体中减幅振动的

阻尼因数 $\beta = \frac{2S\eta}{2m}$, 由周期公式

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{2S\eta}{2m})^2}} \text{ 及 } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

得

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{2S\eta}{2m})^2}},$$

即 $(\frac{2S\eta}{2m})^2 = \frac{T^2 - T_0^2}{T^2} \omega_0^2 = \frac{T^2 - T_0^2}{T^2} (\frac{2\pi}{T_0})^2$.

由此可得 $\eta = \frac{2\pi m \sqrt{T^2 - T_0^2}}{STT_0}$.

小球身乎

1. 如图 12-19 所示, 甲、乙二摆球质量分别为 M 、 m , 以不计质量的硬杆将二摆球连接在一起, 甲球摆长为 l , 乙球摆线很长, 两球在同一水平面上静止. 现使之做小振幅的摆动, 它的周期是_____.

2. 三根长度均为 $l=2.00 \text{ m}$, 质量均匀的直杆, 构成一正三角形框架 ABC , C 点悬挂在一光滑水平转轴上, 整个框架可绕转轴转动, 杆 AB 是一导轨, 一电动玩具松鼠可在导轨上运动, 如图 12-20 所示. 现观察到松鼠正在导轨上运动而框架却静止不动, 试论证松鼠的运动是一种什么样的运动并作描述.

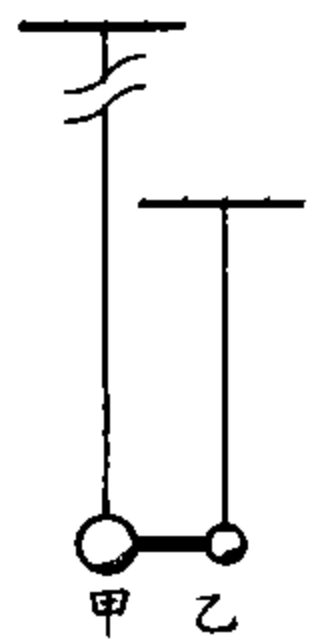


图 12-19

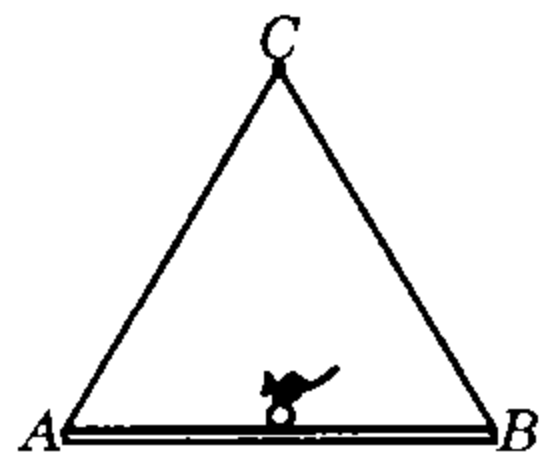


图 12-20

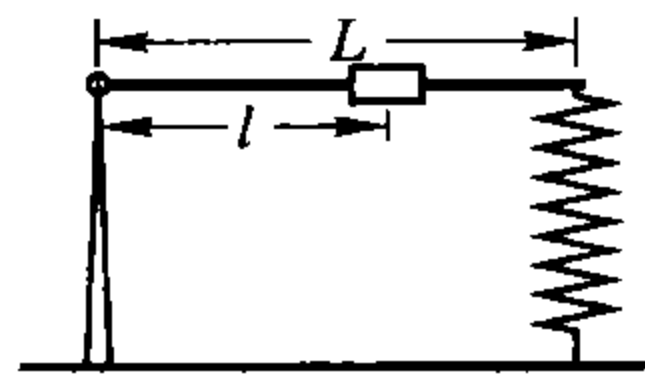


图 12-21

3. 长度为 L 的轻铁杆, 一端固定在理想的铰链上, 另一端搁在劲度系数为 k 的弹簧上, 杆上有一质量为 m 的重物, 如图 12-21 所示. 试确定铁杆做小振动的周期与重物在杆上的位置之关系.

4. 如图 12-22 所示, 质量为 m 的均匀长木板水平地置于两个匀速反向转动的轮上. 设轮与木板间摩擦因数为 μ , 两轮间距离 l , 平衡时长木板重心在 $l/2$ 处. 若将木板稍稍拉过一小段后放手, 则木板将在轮上做往复振动, 这种振动是简谐运动吗? 若是, 求其周期.

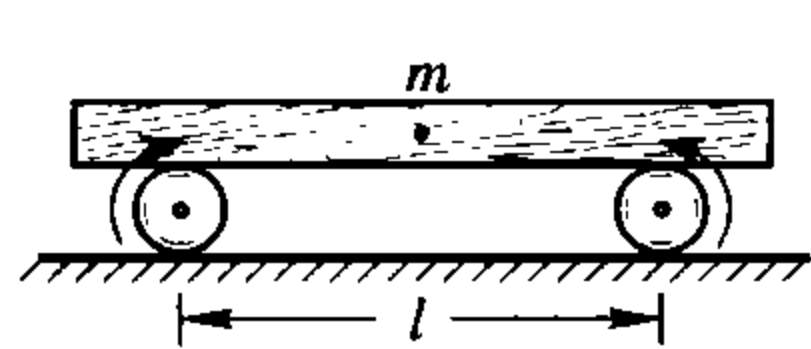


图 12-22

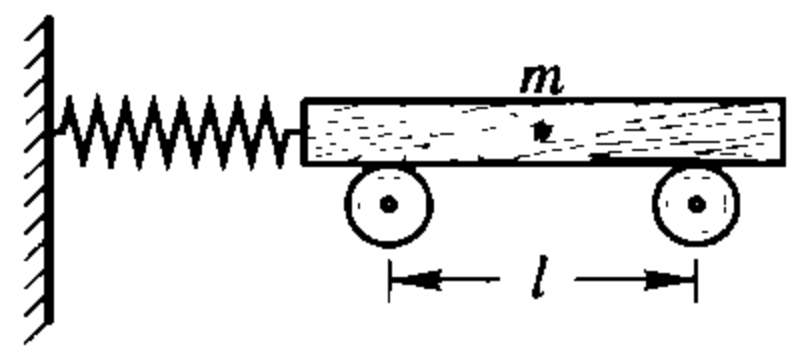


图 12-23

5. 如图 12-23 所示, 质量为 m 的均匀木板对称地放在两个滚柱上, 两滚柱轴线间的距离为 l , 其中一个滚柱和板之间摩擦因数为 μ , 而在另一个滚柱上, 板可无摩擦地滑动. 用一劲度系数为 k 的弹簧将板连接在竖直墙壁上, 当板处于平衡位置时, 使不光滑的滚柱快速旋转起来. 问动摩擦因数 μ 为多大, 木板相对平衡位置有了位移后可做简谐运动? 振动的圆频率是多少?

6. 某栋高层大楼的电梯服务员是一位一丝不苟的人, 他为按时结束一天的工作, 把一台准确的摆钟挂在电梯的壁上. 电梯向上加速和向下加速的时间相同, 加速度大小也相同. 试问电梯服务员是按时结束工作, 还是超时或提早了呢?

7. 轻硬杆的一端带有重物, 另一端用铰链固定在墙上 A 点, 杆可以向各个方向转动, 如图 12-24 所示. 一根长度为 l 的不可伸长的线沿竖直方向系在杆的中点, 以保持杆处于水平位置. 使重物具有垂直图面方向的动量, 试求系统小振动的周期 T .

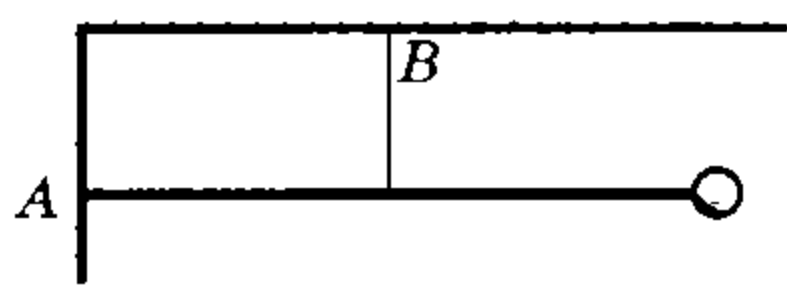


图 12-24

8. 如图 12-25 是一种记录地震的仪器——倾斜摆的示意图. 摆球 m 固定在边长为 l 、质量可忽略的等边三角形框架 ABC 上, 可绕 AB 杆摆动, AB 杆和竖直墙夹角为 α . 求摆球做微小摆动的周期.

9. 在天花板下用两根长度同为 l 的轻绳吊一质量为 M 的光滑匀质木板, 板中央有一质量为 m 的小滑块, 如图 12-26 所示. 开始时系统静止, 然后使板有一个水平的横向小速度 v_0 , 试求振动周期.

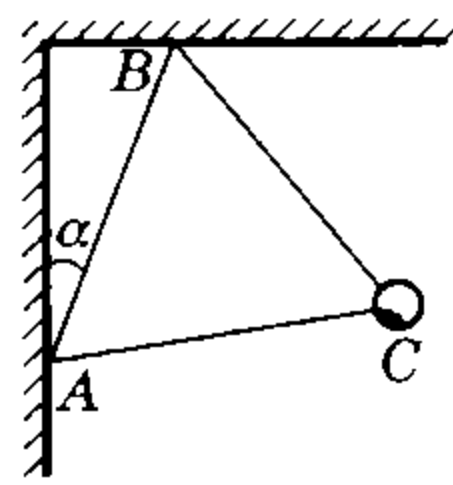


图 12-25

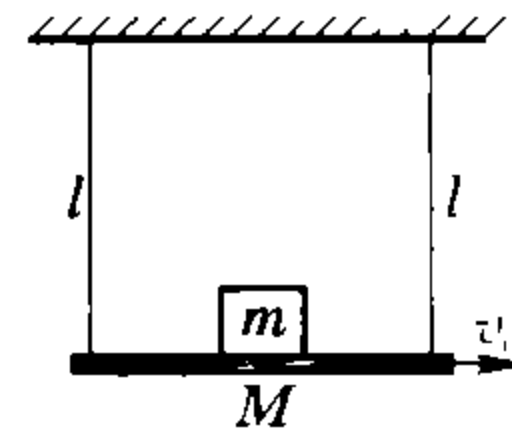


图 12-26

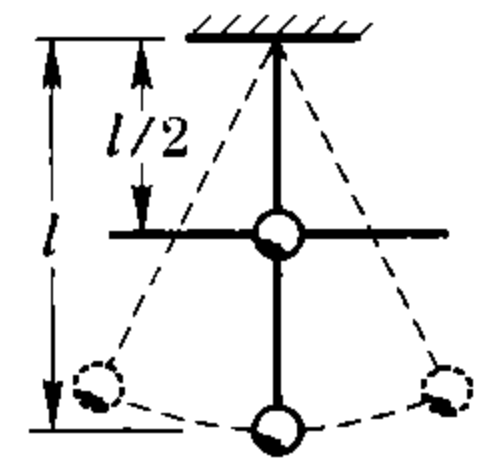


图 12-27

10. 数学摆是由长度为 l 的轻杆, 一个固定在杆的自由端上的小铅球所组成. 现在, 在杆上套一粒同铅球质量相等的小球, 它可以沿着杆中点的水平线自由地滑动, 如图 12-27 所示. 试求这种摆小振动的周期, 摩擦不计.

11. 如图 12-28 所示, 质量为 M 、长为 L 的均匀细刚性杆一端悬挂, 可在竖直平面内绕悬点 O 无摩擦地摆动. 质量为 $m = M/3$ 的小虫相对杆以速度 v 缓慢地沿杆向下爬行. 开始时, 杆静止并与竖直线成一个小角度 θ_0 , 小虫位于杆上端悬点处. 释放杆, 杆开始摆动, 小虫开始爬行, 试求 (1) 小虫沿杆爬行 l 距离时, 杆振动的圆频率; (2) 小虫爬行到杆下端时, 系统的能量减为初时的 $\sqrt{5/6}$, 求杆的摆动幅度 θ_1 .

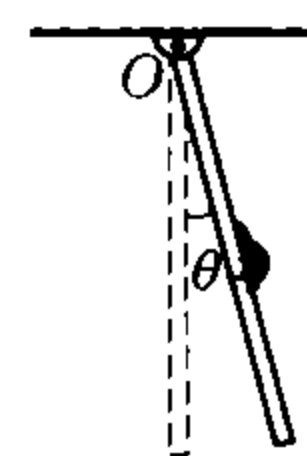


图 12-28

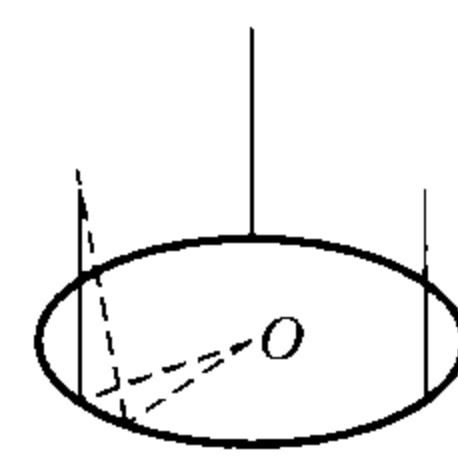


图 12-29

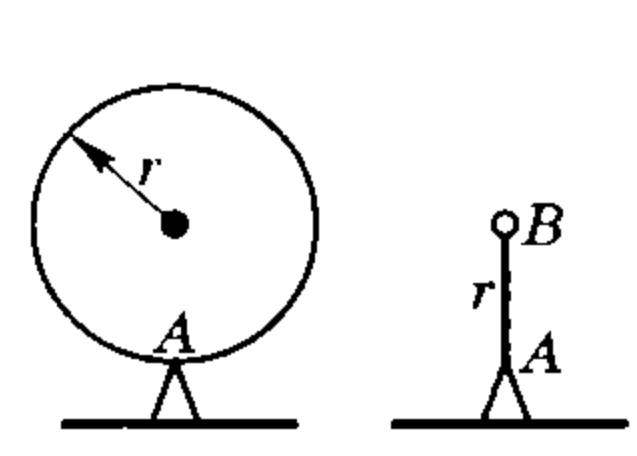


图 12-30

12. 一质量为 m 、半径为 r 的圆板用三根长均为 l 的细线悬于天花板上, 连接点恰好三等分圆板的圆周, 如图 12-29 所示. 若圆板绕过其中心 O 的铅直轴做微小转动, 试求其周期.

13. 细轴环用铰链固定于 A 点, 开始这样放置轴环, 使它的质心位于 A 点正上方, 如图 12-30 所示. 此后轴环自由下落, 经时间 $\tau = 0.5$ s, 轴环的质心处于最低位置. 有一摆是小重球 B 固定在轻硬杆上, 杆的长度等于轴环的半径, 如果开始小球处于最高位置并自由落下, 试问此摆经过多少时间 t 返回到下面的平衡位置.

14. 如图 12-31 所示, 半径为 R 的细圆环, 其质量与固定在其上的两个相同小重物相比可忽略不计. 在环上与两小重物等距处钻个孔,

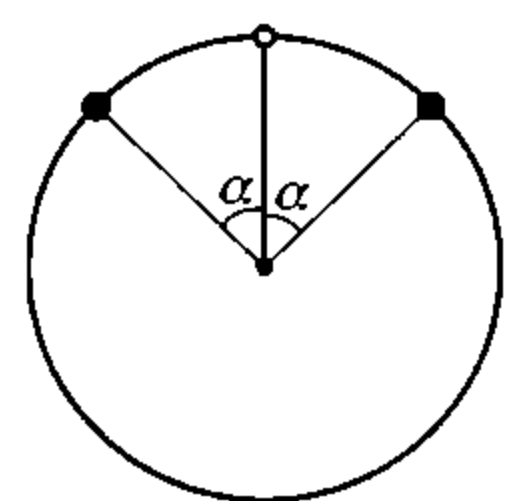


图 12-31

将孔穿过墙壁上的钉子而把环悬挂起来,使环可以在竖直平面内无能量损失地做微小简谐振动(象摆一样).两小重物的位置关系可以用它们之间的角距离 2α 表征.试求该摆的振动周期 T 及其随 α 变化的图线.

15. 质量为 10 g 的物体做简谐运动,振幅为 24 cm ,周期为 4 s ;当 $t=0$ 时坐标为 $+24\text{ cm}$.试求:(1)当 $t=0.5\text{ s}$ 时物体的位置.(2)当 $t=0.5\text{ s}$ 时作用在物体上力的大小和方向.(3)物体从初位置到 $x=-12\text{ cm}$ 处所需的最短时间.(4)当 $x=-12\text{ cm}$ 时物体的速度.

16. 一物体在水平面上做简谐运动,振幅为 10 cm ,当物体离开平衡位置 6 cm 时,速度为 24 cm/s .

(1)问周期是多少?

(2)当速度为 $\pm 12\text{ cm/s}$ 时,位移是多少?

(3)如果在振动的物体上加一小物体,当运动到路程的末端时,小物体相对于物块刚要开始滑动,求它们之间的摩擦因数?

17. 两个系统,每个都是由两个质量均为 m 的相同物体组成,两物体间用劲度系数为 k 的弹簧相连.两系统以大小相同的恒定速度 v 相向运动.某时刻,将相碰的两物体间距离 L ,如图 12-32 所示.问经过多少时间后,这两物体间的距离又等于 L ? 设碰撞是完全弹性的.

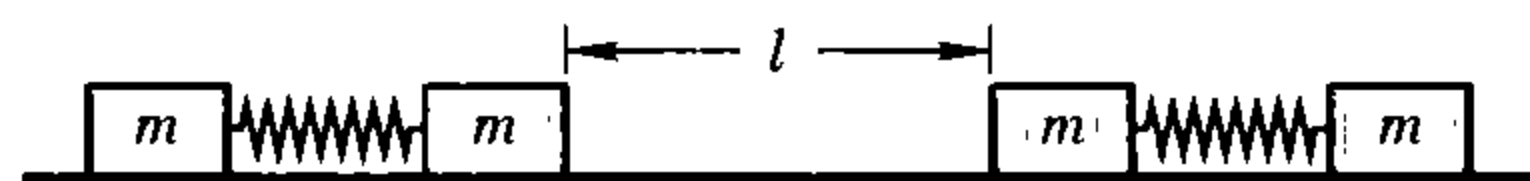


图 12-32

18. 平台 A 的质量为 m ,由劲度系数为 k 的轻弹簧来支持.弹簧上端与 A 相连,下端与地面相连,物块 B 的质量也是 m ,自由地放在平台中心,现用竖直向下的力 $F = \sqrt{2\pi^2 + 4}mg$ 把弹簧压下(仍在弹性限度内),如图 12-33 所示,并在系统静止时撤去外力,求此后 A、B 的运动情况及两者各自到达的最大高度.

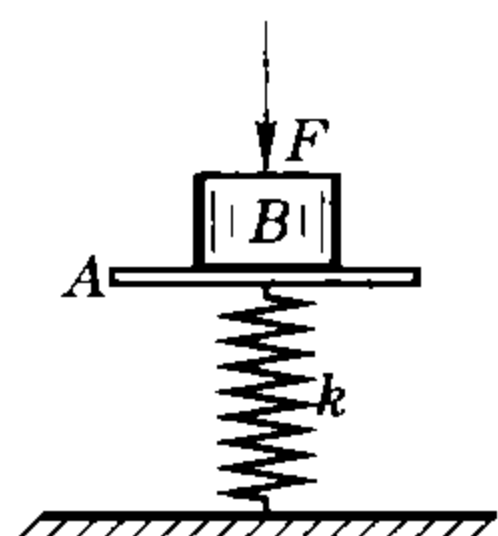


图 12-33

19. 在盛密度为 ρ_1 的液体的大容器中放入一只底面积为 S 的小圆柱形容器,在这个容器的底部又插入一根细导流管,如图 12-34 所示.两只容器壁均静止不动,在小的容器中注入密度为 $(\rho_2 > \rho_1)$ 的染了颜色的液体,使其高度

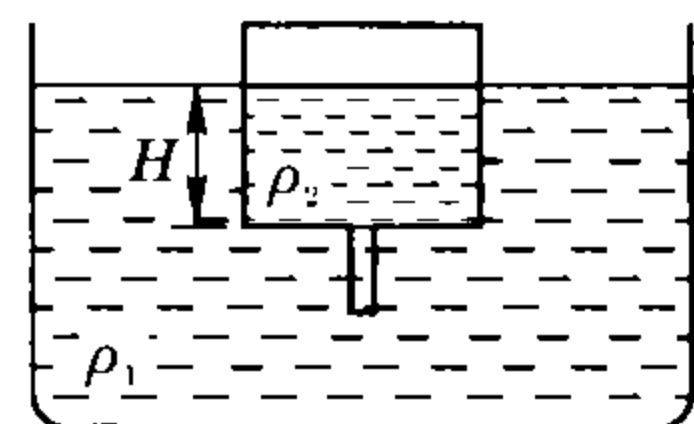


图 12-34

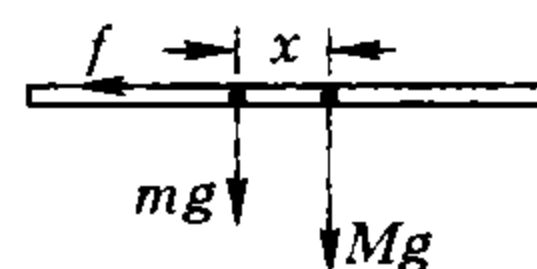
至 H ,以使与外面容器的液面相平.然后打开细管上端,可以看到重液通过细管流入大容器并沉入底部,但经过一段时间轻液开始进入小容器中,以后这个过程

重复地进行着.如果假设液体不会混合且表面张力不计,试求第一次从小容器里流出的重液的质量 Δm_1 是多少?在以后每次循环中,流进小容器的轻液的质量 Δm_n 和从小容器里流出的重液的质量 Δm_k 各是多少?

20. 在弹簧上悬挂重 6 kg 的物体.当无阻力时,物体振动周期 $T=0.4\pi\text{ s}$,而在阻力与速度成正比时,其周期为 $T_1=0.5\pi\text{ s}$,试求当振动速度为 1 cm/s 时所受的阻力大小.

参考答案

1. 振动系统的回复力仅由甲球重力提供,因乙球摆长很长,重力始终过悬点,无切



图答 12-1

向分力.则回复力常数为 $\frac{Mg}{l}$,振动系统的质量为 $M+m$,故

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(M+m)l}{Mg}}$$

2. 导轨受力如图答 12-1,因框架静止,对 C 点有 $f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l = mg \cdot x$;对松鼠,其所受回复力大小 $f' = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \cdot x$,方向显然总与位移 x 方向相反,可见做简谐

运动,周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{2g}} \approx 2.6\text{ s}$.

3. 振动系统处于平衡位置时,若重物距铰接点 l ,由力矩平衡: $mgl = kx_0L$, x_0 是弹簧形变量.

现设振动中重物有一位移 x ,如图答 12-2,则其所受合力为 $\Sigma F = mg - F'$,而对轻铁杆有

$$F'l = k\left(\frac{L}{l}x + x_0\right)L.$$

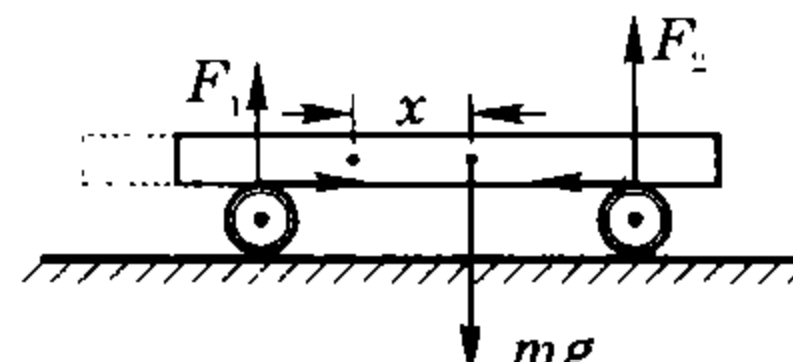
$$\Sigma F = mg - \frac{L}{l} \left[k\left(x_0 + \frac{L}{l}x\right) \right] = -\frac{L^2}{l^2}kx.$$

$$\text{可知} \quad T = 2\pi \frac{l}{L} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4. 木板处于平衡位置时,两轮对板的摩擦力大小相等均为 $\mu \cdot \frac{mg}{2}$,方向相反;当有一位移 x ,例如板重心向右轮移动 x 时,板受力如图答 12-3,其中

$$F_1 = \frac{\frac{l}{2} - x}{l} mg,$$

$$F_2 = \frac{\frac{l}{2} + x}{l} mg.$$



图答 12-3

板往复运动的回复力由两轮对板的摩擦力提供:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= \mu F_1 - \mu F_2 = \mu \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right) \right] mg \\ &= -\frac{2\mu mg}{l} x.\end{aligned}$$

$\frac{2\mu mg}{l}$ 是常量, 可见板受到线性回复力作用而往复振

动, 是简谐运动, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2\mu g}}$.

5. (1) 若左轮不光滑且顺时针转动, 板受到向右的摩擦力, 平衡时 $kx_0 = \mu \cdot \frac{l/2 - x_0}{l} mg$, 再有一位移 x 时 $\Sigma F = \mu \cdot \frac{l - x_0 - x}{l} mg - k(x_0 + x) = -(\frac{\mu mg}{l} + k)x$. 可见振动可以实现, 且

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} + \mu \frac{g}{l}}.$$

(2) 若左轮不光滑, 且逆时针转动, 可得

$$\Sigma F = \mu \cdot \frac{l + x_0 + x}{l} mg - k(x_0 + x) = -(k - \frac{\mu mg}{l})x.$$

则当 $\mu < \frac{kl}{mg}$ 时振动可实现, 且 $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} - \mu \frac{g}{l}}$; 右轮不光滑逆时针转时情况同(1), 右轮不光滑顺时针转时情况同(2).

6. 向上加速的电梯中, 摆的等效 $g' = g + a$, 而加速下降电梯中, 摆的等效 $g' = g - a$, 由 $\frac{t}{T_0} = \frac{t_0}{T}$, $t = \frac{t_0 T_0}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} t_0$, 则因加速, 上升过程钟面时间 t 比客观时间 t_0 长, $t_{\uparrow} = \frac{\sqrt{g+a}}{\sqrt{g}} t_0$; 下降过程钟面时间 t 比客观时间 t_0 短, $t_{\downarrow} = \frac{\sqrt{g-a}}{\sqrt{g}} t_0$. 每上下一次, 钟面读数与客观时间相差为.

$$t_0 \left(\sqrt{1 + \frac{a}{g}} + \sqrt{1 - \frac{a}{g}} - 2 \right).$$

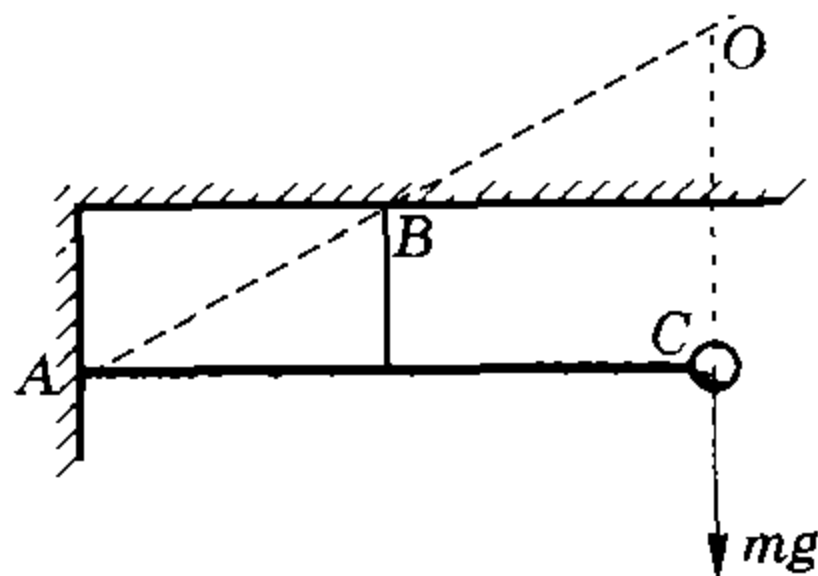
$$\text{由于 } \left(\sqrt{1 + \frac{a}{g}} + \sqrt{1 - \frac{a}{g}} \right)^2 = 2 + 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{g^2}} < 4,$$

$$\text{可知 } t_0 \left(\sqrt{1 + \frac{a}{g}} + \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \frac{a}{g}} - 2 \right) < 0,$$

说明每上下一次, 钟面指示时间比实际时间少, 以此钟指示时间为据此人超时工作了.

7. 如图答 12-4, 连接 AB, 将重物所受重力的作用线反向延长交 AB 于 O, 容易得到等效摆长为 $2l$, 则 T



图答 12-4

$$= 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

8. 如图答 12-5, 过 C 作竖直线交 AB 延长线于 O, \overline{OC} 为等效摆长 L , 由正弦定理,

$$\frac{L}{\sin 60^\circ} = \frac{l}{\sin \alpha}, L = \frac{\sqrt{3}l}{2\sin \alpha}.$$

则周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{2g\sin \alpha}}.$$

9. 摆长为 l , 振幅为 $l\theta$ 的理想单摆满足

$$(M+m)gl(1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)(\omega_0 A)^2,$$

对振动实体机械能守恒, 有

$$(M+m)gl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}M(\omega A)^2,$$

比较两式, 得

$$\omega = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \cdot \omega_0,$$

则

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml}{(M+m)g}}.$$

10. 摆长为 l , 振幅为 $l\theta$ 的理想单摆满足

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}m(\omega_0 A)^2.$$

此题中复摆的能量关系是

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega \frac{A}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\omega A\right)^2,$$

则

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{4g}} = \pi \sqrt{\frac{5l}{g}}.$$

11. 先确定绕杆一端以角速度 ω 转动的均匀细杆的动能, 如图答 12-6 示: E_k

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{m}{n} \left(\omega \cdot i \frac{L}{n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{6} m(\omega L)^2.$$

图答 12-6

(1) 当小虫爬到距悬点 l

处时, 虫与杆构成的振动系统能量关系为

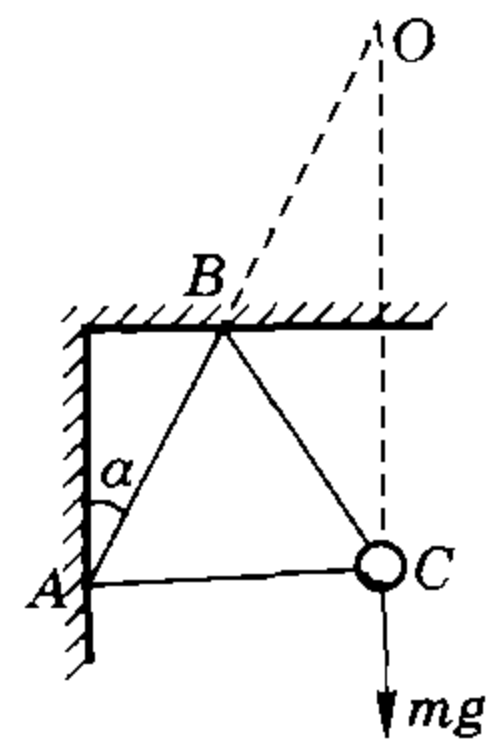
$$mgl(1 - \cos \theta) + Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2}m(\omega l\theta)^2 + \frac{1}{6}M(\omega L\theta)^2.$$

而对 $A = L\theta$ 的理想摆, 有

$$gL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}(\omega_0 L\theta)^2.$$

由此二式得



图答 12-5

$$\omega = \sqrt{\frac{3mlL + \frac{3}{2}ML^2}{3ml^2 + ML^2}} \omega_0 = \sqrt{\frac{2l-3L}{2(l^2-L^2)}} g.$$

(2) 小虫在悬点时

$$E_0 = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta_0) \approx \frac{1}{4} MgL \cdot \theta_0^2.$$

小虫在杆最下端时, 有

$$\begin{aligned} E_i &= Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta_i) + mgL(1 - \cos \theta_i) \\ &\approx \frac{1}{4} MgL \cdot \theta_i^2 + \frac{1}{2} mgL \cdot \theta_i^2 \\ &= \frac{5}{12} MgL \cdot \theta_i^2, \end{aligned}$$

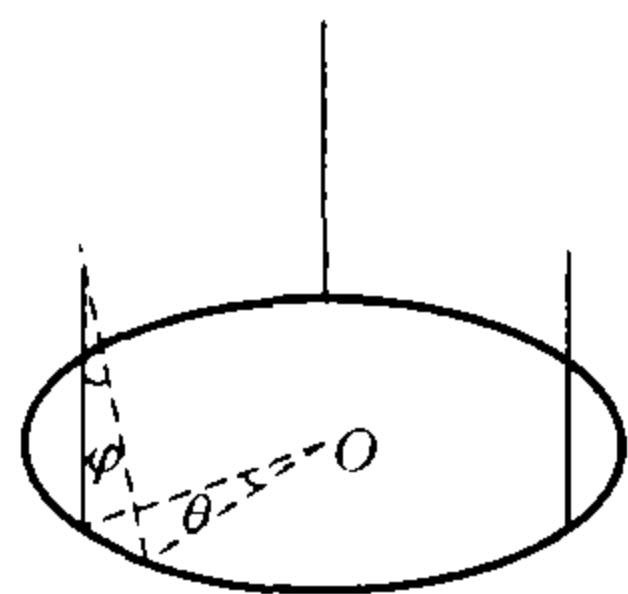
$$\text{则 } \frac{E_0}{E_i} = \frac{3\theta_0^2}{5\theta_i^2} = \sqrt{\frac{6}{5}}, \theta_i = \sqrt[4]{\frac{3}{10}} \theta_0.$$

12. 摆长为 l 、振幅为 $l\varphi$ 的理想单摆满足

$$mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} m(\omega_0 A)^2.$$

$$\text{周期为 } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

本题中, 如图答 12-7 所示, 将圆板从平衡位置转过一个小角度 θ , 这时, 每根悬线偏离竖直方向一个小角度 φ , 然后无初速释放, 使圆板绕过其中心 O 的竖直轴做小幅往复转动, 转动过程中系统机械能守恒, 有



图答 12-7

$$mgl(1 - \cos \varphi) = E_k.$$

用微元法计算半径为 r 的圆盘角速度为 ω 时动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{m}{\pi r^2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{r}{n} \cdot \frac{r}{n} (\omega \cdot i \frac{r}{n})^2 \\ &= m\omega^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4} m(\omega r)^2. \end{aligned}$$

现设圆盘到最低点时边缘质点线速度为 $A\omega'$, 有

$$mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{4} m(A\omega')^2,$$

$$\omega' = \sqrt{2} \omega_0,$$

则

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

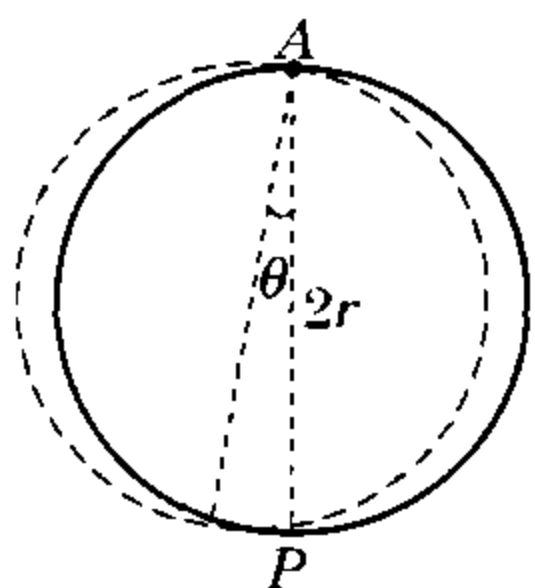
13. 摆长为 r 、最大摆角 θ 的理想摆满足

$$mgr(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m(\omega_0 r\theta)^2.$$

如图答 12-8 所示半径为 r 的环绕 A 点转动, 直径 AP 转过偏角 θ 时, 对 P 处小质元有

$$\Delta mg 2r(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \Delta m(\omega 2r\theta)^2,$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\omega_0 r\theta}{\omega 2r\theta}\right)^2 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0.$$

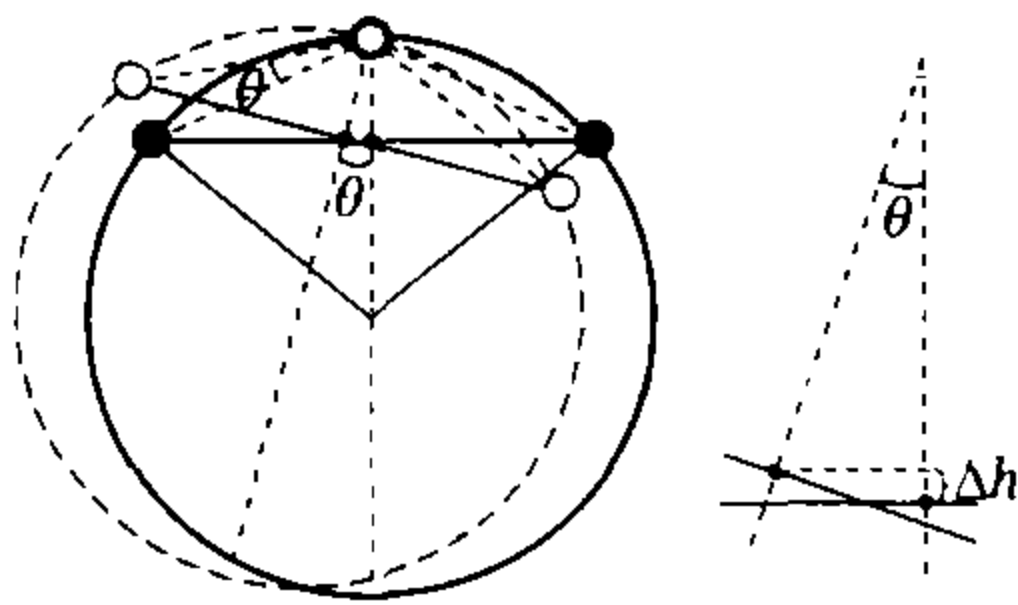


图答 12-8

这正是细轴环与小重球角速度的关系, 则两者同样转过 π 所需时间之比为

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{2}, t = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ s}.$$

14. 两小重物运动示意如图答 12-9, 设系统从平衡位置偏离最大幅度为一小角度 θ , 取小重物到悬挂处距离为摆长 $l = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, 取小重物通过的圆弧为振幅 $A =$



图答 12-9

$(2R \sin \frac{\alpha}{2}) \cdot \theta$, 这样的理想单摆满足

$$\begin{aligned} &mg(2R \sin \frac{\alpha}{2}) \cdot (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} m[\omega_0 (2R \sin \frac{\alpha}{2}) \theta]^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R \sin \frac{\alpha}{2}}}$$

而对该摆动实体, 从最大摆幅位置到平衡位置, 质心高度变化为

$$\Delta h = R(1 - \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \theta),$$

两小重物轨道圆半径为 A , 则由机械能守恒, 有

$$mgR(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m[\omega(2R \sin \frac{\alpha}{2}) \theta]^2 \quad (2)$$

比较①②两式, 得

$$\frac{(1 - \cos \alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \omega = \frac{(1 - \cos \alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}} \omega_0,$$

代入 ω_0 即得该摆周期为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$, 与 α 无关, 故有

$T-\alpha$ 坐标中的图线为一平行于 α 轴的直线.

15. 根据题给条件, 物体振动方程为

$$x = 0.24 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \text{ m},$$

$$(1) x_1 = 0.24 \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 0.5\right) = 12\sqrt{2} \text{ cm},$$

$$(2) F_1 = m\omega^2 x_1 = 0.010 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{12\sqrt{2}}{100} = \frac{3\sqrt{2}\pi^2}{10000} \text{ N}.$$

$$(3) \text{由 } -12 = 24 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right), \text{ 得}$$

$$t_1 = \frac{4}{3} \text{ s}.$$

$$(4) v = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{24}{100} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}\pi}{50} \text{ m/s}.$$

16. (1) 作如图答 12-10 所示谐振参考圆, 由图得

$$v = \omega A \sin \varphi \Rightarrow \omega = 3 \text{ rad/s.}$$

$$T = -\frac{2\pi}{3} \text{ s.}$$

$$(2) v = \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}.$$

$$x = 2\sqrt{21} \text{ cm.}$$

(3) 路程末端小物体回复力由最大静摩擦力提供

$$\mu mg = m\omega^2 A, \mu = 0.09.$$

17. 两系统以 $2v$ 速度接

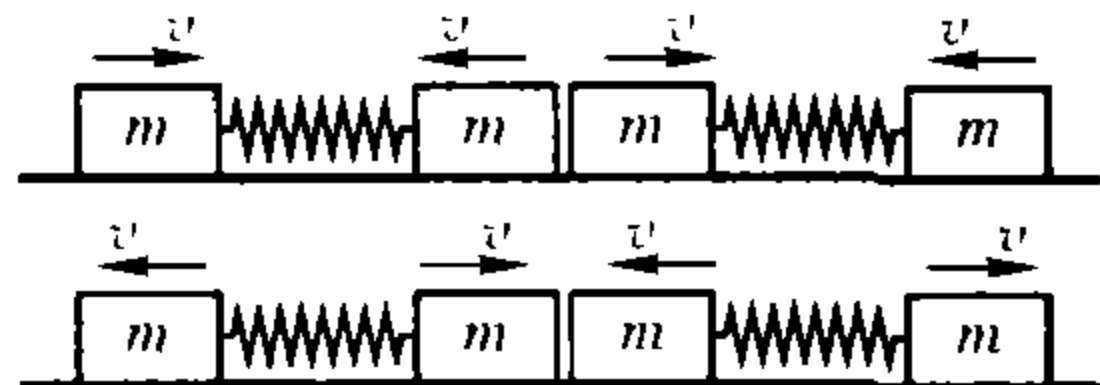
近, 经时间 $t_1 =$

$\frac{L}{2v}$, 发生完全弹

性碰撞, 碰撞的

两物体交换速度

如图答 12-11,



图答 12-11

然后两系统分别做 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 的谐振, 经半个周期,

弹簧恢复原长, 两系统第二次碰撞并交换速度, 使两系

统以 $2v$ 速度分离, 经 $t = 2t_1 + \frac{T}{2} = \frac{L}{v} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, 两系

统间距又为 L .

18. A、B 处于平衡时, $x_0 = \frac{2mg}{k}$, 而一起振动的振

幅 $A = \sqrt{2\pi^2 + 4}\frac{mg}{k}$, 圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$. 当系统从平衡

位置下方振幅处释放, 先一起做简谐运动, 取竖直向上为 y 轴正方向, 振动方程为

$$y = \sqrt{2\pi^2 + 4}\frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \pi\right).$$

当到达平衡位置上方 x_0 处, 弹簧自然伸长, 此时 A、B 速度为 v

$$v = \omega A \sin \varphi = \omega A \frac{\sqrt{A^2 - x_0^2}}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{2\pi^2 + 4}\frac{mg}{k}\right)^2 - \left(\frac{2mg}{k}\right)^2} = \pi g \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

此后 B 以 v 竖直上抛, A 则做 $\omega' = \sqrt{k/m}$ 的谐振, 由能

量守恒关系 $\frac{1}{2}k\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A'\omega')^2$, 求出 A

振动的振幅为

$$A' = \sqrt{\pi^2 + 1}\frac{mg}{k}.$$

相位为

$$\varphi' = \arccos \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}}.$$

振动方程为

$$y' = \sqrt{\pi^2 + 1}\frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \arccos \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}}\right).$$

B 可达到的最大高度为

$$h_B = \frac{v^2}{2g} = \frac{\pi^2 mg}{2k}.$$

A 可达到的最大高度为

$$h_A = A' - \frac{x_0}{2} = (\sqrt{\pi^2 + 1} - 1)\frac{mg}{k}.$$

B 回到分离处历时 $t_B = 2v/g = 2\pi\sqrt{m/k}$, 而 A 完成一个

周期 $T_A = 2\pi\sqrt{m/k}$ 回到分离处恰与 B 对碰并交换

速度, 接着 B 竖直上抛, A 向下简谐运动, 经 $T_A = t_B =$

$2\pi\sqrt{m/k}$, 两者开始以共同速度 $v = \pi g\sqrt{m/k}$ 向下以

$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ 做简谐运动到达释放位置, 以后将重复上述

过程, 整个过程中 B 到达的最高点距释放点为

$$H_B = \frac{mg}{k} \left(2 + \sqrt{2\pi^2 + 4} + \frac{\pi^2}{2}\right).$$

A 到达的最高点距释放点为

$$H_A = \frac{mg}{k} (\sqrt{2\pi^2 + 4} + \sqrt{\pi^2 + 1} + 1).$$

19. (1) 如图答 12-12, 设小容器底部开口与细管

相接触面积为 S' , 从此处流过

的小液片恰受力平衡时, 重液液

面下降 x_0 , 若称此为平衡面, 则

有

$$\rho_2 (H - x_0) g S' = \rho_1 H g S'.$$

图答 12-12

在此前(后)液面高(低)于平衡

面 x 时, 对应地流经细管上口的小液片所受合力为

$$\sum F = \rho_1 H g S' - \rho_2 (H - x_0 + x) g S' = -\rho_2 g S' x.$$

说明小液片以谐振形式从开口流

出, 当重液面下降 $2x_0$ 时, 重液向

下速度减为零, 此后将换成轻液片

上升. 故第 1 次从小容器中流出的

重液质量

$$\Delta m_1 = \rho_2 2x_0 S' = 2(\rho_2 - \rho_1) H S'.$$

图答 12-13

(2) 第二次轻液流入, 当细管口轻液片受力平衡时, 小容器内下部是高 $(H - 2x_0)$ 的重液, 上部轻液高度设为 x_0' , 如图答 12-13 示, 则

$\rho_2 (H - 2x_0) g S' + \rho_1 x_0' g S' = \rho_1 H g S'$, $x_0' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} H$.

同样可证, 轻液片以谐振形式通过开口流入小容器, 故

$$\Delta m_1 = \rho_1 2x_0' S' = 2(\rho_2 - \rho_1) H S',$$

在每次循环中进出小容器的重液与轻液质量总是

$$\Delta m = 2(\rho_2 - \rho_1) H S'.$$

直至小容器中重液全部替换成轻液.

直至小容器中重液全部替换成轻液.

$$20. \beta = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_1}\right)^2} = 5 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 3 \text{ s}^{-1}, \text{ 则}$$

$$f = 2m\beta v = 0.36 \text{ N.}$$

竞赛辅导

专题 13 波的几何描述与特征现象

沈 晨

教你一手

一、波的知识提升

1. 波的几何描述

(1)波前、波面与波线 当波源在弹性介质中振动时,振动将沿各个方向传播,为了形象地描述某一时刻振动传播到的各点的位置,我们在介质中做出该时刻振动所传播到的各点的轨迹,这种轨迹称为波前。

波源的振动在介质中传播时,我们可以做出振动步调相同的点的轨迹,例如 T 、 $2T$ 、 $3T$ ……各时刻处于波峰的质点的轨迹, $T/2$ 、 $3T/2$ 、 $5T/2$ ……各时刻处于波谷的质点的轨迹等,这种轨迹称为波面。波面可形象地描述波在传播时,各质点振动之间的相互关系;同一波面上的质点振动步调完全相同,在任何时刻振动步调总相同的点构成的波面是任意多的。波前是各点振动相位都等于波源初相位的波面。

为了形象地描述波的传播方向,我们可以做出方向处处与该处波的传播方向一致的线,叫波线。

在均匀介质中,振动从某质点(波源)向各个方向传播,波面是以波源为中心的球面,波线沿半径而垂直于波面,这种波被称为球面波;相应地,波面为一系列平面的波被称为平面波,平面波的波线是与波面垂直的许多平行线,如图 13-1 所示。

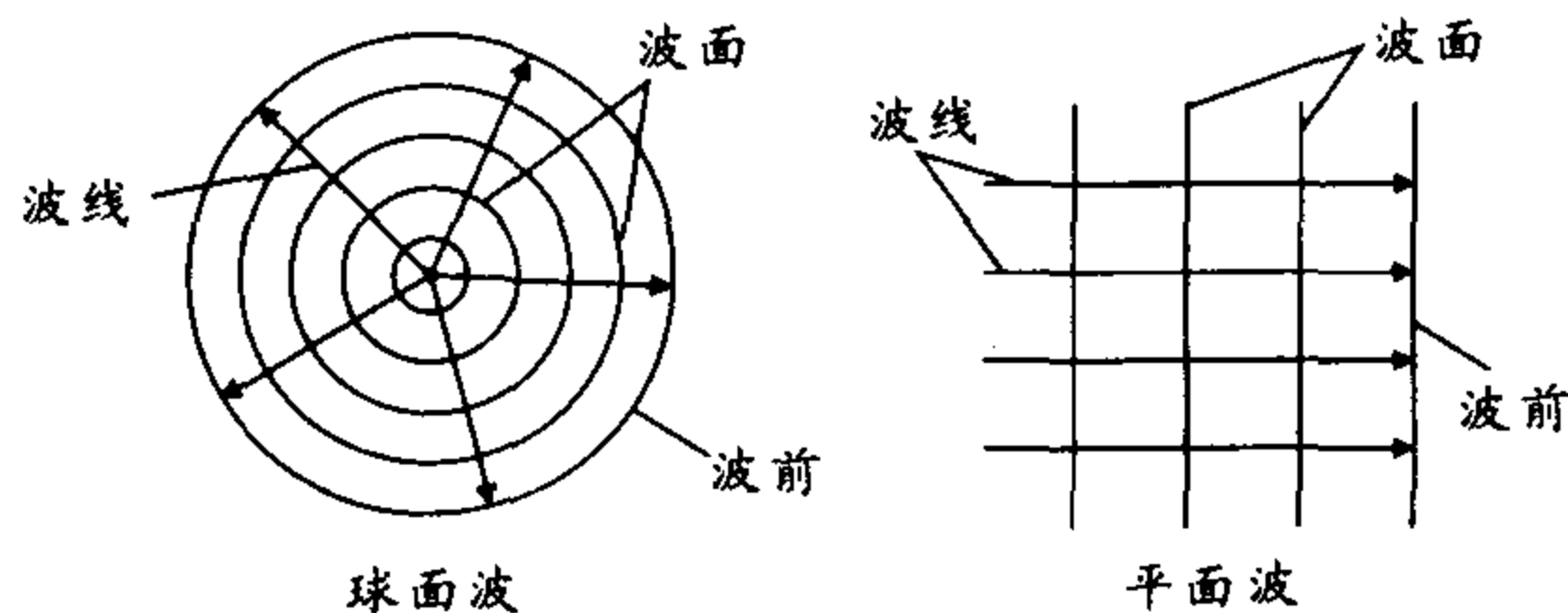


图 13-1

(2)惠更斯原理 介质中波动到达的各点,都可以看做是发射子波的波源,在其后的任一时刻,这些子波的轨迹决定新的波前。这个原理对任何波动过程——机械波或电磁波、在均匀或非均匀介质中的波动——均适用。利用惠更斯原理,只要知道某一时刻的波前,

即可用几何方法决定下一时刻的波前。

2. 波在两种介质界面上的现象

(1)波的反射 波在两种介质的界面改变传播方向,但仍在原介质中传播。波的反射中,反射角等于入射角,反射波的波长、频率和波速与入射波的相同。

(2)波的折射 波在两种介质的界面上改变传播方向且进入另一种介质中传播。波的折射中,折射波的频率不变,波速、波长均发生变化;入射角的正弦与折射角的正弦之比等于入射波波速与折射波波速之比,即 $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$, 比值 n_{21} 称为第二介质(折射波所在介质)对第一介质(入射波所在介质)的折射率。

3. 驻波

(1)驻波的形成与特点 两列反向传播的振幅相同、频率相同的波叠加时,形成驻波。当波在有限大小的弹性介质内传播时,入射波与被界面反射后反向传播的反射波叠加就会形成驻波。驻波的特点是静止不动的波节和振幅最大的波腹相间,但波形不向任何方向移动,与波形向前传播的行波不同。所以从驻波的成因来看,驻波是一种干涉现象;波节与波腹分别是振动抵消与振动最强的区域,他们的位置是不变的;从驻波上各质点的振动情况来看,实际上是有限大小的物体上有相互联系的无数质点整体的一种振动模式。

弹性物体中有波形完全相同的两列反向传播的简谐波叠加,如果每列波的波长为 λ , 周期为 T , 频率为 f , 振幅为 A 。某处一列波的波峰与另一列波的波谷相遇,该处质点的振动总是被抵消,为波节,与该处相距半波长处,必是一列波的波谷与另一列波的波峰相遇,此处也是波节,故相邻两波节之间的距离为 $\lambda/2$, 同理可知相邻两波腹间的距离也是 $\lambda/2$; 若某时刻两波形恰好反向叠加,则所有质点均处于平衡位置,驻波的波形为一条直线,经 $T/4$, 两列波分别反向传播 $\lambda/4$, 则两列波形恰好重合,此时两波节之间各质点的位移均为两列波位移相加,波腹处质点位移最大为 $2A$, 波节两侧质点位移方向相反,驻波的波形为一条振幅为 $2A$ 、波长为 λ 的正弦曲线,经 $T/2$, 驻波的波形为一条直

线,经 $3T/4$,驻波的波形又是振幅为 $2A$ 的正弦曲线,但与 $T/2$ 时刻的波形相反,经 T ,驻波的波形完成一次周期性变化,除波节外的各质点同时完成一次周期性振动,各质点振动的周期、频率相同,振幅在 0 到 $2A$ 之间不等,同一波节两侧质点的振动总是方向相反.如图13-2所示为驻波的波形在一个周期的变化情况.

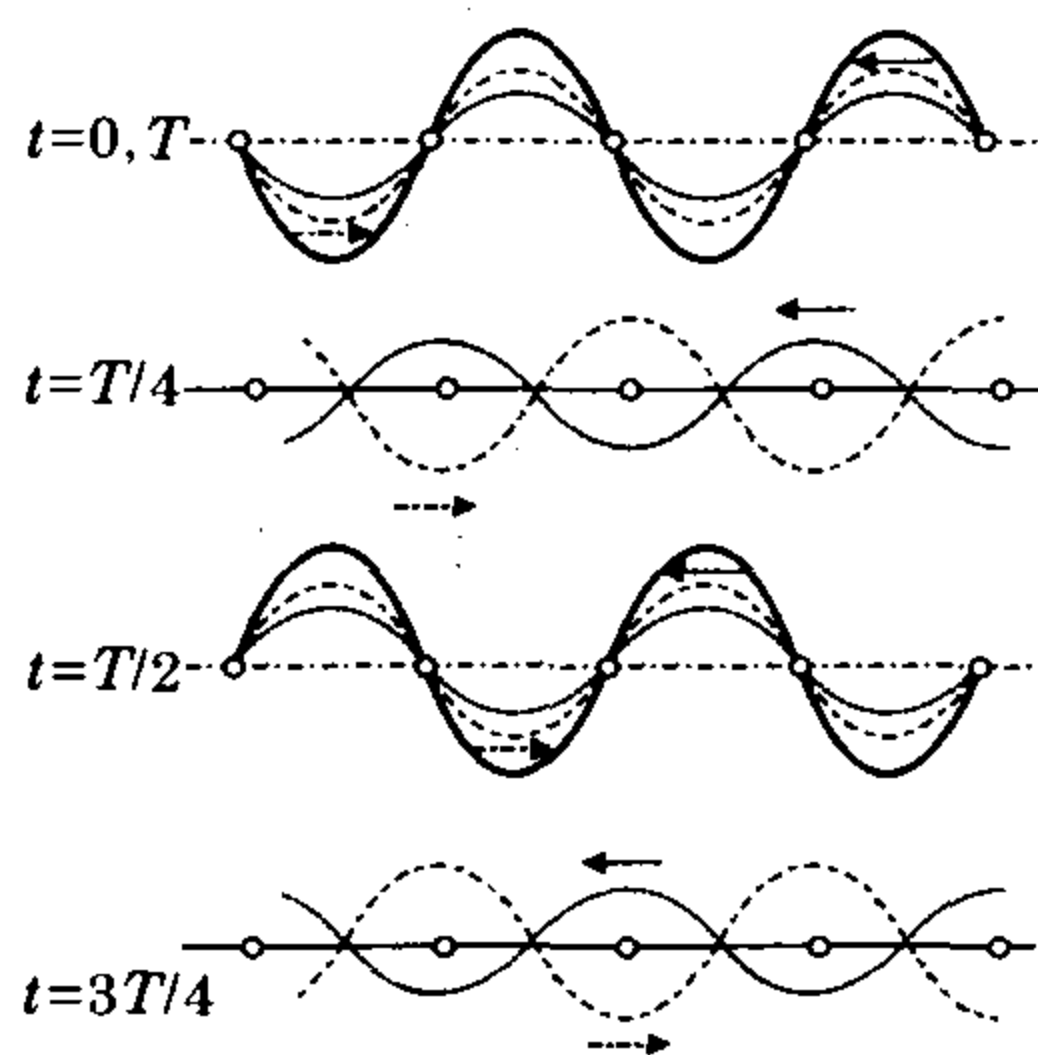


图 13-2

(2) 管弦乐器的发声原理

使弦线发生振动,就会在弦线上形成驻波,即整根弦线以驻波的模式振动,成为声源,并在周围空气中传播,形成声波.使一端开口的管中的空气柱发生振动,就会在空气柱中产生驻波,即空气柱以驻波的模式振动,成为声源,并在周围空气中传播而发声.

4. 多普勒效应

多普勒效应是当观察者或波源相对介质运动时,观察者接收到的频率与波源频率不同的现象,这也是波的特有现象,声波的多普勒现象在生活中很常见,光波的多普勒效应广泛应用于天文学研究天体的运动.

当波源和观察者相对于介质均静止时,单位时间内波源发出的完全波的个数等于观察者接收到的完全波的个数,即接收频率等于波源频率.

当波源相对介质静止、观察者向着(背离)波源运动时,相当于波通过观察者的速度增大(减小)而波长不变,故单位时间内观察者接收到的完全波个数多于(少于)波源发出的完全波个数,即接收频率大于(小于)波源频率.

当观察者相对介质静止、波源向着(背离)观察者运动,相当于波长减小(增大)而波速不变,故单位时间内观察者接收到的完全波个数多于(少于)波源发出的完全波个数,即接收频率大于(小于)波源频率.

当波源与观察者同时相对于介质运动时,接收频率与波源及观察者的速度均有关.

设波源相对于介质的速度为 u ,观察者相对于介质的速度为 v ,波在介质中的速度为 V ,观察者接收到的频率为 f' ,波源频率为 f .

(1) 波源与观察者相对介质静止

$$f' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{VT} = f.$$

(2) 波源固定,观察者以速度 v 向着波源或背离波源运动

此时相当于波以速度 $V \pm v$ 通过观察者,故

$$f' = \frac{V \pm v}{\lambda} = \frac{V \pm v}{VT} = (1 \pm \frac{v}{V})f.$$

(3) 波源以速度 u 相对于介质向着或背离观察者运动,观察者静止

如图13-3所示,此时相当于波长缩短或增长为 $\lambda \mp uT$,故

$$f' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{VT \mp uT} = \frac{V}{V \mp u} f.$$

(4) 波源与观察者同时相对介质运动

$$f' = \frac{V \pm v}{VT \mp uT} = \frac{V \pm v}{V \mp u} f.$$

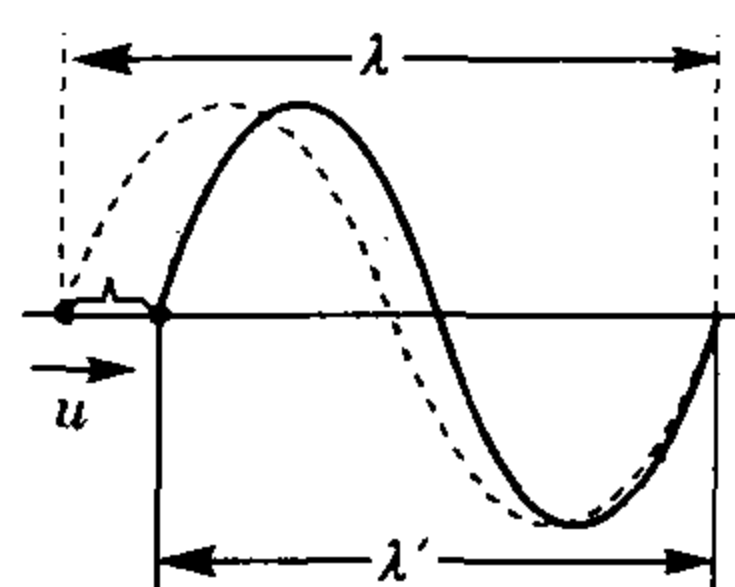


图 13-3

5. 拍 两个同向的简谐运动合成时,由于频率略有差别,合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.单位时间内合振幅的极大值出现的次数叫做拍频.

设两个波源振动的频率分别为 f_1 、 f_2 ,某时刻某质点参与的两个振动恰好同相,两振动相互加强,振幅最大,此后两振动的位相逐渐拉开差距,设经时间 T 相位差为 2π ,此时第二次合振动的振幅达到最大,以后每隔时间 T 出现合振幅的极大值,则有

$$|2\pi f_1 - 2\pi f_2| \cdot T = 2\pi, \text{ 即 } \frac{1}{T} = |f_1 - f_2|.$$

可见,拍频 $f = |f_1 - f_2|$,等于两个分振动的频率之差.

二、波的现象例析

例1 一列平面波在两种介质的界面发生反射,设入射波与反射波的振动方向不变.如果入射波是一列纵波,要使反射波是一列横波,设纵波在介质中的传播速度是横波传播速度的 $\sqrt{3}$ 倍.问入射角为多少?

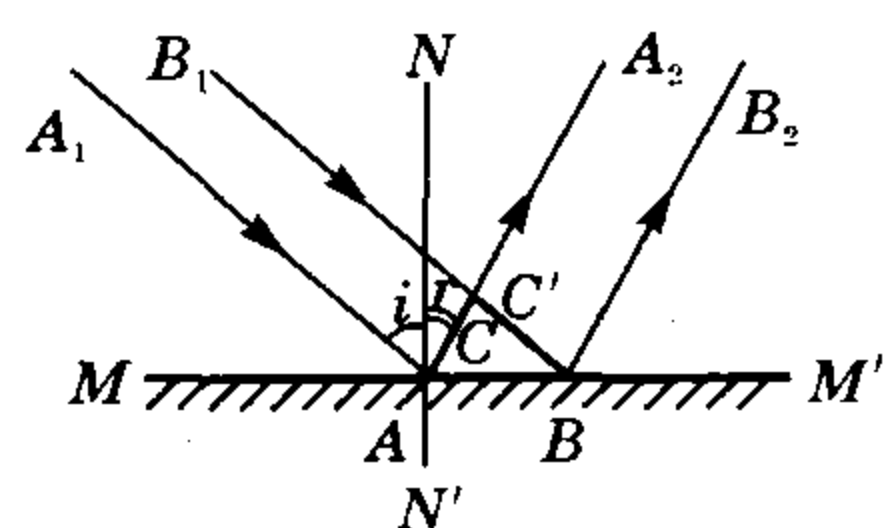


图 13-4

分析与解 我们对这个反射现象作一个几何描述.如图13-4所示,两种介质的界面为 MM' ,线 A_1A 、 B_1B 为入射波的波线,线 AA_2 、 BB_2 为反射波的波线,因为入射波为纵波,质点振动方向沿入射波的波线,而反射波为横波,质点振动方向与波线垂直,而由题给条件“入射波与反射波的振动方向不变”,可知入射波的波线与反射波的波线互相垂直;某时刻入射波到达 A 点,波前为 AC ,经时间 t 波被反射,波前为 $\overline{BC'}$,

根据惠更斯原理,波前与波线总是垂直的,故 C, C' 共点,从入射波的波前 \overline{AC} 上的 A 点到达界面并被界面反射,经时间 $t = \frac{\overline{CB}}{v_{\text{纵}}}$,该波面上 C 点的振动到达界面 B 点而 A 点的振动到达 C' 点,即波前位置从 AC 到达 BC' ,则 $\overline{AC'} = v_{\text{横}} t$. 由几何关系易得在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中 $\angle CAB = i$. 于是可得

$$\tan i = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{v_{\text{纵}}}{v_{\text{横}}} = \sqrt{3}.$$

故若要使反射波成为一系列横波,入射纵波的入射角应为 60° .

例 2 子弹在离人 5 m 处以速度 680 m/s 水平飞过,当人听到子弹之啸声时,子弹离人多远? 设声速为 340 m/s.

分析与解 本题涉及弹道波的描述. 当一个物体(如子弹、飞机等)在介质中以超声速运动时,会激起冲击波,即弹道波. 物体所经过的介质的每一点都可看做一个球面波的波源,球面波以声速在介质中传播,由于物体运动的速度大于它所激起的波的传播速度,球面波形成的波前只能在物体的后面,利用惠更斯原理,这

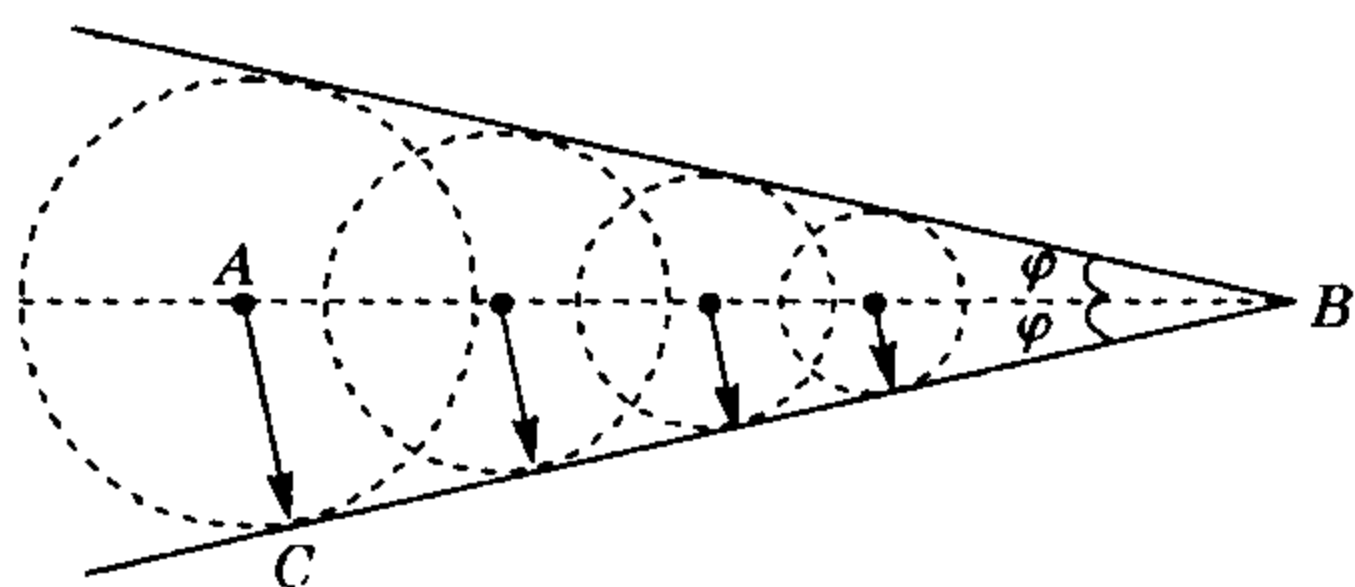


图 13-5

种波的几何描述如图 13-5 所示,同一时刻各波源(被物体冲击的介质质点)波前的包络面是一个圆锥面. 设物体在时间 t 内通过的距离为 AB ,物体的运动速度为 v ,则 $AB = vt$; 声波速度为 V ,同一时间内物体在 A 处激起的波传播了 $AC = Vt$,由此可得圆锥的顶角为 $2\varphi = 2\arcsin \frac{V}{v}$. 可知,弹道波的波前是圆锥面.

结合本例实际问题,子弹在做超声速飞行,它的啸声只能在飞过去之后才能被听到——子弹的运动超过了振动的传播. 如图 13-5 所示,根据弹道波的特点可知,子弹激起的弹道波的波前与子弹运动方向所成角的正弦为 $\sin \varphi = \frac{340}{680}$,则 $\varphi = 30^\circ$,所以当人(在 C 处)听到啸声时,子弹与人的距离为 10 m.

例 3 假设大气的折射率 n 与空气的密度有关系 $n - 1 = a\rho_0 e^{-\frac{r-r_0}{c}}$. 式中 a 为常数, ρ_0 为地球表面的大气密度, $r_0 = 6400$ km, $c = 8772$ m, 大气折射率随高度的增加而递减. 为使光线能沿着地球表面的圆弧线弯曲传播,地表的空气密度应是实际密度的多少倍? 已知地表空气的实际折射率 $n_0 = 1.0003$. (取 $e^x = 1 + x$,

$-\infty < x < \infty$).

分析与解 本题所述情景被称为“圆折射”,例如在金星大气层中便观察到有这种圆折射的“光波道”,“圆折射”的成因是由于行星大气层的折射率随高度而减小,光在其中传播时,路径不断逐层向界面方向弯折,有可能出现光传播方向处处沿所在层面的切向,即环绕行星沿圆弧线传播. 本题可依据折射定律求解,也可根据费马原理通过求极值光程得解,这里,我们根据惠更斯原理,用微元法求解.

如图 13-6 所示, O 为地球球心, r_0 为地球半径,地表有一薄环形层为光圆折射的光波道,其宽度亦即波面宽度为 $(r - r_0)$, 由于光沿圆弧传播,由惠更斯原理,波前与波线(光线)应处处垂直,这就是说,波前形状保持径向不变,在同一时间内波前应转过相同的圆心角,即各条光线具有相同的环绕地球的角速度. 考察半径为 r, r_0 的两条边缘光线 M, N , 有下列关系

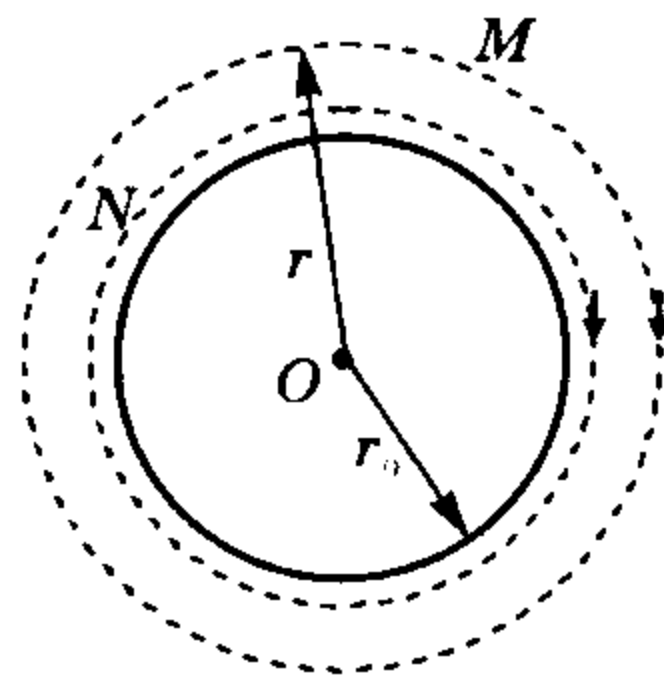


图 13-6

$$\frac{c/n_0'}{r_0} = \frac{c/n}{r}.$$

式中, n_0' 为地球表面的大气折射率, n 为距地心 r 处的大气折射率. 将题给条件代入上式

$$(a\rho_0' + 1)r_0 = (a\rho_0' e^{-\frac{r-r_0}{c}} + 1)r.$$

式中 ρ_0' 是所设能发生圆折射的地球表面空气密度. 取 $e^{-\frac{r-r_0}{c}} = 1 - \frac{r-r_0}{c}$, 得

$$a\rho_0'(r - r_0) + (r - r_0) = a\rho_0' \cdot r \frac{r - r_0}{c},$$

$$\text{则} \quad a\rho_0' = \frac{1}{\frac{r}{c} - 1}.$$

由于所求光波道沿地球表面,取 $r = r_0$, 有

$$a\rho_0' = \frac{1}{\frac{r_0}{c} - 1}. \quad (1)$$

而地表的实际大气密度 ρ_0 满足条件

$$a\rho_0 = n_0 - 1, \quad (2)$$

比较①②两式可得

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0'}{\rho_0} &= \frac{1}{\left(\frac{r_0}{c} - 1\right)(n_0 - 1)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{6.4 \times 10^6}{8772} - 1\right)(1.0003 - 1)} \approx 4.58 \text{ 倍}. \end{aligned}$$

这样,我们依据惠更斯原理,确定了若使光线能绕地球表面的圆弧线传播,要求地表的空气密度为实际密度的 4.58 倍.

例4 车以 80 km/h 速度行驶,从对面开来超高速列车,向背后奔驰而去.此间超高速车所发出的汽笛声开始若听到为“哆”音,后来听到的则是降低的“咪”音(假定“哆”音和“咪”音的频率之比为 8/5).设声速为 1 200 km/h,则超高速列车的时速是多少?这时,对站在路旁的人而言,超高速列车通过他前后声音的频率之比是多少?而对与超高速列车同向行驶、车速为 80 km/h 的车上乘客而言,他被超高速列车追过前后所闻汽笛声音的频率之比又是多少?

分析与解 本题情景是声波的多普勒效应.

先研究与超高速列车相向而行的乘客的听闻效果.设超高速列车的速度(即声源相对空气介质的速度)为 u ,对坐在速率为 $v=80$ km/h 的车中的观察者而言,超高速列车迎面而来时,因接收到的波数增加,音调变高,背离而去时,因接收到的波数减少,音调变低,即所谓“呼啸而来,扬长而去”.若声源(汽笛)发声频率以 f_0 表示,空气中声速 $V=1\ 200$ km/h,“哆”音频率为 f_1 ,”咪”音频率为 f_2 ,则 $f_1 = \frac{V+v}{V-u}f_0$, $f_2 = \frac{V-v}{V+u}f_0$,”哆”音和“咪”音的频率之比为 8/5,即

$$\frac{(1\ 200+80)(1\ 200+u)}{(1\ 200-u)(1\ 200-80)} = \frac{8}{5},$$

由此可得超高速列车车速 $u=200$ km/h.这里提供了利用多普勒效应估计列车速率的原理.

对于静止在路旁的观察者,由于 $v=0$,超高速列车驶来时,接收到的波数 $f_{前} = \frac{V}{V-u}f_0$,离开时接收到的波数 $f_{后} = \frac{V}{V+u}f_0$,则超高速列车通过他前后,声音的频率之比为

$$\frac{f_{前}}{f_{后}} = \frac{V+u}{V-u} = \frac{1\ 200+200}{1\ 200-200} = \frac{7}{5}.$$

最后研究与超高速列车同向行驶、车速为 80 km/h 的车上乘客的多普勒效应情况.观察者的速度仍为 $v=80$ km/h,在被超高速列车追上前,声源相对观察者以速率 $u-v$ 接近,相当声波以速率 $V-v$ 通过观察者而波长减小为 $(V-u)/f_0$;而在被超高速列车追上后,声源相对观察者以速率 $u+v$ 远离,相当声波以速率 $V+v$ 通过观察者而波长增大为 $(V+u)/f_0$,则观察者被超高速列车追过前后所闻汽笛声音的频率之比为

$$\frac{(V-v)(V+u)}{(V+u)(V-v)} = \frac{(1\ 200-80)(1\ 200+200)}{(1\ 200+200)(1\ 200-80)} = \frac{49}{40}.$$

例5 飞机在空中以速度 $v=200$ m/s 水平飞行,发出频率为 $f_0=2\ 000$ Hz 的声波.当飞机越过静止在地面上的观察者上空时,观察者在 4 s 内测出的频率从 $f_1=2\ 400$ Hz 降为 $f_2=1\ 600$ Hz.已知声波在空气中速度为 $V=330$ m/s.试求飞机的飞行高度.

分析与解 本题中,观察者在 4 s 内测出的声波

频率从 $f_1=2\ 400$ Hz 降为 $f_2=1\ 600$ Hz,说明声源与观察者先接近后远离.如图 13-7 所示,设飞机在 4 s 时间内从 A 点水平飞行到 B 点,航线高度为 h ,地面观察者在 M 点接收到从 A 点发出的声波频率为 f_1 ,从 B 点发出的声波频率为 f_2 ,声源沿声线 AM 向 M 接近的速度 $u_A = v \cos \alpha$,沿声线 BM 远离 M 的速度 $u_B = v \cos \beta$,则由多普勒效应公式

$$f_1 = \frac{V}{V - v \cos \alpha} f_0, \cos \alpha = \frac{11}{40};$$

$$f_2 = \frac{V}{V + v \cos \beta} f_0, \cos \beta = \frac{33}{80}.$$

又由几何关系易得 $h(\cot \alpha + \cot \beta) = vt$,则 $h = \frac{vt}{\cot \alpha + \cot \beta}$.将 $v=200$ m/s, $t=4$ s, $\cot \alpha = \frac{11}{\sqrt{51 \times 29}}$, $\cot \beta = \frac{33}{\sqrt{113 \times 47}}$ 代入,计算得 $h \approx 1\ 096$ m.

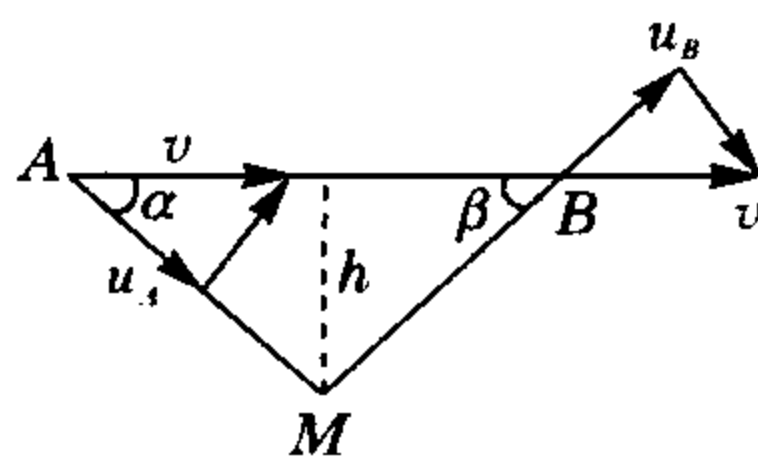


图 13-7

例6 如图 13-8 所示,一端固定在台上的弦线,用支柱支撑其 R 点和 S 点,另一端通过定滑轮吊一个 1.6 kg 的重物,弹拨弦的 RS 部分,使其振动,则 R、S 点为波节,其间产生三个波腹的驻波,这时,如在弦的附近使频率为 278 Hz 的音叉发音,则 5 s 内可听到 10 次拍音,换用频率稍大的音叉,则拍音频率减小.测得 $RS=75.0$ cm,求该驻波的波长、频率及弦线的线密度.

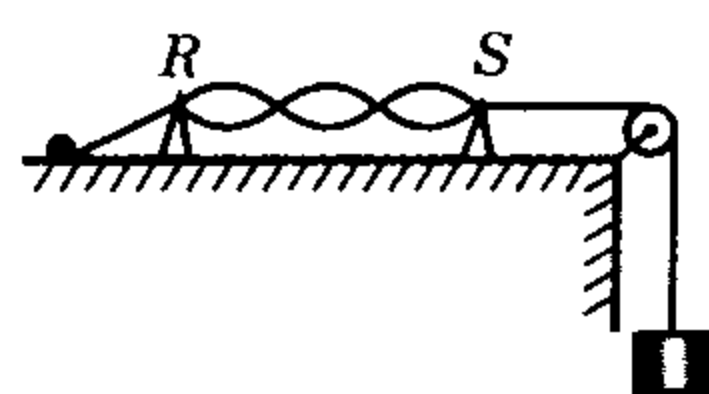


图 13-8

分析与解 两端固定、长为 l 的弦弹拨振动,形成驻波,由驻波成因可知相邻两波节距离为半波长,在 RS 段中共有三个波腹,则波长为 $2 \times \frac{75.0}{3}$ cm = 50.0 cm.

弦的振动与音叉的振动在空气中叠加,产生拍,拍频 $f=10/5=2$ Hz,音叉频率稍大时拍频减小,说明弦振动频率大于 278 Hz,由题给条件可知弦的振动频率为 $f_1=(278+2)$ Hz = 280 Hz.

由上面得到的驻波的波长与频率我们可知该弦上传播横波的波速 $v=\lambda f_1=140$ m/s.波在弦上传播的速度应取决于弦上的张力 F 及线密度 σ ,我们可运用量纲分析法来确定 v 与 F 、 σ 之间的关系:速度的量纲为 $[LT^{-1}]$,力的量纲为 $[MLT^{-2}]$,线密度的量纲为 $[ML^{-1}]$,易得出 $[v] = \sqrt{\frac{[F]}{[\sigma]}}$,取适当的单位制,可使

无量纲常数 $a=1$,则有 $v = \sqrt{\frac{F}{\sigma}}$,本题中弦上张力由重物的重力引起,则

$$\sigma = \frac{1.6 \times 9.8}{140^2} \text{ kg/m} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ kg/m}.$$

例 7 到了晚上,地面辐射降温使空气层中产生温度梯度,温度随高度递增,这导致声速 v 随高度 y 变化,假定变化规律为 $v=v_0(1+a^2y^2)$,其中 v_0 是地面 ($y=0$ 处)的声速, a 为比例系数.今远方地面上某声源发出一束声波,发射方向与竖直方向成 θ 角.假定在声波传播范围内 $ay \ll 1$,试求该声波在空间传播的轨迹,并求地面上听得最清晰的地点与声源的距离 s .

分析与解 本题是一道有实际背景的问题.例如在夏夜,远处行驶的汽车之声清晰可闻.这是由于夜间地面迅速冷却,空气的温度随高度而连续地递增,导致声速随高度而连续地增加,根据波的折射定律,从地面附近声源出发的向上的波线将连续地偏折,形成下弯的态势,如图 13-9 甲所示,这就使声音在地面传播的距离增加,听闻较佳;而在白天,地面很热,则空气温度及声速随高度增加而减小,向下的声波波线将不断偏折而形成上弯的态势,在地面形成寂静区,听闻不佳,如图 13-9 乙所示.

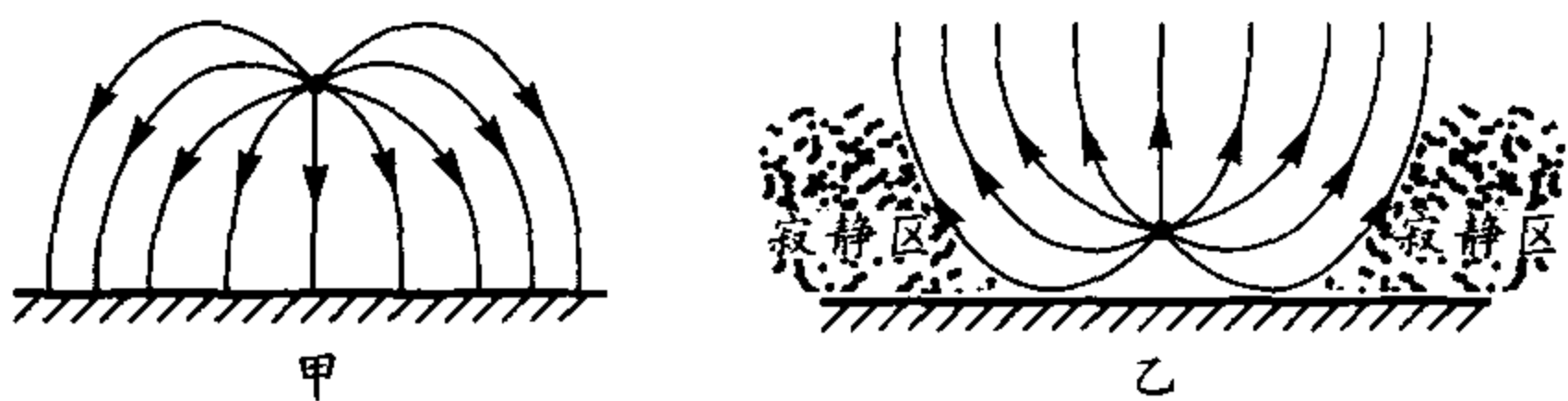


图 13-9

定量地确定题述特定情景下,声波波线即声波传播轨迹的方程,波线与地面的交点就是听得最清晰的地点.

取如图 13-10 所示的直角坐标,声源在坐标原点 O , x 轴沿地面, y 轴竖直向上,沿 y 轴将空气分割成平行于 x 轴的 $n(n \rightarrow \infty)$ 个薄层,每一个薄层的厚度为 $\Delta y, \Delta y \rightarrow 0$,声波从 O 点开始进入空气,入射角为 θ_0 ,在各层空气中的声速依次为 $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$,各层界面上声波波线的折射角依次为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n$,由波的折射定律可得 $\frac{v_1}{v_0} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0}, \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}, \dots, \frac{v_i}{v_{i-1}} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_{i-1}}$,则 $\frac{v_i}{v_0} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0}$.

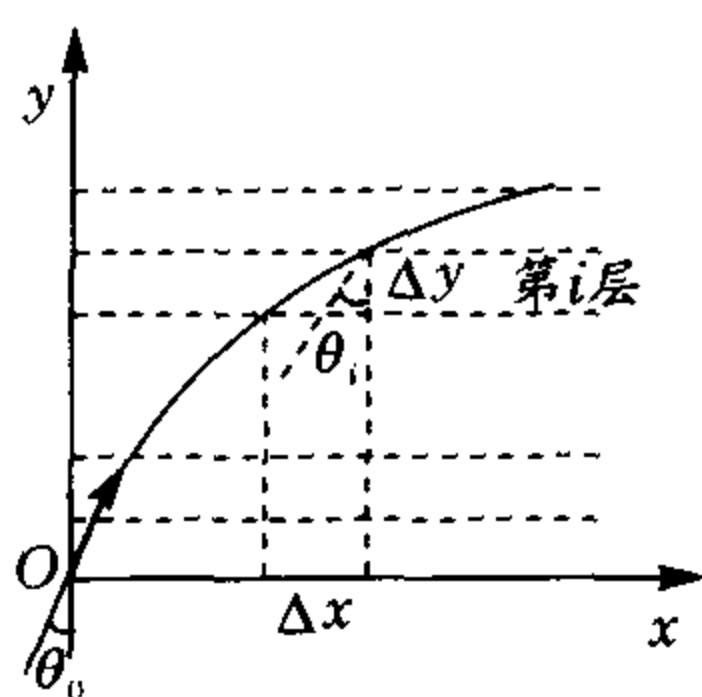


图 13-10

由于声速沿 y 轴递增,折射角 θ_i 逐渐增大,开始阶段声波传播的径迹大致如图 13-10 所示曲线.现在来考察第 i 层中声波的径迹:由于 Δy 极小,在这薄层中的声速可视作不变,径迹可视作一段直线,由几何关系可知声波波线的斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cot \theta_i = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - 1}$,

将 $\frac{v_i}{v_0} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0}$ 和 $v=v_0(1+a^2y^2)$ 代入上式,同时,根据

常用近似 $\delta \ll 1$ 时,有 $\frac{1}{1+\delta} \approx 1-\delta; (1+\delta)^2 \approx 1+2\delta$,进行小量处理,整理得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \sqrt{\frac{v_0^2}{v_i^2 \sin^2 \theta_0} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta_0 (1+a^2y^2)^2} - 1} = \\ &= \frac{1}{\sin \theta_0} \sqrt{\frac{1}{1+2a^2y^2} - \sin^2 \theta_0} = \frac{1}{\sin \theta_0} \sqrt{1-2a^2y^2 - \sin^2 \theta_0} \\ &= \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \sqrt{1 - \frac{2a^2}{\cos^2 \theta_0} y^2} = \cot \theta_0 \sqrt{1 - \frac{2a^2}{\cos^2 \theta_0} y^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

这样,我们得到的表示声波传播路径的函数 y 与其斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之间关系的方程.观察并推测该方程,若令

$\frac{2a^2y^2}{\cos^2 \theta_0} = \sin^2 \omega x$,则斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 随 x 变化为余弦函数,那么

原函数 $y(x)$ 为一个正弦函数,即 $y = \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \sin \omega x$,此

为正弦函数的标准方程,振幅为 $\frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}}$,尚待确定 ω

值.用微元法对待定函数 $y = \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \sin \omega x$ 求斜率,有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega(x+\Delta x) - \sin \omega x}{\Delta x} \\ &= \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega \cdot \cos \omega \frac{x+\Delta x+x}{2} \sin \omega \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\omega \Delta x}{2}} \\ &= \omega \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \cos \omega x. \end{aligned}$$

将此式与①式相比较

$$\cot \theta_0 \sqrt{1 - \frac{2a^2}{\cos^2 \theta_0} y^2} = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \cos \omega x = \omega \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \cos \omega x,$$

$$\text{可得} \quad \omega = \frac{\sqrt{2a}}{\sin \theta_0}, y = \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \sin \frac{\sqrt{2a}}{\sin \theta_0} x.$$

可见,在温度随高度 y 依题给条件递增的空气中向上传播的声线为一个正弦曲线,声传播轨迹曲线与 x 轴的交点 ($y=0$) 为声音沿声线上扬下弯后重返地面处,此处听闻清楚,并满足

$$y = \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{2a}} \sin \frac{\sqrt{2a}}{\sin \theta_0} x = 0, \frac{\sqrt{2a}}{\sin \theta_0} x = \pi,$$

则地面听得最清楚的地点与声源的距离

$$s = x = \frac{\pi \sin \theta_0}{\sqrt{2a}}.$$

回声身手回

1. 回音壁是利用声波的反射原理建造的.如图 13-11 所示,圆形墙壁直径为 d ,在 A 点有一个不定向的声源,发出持续时间 τ 的很强的声信号,声音可以沿多条途径以速度 v 传到与 A 点在同一直径的另一端 B

点.其中,最短途径是从点 A 指向点 B,信号沿此途径到达点 B 所需时间 $t_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ s;最长途径是经回音壁多次反射,沿半圆到达点 B,为此所需时间 $t_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ s;则在 B 点可接收到点 A 处发出声信号的时间是 $\underline{\hspace{2cm}}$ s.

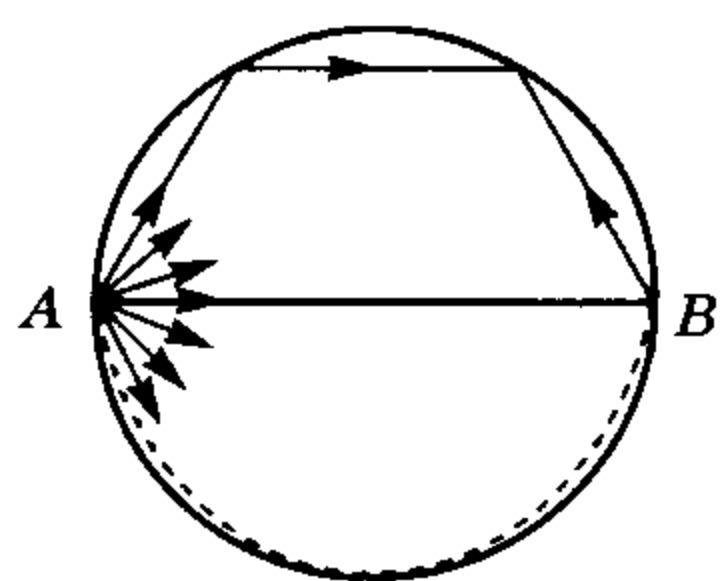


图 13-11

2. 如图 13-12 所示,一列平面波在介质 I 中沿 x 轴正方向传播,波中某质点振动的表达式为 $y = A \cos \omega t$,在 x 轴上距原点 l 处有厚度为 D 的介质 II,在两种介质中波速分别为 u_1 和 u_2 ,且 $u_1 > u_2$,若使 S_1 面上反射波与 S_2 面上反射波在 I 区内叠加后的合振动振幅最大,介质 II 的厚度至少应为多大?

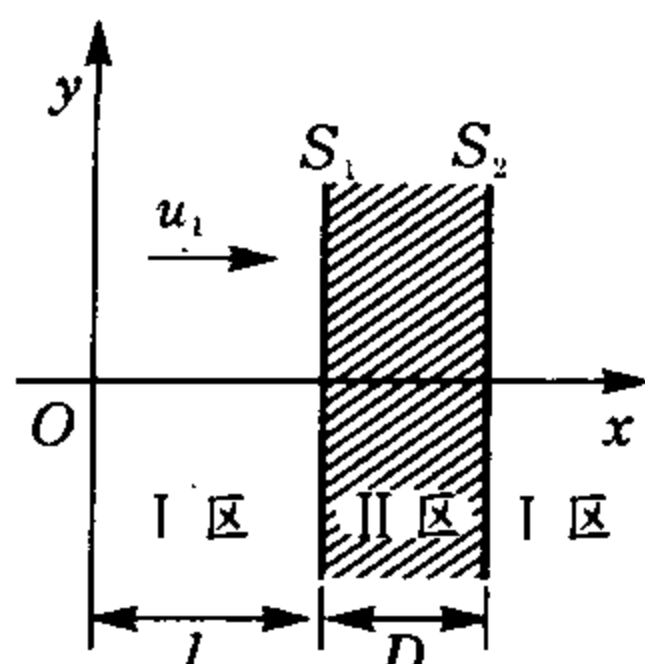


图 12-12

3. 站在地面上的观测者发现一架飞机向他飞来,但听不到声音,一直到看见飞机的方向和水平方向成 37° 角时,才听到轰鸣声,若飞机沿水平直线飞行,当时声速为 336 m/s ,飞机的速度是多少?

4. 如图 13-13 所示,地面上的波源 S 与探测器 D 之间的距离为 d ,在探测器 D 处测得从波源 S 直接发出的波与从波源 S 发出又经高度为 H 的水平层 B 反射后的波的合成信号强度最大.当水平层逐渐升高距离 h 时,在探测器 D 处测到的信号消失.设波在水平层的反射角等于入射角,不考虑大气的吸收,求波长 λ 与 d, h, H 之间的关系.

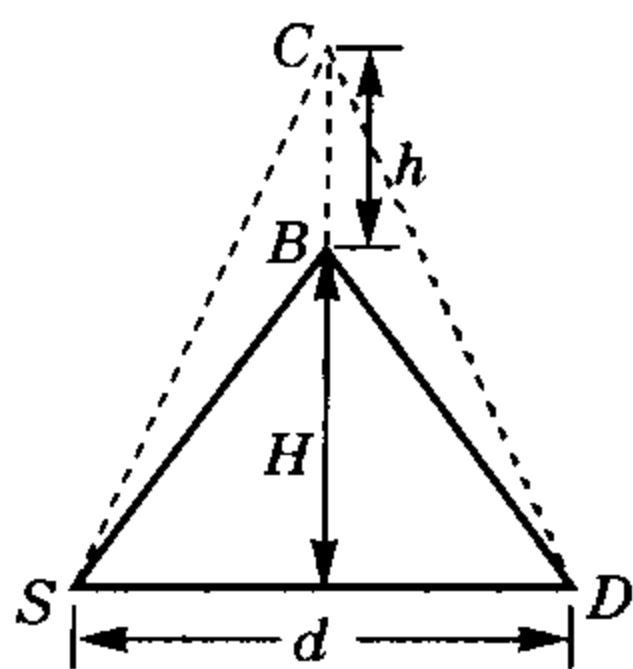


图 13-13

5. 有 A、B 两个星球. B 星以 A 星为中心做匀速圆周运动,如图 13-14 所示.由于星球离地球非常远,而且地球位于 B 星的轨道平面上,所以从地球上看过, B 星好像在一条直线上运动.测得 B 星从 P 点移动到 Q 点需要 $6.28 \times 10^7 \text{ s}$.由于多普勒效应,在测定 B 星发出的光的波长时发现,当 B 星位于 P 点时比位于 A 点时短 $6.8 \times 10^{-9} \text{ m}$,位于 Q 点时则比位于 A 点长同样的值.若 B 星位于 A 点时的波长测量值为 $4.86133 \times 10^{-7} \text{ m}$,光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$.求

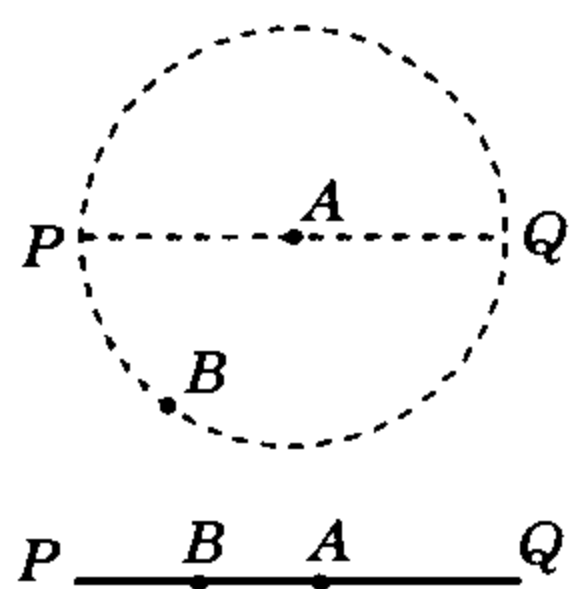


图 13-14

- (1) B 星公转的方向;
- (2) B 星的公转速度是多少?

(3) 圆周轨道的半径.

6. 某地球卫星发出频率为 10^8 Hz 的无线电信号,地面接收站接收到的讯号频率增大了 2400 Hz .无线电信号在真空中的传播速度为 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$,试估算卫星朝地面接收站方向的运动速度.

7. 一个波源的频率为 2040 Hz ,以速度 v_s 向墙壁接近,如图 13-15 所示,观测者在 A 点所得的拍频 $\Delta\nu = 3 \text{ Hz}$,设声速为 340 m/s ,求波源移动的速度 v_s .如波源没有运动,而是以一个反射面代替墙壁以速度 $v_r = 0.2 \text{ m/s}$ 向观察者 A 接近,所得到的拍频为 $\Delta\nu' = 4 \text{ Hz}$,求波源的频率.

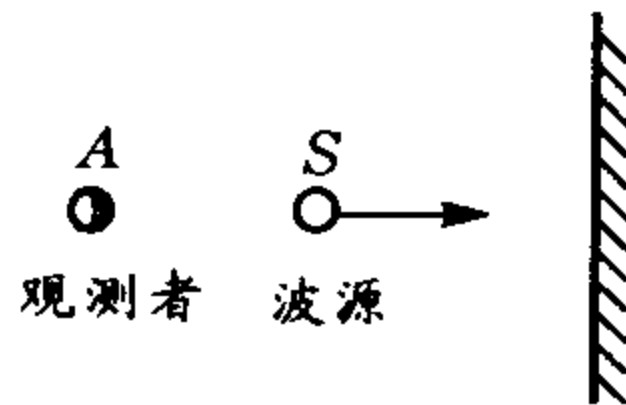


图 13-15

8. 在单行道上,交通川流不息,有一支乐队沿同一方向前进.乐队后面有个坐在车上的旅行者向他们靠近,这时,乐队正同时奏出频率为 440 Hz 的音调.在乐队前面街上有一个固定的广播设施做现场转播.旅行者发现从前面乐队直接听到的声音和从广播中听到的声音相结合产生拍,并测出 3 s 有 4 拍.利用测速计可测出车速为 18 km/h .试计算乐队行进的速度.已知在这个寒冷的天气下,声速为 330 m/s .

9. 将一根长为 100 多厘米的均匀弦线沿水平的 x 轴放置,拉紧并使两端固定.现对离固定的右端 25 cm 处(取该处为原点 O ,如图 13-16 甲所示)的弦上施加一个沿垂直于弦线方向(即 y 轴方向)的扰动,其位移随时间的变化规律如图 13-16 乙所示.该扰动将沿弦线传播而形成波(孤立的脉冲波).已知该波在弦线中的传播速度为 2.5 cm/s ,且波在传播和反射过程中没有能量损失.

(1) 试在图 13-16 甲中准确地画出自 O 点沿弦线向右传播的波在 $t = 2.5 \text{ s}$ 时的波形.

(2) 该波向右传播到固定点时将发生反射,反射波向左传播,反射点总是固定不动的,这可看成是向右传播的波和向左传播的波相叠加,使反射点的位移始终为零.由此点出发,试在图 13-16 甲中准确地画出 $t = 12.5 \text{ s}$ 时的波形图.

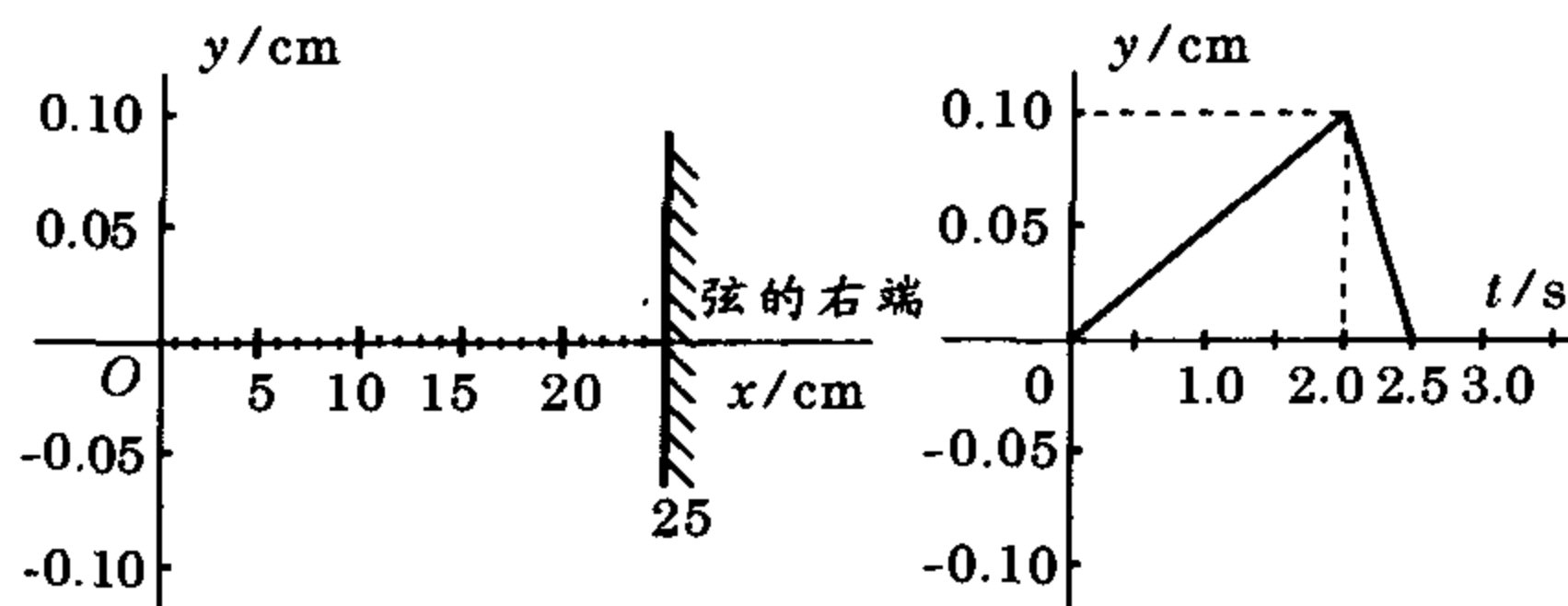


图 13-16

(3) 在图 13-16 甲中准确地画出 $t = 10.5 \text{ s}$ 时的波形图.

10. 如图 13-17 所示, 音叉 P 沿着半径 $r=8\text{ m}$ 的圆以角速度 $\omega=4\text{ rad/s}$ 做匀速圆周运动. 音叉发出频率为 $f_0=500\text{ Hz}$ 的声波, 声波的速度为 $v=330\text{ m/s}$. 观察者 M 与圆周共面, 与圆心 O 的距离为 $d=2r$. 试问当角 θ 为多大时, 观察到的频率为最高或最低, 并求其数值.

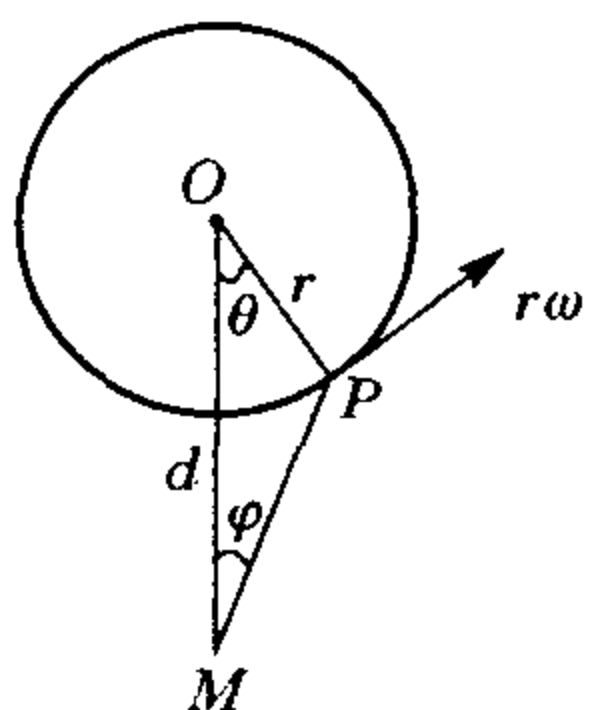


图 13-17

11. 一列横波在弦线上传播, 到固定端时被反射, 反射波在弦线上反向传播而形成驻波. 反射时波长、频率、振幅均不变, 但反射波与入射波使反射点的振动相差半个周期, 相当于原波损失半个波再反射. 在图 13-18 中已画出某时刻入射波 B , 试用虚线画出反射波 C , 用实线画出驻波 A .

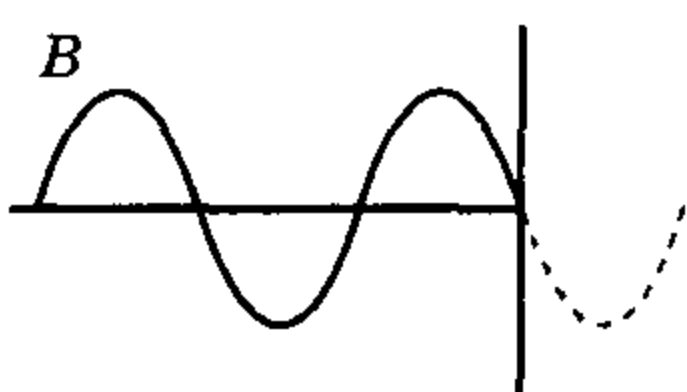


图 13-18

12. 有一口竖直井, 井底有水, 它可与 $f \geq 7\text{ Hz}$ 的某些频率发生共鸣. 若声波在该井里的空气中的传播速度为 347.2 m/s , 试问这口井至少有多深?

13. 音叉与频率为 250 Hz 的标准声源同时发音, 产生 1.5 Hz 的拍音. 当音叉叉股粘上一小块橡皮泥时, 拍频增大了. 将该音叉放在盛水的细管口, 如图 13-19 所示, 连续调节水面的高度, 当空气柱高度相继为 0.34 m 和 1.03 m 时发生共鸣. 求声波在空气中的声速, 画出空气柱中的驻波波形图.



14. 在海洋中声速随深度、温度和含盐量变化. 已知声速随深度变化规律如图 13-20 所示, 最小声速出现在海洋表面与海底之间. 坐标原点取在声速最小处, z_a 、 z_b 分别表示海面和海底的坐标. 则声速 v 与 z 的关系为

$$v = \begin{cases} v_0 + bz & (z > 0) \\ v_0 & (z = 0) \\ v_0 - bz & (z < 0) \end{cases}$$

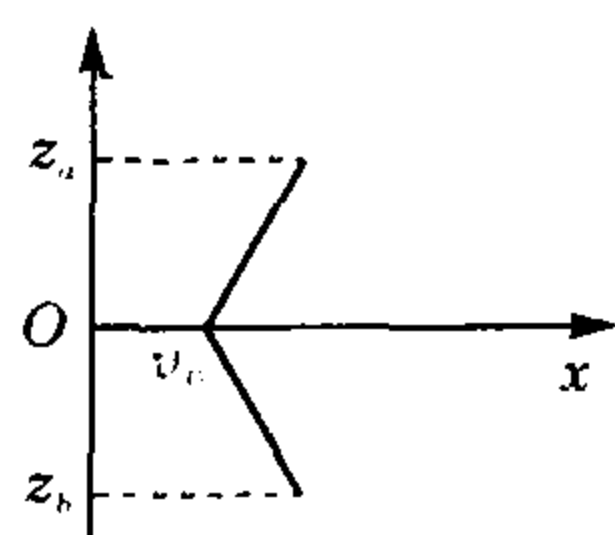


图 13-20

其中 b 为常量. 今在 $x=0, z=0$ 处放置一个声源 S , 在 xz 平面内, 声源 S 发出的声波其传播方向用初始发射角 θ_0 表示. 声速不均匀将导致波射线的弯曲. 试证明在 xz 平面内声波的初始轨迹为圆, 并求出其半径.

15. 某行星上大气的折射率随着行星表面的高度 h 按照 $n=n_0-ah$ 的规律而减小, 行星的半径为 R , 行星表面某一高度 h_0 处有光波道, 它始终在恒定高度, 光线沿光波道环绕行星传播, 试求高度 h_0 .

16. 走在岸边, 总可以看到水波平行于岸边滚滚而来. 设水波的速率与水深成正比, 岸的斜度为常数.

计算水波的轨迹.

参考答案

1. 声信号沿最短途径 AB 从 A 点到 B 点需时 $t_1 = \frac{d}{v}$, 沿最长途径半圆到达 B 点需时 $t_2 = \frac{\pi d}{2v}$, 第一个到达 B 点的信号与最后一个到达 B 点的信号时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{d(\pi-2)}{2v}$, 加上信号持续时间即为 B 点接收到 A 点发出的声信号的总时间 $\tau + \frac{d}{v}(\frac{\pi}{2}-1)$.

2. 要使 S_1 面上的反射波与 S_2 面上的反射波在 I 区内叠加后的合振动振幅最大, 应使两列波的相位差为 $(2n-1)\pi$, 设介质 II 的厚度为 D , 则应有 $\frac{2D}{u_2} = \frac{\pi}{\omega}(2n-1)$, 当 $n=1$ 时, D 最小, 即介质 II 的厚度至少

$$\text{应为 } D_{\min} = \frac{\pi u_2}{2\omega}.$$

3. 飞机超音速飞行, 引起圆锥面波, 故飞机速度为 $v = V/\sin 37^\circ = 560\text{ m/s}$.

4. 信号最强时, 反射波与直接到达的波同相, 考虑到水平层反射时有半波损失, 故有 $2\sqrt{H^2 + \frac{d^2}{4}} - d = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$, 反射层上升 h , 反射波与直接到达的波反

相使信号减弱, 有 $2\sqrt{(H+h)^2 + \frac{d^2}{4}} - d = (2n-1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}$, 则有 $\sqrt{(H+h)^2 + \frac{d^2}{4}} - \sqrt{H^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{\lambda}{4}$, $\lambda = 2(\sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - \sqrt{4H^2 + d^2})$.

5. 这是测定宇宙中一种双星的方法.

(1) 由 B 星发出的光的波长在 P 点位比 Q 点位短, 知在 P 点位光源朝着地球运动的, 故 B 星公转的方向为沿图 13-14 中逆时针方向. (2) 由 $\Delta\lambda = vT = v\frac{\lambda_0}{c}$ 可得 $v = 42\text{ km/s}$, λ_0 即为 B 星位于 A 点时测得的波长. (3) $R = \frac{vt}{\pi} = 8.4 \times 10^8\text{ km}$.

6. 设卫星朝地面接收站方向运动的速度为 u , 此即波源移动的速度, 由于波源向着观察者运动, 接收到的频率变大, 由 $f + \Delta f = \frac{c}{c-u}f$ 可得 $u = \frac{c\Delta f}{f + \Delta f} = 7200\text{ m/s}$.

7. (1) A 点从声源直接接收到的声波频率 $f_1 = \frac{V}{V+u}f_0$, 而经墙反射后的声波频率 $f_2 = \frac{V}{V-u}f_0$. 则 $\Delta\nu = \frac{V}{V-u}f_0 - \frac{V}{V+u}f_0 = \frac{2Vf_0u}{V^2-u^2}$ 代入题给数据 $3 =$

$$\frac{2 \times 340 v_r}{340^2 - v_r^2} \times 2040, \text{ 得 } v_r^2 + 680^2 v_r - 340^2 = 0, v_r =$$

$$\frac{680^2 (\sqrt{1 + \frac{1}{680^2}} - 1)}{2} \approx \frac{680^2 (1 + \frac{1}{2 \times 680^2} - 1)}{2} = 0.25 \text{ m/s}$$

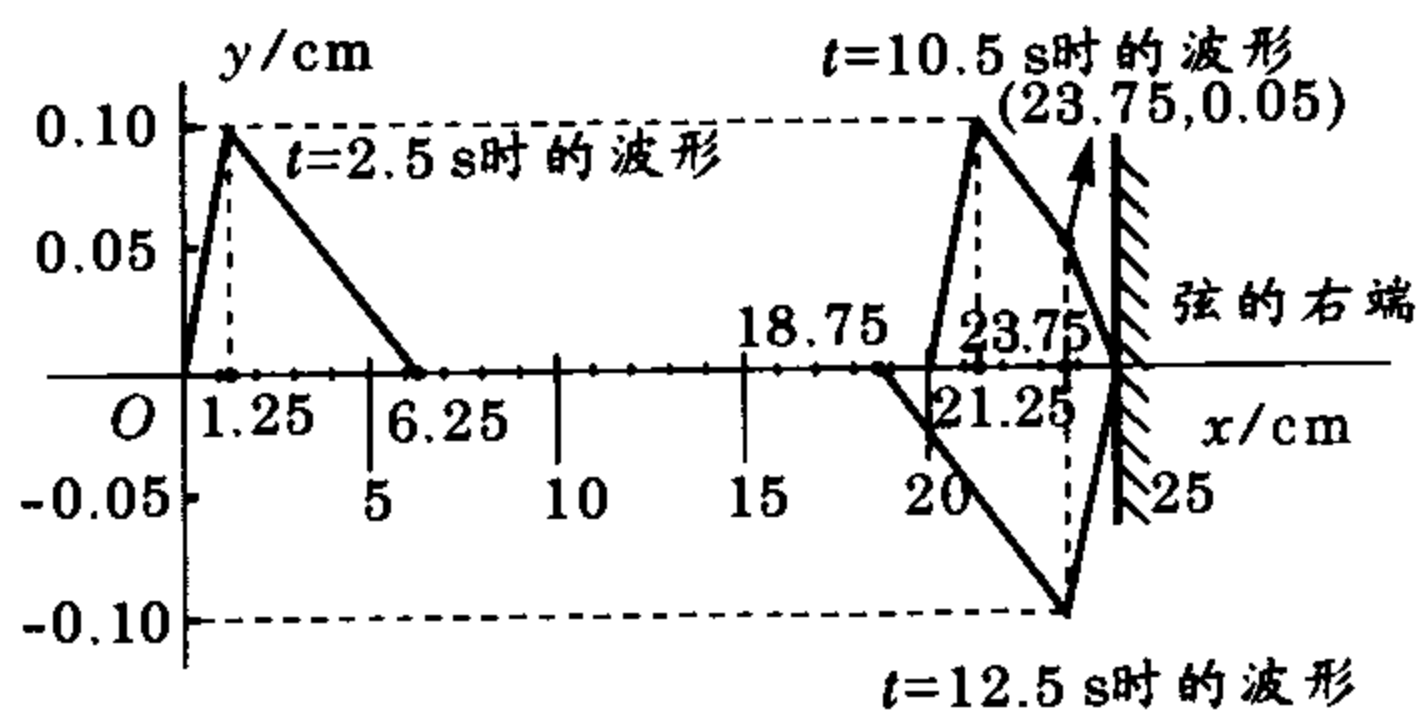
若反射面向 A 点移动, 则 A 点从声源直接接收到的声波频率 $f_1' = f$; 反射面接收到的波频率 $f_2'' = \frac{V + v_r}{V}$, 反射到

A 的波频率 $f_2' = \frac{V}{V - v_r} f_2'' = \frac{V + v_r}{V - v_r} f$, 则有 $\Delta v' = \frac{V + v_r}{V - v_r} f$

$$- f \Rightarrow 4 = \frac{2 \times 0.2}{340 - 0.2} f, f = 3398 \text{ Hz}.$$

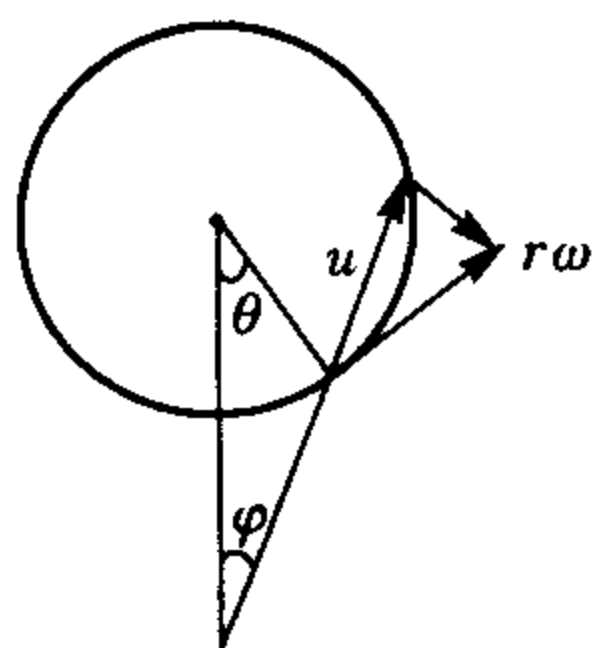
8. 接收到来自乐队的频率 $f_1 = \frac{330 + 5}{330 + u} f_0$, 来自广播声音的频率 $f_2 = \frac{330 + 5}{330} f_0$, 拍频为 $\frac{4}{3}$, 则 $(\frac{335}{330} - \frac{335}{330 + u}) \times 440 = \frac{4}{3}$, $u \approx 1 \text{ m/s}$.

9. 如图答 13-1 所示.

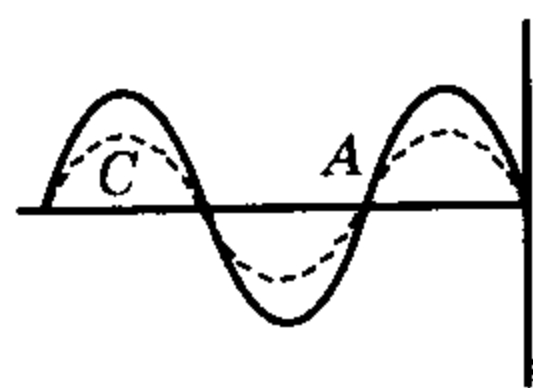


图答 13-1

10. 如图答 13-2 所示, 声源移动速度为 $r\omega$, 相对观察者接近或背离速度设为 u , 有 $f' = \frac{vf_0}{v \pm r\omega \sin(\theta + \varphi)}$, 又 $\frac{r}{\sin \varphi} = \frac{2r}{\sin(\theta + \varphi)}$, 当 $(\theta + \varphi) = 90^\circ$ 时, f' 有最大值或最小值, 此时 $\theta = 60^\circ$ 或 $\theta = 300^\circ$. $f'_{\text{最大}} = 554 \text{ Hz}$, $f'_{\text{最小}} = 456 \text{ Hz}$.



图答 13-2

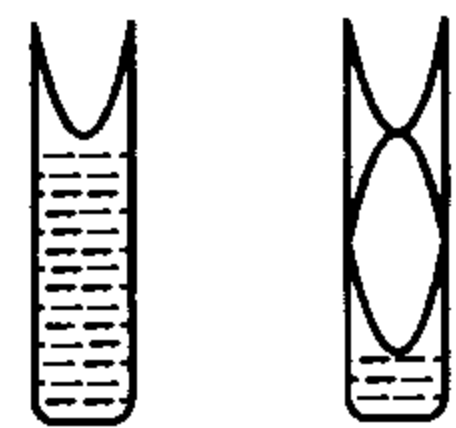


图答 13-3

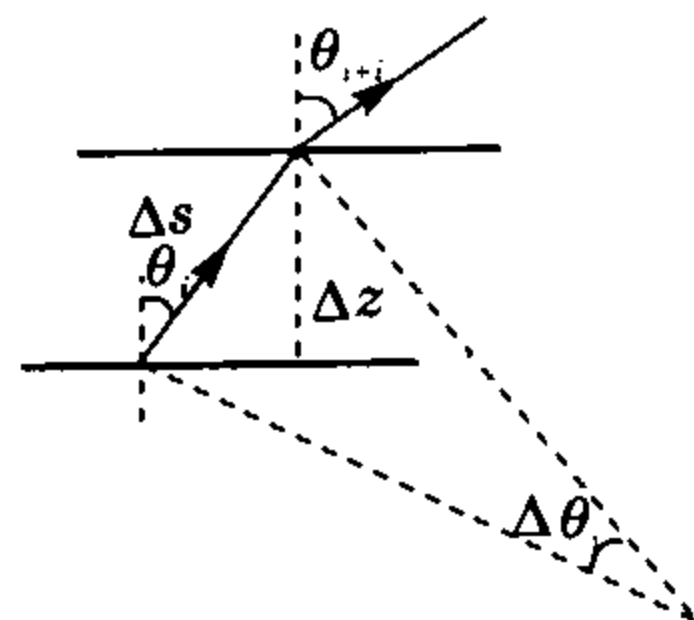
11. 如图答 13-3 所示.

12. 声波频率 $f = 7 \text{ Hz}$ 时, 波长 $\lambda = v/f = 49.6 \text{ m}$, 那么井深至少为波长的四分之一即 12.4 m 时, 井中的空气柱可与频率等于 7 Hz 的声波发生共鸣, 还可能与频率大于 7 Hz 、波长短于 49.6 m 、但波长的 $\frac{2n+1}{4}$ 倍恰等于 12.4 m 的某些声波发生共鸣.

13. 标准声频率为 250 Hz , 拍频 1.5 Hz , 粘上橡皮后音叉频率减小, 拍频增大, 可知音叉原频率比标准声频率低, 为 248.5 Hz ; 由共鸣时空气柱的长度知 $1.03 - 0.34 = \lambda/2$, $\lambda = 1.38 \text{ m}$, 可得波速为 343 m/s , 驻波波形如图答 13-4 所示.



14. 在 xz 平面将海水分成与 x 轴平行的 n 个薄层 ($n \rightarrow \infty$), 各层的波速可视为不变, 波在各层传播时遵循折射定律, 第 i 层的波速为 v_i , 波在该薄层两界面上的折射角为 θ_i , 在下一层的折射角为 θ_{i+1} , 每经过一个薄层, 声波的传播方向改变 $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$, 如图答 13-5 所示. 由折射定律 $\frac{v_i}{v_0} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0}$ ①; 对第 i 薄层海水有 $v_{i+1} - v_i = b \Delta z = b \cdot \Delta s \cdot \cos \theta_i$ ②. 将①式的速率关系代入②式有 $\frac{v_0}{\sin \theta_0} (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i) = b \Delta s \cos \theta_i$, 则



图答 13-5

得 $R = \frac{\Delta s}{\Delta \theta_i} = \frac{v_0}{b \sin \theta_0}$.

各元段曲率半径为定值, 可见波线在 $z > 0$ 区域为一段圆弧.

$$\frac{v_0}{\sin \theta_0} (2 \cos \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \sin \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}) = b \Delta s \cos \theta_i,$$

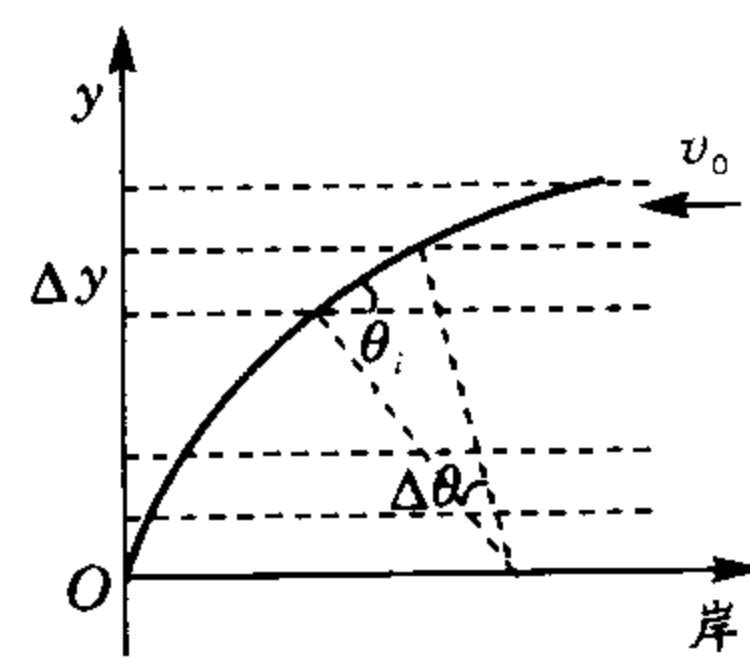
$$R = \frac{\Delta s}{\Delta \theta_i} = \frac{v_0}{b \sin \theta_0}.$$

各元段曲率半径为定值, 可见波线在 $z > 0$ 区域为一段圆弧.

15. 参见本专题例 3, 由 $\frac{c}{R + h_0} = \frac{c}{R + (h_0 + \Delta h)}$, 得

$$h_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{a} - R \right).$$

16. 设岸的坡度为 m , 水深为 h , 下限水深度为 h_0 , 此处水波速率为 v_0 并平行于岸, y 为离岸距离, 又 $v = kh$, 波线设为如图答 13-6 所示, 则由折射定律 $\frac{v_i}{v_0} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0}$, $v_i = \frac{v_0}{\sin \theta_0} \sin \theta_i$; 由几何关系 $\Delta S = \frac{\Delta y}{\cos \theta_i}$, 又 $\Delta y =$



图答 13-6

$$\frac{\Delta v}{km} = \frac{v_i - v_{i+1}}{km} = \frac{v_0}{k m \sin \theta_0} (\sin \theta_i - \sin \theta_{i+1}) = \frac{v_0}{k m \sin \theta_0}$$

$$2 \cos \theta_i \sin \frac{\Delta \theta}{2}, \text{ 于是 } \frac{v_0}{k m \sin \theta_0} 2 \cos \theta_i \sin \frac{\Delta \theta}{2} = \Delta S \cos \theta_i,$$

$$\Delta \theta \rightarrow 0, \sin \Delta \theta = \Delta \theta, \frac{\Delta S}{\Delta \theta} = \frac{v_0}{k m \sin \theta_0} = R, \text{ 曲率半径为定值, 故水波波线为圆弧.}$$

竞赛辅导

专题 14 刚体的运动学与动力学问题

沈 晨

教你一手

一、刚体知识概要

1. 刚体 在无论多大的外力作用下,总保持其形状和大小不变的物体称为刚体.刚体是一种理想化模型,实际物体在外力作用下发生的形变效应不显著可被忽略时,即可将其视为刚体,刚体内各质点之间的距离保持不变是其重要的模型特征.

2. 刚体的平动和转动 刚体运动时,其上各质点的运动状态(速度、加速度、位移)总是相同,这种运动称为平动.研究刚体的平动时,可选取刚体上任意一个质点为研究对象.刚体运动时,如果刚体的各个质点在运动中都绕同一直线做圆周运动,这种运动称为转动,而所绕的直线便称为转轴.若转轴是固定不动的,刚体的运动就是定轴转动.刚体的任何一个复杂运动总可视作平动与转动的叠加,刚体的运动同样遵从运动的独立性原理.

3. 质心 质心运动定理

质心 这是一个等效意义的概念:即对任何一个刚体(或质点系),总可以找到一点C,它的运动就代表整个刚体(或质点系)的平动,它的运动规律就等效于将刚体(或质点系)的质量集中在C点的运动情况,刚体(或质点系)所受外力也全部作用在C点时,这个点被称为质心.当外力的作用线通过刚体的质心时,刚体仅做平动;当外力作用线不通过质心时,整个物体的运动是随质心的平动及绕质心的转动的合成.

质心运动定理 物体受外力F作用时,其质心的加速度为 a_c ,则必有 $F=ma_c$,这就是质心运动定理.该定理表明:不管物体的质量如何分布,也不管外力作用点在物体的哪个位置,质心的运动总等效于物体的质量全部集中在此、外力亦作用于此时应有的运动.

4. 转动惯量J 转动惯量是物体在转动中惯性大小的量度,它等于刚体中每个质点的质量 m_i 与该质点到转轴的距离 r_i 的平方的乘积的总和,即

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

从转动惯量的定义式可知,刚体的转动惯量取决于刚体各部分的质量及对给定转轴的分布情况.在中学数学知识层面上,我们可以用微元法求一些质量均匀分布的几何体的转动惯量.

5. 描述转动状态的物理量 对应于平动状态参量的速度 v 、加速度 a 、动量 $p=mv$ 、动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$,描述刚体定轴转动状态的物理量有:

角速度 ω 角速度的定义为 $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.在垂直于转轴、离转轴距离 r 处的线速度和角速度之间的关系为 $v = \omega r$.

角加速度 β 角加速度的定义为 $\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.在垂直于转轴、离转轴距离 r 处的线加速度与角加速度的关系为 $a_t = r\beta$.

角动量L 角动量也可称动量矩,物体对定轴转动时,在垂直于转轴、离转轴距离 r 处某质量为 m 的质点的角动量大小是 $mvr = m\omega r^2$,各质点角动量的总和即为物体的角动量

$$L = \sum m_i v_i r_i = (\sum m_i r_i^2) \omega = J\omega.$$

转动动能 E_k 当刚体做转动时,各质点具有共同的角速度 ω 及不同的线速度 v ,若第 i 个质点质量为 m_i ,离转轴垂直距离为 r_i ,则其动能为

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2,$$

整个刚体因转动而具有的动能为所有质点的转动动能的总和

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

6. 力矩M 力矩的功A 冲量矩I

力矩M 如同力是质点运动状态改变、产生加速度的原因,力矩是改变刚体转动状态、使刚体获得角加速度的原因.力的大小与力臂的乘积称为力对转轴的力矩,即 $M = Fd$.

力矩的功A 类同于力的作用对位移的累积为功,力矩的作用对角位移的累积称为力矩的功,恒力矩M的作用使刚体转过 θ 角时,力矩所做的功为力矩和

角位移的乘积,即 $A=M\theta$.

冲量矩 I 与冲量是力的作用对时间的累积相似,力矩的作用对时间的累积称为冲量矩,冲量矩定义为力矩乘以力矩作用的时间,即 $I=M\Delta t$.

7. 定轴转动的基本规律

转动定律 刚体在合外力矩 M 作用下,所获得的角加速度 β 与合外力矩 M 大小成正比,与转动惯量 J 成反比,即 $\Sigma M=J\beta$. 如同质点运动的牛顿第二定律可表述为动量形式,转动定律的角动量表述形式是

$$\Sigma M = \frac{\Delta L}{\Delta t}.$$

转动动能定理 合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量,即 $\Delta E_k = \frac{1}{2} J\omega_i^2 - \frac{1}{2} J\omega_0^2$. 该定理揭示了力矩作用对角位移的积累效应是刚体的转动动能的改变.

角动量原理 转动物体所受的冲量矩等于这物体在这段时间内角动量的增量,即

$$M\Delta t = L_i - L_0 = J\omega_i - J\omega_0.$$

该原理体现了力矩作用的时间积累效应是改变刚体转动中的动量矩.

角动量守恒定律 当物体所受合外力矩等于零时 $M_{\text{外}}=0$, 物体的角动量保持不变,即 $\Sigma L_i = \text{常量}$, 此即角动量守恒定律. 该定律适用于物体、物体组或质点系当不受外力矩或所受合外力矩为零的情况. 在运用角动量守恒定律时,要注意确定满足守恒条件的参照系.

如果将上述描述刚体的物理量及刚体的运动学与动力学规律与质点问题相对照(如表 1 所示),可以发现它们极具平移对称性,依托我们对后者的熟巧,一定可以很快把握刚体转动问题的方法规律.

表 1

质点的直线运动	刚体的定轴转动
位移 s	角位移 θ
速度 $v \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$	角速度 $\omega \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$
加速度 $a \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$	角加速度 $\beta \quad \beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
匀速直线运动 $s=vt$	匀角速转动 $\theta=\omega t$
匀变速直线运动: $v_t = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ $v_t^2 - v_0^2 = 2as$	匀变速转动: $\omega_t = \omega_0 + \beta t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$ $\omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\beta\theta$
牛顿第二定律 $F=ma$	转动定律 $M=J\beta$
动量定理 $Ft = mv_t - mv_0$ (恒力)	角动量原理 $Mt = J\omega_t - J\omega_0$
动能定理 $Fs = \frac{1}{2} mv_t^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$	动能定理 $M\theta = \frac{1}{2} J\omega_t^2 - \frac{1}{2} J\omega_0^2$
动量守恒定律 $\Sigma mv = \text{恒量}$	角动量守恒定律 $\Sigma J\omega = \text{恒量}$

二、确定物体转动惯量的方法

物体的转动惯量是刚体转动状态改变的内因,求解转动刚体的动力学问题,离不开转动惯量的确定. 确定刚体的转动惯量的途径通常有:

1. 从转动惯量的定义出发

对于一些质量均匀分布、形状规则的几何体,计算它们关于对称轴的转动惯量,往往从定义出发,运用微元集合法,只须初等数学即可求得.

例 1 如图 14-1 所示,形状如同通常铅笔的正六角棱柱,质量为 M , 密度均匀,其横截面六边形边长为 a , 试求该棱柱体相对于它的中心对称轴的转动惯量.

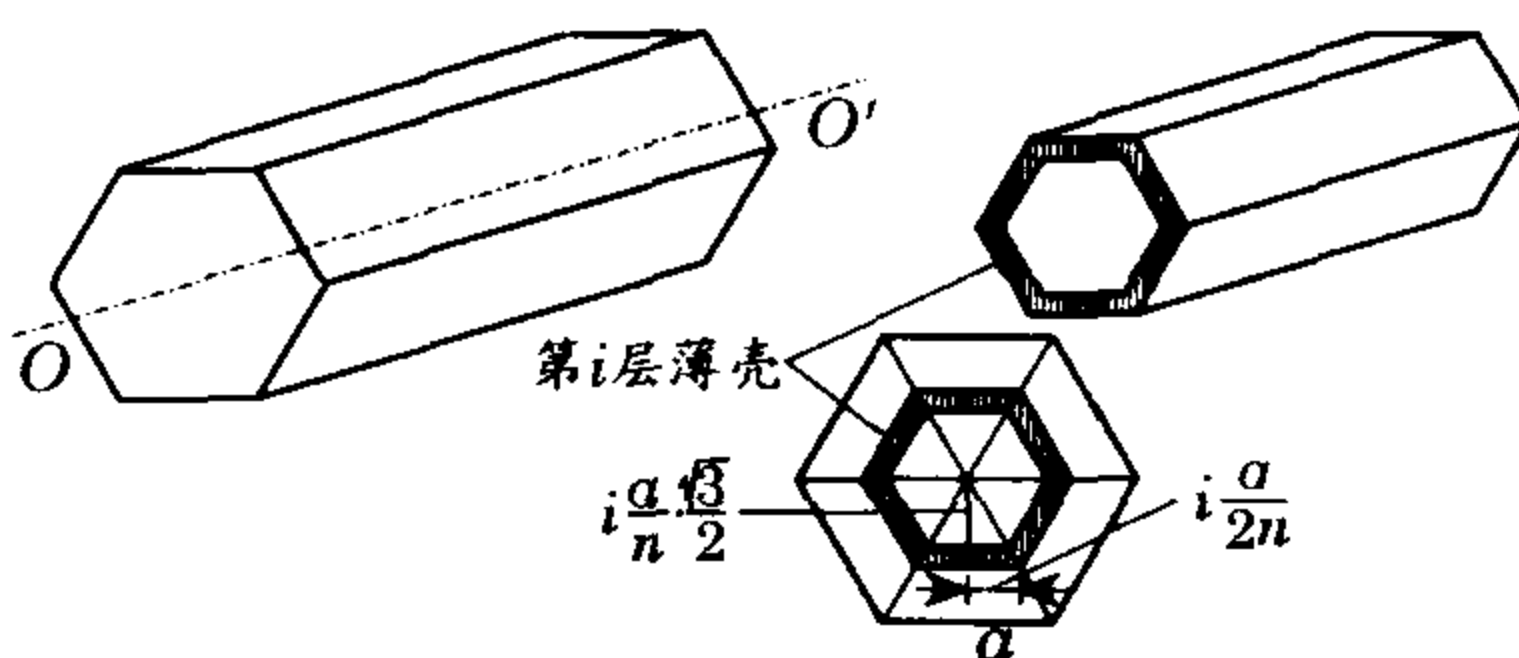


图 14-1

分析与解 这里求的是规则形状的几何体关于它的中心对称轴的转动惯量. 从转动惯量的定义出发,我们可将棱柱沿截面的径向均匀分割成 $n(n \rightarrow \infty)$ 个厚度均为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{n}$ 、棱长为 l 的六棱柱薄壳,确定任意一个这样的薄壳对中心轴的元转动惯量 J_i , 然后求和即可,即

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n J_i.$$

现在,先给出一矩形薄板关于与板的一条边平行的轴 OO' 的转动惯量. 板的尺寸标注如图 14-2 所示,质量为 m , 且均匀分布,轴 OO' 与板的距离为 h , 沿 b 边将板无限切分成 n 条长 l 、宽 b/n 的窄条,则有

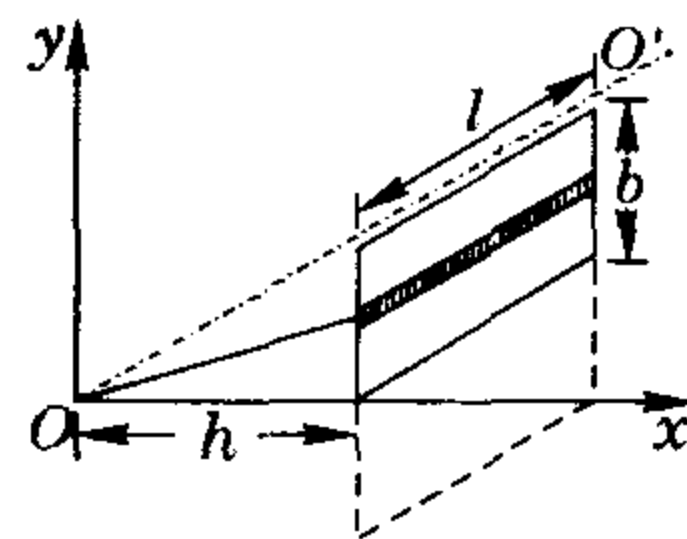


图 14-2

$$\begin{aligned} J_{\text{板}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{m}{bl} \cdot \frac{b}{n} \cdot l \left[h^2 + \left(i \frac{b}{n} \right)^2 \right] \\ &= m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{h^2}{n} + \frac{i^2}{n^3} b^2 \right] \\ &= m \left(h^2 + \frac{b^2}{3} \right). \end{aligned}$$

回到先前的六棱柱薄壳元上,由对称性可知,薄壳元对轴 OO' 的转动惯量是 $12J_{\text{板}}$, 即

$$J_i = 12\rho l \left(\frac{a}{n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(i \frac{a}{2n} \right) \left[\left(i \frac{a}{n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(i \frac{a}{2n} \right)^2 \right];$$

式中 ρ 是六棱柱体的密度:

$$\rho = \frac{M}{6 \times \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{2M}{3\sqrt{3}a^2 l}$$

则六棱柱体对中心对称轴 OO' 的转动惯量

$$\begin{aligned} J &= 12 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho l \left(\frac{a\sqrt{3}}{n} \right) \left(i \frac{a}{2n} \right) \cdot \\ &\quad \left[\left(i \frac{a}{n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(i \frac{a}{2n} \right)^2 \right] \\ &= 12 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho l \cdot \frac{\sqrt{3}a^4}{4} \cdot \frac{i^3}{n^4} \cdot \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{12} \right] \\ &= \frac{5Ma^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} \\ &= \frac{5Ma^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \\ &= \frac{5Ma^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{5}{12} Ma^2. \end{aligned}$$

2. 借助于平行轴定理

在刚体绕某点做转动时,需对过该点的轴求转动惯量,借助于平行轴定理,可以解决这样的问题:已知刚体对过质心的轴的转动惯量,如何求对不通过质心

但平行于过质心转轴的轴的转动惯量. 平行轴定理:设任意物体绕某固定轴 O 的转动惯量为 J ,绕通过质心而平行于轴 O 的转动惯量为 J_C ,则有 $J = J_C + Md^2$,式中 d 为两平行固定轴 O, C 之间的距离, M 为物体的质量.

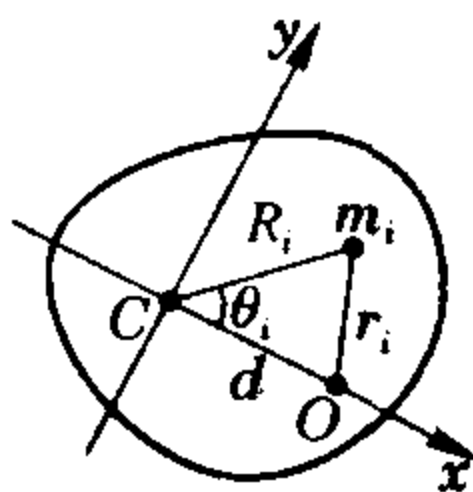


图 14-3

平行轴定理的推证:如图 14-3 所示, C 为过刚体质心并与纸面垂直的轴, O 为与它平行的另一轴,两轴相距为 d ,在与轴垂直的平面内以质心 C 为原点,过 C, O 两点的直线为 x 轴,建立 xCy 直角坐标系. m_i 代表刚体上任一微元的质量,它与轴 C 及轴 O 的距离依次为 R_i 和 r_i ,微元与质心连线与 x 方向夹角为 θ_i ,由转动惯量的定义知,刚体对轴 O 的转动惯量应为

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (R_i^2 + d^2 - 2dR_i \cos \theta_i) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i d^2 - 2d \sum_{i=1}^n m_i R_i \cos \theta_i. \end{aligned}$$

上式中第一项即为刚体对质心 C 的转动惯量 J_C ;第二项 $J = \sum_{i=1}^n m_i d^2 = d^2 \sum_{i=1}^n m_i = Md^2$, M 是刚体的总质量;

而第三项中 $\sum_{i=1}^n m_i R_i \cos \theta_i = \sum_{i=1}^n m_i x_i$, x_i 是质量元 m_i 在 xCy 平面直角坐标系内的 x 坐标,按质心的定义,有 $\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$,故 $J = J_C + Md^2$.

在上例中,我们已求得正六棱柱关于其中心轴的

转动惯量,利用平行轴定理,我们可求得六棱柱相对于棱边的转动惯量为

$$J = \frac{5}{12} Ma^2 + Ma^2 = \frac{17}{12} Ma^2.$$

3. 运用垂直轴定理

对任意的刚体,在刚体上任意建立三维空间坐标系 $Oxyz$,刚体对 x, y, z 轴的转动惯量分别为 J_x, J_y, J_z ,可以证明

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

r_i 是质元到坐标原点的距离.

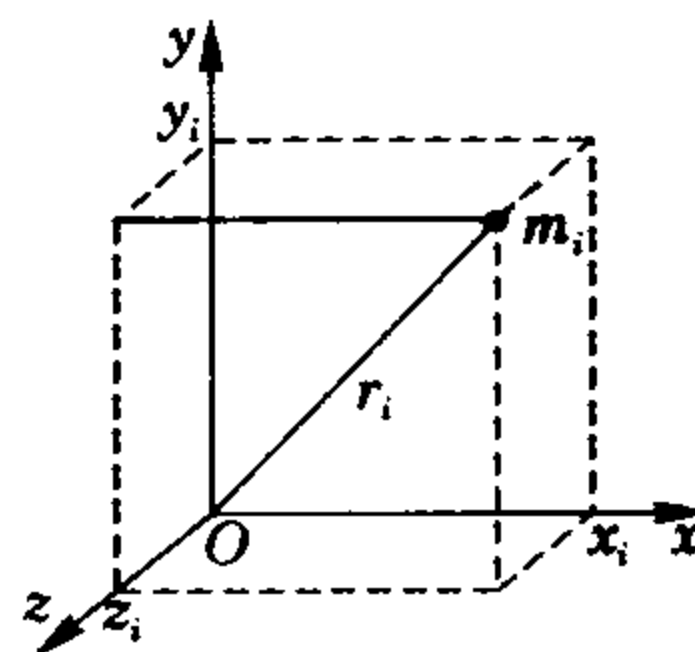


图 14-4

证明 如图 14-4 所示,质元 m_i 的坐标是 x_i, y_i, z_i ,显然, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.而刚体对 x, y, z 轴的转动惯量依次为

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2); \\ J_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

则

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

这个结论就是转动惯量的垂直轴定理,或称正交轴定理.这个定理本身及其推导方法对转动惯量求解很有意义.

例 2 从一个均匀薄片剪出一个如图 14-5 所示的规则对称的等臂星.对 C 轴,此星的转动惯量为 J .求等臂星对 C_1 轴的转动惯量. C 和 C_1 轴都位于图示的平面内, R 和 r 都可看似已知量.

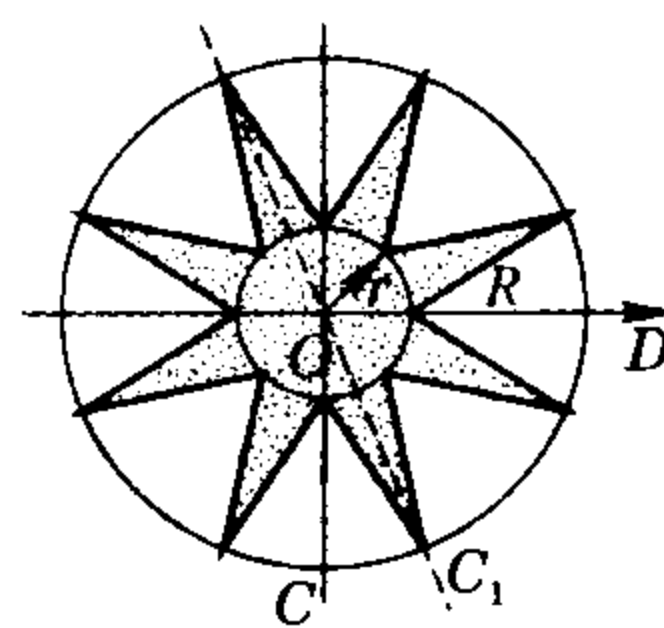


图 14-5

分析与解 设星形薄片上任意一质元到过中心 O 而与星平面垂直的轴距离为 r_i ,

则星对该轴的转动惯量 $J_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$,由于对称性,星对 C 轴及同平面内与 C 轴垂直的 D 轴的转动惯量相等,均为已知量 J ;同样,星对 C_1 轴及同平面内与 C_1 轴垂直的 D_1 轴的转动惯量亦相等,设为 J_1 ,等同于垂直轴定理的推导,这里应有

$$J_C + J_D = 2J = J_O, \quad J_{C_1} + J_{D_1} = 2J_1 = J_O.$$

于是有 $2J = 2J_1$,即 $J_1 = J$.

4. 巧用量纲分析法

根据转动惯量的定义为 $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$,其量纲应为

[ML²],转动惯量的表达式常表现为 kma^2 形式, m 是刚体的质量, a 是刚体相应的几何长度, 只要确定待定系数 k , 转动惯量问题便迎刃而解.

例 3 求均匀薄方板对过其中心 O 且与 x 轴(在薄方板平面内)形成 α 角的 C 轴的转动惯量.

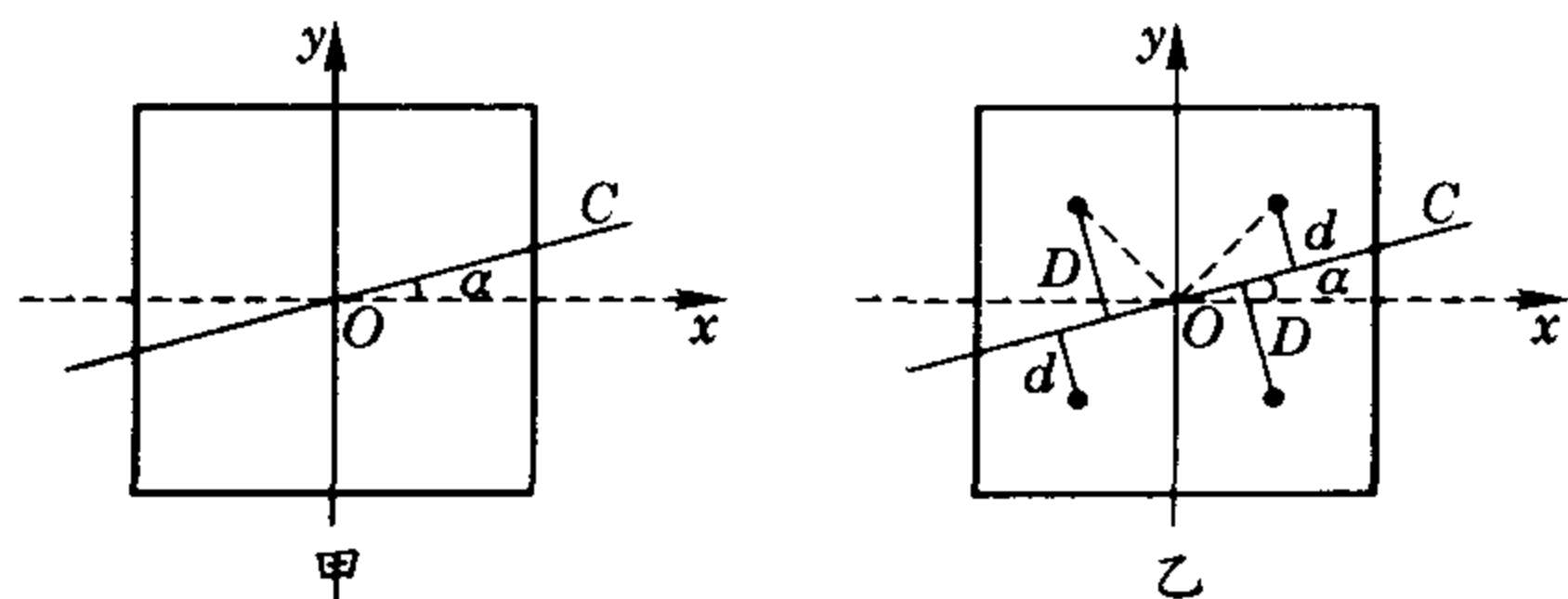


图 14-6

分析与解 如图 14-6 甲所示为待求其转动惯量的正方形薄板, 设其边长为 l , 总质量为 M , 对 C 轴的转动惯量为 $J = kMl^2$, 过 O 将板对称分割成四个相同的小正方形, 各小正方形对过各自质心且平行于 C 的轴的转动惯量为

$$k \frac{M}{4} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{kMl^2}{16}.$$

如图 14-6 乙所示, 小正方形的轴与 C 轴距离为 D 或 d , 由平行轴定理, 它们对 C 轴的转动惯量应分别为 $\frac{kMl^2}{16} + \frac{M}{4}D^2$ (两个质心与 C 轴距离为 D 的小正方形) 或 $\frac{kMl^2}{16} + \frac{M}{4}d^2$ (两个质心与 C 轴距离为 d 的小正方形), 则有下列等式成立

$$kMl^2 = 2\left(\frac{kMl^2}{16} + \frac{M}{4}D^2\right) + 2\left(\frac{kMl^2}{16} + \frac{M}{4}d^2\right).$$

化简整理, 可得

$$\frac{3}{2}kl^2 = D^2 + d^2.$$

而由几何关系, 可得

$$D = \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right),$$

$$d = \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\text{故有 } \frac{3}{2}kl^2 = \frac{l^2}{8} \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right],$$

$$\text{则 } k = \frac{1}{12}.$$

于是求得正方形木板对过其中心 O 的轴的转动惯量

$$J = \frac{1}{12}Ml^2, \text{ 且与角 } \alpha \text{ 并无关系.}$$

5. 这里提供一些规则几何体的转动惯量
一些规则几何体的转动惯量如表 2 所示.

表 2

<p>圆环 转轴通过中心 与环面垂直</p> $J = mr^2$	<p>圆环 转轴沿直径</p> $J = \frac{mr^2}{2}$
<p>薄圆盘 转轴通过中心 与盘面垂直</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	<p>圆筒 转轴沿几何轴</p> $J = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
<p>圆柱体 转轴沿几何轴</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	<p>圆柱体 转轴通过中心 与几何轴垂直</p> $J = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
<p>细棒 转轴通过中心 与棒垂直</p> $J = \frac{ml^2}{12}$	<p>细棒 转轴通过端点 与棒垂直</p> $J = \frac{ml^2}{3}$
<p>球体 转轴沿直径</p> $J = \frac{2mr^2}{5}$	<p>薄球壳 转轴沿直径</p> $J = \frac{2mr^2}{3}$

三、刚体运动问题例析

刚体运动问题主要涉及运用质心运动定理、角动量定理及角动量守恒定律等刚体的基本运动规律来求解刚体转动的动力学与运动学问题. 下面就此问题展示四例.

例 4 在平行的水平轨道上有一个均匀的滚轮, 缠着绳子, 绳子的末端固定着一个重锤. 开始时, 滚轮被按住, 滚轮与重锤系统保持不动. 在某一瞬间, 放开滚轮. 一段时间后, 滚轮轴得到了恒定的加速度 a , 如图 14-7 甲. 假定滚轮没有滑动, 请确定:

- (1) 重锤的质量 m 和滚轮的质量 M 之比;
- (2) 滚轮对水平轨道面的最小动摩擦因数.

分析与解 与处理质点的动力学问题一样, 处理刚体转动的力学问题, 要理清力矩与转动惯量对刚体运动的制约关系. 问题 (1) 中, 当滚轮轴亦即滚轮质心达到恒定的加速度 a 时, 其角加速度

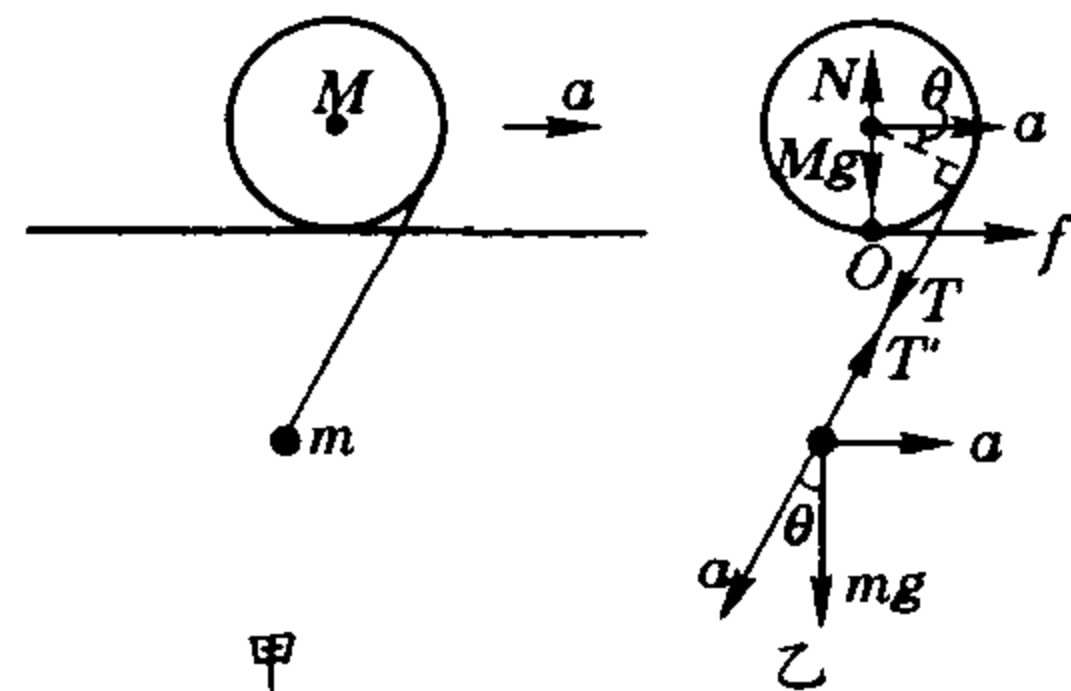


图 14-7

为 $\beta = a/R$, R 为滚轮的半径. 滚轮可视作质量均匀的

圆盘,其关于质心 C 的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$,分析滚轮受力情况如图 14-7 乙所示,可知以轮与水平轨道的接触点 O 为瞬时转动轴考察将比较方便,因为接触点处的力对刚体的这种转动不产生影响,关于 O 轴对滚轮形成转动力矩的只是绳子上的张力 T ,张力 T 可以通过重锤的运动来确定:重锤相对于滚轮有相同的水平加速度 a 及对轮心的线加速度 a , (后者方向应沿绳,重锤相对轮沿绳加速下降),这两个加速度是由重锤所受到的重力与绳子对重锤的拉力提供的,则由牛顿第二定律得下列关系

$$mg \tan \theta = ma, \frac{mg}{\cos \theta} - T' = ma,$$

所以 $T = T' = m \sqrt{a^2 + g^2} - ma.$

再考察滚轮,注意到 O 点到张力 T 的作用线之距离的几何尺寸,滚轮对 O 轴的转动惯量可用平行轴定理转换为 $\frac{3}{2}MR^2$,对滚轮运用转动定理,有下列方程

$$m(\sqrt{a^2 + g^2} - a) \cdot R \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}}\right) = \frac{3}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R}.$$

容易解得

$$\frac{m}{M} = \frac{3a \sqrt{a^2 + g^2}}{2(\sqrt{a^2 + g^2} - a)^2}.$$

在解决本题(2)时,我们对滚轮运用质心运动定理,滚轮质心加速度为 a ,方向水平,则应有

$$f - T \sin \theta = Ma, N - T \cos \theta = Mg.$$

式中 $\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}}, \cos \theta = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$

那么,动摩擦因数满足 $\mu \geq \frac{f}{N} = \frac{a}{g}.$

在上面解答中,确定滚轮与重锤的相关加速度是本题的“题眼”所在.

例 5 如图 14-8 甲所示,在光滑地面上静止地放置着两根质量均为 m ,长度均为 l 的匀质细杆,其中一杆由相等的两段构成,中间用光滑的铰链连接起来,两段在连接点可以弯折但不能分离.在两杆的一端,各施以相同的垂直于杆的水平冲量 I .试求两杆所获动能之比.

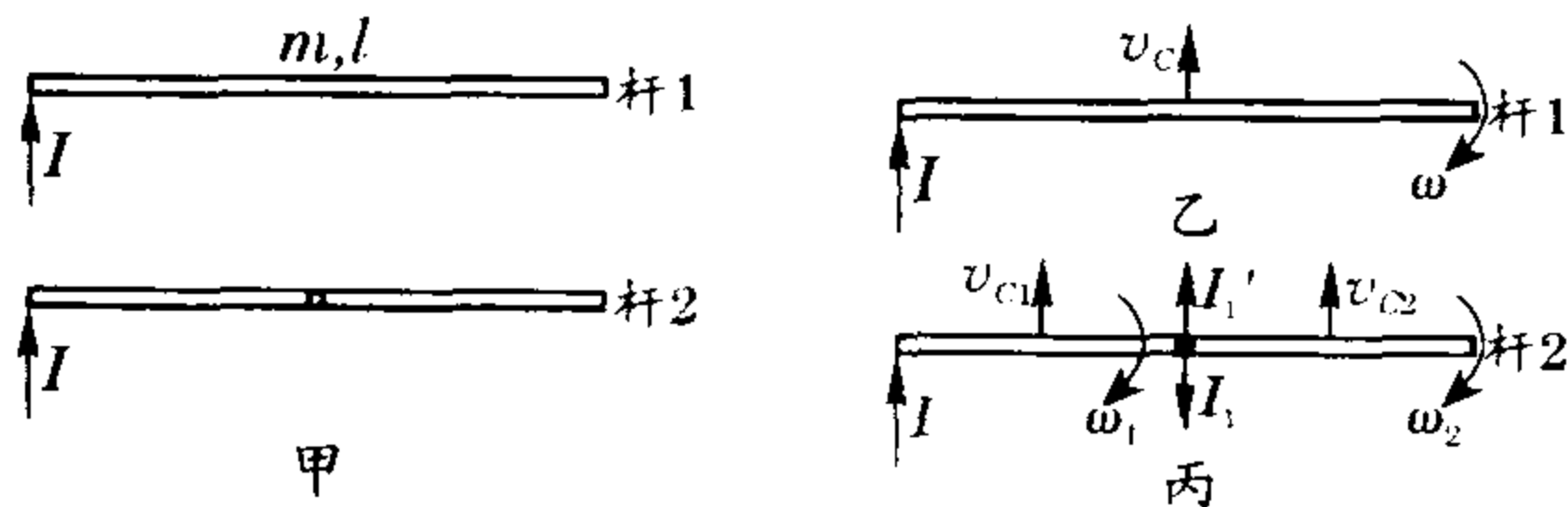


图 14-8

分析与解 本题的求解方向是通过质心的动量定理与刚体的角动量定理,求得杆的质心速度及绕质心的角速度,进而求出杆由于这两个速度所具有的动能.

如图 14-8 乙所示,设杆 1 在冲量 I 作用下,质心获得的速度为 v_c ,杆的角速度为 ω ,由质心的动量定理,得 $I = mv_c$;由刚体的角动量原理,得

$$I \cdot \frac{l}{2} = J\omega = \frac{1}{12}ml^2 \omega.$$

则杆 1 的动能为

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{I}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{Il}{2J}\right)^2 \\ &= \frac{I^2}{2m} + \frac{3I^2}{2m} = \frac{2I^2}{m}. \end{aligned}$$

如图 14-8 丙所示为杆 2 的左、右两段受力情况,当在杆 2 左端作用冲量 I 时,在两段连接处,有一对相互作用的冲量 I_1 与 I_1' ,它们大小相等,方向相反.由于两段受力情况不同,各段的质心速度及角速度均不同,但在连接处,注意到“不分离”的条件,左段的右端与右段的左端具有相同的速度.现对两段分别运用动量定理和角动量定理:

对杆 2 左段,有

$$I - I_1 = \frac{m}{2}v_{c1}, \quad (I + I_1) \cdot \frac{l}{4} = \frac{ml^2}{96}\omega_1. \quad (1)$$

对杆 2 右段,有 $I_1' = \frac{m}{2}v_{c2}, \quad I_1' \cdot \frac{l}{4} = \frac{ml^2}{96}\omega_2. \quad (2)$

由连接处“不分离”条件得左右两段的速度与角速度的关系是

$$v_{c1} - \omega_1 \cdot \frac{l}{4} = \omega_2 \cdot \frac{l}{4} + v_{c2}, \quad (3)$$

由①②两方程组及③式可得

$$\omega_1 = \frac{18I}{ml}, \omega_2 = -\frac{6I}{ml}, v_{c1} = \frac{5I}{2m}, v_{c2} = \frac{I}{2m}.$$

于是可计算杆 2 的动能为

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2}(v_{c1}^2 + v_{c2}^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{8}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{7I^2}{2m}.$$

易得 1、2 两杆的动能之比 $E_{k1} : E_{k2} = 4 : 7$.

本题求解中,破释杆 2 左、右两段连接处速度相同的相关关系,全盘皆活.

例 6 形状适宜的金属丝衣架能在如图 14-9 所示的平面里的几个平衡位置附近做小振幅摆动.在位置(甲)和位置(乙)里,长边是水平的.其他两边等长.三种情况下的振动周期都相等.试问衣架的质心位于何处?摆动周期是多少?

分析与解 本题涉及刚体做简谐运动的问题,即

复摆的运动规律. 一个在重力作用下绕水平轴在竖直

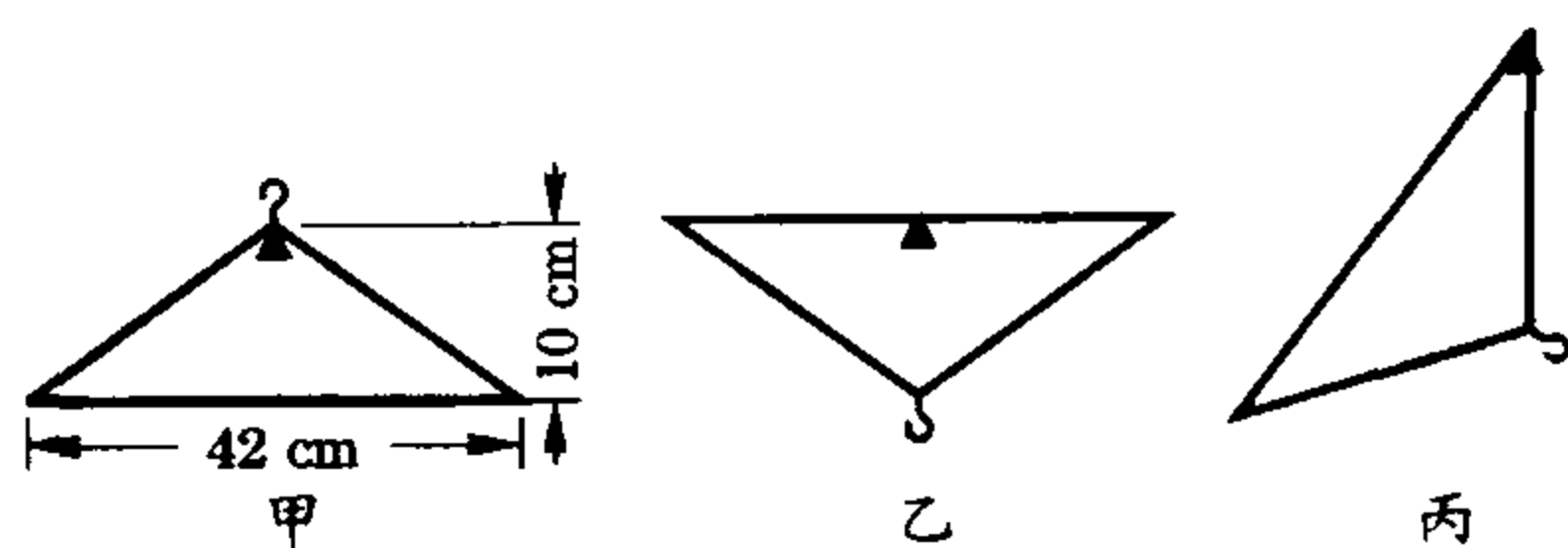


图 14-9

面内做小角度摆动的刚体称为复摆或物理摆. 我们先来推导复摆的周期公式. 如图 14-10 所示, 设 O 为转轴(悬点), C 为质心, 与转轴距离(复摆摆长)为 l , 质量为 m , 对转轴的转动惯量为 J , 最大偏角 $\theta < 5^\circ$. 由机械能守恒定律, 可得

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} J \omega'^2. \quad (1)$$

ω' 是刚体的质心通过平衡位置时的角速度. 对摆长 l 、质量 m 的理想单摆而言, 有

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m (\omega l)^2 = \frac{1}{2} m (A \omega_0)^2. \quad (2)$$

②式中 ω_0 是摆球(质点)通过平衡位置时的角速度, A 是振幅 ($A \approx l\theta$), ω_0 是摆球振动的圆频率. 周知. 若将①式变形为

$$\begin{aligned} mgl(1 - \cos \theta) &= \frac{1}{2} J \omega'^2 = \frac{1}{2} m \left(l \cdot \sqrt{\frac{J}{ml^2}} \omega' \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m (A \omega_0')^2, \end{aligned}$$

比较②式, 即对复摆与单摆作等效变换, 可得复摆小幅振动(亦为谐振)的圆频率 $\omega_0' = \sqrt{\frac{ml^2}{J}} \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$, 那么复摆的周期公式为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$.

由题设条件确定衣架的质心位置及转动惯量, 依据复摆周期公式, 即可确定三种情况下相同的摆动周期 T . 如图 14-11 所示, 质心 O 到转轴 A 、 B 、 C 的距离设为 a 、 b 、 c , 由图 14-9 甲所示的情况下衣架的平衡位置可知 O 必在衣架长边的中垂线 AB 上, 在三种情况下衣架对转轴 A 、 B 、 C 的转动惯量依次为

$$J_A = J_O + ma^2; J_B = J_O + mb^2; J_C = J_O + mc^2.$$

式中 J_O 为所设衣架对质心的转动惯量, m 是衣架总质量. 因为三种情况下的周期相同, 故有

$$\frac{J_O + ma^2}{mga} = \frac{J_O + mc^2}{mgc}, \text{ 即 } (J_O - mac)(c - a) = 0,$$

显然 $c \neq a$, 则可知 $J_O = mac$;

$$\text{又有 } \frac{J_O + ma^2}{mga} = \frac{J_O + mb^2}{mgb},$$

$$\text{即 } (J_O - mab)(b - a) = 0,$$

此式中因 $c > b$, $(J_O - mab) \neq 0$, 则必有 $a = b$, 即质心位于 AB 之中点. 衣架的振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mac + mc^2}{mgc}} = 2\pi \sqrt{\frac{a + c}{g}}.$$

根据图 14-9 的标注数字可知 $a = 5 \text{ cm}$, $c = \sqrt{21^2 + 5^2} \text{ cm} \approx 21.6 \text{ cm}$, 代入后得 $T \approx 1.03 \text{ s}$.

本题是国际物理奥林匹克的一道竞赛题, 题意简洁, 解答方法也很多, 笔者给出的这种解法应该说比较严密且巧妙.

最后, 我们再尝试解答另一道比较繁难的国际物理奥林匹克赛题, 该题涉及动量矩守恒定律的运用.

例 7 如图 14-12 所示, 一个质量为 m , 半径为 R_A 的均匀圆盘 A 在光滑水平面 xOy 内以速度 v 沿 x 方向平动, 圆盘中心至 x 轴的垂直距离为 b . 圆盘 A 与另一静止的、其中心位于坐标原点 O 的均匀圆盘 B 相碰. 圆盘 B 的质量与 A 相同, 半径为 R_B . 假定碰撞后

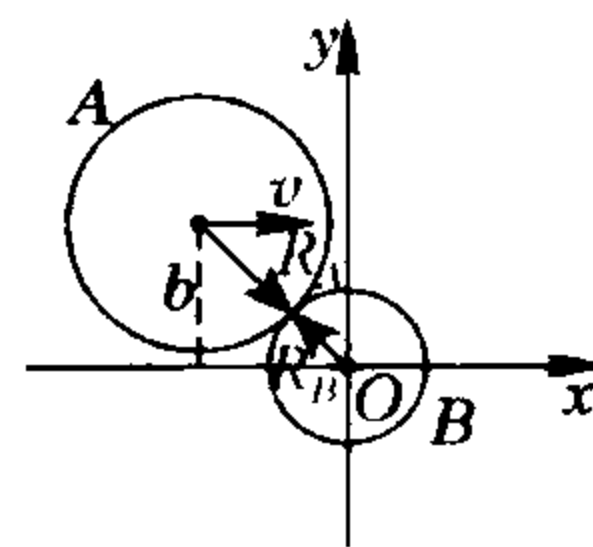


图 14-12

两圆盘接触处的切向速度分量(垂直于连心线方向的速度)相等, 并假设碰撞前后两盘沿连心线方向的相对速度大小不变. 在发生碰撞的情况下, 试求: (1) 碰后两圆盘质心速度的 x 分量和 y 分量, 结果要以给定的参量 m 、 R_A 、 R_B 、 v 和 b 表示; (2) 碰后两圆盘的动能, 结果要以给定的参量 m 、 R_A 、 R_B 、 v 和 b 表示.

分析与解 (1) 本题情景简言之, 是质量相同的运动圆盘 A 与静止圆盘 B 在水平面上发生非弹性斜碰. 碰撞前后, 质心动量守恒——系统不受外力; 对 O 点的角动量守恒——外力冲量矩为零; 动能不守恒——碰撞后两圆盘接触处的切向速度分量相等, 必有摩擦力存在, 动能有损失. 本题给出诸多的附加条件, 除了根据动量守恒与角动量守恒列出基本方程外, 还须根据附加条件给出足够的补充方程, 并适当选用速度分量, 方可最终得解.

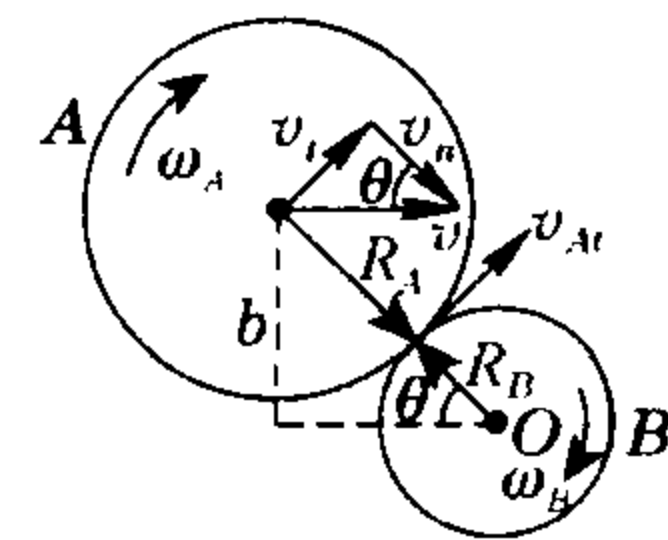


图 14-13

如图 14-13 所示, 设碰撞时两盘质心连线与 x 轴成 θ 角, 由几何关系可知

$$b = (R_A + R_B) \sin \theta,$$

对系统, 在法向与切向动量均守恒, 即

$$mv \sin \theta = mv_{Ax} + mv_{Bx}, \quad (1)$$

$$mv \cos \theta = mv_{Ay} + mv_{By}. \quad (2)$$

式中, v_{Ax} 、 v_{Bx} 、 v_{Ay} 、 v_{By} 是 A、B 盘碰撞后沿切向与径向的质心速度, 系统对 O 点的动量矩守恒, 即

$$mvb = J_A \omega_A + mv_{Ax}(R_A + R_B) + J_B \omega_B, \quad (3)$$

该式中, $J_A = \frac{1}{2}mR_A^2$, $J_B = \frac{1}{2}mR_B^2$, ω_A 、 ω_B 为两盘碰撞后的角速度, 待定. 注意碰撞后 A 盘既有转动又有平动, 对 O 点的动量矩由两部分组成, 而 B 盘质心在 O 点, 故角动量仅为 $J_B \omega_B$. 上述三个方程涉及六个未知量, 需列出补充方程.

根据两盘接触处切向速度相同有

$$v_{Ax} - \omega_A R_A = v_{Bx} + \omega_B R_B. \quad (4)$$

根据两盘法向相对速度不变有

$$v \cos \theta = v_{By} - v_{Ay}. \quad (5)$$

对 B 盘, 由动量定理和动量矩原理, 摩擦力 f 的作用是 $f \cdot \Delta t = mv_{Bx}$, $f \cdot R_B \cdot \Delta t = J_B \omega_B$. 即有

$$mv_{Bx} R_B = J_B \omega_B. \quad (6)$$

由上述六个方程解得

$$\omega_A = \frac{v \sin \theta}{3R_A}, \quad \omega_B = \frac{v \sin \theta}{3R_B};$$

$$v_{Ax} = \frac{5}{6}v \sin \theta, \quad v_{Bx} = \frac{1}{6}v \sin \theta;$$

$$v_{Ay} = 0, \quad v_{By} = v \cos \theta.$$

两盘碰后质心速度的 x 分量为

$$v_{Ax} = v_{Ax} \sin \theta + v_{Ay} \cos \theta = \frac{5}{6}v \sin^2 \theta;$$

$$v_{Bx} = v_{Bx} \sin \theta + v_{By} \cos \theta = \frac{1}{6}v \sin^2 \theta + v \cos^2 \theta.$$

两盘碰后质心速度的 y 分量为

$$v_{Ay} = v_{Ax} \cos \theta - v_{Ay} \sin \theta = \frac{5}{6}v \sin \theta \cos \theta;$$

$$v_{By} = v_{Bx} \cos \theta - v_{By} \sin \theta = -\frac{5}{6}v \sin \theta \cos \theta.$$

$$\text{其中 } \sin \theta = \frac{b}{R_A + R_B}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{R_A + R_B}.$$

(2) 各圆盘的动能, 是各盘质心平动动能与圆盘转动动能之和, 这里不赘述, 答案是

$$E_A = \frac{3mv^2 b^2}{8(R_A + R_B)^2}, \quad E_B = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2} \right).$$

小球身手

1. 如图 14-14 所示, 一个圆盘半径为 R , 各处厚度一样, 在每个象限里, 各处的密度也是均匀的, 但不同象限里的密度则不同, 它们的密度之比为 $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4 = 1 : 2 : 3 : 4$, 求这圆盘的质心位置.

2. 如图 14-15 所示, 质量为 m 的均匀圆柱体, 截面半径为 R , 长为 $2R$. 试求圆柱体绕通过质心及两底面边缘的转轴(如图中的 Z_1 、 Z_2)的转动惯量 J .

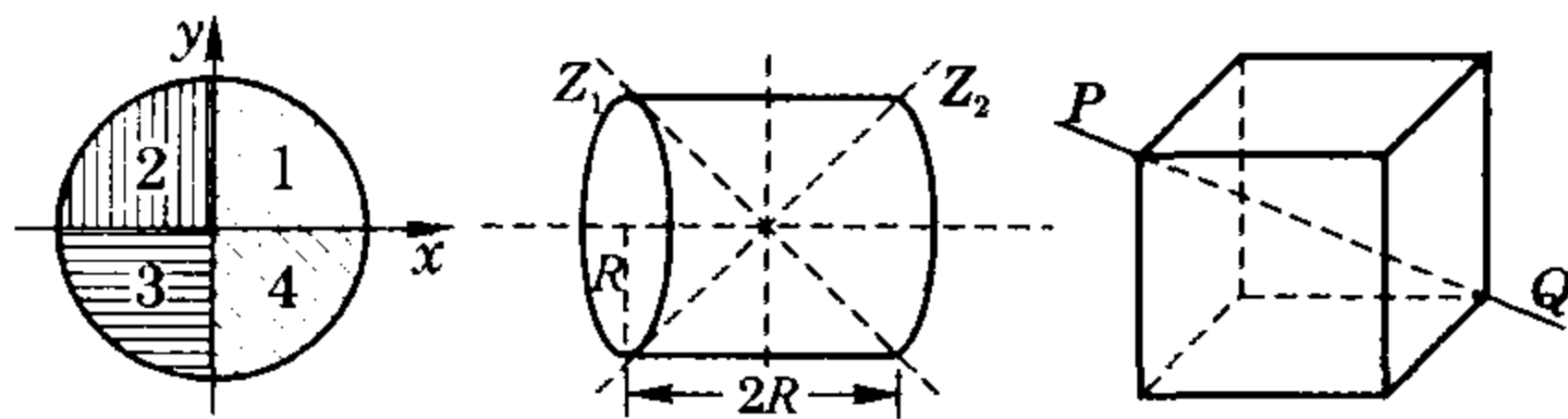


图 14-14

图 14-15

图 14-16

3. 如图 14-16 所示, 匀质立方体的边长为 a , 质量为 m . 试求该立方体绕对角线轴 PQ 的转动惯量 J .

4. 椭圆细环的半长轴为 A , 半短轴为 B , 质量为 m (未必匀质), 已知该环绕长轴的转动惯量为 J_A , 试求该环绕短轴的转动惯量 J_B .

5. 如图 14-17 所示矩形均匀薄片 $ABCD$ 绕固定轴 AB 摆动, AB 轴与竖直方向成 $\alpha = 30^\circ$ 角, 薄片宽度 $AD = d$, 试求薄片做微小振动时的周期.

6. 一个均匀的薄方板, 质量为 M , 边长为 a , 固定它的一个角点, 使板竖直悬挂, 板在自身的重力作用下, 在所在的竖直平面内摆动. 在穿过板的固定点的对角线上的什么位置(除去转动轴处), 贴上一个质量为 m 的质点, 板的运动不会发生变化? 已知对穿过板中心而垂直于板的轴, 方板的转动惯量为 $J = \frac{1}{6}Ma^2$.

7. 如图 14-18 所示, 两根等质量的细杆 BC 及 AC , 在 C 点用铰链连接, 质量不计, 放在光滑水平面上, 设两杆由图示位置无初速地开始运动, 求铰链 C 着地时的速度.

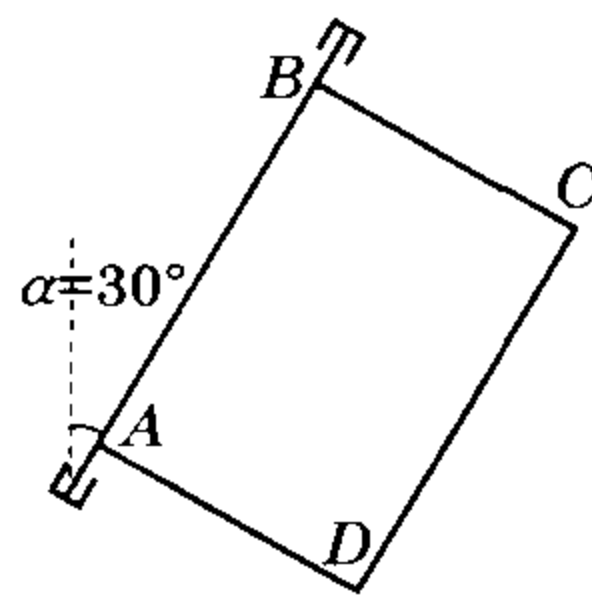


图 14-17

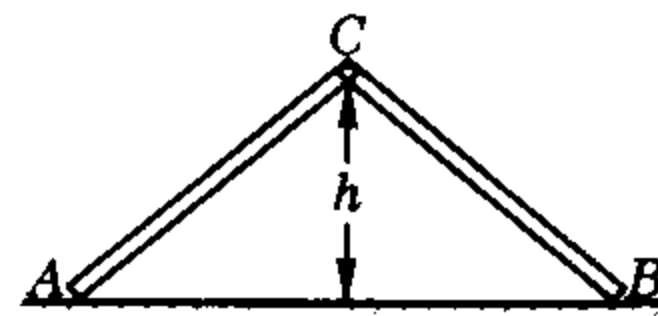


图 14-18

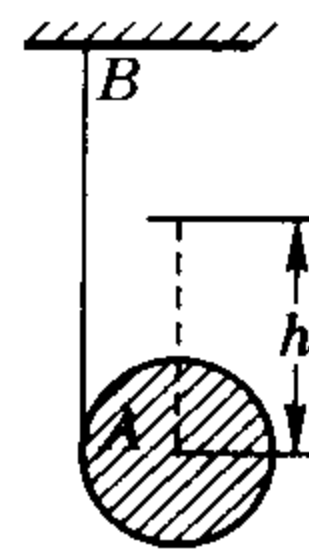


图 14-19

8. 如图 14-19 所示, 圆柱体 A 的质量为 m , 在其中部绕以细绳, 绳的一端 B 固定不动, 圆柱体初速为零地下落, 当其轴心降低 h 时, 求圆柱体轴心的速度及绳上的张力.

9. 如图 14-20 所示, 实心圆柱体从高度为 h 的斜坡上从静止纯滚动地到达水平地面上, 继续纯滚动, 与光滑竖直墙做完全弹性碰撞后返回, 经足够长的水平距离后重新做纯滚动, 并纯滚动地爬上斜坡, 设地面与圆柱体之间的摩擦系数为 μ , 试求圆柱体爬坡所能达

到的高度 h' .

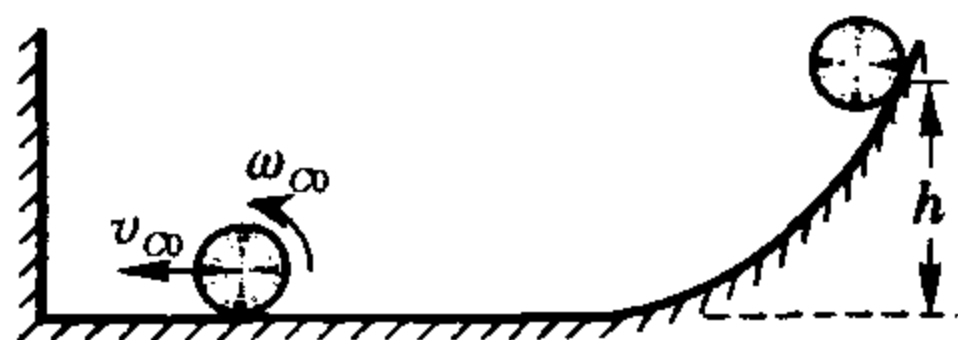


图 14-20

10. 在一个固定的、竖直的螺杆上的一个螺帽, 螺距为 s , 螺帽的转动惯量为 J , 质量为 m . 假定螺帽与螺杆间的摩擦系数为零, 螺帽以初速度 v_0 向下移动, 螺帽竖直移动的速度与时间有什么关系? 这是什么样的运动? 重力加速度为 g .

11. 在水平地面上有两个完全相同的均匀实心球, 其一做纯滚动, 质心速度为 v , 另一静止不动, 两球做完全弹性碰撞, 因碰撞时间很短, 碰撞过程中摩擦力的影响可以不计. 试求:

- (1) 碰后两球达到纯滚动时的质心速度;
- (2) 全部过程中损失的机械能的百分数.

12. 如图 14-21 所示, 光滑水平地面上静止地放着质量为 M 、长为 l 的均匀细杆. 质量为 m 的质点以垂直于杆的水平初速度 v_0 与杆的一端做完全非弹性碰撞.

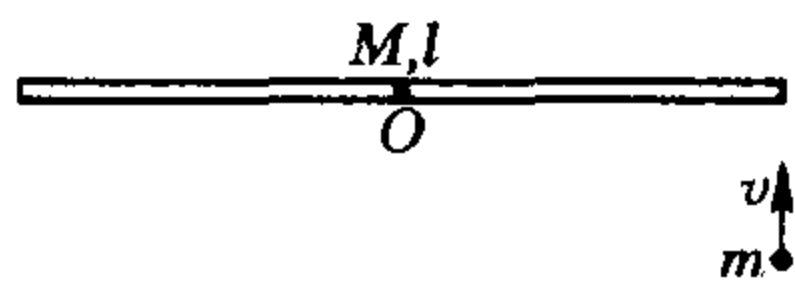


图 14-21

试求: (1) 碰后系统质心的速度及绕质心的角速度; (2) 实际的转轴 (即静止点) 位于何处?

13. 如图 14-22 所示, 实心匀质小球静止在圆柱面顶点, 受到微扰而自由滚下, 为了令小球在 $\theta \leq 45^\circ$ 范围内做纯滚动, 求柱面与球间摩擦因数 μ 至少多大?

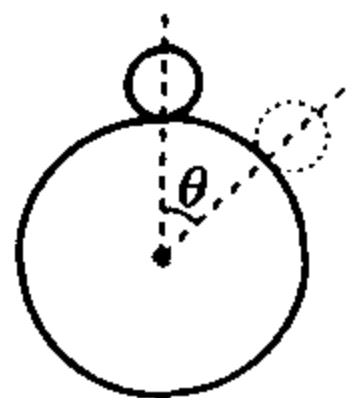


图 14-22

14. 如图 14-23 所示, 半径为 R 的乒乓球, 绕质心轴的转动惯量 $J = \frac{2}{3}mR^2$, m 为乒乓球的质量, 以一定的初始条件在粗糙的水平面上运动, 开始时球的质心速度为 v_0 , 初角速度为 ω_0 , 两者的方向如图. 已知乒乓球与地面间的摩擦因数为 μ . 试求乒乓球开始做纯滚动所需的时间及纯滚动时的质心速度.

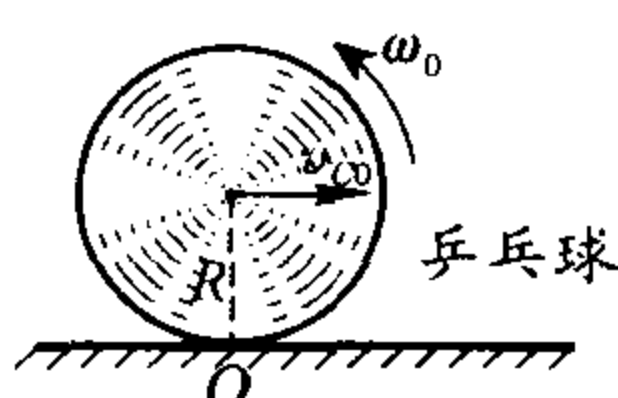


图 14-23

15. 如图 14-24 所示, 一个刚性的固体正六角棱柱, 形状就像通常的铅笔, 棱柱的质量为 M , 密度均匀. 横截面六边形的边长为 a . 六角棱柱相对于它的中

心轴的转动惯量 $J = \frac{5}{12}Ma^2$. 相对于棱边的转动惯量

是 $J' = \frac{17}{12}ma^2$. 现令棱

柱开始不均匀地滚下斜面. 假设摩擦力足以阻止任何滑动, 并且一

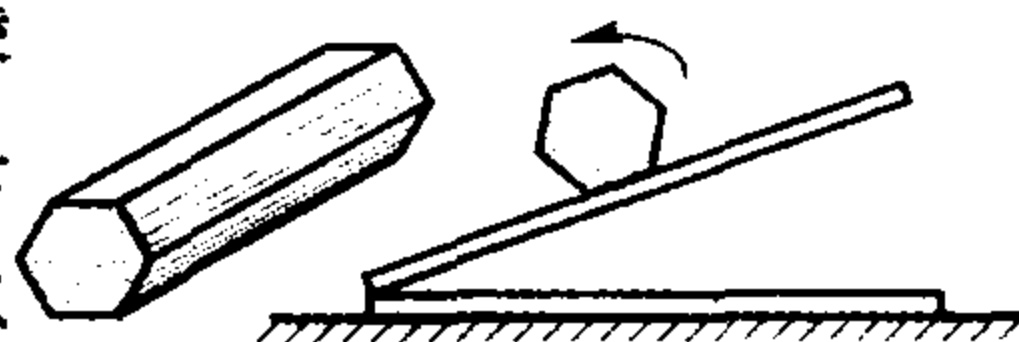


图 14-24

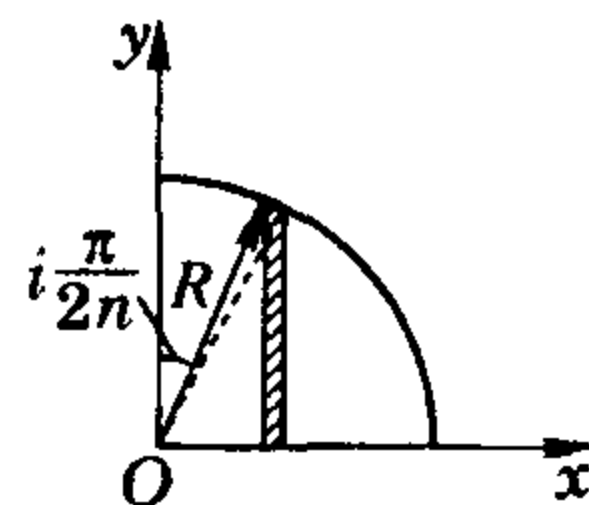
直接触斜面. 某一棱刚

碰上斜面之前的角速度为 ω_i , 碰后瞬间角速度为 ω_f , 在碰撞前后瞬间的动能记为 E_{ki} 和 E_{kf} .

试证明 $\omega_f = s\omega_i$, $E_{kf} = rE_{ki}$, 并求出系数 s 和 r 的值.

参考答案

1. 先确定一半径为 R 的 $1/4$ 圆的匀质薄板的质心, 如图答 14-1 所示, 在 xOy 坐标中, 若质心坐标为 (x_c, y_c) , 由对称性知 $y_c = x_c$, 则根据质心的等效意义, 有



图答 14-1

$$\begin{aligned} & \frac{\pi R^2}{4} \cdot x_c \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R \frac{\pi}{2n} \cos\left(i \frac{\pi}{2n}\right) R \cos\left(i \frac{\pi}{2n}\right) R \sin\left(i \frac{\pi}{2n}\right) \\ &= R^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{8n} \left[\sin 3\left(i \frac{\pi}{2n}\right) + \sin\left(i \frac{\pi}{2n}\right) \right], \text{ 于是有} \\ x_c &= \frac{R}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin 3\left(i \frac{\pi}{2n}\right) + \sin\left(i \frac{\pi}{2n}\right) \right] \\ &= \frac{R}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{3\pi}{4n} \frac{\sin \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{2n}\right) \cdot \sin \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4n}\right)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4n} \frac{\sin \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \sin \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \right] \\ &= \frac{4R}{3\pi}. \end{aligned}$$

针对本题中圆盘各象限密度不同有下列方程

$$\begin{aligned} \frac{\pi R^2}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) x_c &= \frac{\pi R^2}{4} (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \rho_4) \frac{4R}{3\pi}, \\ \frac{\pi R^2}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) y_c &= \frac{\pi R^2}{4} (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4) \frac{4R}{3\pi}, \end{aligned}$$

解以上方程得 $x_c = 0$, $y_c = -\frac{8}{15\pi}R$. 故质心坐标为

$$\left(0, -\frac{8}{15\pi}R\right).$$

2. 如图答 14-2 所示, 对图中所示的 Z_1 、 Z_2 、 Z 坐标系与 Z_3 、 Z_4 、 Z 坐标系运用正交轴定理, 有

$$J_1 + J_2 + J = J_3 + J_4 + J,$$

其中 $J_3 = \frac{1}{2}mR^2$, $J_4 = \frac{7}{12}mR^2$, 由对称等效可知

$$J_1 = J_2 = \frac{13}{24}mR^2.$$

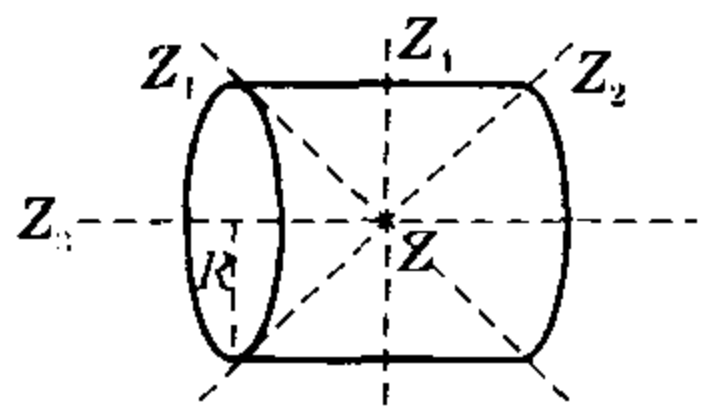
3. 如图答 14-3 所示, 将立方体等分为边长为 $\frac{a}{2}$ 的八个小立方体, 每个小立方体体对角线到大立方体

体对角线距离 $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a$,

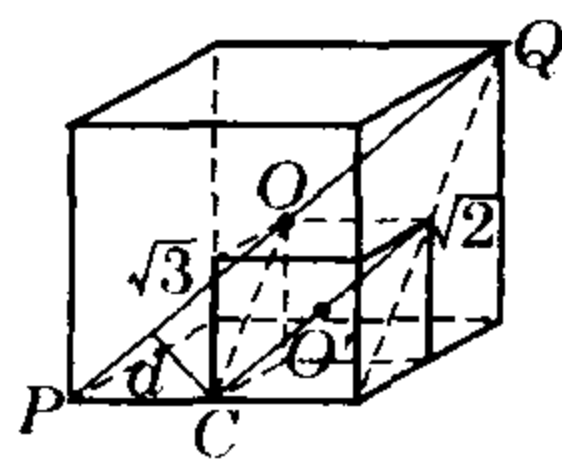
依照本专题例 3 用量纲分析法求解有

$$kmu^2 = 2k\left(\frac{m}{8}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 6\left[k\left(\frac{m}{8}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{8}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2\right],$$

所以有 $k = \frac{1}{6}$, $J = \frac{1}{6}ma^2$.



图答 14-2



图答 14-3

4. 由正交轴定理 $J_A + J_B = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$ 及椭圆方程 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, 得 $J_A + J_B = \sum m_i\left(A^2 - \frac{A^2}{B^2}y_i^2 + y_i^2\right) = mA^2 + \left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)J_A$, 所以

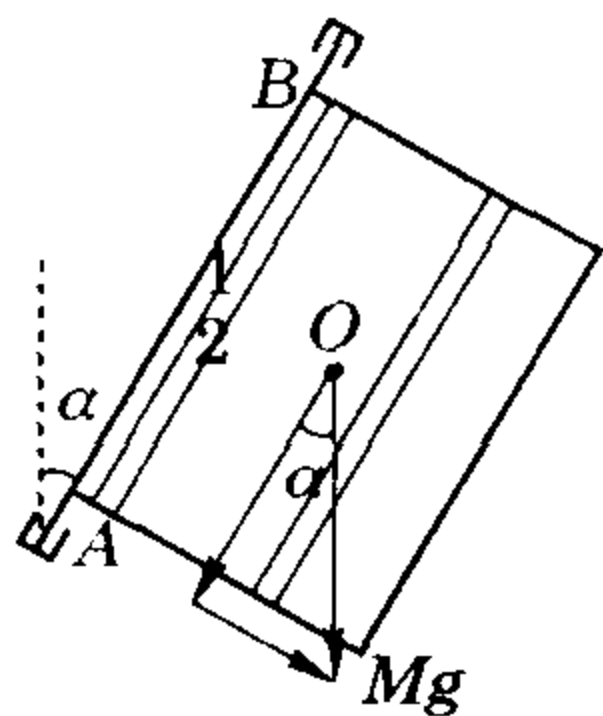
$$J_B = mA^2 - \frac{A^2}{B^2}J_A.$$

5. 如图答 14-4 所示, 设板质量为 M , 则对 AB 轴的转动惯量

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{M}{n} \left(i \frac{d}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}Md^2,$$

对应于与竖直成 α 角的转轴, 等效的重力是与轴垂直的分量 $Mg \sin \alpha$, 则

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Md^2/3}{dMg \sin \alpha/2}} = 4\pi \sqrt{\frac{d}{3g}}.$$



图答 14-4

6. 薄板上未贴 m 时对悬点的转动惯量 $J_0 = J + Md^2 = \frac{2}{3}Ma^2$,

贴 m 后 $J_1 = \frac{2}{3}Ma^2 + mx^2$. 振动周期相同, 应有

$$\frac{J_0}{Mgl} = \frac{J_1}{(M+m)gl'},$$

贴上 m 后, 质心相对悬点 $l' = \frac{mx + Ml}{M+m}$, $l = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

解得 $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

7. 初始时, 系统具有的重力势能 $E_p = mgh$, m 为一根杆的质量; 铰链 C 刚着地时, 速度 v_C 竖直向下, 各杆的瞬时转轴为 $A(B)$, 转动惯量 $J = ml^2/3$, l 表示每段杆长; 由于铰链 C 质量不计, 则系统总动能

$$E_k = 2 \cdot \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{3}ml^2 \left(\frac{v_C}{l}\right)^2 = \frac{1}{3}mv_C^2,$$

下落中机械能守恒, 有 $mgh = \frac{1}{3}mv_C^2$, 得 $v_C = \sqrt{3gh}$.

8. 如图答 14-5 所示, 圆柱体关于几何轴的转动惯量 $J = \frac{1}{2}mR^2$, 对过与绳相切点 P 的平行

轴的转动惯量 $J_P = \frac{3}{2}mR^2$; 设轴心降低 h 时速度为 v , 由机械能守恒定律

$$mgh = \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2,$$

所以 $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$,

又由质心运动定律 $mg - T = m\beta R$,

由转动定律 $mgR = \frac{3}{2}mR^2\beta$.

则 $T = \frac{1}{3}mg$.

9. 纯滚动时, 无机械能损失, 于是满足方程

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mR^2}{2} \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2,$$

圆柱体与光滑墙碰撞, 开始做非纯滚动, 经时间 t 达到纯滚动, 质心速度由 $v_C \rightarrow v_C'$, 角速度从 $\frac{v_C}{R} \rightarrow -\frac{v_C'}{R}$, 运用动量定理及动量矩定理

$$f \cdot t = m(v_C - v_C'); fR \cdot t = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{v_C}{R} + \frac{v_C'}{R}\right),$$

解得 $v_C' = \frac{v_C}{3}$, 此后机械能守恒, 联系第一式可得

$$mgh' = \frac{3}{4}mv'^2, \text{ 得 } h' = \frac{h}{9}.$$

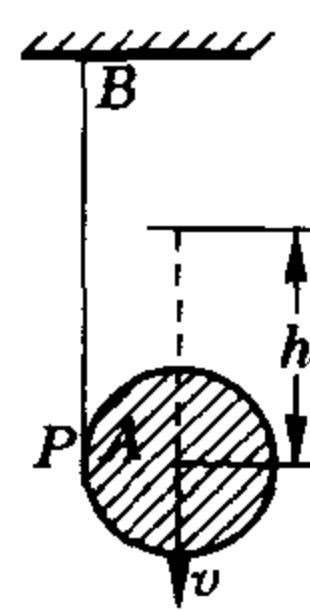
10. 由机械能守恒定律, 得

$$mgs = \frac{1}{2}J(\omega_i^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2}m(v_i^2 - v_0^2),$$

又因 $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{s}$, 可得 $v_i^2 - v_0^2 = 2 \cdot \frac{m}{4\pi^2 J/s^2 + m}gs = 2g's$,

即螺帽匀加速直线下降 $v_i = v_0 + g't$, $g' = \frac{m}{4\pi^2 J/s^2 + m}g$.

11. (1) 如图答 14-6 所示, 两球 $J = \frac{2mv^2}{5}$, 刚完成弹性碰撞时, 两球交换质心速度, 角速度未变; 设两球各



图答 14-5

经 t_1, t_2 达到纯滚动状态, 质心速度为 v_1, v_2 , 对球 1 有

$$f \cdot t_1 = mv_1,$$

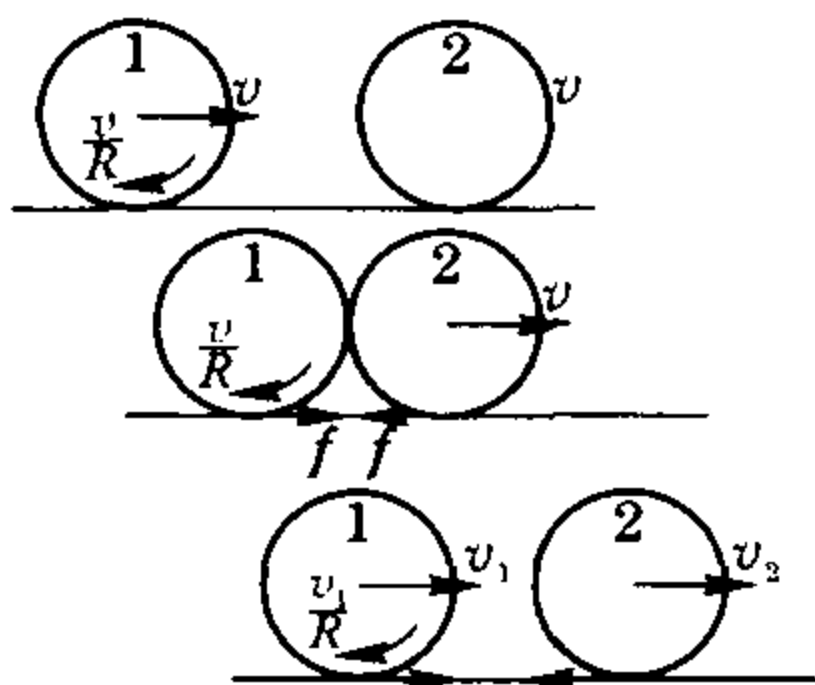
$$fR \cdot t_1 = \frac{2mR^2}{5} \left(\frac{v}{R} - \frac{v_1}{R} \right),$$

所以 $v_1 = \frac{2}{7}v$; 对球 2 有

$$f \cdot t_2 = m(v - v_2),$$

$$fR \cdot t_2 = \frac{2mR^2}{5} \cdot \frac{v_2}{R},$$

$$v_2 = \frac{5}{7}v.$$



图答 14-6

(2) 系统原机械能

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2mR^2}{5} \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{7}{10}mv^2;$$

$$\begin{aligned} \text{达到纯滚动后 } E_{k1} &= \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{2v}{7} \right)^2 + \left(\frac{5v}{7} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2mR^2}{5} \left[\left(\frac{2v}{7R} \right)^2 + \left(\frac{5v}{7R} \right)^2 \right] = \frac{29}{70}mv^2, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \eta = \frac{20}{49} \approx 41\%.$$

12. (1) 碰后系统质心位置从杆中点右移为 $\Delta x = \frac{m}{M+m} \cdot \frac{l}{2}$. 由质心的动量守恒 $mv_0 = (M+m)v_c$, 求得质心速度 $v_c = \frac{m}{M+m}v_0$.

(2) 由角动量守恒 $mv_0 \cdot \frac{l}{2} = \frac{Ml^2}{12}\omega + m\omega x \cdot \frac{l}{2}$, x 为瞬时轴距杆右端的距离; 考虑质心速度与角速度关系

$$\omega = \frac{v_c}{x - \frac{Ml}{2(M+m)}} = \frac{2mv_0}{2(M+m)x - Ml},$$

$$\text{在 } x = \frac{2l}{3} \text{ 处, 有 } \omega = \frac{6mv_0}{(M+4m)l}.$$

13. 圆柱半径与小球半径分别以 R, r 表示, 小球滚到如图 14-7 位置时, 质心速度设为 v_c , 角加速度 β , 转动惯量 $J = \frac{2}{5}mr^2$, 受到重力 mg 、圆柱面支持力 N 、静摩擦力 f , 由质心运动定律, 有

$$mg \cos \theta - N = \frac{mv_c^2}{R+r}, \quad (1)$$

$$mg \sin \theta - f = m\beta r, \quad (2)$$

$$\text{由转动定律有 } fr = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \beta, \quad (3)$$

又因小球做纯滚动, 摩擦力为静摩擦力不做功, 球的机械能守恒

$$mg(R+r)(1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{v_c}{r} \right)^2 = \frac{7}{10}mv_c^2, \quad (4)$$

将③式代入②式得 $mg \sin \theta - f = mr \frac{5f}{2mr}$ 于是

$$f = \frac{2}{7}mg \sin \theta; \text{ 将④式代入①式得}$$

$$mg \cos \theta - N = \frac{10mg(R+r)(1 - \cos \theta)}{7(R+r)},$$

$$\text{所以 } N = mg \left(\frac{17}{7} \cos \theta - \frac{10}{7} \right).$$

因做纯滚动, 必定 $f \leq \mu N$, 即 $\mu \geq \frac{2 \sin \theta}{17 \cos \theta - 10}$,

在 $\theta \leq 45^\circ$ 范围内 $\mu \geq \frac{2\sqrt{2}}{17\sqrt{2}-20} \approx 0.7$.

14. 乒乓球与地接触点 O 既滚又滑且达到纯滚时, 由角动量守恒, 得

$$mRv_{c0} - J\omega_0 = mRv_c + J\omega,$$

$$\text{即 } v_{c0} - v_c = \frac{2}{3}R(\omega_0 + \omega).$$

$$\text{达到纯滚时 } v_c = R\omega,$$

$$\text{由此可得纯滚时质心速度 } v_c = \frac{3}{5}v_{c0} - \frac{2}{3}R\omega_0; \text{ 其}$$

中, 若 $v_{c0} > \frac{2}{3}R\omega_0$, 纯滚后球向右顺时针纯滚, 若

$v_{c0} < \frac{2}{3}R\omega_0$, 则纯滚后球向左逆时针纯滚. 质心匀加速运动, 达到纯滚时间设为 t , 由 $v_c = v_{c0} - \mu gt$, 可得

$$t = \frac{2(v_{c0} + R\omega_0)}{5\mu g}.$$

15. 设以某棱为轴转动历时 Δt , 角速度 $\omega_i \rightarrow \omega_f$, 时间短, 忽略重力冲量及冲量矩, 各矢量关系如图答 14-8 所示, 对质心由动量定理

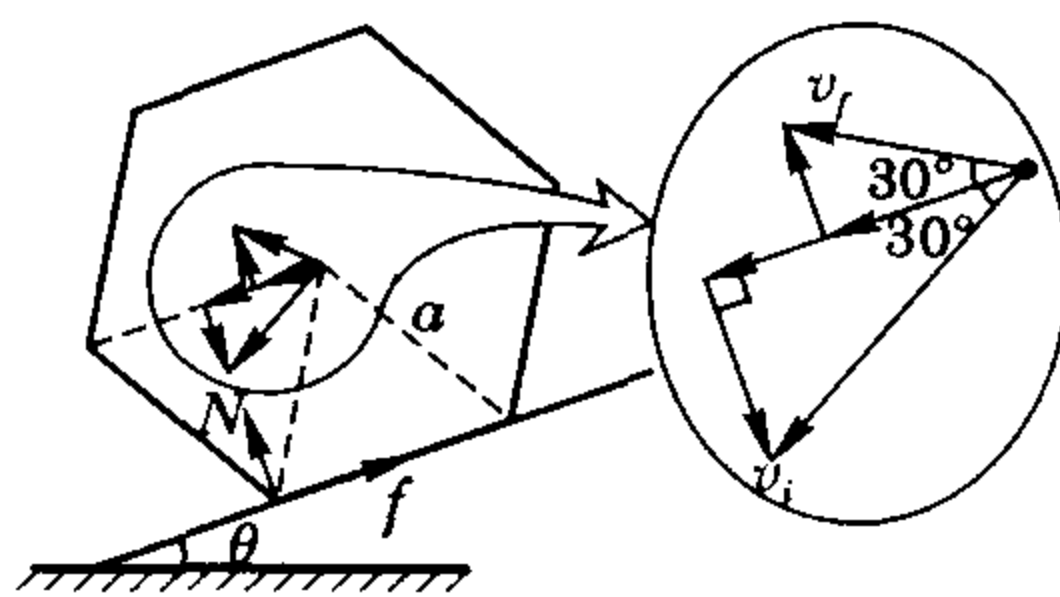
$$N\Delta t = Ma(\omega_f + \omega_i) \sin 30^\circ,$$

$$-f\Delta t = Ma(\omega_f - \omega_i) \cos 30^\circ.$$

对刚体动量矩定理

$$f\Delta t a \cos 30^\circ - N\Delta t a \sin 30^\circ = \frac{5}{12}Ma^2(\omega_f - \omega_i).$$

$$\text{解得 } \omega_f = \frac{11}{17}\omega_i, s = \frac{11}{17}, r = s^2 = \frac{121}{289}.$$



图答 14-8

竞赛辅导

专题 15 泛说气、液、固三态性质

何丰明 沈晨

教你一手

一、说说统计方法

自然界中一切物体都是由大量不连续的、彼此间有一定距离的粒子组成的,由大量粒子组成的系统呈现出不同于力学规律性的新规律——统计规律.统计规律是对大量偶然事件起作用的规律,它表现了这些事物整体的本质与必然的联系,反映了一些随机过程中大量个别的偶然事件的整体效果.统计规律不能单值地预言在某一时刻系统出现何种运动状态,而是认为在一定条件下,在某一时刻系统处于何种运动状态是偶然的,但各种运动状态均有一定的出现的可能性,即均有一定的出现概率.只要系统所处的条件一定,这

种概率的分布是完全确定的.凡统计规律都具有这样两个重要特点:对于所研究的大数量的偶然事件呈现稳定性及局部范围与最可几状态或统计平均值的偏差.即永远伴随有涨落现象.

统计方法既不是力学研究方法的延续,也不是力学方法的极端,更不是力学规律对客观事物的精确研究无能为力的一种近似方法.它适用的特征条件是所研究对象包含的基本粒子为数极众.统计方法就是要找出由大量粒子组成的系统在一定条件下服从的统计规律,找出系统的宏观性质及其变化规律.统计方法在物理学许多分支以及化学乃至自然现象的研究中普遍存在且有着重要而独到的意义,在热学研究中,统计方法是重要的依据.

在平衡状态(或准静态过程)下,气体的运动符合

电路图如图5所示;电流表 A_1 内阻的表达式为 $R_A = U/I - R_2$.

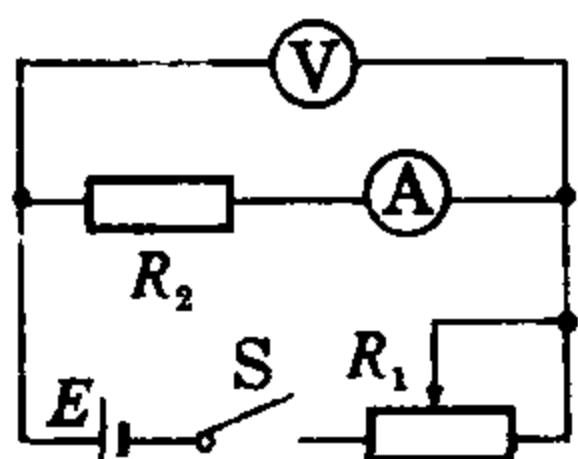


图5

2. 利用“加R”法测电源的内阻.

例6 测量电源的电动势 E

及内阻 r (E 约为 4.5 V , r 约为 $1.5\ \Omega$). 可选用的器材是:量程为 3 V 的理想电压表 V , 量程为 0.5 A 的电流表 A (有一定内阻), 固定电阻 $R=4\ \Omega$, 滑动变阻器 R' , 开关 S , 导线若干.

(1) 画出实验电路原理图. 图中各元件需用题目给出的符号或字母标出.

(2) 实验中,当电流表的读数为 I_1 时,电压表的读数为 U_1 ;当电流表的读数为 I_2 时,电压表的读数为 U_2 ,则可求出 $E = \underline{\hspace{2cm}}$; $r = \underline{\hspace{2cm}}$ (用 I_1 、 I_2 、 U_1 、 U_2 及 R 表示).

分析与解 不少考生解析此题,第一理念就是沿用课本上的测电源电动势及内阻原理图,当然做不正确.少数考生想到电压表的量程 3 V 小于电源电动势 4.5 V ,因而电压表不能并联在电源的两端.误将电压

表并联在滑动变阻器 R' 的两端,也做不正确.其正确解法如下:

(1) 实验电路原理图如图6所示.

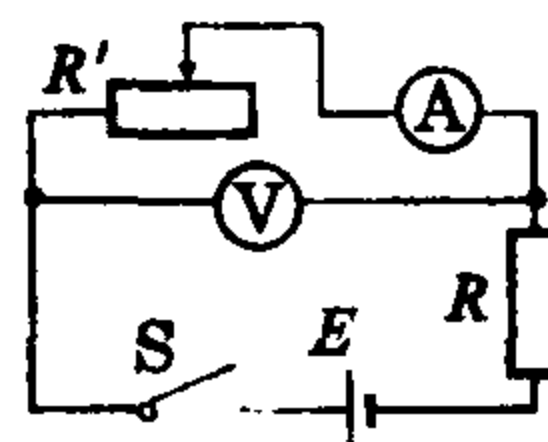


图6

(2) 根据闭合电路的欧姆定律可得

$$E = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 I_2}, r = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} - R.$$

“伏伏”法、“安安”法、“加R”法等测量电阻的新方法是伏安法的原理同具体的测量实际相结合的产物,是伏安法的原理在电阻测量中的实际应用;是对伏安法测电阻的原理的丰富和发展.如果学生掌握了这一电阻测量的新理论,具体问题具体分析,就能在高考中创造性地完成电阻测量一类设计性实验,在高考中立于不败之地.

参考文献

- 1 人民教育出版社物理室编. 高级中学物理课本第二册. 北京:人民教育出版社,2001
- 2 刑新山,丁汝辉等. 十年高考分类解析及命题趋势:物理. 吉林:延边大学出版社,2004

统计规律. 所谓平衡状态是指在不外界影响(即系统与外界没有物质和能量的交换)的条件下, 无论初始状态如何, 系统的宏观性质在经充分长时间后不再发生变化的状态; 准静态过程是指如果状态变化过程进行得非常缓慢, 以至过程中的每一个中间状态都近似于平衡态. 事实上, 平衡状态只是系统出现的一种概率最高的宏观状态.

气体是由大量气体分子组成的, 气体分子做永无止息的热运动. 在宏观气体热平衡状态下, 各个气体分子的运动是杂乱的: 速率有大有小, 方向有此有彼, 单个分子速度是不可预知的, 但大量分子的速率分布则遵循统计规律, 是确定的, 这个规律叫麦克斯韦速率分布规律. 麦克斯韦速率分布规律用麦克斯韦速率分布函数 $f(v)$ 来表示, 气体分子速率分布函数与系统的温度 T 及分子的质量 m 有关, 其图象如图 15-1 所示. 从图中可以看出, 在一定温度下, 分子存在一个最可几的速率(v_p), 其意义是分子出现这一速率的概率最大.

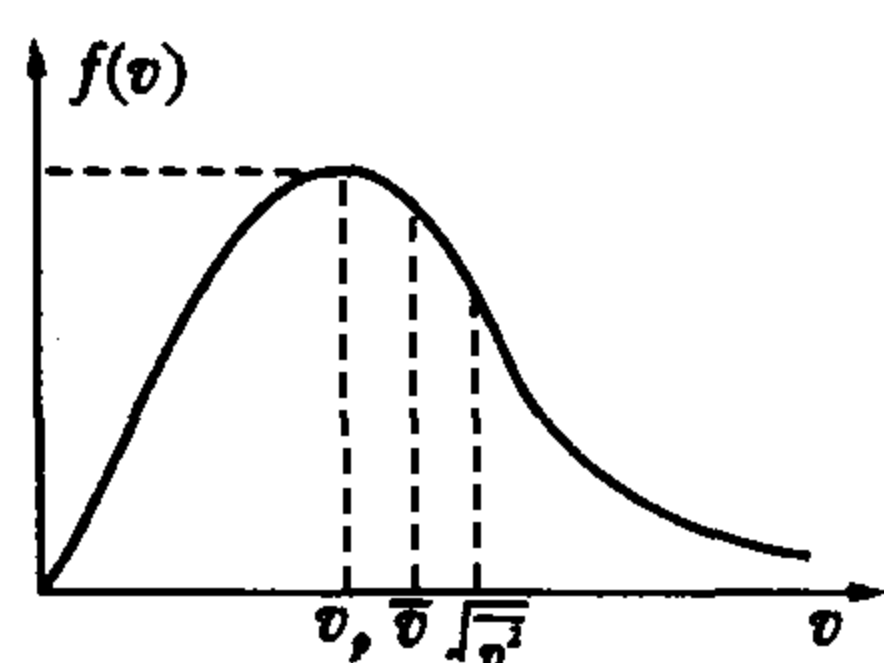


图 15-1

由麦克斯韦速率分布规律导出气体分子三种特征速率:

(1) 方均根速率: 其表达式是

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

其中 m_0 是分子质量, M 是摩尔质量, R 为摩尔气体常量, $R=8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, k 为玻尔兹曼常数, $k=$

$$\frac{R}{N_A} = \frac{8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}. \text{ 各}$$

种气体分子的平均平动动能, $E_k = \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$, 可知温度是分子平均平动动能大小的标志.

(2) 平均速率: 气体分子热运动的平均速率与热力学温度的关系为 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$.

(3) 最可几速率: $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$.

理想气体分子之间没有相互作用, 不存在分子势能, 因此, 理想气体的内能只是所有气体分子的热运动动能的总和, 只与气体的分子数、温度和气体的种类有关, 与体积无关.

一般情况下, 分子的无规则运动表现为分子的平动和转动等形式. 对于单原子分子理想气体(如 He、Ne、Ar 等)来说, 分子只有平动动能, 其内能应是分子

数(N)与分子平均平动动能的乘积, 即 $E = N \cdot \frac{3}{2} kT$;

对于双原子分子(如 O_2 、 H_2 、 CO 等)理想气体来说, 在常温下, 分子除了平动外还可以转动, 分子的平均动能为 $\frac{5}{2} kT$, 其内能为 $E = N \cdot \frac{5}{2} kT$.

因此, 理想气体的内能的通式可写为

$$E = N \cdot \frac{i}{2} kT = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} RT (= \frac{i}{2} pV).$$

式中 N 是分子数, p 、 V 是气体压强、体积. 对于单原子分子气体 $i=3$; 对于双原子分子气体 $i=5$; 对于三原子及以上分子气体(如 CO_2 等气体) $i=6$.

理想气体的温度、压强及内能都是具有统计意义的物理量, 讲“一个分子的温度”、“一个分子的压强”或“一个分子的内能”都是没有意义的, 让我们用统计方法找出理想气体的温度、压强、体积间的关系.

设想在如图 15-2 所示边长为 a 的立方体内盛有质量为 m 、摩尔质量为 M 的单原子分子理想气体, 设气体的温度为 T , 气体分子平均速率为 v , 它在 x 、 y 、 z 三维方向速度分量以 v_x 、 v_y 、 v_z 表示, 对大量分子而言, 这三个方向速率大小是均等的, 则由 $\overline{v^2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ 可知, $v_x^2 =$

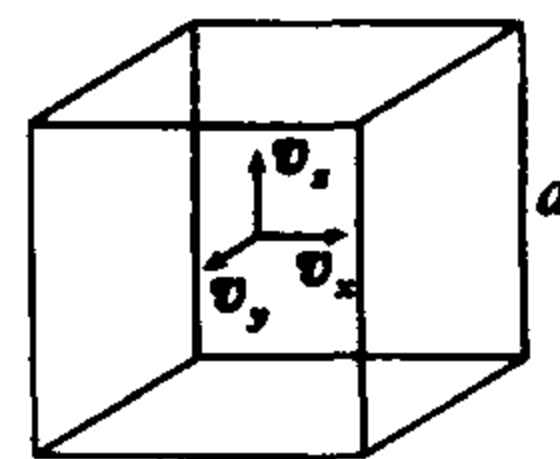


图 15-2

$v_y^2 = v_z^2 = v_x^2 = \frac{v^2}{3}$; 观察每个分子沿 x 方向的运动:

每隔时间 $\Delta t = \frac{2a}{v_x}$, 气体分子与同一个侧面发生碰撞, 动量变化 $\Delta p = 2m_0 v_x$, 则对一个侧面产生的平均冲量为

每隔时间 $\Delta t = \frac{2a}{v_x}$, 气体分子与同一个侧面发生碰撞, 动量变化 $\Delta p = 2m_0 v_x$, 则对一个侧面产生的平均冲量为

$$F_x \cdot \frac{2a}{v_x} = 2m_0 v_x, F_x = \frac{m_0 v_x^2}{a};$$

气体压强是大量气体分子对器壁的持续碰撞引起的, 则气体的压强为

$$p = \frac{\sum F}{S} = \frac{Nm_0 v_x^2}{a^3} = \frac{Nm_0 \overline{v^2}}{3V} = \frac{m}{M} N_A \frac{2}{3V} \cdot \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2},$$

其中气体分子的平均平动动能 $\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$, 则

$$pV = \frac{m}{M} N_A \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{m}{M} RT.$$

$pV = \frac{m}{M} RT$ 称为克拉珀龙方程, 是由描述理想气体状态的参量 p 、 V 、 T 构成的方程. 反映气体状态变化规律的三个实验定律是在温度不太低、压强不太高, 实际气体可理想化为理想气体的情况下, 分别做等温变化、等容变化和等压变化时的气态方程:

$$pV = \frac{m}{M} RT = C_T \text{ (玻意耳定律);}$$

$$\frac{P}{T} = \frac{mR}{MV} = C_V \text{ (查理定律);}$$

$$\frac{V}{T} = \frac{mR}{Mp} = C_p \text{ (盖·吕萨克定律).}$$

若混合理想气体由几种气体组成,其中各种气体对系统提供的分压强分别为 p_1, p_2, \dots, p_n , 则混合理想气体的总压强 p 等于各种气体的分压强之和, 即 $p = \sum_{i=1}^n p_i$. 适用条件是混合气中的各种气体的体积 V 和温度 T 必须相同; 其中每一种气体的气态方程为

$$p_i V = \frac{m_i}{M_i} RT.$$

例 1 质量为 50 g, 温度为 18 °C 的氦气, 装在容积为 10 L 的密闭容器中. 容器以 $v = 200 \text{ m/s}$ 的速率做匀速直线运动, 若容器突然停止, 定向运动的动能全部转化成为分子的热运动动能, 则平衡后, 氦气的温度和压强各增加多少?

分析与解 机械运动对应的动能与热运动对应的分子平均动能之间可以发生转换, 且从整个运动系统来说, 能量是守恒的.

设氦气的质量为 m , 摩尔质量为 M , 平衡后, 氦气的温度和压强各增加 $\Delta T, \Delta p$, 所有氦气分子在定向运动时所具有的宏观运动动能为 $E_k = \frac{1}{2} \cdot m v^2$; 在将定向运动的动能全部转化为分子热运动的动能时, 有 $E_k = \Delta \bar{\epsilon}$. 所有氦气(单原子分子气体)分子的平均动能为

$$\bar{\epsilon} = \frac{m}{M} N_A \cdot \frac{3}{2} k T.$$

所有氦气分子的平均动能增量 $\Delta \bar{\epsilon}$ 可表达为

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{m}{M} N_A \cdot \frac{3}{2} k \cdot \Delta T,$$

$$\text{则} \quad \frac{1}{2} \cdot m v^2 = \frac{m}{M} N_A \cdot \frac{3}{2} k \cdot \Delta T.$$

$$\text{得} \quad \Delta T = \frac{M v^2}{3 k N_A} = \frac{M v^2}{3 R} = 6.4 \text{ K}.$$

根据 $pV = \frac{m}{M} RT$ 可知, 由于 V, m, M, R 为定值, p 与 T 成正比, 所以有

$$\Delta p = \frac{mR}{MV} \cdot \Delta T = 6.65 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

氦气的温度升高 6.4 K, 压强增加 $6.65 \times 10^4 \text{ Pa}$.

例 2 试计算下列气体在大气(地球大气)中的脱离速度与方均根速度(速率)之比: $\text{H}_2, \text{He}, \text{H}_2\text{O}, \text{N}_2, \text{O}_2, \text{Ar}, \text{CO}_2$. 设大气温度为 290 K, 已知地球质量为 $M_c = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 地球半径为 $R_c = 6378 \text{ km}$.

分析与解 因为大气中的气体分子做无规则运动, 单就一个分子而言, 其呈现的速率大小也是随机的, 其方均根速度记为 $v_{\text{rms}}, v_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 是稳

定的. 气体的脱离速度指气体分子要脱离地心引力所应具有的最小速率, 即第二宇宙速度 v_2 , 可由分子动能 $\frac{1}{2} m_0 v_2^2$ 等于无穷远处的引力势能 $\frac{GM_c m_0}{R_c}$ (以地表为零势面) 求得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_c}{R_c}}.$$

则脱离速度与方均根速度之比为 q , 有

$$q = \frac{v_2}{v_{\text{rms}}} = \sqrt{\frac{2GM_c M}{3RR_c T}} = \sqrt{\frac{2GM_c M}{3N_A k R_c T}}.$$

代入数据得

气体	H_2	He	H_2O	N_2	O_2	Ar	CO_2
q	5.88	8.32	17.65	22.0	23.53	26.31	27.59

这个计算结果是很有意思的, 当代宇宙学告诉我们, 宇宙中原初的化学成分绝大部分是氢(约占 3/4)和氦(约占 1/4). 任何行星形成之初, 原始大气中都应该有相当大量的氢和氦, 但是现在地球的大气里几乎没有氢气和氦气, 而其主要成分是氮气和氧气. 为什么? 在一个星球上, 大气分子的热运动促使它们逃脱, 万有引力却阻止它们逃脱. 方均根速度标志着分子具有的平均动能的大小, 脱离速度标志着克服引力所需做功的大小, 题中比值 q 标志着二者比较中谁占先的问题. q 值越大, 表示分子不易逃脱. 若 q 值接近 1 显然不足以有效地阻止气体分子散失, 因为这时仅仅是具有平均热运动动能的分子被引力拉住, 而按麦克斯韦分布, 气体中有大量的分子速度大于、甚至远大于方均根速度, 它们仍可逃脱. 题中结果表明, $q \approx 6 \sim 8$ 是不够大的, 这未能把地球里的氢气和氦气保住. q 值大到 22 至 24 肯定是够了, 因为这些数值没有让氮气和氧气散失!

例 3 一个半径为 10 cm 的球形容器, 除器壁表面 1 cm^2 的温度低很多以外, 其余部分温度保持在 $T = 300 \text{ K}$. 容器中装有可近似看做理想气体的水蒸气. 假设每个碰到低温表面的水分子都凝结成液体并停留在此, 计算容器内压强降低到 10^{-4} 倍所需要的时间. 设过程中气体保持热平衡状态, 速度分布遵守麦克斯韦速率分布规律. 已知水的摩尔质量为 $M = 18 \text{ g/mol}$, 摩尔气体常量 $R = 8.31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.

分析与解 压强的统计意义是大量分子对器壁的持续碰撞, 在此问题中, 压强之所以减少, 是因为单位时间内对器壁单位面积碰撞的分子数减少了——总有一定几率的水蒸气分子碰到低温表面后凝结成液体停留下来. 而容器内气体的压强 $p_i = \frac{m_i RT}{MV} = n_i \frac{kT}{V}$.

设经时间 t 容器内压强降低到 10^{-4} 倍, 在 $\Delta t = \frac{t}{n}$

($n \rightarrow \infty$) 时间元内, 气体压强从 p_i 减少为 p_{i+1} , 有

$$p_i - p_{i+1} = (n_i - n_{i+1}) \frac{kT}{V}, \quad (1)$$

水蒸气分子数减少 ($n_i - n_{i+1}$) 是因为这些分子凝固在 $S = 1 \text{ cm}^2$ 的低温区域了, 可以这样表示这些分子的数量:

水蒸气分子平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, 压强为 p_i 时容器内总的水蒸气分子数 $n_i = \frac{p_i V}{kT}$, 其中速度沿径向且

向低温区域的几率为 $\frac{1}{4}$, 在 Δt 时间内有 $\bar{v} \cdot \Delta t \cdot S \cdot$

$\frac{p_i V}{4kTV}$ 个水蒸气分子到达低温区, 即

$$(n_i - n_{i+1}) = \bar{v} \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{p_i}{4kT}, \quad (2)$$

将②式代入①式, 得 $p_i - p_{i+1} = \bar{v} \cdot \Delta t \cdot S \cdot \frac{p_i}{4V}$.

$$\frac{p_i - p_{i+1}}{p_i} = \frac{\bar{v} t S}{4Vn}, \text{ 即 } \frac{p_{i+1}}{p_i} = 1 - \frac{\bar{v} t S}{4Vn}.$$

对该式两边 n 次方取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_{i+1}}{p_i} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{v} t S}{4Vn} \right)^{\frac{4Vn}{\bar{v} t S} \cdot \frac{\bar{v} t S}{4V}},$$

$$\text{则 } t = -\frac{4V}{\bar{v} S} \ln \frac{p_i}{p_0},$$

代入数据有

$$t = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi \times (0.1)^3}{\sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 300}{18 \times 10^{-3} \pi}} \times 10^{-4}} \times 4 \ln 10 \text{ s} \approx 2.6 \text{ s}.$$

二、固体和液体的特性

1. 晶体的空间点阵

组成晶体的物质微粒(分子、原子或离子)依照一定的规律在空间中排成整齐的行列, 构成空间点阵. 如果沿着这些物质微粒的行列画出直线, 可以得到若干组平行线, 物质微粒就在这些组平行线的交点上, 这些交点叫空间点阵的结点.

2. 固体的热膨胀

大多数物体都具有热胀冷缩的性质. 在一定的温度下固体的线度(如长度、直径、周长)是一定的, 当温度升高时固体的线度会增加. 设温度为 0°C 时固体的长度 l_0 , 温度升高到 $t^\circ\text{C}$ 时长度为 l_t , 长度增量 $\Delta l = l_t - l_0$ 与温度的增量 $\Delta t = t$ 成正比, 也跟 l_0 成正比, 即 $\frac{l_t - l_0}{l_0} = \alpha \cdot t$, $l_t = l_0(1 + \alpha \cdot t)$. 式中 α 称为固体的线膨胀系数, 与材料的性质有关, 其数量级为 $10^{-6} \text{ K}^{-1} \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

当固体的线度发生膨胀时, 固体的表面积和体积也在发生膨胀, 分别称为面膨胀和体膨胀, 其变化规律

分别为

$$S_t = S_0(1 + \beta \cdot t), V_t = V_0(1 + \gamma t).$$

式中 S_0, V_0 分别为固体在 0°C 时的表面积和体积, β, γ 分别为面胀系数和体胀系数.

对于各向同性的固体有: $\beta = 2\alpha, \gamma = 3\alpha$.

3. 液体的表面现象

液体表面有力. 液体表面层(即液体与气体相接触的液体薄层)相邻的两部分之间由于分子力作用而形成的相互吸引的力, 这种力叫表面张力, 表面张力使液面具有收缩的趋势. 表面张力是跟液面相切的. 如果液面是平面, 表面张力就在这个平面上; 如果液面是曲面, 表面张力就在这个曲面的切面上. 作用在任何一部分液面上的表面张力, 总是跟这部分液面的分界线垂直, 如图 15-3 所示, 表面张力 f_1, f_2 与分界线 MN 垂直. 表面张力大小与两部分液面的分界线长度成正比, 写为



图 15-3

$$f = \sigma L,$$

其中 σ 为表面张力系数, 与液体的种类、温度、是否有杂质等因素有关.

液体表面有能. 如图 15-4 所示, 设想一附有液膜的

矩形铁丝框 $ABCD$, 长为 L 的 BC 边可以滑动, 由于液膜有上下两个表面, 所以有 $2\sigma L$ 的表面张力作用在 BC 边上. 要使 BC 移动 Δx , 则外力 F 所

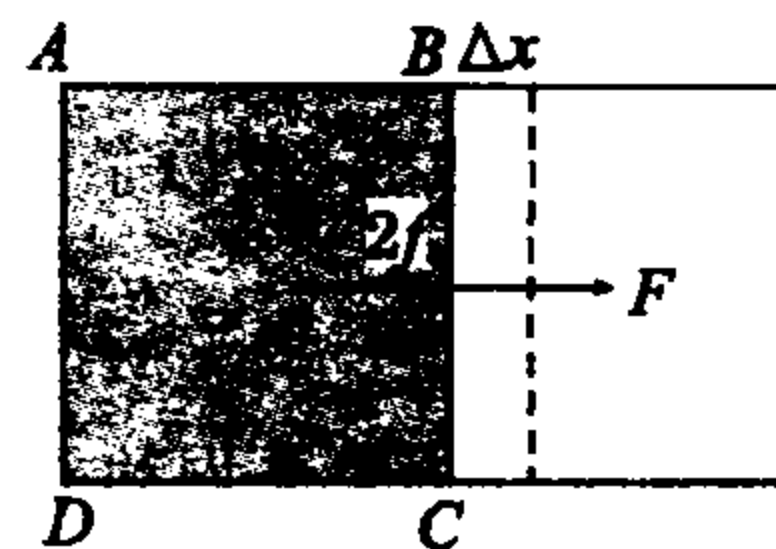


图 15-4

做的功至少为

$$W = F \cdot \Delta x = 2\sigma L \cdot \Delta x = \sigma \cdot \Delta S.$$

式中 ΔS 为液面增加的表面积, 外力克服表面张力所做的功, 增大了液膜的分子势能, 这种能称为表面能, 用 ΔE 来表示, 所以表面能可以表达为

$$\Delta E = \sigma \cdot \Delta S.$$

在液体与固体相接触的液体薄层会发生如图 15-5(a) 所示不浸润与图 15-5(b) 所示浸润两种现象. 图中 θ 称为接触角, 它是在固、液、气接触处, 液体表面的切线与固体表面的切线所夹液体的角. 对于能浸润固体的液体, 接触角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; 不能浸润固体的液体, 接触角是 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. 当 $\theta = 0$ 时, 称为完全浸润, 如酒精与玻璃; 当 $\theta = \pi$ 时称为完全不浸润.

在细管内, 若液体能浸润细管, 则管内液面呈凹弯月面, 如图 15-5(b) 所示; 若液体不能浸润细管, 则管内液面呈凸弯月面, 如图 15-5(a) 所示. 若是完全浸

润,则凹弯月面是以管径为直径的凹半球面;若是完全不浸润,则凸弯月面是以管径为直径的凸半球面。

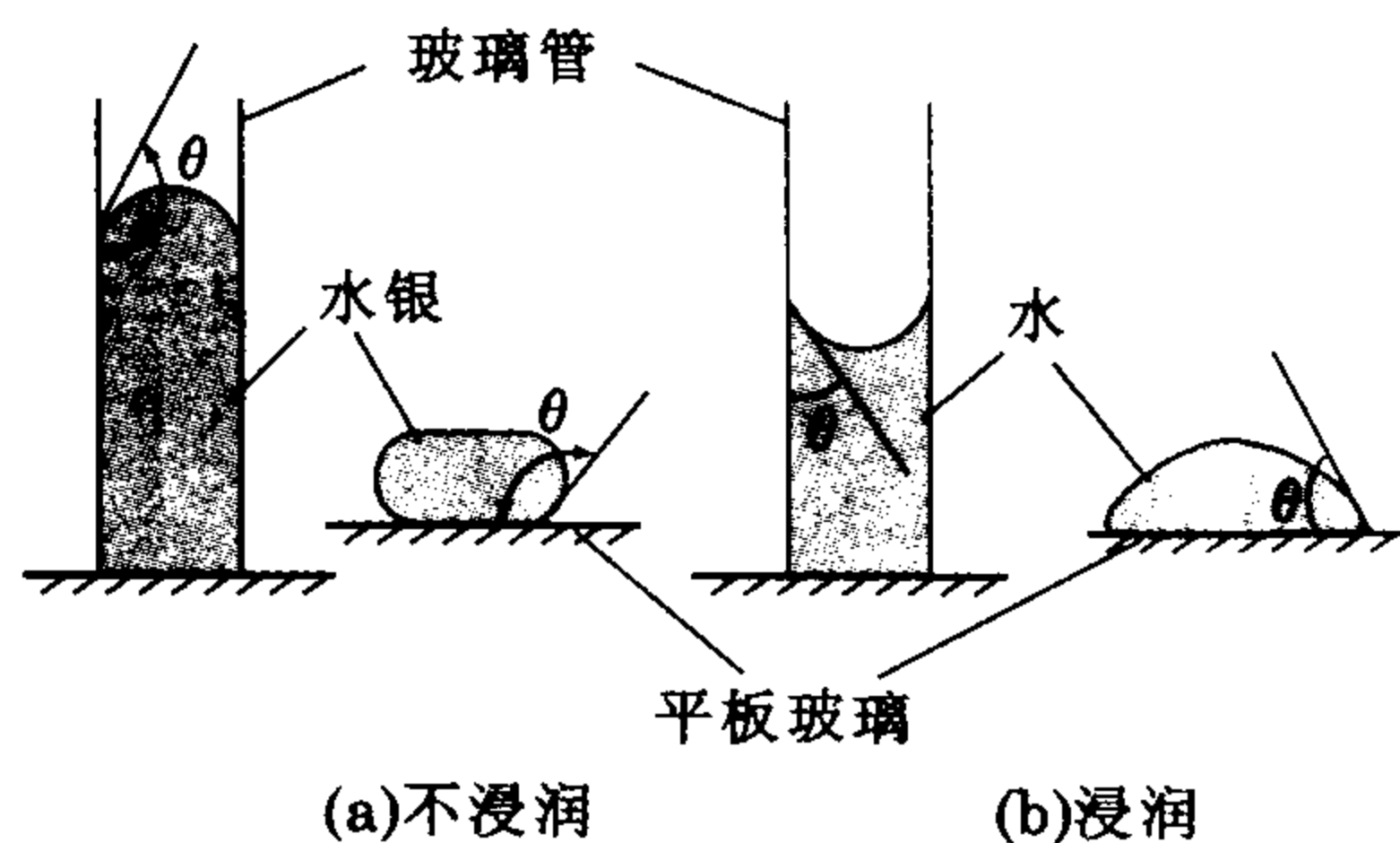


图 15-5

能浸润管壁的液体在细管里升高,不能浸润管壁的液体在细管里下降,这种现象称为毛细现象。能发生毛细现象的细管称为毛细管。如图 15-6 所示,管中液面与管壁的接触角为 $\theta < \frac{\pi}{2}$,属浸润液体在毛细管内上升情形。液面与管壁的接触线长为 $2\pi r$, r 为毛细管半径。在接触线任意处的表面张力都垂直于接触线并与接触面相切,则竖直向上的合力为

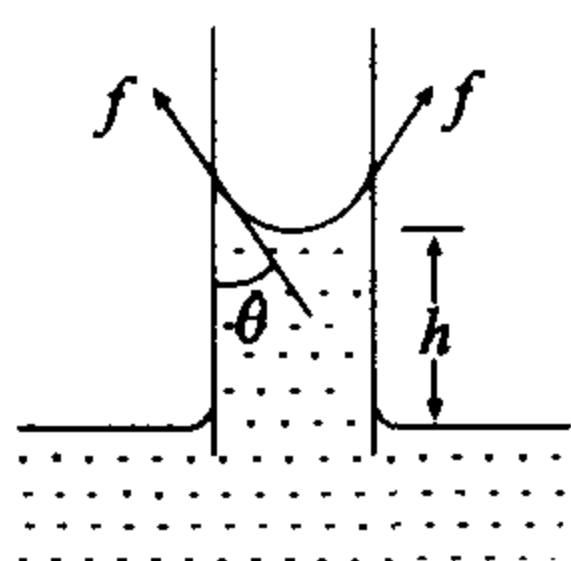


图 15-6

高出液面的液柱重力为

$$F = \sigma \cdot 2\pi r \cos \theta.$$

高出液面的液柱重力为

$$G = \rho \cdot \pi r^2 hg.$$

当管内液柱停止上升时有

$$\sigma \cdot 2\pi r \cos \theta = \rho \cdot \pi r^2 hg.$$

则毛细管内液面上升的高度为

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho gr}.$$

如果液体不能浸润管壁,由于 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 而 $h < 0$,表示管内液面低于管外液面。

例 4 两个漂浮的物体由于表面张力的作用而相互吸引,无论它们是浮在水面上还是浮在水银上,请解释其中的原因。

分析与解 因为液体的表面张力,在这两个物体之间的液面高度与物体之外的液面高度是不同的,如图 15-7 所示:在图(a)所示情况中,液体是水,由于浸润物体之间的液面高出物体之外的液面;在图(b)所示情况中,液体是水银,由于不浸润物体之间的液面低于物体之外的液面。

在两个物体之间,两种情况下液面上的压强都为大气压强(设为 p_0),相应地,在两物体之间的水面下,其压强低于大气压;在两物体之间的水银面下,其压强

高于大气压。从图中可以看出,在这两种情况下,两漂浮物外侧压强均大于两物体之间的压强,故都将会产生向内的合力(作用在漂浮物上),使物体产生靠拢的趋势。所以,两个漂浮的物体无论它们是浮在水面上还是浮在水银面上,由于表面张力的作用总会相互吸引。

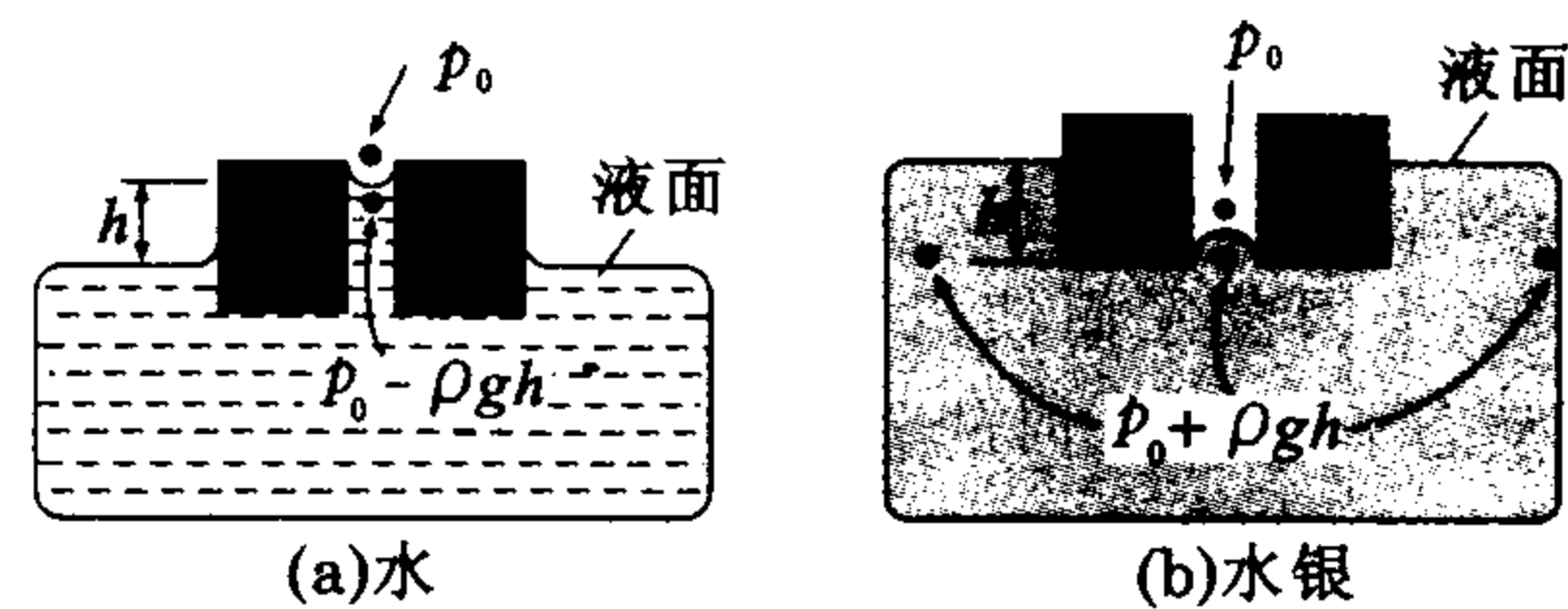


图 15-7

例 5 有三根端点互相连接在一起的线浮在水面上,如图 15-8 所示,其中 1、2 两条的长度均为 1.5 cm,第 3 条的长度为 1 cm。若在 A 点滴下某种表面张力系数为水的 $\frac{2}{5}$ 的表面活性剂,求每根线上的张力。已知水的表面张力系数 $\sigma = 0.07 \text{ N/m}$ 。

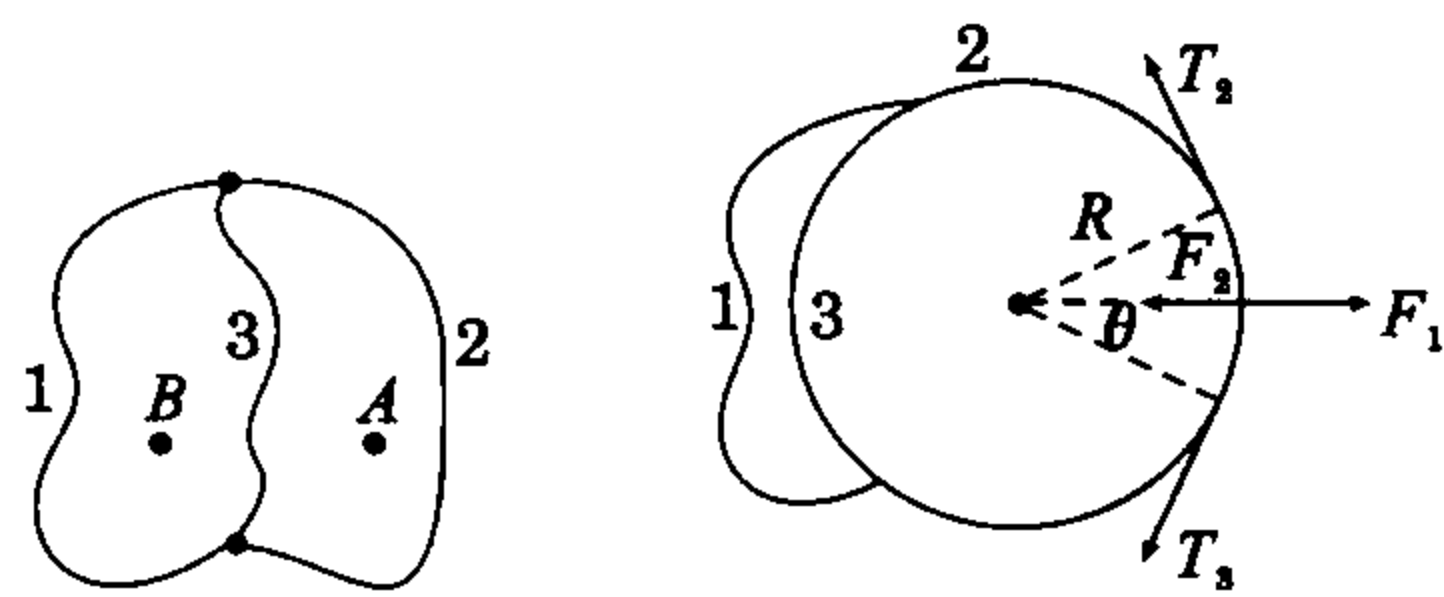


图 15-8

图 15-9

分析与解 在 A 点滴下表面活性剂后,使得细线 2、3 所围区域的表面张力系数小于该区域外的表面张力系数,所以两线 2、3 绷紧形成一个周长 $L = 2.5 \text{ cm}$ 的圆周,如图 15-9 所示,而线 1 仍然松弛,其张力显然为零。

由于本题中需要求解线中的张力,可考虑用微元隔离法,取其中很小一段绳元,所对的圆心角为 θ ($\theta \rightarrow 0$),对该段绳元受力分析,如图 15-9 所示,该绳元受外侧水的表面张力 F_1 、内侧表面活性剂的表面张力 F_2 和两端线绳对它的张力 T_2 、 T_3 ($T_2 = T_3 = T$) 四个力作用。由线元平衡 $\sum F = 0$ 可知

$$2T \sin \frac{\theta}{2} = F_1 - F_2,$$

其中 $F_1 = \sigma R \theta$, $F_2 = \frac{2}{5} \sigma R \theta$, $R = \frac{L}{2\pi}$ 。

考虑 $\theta \rightarrow 0$, $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$, 则有

$$T_2 = T_3 = T = \left(\sigma - \frac{2}{5}\sigma\right)R = 1.67 \times 10^{-1} \text{ N}.$$

即线 1 上的张力为零,线 2、3 上的张力均为 $1.67 \times 10^{-1} \text{ N}$ 。

三、泛说物态变化

物态变化就是在一定条件下物质的三种存在状态的变化,即固态、液态、气态之间的相互转化,这些变化如图 15-10 所示.

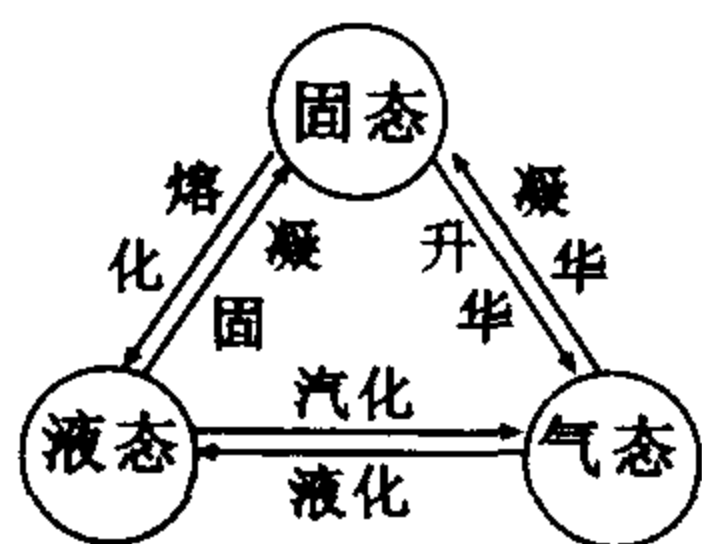


图 15-10

物质由液态变为气态的过程叫汽化,在液体表面发生的汽化即蒸发.在密闭容器中,当因蒸发而使汽化达到动态平衡时,此时的蒸气叫饱和汽,它的压强叫饱和汽压(p_s),饱和汽压的大小与液体的种类及有无杂质有关;对于同一种液体,饱和汽压随温度的升高而增大;在温度不变的情况下,饱和汽的压强不随体积而变化.气体实验定律对饱和汽不适用.未达到动态平衡的蒸汽叫未饱和汽,它近似遵守理想气体状态方程;在液体表面和内部同时发生的汽化叫做沸腾.液体的内部和容器的器壁上存在小气泡,气泡内的总压强是气泡内空气的压强 $p_a = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V}$ 和液体的饱和汽压 p_s 的总和;气泡外的压强是液面上的外界压强 $p_{外}$ 、液体静压强 ρgh 与气泡的表面张力所引起的附加压强 $\frac{2\alpha}{r}$ 之和,在通常情况下, ρgh 、 $\frac{2\alpha}{r}$ 与 $p_{外}$ 相比可以忽略不计.因此,在某一温度下,液体内气泡的平衡条件可以近似地表示为

$$\frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} + p_s = p_{外}.$$

当液体温度升高时, p_s 增大,同时由于温度升高和汽化,气泡通过体积的增大,导致 p_a 减小,这样在新的条件下实现与 $p_{外}$ 的平衡.但当温度升高到使 $p_s = p_{外}$ 时,这时无论气泡体积如何增大也不能实现平衡,即气泡处于非平衡态,此时骤然胀大的气泡,在浮力的作用下,迅速上升到液面破裂后排出蒸气,整个液体剧烈汽化,形成沸腾现象.所以,液体沸腾的条件是液体的饱和汽压等于外界压强,且此时的温度称为沸点.对于同种液体,沸点与液面上的压强有关,压强越大,沸点越高;沸点还与液体的种类有关.

地球表面不断地进行着水分的蒸发,空气中总会有水蒸气,而空气中所含水汽的多少决定了空气的潮湿程度.空气的湿度通常定义为:

①绝对湿度(p),即空气中所含水汽的分压强大小.

②相对湿度(B),某温度下空气的绝对湿度跟同一温度下水的饱和汽压的百分比: $B = \frac{p}{p_s} \times 100\%$, p_s 表示同一温度下水的饱和汽压,不同温度下水的饱和汽压可以查表得到.

空气中未饱和的水蒸气,当气温逐渐降低时会逐渐接近饱和,当气温降低到使空气中的水蒸气刚好达到饱和时的温度叫露点.

空气中所含的水蒸气越多,只要降低少许温度,就可达到露点;相反,如果空气中所含的水蒸气较少,则要降低较多的温度才能达到露点.因此气温与露点差值越小,空气中水蒸气离饱和状态越近,空气中的相对湿度越大;反之相对湿度就越小.

当夜间的气温降到露点以下,且气温高于 0°C ,就会出现露水,这是水蒸气的液化;当夜间的气温降到露点以下,且气温低于 0°C ,就会出现霜,这是水汽的凝华;如果夜间的气温虽在 0°C 以下,但仍高于露点,就不会出现霜.

各种气体都有一个特殊温度,在这个温度以上,无论怎样增大压强也不能使气体液化.这个温度称为气体液化的临界温度.

物质从固态直接转变为气态的过程称为升华,其逆过程称为凝华.升华时组成物质的粒子直接由空间点阵变为自由分子,这一方面要克服粒子间结合力做功,另一方面还要克服外界压强做功.使单位质量的固态物质升华时所吸收的热量称为升华热,它等于汽化热与熔解热之和,即 $L_{升} = L_{汽} + L_{熔}$.

将同一物质的液体、固体和上方的饱和汽压随温度变化的汽化曲线 CK 和升华曲线 CS ,以及熔点随压强变化的熔解曲线 CL ,同时画在图上,就能标出固、液、气三态存

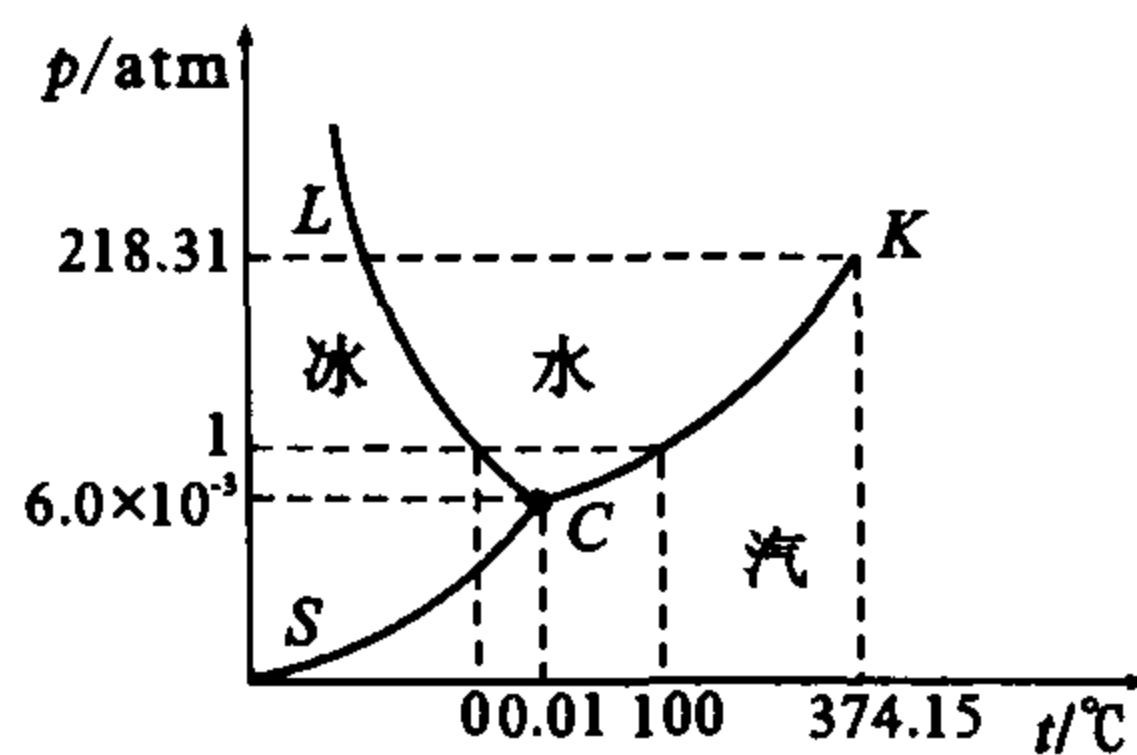


图 15-11

在的区域;每条曲线对应着两态平衡共存的情况;三条曲线的交点 C (三相点),对应着三态平衡共存的状态.

如图 15-11 所示是水的三相图,水的三相点是 $(C \text{ 点}) T = 273.16 \text{ K} (0.01^\circ\text{C})$, $p = 6.106 \times 10^2 \text{ Pa} (6.0 \times 10^{-3} \text{ atm})$.图中标度仅示意.

例 6 质量 $m = 2.0 \text{ kg}$,温度为 $T = 260 \text{ K}$,体积 $V_i = 0.19 \text{ m}^3$ 的氟利昂(摩尔质量为 121 g/mol),在保持温度不变的条件下被压缩,如果其体积减小为 $V = 0.10 \text{ m}^3$.试问在此过程中有多少氟利昂被液化.已知在 260 K 时,液态氟利昂的密度为 $\rho = 1.44 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,氟利昂汽的饱和汽压为 $p_s = 2.08 \times 10^5 \text{ Pa}$.又氟利昂的饱和汽可近似看做是理想气体.

分析与解 本题是通过氟利昂的等温压缩,使之部分液化,该过程中氟利昂的饱和汽可视为理想气体.

利用理想气体状态方程及题中已知条件,可解出压缩后液态氟利昂的质量 m_1 .但也必须考虑到在压缩前是否已有部分液态氟利昂,若有,应从 m_1 中减去,若无,则 m_1 全部是在压缩过程中生成的.为此需计算压缩前气态氟利昂的压强,若小于饱和汽压,则压缩前并无液态氟利昂.

首先计算压缩前气态氟利昂的压强 p_i ,设压缩前,氟利昂全部呈气态,体积 $V_i = 0.19 \text{ m}^3$.由克拉珀龙方程 $p_i V_i = \frac{m}{M} RT$ 得

$$p_i = \frac{m}{M V_i} RT = 1.88 \times 10^5 \text{ Pa} < 2.08 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

可见氟利昂的初始状态为未饱和汽,无液态氟利昂存在.

设氟利昂经等温变化后,液化部分的质量是 m_1 ,体积是 V_1 ,气态部分的质量 m_2 ,体积是 V_2 .氟利昂汽达饱和汽时有

$$p_s V_2 = \frac{m_2}{M} RT,$$

$$V_1 + V_2 = V, m_1 + m_2 = m, m_1 = \rho V_1.$$

联立得
$$\frac{m_1}{\rho} + \frac{(m - m_1)RT}{p_s M} = V,$$

即
$$m_1 = \frac{\rho(mRT - p_s VM)}{\rho RT - p_s M} = 0.84 \text{ kg}.$$

即在等温压缩过程中有 0.84 kg 氟利昂被液化.

四、浅谈热传递方式

热传递的方式有三种:对流、热传导和热辐射.下面具体说说热传导和热辐射.

物体或物体系由于各处温度不同引起的热量从温度较高处传递到温度较低处的现象叫热传导.是固体中热传递的主要形式,在气体和液体中热传导往往和对流同时发生.

从分子动理论的观点来看,温度较高的物体的分子的平均热运动的能量大,温度较低的物体的分子平均热运动能量小,通过分子间的相互碰撞,一部分内能将从温度高处传递到温度低处.

如果导热物体各点的温度不随时间变化,这种导热过程称为稳定导热,在这种情况下,考虑长度为 l ,横截面积为 S 的柱体,两端截面处的温度为 T_1 、 T_2 ,且 $T_1 > T_2$,则热量沿着柱体长度方向传递,在 Δt 时间内通过横截面 S 所传递的热量为

$$Q = k \frac{T_1 - T_2}{l} S \cdot \Delta t,$$

式中 k 为物质的导热系数.

物体因自身的温度变化而向外发射能量,发射出的是不同波长的电磁波,这种现象叫热辐射.其特点是不依靠气体或液体的流动,又不依靠分子间的碰撞来

传导,因此在真空环境中也能进行;热辐射与周围物体的温度高低是无关的.

有一类物体,能在任何温度下吸收所有的电磁波辐射,其表面却并不反射,这类物体称为黑体.黑体是热辐射理想的吸收体和发射体,黑体单位面积的辐射功率 J 与其温度的四次方成正比,即 $J = \sigma T^4$,式中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$,称为斯忒藩常量.

如果不是黑体,单位面积的辐射功率 J 记为 $J = \epsilon \sigma T^4$,式中 ϵ 为表面辐射系数,其值在 $0 \sim 1$ 之间,由物体表面性质决定.

例 7 一临街房间由暖气管供热,设暖气管的温度恒定.已知如果街上的温度为 -20°C ,测得房间的温度为 $+20^\circ\text{C}$;如果街上的温度为 -40°C ,测得房间的温度为 $+10^\circ\text{C}$.求房间里暖气管的温度 T .

分析与解 房间与暖气管、房间与街之间的热传递以热传导形式进行,当达到热交换平衡时,暖气管与房间之间交换的热量和房间与街之间交换的热量相等.

可以认为,暖气管与房间之间交换的热量与暖气管与房间之间的温差成正比(牛顿冷却定律),比例系数为 k_1 ;而房间与街上交换的热量与房间与街上的温差成正比,比例系数为 k_2 . k_1 、 k_2 是与导热系数、房间、暖气管、街上情形等因素有关的量,但各自应是常量,所以有

$$k_1(T - T_{f_1}) = k_2(T_{f_1} - T_{j_1}),$$

$$k_1(T - T_{f_2}) = k_2(T_{f_2} - T_{j_2});$$

两式相比得
$$\frac{T - T_{f_1}}{T - T_{f_2}} = \frac{T_{f_1} - T_{j_1}}{T_{f_2} - T_{j_2}},$$

$$\frac{T - 20}{T - 10} = \frac{20 - (-20)}{10 - (-40)}.$$

由此算出房间里暖气管的温度 $T = 60^\circ\text{C}$.

例 8 一个全部黑色的球形空间探测器位于距离太阳系很远处.由于位于探测器内部功率为 P 的核能源的加热作用,探测器表面的温度为 T .现在探测器被封闭在一个薄的热防护罩中,防护罩内外两面均为黑色,并且通过几个隔热棒附着于探测器表面,如图 15-12 所示.试确定探测器新的表面温度;若使用 N 个这样的防护罩,探测器表面的温度又为多少?

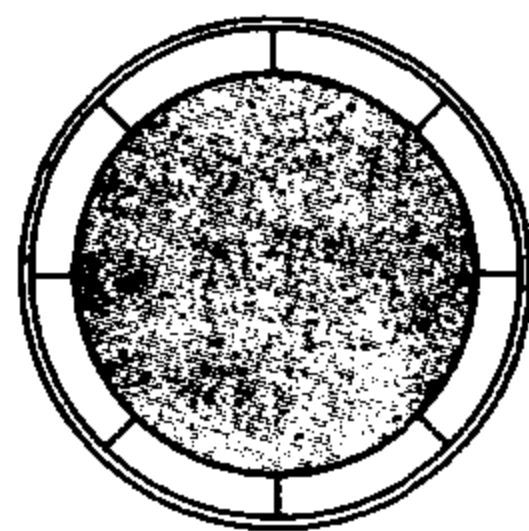


图 15-12

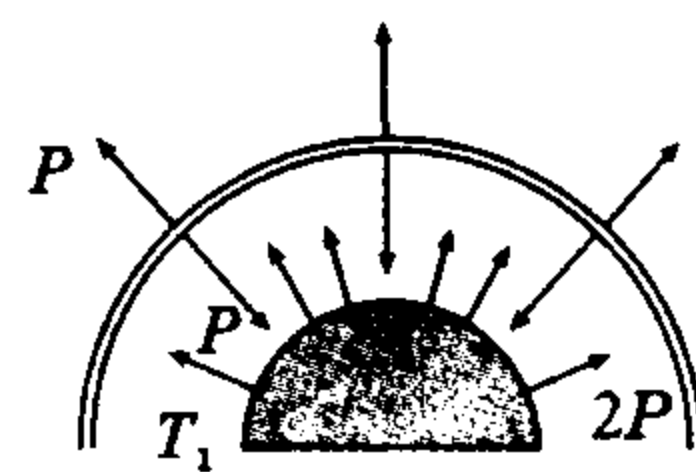


图 15-13

分析与解 本题是热辐射问题,因为空间探测器距离太阳系很远,所以可以忽略太阳辐射和宇宙背景辐射,将探测器视为一个黑体,由黑体辐射定律 $J = \sigma T^4$,球形探测器的表面积设为 S ,没有防护罩时,从探测器表面辐射的热量由消耗核能产生的热量为

$$P = \sigma T^4 \cdot S;$$

有一个薄防护罩套在探测器表面时,对包括防护罩的探测器这个黑体,由防护罩表面外侧向外辐射的热量仍为 $P = \sigma T^4 \cdot S$,但要注意,防护罩内表面也会向内辐射热量 P ,并被探测器的表面完全吸收,如图 15-13 所示.设探测器的表面新的温度为 T_1 ,对探测器而言,应有

$$\sigma T_1^4 \cdot S - P = P,$$

即表面必须辐射总量为 $2P$ 的热量.所以有

$$2\sigma T_1^4 \cdot S = \sigma T^4 \cdot S,$$

可以得到 $T_1 = \sqrt[4]{2} T$.

对于有 N 个防护罩的情况,通过它们产生的向系统外热辐射功率仍旧为 P .重复应用前面的论证,可以得出,在这种情形下,探测器表面的辐射总量为 $(N+1)P$,所以可以求出探测器的表面温度为

$$T_N = \sqrt[4]{N+1} \cdot T.$$

动手动脑

1. 如图 15-14 所示,把两个托里拆利管倒立在水银槽中,甲管的上端略有空气,乙管的上端则为真空.今以两种液体分别导入这两管中,水银柱的上端各略有少许未蒸发的液体,两水银柱的高度则相同.那么

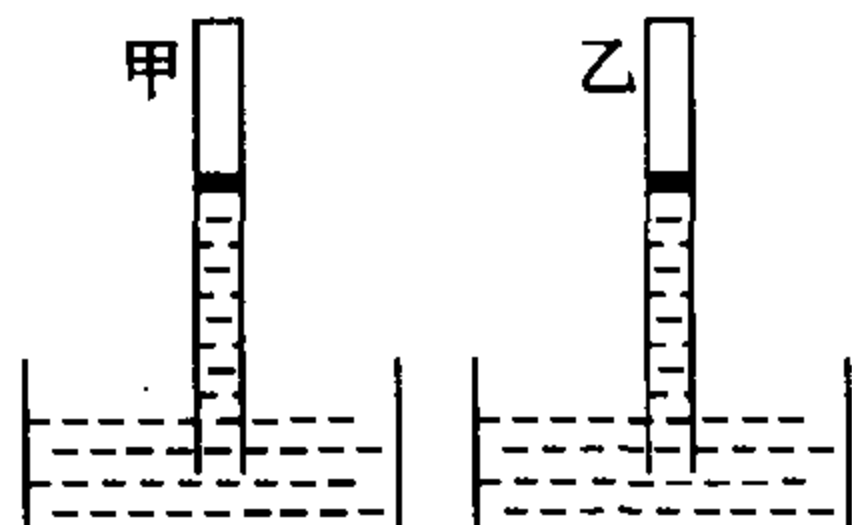


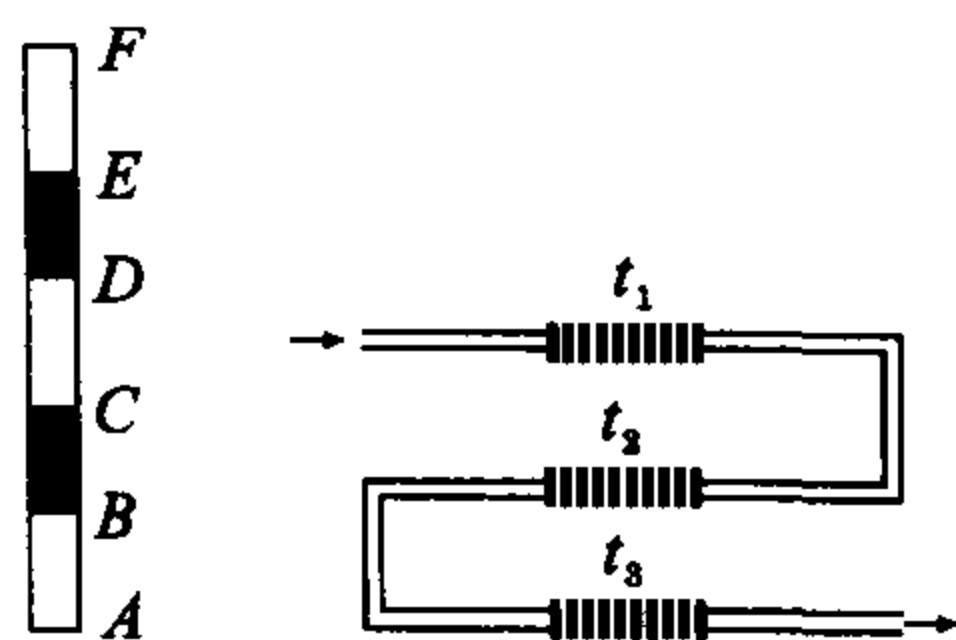
图 15-14

_____ 液体的沸点温度较高.

2. 设有 1 kg 的水已过度冷却至 -20°C .今以小块冰投入,则有 _____ g 的水将凝固成冰. [已知冰的比热为 $2.1 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$,水的比热为 $4.2 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$,冰的溶解热为 $3.36 \times 10^5 \text{ J}/\text{kg}$]

3. 在某一星球上,饱和水蒸气压强等于 $p_0 = 760 \text{ mmHg}$,此行星的水蒸气密度是 _____.

4. 两端封闭的细玻璃管 ABCDEF 竖直放置,AB 段和 CD 段装有空气,BC 段和 DE 段盛有水银,EF 段内是真空,如图 15-15 所示,各段长度相同,管内最低点 A 处压强为 p .将管子小心地倒过头来,使 F 点在最下面.求 F 点处压强,空气温度不变.



15-15

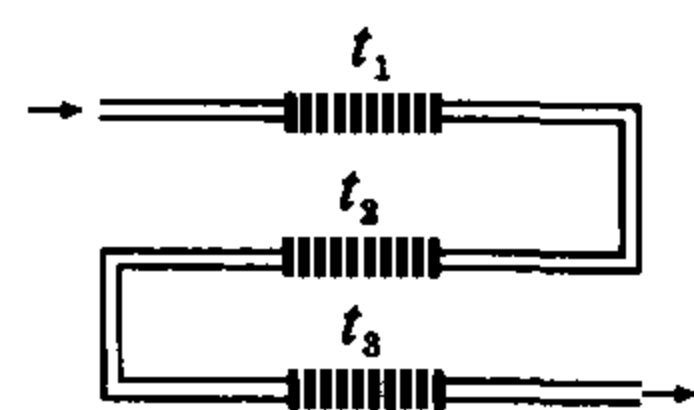


图 15-16

5. 冬天在一个大房间里,借助集中供暖的三个串联散热器使房间保持恒定温度 $t_0 = +15^\circ\text{C}$.热水沿散热器汲送,如图 15-16.同时,第一个散热器的温度 $t_1 = +75^\circ\text{C}$,而最后一个(第三个)散热器的温度 $t_3 = +30^\circ\text{C}$.问第二个散热器的温度是多少?可以认为:在散热器与房间之间的热交换同周围温度差成正比.

6. 两个相同的轻金属容器内装有同样质量的水.一个重球挂在不导热的细线上,放入其中一个容器内,使球位于容器内水的体积中心.球的质量等于水的质量,球的密度比水的密度大得多.两个容器加热到水的沸点,再冷却.已经知道:放有球的容器冷却到室温所需时间为未放球的容器冷却到室温所需时间的 k 倍.试求制作球的物质的比热 $c_{球}$ 与水的比热 $c_{水}$ 之比.

7. 两块质量均为 m 的平行玻璃板之间充满一层水,如图 15-17 所示,玻璃板之间的距离为 d ,板间夹的“水饼”的直径为 D 且 $D \gg d$.若水的表面张力系数为 σ ,求“水饼”作用于玻璃板的力.

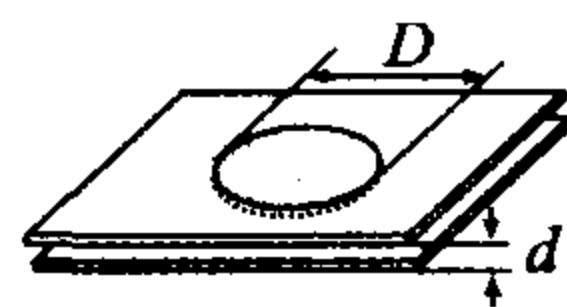


图 15-17

8. 当原子弹($m = 1 \text{ kg}$,钚 ^{239}Pu)爆炸时,每个钚原子辐射出一个放射性粒子,假设风将这些粒子均匀吹散在整个大气层,试估算落在地面附近体积 $V = 1 \text{ dm}^3$ 的空气中放射性粒子的数目.地球半径取 $R = 6 \times 10^3 \text{ km}$,大气压强取 $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

9. 水平放置的矩形容器被竖直的可动的轻活塞分为两部分,左边盛有水银(未装满,上部为真空),右边充有空气.活塞开始处于平衡状态并且将容器分成长度均为 l 的两个相同部分.现要使气体的温度(热力学温标下)升高到 3 倍,活塞需要向左移动多少?不计水银和容器的热膨胀,器壁是不可渗透的,也不计摩擦.

10. 正确使用高压锅(如图 15-18)的办法是:将已加上密封锅盖的高压锅加热,当锅内水沸腾时,加上一定重量的高压阀,此时可以认为锅内空气已全部排除,只有水的饱和蒸气,继续加热,水温将继续升高,到高压阀被蒸气顶起时,锅内温度即达到预期温度.

某一高压锅的预期温度为 120°C ,如果某人在使

用此锅时,未按上述程序而在水温被加热至 $90\text{ }^\circ\text{C}$ 时就加上高压阀(可以认为此时锅内水汽为饱和汽),问当继续加热到高压阀开始被顶起而冒气时,锅内温度为多少?

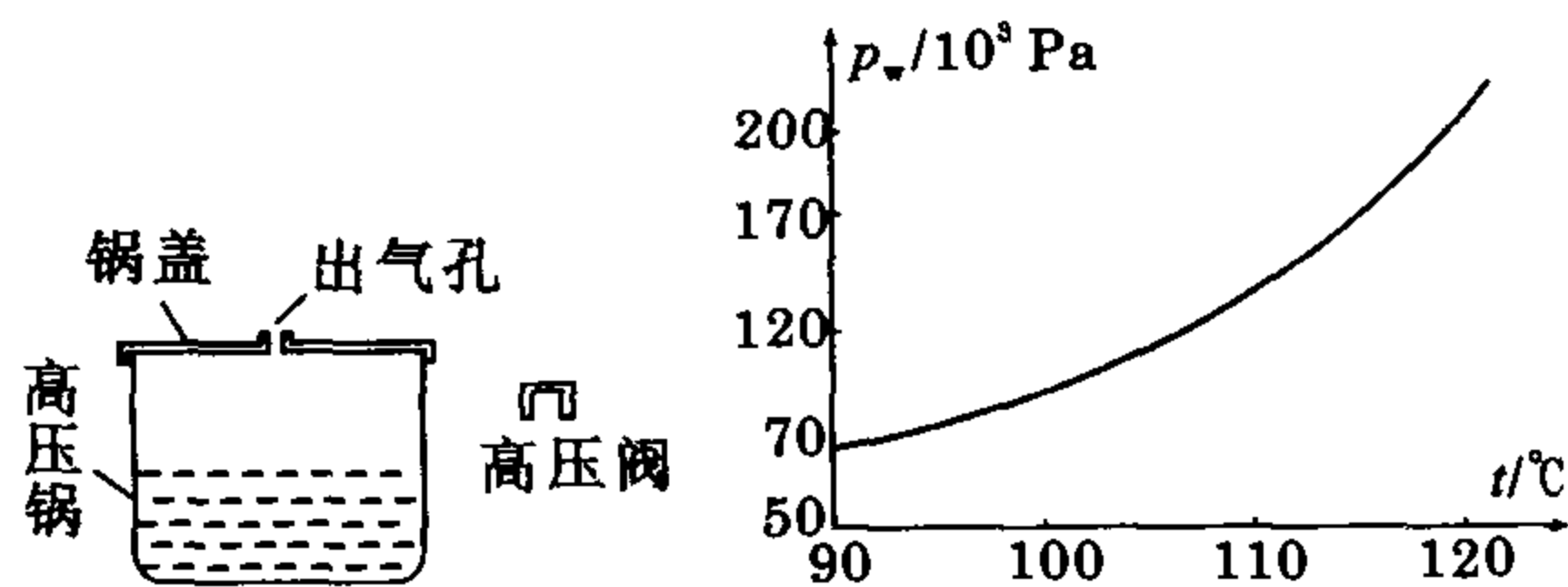


图 15-18

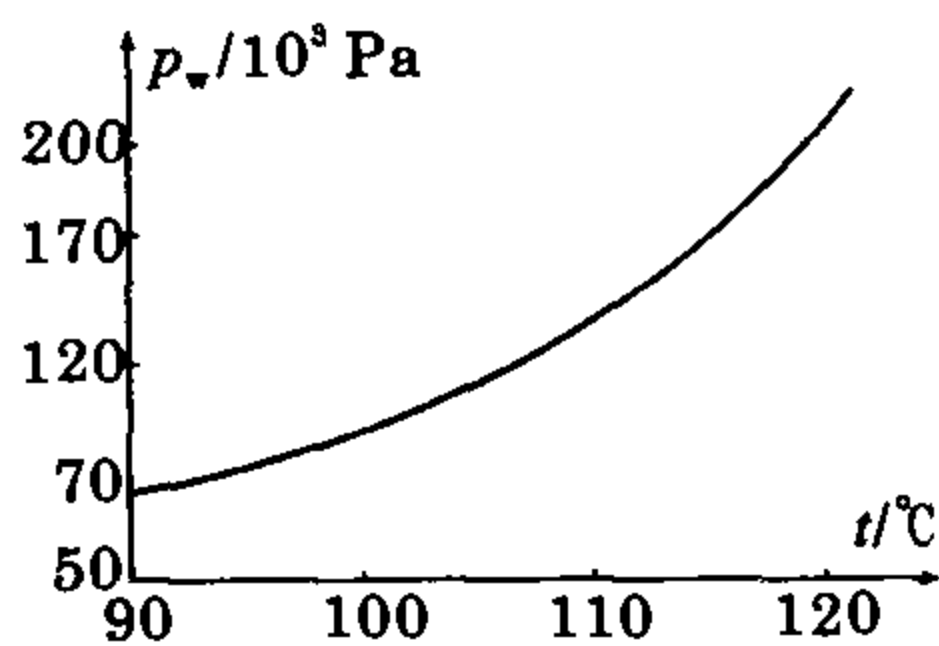


图 15-19

已知:大气压强 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$; $90\text{ }^\circ\text{C}$ 时水的饱和汽压 $p_w(90) = 7.010 \times 10^4 \text{ Pa}$; $120\text{ }^\circ\text{C}$ 时水的饱和汽压 $p_w(120) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa}$; $90\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $120\text{ }^\circ\text{C}$ 之间水的饱和汽压 p_w 和 $t(^\circ\text{C})$ 的函数关系 $p_w(t)$ 如图 15-19 所示.

11. 贮气罐的体积为 V , 罐内气体压强为 p . 贮气罐经阀门与体积为 V_0 的真空室相连, 打开阀门, 为真空室充气, 达到平衡后, 关闭阀门; 然后换一个新的同样的贮气罐继续为真空室(已非“真空”)充气; …… 如此不断, 直到真空室中气体压强达到 p_0 ($p_0 < p$) 为止. 设充气过程中温度不变, 试问共需多少个贮气罐?

12. 两个用不导热细管连接的相同容器里装有压强 $p_1 = 1 \text{ atm}$ 、相对湿度 $B = 50\%$ 、温度为 $100\text{ }^\circ\text{C}$ 的空气, 现将其中一个容器浸在温度为 $0\text{ }^\circ\text{C}$ 的冰中, 问系统的压强变为多少? 每一容器中空气的相对湿度为多少? 已知 $0\text{ }^\circ\text{C}$ 时水的饱和汽压为 4.6 mmHg .

13. 在密闭的容器中盛有温度 $t_1 = 100\text{ }^\circ\text{C}$ 的饱和蒸气和剩余的水. 如水蒸气的质量 $m_1 = 100 \text{ g}$, 水的质量 $m_2 = 1 \text{ g}$, 加热容器直到容器内所有的水全部蒸发. 试问应把容器加热到温度 T 为多少开? 给容器的热量 Q 为多少? 需注意, 温度每升高 $1\text{ }^\circ\text{C}$, 水的饱和汽压增大 $3.7 \times 10^3 \text{ Pa}$, 水的汽化热 $L = 2.25 \times 10^6 \text{ J/kg}$, 水蒸气的定容比热 $c_V = 1.38 \times 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.

14. 已知冰、水和水蒸气在一密闭容器内(容器内没有任何其他物质), 如果它们能够达到三态平衡共存, 则系统的温度和压强必定分别是 $t_i = 0.01\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $p_i = 4.58 \text{ mmHg}$. 现在有冰、水和水蒸气各 1 g 处于上述平衡状态. 若保持密闭容器体积不变而对此系统缓缓加热, 输入的热量 $Q = 0.255 \text{ kJ}$, 试估算系统再达到平衡后冰、水和水蒸气的质量. 已知在此条件下冰的升华热 $L_{\text{升}} = 2.83 \text{ kJ/g}$, 水的汽化热 $L_{\text{汽}} = 2.49 \text{ kJ/g}$.

参考答案

1. 由于两种液体各自蒸发, 在液面上方形成饱和

蒸汽, 由题意可知, 甲管中液体的饱和汽压与空气压强之和等于乙管中液体的饱和汽压, 所以同温度下甲管中液体的饱和汽压小于乙管中液体的饱和汽压, 沸腾的条件是液体的饱和汽压等于外界大气压, 当乙管中液体的饱和汽压等于外界大气压, 甲管中液体饱和汽压小于外界大气压, 故甲管中液体的沸点温度较高.

2. 设有 x 克水在 $-20\text{ }^\circ\text{C}$ 时凝固成冰, 则有 $4.2 \times (1000 - x) \times 20 + 2.1x \times 20 = 336x$, 得 $x = 222 \text{ g}$.

3. 在某一星球上水蒸气饱和汽压为 $p_0 = 760 \text{ mmHg}$, 等于地球上标准大气压下水发生沸腾时的情况, 即温度对应为 373 K . 则

$$\frac{pV}{T} = \frac{mR}{M}$$

$$\rho = \frac{pM}{TR} = 0.59 \text{ kg/m}^3.$$

4. 本题中 AB 段与 CD 段空气柱均为等温变化, 遵循玻意耳定律, 初始状态 A 点压强 p 即 AB 段气体压强 p_1 , 且等于两段 h 长水银柱引起的压强, 故 CD 段气体压强 $p_2 = \frac{p}{2}$; 管子倒过头来后的情形如图答 15-1 所示, 设 CD 段空气柱长度为 x , 压强为 y , 根据玻意耳定律, 对 AB 段气柱有

$$p \cdot h = (3h - x) \left(y - \frac{p}{2} \right),$$

对 CD 段气柱有 $\frac{p}{2} \cdot h = xy$.

$$\text{则 } y = \frac{3 + \sqrt{6}}{6} p.$$

于是, F 点处压强为

$$p_F = \frac{p}{2} + \frac{3 + \sqrt{6}}{6} p = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} p.$$

5. 由 $Q \propto \Delta T$ 及题给条件得

$$\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} = \frac{t_2 - t_0}{t_3 - t_0}, t_2 = 45\text{ }^\circ\text{C}.$$

6. 本题中, 两个容器与外界环境接触情况相同, 根据热传导中, 传递的热量, $\Delta Q \propto (T_{\text{容}} - T) \Delta t$, $T_{\text{容}}$ 、 T 分别是容器的温度和环境的温度. 又“轻金属容器”忽略其热容, 且两容器 $(T_{\text{容}} - T)$ 相同, 故有

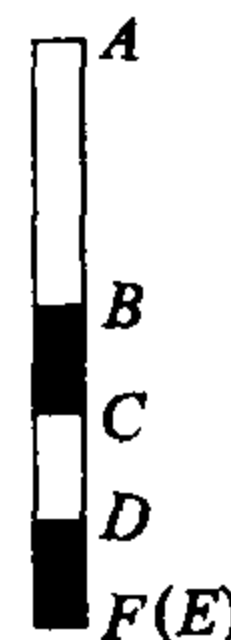
$$\frac{Q_{\text{冰} \cdot \text{水}}}{Q_{\text{水}}} = \frac{c_{\text{冰}} m \Delta T + c_{\text{水}} m \Delta T}{c_{\text{水}} m \Delta T} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = k,$$

$$\text{则 } \frac{c_{\text{冰}}}{c_{\text{水}}} = k - 1.$$

7. 设水与玻璃的接触角为 θ , 水的表面张力 $F = 2\sigma \cdot \pi D$, 表面张力对“水饼”的压强为

$$p = \frac{F}{\pi D \cdot d} = \frac{2\sigma}{d}.$$

p_0 为大气压强, 设“水饼”内部压强为 $p_{\text{水}}$, 因“水饼”平衡, 故对内凹形侧面有



图答 15-1

$$p_{\kappa} = p_0 - \frac{2\sigma}{d},$$

对上面的玻璃板而言,有

$$p_0 \frac{\pi D^2}{4} + mg - p_{\kappa} \frac{\pi D^2}{4} = F_{\text{浮}},$$

可得“水饼”作用于玻璃板的力为 $mg + \frac{\sigma \pi D^2}{2d}$.

8. 认为大气压强是地球表面单位面积上大气重力,由 $p_0 = \frac{m_0 g}{4\pi R^2}$ 得

$$m_0 = \frac{4\pi p_0 R^2}{g},$$

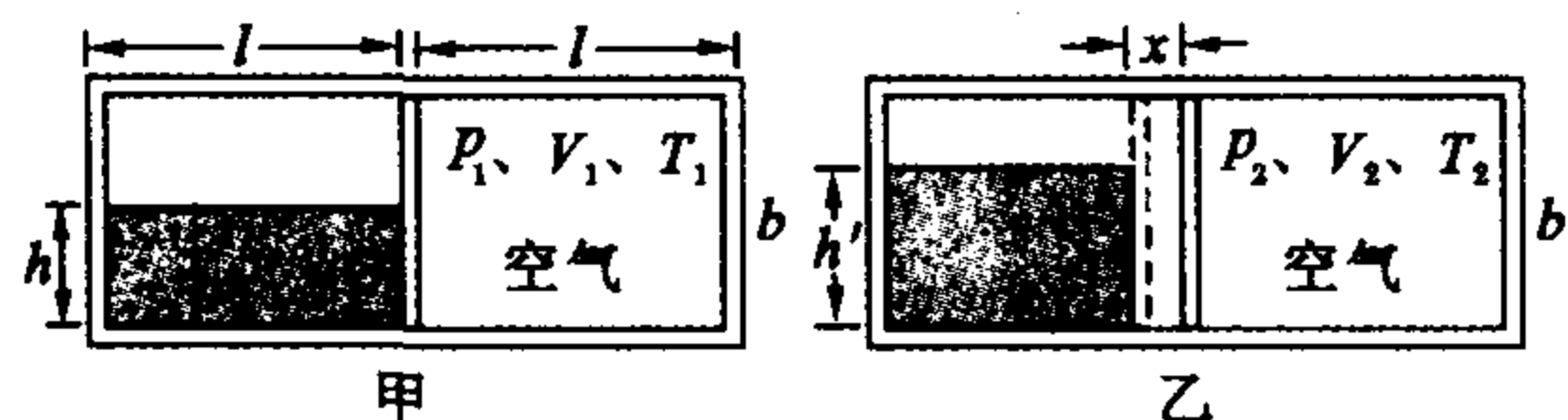
大气体积为 $V_{\text{空气}} = \frac{m_0}{M} \cdot V_0$ ($V_0 = 22.4 \text{ L}$),

1 kg 放射性钚粒子总数 $N = \frac{m}{M_{\text{Pu}}} N_A$,

则 1 dm^3 体积中放射性粒子数为

$$n = \frac{N}{V_{\text{空气}}} = \frac{m N_A M g}{4\pi M_{\text{Pu}} p_0 R^2 V_0} \approx 710 (\text{个}).$$

9. 按题意画出示意图,如图答 15-2 甲(变化前)和图答 15-2 乙(变化后),设活塞需要向左移动的距离为 x ,水银面的高度由原来的 h 变为 h' ,矩形容器的长、宽、高各为 $a=2 \text{ l}$ 、 b 、 c ,当系统平衡时,作用在活塞上的水银侧压力和空气压力相等.



图答 15-2

对右边空气,在状态变化前后的状态参量如下表所示:

	体积	压强	温度
初态	lbc	$p_1 \cdot bc = \frac{1}{2} \rho gh \cdot hc$	T_1
末态	$(l+x)bc$	$p_2 \cdot bc = \frac{1}{2} \rho gh' \cdot h'c$	$T_2 = 3T_1$

则 $lhc = (l-x)h'c$,

由理想气体状态方程 $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ 得

$$\frac{\frac{\rho gh \cdot hc}{2bc} \cdot lbc}{T_1} = \frac{\frac{\rho gh' \cdot h'c}{2bc} \cdot (l+x)bc}{3T_1}.$$

由上述二式得 $\frac{(l-x)^2}{l} = \frac{l+x}{3}$,

解得 $x_1 = \frac{l}{3}$, $x_2 = 2l$ (不符合题意,舍去).

即活塞需要向左移动 $x_1 = \frac{l}{3}$.

10. 在 90°C 时加上高压阀,锅内有饱和水蒸气和空气,锅内的压强是饱和水蒸气压强(饱和汽压)和空气的压强之和(即等于大气压强 p_0). 随着温度升高,空气压强与饱和汽压都增大,当他们的压强之和达到 $p_w(120)$ 时,高压阀被顶起,这时的温度(设为 t_1)即为题中所要求的温度. 温度为 t_1 时的饱和汽压记为 $P_w(t_1)$, 则 $[t_1, P_w(t_1)]$ 是图 15-19 曲线上一点,在曲线上找出这个点,就可在坐标上读出温度的 t_1 值.

设 90°C 时锅内空气的压强为 $p(90)$, 则 $p(90) = p_0 - p_w(90) = 3.12 \times 10^4 \text{ Pa}$, 当温度为 t 时锅内空气压强 $P(t)$ 可由查理定律求得

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{273+t}{273+90} p(90) \\ &= \left(\frac{273}{363} \times 3.12 \times 10^4 + \frac{1}{363} \times 3.12 \times 10^4 t \right) \text{ Pa}, \end{aligned}$$

即 $p(t) = (2.35 \times 10^4 + 86.0 t) \text{ Pa}$.

设温度为 t_1 时高压阀被顶起,这时锅内空气压强 $p(t_1)$ 与水的饱和汽压 $p_w(t_1)$ 之和等于 120°C 时水的饱和汽压,即

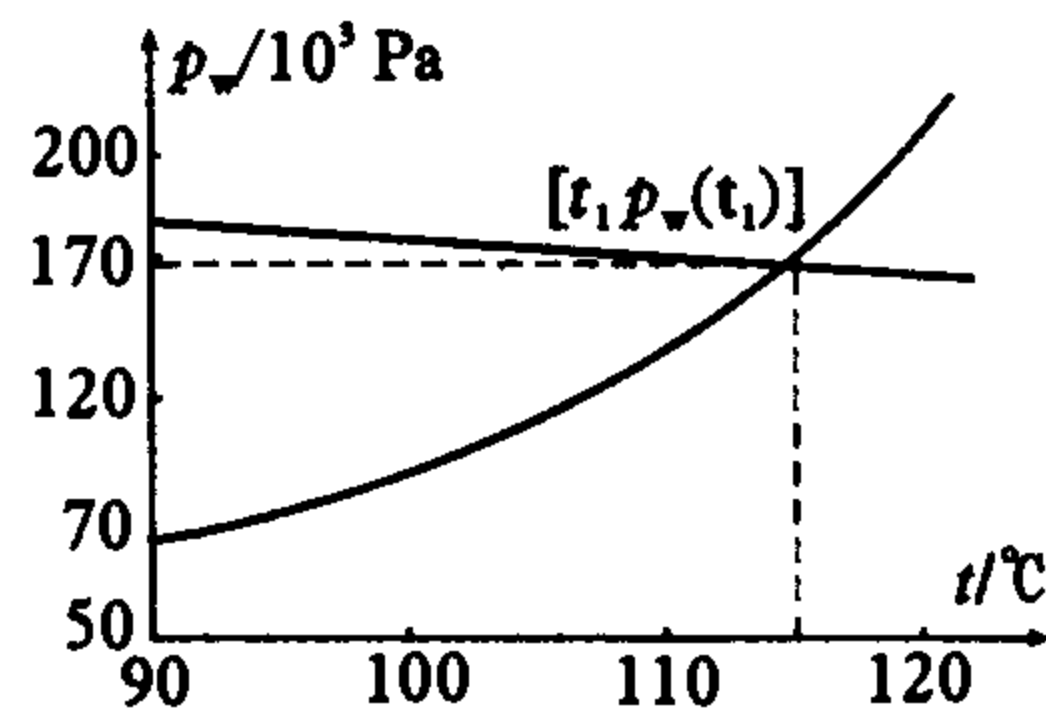
$$p(t_1) + p_w(t_1) = p_w(120) = 1.985 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

代入 $p(t_1)$ 表达式,得

$$p_w(t_1) = (1.75 \times 10^5 - 86.0 t_1) \text{ Pa}.$$

那么 $[t_1, p_w(t_1)]$ 可看成是函数 $p_w(t_1) = (1.75 \times 10^5 - 86.0 t_1)$ 图象上的一点,而 $[t_1, p_w(t_1)]$ 又是图 15-19 图线上的一点,可用作图法找出该点. 在图 15-19 上作函数 $p_w(t_1) = (1.75 \times 10^5 - 86.0 t_1) \text{ Pa}$ 的图象,是直线,直线

与图中原曲线相交点就是 $[t_1, p_w(t_1)]$ 点,如图答 15-3. 读得交点在 t 轴上的数值即为温度 t_1 , 则 $t_1 = 114.5^\circ \text{C}$.



图答 15-3

11. 在任一贮气罐为真空室充气的过程中,前者内部气体压强减小,后者内部气体压强增大,气体从贮气罐流向真空室,当两者压强相等时,该次充气过程结束. 每个贮气罐原有的气体摩尔数为 $n = \frac{pV}{RT}$.

当第一罐贮气罐向真空室充气至达到平衡,真空室压强达 p_1 , 由 $pV = p_1(V+V_0)$ 得 $p_1 = \frac{pV}{V+V_0}$.

当第二罐向真空室(已非“真空”)充气达到平衡后,真空室内气体的压强由 $pV + p_1 V_0 = p_2(V+V_0)$ 得

$$p_2 = \frac{V + \frac{V}{V+V_0}V_0}{V+V_0} p = \left(\frac{V}{V+V_0} + \frac{VV_0}{(V+V_0)^2} \right) p.$$

当第三罐向真空室充气达到平衡后,真空室内气体的压强为

$$p_3 = \left[\frac{V}{V+V_0} + \frac{VV_0}{(V+V_0)^2} + \frac{VV_0^2}{(V+V_0)^3} \right] p.$$

由此递推,当第 k 罐向真空室充气达到平衡后,真空室内气体的压强为

$$p_k = \left[1 + \frac{V_0}{V+V_0} + \left(\frac{V_0}{V+V_0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{V_0}{V+V_0} \right)^{k-1} \right] \frac{V}{V+V_0} p$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{V_0}{V+V_0} \right)^k}{1 - \frac{V_0}{V+V_0}} \cdot \frac{V}{V+V_0} p.$$

$$p = \left[1 - \left(\frac{V_0}{V+V_0} \right)^k \right] p.$$

当 $p_k = p_0$ 时,则 $p_0 = \left[1 - \left(\frac{V_0}{V+V_0} \right)^k \right] p.$

$$\left(\frac{V_0}{V+V_0} \right)^k = \frac{p - p_0}{p}.$$

即 $k = \frac{\ln(1 - p_0/p)}{\ln V_0 - \ln(V+V_0)}.$

此即题中所需贮气罐个数.

12. 根据道尔顿分压定律,潮湿空气的压强 p_1 等于干空气的压强和水蒸气压强之和,浸入冰中前两容器中干空气压强 $p_0 = 380 \text{ mmHg}$,水蒸气的压强 $p_0' = 380 \text{ mmHg}$;温度降低后,设空气压强变为 p ,对两容器中的空气有

$$\frac{2V_0 p_0}{T_0} = \frac{V_0 p}{T} + \frac{V_0 p}{T_0}.$$

可得 $p \approx 321.2 \text{ mmHg};$

此时 0°C 容器中水蒸气已达饱和,故相对湿度为 100% ; 100°C 的容器中,水蒸气压强等于 0°C 容器中饱和水蒸气的压强即 4.6 mmHg , 100°C 时水的饱和蒸气压大小为 760 mmHg ,故这个容器中的相对湿度 $B = \frac{4.6}{760} \% \approx 0.6\%$,系统的压强为 $p \approx 325.8 \text{ mmHg}$.

13. 本题中, 100 g 水蒸气的体积远大于 1 g 水的体积,所以 1 g 水的体积可忽略. 容器吸收的热量使得容器内的水全部汽化,并使得水蒸气(质量为 $m_1 + m_2$)的内能增加. 对初态和末态时的水蒸气可应用克拉珀龙方程. 设容器的体积为 V ,初态时水蒸气的压强为 p_1 (由于是饱和汽,且温度是 $t_s = 100^\circ\text{C}$,所以 $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$),末态时的压强为 p_2 ,水蒸气的摩尔质量为 M

$= 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$. 对密闭容器内的水蒸气的初态有

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_s, T_s = 273 + t_s = 373 \text{ K};$$

当水全部蒸发时有

$$p_2 V = \frac{m_1 + m_2}{\mu} RT,$$

$$p_2 = p_1 + 3.7 \times 10^3 (T - T_s), p_1 = 10^5 \text{ Pa}.$$

由上述式子可知

$$\frac{p_1 + 3.7 \times 10^3 (T - T_s)}{p_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{T}{T_s}.$$

代入数据得

$$\frac{10^5 + 3.7 \times 10^3 (T - 373)}{10^5} = \frac{100 + 1}{100} \times \frac{T}{373}.$$

解得 $T = 373.29 \text{ K};$

根据能量守恒,容器吸收的热量使得容器内的水全部汽化(汽化热),并使得水蒸气(质量为 $m_1 + m_2$)的内能增加 ΔE (气体体积不变),所以有

$$Q = Lm_2 + c_V (m_1 + m_2) (T - T_s) = 2290 \text{ J}.$$

14. 首先大致判断一下经缓慢加热系统再次平衡后的状况. 由 $L_{\text{融}} = L_{\text{汽}} - L_{\text{汽}} = 0.34 \text{ kJ/g}$,得出冰的熔解热,因冰原有 1 g ,输入热量为 $Q = 0.255 \text{ kJ}$,可见冰不会全部熔化. 也即在缓慢加热过程中,系统始终保持三态共存,并再次达到平衡. 因此,在此过程中,出现的是冰熔解为水的物态的变化,可认为系统的温度和压强均保持不变.

由理想气体状态方程,初态时水蒸气的密度为

$$\rho_{\text{汽}} = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} = \frac{18 \times 6.106 \times 10^2}{8.31 \times 273.16} = 4.84 \text{ kg/m}^3.$$

同样条件下,水和冰的密度分别为 $\rho_{\text{水}} = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{冰}} = 0.90 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,可见 $\rho_{\text{水}}$ 和 $\rho_{\text{冰}}$ 远大于 $\rho_{\text{汽}}$. 因初态冰、水和水蒸气各 1 g ,质量相同,由 $V = \frac{m}{\rho}$ 可知,初态水蒸气体积远大于水和冰的体积. 水蒸气几乎占据了全部容器.

在缓慢加热过程中,水蒸气温度和压强均不变,故其密度不变. 水、冰增减导致的体积变化可忽略不计. 并且也不可能有相当多的水蒸气转化为水或冰(这需要放热),所以水蒸气的体积不变,始终占据绝大部分容器. 由此,在物态变化过程中,水蒸气的质量保持不变为 $m_{\text{汽}} = 1 \text{ g}$. 物态变化几乎是冰熔化为水(吸热),设终态时冰和水的质量分别为 $m_{\text{冰}}$ 和 $m_{\text{水}}$,由 $m_{\text{冰}} + m_{\text{水}} = 2 \text{ g}$,及 $Q = (1 - m_{\text{冰}}) L_{\text{融}}$,得

$$m_{\text{冰}} = 0.25 \text{ kg}, m_{\text{水}} = 1.75 \text{ kg}.$$

即系统再达到平衡后,冰、水和水蒸气的质量分别为 0.25 kg , 1.75 kg , 1 g .

专题 16 热力学基础

何丰明 沈 晨

教你一手

一、知识概要

1. 热力学第一定律对于理想气体等值过程的应用
等容过程 等容过程的特征是气体体积保持不变, $\Delta V=0$, 故 $W=0$, 由热力学第一定律可知, 在等容过程中, 气体与外界交换的热量等于气体内能的增量:

$$Q = \Delta E = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{m}{M} C_v \Delta T.$$

C_v 称做定容摩尔比热容, $C_v = \frac{i}{2} R$, i 为分子的自由度, 对于单原子分子气体, $i=3$; 对于双原子分子气体, $i=5$; 而对于多原子分子气体 $i=6$. R 为摩尔气体常数, $R=8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

等压过程 等压过程的特征是气体压强保持不变, $\Delta p=0$, $\Delta W = p \cdot \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$, 由热力学第一定律可得, 在等压变化过程中气体与外界交换的热量为

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E + p \cdot \Delta V = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T \\ &= \frac{m}{M} \cdot \frac{i+2}{2} R \Delta T = \frac{m}{M} C_p \Delta T. \end{aligned}$$

C_p 称做定压摩尔比热容, $C_p = C_v + R$, 而 $\frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \gamma$ 称为比热容比. 对于单原子分子气体, $\gamma = \frac{5}{3}$; 而双原子分子气体, $\gamma = \frac{7}{5}$; 多原子分子气体则有 $\gamma = \frac{8}{6}$. C_v 、 C_p 及 γ 均只与气体分子的自由度有关而与气体温度无关.

等温过程 等温过程的特征是气体温度保持不变, $\Delta T=0$. 由于理想气体的内能取决于温度, 故 $\Delta E=0$. 由热力学第一定律可知在等温变化过程中气体与外界交换的热量为 $\Delta Q = \Delta W$. 理想气体在等温变化中, $pV = C_T = \frac{m}{M} RT$, 设气体体积从 V_1 膨胀到 V_2 , 压强从 p_1 减小到 p_2 , 所做的功为 W , 将这个功 n ($n \rightarrow \infty$) 等分, 每份元功 $\frac{W}{n} = \frac{C_T}{V_i} (V_{i+1} - V_i)$, 即 $\frac{V_{i+1}}{V_i} = 1 + \frac{W}{nC_T}$, 两边取 n 次方得

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(1 + \frac{W}{nC_T}\right)^n = \left(1 + \frac{W}{nC_T}\right)^{\frac{nC_T}{W} \cdot \frac{W}{C_T}}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{\frac{W}{nC_T} \rightarrow 0} \left(1 + \frac{W}{nC_T}\right)^{\frac{nC_T}{W} \cdot \frac{W}{C_T}} = e^{\frac{W}{C_T}}$,

$$W = C_T \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

$$\text{则 } Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

绝热过程 气体在不与外界发生热交换的条件下所发生的状态变化称做绝热过程, 其特点是 $Q=0$, 由热力学第一定律可得 $W = \Delta E = \frac{m}{M} C_v \Delta T$.

绝热过程中气体方程为 $pV = \frac{m}{M} RT$, 则对某一元过程有

$$\begin{aligned} p_{i+1} V_{i+1} - p_i V_i &= p_{i+1} (V_{i+1} - V_i) + V_i (p_{i+1} - p_i) \\ &= \frac{m}{M} R (T_{i+1} - T_i); \end{aligned}$$

而此元过程气体做元功为

$$\Delta W \approx p_{i+1} (V_{i+1} - V_i) \approx \frac{m}{M} C_v (T_i - T_{i+1}),$$

则有 $p_{i+1} (V_{i+1} - V_i) + V_i (p_{i+1} - p_i)$

$$\begin{aligned} &= -\frac{p_{i+1} (V_{i+1} - V_i)}{C_v} R \\ &= (1 - \gamma) p_{i+1} (V_{i+1} - V_i), \end{aligned}$$

$$\text{即有 } \gamma \frac{V_{i+1} - V_i}{V_i} + \frac{p_{i+1} - p_i}{p_i} = 0.$$

若令 $\gamma \frac{V_{i+1} - V_i}{V_i} = \frac{A}{n}$, ($n \rightarrow \infty$, A 为一定值) 则有

$$\frac{V_{i+1}}{V_i} = \left(1 + \frac{A}{n}\right), \left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right)^n = \left(1 + \frac{A}{n}\right)^{n \cdot \frac{A}{n}} = e^A, A = \gamma \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

同理可得 $A = \ln \frac{p_1}{p_2}$, 可知在绝热过程中气体的压强与体积有关系 $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, $pV^\gamma = \text{常量}$, 此称泊松方程. 通过 $pV = \frac{m}{M} RT$ 消去泊松方程中的 p 或 V , 可得

$$V^{\gamma-1} T = \text{恒量}; \frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{常量}. \text{绝热过程的这三个方程}$$

中, 常量各不相同, 大小与气体的质量及初始状态相关, 绝热过程中 p 、 V 、 T 均改变, 我们可按照问题的性

质,适当地选取较方便的来应用.

多方过程 我们可用 $pV^n = \text{常量}$ (n 为一常量,称多方指数)来表示气体发生状态变化的实际过程, $n=1$ 时为等温过程; $n=\gamma$ 时为绝热过程; $n=0$ 时为等压过程;当 $n=\infty$ 时为等容过程.凡可满足 $pV^n = \text{常量}$ 关系的过程均称为多方过程.通常的气体变化过程均为多方过程,而等值过程只是多方过程的特例.

在多方过程中气体从状态 p_1, V_1 进入状态 p_2, V_2 ,所做的功为 $W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$. 气体内能的增量为

$$\Delta E = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1), \text{由热力学第一定律知}$$

$$Q = \Delta E + W = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) + \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$$

$$= \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{M} \cdot \frac{R(T_1 - T_2)}{n-1};$$

若以 C 表示多方过程的摩尔比热容,则有 $Q = \frac{m}{M} C (T_2 - T_1)$,由上两式并注意到 $R = (\gamma - 1) C_V$,可得

$$C = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{(n-\gamma)R}{(n-1)(\gamma-1)}.$$

理想气体各等值过程和多方过程有关规律一览

过程	特征	过程方程	吸收热量 Q	对外做功 W	内能增量 ΔE
等容	$V = \text{常量}$	$\frac{p}{T} = \text{常量}$	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$	0	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$
等压	$p = \text{常量}$	$\frac{V}{T} = \text{常量}$	$\frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1)$	$p(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$
等温	$T = \text{常量}$	$pV = \text{常量}$	$\frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} R T \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} R T \ln \frac{p_1}{p_2}$	0
绝热	$\Delta Q = 0$	$pV^\gamma = \text{常量}$ $V^{\gamma-1} T = \text{常量}$ $p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{常量}$	0	$-\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$ 或 $\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$
多方		$pV^n = \text{常量}$	$W + \Delta E$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$	$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$

2. 热力学第二定律

循环过程 若一系统由某一状态出发,经过任意的一系列的过程,最后又回到原来的状态,这样的过程称为循环过程.

循环过程中系统对外所做的功 如图 16-1 所示为某一系统的准静态循环过程.在膨胀过程 AC_1B 段,系统对外所做的功 (W_1) 是正的,其数值与面积 AC_1BNMA 相等;在压缩过程 BC_2A 段,系统对外做功 (W_2) 为负,其数值与面积 BC_2AMNB 相等.在一循环中系统对外所做的功 W 就是这两段功的代数和(上述两个“面积”的差),即

$$W = W_1 + W_2 = \text{面积 } AC_1BNMA - \text{面积 } BC_2AMNB = \text{面积 } AC_1BC_2A.$$

可见,在一循环中系统对外所做的功,数值上等于图 16-1 所示 $p-V$ 图中闭合曲线的“面积”.

若循环沿顺时针方向进行,这个功是正的,相应的循环称为正循环;若循环沿逆时针方向进行,一个循环中系统对外所做的功为负,数值仍等于闭合曲线所包围的面积,相应的循环称为负循环.

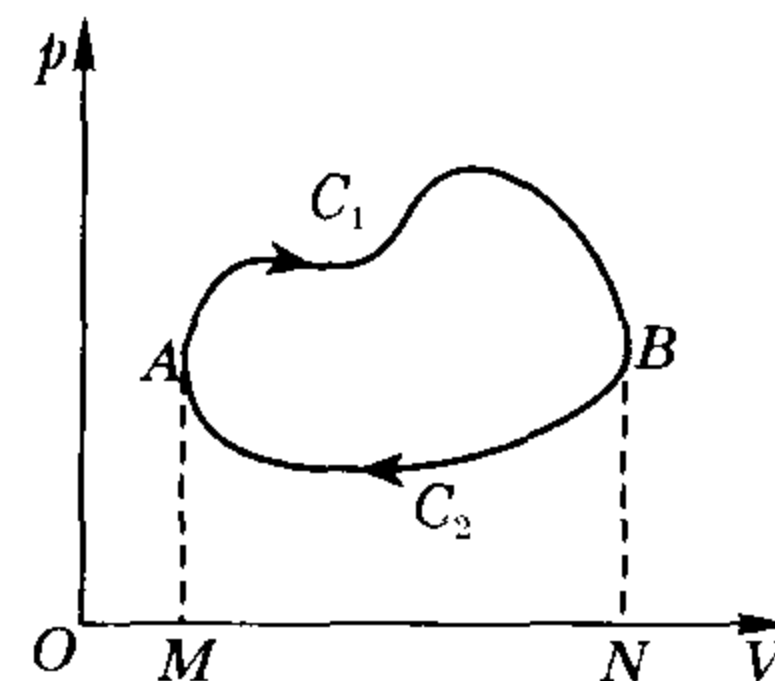


图 16-1

设 E_1 表示在状态 A 时系统的内能, E_2 表示在状态 B 时系统的内能,并设在 AC_1B 膨胀过程中吸收了 Q_1 的热量,由热力学第一定律可知: $E_2 - E_1 = Q_1 - W_1$;同理,设在 BC_2A 段压缩过程,系统放出了 Q_2 热量,由热力学第一定律可知: $E_1 - E_2 = -Q_2 + W_2$,可知 $Q_1 - Q_2 = W_1 - W_2 = W$. 此式表示,一循环中系统对外所做的功,等于一循环中系统吸收的净热量——即吸收热量 Q_1 与放出热量 Q_2 的差.

热机及其效率 设一系统做正循环,那么,系统在膨胀阶段所吸收的热量 Q_1 大于在压缩阶段放出热量 Q_2 ,其差值 $Q_1 - Q_2$ 转变为一循环中系统对外所做的功 W ,能完成这种转变的机械称为热机,热机的物理本质就是系统做正循环.热机的主要部分是:一个高温热源(发热器),用来供给 Q_1 的热量;一个低温热源(冷却器),用来吸取 Q_2 的热量;一种工作物质(如水、空气或水蒸气等),以及盛工作物质的气缸、活塞等.

对于热机,最重要的问题在于由高温热源吸取的热量 Q_1 中,究竟有多少可以转变为功 W ,至于低温热源所吸收的热量 Q_2 的多少,并不重要.因此定义了热机的效率 η 为:一循环中系统对外所做的功 W 与由高温热源吸取的热量 Q_1 的比值,即 $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$. 热机效率的大小,由循环的具体结构、性质而定.

制冷机及其效率 设一系统做负循环,则 W_1 为负, W_2 为正,且 $|W_1| > W_2$, $W = W_1 + W_2$ 为负,即一循环中系统对外做了 $|W|$ 的负功;又系统从低温热源吸收了较少的热量 $|Q_2|$,而在高温热源放出了较多的热量 $|Q_1|$,因而一循环中放出的净热量为 $|Q_1| - |Q_2| = |W|$. 所以系统在一负循环中,外界对系统做了 $|W|$ 功的结果为:系统在低温热源吸入热量 $|Q_2|$ 连同转变而成的热量,一并成为 $|Q_1|$ 的热量放入高温热源,结果将热量 $|Q_2|$ 由低温热源输送到高温热源,这就是制冷机(也叫热泵)的原理.

对制冷机,要关心的问题是:一循环中系统做了 $|W|$ 功后,有多少热量 $|Q_2|$ 由低温热源输送到高温热源去了,因此把 $\frac{|Q_2|}{W}$ 定义为制冷机的制冷系数.有时也把 $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ 叫做制冷机的效率,可以看出,制冷机的效率越高,制冷系数越小,经济效能越低.

在技术上使用热机的种类很多,有蒸汽机、内燃机和制冷机等,图 16-2 分别表示蒸汽机和制冷机的工作过程框图.

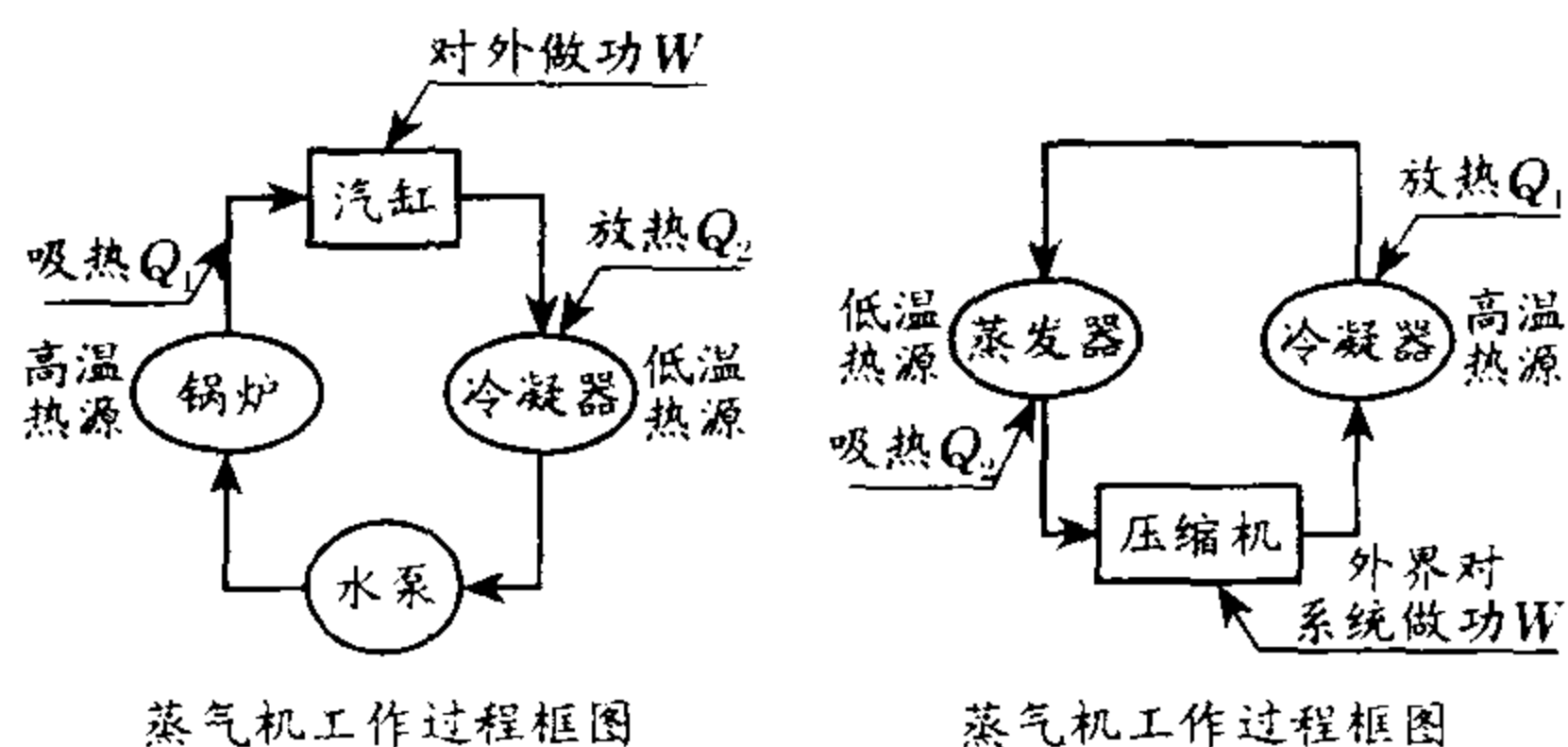


图 16-2

卡诺循环 为方便研究热机效率问题,19 世纪 20 年代,法国工程师卡诺设计了一个理想循环,即只在两个有恒定温度的高、低温热源吸、放热,此即卡诺循环,按此种方式工作的热机称为卡诺机.

图 16-3 给出了卡诺机模型.卡诺机中的工作物质是理想气体,被一个绝热活塞封闭在气缸中,缸的四壁是完全绝热和光滑的,缸底则是理想导热的;绝热台 H ;一个温度为 T_1 的高温热源;一个温度为 T_2 的低温热源,两个热源的热容量极大,温度几乎不变.

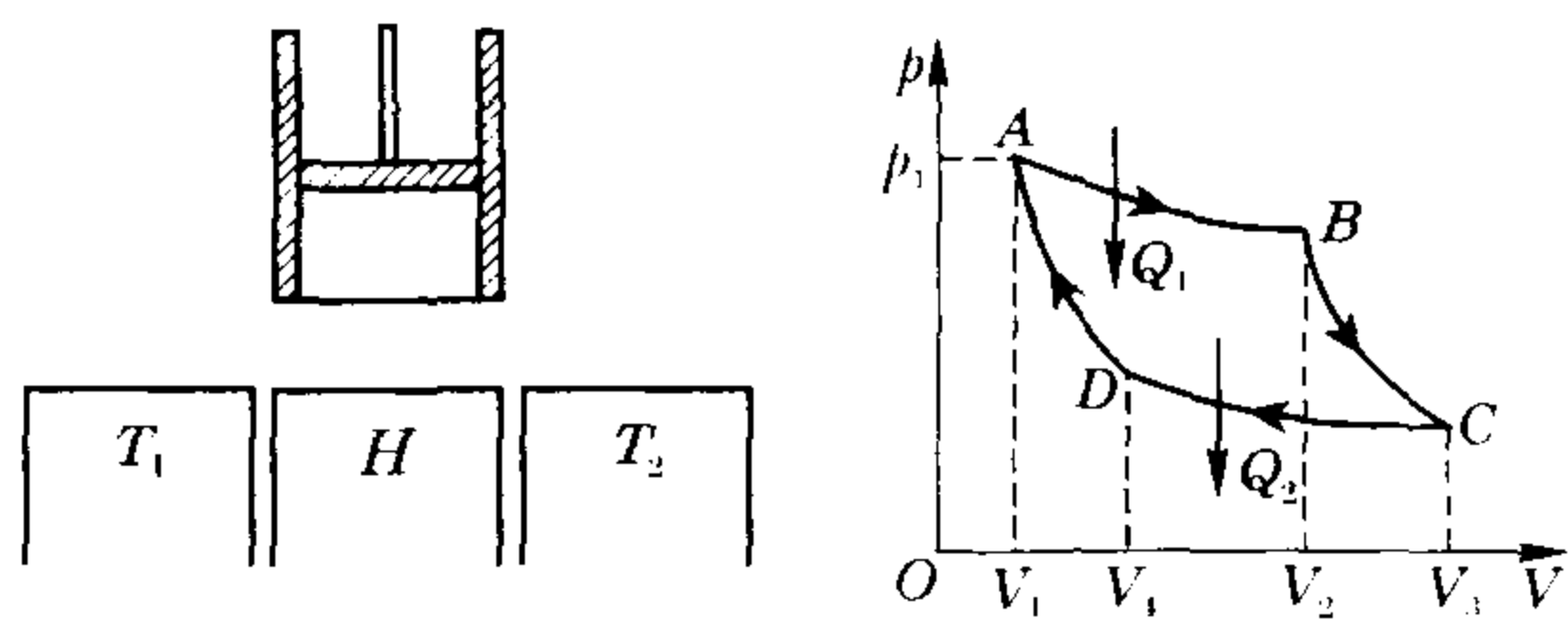


图 16-3

图 16-4

卡诺循环的过程可用图 16-4 状态图线表示,气体从初始状态 $A(p_1, V_1, T_1)$ 开始,沿箭头方向经历下列过程:

$A \rightarrow B$:将气缸移到高温热源上,让它缓慢地做等温膨胀,体积由 V_1 膨胀到 V_2 ,在等温过程中,温度恒为 T_1 ,共吸收 Q_1 热量,过程沿等温线 AB 进行;

$B \rightarrow C$:将气缸移到绝热台 H 上,让它做绝热膨胀,气体温度逐渐下降,到达状态 C 时,温度已降为 T_2 ,体积膨胀到 V_3 ,过程沿绝热线 BC 进行;

$C \rightarrow D$:将气缸移到低温热源上,将气体压缩,温度

保持在 T_2 ,压缩中不断放出热量,一直压缩到状态 D ,共放出热量 Q_2 , D 状态的体积为 V_4 ,它是过 C 点的等温线和过 A 点的绝热线的交点,过程沿等温线 CD 进行;

$D \rightarrow A$:将气缸移到绝热台,经过绝热压缩,气体温度逐渐升高,直到返回原来状态 A ,过程沿绝热线 DA 进行.

这样完成了一个卡诺循环过程,它是由两个等温过程 AB 、 CD 和两个绝热过程 BC 、 DA 组成.

卡诺循环中的能量转化过程可用图 16-5 表示.

卡诺循环的效率 为使对卡诺循环的讨论具有确切的意义,上面四个过程都必须都是准静态过程,一卡诺循环的结果是:工作物质恢复到原来状态,高温热源失去了 $Q_1 = W_1$ 的热量, W_1 表示等温膨胀过程中系统对外所做的功;低温热源获得了 $Q_2 = |W_2|$ 的热量, $|W_2|$ 是等温压缩过程中系统对外所做的功,一循环中系统对外所做的总功为: $W = Q_1 - Q_2 = W_1 - |W_2|$,其数值等于闭合曲线 $ABCD$ 所包围的面积,是正值.

根据热机效率的定义,卡诺循环的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

在 AB 过程中吸收的热量 Q_1 为 $Q_1 = \frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$,

在 CD 过程中放出的热量 Q_2 为 $Q_2 = \frac{m}{M}RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$.

又 BC 、 DA 为绝热过程,有 $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$,即

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

有 $(\frac{V_3}{V_2})^{\gamma-1} = (\frac{V_4}{V_1})^{\gamma-1}$,所以 $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}, \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$.

因此卡诺循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{m}{M}RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

同时也可推导出 $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$,即 $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

从结果可看出,卡诺循环的效率只由两个热源的温度而定, T_1 越高, T_2 越低,效率越高.

热力学第二定律

热力学第二定律的克劳修斯表述:在低温热源吸取热量,把它全部放入高温热源,而不引起其他变化是不可能的.这是从热传导的方向性来表述的,也就是说,热传导只能是从高温热源向低温热源方向进行的.

热力学第二定律的开尔文表述:从单一热源吸取热量,把它完全转变为功而不引起其他变化是不可能

的。这是从机械能与内能转化过程的方向来表述的,也就是说,当将内能转变为机械能时,若不辅以其他手段是不可能的。

上述两种表述是完全等效的,若承认其中一种表述,可以推出另一种表述。热力学第二定律也使人们认识到,自然界中进行的涉及热现象的宏观过程都具有方向。

热力学第二定律与热力学第一定律相比,后者表明能量在转换中所遵从的数量守恒关系,指出第一类永动机是不可能造成的;而前者则指明了能量转换过程进行的方向,指出了第二类永动机是不能制成的。二者是不抵触的,也不互相包容,是两条独立的定律。

热力学第二定律的适用对象是与周围环境没有任何相互作用的、大量粒子组成的孤立系统,研究孤立系统中大量微观粒子运动过程中总体所反映出来的物理性质及各种宏观物理过程。

3. 可逆过程与不可逆过程

可逆过程与不可逆过程 如图 16-6 所示,若一系统的状态由 A 起,经 B、C、… M 等到达状态 N,就说系统经历了过程 AN。若系统能沿相反方向、经相反次序,由 N 起,经 M…C、B 而返回状态 A,且返回 A 后,四周物质并无任何变化(如做多少功,吸收多少热等)就说过程 AN(或 NA)是一个可逆过程。凡不满足上述要求的过程,称为不可逆过程。

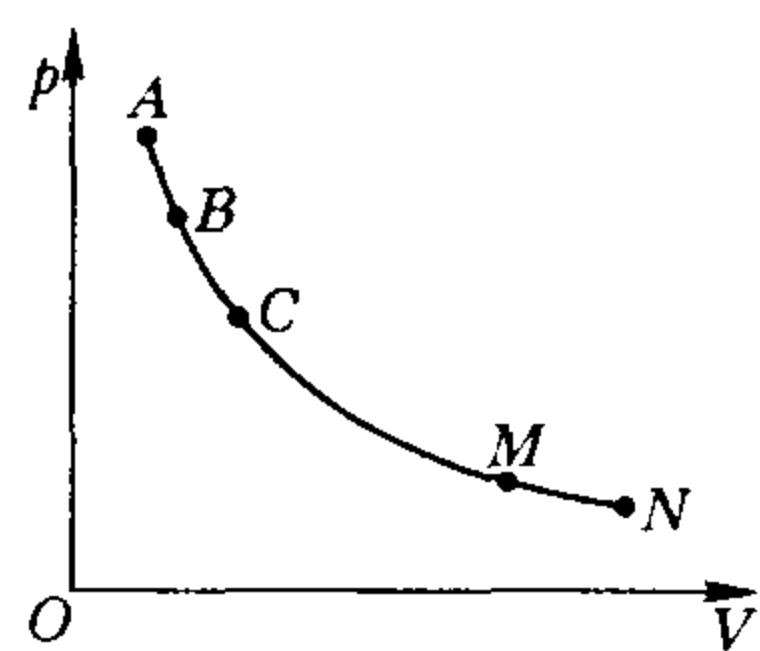


图 16-6

如设图 16-3 的气缸中有一定量的理想气体,把它放在温度为 T 的热源上。设活塞是光滑的,在它的上面放有很多个质量极小的砝码,由于它们的重力,使气体受到一定的压力。若将这些小砝码一个一个地依次横移到一系列与砝码等高的平台上,则气体将逐渐膨胀,一点一点地从热源吸收热量,转变为抵抗砝码重力所做的功,这些功又转变为各砝码的重力势能。这个过程一直进行到活塞达到一定的位置,这就是一个等温膨胀过程。然后将平台上的砝码一个一个横移回到活塞上,气体将逐渐地压缩,砝码的重力势能减少,转变为压缩气体所做的功,这些功又转变为热量,一点一点地传回到热源中去,砝码全部放回,活塞回到了原位,这样就说明了无摩擦的等温膨胀过程是一个可逆过程。可以说,无摩擦的准静态过程都是可逆的,严格地说,只有可逆过程才能画在 $p-V$ 图上。

如膨胀过程是迅速的,气缸中的气体上疏下密,但反向进行,即迅速压缩时上密下疏,过程就不能沿相同状态依相反次序进行,所以是不可逆的,这种过程由非平衡态组成,是不平衡地进行的。可以说,一切不平衡地进行的过程都是不可逆的。

一切实际过程都是不可逆的,可逆过程只是为了简化问题设想的理想情况。

对于循环过程,如果循环过程中的每一步都是可逆的,则循环过程称为可逆循环。如果循环过程中有一步是不可逆的,便是不可逆循环。

从可逆与不可逆过程的角度来说,热力学第二定律的开尔文表述说明功变热是一个不可逆的过程;克劳修斯表述说明热传导也是一个不可逆过程。

热力学第二定律的统计意义 对大数事件,如在 N 次实验中,某一事件出现的次数设为 m ,则该事件的几率可定义为 $p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N}$ 。几率只能近似地预言实验结果,不能十分精确地和实验结果一致。为了更好地理解热力学现象中的几率问题,下面以气体在真空中的膨胀来说明。

如图 16-7 所示,设一隔板将容器分成体积相等的 A、B 两部分,最初 A 部分中有 4 个分子,设为 a 、 b 、 c 、 d ; B 部分真空。抽去隔板后,有的分子就可能进入 B 中,从宏观角度说,就是气体膨胀进入真空。

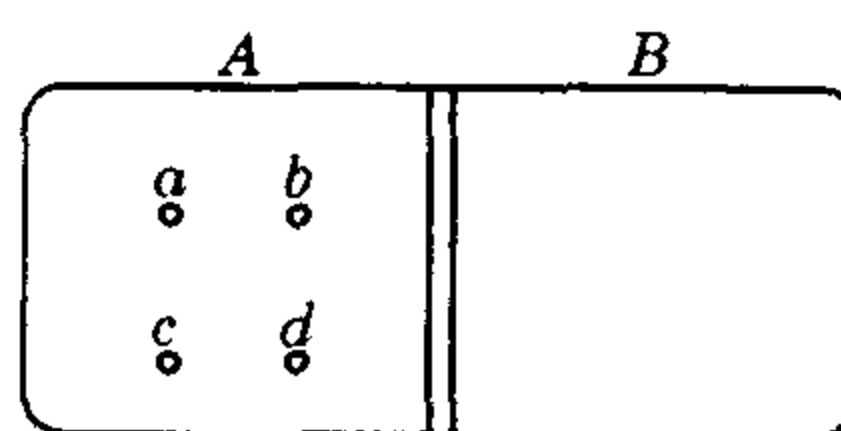


图 16-7

由于分子运动的杂乱性,某一时刻可能 A、B 中各有 2 个分子;也有可能 A 中有 3 个, B 中有 1 个;也可能 A 中 1 个, B 中有 3 个分子;也有可能四个分子同时回到了 A 中,如果这时把隔板加上,系统就回到了原来的状态了,此时外界也没有发生什么变化,所以对 4 个分子来说,气体在真空中的膨胀现象是可逆的。那么这 4 个分子同时回到 A 部分的几率是多大呢? 即这种可逆过程的存在几率有多大呢? 不难理解应为 $p = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ 。那么当 A 中气体的分子个数很多时(事实也往往如此),设为 n 个,那么如上所述的几率应为 $p = \frac{1}{2^n}$ 。若 n 以 10^{23} 个计的话,可见其几率是非常小的,小到了已没有实际意义。即事实上,这种可逆过程的存在几率是极小的,所以该过程实为一不可逆过程。

又如摩擦生热现象,根据热力学第二定律,也是不可逆的,从统计的角度来看,就是要将摩擦所产生的热全部自动收集起来,全部转化为机械功,这种自发现象的存在几率也是极小的,因此是一不可逆过程。

二、热力学典型问题例析

例 1 定容摩尔热容量 C_V 为常量的某理想气体,经历如图 16-8 所示的 $p-V$ 平面上的两个循环过程 $A_1 B_1 C_1 A_1$ 和 $A_2 B_2 C_2 A_2$, 相应的效率分别为 η_1 和 η_2 , 试比较 η_1 和 η_2 的大小。

分析与解 循环过程的效率为 $\eta = \frac{W}{Q}$, 其中 W 是

气体经循环过程对外所做的功, Q 为气体从外界吸收的热量. 本题 $A_1B_1C_1A_1$ 与 $A_2B_2C_2A_2$ 两个循环过程的功, 可从图 16-8 中的直角三角形面积所得. 在 $A_1B_1C_1A_1$ 循环过程中, A_1B_1 阶段气体对外做功, 内能增大, 吸收热量; B_1C_1 为等容降压过程, 温度降低, 放出的热量为 $nC_V\Delta T$ (n 为气体的摩尔数); C_1A_1 为等压过程, 温度降低, 放出的热量为 $nC_p\Delta T'$. 因此循环过程中的吸热量就是 A_1B_1 过程的吸热量. 循环过程 $A_2B_2C_2A_2$ 的情形也类似.

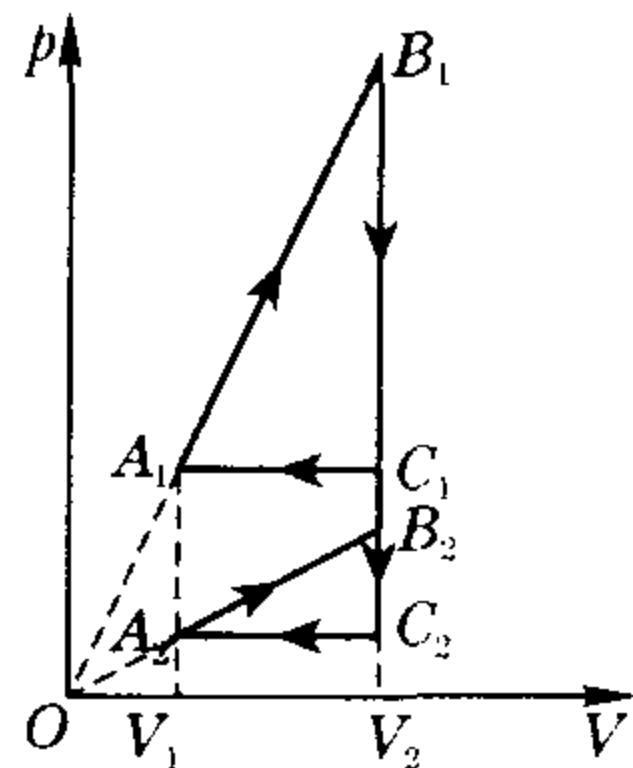


图 16-8

先计算循环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 效率, 设气体的摩尔数为 n . 循环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 对外所做的功即为图中三角形 $A_1B_1C_1$ 的面积, 为

$$W_1 = \frac{1}{2}(p_{B_1} - p_{C_1})(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_{B_1} - p_{A_1})(V_2 - V_1).$$

式中 p_{B_1} 和 p_{C_1} 分别是理想气体在状态 B_1 和 C_1 时的压强.

又 A_1B_1 过程是通过原点的直线, 过程的方程可写为 $p = kV$. 因此 $p_{B_1} - p_{A_1} = k(V_2 - V_1)$, 代入 W_1 表达式, 得 $W_1 = \frac{1}{2}k(V_2 - V_1)^2$. 又直线 A_1B_1 过程是多方过程, 指数为 $n = -1$, 过程方程式为 $pV^{-1} = \text{常数}$, 此多方过程的摩尔热容量为 $C = \frac{\gamma - n}{1 - n}C_V = \frac{1}{2}(\gamma + 1)C_V$, 式中 γ 是气体的绝热指数.

设 A_1 和 B_1 状态的温度分别为 T_1 和 T_2 , 则有

$$p_{A_1}V_1 = nRT_1; p_{B_1}V_2 = nRT_2,$$

相减得

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{nR}(p_{B_1}V_2 - p_{A_1}V_1) = \frac{k}{nR}(V_2^2 - V_1^2),$$

所以 $A_1B_1C_1A_1$ 循环过程中所吸收的热量为

$$Q_1 = nC(T_2 - T_1) = \frac{k}{R}C(V_2^2 - V_1^2).$$

可知, $A_1B_1C_1A_1$ 循环过程的效率为

$$\eta = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{\frac{1}{2}k(V_2 - V_1)^2}{\frac{k}{R}C(V_2^2 - V_1^2)} = \frac{R(V_2 - V_1)}{2C(V_2 + V_1)};$$

同理, $A_2B_2C_2A_2$ 循环过程的效率为

$$\eta' = \frac{R(V_2 - V_1)}{2C(V_2 + V_1)}.$$

以上两式表明, 两循环过程的效率与直线 A_1B_1 或 A_2B_2 的斜率大小无关, 而只与 C 及 V_1, V_2 有关, 其中 C 也与直线的斜率无关, 因此只要相应的 V_1 和 V_2 相同, 效率就相同, 所以, 两循环过程的效率相同, 即

$$\eta = \eta'.$$

例 2 在两端开口的竖直 U 形管中注入水银, 水

银柱的全长为 h . 将一边管中的水银下压, 静止后撤去所加压力, 水银便会振荡起来, 其振动周期为 $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$; 若把管的右端封闭, 被封闭的空气柱长 L . 然后使水银柱做微小的振荡, 设空气为理想气体, 且认为水银振荡时右管内封闭气体经历的是准静态绝热过程, 大气压强相当 h_0 水银柱产生的压强. 空气的绝热指数为 γ . (1) 试求水银振动的周期 T_2 ; (2) 求出 γ 与 T_1, T_2 的关系式.

分析与解 右端封闭后, 随着水银柱的振荡, 被封闭的空气经历绝热膨胀或绝热压缩过程; 封闭端的空气与外界空气对水银柱压力差提供水银柱做微小振荡的回复力, 本题关注回复力的构成及所循规律.

(1) 如图 16-9 所示, A, B, C 分别表示水银柱处于平衡位置、达到振幅位置时和有一任意小位移 y 时的三个状态. 建立

如图坐标, 设水银柱位移为 y 时, 封闭气体的压强为 p_y , U 形管横截面积为 S , 水银柱总质量为 m , 水银密度为 ρ .

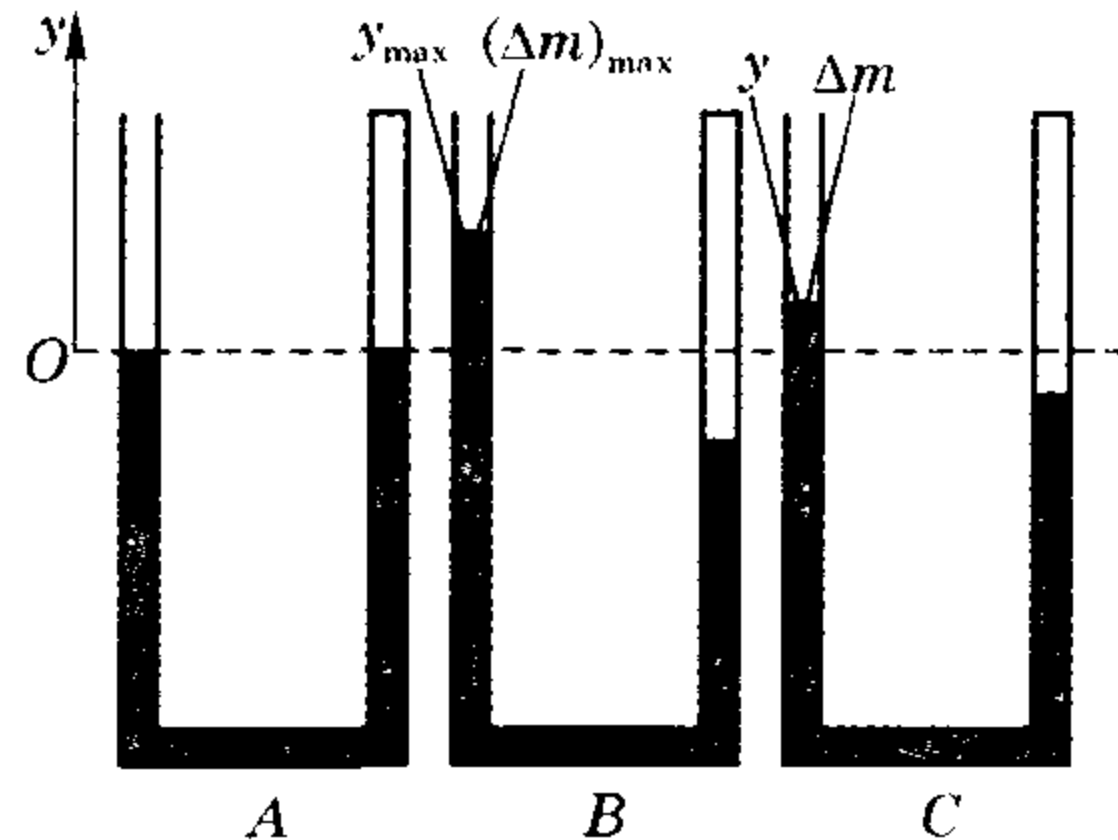


图 16-9

对被封闭气体的 A, C 状态由泊松方程可知

$$p_0(LS)^\gamma = p_y[(L+y)S]^\gamma,$$

其中

$$p_0 = \rho gh_0,$$

得

$$p_y - p_0 = \left[\left(\frac{L}{L+y}\right)^\gamma - 1\right] p_0.$$

由于 $y \ll L$, 上式可近似为 $p_y - p_0 = \left[\left(1 - \frac{y}{L}\right)^\gamma - 1\right] p_0$

$= (1 - \gamma \frac{y}{L} - 1) p_0 = -\gamma \frac{h_0}{L} \rho gy$. 对 C 状态, 研究水银柱受到的回复力, 回复力 F 即由高度差为 $2y$ 的水银柱的重力、内外气体压力的合力提供, 以位移 y 方向为正, 即为

$$\begin{aligned} F &= p_y S - p_0 S - 2(\Delta m)g = (p_y - p_0)S - 2\rho ySg \\ &= -\gamma \frac{h_0}{L} \rho gyS - 2\rho ySg = -(\gamma \frac{h_0}{L} \rho gS + 2\rho Sg)y. \end{aligned}$$

令

$$k = \gamma \frac{h_0}{L} \rho gS + 2\rho Sg$$

得

$$F = -ky.$$

可知水银柱的微小振荡为一简谐运动, 其周期为

$$\begin{aligned} T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho hS}{\gamma \frac{h_0}{L} \rho gS + 2\rho Sg}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{h}{(2 + \gamma \frac{h_0}{L})g}}. \end{aligned}$$

(2)由上述 T_1 和 T_2 ,得

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{\frac{h}{2g}}{\frac{h}{(2+\gamma\frac{h_0}{L})g}} = 1 + \frac{\gamma h_0}{2L},$$

故

$$\gamma = \frac{2L}{h_0} \left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 - 1 \right].$$

例 3 一热机工作于两个相同材料的物体 A 和 B 之间,两物体的温度分别为 T_A 和 T_B ($T_A > T_B$),每个物体的质量为 m 、比热容恒定,均为 s . 设两个物体的压强保持不变,且不发生相变.

(1)假定热机能从系统获得理论上允许的最大机械能,求出两物体 A 和 B 最终达到的温度 T_0 的表达式,给出解题的全部过程.

(2)由此得出允许获得的最大功的表达式.

(3)假定热机工作于两箱水之间,每箱水的体积为 2.50 m^3 ,一箱水的温度为 350 K ,另一箱水的温度为 300 K . 计算可获得的最大机械能.

已知水的比热容 $= 4.19 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,水的密度 $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

分析与解 (1)为获得最大的机械能,可设热机工作的全过程由 n ($n \rightarrow \infty$) 个元卡诺循环组成,第 i 次卡诺循环中,卡诺热机从高温热源(温度设为 T_i)处吸收的热量为 ΔQ_1 后,温度降为 T_{i+1} ;在低温热源(温度设为 T_j)处放出的热量为 ΔQ_2 后,温度升高为 T_{j+1} 满足

$$\frac{\Delta Q_1}{T_i} = \frac{\Delta Q_2}{T_j}.$$

又 $\Delta Q_1 = ms(T_i - T_{i+1})$, $\Delta Q_2 = ms(T_{j+1} - T_j)$,

可知 $\frac{T_i - T_{i+1}}{T_i} = \frac{T_{j+1} - T_j}{T_j}$,

令 $\frac{T_i - T_{i+1}}{T_i} = \frac{T_{j+1} - T_j}{T_j} = \frac{A}{n}$, ($n \rightarrow \infty$, A 为常数)

有 $\frac{T_{i+1}}{T_i} = 1 - \frac{A}{n}$, $\frac{T_{j+1}}{T_j} = 1 + \frac{A}{n}$,

即 $\left(\frac{T_{i+1}}{T_i}\right)^n = \left(1 - \frac{A}{n}\right)^{\frac{n}{A} \cdot A}$;

$$\left(\frac{T_{j+1}}{T_j}\right)^n = \left(1 + \frac{A}{n}\right)^{\frac{n}{A} \cdot A},$$

得 $A = \ln \frac{T_A}{T_0}$, $A = \ln \frac{T_0}{T_B}$.

所以 $T_0 = \sqrt{T_A T_B}$.

(2)由卡诺热机的循环过程可知:

$$\begin{aligned} W &= Q_1 - Q_2 = ms(T_A - T_0) - ms(T_0 - T_B) \\ &= ms(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B}) \\ &= ms(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2. \end{aligned}$$

(3)根据题意代入数据即可得:

$$W = 2.0 \times 10^7 \text{ J}.$$

例 4 已知 n (mol) 的某理想气体在 $T < 2T_0$ 时的

定容热容 $C_{V_1} = \alpha nR$, 在 $T > 2T_0$ 时的定容热容 $C_{V_2} = \beta C_{V_1}$, 其中 α, β 均为大于 1 的常量,该气体经历的循环过程 ABCDA 是如图 16-10 所示的矩形. (1)试求状态 D 的温度 T_D , 并画出循环过程中系统内能随温度 T 变化的图线; (2)试计算循环过程的效率 η .

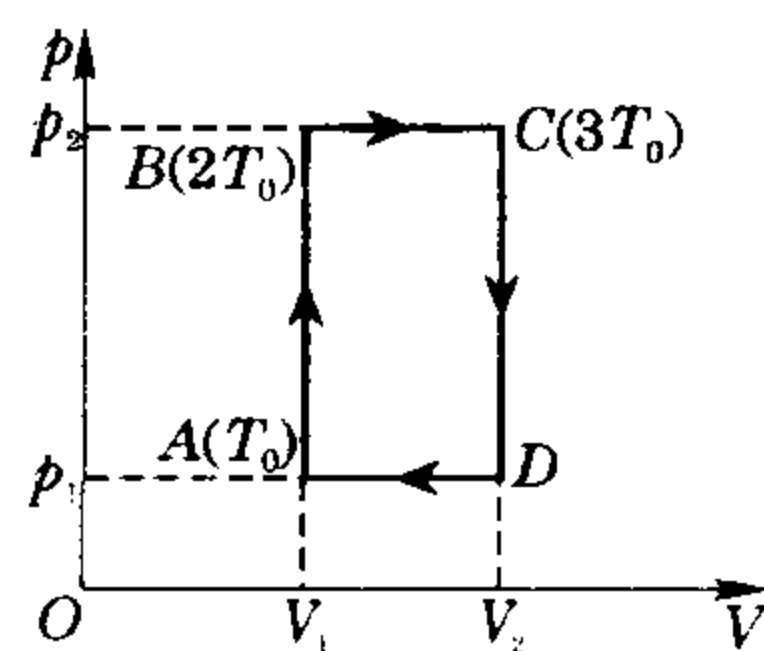


图 16-10

分析与解 本题中理想气体所经历的循环过程曲线呈矩形,其中: $A \rightarrow B$ 为等容升压; $B \rightarrow C$ 为等压膨胀; $C \rightarrow D$ 为等容降压; $D \rightarrow A$ 为等压压缩. 设 A 状态参量为 p_1, V_1, T_0 ; B 状态参量为 $p_2, V_1, 2T_0$; C 状态参量为 $p_2, V_2, 3T_0$; D 状态参量为 p_1, V_2, T_D .

(1)由理想气体状态方程,可知

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2T_0}{T_0}, \frac{p_2}{p_1} = \frac{3T_0}{T_D},$$

得

$$T_D = \frac{3}{2} T_0.$$

由此也可知,在 $C \rightarrow D$ 过程中存在状态 F, 该状态时的温度为 $2T_0$.

(2)本题中理想气体内能为 $U = C_V T$, A 状态内能为 $U_A = C_{V_1} T_0 = \alpha nRT_0$; 其他状态的内能依次为 $U_B = C_{V_1} \cdot 2T_0 = 2\alpha nRT_0$, $U_C = C_{V_2} \cdot 3T_0 = 3\beta \alpha nRT_0$, $U_F = C_{V_2} \cdot 2T_0 = 2\beta \alpha nRT_0$, $U_D = C_{V_1} \cdot 1.5T_0 = 1.5\alpha nRT_0$. 又在 B、F (温度均为 $2T_0$) 状态时,定容热容量发生了突变,这意味着该理想气体分子的某一运动自由度刚好在 $2T_0$ 时被激发,因此,系统在 B 状态时会出现不升温的吸热,内能变为 $U_B = C_{V_2} \cdot 2T_0 = 2\beta \alpha nRT_0$; 在 F 状态时,会出现不降温的放热,内能变为 $U_F = C_{V_1} \cdot 2T_0 = 2\alpha nRT_0$. 所以 U 和 T 的关系应完整地表达为

$$\begin{cases} U = C_{V_1} T = \alpha nRT, (T < 2T_0), \\ U = C_{V_2} T = \beta \alpha nRT, (T > 2T_0), \\ \alpha nRT < U < \beta \alpha nRT. (T = 2T_0) \end{cases}$$

循环过程中系统内能 U 随温度 T 变化的图线如图 16-11 所示.

注意,图线中从 A 状态到 B 状态的等容过程并不经过 D 状态,从 B 态到 C 态的等压过程并不经过 F 状态,同样从 C 态到 D 态的等容过程中不经过 B 态,但经过 F 状态. 又 B、F 状态因为温度相同,所以内能也相同,图 16-11 中用同一点表示,另外 B、F 状态

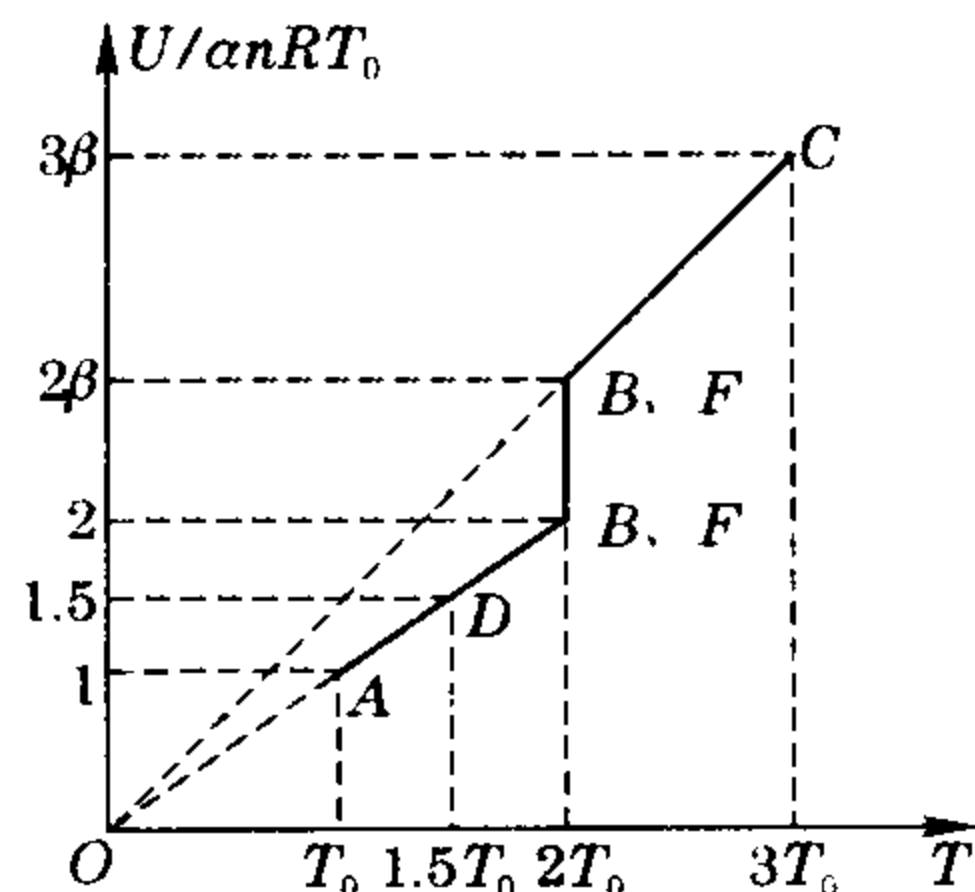


图 16-11

的温度 $2T_0$ 。刚好是定容热容量发生突变的温度,出现了不升温的吸热或放热,导致内能变化,所以,两者在图中是一段等温线。同样 D 状态也不是 AB 过程中的状态,但与 AB 过程中某状态具有相同的内能和温度。

(3) 一个循环过程中,气体对外所做功的大小为图 16-10 中矩形面积,即为

$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

又
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2T_0}{T_0} = \frac{2}{1}, \frac{V_2}{V_1} = \frac{3T_0}{2T_0} = \frac{3}{2},$$

所以有
$$W = \frac{1}{2} p_1 V_1 = \frac{1}{2} nRT_0.$$

循环过程中属吸热过程的是 $A \rightarrow B$ 、 $B \rightarrow C$ 和在 B 状态时因定容热容量发生突变而造成的吸热 Q_B , 吸收的热量分别为 Q_{AB} 、 Q_{BC} 、 Q_B :

$$Q_{AB} = C_{V_1}(2T_0 - T_0) = \alpha nRT_0;$$

$$Q_{BC} = (C_{V_2} + nR)(3T_0 - 2T_0) = n(\alpha\beta + 1)RT_0;$$

$$Q_B = (C_{V_2} - C_{V_1})2T_0 = 2(\beta - 1)\alpha nRT_0.$$

则一循环中吸收的总热量为:

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_B = \alpha nRT_0 + n(\alpha\beta + 1)RT_0 + 2(\beta - 1)\alpha nRT_0 = n(3\alpha\beta - \alpha + 1)RT_0,$$

所以循环过程的效率 η 为

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{\frac{1}{2} nRT_0}{n(3\alpha\beta - \alpha + 1)RT_0} = \frac{1}{2(3\alpha\beta - \alpha + 1)}.$$

🔍 小试身手 🔍

1. 理想气体做绝热膨胀,由初状态 (p_0, V_0) 至末状态 (p, V) , 试证明在此过程中气体所做的功为

$$W = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1}.$$

2. 为了测定气体的 $\gamma (= \frac{C_p}{C_v})$, 有时用下列方法: 一定量的气体的初始温度、压强和体积分别为 T_0 、 p_0 、 V_0 . 用一根通有电流的铂丝对它加热. 设两次加热的电流和时间都相同. 第一次保持气体体积 V_0 不变, 温度和压强各变为 T_1 和 p_1 ; 第二次保持压强 p_0 不变, 而温度和体积各变为 T_2 和 V_1 . 试证明 $\gamma = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_1 - V_0)p_0}$.

3. 设有一以理想气体为工作物质的热机循环, 如图 16-12 所示, 试证明其效率为 $\eta = 1 - \gamma \frac{(\frac{V_1}{V_2}) - 1}{(\frac{p_1}{p_2}) - 1}$.

4. 1 mol 理想气体在 400 K ~ 300 K 之间完成一卡诺循环. 在 400 K 等温线上, 起始体积为 0.001 0 m³, 最后体积为 0.005 0 m³, 计算气体在此过程中所做的

功, 以及从高温热源吸收的热量和传给低温热源的热量.

5. 如图 16-13 所示为单原子理想气体的两个封闭热循环: 1234 和 1564, 比较这两个热循环过程的效率哪个高? 高多少倍?

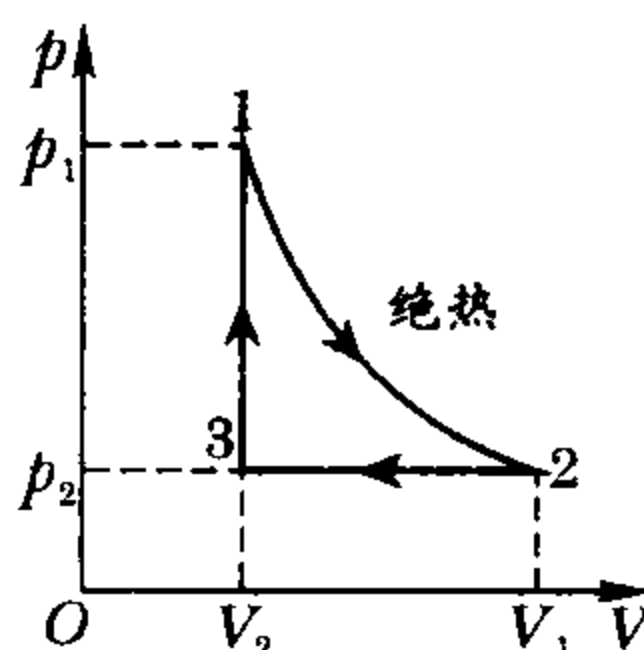


图 16-12

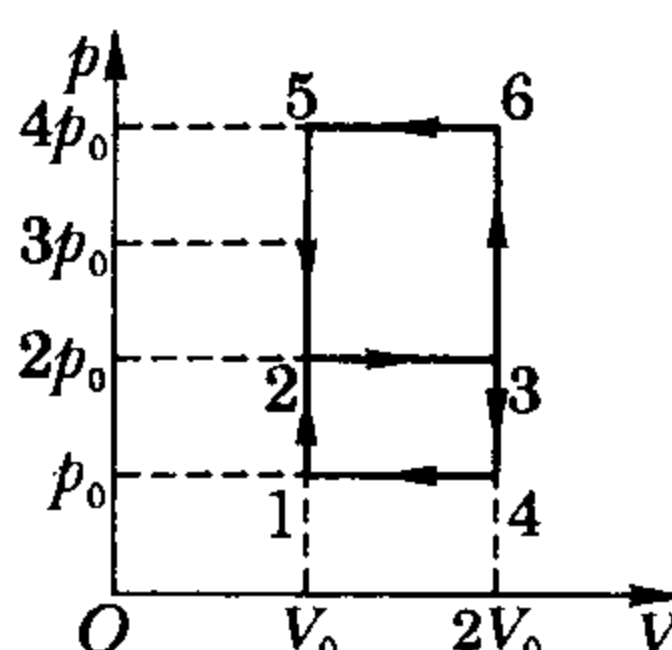


图 16-13

6. 用 N (mol) 的理想气体作为热机的工作物质, 随着热机做功, 气体的状态变化, 完成一个循环 1-2-3-1, 如图 16-14 所示, 过程 1-2 和 2-3 在图象中是直线段, 而过程 3-1 可表达为 $T = 0.5T_1(3 - BV)BV$, 式中 B 是一个未知常量, T_1 是图示坐标轴上标出的给定绝对温度. 求气体在一个循环中做的功.

7. 两个相同的绝热容器用带有活栓的绝热细管相连, 开始时活栓是关闭的, 如图 16-15, 容器 1 里在质量为 m 的活塞下方有温度 T_0 、摩尔质量 M 的单原子理想气体; 容器 2 里质量为 $m/2$ 的活塞位于容器底且没有气体. 每个容器里活塞与上顶之间是抽成真空的. 当打开活栓时容器 1 里的气体冲向容器 2 活塞下方, 于是此活塞开始上升 (平衡时未及上顶), 不计摩擦, 计算当活栓打开且建立平衡后气体的温度 T , 取 $\frac{m}{nM} = 5$.

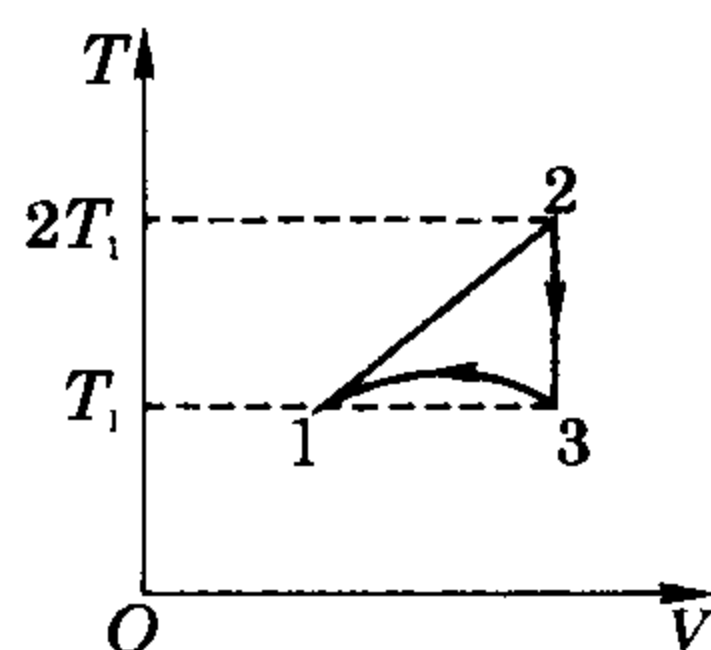


图 16-14

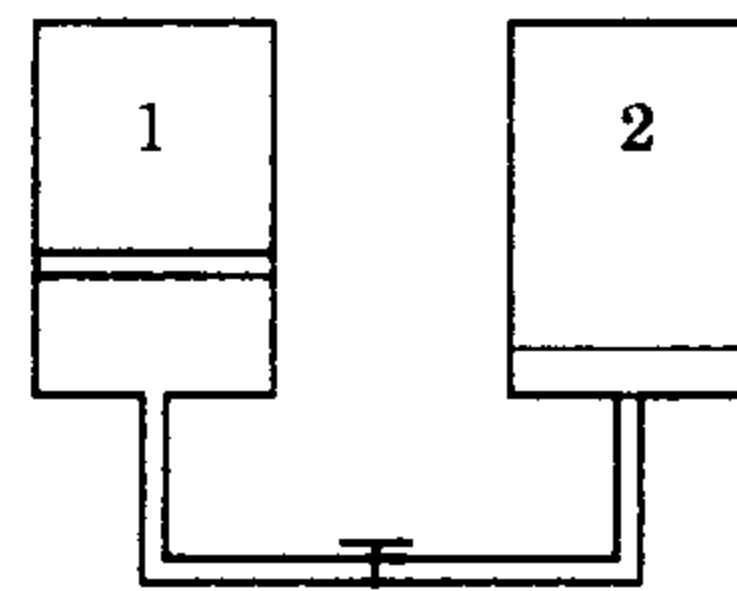


图 16-15

8. 一反复循环运转的装置在水流速度为 $u = 0.1$ m/s 的海洋上将大海的热能转化为机械能. 考虑深度 $h = 1$ km 的海水最上层的温度 $T_1 = 300$ K, 而与水面相邻的空气温度为 $T_2 = 280$ K. 装置在垂直于水流方向上的宽度为 $L = 1$ km. 估计该装置所能提供的最大功率, 已知水的比热容为 $c = 4200$ J/(kg · K), 水的密度 $\rho = 10^3$ kg/m³.

9. 在大气压下用电流加热一个绝热金属片, 使其在恒定的功率 P 下获得电热能, 由此而导致的金属片绝对温度 T 随时间 t 的增长关系为 $T(t) = T_0[1 + \alpha(t - t_0)]^{1/4}$. 其中 T_0 、 α 、 t_0 均为常量. 求金属片热容量

$C_p(T)$. (本题讨论内容, 自然只在一定的温度范围内适用)

10. 某空调器按卡诺循环运转, 其中的做功装置连续工作时所提供的功率为 P_0 .

(1) 夏天, 室外温度恒为 T_1 , 启动空调器连续工作, 最后可将室温降至恒定的 T_2 . 室外通过热传导在单位时间内向室内传输的热量正比于 $(T_1 - T_2)$ (牛顿冷却定律), 比例系数为 A . 试用 T_1 、 P_0 和 A 来表示 T_2 .

(2) 当室外温度为 30°C 时, 若这台空调器只有 30% 的时间处于工作状态, 则室温可维持在 20°C . 试问室外温度最高为多少时, 用此空调器仍可使室温维持在 20°C ?

(3) 冬天, 可将空调器吸热、放热反向. 试问室外温度最低为多少时, 用此空调器可使室温在 20°C ?

11. 由 ν_1 摩尔的单原子分子理想气体与 ν_2 摩尔双原子分子理想气体混合组成某种理想气体, 已知该混合理想气体在常温下的绝热方程为 $pV^{11/7}$ 常量. 试求 ν_1 与 ν_2 的比值 α .

12. 一个高为 152 cm 的底部封闭的直玻璃管中下半部充满双原子分子理想气体, 上半部是水银且玻璃管顶部开口, 对气体缓慢加热, 到所有的水银被排出管外时, 封闭气体的摩尔热容随体积如何变化? 传递给气体的总热量是多少? (大气压强 $p_0 = 76 \text{ cmHg}$)

13. 设热气球具有不变的容积 $V_B = 1.1 \text{ m}^3$, 气球蒙皮体积与 V_B 相比可忽略不计, 蒙皮的质量为 $m_H = 0.187 \text{ kg}$, 在外界气温 $t_1 = 20^\circ\text{C}$, 正常外界大气压 $p_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 的条件下, 气球开始升空, 此时外界大气的密度是 $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$. (1) 试问气球内部的热空气的温度 t_2 应为多少, 才能使气球刚好浮起? (2) 先把气球系在地面上, 并把其内部的空气加热到稳定温度 $t_3 = 110^\circ\text{C}$, 试问气球释放升空时的初始加速度 a 等于多少? (不计空气阻力) (3) 将气球下端通气口扎紧, 使气球内部的空气密度保持恒定. 在内部空气保持稳定温度 $t_3 = 110^\circ\text{C}$ 的情况下, 气球升离地面, 进入温度恒为 20°C 的等温大气层中. 试问, 在这些条件下, 气球上升到多少高度 h 能处于力学平衡状态? (空气密度随高度按玻尔兹曼规律 $\rho_h = \rho_1 e^{-mgh/kT_1}$ 分布, 式中 m 为空气分子质量, k 为玻耳兹曼常数, T 为绝对温度) (4) 在上升到第 3 问的高度 h 时, 将气球在竖直方向上拉离平衡位置 10 cm, 然后再予以释放, 试述气球将做何种运动.

参考答案

1. 由绝热膨胀有 $W = \Delta E = \frac{i}{2} NR(T_0 - T) = \frac{i}{2} NR \left(\frac{p_0 V_0}{NR} - \frac{pV}{NR} \right) = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1}$.

2. 由 $C_V N (T_1 - T_0) = C_p N (T_2 - T_0)$, $\frac{C_p}{C_V} =$

$$\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} = \frac{p_1 V_0 - p_0 V_0}{p_0 V_1 - p_0 V_0} = \frac{(p_1 - p_0) V_0}{(V_1 - V_0) p_0}$$

3. $\eta = 1 - \frac{Q_{\text{放}}}{Q_{\text{吸}}}$

$$= 1 - \frac{C_p (T_2 - T_3)}{C_V (T_1 - T_3)}$$

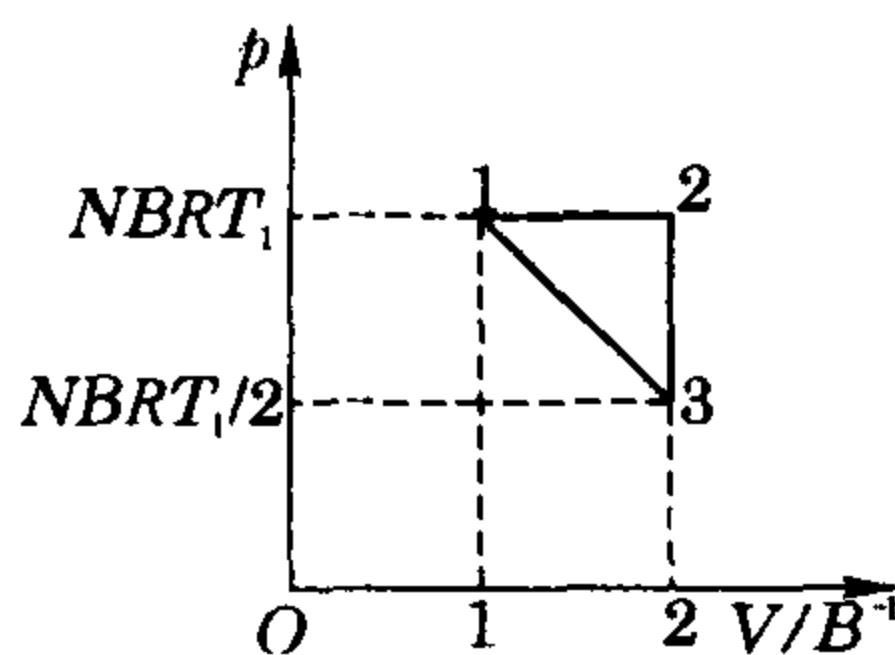
$$= 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) T_3 - T_3}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right) T_3 - T_3}$$

$$= 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1}$$

4. $Q_1 = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 5.35 \times 10^3 \text{ J}$, $Q_2 = \frac{3}{4} Q_1 = 4.01 \times 10^3 \text{ J}$, $W = Q_1 - Q_2 = 1.34 \times 10^3 \text{ J}$.

5. 过程 1234 中: $T_1 = \frac{p_0 V_0}{NR}$, $T_2 = T_4 = 2T_1$, $T_3 = 4T_1$, $Q_{1-2} = C_V N (T_2 - T_1)$, $Q_{2-3} = C_p N (T_3 - T_2)$, 则 $Q_{1234} = N(C_p \cdot 2T_1 + C_V \cdot T_1) = \frac{13}{2} \cdot p_0 V_0$, $W_{1234} = p_0 V_0$, 则 $\eta_{1234} = \frac{2}{13}$; 同样, 过程 1564 中, $Q_{1-5} = C_V N (T_5 - T_1)$, $Q_{5-6} = C_p N (T_6 - T_5)$, 又 $T_5 = 4T_1$, $T_6 = 8T_1$, 则 $Q_{1564} = N(C_p \cdot 2T_1 - C_V \cdot T_1) = \frac{29}{2} \cdot p_0 V_0$, 而 $W_{1564} = 3p_0 V_0$, 故 $\eta_{1564} = \frac{6}{29}$, 可见 $\frac{\eta_{1564}}{\eta_{1234}} = \frac{39}{29}$.

6. 将 $T_1 = T$ 代入 1-3 过程方程 $T = 0.5 T_1 (3 - BV) BV$ 得 $V_1 = \frac{1}{B}$, $V_3 = \frac{2}{B}$, $p_1 = N \frac{RT_1}{V_1} = NBRT_1$, $p_2 = N \frac{R2T_1}{V_3} = NBRT_1 = p_1$, $p_3 = N \frac{RT_1}{V_3} = \frac{1}{2} NBRT_1$, 将 1-3 过程方程 $T = 0.5 T_1 (3 - BV) BV$ 关系转变为 p - V 关系为 $p = 0.5 NBRT_1 (3 - BV)$, 是一直线过程, 在 pV 图上描述该循环如图答 16-1, 由图知, $W = \frac{1}{2} \times \frac{1}{B} \cdot N \frac{BRT_1}{2} = \frac{N}{4} RT_1$.



图答 16-1

7. 设容器内横截面积为 S , 1 中气体原距容器底

x , 压强 $p_1 = \frac{mg}{S}$, 体积 $V_1 = xS$, 后无气体, 打开活栓平衡后, 2 中活塞静止在容器底上面 y 处, 气体压强 $p_2 = \frac{mg}{2S}$, 体积 $V_2 = yS$, 有 $\frac{mgx}{T_0} = \frac{mgy}{2T} = nR \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{nRT_0}{mg} \\ y = \frac{2nRT}{mg} \end{cases}$

气体内能增加 $\Delta E = \frac{3}{2}nR(T - T_0)$, 两活塞及气体总势能则减少 $(m + nM)g(x - \frac{y}{2})$, 由能量守恒定律得 $\frac{3}{2}nR(T - T_0) = (nM + m)g(x - \frac{y}{2})$, 将 x, y 代入得

$$T = \frac{4 + \frac{nM}{m}}{5 + \frac{2nM}{m}} T_0, \text{ 代入数据后 } T = \frac{26}{27} T_0.$$

8. 工作物质为单位时间的水流质量 $m = \rho Lhu$, $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg}$. 温度从 $T_1 \rightarrow T_2$ 的某一元过程中: $P_i = cm \cdot (T_i^{-1} - T_1) \cdot \frac{T_i - T_2}{T_i}$, 则

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n cm [(T_{i-1} - T_i) - T_2 \frac{T_{i-1} - T_i}{T_i}] = cm(T_1 - T_2) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n cm T_2 \frac{T_{i-1} - T_i}{T_i}.$$

令 $cm T_2 \frac{T_{i-1} - T_i}{T_i} = \frac{cm(T_1 - T_2) - P}{n} = \frac{A}{n} \cdot \frac{T_{i-1}}{T_i}$
 $= 1 + \frac{A}{cm T_2 n} \cdot \frac{T_1}{T_2} = (1 + \frac{A}{cm T_2 n})^n$, $n \rightarrow \infty$ 时, 得 $A = cm T_2 \ln \frac{T_1}{T_2}$, 即 $P = cm(T_1 - T_2) - cm T_2 \ln \frac{T_1}{T_2}$. 代入数据得 $P = 2.9 \times 10^8 \text{ kW}$.

9. 由热容量定义 $C_p = \frac{P \cdot \Delta t}{\Delta T}$, 而

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{T_0 [1 + \alpha(t + \Delta t - t_0)]^{\frac{1}{4}} - T_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^{\frac{1}{4}}}{\Delta t} \\ &= T_0 \{ [1 + \alpha(t - t_0)]^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} [1 + \alpha(t - t_0)]^{-\frac{3}{4}} \cdot \alpha \Delta t - [1 + \alpha(t - t_0)]^{\frac{1}{4}} \} / \Delta t \\ &= \frac{T_0 \alpha}{4} \cdot [1 + \alpha(t - t_0)]^{-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{T_0 \alpha}{4} \cdot [\frac{T_0}{T}]^3. \end{aligned}$$

得 $C_p = \frac{4P}{\alpha T_0^4} \cdot T_3.$

10. (1) 夏天, 空调为制冷机, 从室内吸热 Q_2 , 向室外放热 Q_1 , 则

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \\ P_0 = Q_1 - Q_2 \Rightarrow A(T_1 - T_2)^2 = T_2 P_0, \\ T_2 = T_1 + \left(\frac{P_0}{2A} - \sqrt{\frac{P_0}{A} T_1 + \frac{P_0^2}{4A^2}} \right), \\ Q_2 = A(T_1 - T_2). \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} A10^2 = 0.3P_0 \times 293, \\ A(T_1' - 293)^2 = P_0 \times 293. \end{cases} \Rightarrow T_1' = 38.3 \text{ }^\circ\text{C}.$

(3) 冬天, 空调为热机, 从室外吸热 Q_1' , 向室内放热 Q_2' , 且 $A(T_2 - T_1) = Q_2'$, 由

$$\begin{cases} A10^2 = 0.3P_0 \times 293, \\ A(293 - T_1'') = P_0 \cdot 293. \end{cases} \Rightarrow T_1'' = 1.7 \text{ }^\circ\text{C}.$$

11. $\frac{W+R}{C_v} = \frac{11}{7}, C_v = \frac{7}{4}R.$

$\Delta E = (v_1 + v_2)C_v \cdot \Delta T = \frac{3}{2}Rv_1 \cdot \Delta T + \frac{5}{2}Rv_2 \cdot \Delta T$, 则 $v_1 = 3v_2$, 即 $\alpha = 3$.

12. 令单位压强为 $p_0 = 76 \text{ cmHg}$, 单位体积为 $V_0 = 76S \text{ cm}$, 初始时, N 摩尔气体 $p_1 = 2, V_1 = 1$, 此后气体压强 $p = 1 + (2 - V) = 3 - V$ 是线性变化的, 由热力学第一定律, $\Delta E = Q - W, \frac{5}{2}NR\Delta T = NC \cdot \Delta T - p\Delta V$
 ①, $\therefore (3 - V)V = NRT$, 则 $\Delta T = \frac{(3 - 2V)\Delta V}{NR}$, 代入①

式中得 $C = R \frac{21 - 12V}{6 - 4V}$, 当 $V = \frac{7}{4}$ 时, $C = 0$, 说明此后不再吸热, 那么, 从体积 $V_1 = 1$ 到 $V_t = \frac{7}{4}$, 压强从 2 变为 $p_t = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$, 此时温度由气体方程得 $T_t = \frac{35}{32}T_1$, 故内能增加 $\Delta E_t = \frac{5}{2}NR\Delta T = \frac{15}{64}NRT_1 = \frac{15}{32}p_0V_0$; 气体做功 $W = \frac{2 + (3 - \frac{7}{4})}{2} \times (\frac{7}{4} - 1) = \frac{39}{32}p_0V_0$; 故吸收热量 $Q = \frac{15 + 39}{32}p_0V_0 = \frac{27}{16}p_0V_0$.

13. (1) 由 $\begin{cases} m_{HG} = (\rho_1 - \rho_2)V_{BG}, \\ \rho_1 T_1 = \rho_2 T_2. \end{cases}$ 得
 $t_2 = 68.35 \text{ }^\circ\text{C}$;
 (2) 由 $\begin{cases} \rho_1 T_1 = \rho_3 T_3, \\ (\rho_1 - \rho_3)V_{BG} - m_{HG} = (m_H + \rho_3 V_B)a \end{cases} \Rightarrow a = 1.003 \text{ m/s}^2.$

(3) 此处大气密度设为 ρ_h , 有

$$\rho_h V_{BG} = m_{HG} + \rho_3 V_{BG}, \rho_h = \frac{m_H + \rho_3 V_B}{V_B} = \rho_1 e^{-mgh/kT_1},$$

则 $h = \frac{kT_1}{mg} \ln \frac{\rho_1 \cdot V_B}{m_H + \rho_3 V_B} \approx 827 \text{ m}.$

(4) 对高度为 h 的平衡位置有一小位移 x 时, 所受合力

$$\begin{aligned} \Sigma F &= [\rho_{h+x} V_B - (m_H + \rho_3 V_B)]g \\ &= [\rho_{h+x} V_B - \rho_h V_B]g \\ &= \rho_1 V_{BG} [e^{-mg(h+x)/kT_1} - e^{-mgh/kT_1}] \\ &\approx -\frac{mg}{kT_1} \rho_1 V_{BG} \cdot x = -\frac{\rho_1^2 g^2 V_B}{p_1} \cdot x. \end{aligned}$$

因 $\frac{\rho_1^2 g^2 V_B}{p_1} = K (\approx 1.5 \times 10^{-3})$, 可知气球受力满足

$$\Sigma F = -Kx,$$

故做谐振.

竞赛辅导

专题 17 静电场：原理与方法

沈 晨

(浙江省宁波市效实中学 315010)

教你一手

在这个专题里,我们探讨有关静电场的一些重要原理以及场强、电势和电荷分布等问题的处理方法.

相对于观察者静止的电荷所产生的电场被我们称为静电场,静电场最重要的外观表现一是对进入电场的任何带电体都产生力的作用;一是当带电体在电场中移动时,电场力做功,说明静电场具有能量.电荷守恒定律、库仑定律、高斯定理、场叠加原理、唯一性原理都是反映静电场这两大表现所具性质的基本规律.

在摩擦起电、接触起电、感应起电或其他方法使物体带电的过程中,正、负电荷总是同时出现且量值一定相等,当两种等量异种电荷相遇发生中和时,物体不再带电,即一种电荷消失时必然有相等量值的异种电荷同时消失.实验证明:对一个孤立系统,电荷可在系统各部分之间迁移,但其总量保持不变——原来为零的始终为零,原来为某一量 Q 的,则始终为 Q ,此即电荷守恒定律,是物理学中的基本定律之一.在静电场中,它与电场具有能量并遵从能量守恒是相承相容的.许多静力学问题都须依据这一原理来解决.

例 1 一个金属球借助导电薄板从起电机上获得电荷,板在每次与球接触后又从起电机上带电至电量为 Q .如果球在第一次与板接触后带电量为 q ,求球可获得的最大电量.

分析与解 球在第一次与板接触后获得的电量为 q ,说明有量值为 q 的正电荷从板上转移到球上,由电荷守恒可知,此时板上电量为 $(Q-q)$,即球与板这一系统中的总电量是按 $\frac{q}{Q-q}$ 的比例分配到球上与板上的.那么,当多次操作直至最终板上电量又一次为 Q 但不能向与之接触的球迁移时(此时两者等电势),球上的电量达到最大,若设为 q_{\max} ,则应有 $\frac{q_{\max}}{Q} = \frac{q}{Q-q}$,故可求得球可获得的最大电量 $q_{\max} = \frac{qQ}{Q-q}$.

点电荷间的库仑定律,是静电学的基本定律,库仑

定律给出点电荷间相互作用力与距离平方成反比,它的内涵是很丰富的,它导致静电场是“有源场”——即我们熟悉的电场线总是从正电荷(源头)出发、到负电荷(尾间)终止的结果;它导致静电平衡的导体电荷分布在外表面而内部场强为零;它可以导出下面将做介绍的揭示静电场场强分布规律的高斯定理.

库仑力与万有引力均为平方反比力,点电荷电场与质点引力场的许多性质,具有可类比性.在专题 11 中我们整理过的关于引力场的各种结论,往往通过平移对称操作,对电场同样适用,常用模型与方法也往往是相通的.如引力场中曾被牛顿证明过的一个均匀球壳,对球壳内物质的万有引力为零,即球壳内引力场处处为零.这个结论平移到一个均匀带电球壳,则球壳内电场强度处处为零;又如,对于一个质量均匀半径为 R 的实心球,在距球心 $r (< R)$ 处质点只受到半径为 r 的球内质量的万有引力,“引力场强” $g = \frac{4G\rho\pi}{3}r$,而 r 以外的球壳(即 R 为外径 r 为内径的球壳)则对质点无引力的作用.这个结论平移到一个均匀带电、半径为 R 的实心球,在距球心 $r (< R)$ 处的场强只由半径为 r 的球内电荷贡献: $E = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}r$,而与 r 以外的球壳所带电荷无关,等等.

例 2 把两个相同的电量为 q 的点电荷固定在相距为 l 的地方,在二者中间放上第三个质量为 m 电量亦为 q 的点电荷,现沿电荷连线方向给第三个点电荷一小扰动,证明随之发生的小幅振动为简谐运动并求其周期 T .

分析与解 如图 17-1 所示, O 为等量同种正电荷



图 17-1

连线的中点,该点场强为零,则第三个电荷置于该点处于平衡,受扰动后,设其有一位移 x ,此时电荷受 A 、 B 两处点电荷的库仑力方向如图示,以位移方向为正,合

力为

$$\begin{aligned}\Sigma F &= F_A - F_B = kq^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{l}{2} + x\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2} \right] \\ &= \frac{4kq^2}{l^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{2x}{l}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2} \right],\end{aligned}$$

注意到小幅振动 $x \ll l$, $\frac{2x}{l}$ 是小量, 则有

$$\begin{aligned}\Sigma F &= \frac{4kq^2}{l^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{4x}{l}} - \frac{1}{1 - \frac{4x}{l}} \right] \\ &= \frac{4kq^2}{l^2} \left[\left(1 - \frac{4x}{l}\right) - \left(1 + \frac{4x}{l}\right) \right] \\ &= -\frac{32kq^2}{l^3} \cdot x,\end{aligned}$$

可见第三个点电荷所受合力为线性变化力且方向总与位移相反, 故为简谐运动, 周期 $T = \frac{\pi l}{2q} \sqrt{\frac{ml}{2k}}$.

场强、电势和电荷分布等问题由于数学计算的困难, 能够用初等数学精确求解的只在一些具有很强对称性的情况下. 例如点电荷及一对等量同种或异种点电荷形成的电场的场强与电势分布; 均匀带电球体内、外各点的场强与电势分布; 孤立带电导体球的电荷分布, 等等.

例 3 均匀带电球壳半径为 R , 带正电, 电量为 Q , 若在球面上划出很小一块, 它所带电量为 $q (q \ll Q)$. 试求球壳的其余部分对它的作用力.

分析与解 这个问题中, 待求力是带电球壳的内力, 且对称分布, 宜用微元法求解.

如图 17-2 所示, A 是球面上划出的很小一块面积元, 因带电量 q , 故可视为一点电荷, 其在 A 内、外两侧引起的场强大小相等设为 E_q , 方向相反. 现设球壳其余部分在 A 处的场强为 E_A , 则 A 内侧面作为球壳内部, 场强应为零, 故有

$$E_A - E_q = 0. \quad (1)$$

而 A 外侧, 由均匀球壳场强公式, 可得

$$E_A + E_q = k \cdot \frac{Q}{R^2}. \quad (2)$$

由以上两式可得 $E_A = k \cdot \frac{Q}{2R^2}$, 则点电荷 q 在 A 处所受球壳其余部分对它的力为 $F = k \cdot \frac{Qq}{2R^2}$.

例 4 一个半径为 a 的孤立的带电金属丝环, 其中心电势为 U_0 . 将此环靠近半径为 b 的接地的球, 只有环中心 O 位于球面上, 如图 17-3 所示. 试求球上感应电荷的电量.

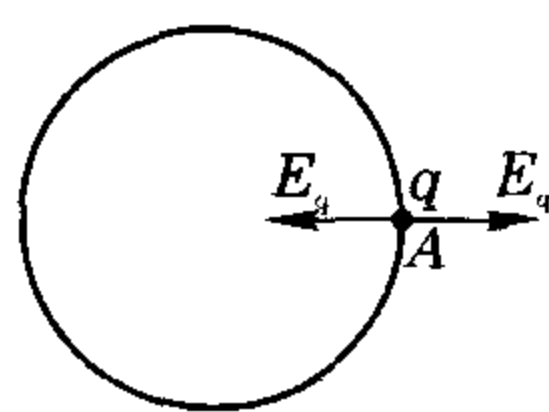


图 17-2

分析与解 将带电金属丝环分成许多相同的小面元, 每个电荷元所带电量为 q_1, q_2, \dots, q_n , 它们在环中心 O 处形成的电势 U_0

为 $U_0 = k \sum_i \frac{q_i}{a}$, 则金属丝带电量为 $q = \frac{aU_0}{k}$.

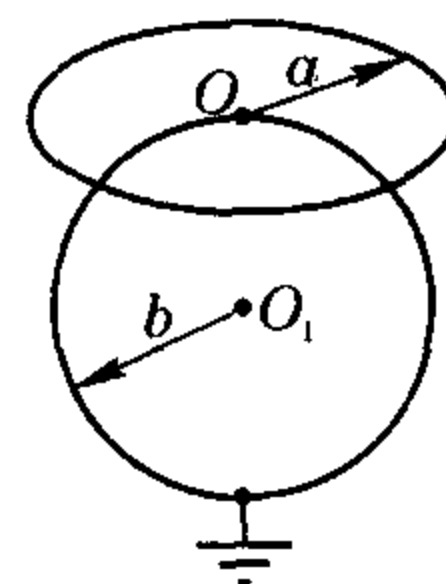


图 17-3

设接地的球上感应电量为 Q , 由于接地, 故整个球为一电势为零的等势体, 那么环上电荷及球上感应电荷在球心 O_1 处产生的电势之和应为零, 即 $0 = \frac{kq}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{kQ}{b} =$

$$\frac{aU_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{kQ}{b}, \text{ 得 } Q = -\frac{abU_0}{k\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

现在, 我们从库仑定律与场的叠加原理导出静电学的另一条基本规律——高斯定理.

我们知道, 用电场线描述电场时, 电场线的疏密表示电场的强弱, 若场中某面元上有条电场线垂直穿过,

则 $E = \frac{\Phi_e}{S}$, Φ_e 称为电通量, 并以正、负表示电场线从该面穿出或穿入. 先考察点电荷 q

的电场, 如图 17-4 所示, S 为以点电荷 q 为中心包围点电荷的球面, S' 为包围点电荷 q

的任意封闭曲面, 若球面半径为 r , 则球面上各处的场强大小均为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 式中 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$

$\approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$, 称为真空中的介电常数. 显然, 从该球面穿出的电通量 $\Phi_e = ES$

$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$. 根据电

场线的性质——在电场中没有电荷处的电场线是连续的、不相交的, 可以肯定包围点电荷 q 的任意封闭曲面 S' 上的电通量也是 $\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$. 若如图 17-5 所示, 电荷 q

在闭合曲面 S'' 之外, 由电场线性质可知穿入曲面的电场线条数与穿出该曲面的电场线条数相等, 那么整个封闭曲面的总电通量为零. 根据电场叠加原理, 将上述结果推广到任意点电荷系构成的静电场: 若闭合曲面

包围的电荷的代数之和为 $\sum_i q_i$, 则 $\Phi_e = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$, 在真空中的任何静电场中, 通过任一闭合曲面的电通量等于这闭合曲面所包围的电荷的代数之和的 $\frac{1}{\epsilon_0}$, 这就是真空中静

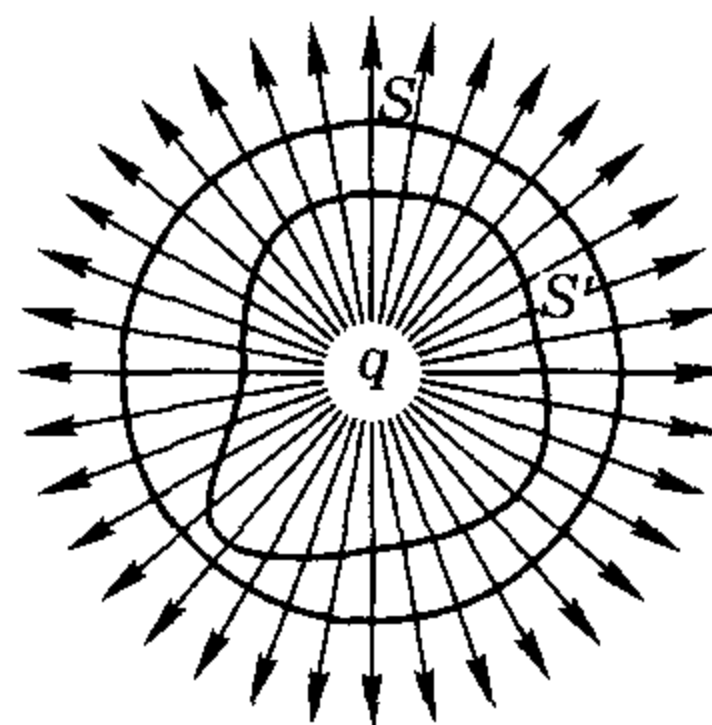


图 17-4

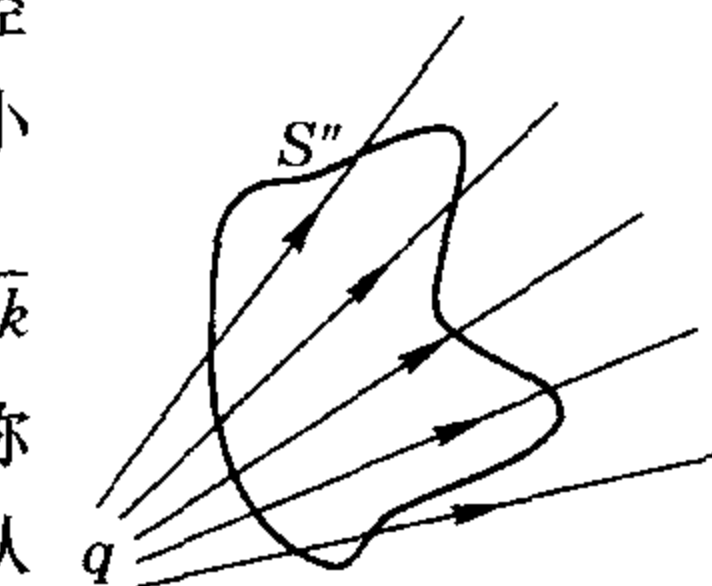


图 17-5

电场的高斯定理。

当电荷分布具有某些特殊对称性时,往往可应用高斯定理简便地计算场强。

例 5 半径为 r 的圆板,在与其中心 O 距离为 d 处置一点电荷 q ,试求板上的电通量。

分析与解 如图 17-6 所示,以点电荷 q 为球心,以 $R = \sqrt{d^2 + r^2}$ 为半径作一球面,显然,通过圆板的电通量与以圆板周界为周界的球冠面的电通量是相同的,球面上电通量 $\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$,则球冠面上电通量 $\Phi_e' = \frac{2\pi R(R-d)}{4\pi R^2} \Phi_e =$

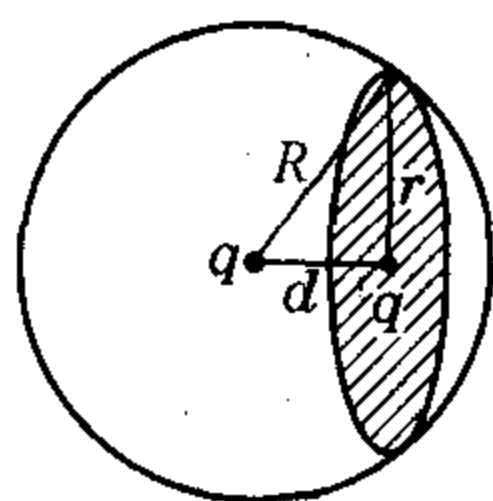


图 17-6

$\frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{R}\right)$,那么圆板上的电通量即为

$$\Phi_e' = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}}\right).$$

例 6 在相距 d 的两根平行细长导线上均匀地分布有异种电荷,其线密度为 $+\lambda$ 及 $-\lambda$. 求在对称平面上与导线所在平面相距为 x 的一点 P 的电场强度。

分析与解 我们先利用高斯定理求出与细长导线距离为 r 处的电场强度. 如图 17-7 所示,细长导线均匀带电,由对称性知各点场强方向均沿法向,电场线分布辐向均匀. 现取一以细导线为几何轴、底面半径为 r 、高 $\Delta l \rightarrow 0$ 的圆柱面,由高斯定理得该面上的电通量 $\Phi_e = \frac{\lambda \cdot \Delta l}{\epsilon_0}$,

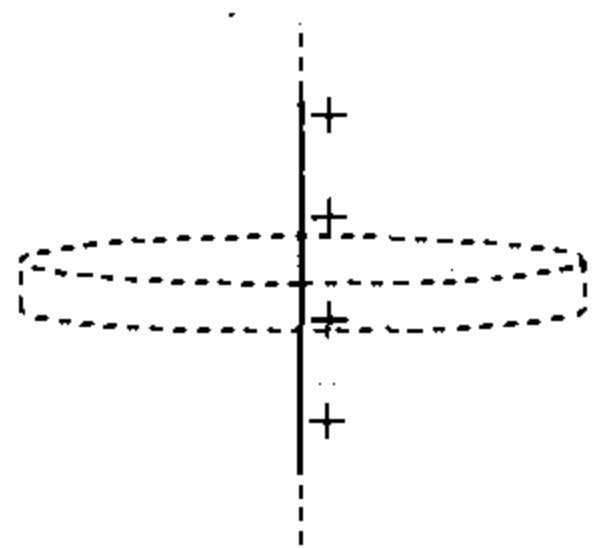


图 17-7

则距轴心 r 的圆柱面上的电场强度

$$E = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{\lambda \cdot \Delta l}{2\epsilon_0 \pi r \cdot \Delta l} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \pi r}.$$

本题中, P 点场强是两线电荷在该点电场的叠加,如图 17-8 所示,两线电荷在 P 点引起的场强大小相同:

$$E_1 = E_2 = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \pi \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}},$$

方向如图 17-8 所示;合场强

$$E_p = 2E_1 \cdot \frac{d}{2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}}$$

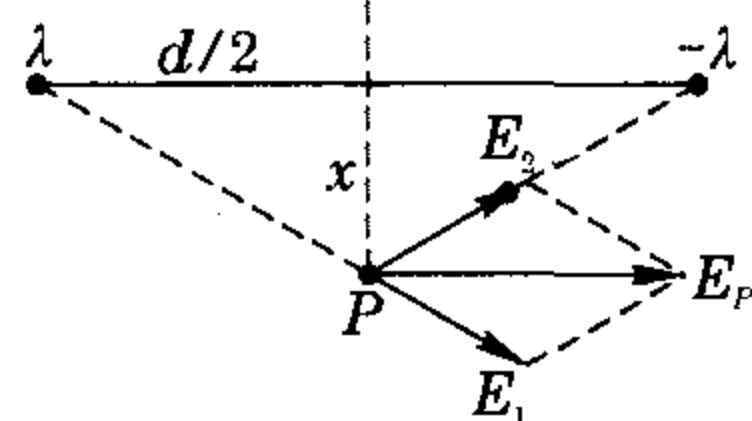


图 17-8

$$= 2 \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \pi \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}} \cdot \frac{d}{2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}}$$

$$= \frac{2\lambda d}{\epsilon_0 \pi (d^2 + 4x^2)}.$$

我们面对的各种具体问题,往往情况复杂、对称破

缺. 解决这类复杂问题的一条重要途径,便是依据静电场问题的唯一性原理进行等效变换,设法将复杂问题化解为符合对称性要求的基本问题,以便利用已知规律最终得解。

等效处理的办法大致可分为两类:

A. 对不具有对称性的带电体,用若干具有对称性的带电体做等效替代;或是对具有弱对称性的带电体,用具有更强对称性的带电体进行等效替代. 这种方法我们称之为“等效对称替代法”。

B. 对实际导体面或电介质面上的不均匀分布的电荷,用虚设的点电荷或均匀带电球进行等效替代,从而将一给定的静电场变换成另一易于计算的等效静电场. 这种方法我们称之为“等效电像变换法”。

先示例“等效对称替代法”。

例 7 如图 17-9 所示,将表面均匀带正电的半球,沿线分成两部分,然后将这两部分移开很远的距离,设分开后的球表面仍均匀带电,试比较 A' 点与 A'' 点电场强度的大小。

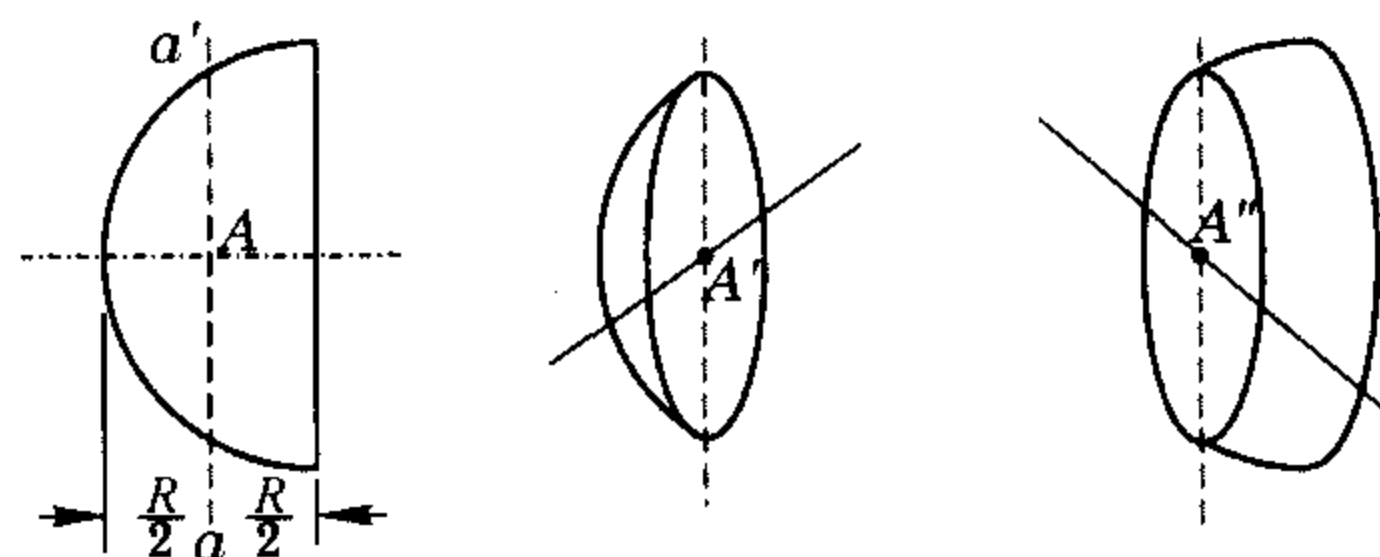


图 17-9

分析与解 球冠面上正电荷在 A' 点产生的电场以 E_1 示,球层面上正电荷在 A'' 点产生的电场以 E_2 示,由对称性容易确定 E_1 方向向右, E_2 方向向左,如图 17-10 所示.乍一看,却似乎无法比较两部分不规则带电体产生的电场强度的大小,须设法作等效替代,创造出可运用已知规律的条件。

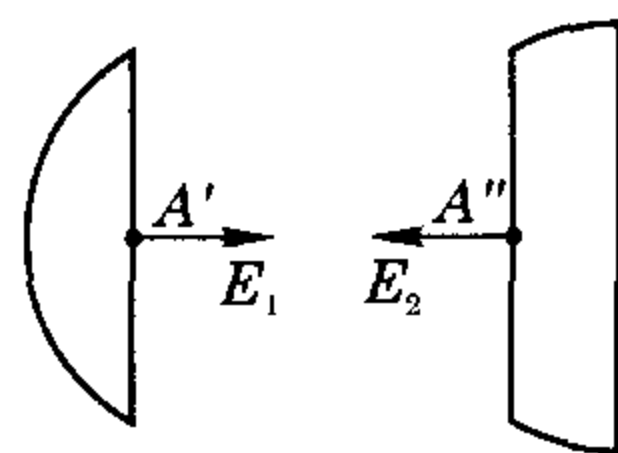


图 17-10

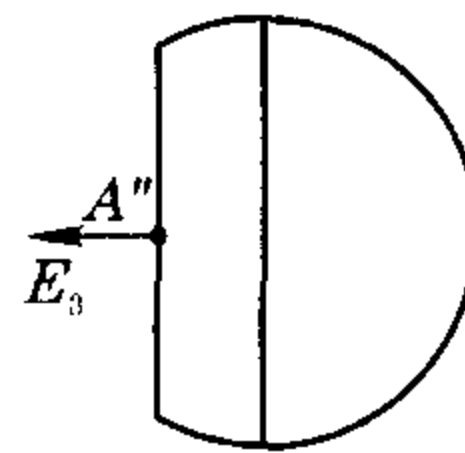


图 17-11

如图 17-11 所示,设想以另一表面均匀分布正电荷的完全相同的半球,附在球层上构成球缺,显然,球缺在 A'' 点产生的电场强度 E_3 大于 E_2 ;球缺和球冠构成一完整球,由于均匀带电球面内电场强度处处为零,那么, E_1 与 E_3 必然大小相等方向相反,于是,我们可确定球冠面电荷在 A' 点产生的电场强度 E_1 大于球层面电荷在 A'' 点产生的电场强度 E_2 。

例 8 如图 17-12 所示,正四面体 $ABCD$ 各面为导体,但又彼此绝缘. 已知带电后四个面的静电势分别

为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 和 φ_4 , 求四面体中心 O 点的电势 φ_0 .

分析与解 若正四面体的四个面电势相同, 四面体就是一个等势体, 其中心点电势即可确定. 现正四面体 $ABCD$ 各面静电势均不同, 其中心点的电势 φ_0 难以直接确定, 我们来进行等效替代: 另有同样的三个四个面的静电势分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 和 φ_4 的正四面体, 将它们适当地叠在一起, 使四个面的电势均为 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, 中心点 O 共点, 这个叠加而成的四面体是等势体, 其中心 O 点电势为 $4\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, 于是求得 $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}$.

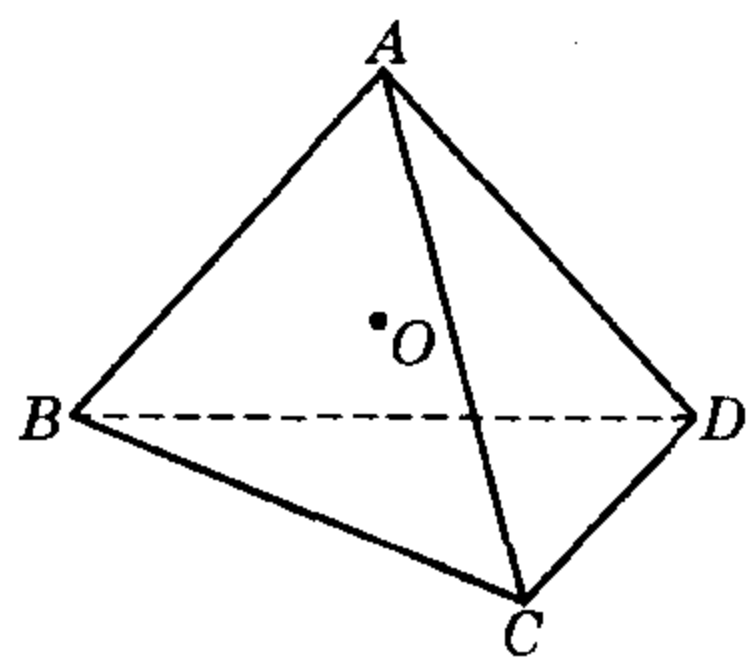


图 17-12

例 9 如图 17-13 所示, 在半径为 R 、体密度为 ρ 的均匀带电球体内部挖去半径为 r 的一个小球, 小球球心 O' 与大球球心 O 相距为 a , 试求 O' 点的场强, 并证明空腔内电场均匀.

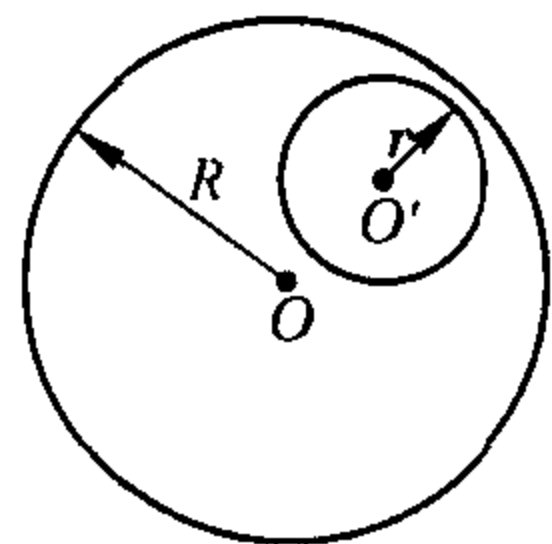


图 17-13

分析与解 挖去一个小球而带有空腔的带电体球对称性被破坏, 故难以直接运用库仑定律求出 O' 处的电场强度, 须通过等效变换, 将该带电体转化为若干个具有球对称性的带电体.

设想空腔部分的静电场构成是由体电荷密度为 ρ 与 $-\rho$ 的两个小均匀带电球复合而成, 于是原带电体便被体电荷密度为 ρ 、半径为 R 的均匀带正电大球与位于空腔部分的、体密度为 $-\rho$ 、半径为 r 的均匀带负电小球替代, 即: 将空腔中的电场视作上述两个带电球引起的电场的叠加. 由于此两球的电场均具有辐向对称性, 故问题可解. 体电荷密度为 $-\rho$ 的小球在其球心 O' 产生的场强为零; 体电荷密度为 ρ 的大球在 O' 处产

生的场强大小为 $E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}$, 则 O' 点的电场强度 $E_{O'} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}$, 方向由 O 点指向 O' 点.

为了证明空腔内电场均匀, 我们任取空腔内一点 A , A 点对 O 的矢径为 r_1 , 对 O' 的矢径为 r_2 , 如图 17-14 所示, 图中 E_1 是大球在 A 点引起的场强, E_2 是小球在 A 点引起的场强, 则 A 点场强为 $E_A = E_1 + E_2 =$

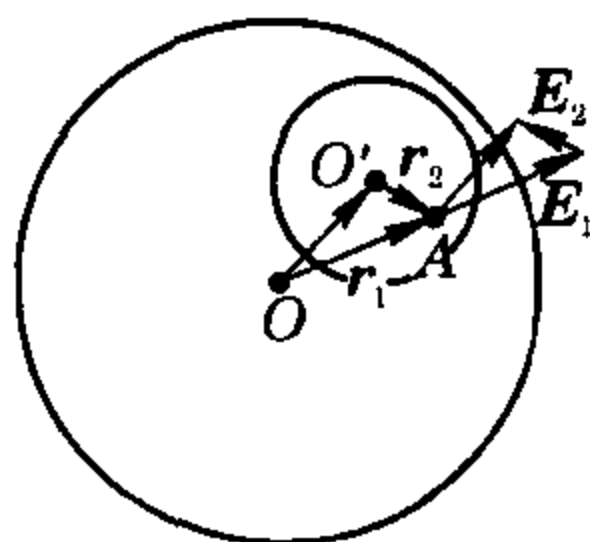


图 17-14

$$\frac{\rho \frac{4}{3}\pi r_1^3}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cdot r_1 - \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r_2^3}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cdot r_2 =$$

$\frac{\rho}{3\epsilon_0}(r_1 - r_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}a$, 可知空腔内任一点的场强方向均沿矢径 a , 即从 O 点指向 O' 点, 大小均为 $E = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}$, 可见为一匀强场.

例 10 如图 17-15 所示, 在半径为 R 的细圆环上分布有不能移动的正电荷, 总电量为 Q , AB 是它的一条直径, 如果要使 AB 上的场强处处为零, 则圆环上的电荷应该如何分布?

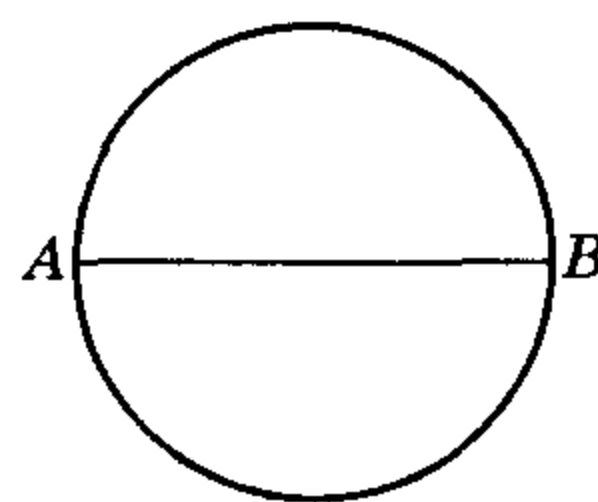


图 17-15

分析与解 由于要求直径 AB 上的场强处处为零, 而圆环只对圆心 O 具有对称性, 故可知欲满足题设条件, 圆环上的电荷分布是不均匀的. 我们知道, 均匀带电球壳内部的场强处处为零, 那么其直径上各点的场强自然为零了, 现要使带电圆环在其直径上各点场强具有同样的效果, 那么环上的电荷分布一定与均匀带电球面的电荷分布有着某种等效关系.

我们对直径 AB 上场强的构成作一分析: 如图 17-16 所示, 在均匀带电球面的直径 AB 上任取一点 M , 若用与 AB 垂直的平面分割球面, 可得一系列的圆环带, 根据对称性可知, 每一均匀带电小环在 M 点产生的场强矢量必沿 AB , 而所有小环在 M 点的合场强为零. 现设想把原均匀分布在每一小环带上的电荷均对半“撸”到该小环带上两弧线元 P_1 和 P_2 上, 整个电量 Q 对称地分布到直径 AB 两侧的半圆环上, 则 M 点的场强不变, 直径 AB 上的电场强度仍处处为零, 不过细圆环上电荷的分布显然是不均匀的.

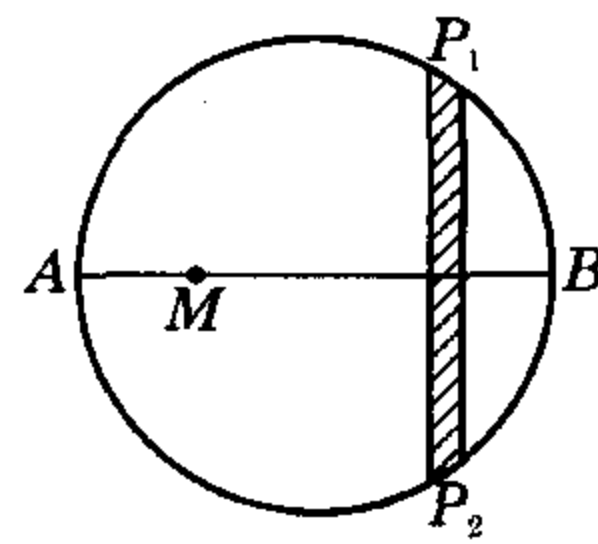


图 17-16

如图 17-17 所示, 任取圆环上一点 P , OP 与 AB 的夹角为 θ . 取 P 处极小段弧长 Δl , 其上分布的电量对应于半径为 R 、电量为 Q 的均匀带电球面上用垂直于直径 AB 的平面截出的宽 Δl 、周长 $2\pi R \sin \theta$ 的小环带上所带电量的一半, 即

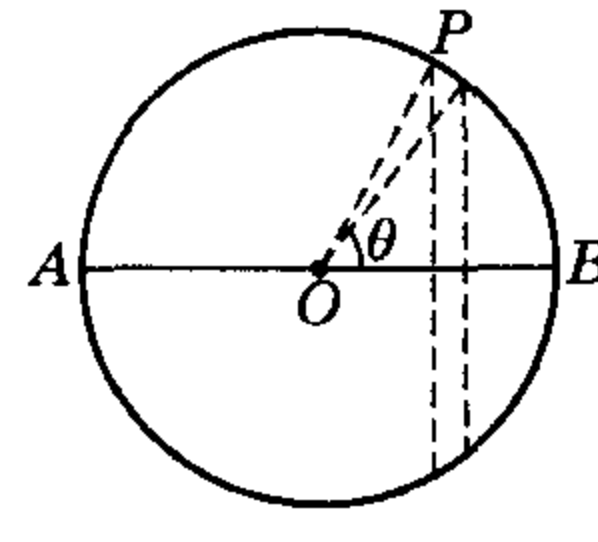


图 17-17

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot \Delta l \\ &= \frac{Q \sin \theta}{4R} \cdot \Delta l, \end{aligned}$$

那么, 该元弧段上的电荷线密度为 $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{Q}{4R} \cdot \sin \theta$. 这就是令半径为 R 的细圆环一径上场强处处为零, 电量 Q 在环上分布应遵从的规律.

下面展示“电像变换法”.

例 11 如图 17-18 所示,无限大的接地导体板,在距板 d 处的 A 点有一个电量为 Q 的正电荷,求板上的感应电荷对点电荷 Q 的作用力.

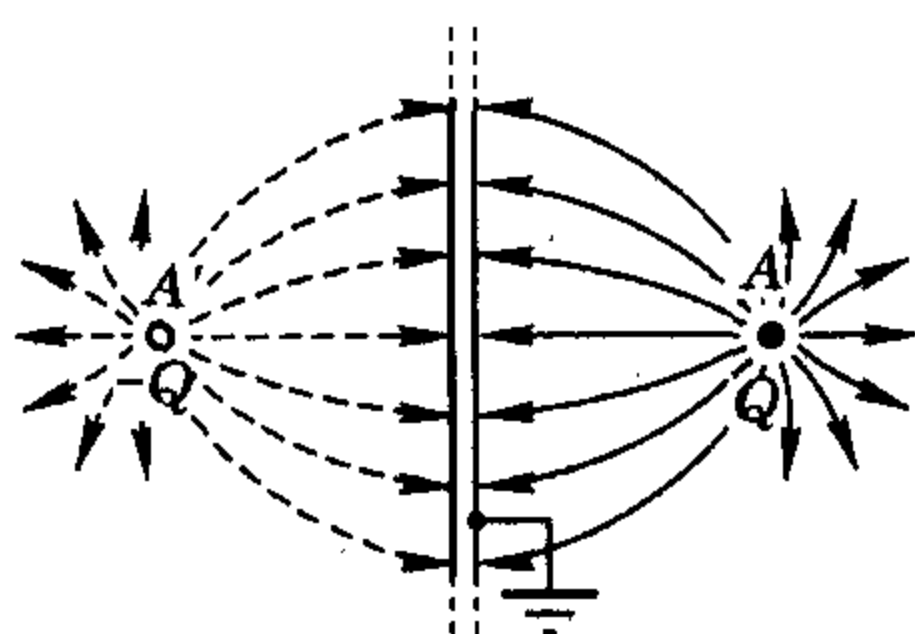


图 17-18

分析与解 由于导体板接地,板上的电势为零,在点电荷 Q 的作用下,板的右侧出现感应电荷,但其电量及分布未知,故无法直接求出它们对电荷 Q 的作用力.然而,由于导体为一等势面,从点电荷 Q 出发的电场线应处处与导体面正交而终止,因而导体板右侧电场线分布大致如图 17-18 所示.这使我们联想到等量异种电荷的电场:两点电荷连线的垂直平分面为一零电势面,电场线还包括图 17-18 中用虚线画出的另一半.因此,导体板上感应电荷对板右侧电场的影响,可用与点电荷 Q 关于导体面成镜像对称的另一虚设点电荷 $-Q$ 替代,板上感应电荷对 Q 的作用亦等效于像电荷 $-Q$ 对 Q 发生的作用,于是,由库仑定律容易得到,板上感应电荷对点电荷 Q 的作用力大小为 $F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$.

这里求解所用的方法,多用于接地导体或保持电势不变的导体外有一个或多个点电荷的情况.通常根据导体面及点电荷的几何位置关系,推断在所考察区域适当放置一个或多个量值合适的电荷,使之能够满足导体面上给定的场强及电势条件、模拟感应电荷对空间电场的贡献.这些虚拟的电荷称为像电荷,通过等效电像变换的方法,使实际问题易于解决,而其可靠性则源于静电学的重要原理——唯一性原理.

例 12 如图 17-19 所示,设在一接地导体球的右侧 P 点,有一点电荷 q ,它与球心的距离为 d ,球的半径为 R ,求导体球上的感应电荷为多少?点电荷 q 受到的电场力为多大?

分析与解 先来确定导体球上感应电荷的像电荷电量及位置.如图 17-19 所示,感应电荷在球上的分布不均匀,靠近 P 点一侧较密,关于 OP 对称,故大致位置在 OP 连线上,距 O 为 r 的 P' 点.由于导体球

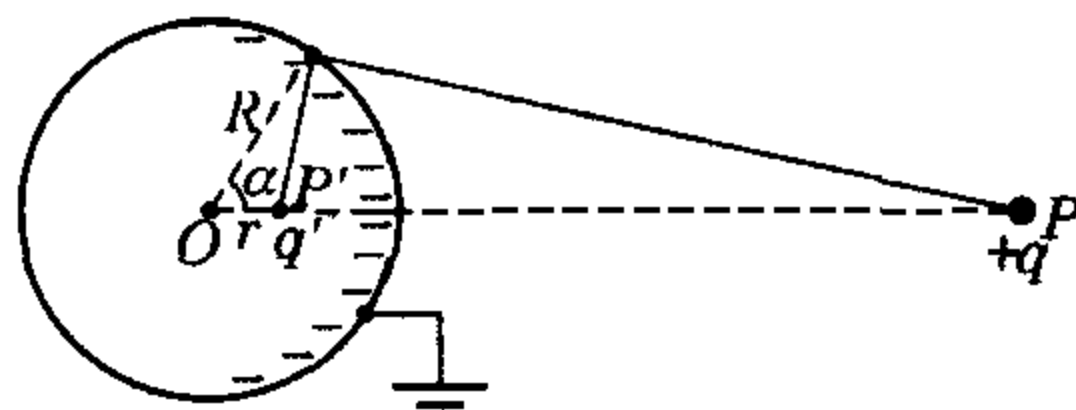


图 17-19

接地,球心 O 处的电势为零,根据电势叠加原理可知,导体表面感应电荷总电量 q' 在 O 点引起的电势与点电荷 q 在 O 点引起的电势之和为零,即有 $\frac{kq}{d} + \frac{kq'}{R} = 0$,根

据唯一性原理可知,等效的像电荷电量即此.像电荷位置,令其在球面上任意点引起的电势与 q 在同一点的电势叠加为零,即满足

$$\frac{kq'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}} = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha}}$$

将 $q' = -\frac{R}{d}q$ 代入,两边平方后有

$$d^2(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha) = R^2(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha),$$

$$d^2 r^2 - R^4 = (2Rrd^2 - 2R^3 d)\cos\alpha,$$

对于任意的 α 角,等式均成立,则 $r = \frac{R^2}{d}$,这样确定了像电荷的位置,于是可求出球表面感应电荷对 q 的作用力——它等同于像电荷对 q 的库仑力 $F = \frac{kq'q}{(d-r)^2} = \frac{kRdq^2}{(d^2 - R^2)^2}$,是引力.

电荷与电场的相互关系包括两个方面:静电荷产生静电场及电荷在静电场中受力.电荷在给定电场中受到力的作用将发生运动,在经典物理范畴内,带电质点的运动遵守牛顿运动定律.带电粒子在静电场中的运动有着广泛的科技应用背景,如利用电子枪或离子枪加速带电粒子、示波器和电子显微镜中采用静电场来聚焦粒子束、用电子束或离子束做技术加工、静电除尘与静电喷漆,等等.这里援引第 32 届 IPhO 的一道试题,介绍带电粒子在静电场中运动的一种实际应用.

例 13 如图 17-20 所示,速调管用于甚高频信号的放大.速调管主要由两个相距为 b 的腔组成,每个腔有一对平行板.初始速度为 v_0 的一束电子通过板上的小孔横穿整个系统.要放大的高频信号以一定的相位差(一个周期对应于 2π 相位)分别加在两对电极板上,从而在每个腔中产生交变水平电场.当输入腔中的电场方向向右时,进入腔中的电子被减速;反之,电场方向向左时,电子被加速.这样,从输入腔中射出的电子经过一定的距离后将

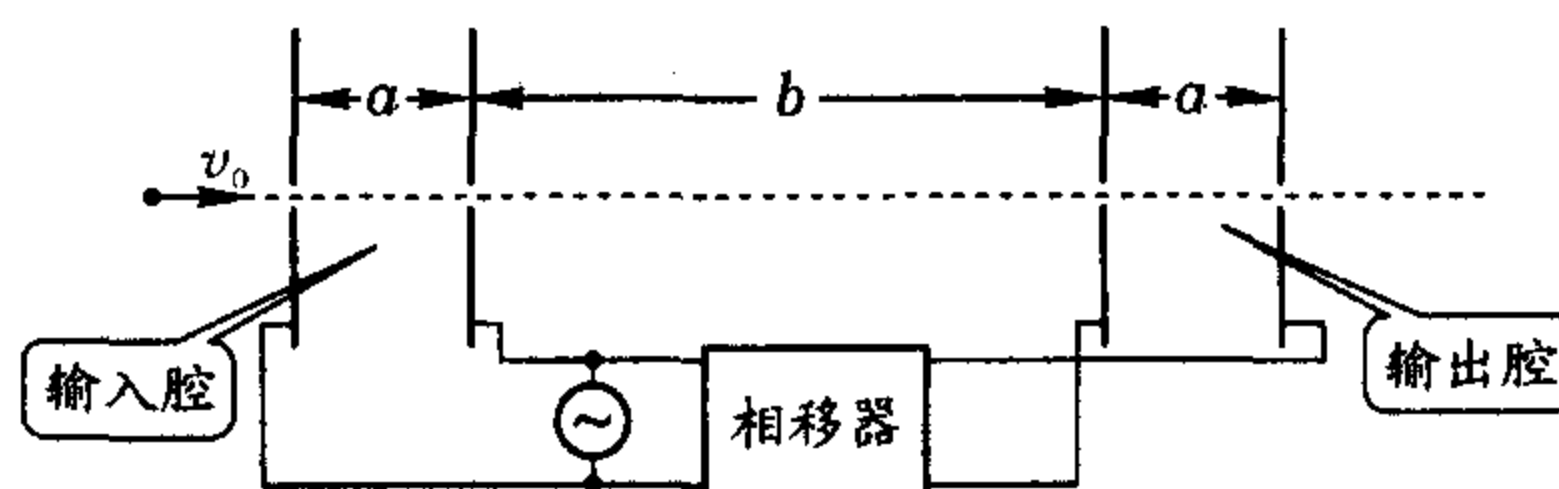


图 17-20

叠加成短电子束.如果输出腔位于该短电子束形成处,那么,只要加于其上的电压相位选择恰当,输出腔中的电场将从电子束中吸收能量.设电压信号为周期 $T = 1.0 \times 10^{-9}$ s、电压 $U = 0.5$ V 的方波.电子束的初始速度 $v_0 = 2.0 \times 10^6$ m/s,电子荷质比 $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg.假定间距 a 很小,电子渡越腔的时间可忽略不计.保留 4 位有效数字,计算:(1)使电子能叠加成短电子束的距

离 b 。(2)由相移器提供的所需的输出腔与输入腔之间的相位差。

分析与解 (1)通过输入腔的电子在电场方向向左时被电场加速,在电场方向向右时被减速,由动能定理 $\pm eU = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ 得电子离开输入腔时速度 $v_i = \sqrt{v_0^2 \pm \frac{2eU}{m}}$;要形成短电子束,应使后半周期通过输入腔被加速的电子经过一段距离 b 在输出腔“追”上前半周期通过输入腔被减速的电子,从而叠加成短电子束,故此应有

$$\frac{b}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}} + \frac{T}{2} = \frac{b}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}}}$$

即

$$b = \frac{\sqrt{v_0^4 - (\frac{2eU}{m})^2}}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}}} \cdot \frac{T}{2}$$

$$= \frac{1.0 \times 10^{-1}}{2} \times 10^{-9} \times \frac{1.956 \times 2.044}{2.044 - 1.956} \times 10^6 \text{ m}$$

$$\approx 2.272 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

(2)为使输出腔中的电场从短电子束中吸收能量,应使电场方向向右,电场力对电子束做负功.当输入腔电场方向向右时满足

$$\frac{b}{T \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}}} \cdot 2\pi \pm \Delta\varphi = 2k\pi,$$

则 $\Delta\varphi = \pm \left[\frac{b}{T \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}}} - k \right] 2\pi$

$$= \pm \left(\frac{2.272 \times 10^{-2}}{1.956 \times 10^6 \times 1.0 \times 10^{-9}} - k \right) 2\pi$$

$$= \pm (11.62 - k) 2\pi,$$

$$\Delta\varphi = \pm 0.62 \times 2\pi = \pm 223^\circ, \text{ 或 } \Delta\varphi = \pm 0.38 \times 2\pi = \pm 137^\circ.$$

👉 小试身手 👈

1. 如图 17-21 所示,正点电荷 Q_1 和正点电荷 Q_2 分别放置在 A、B 两点,两点间相距 L . 现以 L 为直径作一半圆,电荷在此半圆上有一电势最小的位置 P,设 PA 与 AB 的夹角为 α ,则 $\alpha =$ _____。(用三角函数表示)

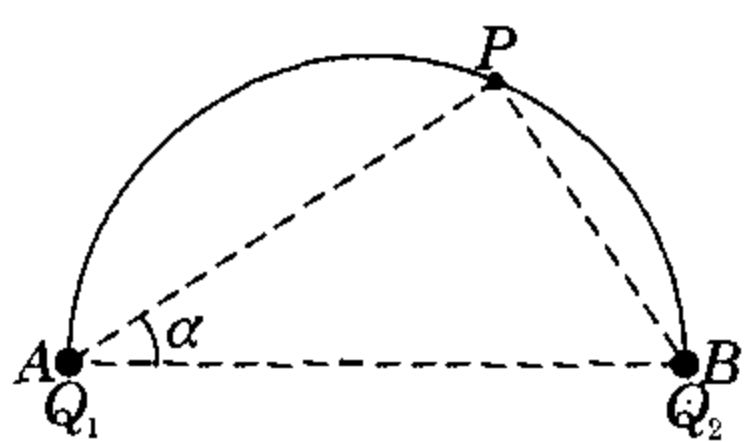


图 17-21

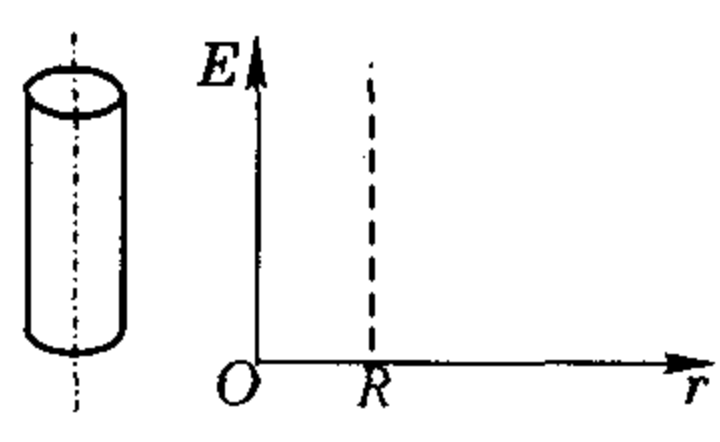


图 17-22

2. 如图 17-22 所示,有“无限长”均匀带电圆柱面,

半径为 R ,电荷面密度为 σ ,试求其场强,并作 $E(r)$ 图.

3. 在一厚度为 d 的无穷大平板层内均匀地分布有正电荷,其密度为 ρ ,求在平板层内及平板层外的电场强度 E ,并作 $E(r)$ 图.

4. 一点电荷 q 位于一立方体中心,立方体边长为 a ,试问通过立方体一面的电通量是多少? 如果点电荷移至立方体的一个角上,这时通过立方体每个面的电通量各是多少?

5. 如图 17-23 所示,电场线从正点电荷 $+q_1$ 出发,与正点电荷及负点电荷的连线成 α 角,则该电场线进入负点电荷 $-q_2$ 的角度 β 是多大?

6. 准确地画出两点电荷 $+q$ 及 $-4q$ 的电场线分布示意图.

7. 电荷均匀分布在半球面上,它在这半球的中心 O 处的电场强度等于 E_0 . 两个平面通过同一条直径,夹角为 α ,从半球中分出一部分球面,如图 17-24 所示. 试求所分出的这部分球面上(在“小瓣”上)的电荷在 O 处的电场强度 E .

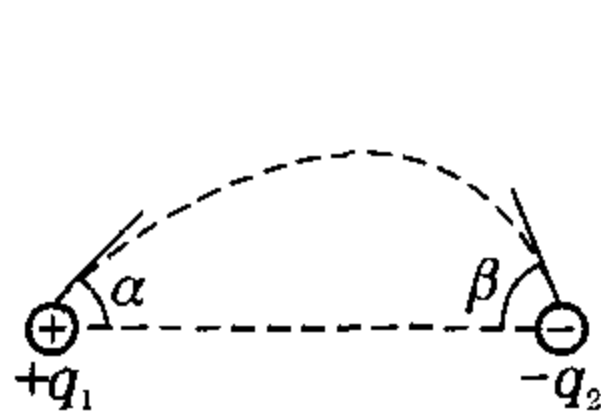


图 17-23

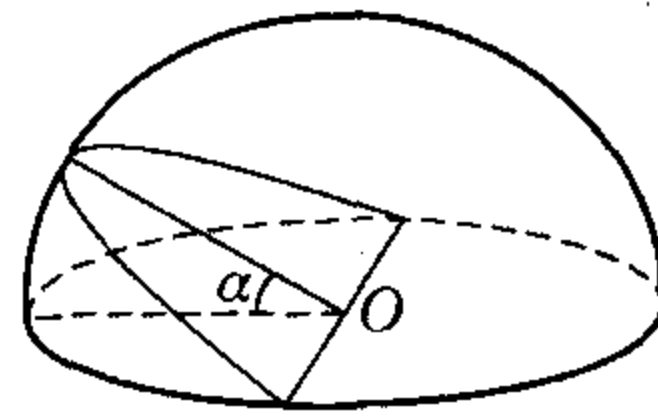


图 17-24

8. 半径为 R_2 的导电球壳包围半径为 R_1 的金属球,金属球原来具有的电势为 U ,如果让球壳接地,则金属球的电势变为多少?

9. 有两个异种点电荷,其电量之比为 n ,相互间距离为 d . 试证明它们的电场中电势为零的等势面为一球面,并求此等势面的半径及其中心与电量较小电荷的距离 r .

10. 两个电量为 q 的正点电荷位于一无穷大导体平板的同一侧,且与板的距离均为 d ,两点电荷之间的距离为 $2d$. 求在两点电荷联线的中点处电场强度的大小与方向.

11. 半径分别为 R_1 和 R_2 的两个同心半球相对放置,如图 17-25 所示,两个半球面均匀带电,电荷密度分别为 σ_1 和 σ_2 ,试求大的半球面所对应底面圆直径 AOB 上电势的分布.

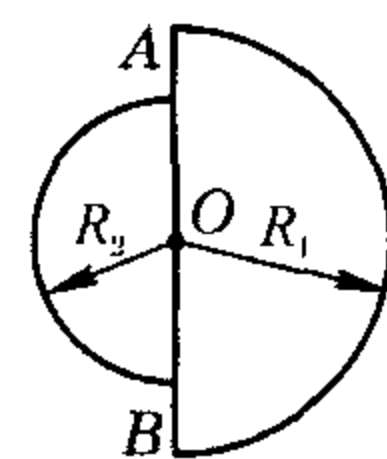


图 17-25

12. 有一半径为 R 、带电量为 Q 的均匀带电球面,试求其上的表面张力系数 σ , σ 定义为面上单位长度线段两侧各向对方施加的作用力.

13. 两个半球合在一起组成一个完整的金属球,球的半径为 R ,如图 17-26 所示,求这两个半球间的静电

斥力。

14. 如图 17-27 所示, 在一开口的原不带电的导体球壳中心 O 点有一点电荷 Q . 球壳内、外表面的半径分别为 a 和 b . 欲将电荷 Q 通过小孔缓慢地从 O 移到无穷远处, 应做多少功?

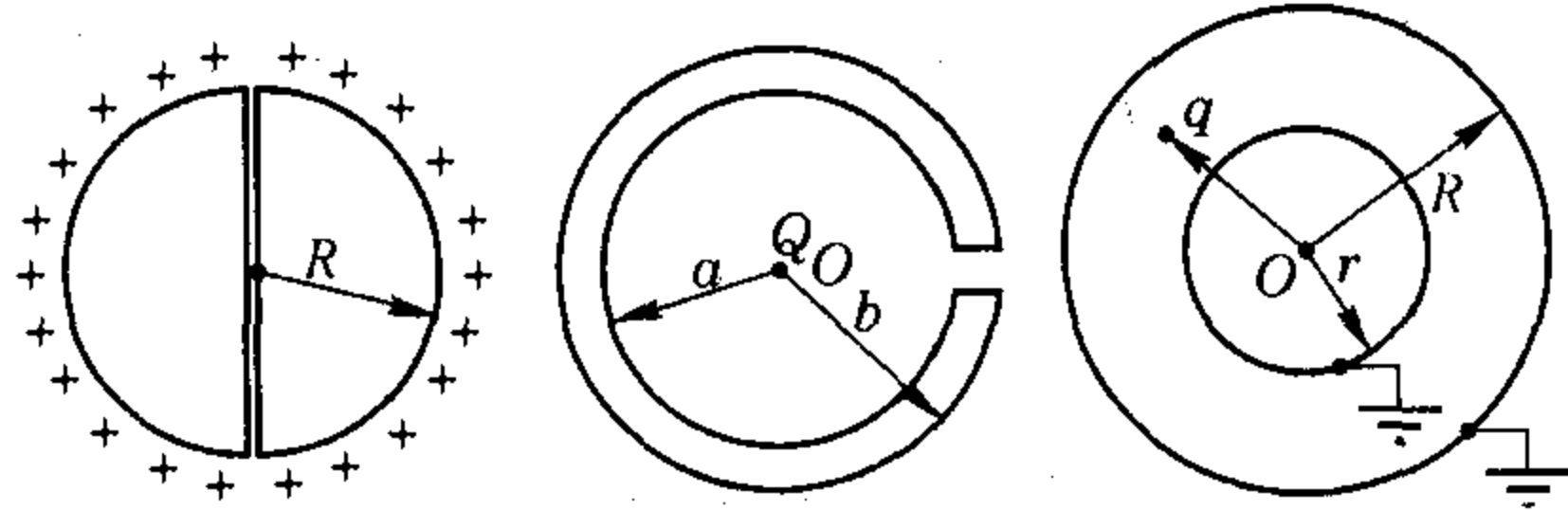


图 17-26 图 17-27 图 17-28

15. 如图 17-28 所示, 两个以 O 为球心的同心金属球壳都接地, 半径分别是 r, R . 现在离 O 为 l ($r < l < R$) 的地方放一个点电荷 q . 问两个球壳上的感应电荷的电量各是多少?

16. 如图 17-29 所示, 半径相同的两个金属球 A, B 相距很远, 原来不带电, 球 C 先与远处电池正极接触 (负极接地), 接着与球 A 接触, 再与球 B 接触; 然后又与电池正极接触, 重复上述过程, 反复不已. 已知球 C 第一次与电池接触后的带电量为 q , 第一次与 A 球接触后 A 球的带电量为 Q_1 , 求 (1) A 球与 B 球最后的带电量 Q 与 Q' ; (2) 设 $\frac{Q_1}{q} = \frac{9}{10}$, 至少经过几次与 C 球接触后, A 球的带电量可达最后带电量的一半?

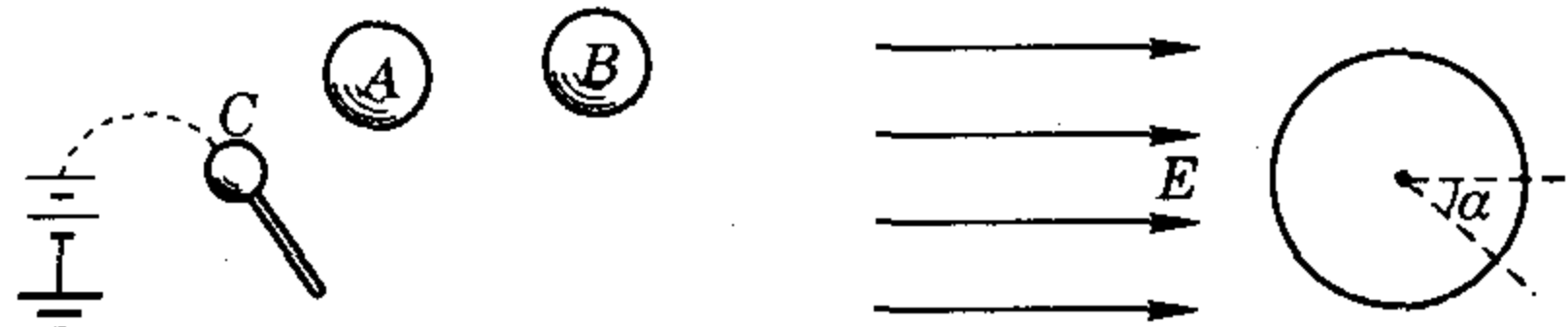


图 17-29 图 17-30

17. 在强度为 E 的均匀电场中放着一个均匀的金属球, 其半径为 R , 由于感应, 在球上产生了表面密度为 σ 的电荷, σ 与图 17-30 中标出的角 α 有关系. 求关系式 $\sigma(\alpha)$.

18. 如图 17-31 所示, 平面上有一段长为 l 的均匀带电直线 AB , 在该平面取直角坐标 Oxy , 原点 O 为 AB 中点, AB 沿 x 轴. (1) 试证明该平面上任一点 P 的电场线方向沿 $\angle APB$ 的角平分线; (2) 试求该平面上的电场线方程; (3) 试求该平面上的等势线方程.

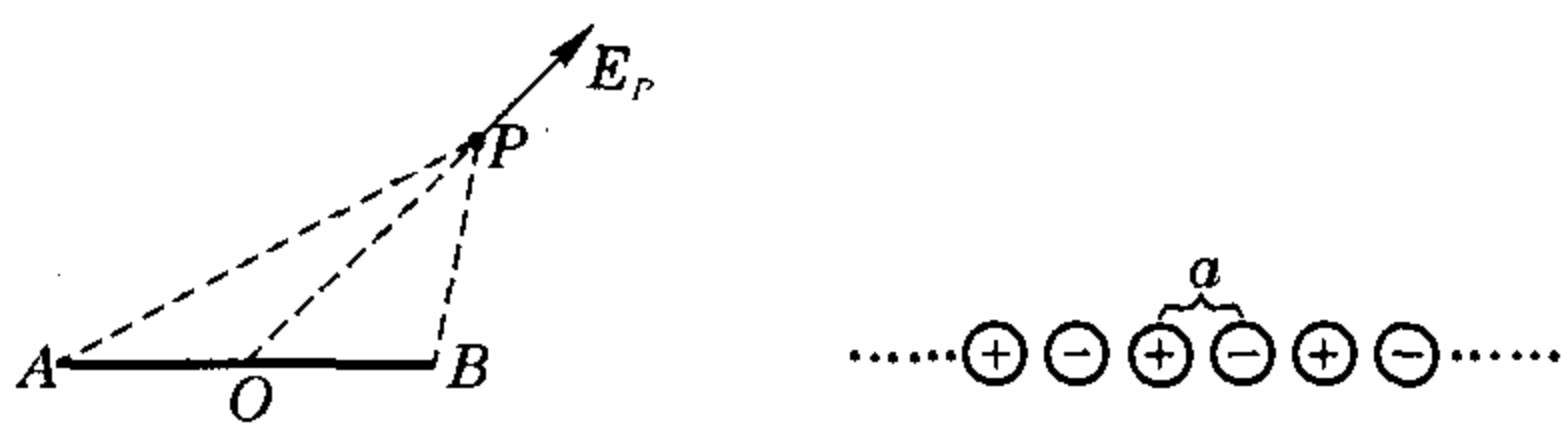


图 17-31 图 17-32

19. 如图 17-32 所示, N 个一价正离子和 N 个一

价负离子交错排列成一维点阵, 相邻离子间相距 a . 计算这个相互静电作用的点阵的总静电能. ($N \rightarrow \infty$)

20. 如图 17-33 所示, 质子加速器使每个质子得到的动能为 E . 很细的质子束从加速器射向一个远离加速器的半径为 r 的金属球, 并留在球上. 球中心并不在加速器发射出的质子运动方向的直线上, 而与该直线的距离为 d , 且 $d < r$, 加速器工作足够长时间后, 球能充电到多高的电势? 计算中取 $E = 2 \text{ keV}$, $d = \frac{r}{2}$.

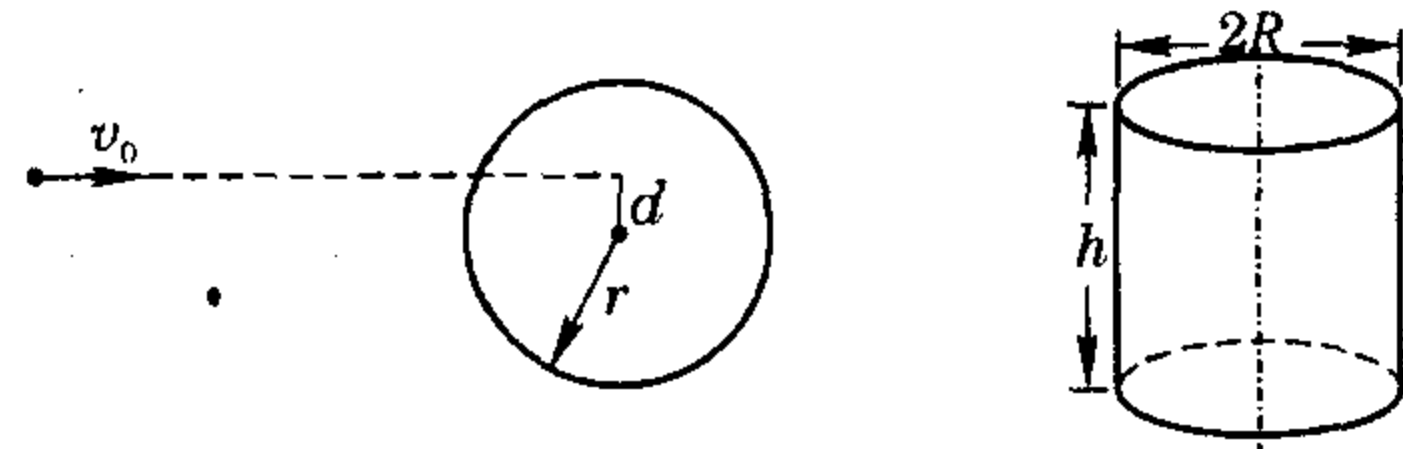


图 17-33 图 17-34

21. 需要净化空气中的灰尘, 但在一般条件下灰尘沉积下来是较缓慢的, 为此可利用这样一个事实, 即灰尘是带电的. 为模拟净化过程, 提出两种装置.

第一个装置是: 将含有灰尘空气的玻璃圆桶 (高 $h = 1 \text{ m}$, 半径 $R = 0.1 \text{ m}$, 如图 17-34 所示) 放在场强为 $E_1 = 1 \times 10^4 \text{ V/m}$ 的电场中, 场强方向沿着圆柱形桶的轴向. 经时间 $t_1 = 120 \text{ s}$ 后, 可以观察到容器中所有的灰尘均已沉积在底部.

第二个装置是: 沿圆柱桶的轴线紧拉着一根细导线, 且将此导线跟高压电源相连, 电源电压是这样选取的, 使在容器壁上场强值恰好等于第一个装置的场强值 $1 \times 10^4 \text{ V/m}$. 已知在这种情况下场强 $E \propto \frac{1}{r}$, r 为离轴线的距离.

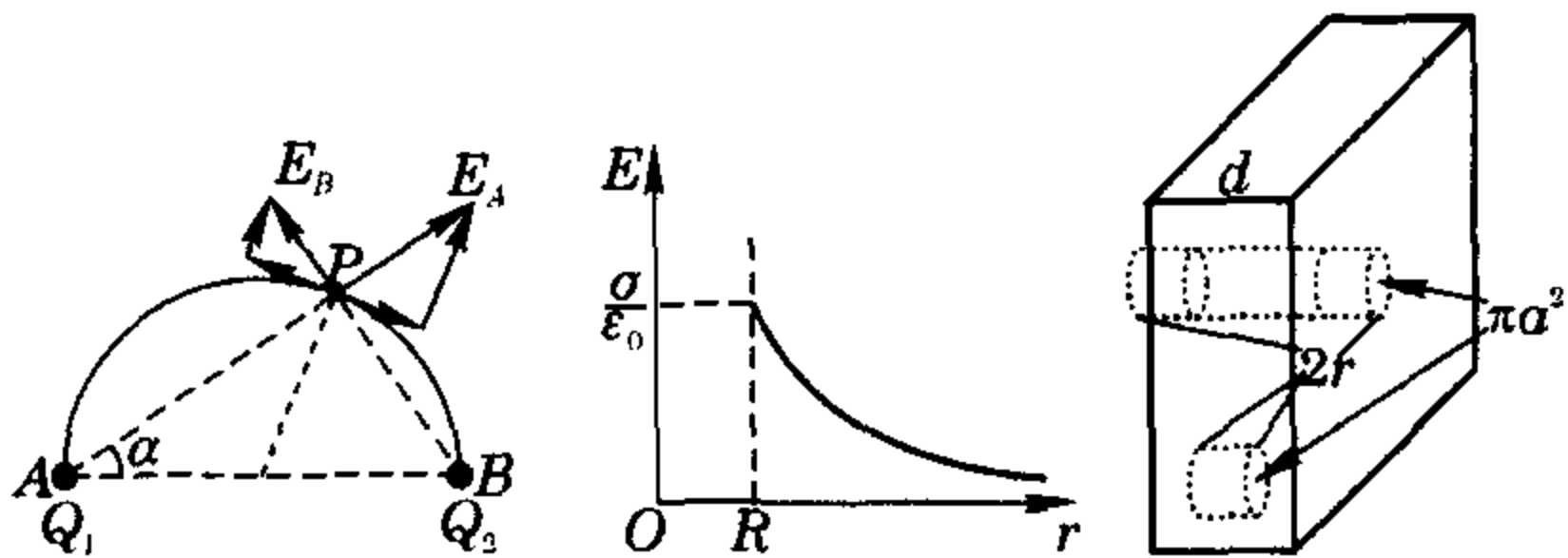
假设尘粒是同种的, 其所带电荷量也相等, 试确定第二个装置中尘粒沉积到容器壁所需时间. 由于空气中的尘粒不多, 体电荷可以忽略, 认为尘粒沉积过程动态平衡, 空气阻力与速度成正比, 不计重力.

参考答案

1. 半圆上电荷能达到平衡的位置, 应是两点电荷沿圆的切向场强为零的位置, 如图答 17-1 所示, 应有 $E_A \sin \alpha = E_B \cos \alpha$, 而 $E_A = \frac{kQ_1}{(L \cos \alpha)^2}$, $E_B = \frac{kQ_2}{(L \sin \alpha)^2}$, 于是有 $\alpha = \arctan \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}$.

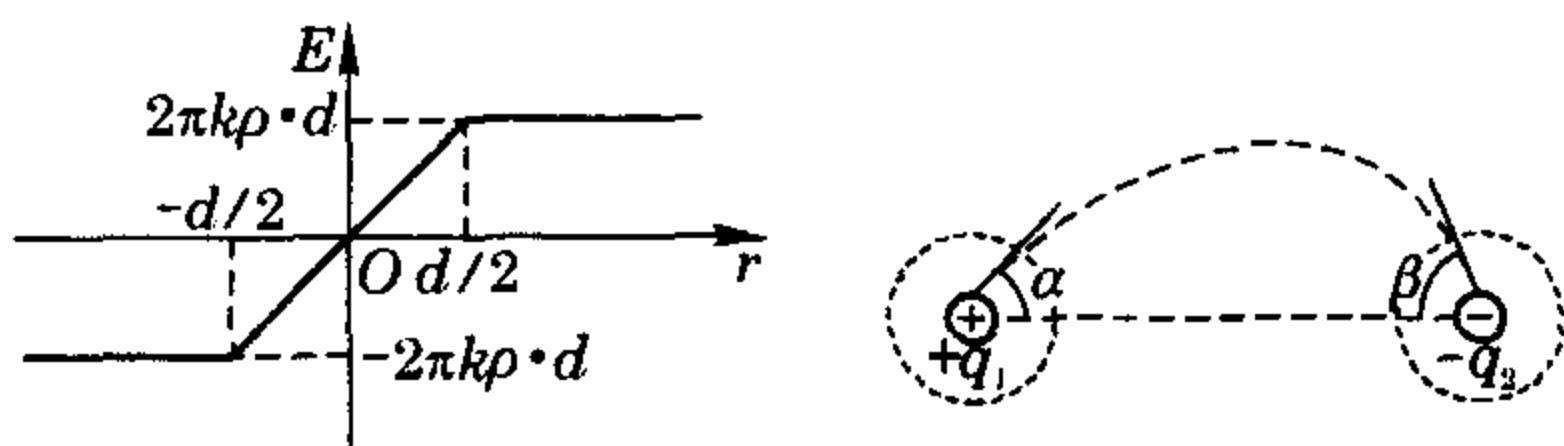
2. 由高斯定理, 在圆柱面以内, $\Phi_e = 0, E = 0$; 在圆柱面外, 取与带电圆柱面同轴、半径 $r \geq R$ 、高 d 的闭合圆柱面, 通过的电通量 $\Phi_e = \frac{2\pi R \cdot d \cdot \sigma}{\epsilon_0}$, 则 $E = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{2\pi R \cdot d \cdot \sigma}{\epsilon_0 2\pi r \cdot d} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r}$, $E(r)$ 关系如图答 17-2 所示.

3. 如图答 17-3 所示, 当 $r < \frac{d}{2}$ 时, $\Phi_e = \frac{\pi a^2 \cdot 2r \cdot \rho}{\epsilon_0}$, 则 $E(r) = \frac{\pi a^2 \cdot 2r \cdot \rho}{\epsilon_0 \cdot 2\pi a^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} r = 4\pi k \rho \cdot r$;
 当 $r \geq \frac{d}{2}$ 时, $\Phi_e = \frac{\pi a^2 \cdot d \cdot \rho}{\epsilon_0}$, 则 $E(r) = \frac{\pi a^2 \cdot d \cdot \rho}{\epsilon_0 \cdot 2\pi a^2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} d = 2\pi k \rho \cdot d$, $E(r)$ 关系如图答 17-4 所示.



图答 17-1 图答 17-2 图答 17-3

4. 点电荷位于立方体中心时, 通过立方体表面的电通量为 $\frac{q}{\epsilon_0}$, 由对称性知, 通过一个面的电通量为 $\frac{q}{6\epsilon_0}$;
 若点电荷移至立方体的一个顶点, 则可将该立方体视作 8 个同样的立方体构成的大立方体的一角, q 位于该大立方体的中心, 那么通过小立方体一个面的电通量为 $\Phi_e = \frac{q}{24\epsilon_0}$.



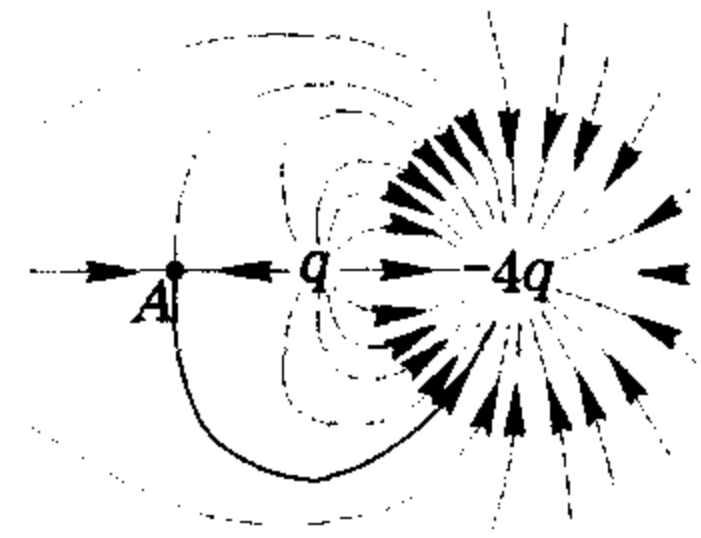
图答 17-4 图答 17-5

5. 如图答 17-5 所示, 以点电荷 $+q_1$ 与 $-q_2$ 为中心, 取一半径为 r 的很小球面, 可视为其上的电场线均匀分布, 穿出 2α 角所对的球冠面的电场线应完全穿入 2β 角所对的球冠面, 因此两球冠面上的电通量相等:
 $\frac{q_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi r \cdot r(1 - \cos \alpha)}{4\pi r^2} = \frac{q_2}{\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi r \cdot r(1 - \cos \beta)}{4\pi r^2}$, 可得
 $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin \frac{\alpha}{2}$.

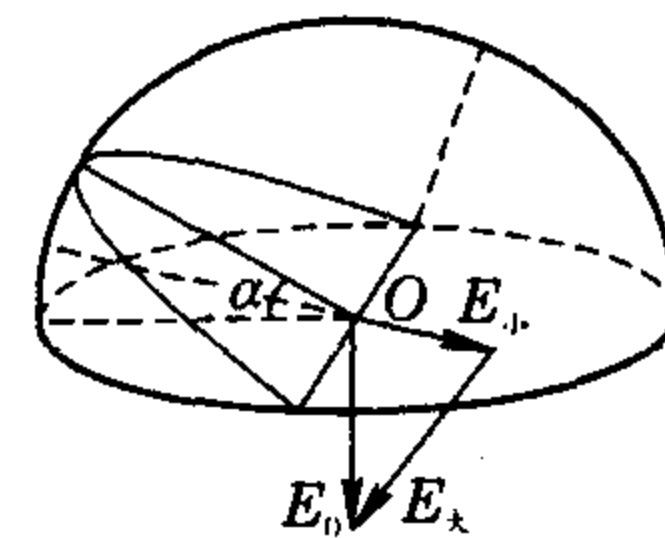
6. 若两点电荷相距为 a , 场强为零的点在两点电荷连线延长线距 $+q$ 为 x 远处, $\frac{x^2}{(a+x)^2} = \frac{1}{4}$, $x = a$;
 由上题, 从 $+q$ 出发, 与两电荷连线所成角度在 $[0, \pi]$ 之间的电场线进入 $-4q$, 终止时与两电荷连线夹角在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 之间, 如图答 17-6 所示, A 点的场强为零, 所有在经过 A 点的电场线都是由 $+q$ 出发而指向 $-4q$, 其余进入 $-4q$ 的电场线则来自无穷远处.

7. 半球面均匀分布, 电荷在 O 点引起的场强可视为“小瓣”球面电荷与“大瓣”球面电荷在 O 点引起的

电场的矢量和, 由对称性及半球的几何关系可知 $E_{\text{大}}$ 与 $E_{\text{小}}$ 垂直, 如图答 17-7 所示, 则 $E_{\text{小}} = E_0 \sin \frac{\alpha}{2}$.



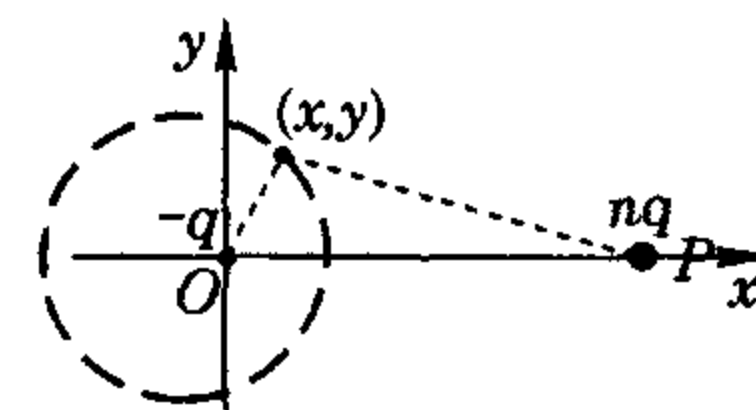
图答 17-6



图答 17-7

8. 对球: $U = \frac{kQ}{R_1}$, Q 为金属球带电, 导电球壳包围金属球并接地, 设感应电荷的像电荷电量为 q , 有 $\frac{kQ}{R_2} + \frac{kq}{R_2} = 0$, $q = -Q = -\frac{UR_1}{k}$, 则金属球电势是 Q 与 q 在球上电势的叠加, $U' = U + \frac{kq}{R_2} = U - \frac{UR_1}{R_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_2} U$.

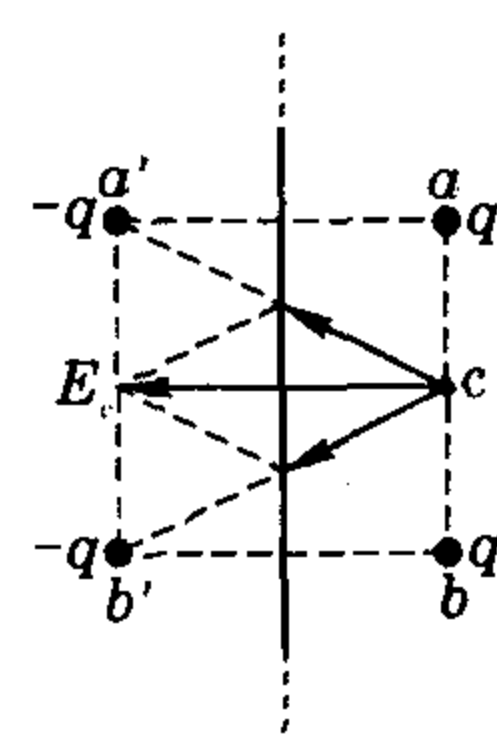
9. 如图答 17-8 所示, 以小电量电荷所在位置为坐标原点, 建立直角坐标, $-q$ 与 nq 在坐标为 (x, y) 的点电势叠加为零, 即有 $\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2}}$



$= \frac{knq}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}$, 整理得

$(x + \frac{d}{n^2 - 1})^2 + y^2 = (\frac{nd}{n^2 - 1})^2$, 此即圆的解析式, 圆心坐标 $x = -\frac{d}{n^2 - 1}$, $y = 0$; 圆的半径为 $\frac{nd}{n^2 - 1}$.

10. 如图答 17-9 所示, 两点电荷及它们的像电荷位于边长为 $2d$ 的正方形 $abb'a'$ 的四个顶点, 要求 c 点的场强. a, b 两点电荷在 c 点引起的场强等值反向合场强为零, b' 与 a' 处像电荷在 c 点引起的场强大小为 $E = \frac{kq}{5d^2}$, 方向如图



答 17-10 所示, 则 $E_c = 2E \frac{2}{\sqrt{5}} =$

$\frac{4kq}{5\sqrt{5}d^2}$, 方向指向平板.

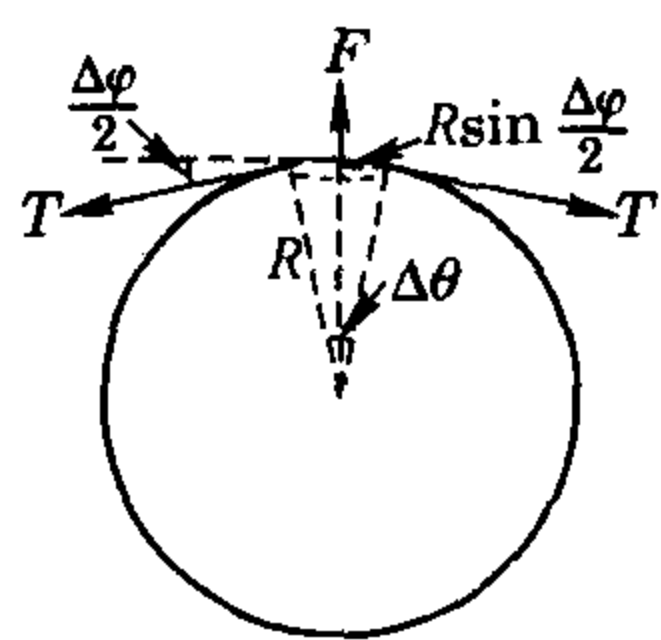
图答 17-9

11. 大的半球面电量为 $2\pi R_1^2 \sigma_1$, 在半球底面上的电势为整个大球面上电荷引起电势的一半, 故为 $U_1 = \frac{k2\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = 2k\pi R_1 \sigma_1$, 小的半球面电量为 $2\pi R_2^2 \sigma_2$, 在小半球底面上的电势为 $U_2 = 2k\pi R_2 \sigma_2$, 在小半球面外引起的电势为 $U_2' = \frac{k2\pi R_2^2 \sigma_2}{r}$, r 是至小球球心的距离, 由电势叠加原理, 当两个同心半球相对放置时, 直径 AOB 上电势的分布情况是

$$\begin{cases} U=2k\pi(R_1\sigma_1+R_2\sigma_2), (r\leq R_2) \\ U=2k\pi(R_1\sigma_1+\frac{R_2^2\sigma_2}{r}), (R_1>r>R_2) \end{cases}$$

12. 在带电球面上取一个极小的球冠面, 如图答 17-10 所示, 将此元面面积视作

$\Delta S = \pi \cdot (R \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2})^2$, R 为球半径, 这个球冠面的周长为 $\Delta l = 2\pi \cdot (R \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2})$, $\Delta\varphi$ 为元球冠面所对的圆心角, 该球冠面由于带有电荷 $\Delta q = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \Delta S$, 故受到球面外侧电场作用, 该力方向指向球外, 大小为 $F_e = \Delta q \cdot E = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \Delta S \cdot E$, 均匀带电球面外侧的场强为 $E = \frac{kQ}{2R^2}$, 则 $F_e = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \Delta S \cdot \frac{kQ}{2R^2} = \frac{kQ^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{8R^2}$, 在元球冠面的周边, 受到球面其余部分对它的张力 T , 张力之合力与 F_e 平衡, 有 $\sigma \cdot \Delta l \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{kQ^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{8R^2}$, 将 $\Delta l = 2\pi \cdot (R \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2})$ 代入整理, 即得 $\sigma = \frac{kQ^2}{16\pi R^3} = \frac{Q^2}{64\epsilon_0 \pi^2 R^3}$.



图答 17-10

13. 均匀带电金属球表面每一个面元受到整个球面其余部分电荷对它的静电力大小是 $F_i = \frac{kQ}{2R^2} \cdot \Delta q$, Δq 为面电荷元电量, 面电荷元所受的这个力是其所在半球上除自身外, 各面电荷元对其作用力及另半球各面元电荷对其作用力的总和, 由于面电荷元所在半球内各元电荷间的作用力总是成对出现、等值反向, 故整个半球受的来自另一半球的力与本半球每个面电荷所受金属球表面电场力的总和相等, 即 $F = \sum_i \frac{kQ}{2R^2} \cdot \Delta q_i$. 如图

答 17-11 所示, 取半球的对称轴为 x 轴, 用垂直于 x 轴的平面在球面上分割出一窄小环带, 其方位与 x 轴成 $\theta_i = i \cdot \frac{\pi}{2n}$, 该环带电量 $\Delta q_i = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R \cdot R \cdot \frac{\pi}{2n} \sin i \cdot \frac{\pi}{2n}$, 由环的对称性知环上各元电荷受力大小相等, 方向背离球心, 这些力中垂直于 x 方向的分量一

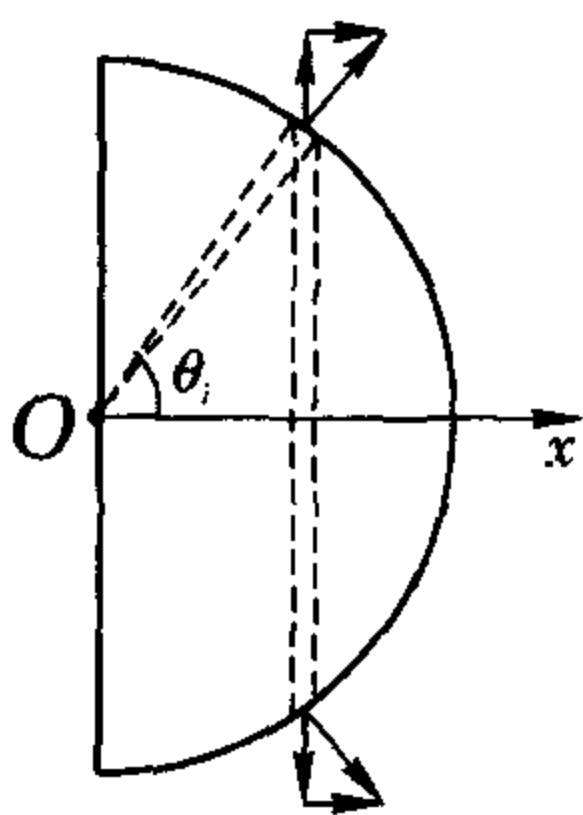


图 17-11

一抵消, 故有 $F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{kQ^2}{8R^2} \cdot \frac{\pi}{n} \sin i \cdot \frac{\pi}{2n} \cos i \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{kQ^2}{8R^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \cdot \sin i \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{kQ^2}{8R^2} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$, 方向沿 x 轴, 两半球间的相互作用力, 相当于两个 $\frac{Q}{2}$ 的点电荷相距 $\sqrt{2}R$ 时的相互作用力.

本题还可以用等效方法简单求解: 均匀带电金属球表面每一个面元 ΔS 受到整个球面其余部分电荷对它的静电力大小是 $F_i = \frac{kQ}{2R^2} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \Delta S$, 则单位面积静电力 $P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{kQ^2}{8\pi R^4}$, 设想另半球对此半球的作用力与压强亦为 P 的气体作用在半球上的压力相平衡, 则 $F = \frac{kQ^2}{8\pi R^4} \cdot \pi R^2 = \frac{kQ^2}{8R^2} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$, 结果相同.

14. 当球壳中心 O 的点电荷电量为 Q_i 时, 由高斯定理可知在球壳内、外表面引起的感应电荷量分别为 $-Q$ 与 $+Q$. 由电势叠加原理, 球壳内外表面感应电荷在球心处引起的电势为 $U_i = kQ_i (\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) < 0$. 将电荷 q 从电势为 U_i 处移到无穷远, 克服电场力做功 $W_i = qU_i$. 本题中 O 点的电势随电荷的移走而变化, 是个变量, 为此, 可将大电量 Q 均匀细分成 n 等份, 每一份极小电荷 $\frac{Q}{n}$ 的移出不影响 O 点的电势, 第 i 份元电荷从 O 点移至无穷远需做元功 $W_i = \frac{Q}{n} \cdot (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) k[(n-i) \frac{Q}{n}]$, 则总功为 $W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i = kQ^2 (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot [(n-i) \frac{1}{n}] = \frac{1}{2} kQ^2 (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$.

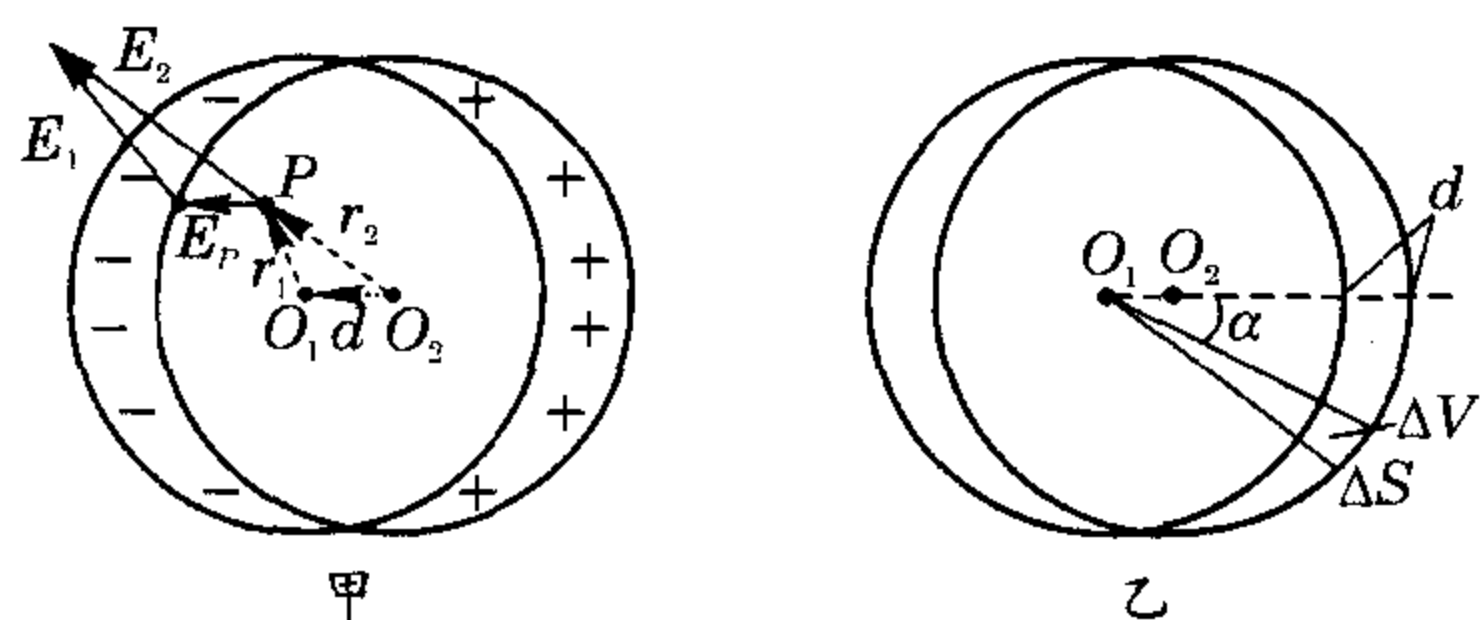
15. 设大球壳上感应电荷电量为 Q_R , 小球壳上感应电荷电量为 Q , 球心 O 处电势为零, 由电势叠加原理有 $\frac{kQ_R}{R} + \frac{kQ_r}{r} + \frac{kq}{l} = 0$. 又由高斯定理有 $q + Q_R + Q_r = 0$, 得 $Q_R (\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) = q (\frac{1}{r} - \frac{1}{l})$, 则 $Q_R = \frac{(l-r)R}{(r-R)l} q$, $Q_r = \frac{(l-R)r}{(R-r)l} q$.

16. (1) 设 A, B 两球的半径为 R, C 球的半径为 r , C 球与 A 球第一次接触后两者等势, 有 $\frac{q-Q_1}{r} = \frac{Q_1}{R}$ ①, 当 $\frac{q}{r} = \frac{Q}{R}$ 时, 电荷不再从 C 球移到 A 球, 故 $Q = \frac{R}{r} q = \frac{Q_1}{q-Q_1} q$; C 球与 B 球接触最终有 $\frac{q}{r} = \frac{Q'}{R}$, 故 $Q' = \frac{Q_1}{q-Q_1} q$. (2) 由 ① 式及题给条件 $\frac{Q_1}{q} = \frac{9}{10}$ 得 $\frac{r}{R} = \frac{1}{9}$, 设第二次 C 球与 A 球接触后 A 球又获电量 Q_2 , 则 $\frac{q-Q_2}{r} = \frac{Q_2}{R}$

$$= \frac{Q_1 + Q_2}{R}, Q_2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 q, C, A \text{ 两球接触 } n \text{ 次后有}$$

$$\frac{9}{10} q \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{1}{10}} = 4.5q, n = 7.$$

17. 金属球在电场 E 中, 球表面左侧出现负电荷, 右侧出现正电荷, 球内 $E + E' = 0$, 这种情况等效于: 两只半径为 R 的金属球, 在整个体积内均匀地分布等量异号电荷, 两球互相交叠、沿电场方向稍微错开一小距离 d , 如图答 17-12 甲所示. 两球重叠部分形成“空腔”, 边缘(极薄的弯月形)按原球电荷体密度分布电荷, 当 $d \rightarrow 0$ 时, 空腔部分趋近于半径为 R 的球体, 电荷部分逼近两半个球面. 现设两球电量为 $+Q$ 与 $-Q$, 在两球重叠部分任取点 P , 它对 O_1 矢径为 r_1 、对 O_2 矢径为 r_2 , 根据均匀带电球内场强公式 P 点场强 $E_P =$



图答 17-12

$$\frac{kQ}{R^3} \cdot (r_1 + r_2) = \frac{kQ}{R^3} \cdot d, \text{ 可知重叠部分为一均匀电场,}$$

方向与外电场相反. 令其大小为 E , 则 $Q = \frac{ER^3}{kd}$, 两金

属球电荷体密度 $\rho = \frac{3E}{4k\pi d}$, 在边缘, 对应任一角度 α 取

一小长体, 如图 17-13 乙所示, $\Delta V = \Delta S \cdot d \cdot \cos \alpha$, 带

电 $\Delta Q = \frac{3E}{4k\pi d} \cdot \Delta S \cdot d \cdot \cos \alpha$, 则该处电荷面密度 $\sigma =$

$$\frac{3E}{4k\pi} \cdot \cos \alpha = 3E\epsilon_0 \cdot \cos \alpha.$$

18. 如图答 17-13 所示, 角平分线将 $\angle APB$ 平分为 $\angle APC = \angle CPB = \alpha$, 将 $\angle APC$ 与 $\angle CPB$ 均匀细分为 n 等分, 每个 $\frac{\alpha}{n}$ 对应

AB 线上一带电线元 Δx .

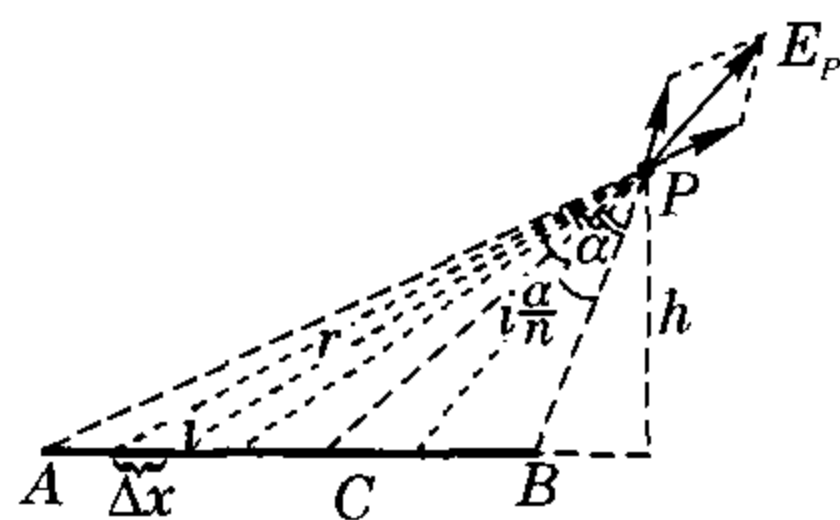
设第 i 个 $\frac{\alpha}{n}$ 角对应的线

元与 P 点距离 r , P 点与 AB 的垂直距离为 h , 则

$$\Delta x = \frac{r \cdot \alpha}{n \sin \theta_i} = \frac{r^2 \cdot \alpha}{nh}. \text{ 线}$$

元带电 $\Delta q = \sigma \cdot \Delta x = \frac{r^2 \alpha \sigma}{nh}$, 它在 P 点引起的电场强度

$E_i = \frac{k\Delta q_i}{r^2} = \frac{k\alpha\sigma}{nh}$, 可知每个线元电荷在 P 点引起的场



图答 17-13

强大小相同. 那么, C 两侧与 PC 有 $i\frac{\alpha}{n}$ 角位移的两元

电荷一一对称, 在 P 点合场强均沿 PC , AB 所在平面上的任一点, 相互对应的基元电荷引起的场强叠加, 均可得出合场强沿该点对 AB 张角的角平分线的结论.

(2) 利用双曲线性质: 双曲线上各点切线沿该点与双曲线两焦点夹角平分线, 而所研究的电场其各点电场线切线沿各点对 A, B 张角平分线, 则电场线为一簇焦距为 $\frac{l}{2}$ 的双曲线, 方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - a^2} = 1 (a < \frac{l}{2})$;

(3) 利用椭圆性质: 椭圆上各点法线为该点与椭圆两焦点夹角平分线, 所研究的电场其各点电场线切线沿各点对 A, B 张角平分线, 而等势线与电场线处处垂直, 则其等势线即为一簇焦距为 $\frac{l}{2}$ 的椭圆, 在题给坐标

$$\text{中, 方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = 1 (a > \frac{l}{2}).$$

19. 除两端的一些离子外, 每个离子与其周围离子的相互作用情形都相同, 任取一正离子记为 A_0 , 两侧各对离子依次为 A_{-1}, A_{+2}, \dots , 则 A_0 在第一对负离子中间位置具有的电势能为 $E_{-1} = -2 \frac{ke^2}{a}$, 这是与第一对负离子所共有的; A_0 在第二对正离子中间位置具有的电势能为 $E_{+2} = 2 \frac{ke^2}{2a}$, 这也是与第一、二对正离子

所共有的……, 则系统的总能量为 $E = \frac{2ke^2}{a} (-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots) = -(2 \ln 2) \frac{ke^2}{a}$.

20. 设质子的初速度为 v_0 , 当金属球充电到电势为 U 时, 质子与金属球相切而过, 此时速度设为 v . 由于质子在向球运动时, 只受库仑力且力的方向沿球径向, 故对球心 O , 冲量矩为零, 质子的角动量守恒, 则

$$m \frac{v_0}{2} = mv, v = \frac{v_0}{2}, \text{ 即质子动能减为 } \frac{E}{4}. \text{ 由动能定理}$$

$$eU = (E - \frac{E}{4}), \text{ 则 } U = \frac{3}{4e} E = 1500 \text{ V.}$$

21. 第一个装置中, 电场力恒定, 故 $qE_1 = kv_1, t_1 =$

$$\frac{h}{v_1} = \frac{hk}{qE_1}. \text{ 第二个装置中, 在距离轴心 } r \text{ 处尘粒速度设为 } v_r, \text{ 有}$$

$$\frac{RE_1}{r} q = kv_r = \frac{t_1 q E_1}{h} v_r, \text{ 则 } v_r = \frac{Rh}{rt_1}, \text{ 将 } R \text{ 细分为}$$

$$n \text{ 等份, } \Delta r = \frac{R}{n}, \text{ 以 } v_i \text{ 通过第 } i \text{ 个 } \Delta r \text{ 需时 } \Delta t_i = \frac{\Delta r}{v_i} =$$

$$\frac{R \cdot i \frac{R}{n} t_1}{n \cdot Rh} = \frac{Rt_1}{h} \cdot \frac{i}{n^2}, \text{ 则全部落到桶壁所需时间 } t_2 =$$

$$\frac{Rt_1}{h} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Rt_1}{h} = 6 \text{ s.}$$

竞赛辅导

专题 18 电 容 器

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

这里,我们将会更多地了解导体的电荷及带电后的导体.

一个孤立的带电量为 Q 、半径为 R 的金属球;它具有电势 $U = k \frac{Q}{R}$, 这在我们已然熟知. 稍加注意不难发现, 带电金属球的电势与所带电量具有这样的关系: Q 和 U 的比值等于球半径 R 的 k 分之一, 也就是说, 比值 $\frac{Q}{U}$ 是一个只与带电导体的大小形状有关而与其带电多少无关的物理量. 它表征了导体这样一种特性: 使导体得到单位电势所必须给予的电量. 这种特性被定义为导体的电容 C , 定义式 $C = \frac{q}{U}$. 孤立导体的电容一般很小, 地球是我们接触到的最大导体, 其半径约 6 400 km, 它的电容 $C = \frac{R_{地}}{k}$, 也就 710 μF (微法) 左右, 所以, 孤立导体的电容没有实际意义. 两个彼此靠近而又相互绝缘的导体组成的电容器在电工及电子设备中得到广泛应用, 因为电容器可以具有很大的电容, 即在一定的电势下带有更多的电量. 电容器的电容 $C = \frac{q}{U_{AB}}$, q 为一个导体 (极板) 上带电量, U_{AB} 为两导体间电势差. 电容器的电容是反映电容器储存电荷的能力的物理量, 取决于电容器自身的构建. 确定一个电容器电容的途径: 一是从定义出发, 一是通过等效变换. 对电容器的研究, 多涉及电容、电压、电容器两极间电场、电容器充、放电及电容器中电场的能量.

最简单的电容器是由靠得很近、互相平行的同样大小的两片金属板组成的平行板电容器. 两板间距离为 d , 两板正对面积为 S , 每板带等量异种电荷 $+q$ 与 $-q$, 由于板面很大而板间距离很小, 故除边缘部分外, 电荷均匀分布在两极板内表面, 面密度 $\sigma = \pm \frac{q}{S}$, 根据高斯定理, “无限大”带电平面两侧电场 $E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2S}$

$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 故平行板电容器板间电场强度由每板电荷引起

的场强同向叠加: $E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 两板间电势差

$$U_{AB} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}, \quad C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

球形电容器也是常规的电容器, 由半径分别为 R_A 、 R_B 的两个同心导体球壳所组成, 如图 18-1 所示.

设内球壳带电 $+q$, 外球壳带电 $-q$, 两球壳之间有球心对称的电场, 方向沿径向向外, 由高斯定理可知, 在距球心为 r ($r > R_A$) 处场强大小 $E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2}$, 电势梯度是

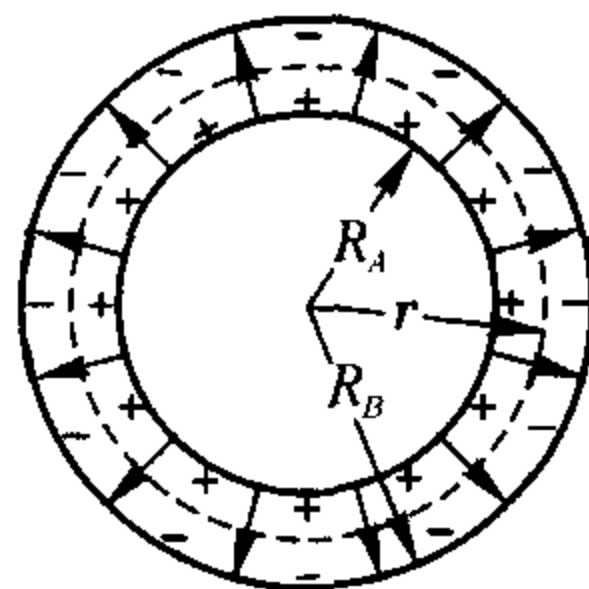


图 18-1

非均匀变化的. 考虑在一小段 $\Delta r = \frac{R_B - R_A}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), 将其上场

强视作不变, 电势降落 $U_i = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi(R_A + i \cdot \Delta r)^2} \cdot \Delta r$, 则从 A 到 B 总的电势降落

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi(R_A + i \cdot \Delta r)^2} \cdot \Delta r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta r}{(R_A + i \cdot \Delta r) \cdot (R_A + i \cdot \Delta r - \Delta r)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(R_A + i \cdot \Delta r - \Delta r)} - \frac{1}{(R_A + i \cdot \Delta r)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_A + \Delta r} + \frac{1}{R_A + \Delta r} - \frac{1}{R_A + 2\Delta r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_A + 2\Delta r} - \dots + \frac{1}{R_A + (n-1)\Delta r} - \frac{1}{R_B} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_B - R_A}{R_A R_B}. \end{aligned}$$

再由电容定义式即得球形电容器的电容公式为

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A} (R_B > R_A),$$

说明球形电容器的电容也仅由其几何形状及结构决定.

由两个同轴金属圆柱面组成的圆柱形电容器也是

常见电容器. 一根同轴的电缆就形成一个圆柱形电容器, 如图 18-2 所示为同轴电缆剖视, 它的铜芯线和外包铜线相当于圆柱形电容器的两个极板. 电缆单位长度的电容是电缆的一个重要的特性参数, 对圆柱形电容器电容的计算也是很有实际意义的, 读者可试解本专题小试身手题 4.

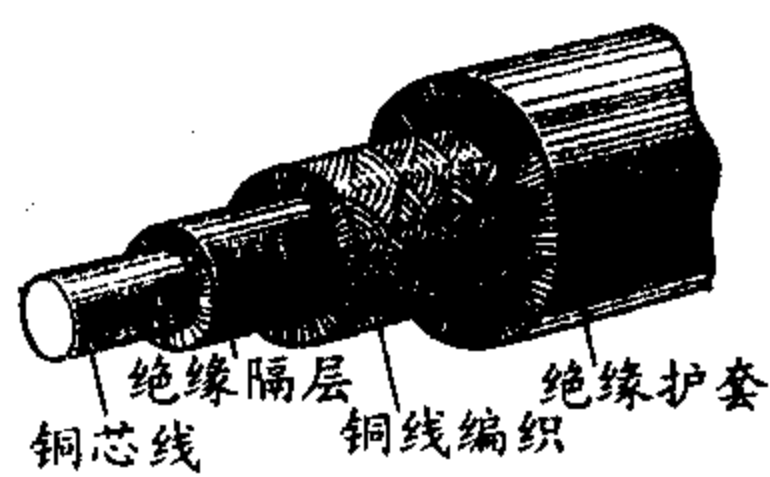


图 18-2

当将两个电容器如图 18-3 所示串联时, 等效于增大了板间距离, 给 A 板充 +q 电量、B 板充 -q 电量,

C_1 右板及 C_2 左板因静电感应而分别有 -q 电量及 +q 电量且与连接导线共成一等势体, 设串联后等效电容为 C , 则 $\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$, $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. 即电容器串联后的等效电容值取各相串电容的调和平均, 等效电容变小.

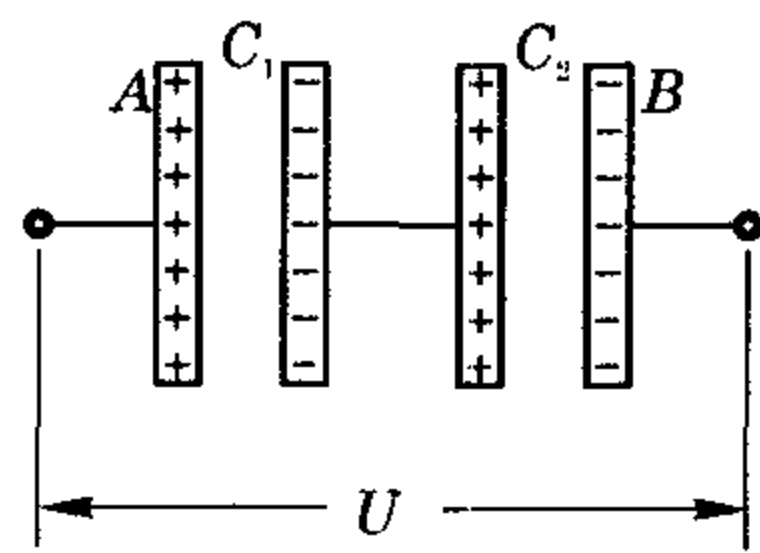


图 18-3

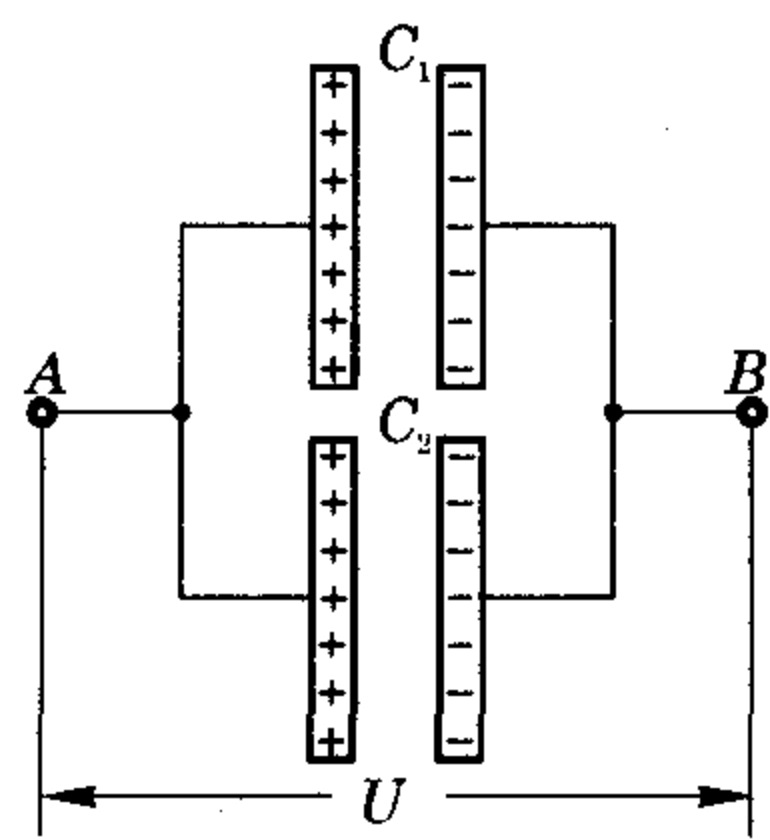


图 18-4

当将两个电容器如图 18-4 所示并联时, 等效于增大了极板的正对面积, 各电容器板间电压均为 U , 设并联后等效电容为 C , 那么 $CU = C_1 U + C_2 U$, 即电容器并联后的等效电容值为各相并联电容的和, 等效电容变大.

下面我们来计算两个异形电容器的电容.

例 1 如图 18-5 所示, 两块长与宽均为 a 与 b 的导体平板在制成平行板电容器时稍有偏斜, 使两板间距一端为 d , 另一端为 $(d+h)$, 且 $h \ll d$, 试求该空气电容器的电容.

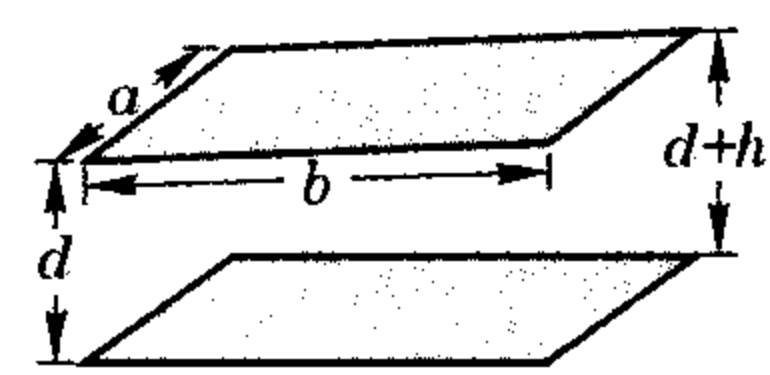


图 18-5

分析与解 这里涉及的电容器是板间距离有微小变化的平板电容器, 自然想到用微元法: 将该电容器看作是 n 个正对面积极小的电容器并联而成, 每个元电容器极板间距视作恒定, 用平行板电容器公式示出其电容 C_i , 总电容为

$$C = \sum_i C_i.$$

先取微元. 由于微元量 $C_i = \epsilon_0 \frac{ab}{nd_i}$, 求这样一个调

和级数的和是很困难的, 故我们将总电容 C 进行分割, 每个元电容 $C_i = \frac{C}{n}$, 如图 18-6 所示, 设第 i 个小电

容器极板间距离 d_i , 正对面积 $S_i = a \cdot (d_{i+1} - d_i) \cdot \frac{b}{h}$,

$$\text{则 } \frac{C}{n} = \frac{\epsilon_0 ab (d_{i+1} - d_i)}{hd_i}, \text{ 即 } \frac{Ch}{n\epsilon_0 ab} + 1 = \frac{d_{i+1}}{d_i},$$

此式说明各电容相同的小电容器其板间距离是呈等比数列地从 d 变为 $d+h$ 的, 即

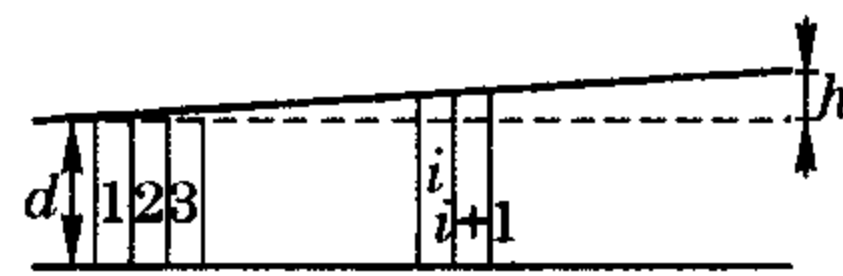


图 18-6

$$\frac{d+h}{d} = \left(\frac{Ch}{n\epsilon_0 ab} + 1\right)^n = \left(\frac{Ch}{n\epsilon_0 ab} + 1\right)^{\frac{\pi_0 ab}{Ch}} \cdot \frac{C}{\epsilon_0 ab}.$$

利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Ch}{n\epsilon_0 ab} + 1\right)^{\frac{\pi_0 ab}{Ch}} = e$, 得

$$e^{\frac{C}{\epsilon_0 ab}} = \frac{d+h}{d},$$

于是 $C = \epsilon_0 \frac{ab}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{d}\right)$.

例 2 如图 18-7 所示, 两个半径均为 R 的导体球相互接触形成一孤立导体, 试求此孤立导体的电容. ($\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$)

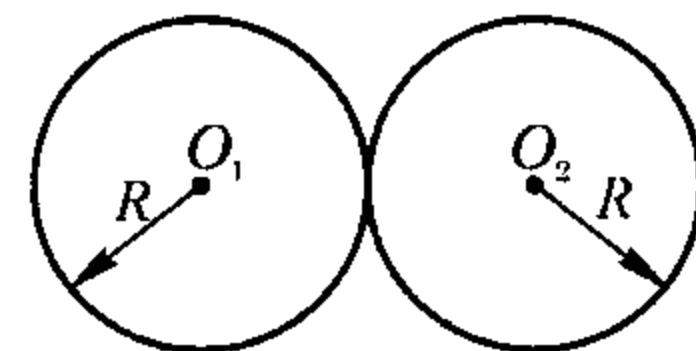


图 18-7

分析与解 孤立导体的电容取决于其几何构建, 球导体电容为 $\frac{R}{k}$, 两个半径均为 R 的导体球切合, 其电容

是多少? 我们从寻求等效下手.

设系统的电势为 U , 如若确定此电势下系统的荷电量 Q , 即可由定义求得电容 C . 先考虑若只有一个金属球, 当带电量 $+q_1$ 时, 有 $U = \frac{kq_1}{R}$, 两球相互接触时, 每

球球心电势将要增加对方

球所带电荷 (视作集中在球心) 引起的那部分电势,

可以设想在两球心连线上适当位置放上适当电

荷——所谓像电荷来抵消, 以使每球的电势依然保持为 U . 如图 18-8 所示, 为了消除 O_2 处 $+q_1$ 对 O_1 处电

势的影响, 可在与 O_1 距离 $\frac{R}{2}$ 处放置 $q_2 = -\frac{q_1}{2}$ (参见专题 17 例 12 结论), 同样, 为了消除 O_1 处 $+q_1$ 对 O_2 处

电势的影响, 可在与 O_2 距离 $\frac{R}{2}$ 处放置 $q_2 = -\frac{q_1}{2}$; 但 q_2

在消除对方 q_1 对自身影响的同时, 却又在对方引起新的电势, 仿照前面做法, 再引入一对 q_3 电荷, 其位置距

球心 $\frac{R^2}{3R/2} = \frac{2R}{3}$, 电量 $q_3 = -\frac{Rq_2}{3R/2} = \frac{q_1}{3}$; 如此往复无穷

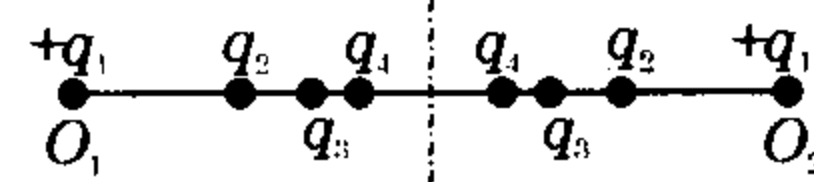


图 18-8

直至系统电势为 U , 此时系统总电荷

$$Q = 2q_1 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = (2 \ln 2) q_1 = (2 \ln 2) \frac{UR}{k},$$

则该双金属球系统的电容为 $8(\ln 2) \pi \epsilon_0 R$.

至此, 我们所讨论的电容器两极间均无其他物质, 为真空绝缘. 当改变两导体的绝缘物质时, 电容器的电容也将发生变化. 电介质的电学性质是几乎没有自由电子、由中性分子构成, 每个分子带等量异种电荷. 通常情况下, 整个电介质物体不显电性. 当把电介质物体

放在电场中, 带等量异种电荷的中性分子受电场力作用成为按电场方向顺序排列的电偶极子, 如图 18-9 所示, 这就使电介质的两端呈局部带电现象: 电场线进入的一端表面带负电, 电场线穿出

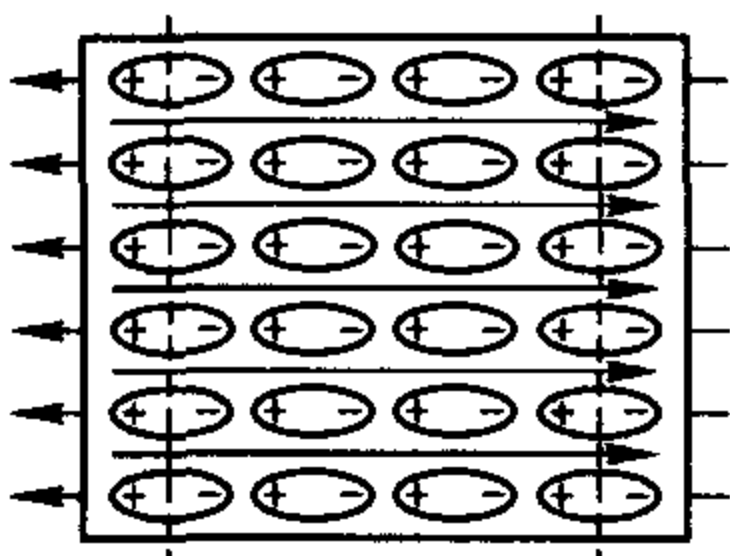


图 18-9

的一端表面带正电, 这种现象叫做电介质极化, 电介质两端面上的电荷称极化电荷. 电介质与导体在电场中的表现是不同的: 极化电荷不同于自由电荷, 它不能自由移动; 极化电荷建立的电场 $-E'$ 削弱了外电场 E_0 , 电介质里的电场为 $E = E_0 - E'$, 真空中场强 E_0 与处在该场里的电介质内部被极化电荷削弱后的场强 E 之比值 $\frac{E_0}{E} = \epsilon$ 定义为这种电介质的介电常数, 介电常数 ϵ 大于 1. 空气的介电常数 $\epsilon = 1.0006$, 一般的计算中将空气的介电常数取作 1.

当平行板电容器两极板间均匀充满介电常数为 ϵ 的电介质时, 其电容将增加为原来的 ϵ 倍, 即计算电容的公式成为 $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$.

例 3 如图 18-10 所示, 一平行板电容器, 充以三种介电常数为分别 ϵ_1 、 ϵ_2 和 ϵ_3 的均匀介质, 板的面积为 S , 板间距离为 $2d$. 试求电容器的电容.

分析与解 这样一个电容器的电容可等效为由电容

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S}{2d} \text{ 与 } C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_3 S}{2d} \text{ 的电}$$

容串联后与电容 $C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S}{4d}$ 的容器并联的电容值, 这个等效电容为

$$C = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} \cdot \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + 2\epsilon_2 \epsilon_3}{2(\epsilon_2 + \epsilon_3)}.$$

离子型晶体的电介质如石英、电气石等, 当受到拉伸或压缩而发生机械形变时, 也能产生电极化现象, 这被称为压电效应. 例如石英晶体处在 10^5 Pa 的压强下时, 承受正压力的上下两个表面间出现正负电荷, 产生

约 0.5 V 的电势差. 石英晶体的压电现象被用来变机械振动为电磁振荡, 它是标准时间——石英钟的运作原理.

多个电容器按不同方式连接后充电, 各电容器极板上的电量及两板间的电压将由电容器的电容制约, 例如当几个原来不带电的电容器串联后, 加上电压 U , U 将按各电容器的电容反比例分配在各电容器上, 这是因为各串联电容器电量相同, 而 $U = \frac{Q}{C}$ 之故; 当几个原来不带电的电容器并联后, 充电到总电量为 Q , 各电容器将按电容正比例地分配电量 Q , 因为 U 相同, $q \propto C$ 在下面较为复杂的背景下, 电容对两板间的电压及极板上的电量的制约还是解决问题的瓶颈.

例 4 四块同样的金属板, 每板面积为 S , 各板带电量分别为 q_1 、 $-q_1$ 、 q_2 、 $-q_2$. 各板彼此相距为 d , 平行放置如图 18-11 所示, d 比板的线尺寸小得多, 当板 1、板 4 的外面用导线连接, 求板 2 与板 3 之间的电势差.

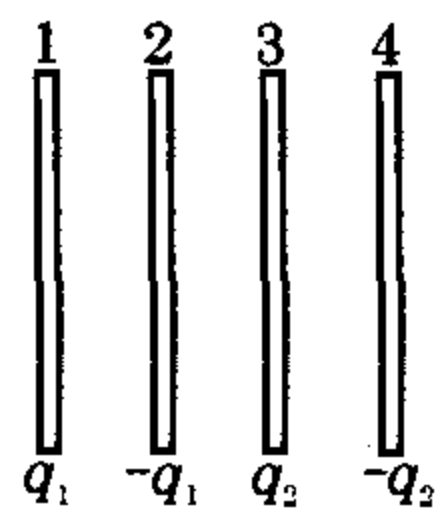


图 18-11

分析与解 “ d 比板的线尺寸小得多” 这个条件使我们可以忽略板的边缘效应而将各板间电场均看作匀强电场. 要求板 2、3 间电势差, 关键须确定由板 2、3 构成的这个电容器的电量. 当将板 1、板 4 以导线相连, 有两点: 一是板 1 与板 4 成为等势体; 二是板 1 与板 4 总电量守恒为 $q_1 - q_2$ 、板 2 与板 3 电量不变. 我们可以假设各板左右两侧电荷分布如图 18-12 所示, 其中

$$q_1' + q_3' = q_1 - q_2, \quad (1)$$

$$-q_1' - q_2' = -q_1, \quad (q_2' - q_3' = q_2). \quad (2)$$

各板间电场线方向如图 18-12 所示, 即电势从板 1 到板 2 降落 U_1 , 从板 2 到板 3 回升 U_2 , 从板 3 到板 4 回升 U_3 , 因为板 1 与板 4 等势, 所以 $U_1 = U_2 + U_3$. 同时每对金属板构成的电容器电容均为

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \text{ 故有}$$

$$\frac{q_1'}{C_0} = \frac{q_2'}{C_0} + \frac{q_3'}{C_0}, \quad (3)$$

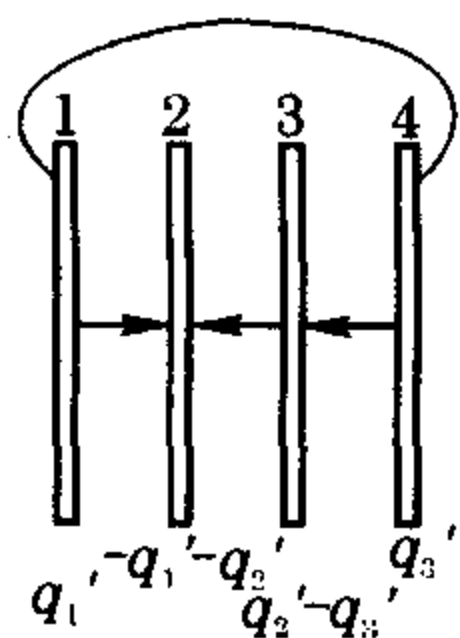


图 18-12

由①、②、③三式解得板 2 右侧与板 3 左侧带电量

$$q_2' = \frac{1}{3}(q_1 + q_2), \text{ 于是可求出 2、3 板间的电压}$$

$$U_{32} = \frac{q_2'}{C_0} = \frac{d(q_1 + q_2)}{3\epsilon_0 S}.$$

例 5 如图 18-13 所示, 两块金属平板平行放置, 相距 $D = 1$ cm, 一板上电荷面密度 $\sigma_1 = 3 \mu\text{C}/\text{m}^2$, 另一板上电荷面密度 $\sigma_2 = 6 \mu\text{C}/\text{m}^2$, 在两板之间平行地放

置一块厚 $d=5\text{ mm}$ 的石蜡板, 石蜡的介电常数 $\epsilon=2$. 求两金属板之间的电压.

分析与解 这个问题中, 两块金属板均带正电荷, 如果在每个金属板上附加面密度为 $-4.5\ \mu\text{C}/\text{m}^2$ 的电荷, 电容器的带电就成为“标准状况”了. 两板带等量异种电荷 $\sigma=1.5\ \mu\text{C}/\text{m}^2$, 而附加电荷在板间引起的电场互相抵消, 并不影响原来的板间电场, 也不会改变电容器的电势. 因为这个电容器等效于一个电容 $C=\frac{2\epsilon_0 S}{D}$ 的电容器与一个电容 $C'=\frac{2\epsilon_0 \epsilon S}{D}$ 的电容器串联, 总电容为

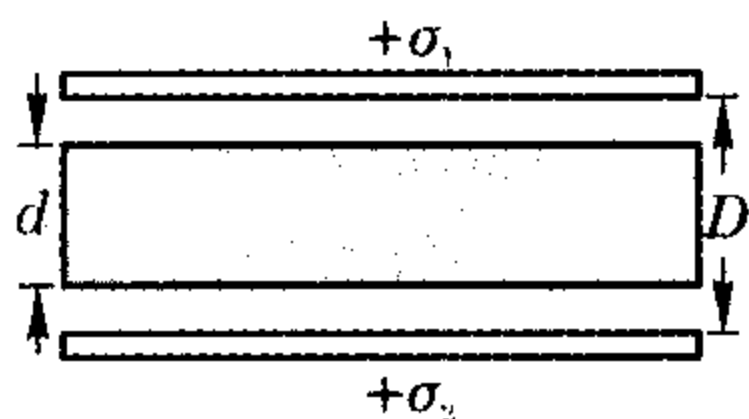


图 18-13

$$C_0 = \frac{CC'}{C+C'}$$

在带电量为 $Q=\sigma S$ 的情况下, 两板电势差

$$U = \frac{Q(C+C')}{CC'} = \frac{\sigma D(\epsilon+1)}{2\epsilon_0 \epsilon}$$

$$= \frac{1.5 \times 10^{-6} \times 10^{-2} \times 3}{4\epsilon_0} \approx 1.272\ \text{V}.$$

电荷间存在相互作用的电场力, 而任何带电过程, 都是电荷之间的相对移动过程, 所以带电系统的形成过程或改变、削减过程, 必定伴随着电场力做功、其他形式的能与带电系统电场能的转换. 例如用电池对电容器充电时, 消耗电池中的化学能, 充了电的电容器获得静电能; 电容器放电时, 它所储存的电能, 就会转化为热、光、声等其他形式的能. 带电系统静电能的变化是用电场力的功来量度的, 以平行板电容器为例, 我们来研究当一个电容为 C 的电容器通过电压 U 充电, 带上等量异种电量 Q 时具有的能量. 这个充电过程, 可等效为将电荷逐个地从原本电中性的两极板中的一个板移到另一个板. 从两板都不带电, 电势为零开始, 每移动一个电荷元 $+q$, 板间电压升高一个微量 $\frac{q}{C}$, 最后移过总电量 Q , 电压达到 U , 由于电容 C 恒定, 电压的升高随电量的增加线性变化, 故我们取平均电压 $\frac{U}{2}$, 由功能原理: 电场力移动电荷 Q 做功等于电容器获得的电能, 即

$$W = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

下面的问题涉及电容器充、放电过程中的电场、力与能.

例 6 如图 18-14 所示的电路中, $C_1=4C_0, C_2=2C_0, C_3$

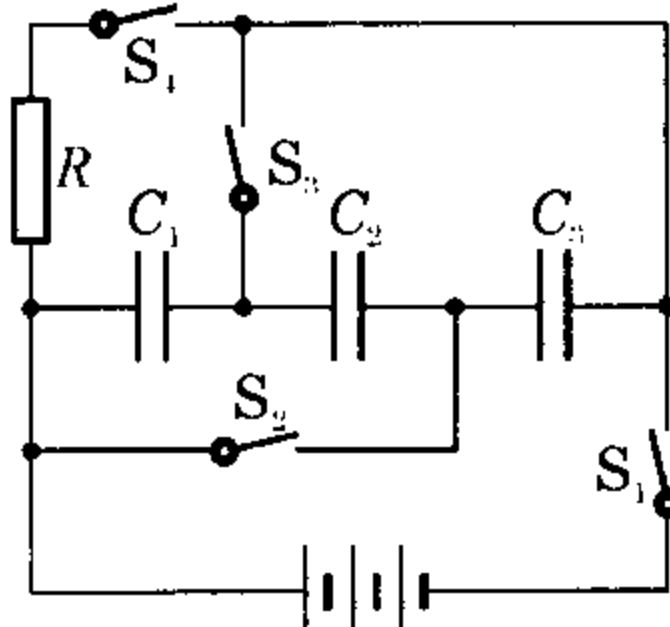


图 18-14

$=C_0$, 电池电动势为 E , 不计内阻, C_0 与 E 为已知量. 先在断开 S_4 的条件下, 接通 S_1, S_2, S_3 , 令电池给三个电容器充电; 然后断开 S_1, S_2, S_3 , 接通 S_4 , 使电容器放电, 求: 放电过程中, 电阻 R 上总共产生的热量及放电过程达到放电总量一半时, R 上的电流.

分析与解 S_4 断开, S_1, S_2, S_3 接通的条件下, 三个电容器并联在电源上, 电路情况如图 18-15 所示, 容易确定, 充电后每个电容器极板上的电量依次为

$$q_1=4C_0 E, q_2=2C_0 E, q_3=C_0 E.$$

然后断开 S_1, S_2, S_3 , 接通 S_4 , 电容器通过电阻 R 放电, 电容器有部分静电能转变为热量. 设稳定后各电容器极板电量情况如图 18-16 所示, 由电荷守恒有

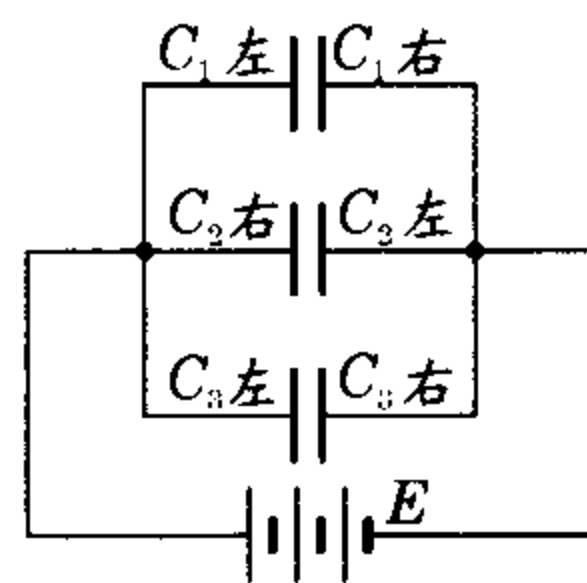


图 18-15

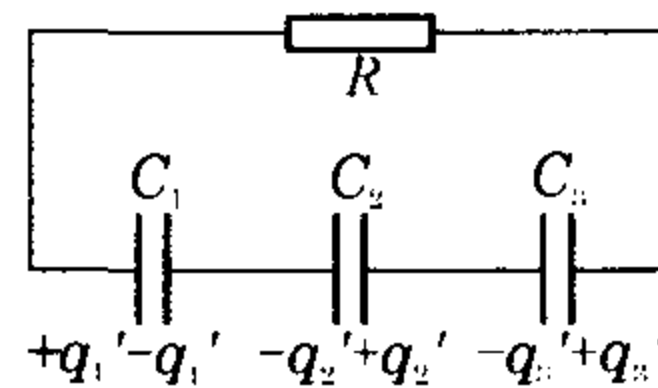


图 18-16

$$q_1' + q_3' = q_1 - q_3, \quad (1)$$

$$q_1' + q_2' = q_1 - q_2. \quad (2)$$

而由 C_1 左板与 C_3 右板等势有

$$\frac{q_1'}{4C_0} = \frac{q_2'}{2C_0} + \frac{q_3'}{C_0}. \quad (3)$$

由此三式解得

$$q_1' = \frac{24}{7} C_0 E, q_2' = \frac{18}{7} C_0 E, q_3' = -\frac{3}{7} C_0 E,$$

于是可得

$$Q = \Delta W = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2 - q_1'^2}{4C_0} + \frac{q_2^2 - q_2'^2}{2C_0} + \frac{q_3^2 - q_3'^2}{C_0} \right),$$

将各电容器放电前后带电量代入此式即得总共产生的热量 $Q = \frac{2}{7} C_0 E^2$.

再分析放电一半时, 电阻两端电势差亦即电容器 C_1 左板与电容器 C_3 右板电势差从 E 减为 $E/2$, 那么通过电阻 R 的电流是 $I = E/2R$.

例 7 在光滑绝缘水平面上, 平行板电容器的极板 A 固定, 极板 B 用绝缘弹簧固定在侧壁上, 如图 18-17 所示, 若将开关 S 闭合, 极板 B 开始平行地向极板 A 移动, 到达新的平衡位置时两极板间距离减少了 $d_1 = 10\%$. 如果开关 S 闭合极短时间后就立刻断开 (此间设极板 B 未及从原位置移动), 求此后极板 B 到达新的平衡位置时两极板间距离减少的百分比 d_2 .

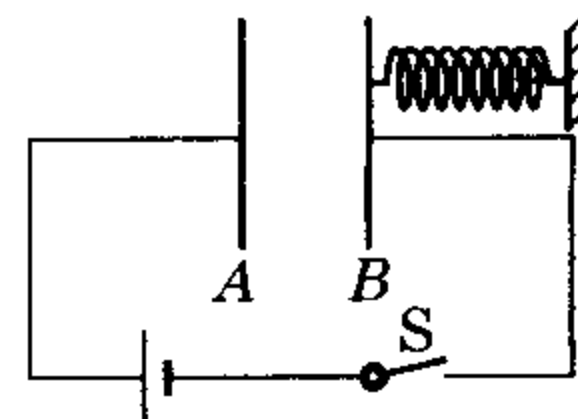


图 18-17

巧手解题

分析与解 设电源提供的电压为 U . 若开关 S 始终闭合, 则 B 板移动过程中两板间电压保持不变为 U , 但由于两板间距减小, 电容将增大, 故电源将不断对电容器充电, 致使两板上电量增加、板间场强增大, 当 B 板上电荷受到 A 板电荷的静电力与弹簧对 B 板的拉力等大时, B 板重新平衡. 设 AB 板原间距为 D , 电容为 C_0 , 弹簧劲度系数为 k . 当两极板间距离减少 10% 时, 电容为 $C = \frac{C_0}{0.9}$, 板间场强为 $E = \frac{U}{0.9D}$, 而 A

板上电荷引起的场强应为 $E_1 = \frac{U}{1.8D}$. 又, A 、 B 两板各带有 $Q = \frac{C_0 U}{0.9}$ 的正、负电荷, 则 B 板受到电场力为 $E_A Q$, 平衡的 B 板受力满足

$$\frac{U}{1.8D} \cdot \frac{C_0}{0.9} U = k \cdot (0.1D). \quad (1)$$

如果开关闭合极短时间后就立刻断开, 随着板 B 的移动, 不变量是两极板上的电量 $Q_0 = C_0 U$ 及板间场强 $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{U}{D}$, 变化的是电容及两板间电压. 这种情况下 B 到达新的平衡位置时, 受力满足

$$\frac{U}{2D} \cdot C_0 U = k \cdot (d_2 D). \quad (2)$$

比较①、②两式可得 $\frac{1}{0.9^2} = \frac{0.1}{d_2}$, $d_2 = 8.1\%$.

例 8 两块平行金属板, 面积都是 ab , 相距为 d , 其间充满介电常数为 ϵ 的均匀介质, 把两块板接到电压为 U 的电池两极上. 现在把板间介质沿平行于 b 边慢慢抽出一段, 如图 18-18 所示, 略去边缘效应及摩擦, 求电场把介质拉回去的力.

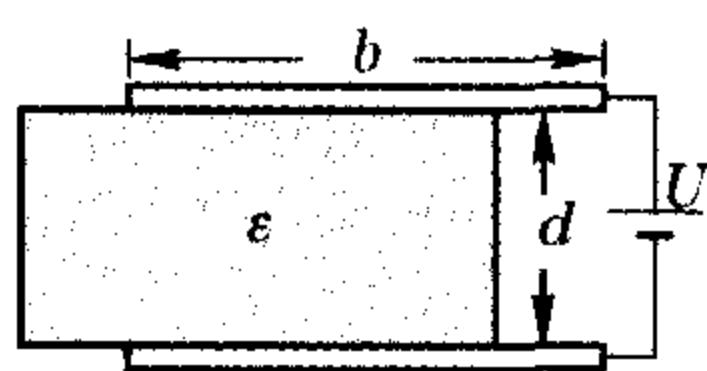


图 18-18

分析与解 把介质慢慢拉出过程, 可视作外力克服电场力做功消耗电场能的过程, 设将介质沿 b 拉出两板边缘 x , 外力大小为 F , 根据功能关系

$$Fx = W_1 - W_2 = \frac{1}{2} U^2 (C_0 - C_x),$$

其中, 介质充满板间时电容器的电容 $C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon ab}{d}$; 介质

抽出 x 时电容器的电容 $C_x = \frac{\epsilon_0 a}{d} [x + \epsilon(b-x)]$, 那么

$$Fx = \frac{U^2 \epsilon_0 a}{2d} \{ \epsilon b - [x + \epsilon(b-x)] \} = \frac{U^2 \epsilon_0 a (\epsilon - 1) x}{2d},$$

故 $F = \frac{U^2 \epsilon_0 a (\epsilon - 1)}{2d}$, 而电场把介质拉回去的力大小亦为此矣.

1. 如图 18-19 所示, 由五个电容器组成的电路, 其中 $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 10 \mu\text{F}$, 求 AB 间的总电容.

2. 在极板面积为 S , 相距为 d 的平行板电容器内充满三种不同的介质, 如图 18-20 所示. (1) 如果改用同一种介质充满板间而电容与之前相同, 这种介质的介电常数应是多少? (2) 如果在 ϵ_3 和 ϵ_1 、 ϵ_2 之间插有极薄的导体薄片, (1) 问的结果应是多少?

3. 球形电容器由半径为 r 的导体球和与它同心的球壳构成, 球壳内半径为 R , 其间一半充满介电常数为 ϵ 的均匀介质, 如图 18-21 所示, 求电容.

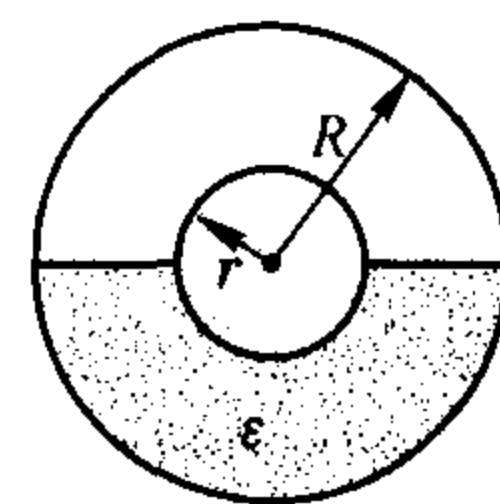
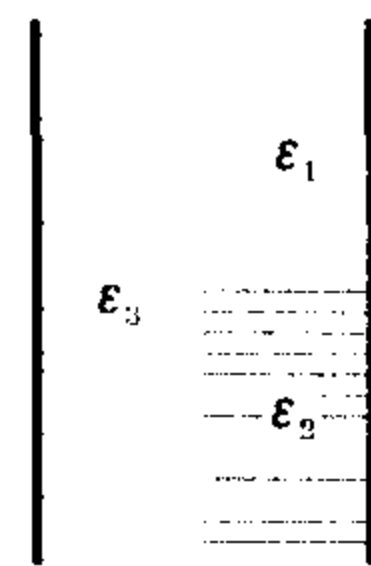
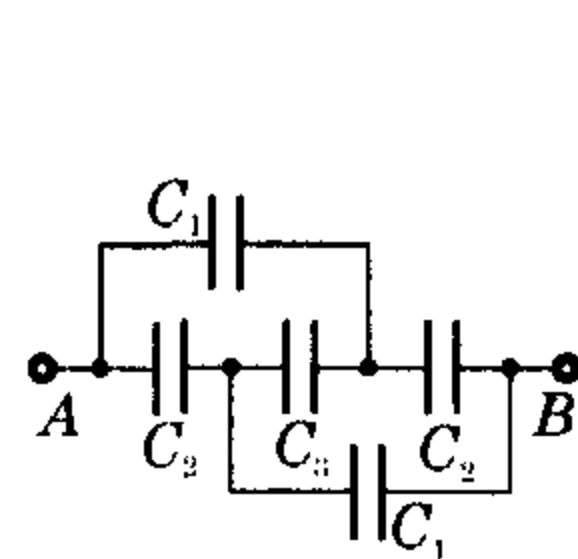


图 18-19

图 18-20

图 18-21

4. 如图 18-22 是一个无限的电容网络, 每个电容均为 C , 求 A 、 B 两点间的总电容.

5. 如图 18-23 所示为共轴的两导体圆柱面组成的电容器. 长 l 、半径分别为 r 和 R . 两圆筒间充满介电常数为 ϵ 的电介质. 求此电容器的电容.

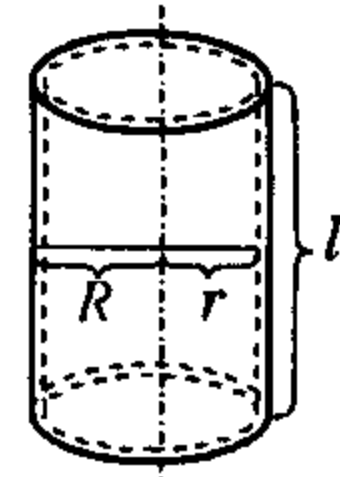
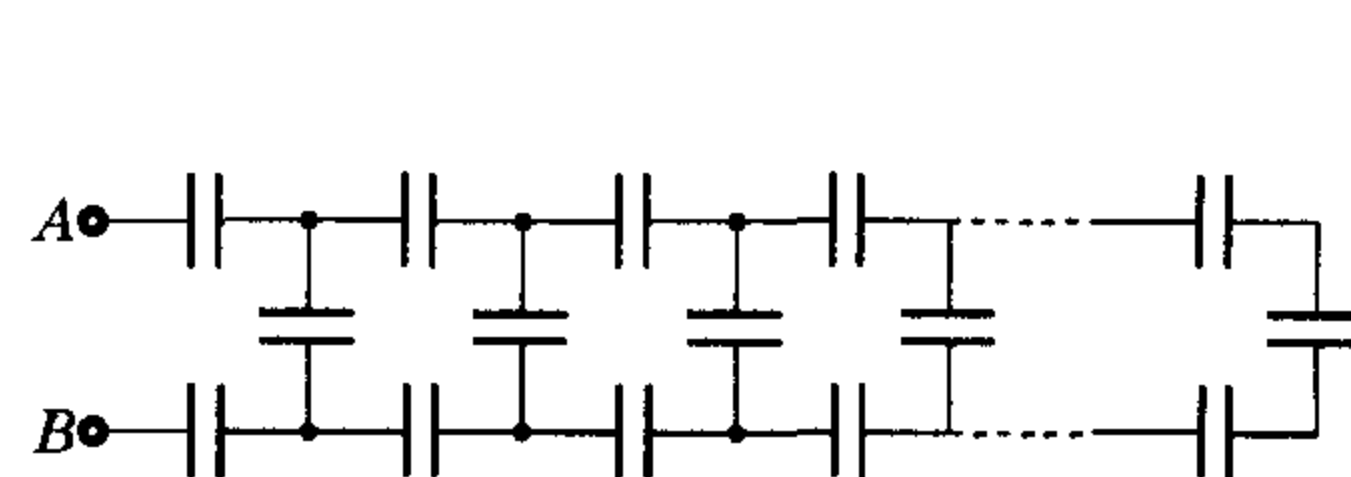


图 18-22

图 18-23

6. 半径分别为 a 和 b 的两个球形导体, 分别带有电荷 q_a 、 q_b , 将其相距很远地放置, 现用一金属导线连接, 试求连接后每球上的电荷量及系统的电容.

7. 平行板电容器的极板面积为 S , 板间距离为 D . 其间充满介质, 介质的介电常数是变化的, 在一个极板处为 ϵ_1 , 在另一个极板处为 ϵ_2 , 其他各处的介电常数与到介电常数为 ϵ_1 处的距离成线性关系, 如

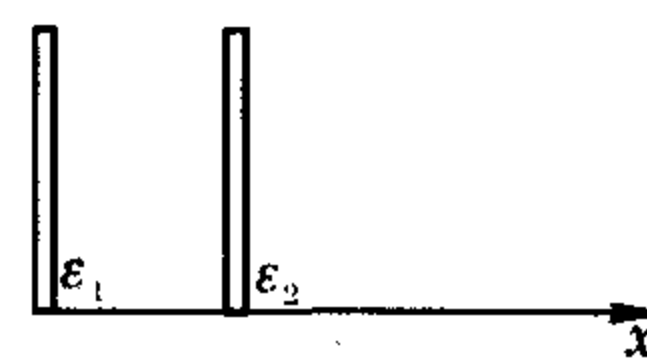


图 18-24

图 18-24 所示, 试求此电容器的电容 C .

8. 电容为 C 的平行板电容器的一个极板上有电量 $+q$, 而另一个极板上有电量 $+4q$, 求电容器两极板间的电势差.

9. 三个电容分别为 C_1 、 C_2 、 C_3 的未带电的电容器, 如 18-25 图示方式相连, 再接到点 A 、 B 、 D 上. 这三

点电势分别为 U_A 、 U_B 、 U_D 。则公共点 O 的电势是多大?

10. 如图 18-26 所示的两块无限大金属平板 A 、 B 均接地, 现在两板之间放入一点电荷 q , 使它距 A 板为 r , 距 B 板 R 。求 A 、 B 两板上的感应电荷电量各如何?

11. 三块相同的平行金属板, 面积为 S , 彼此分别相距 d_1 和 d_2 。起初板 1 上带有电量 Q , 而板 2 和板 3 不带电。然后将板 3、2 分别接在电池正、负极上, 电池提供的电压为 U 。若板 1、3 用导线连接如图 18-27 所示, 求 1、2、3 各板所带电量。

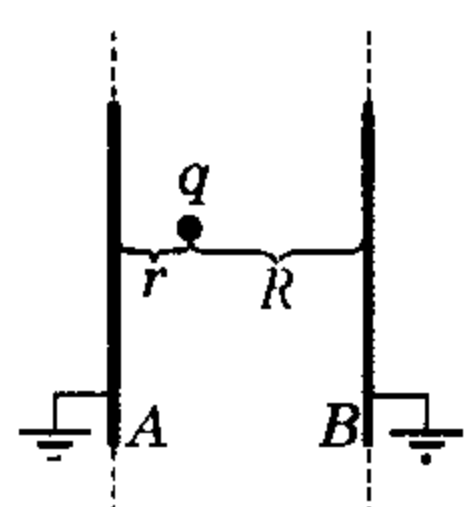


图 18-26

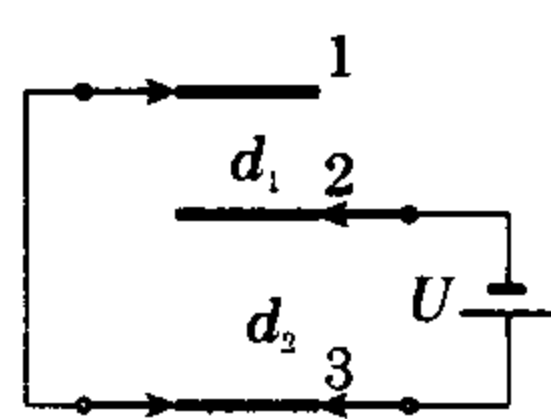


图 18-27

12. 极板相同的两个平行板空气电容器充以同样电量。第一个电容器两极板间的距离是第二个电容器的两倍。如果将第二个电容器插在第一个电容器的两极板间, 并使所有极板都互相平行, 问系统的静电能如何改变?

13. 静电天平的原理如图 18-28 所示, 一空气平行板电容器两极板的面积都是 S , 相距为 x , 下板固定, 上板接到天平的一头, 当电容器不带电时, 天平正好平衡。然后把电压 U 加到电容器的两极上, 则天平的另一头须加上质量为 m 的砝码, 才能达到平衡。求所加的电压 U 。

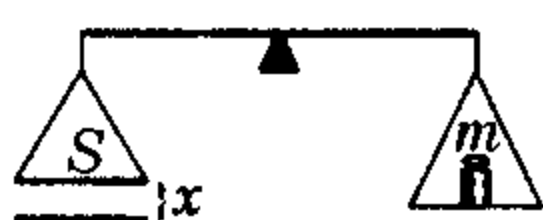


图 18-28

14. 三只电容均为 C 的电容器, 互相串联后接到电源上, 电源电动势为 E 。当电容器完全充电后跟电源断开, 然后接入两只电阻均为 R 的电阻器, 如图 18-29 所示。试问每只电阻上释放的热量有多少? 当中间一只电容器的电压减小到电源电动势 E 的 $1/10$ 的瞬间, 流过电阻 R 的电流 i_1 和 i_2 各为多大?

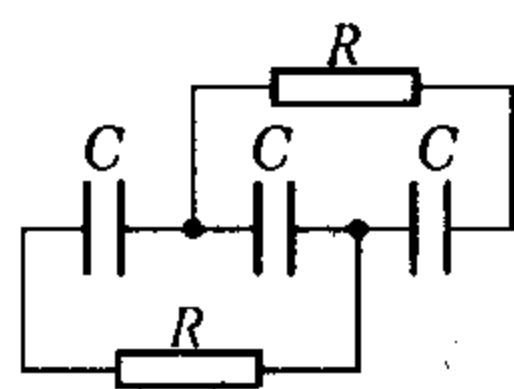


图 18-29

15. 如图 18-30 所示, 两个电容均为 C 的电容器 C_1 和 C_2 , 一个双刀双掷开关 S , 一个可提供恒定电压 U 的蓄电池 E 。将它们适当连接并操作开关, 以使这个电路的输出端得到比 U 高的电压, 试求这个最高输出电压。

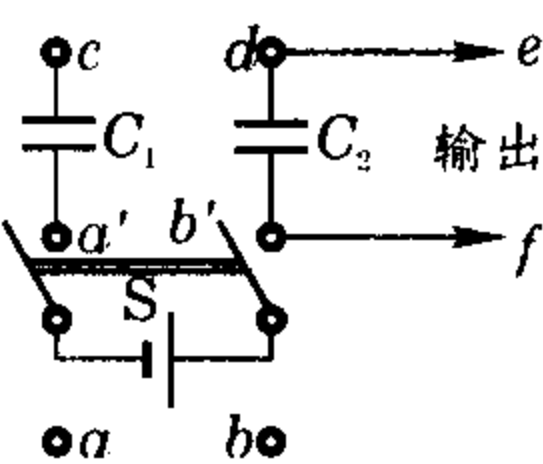


图 18-30

16. (1)(a) 两块边长为 15 cm

图 18-30

的正方形平板, 相距为 5 cm, 组成一个空气平行板电容器, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m。试求该电容器的电容。电容器平板被竖直固定在绝缘支撑物上。(b) 涂有导电漆的球形木髓小球被长为 10 cm 的一段丝线悬挂, 丝线上端固定于 A 板上, 如图 18-31 所示, 木髓小球开始时和 A 板接触。它的质量 $m = 0.1$ g, 半径 $r = 0.3$ cm, 求木髓小球的电容。

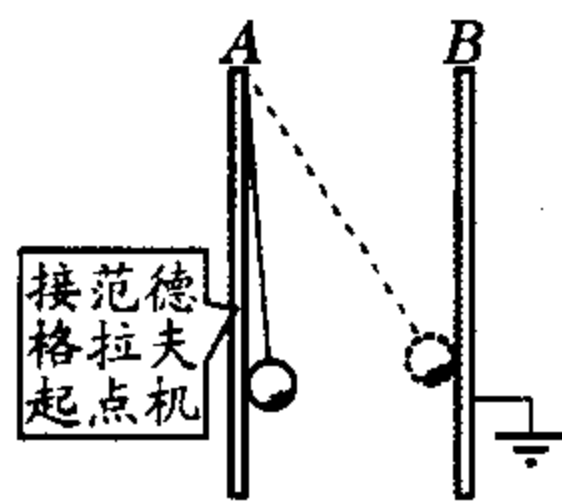


图 18-31

(2) 平板电容器的 B 板接地, A 板与电势为 60 000 V 范德格拉夫起电机作瞬时接触, 然后平板电容器再次绝缘。这时可观察到木髓小球离开 A 板运动到 B 板, 然后再返回到 A 板, 往复几次以后, 木髓小球处于平衡位置, 并且悬挂丝线与 A 板夹角为 θ 。

(a) 解释木髓小球为什么会这样运动并求出它最后的平衡位置;

(b) 计算两平行板之间最终电势差;

(c) 试求木髓小球在静止前来回摆动的次数 k ;

(d) 作一草图, 表示两板电势差与小球在两板间来回振动次数的函数关系 $U_{AB} = f(k)$ 。

17. 有 26 块半径为 R 和 26 块半径为 r ($R > r$) 的薄金属板, 它们被平行地放置, 如图 18-32 所示。任何两块邻近的平板之间的距离均为 d ($d < r$)。用这种方式可形成一电容器, 问应该如何把这些板连接成两组, 使所得的电容量成为最大? 求出这个电容器的最大电容量。

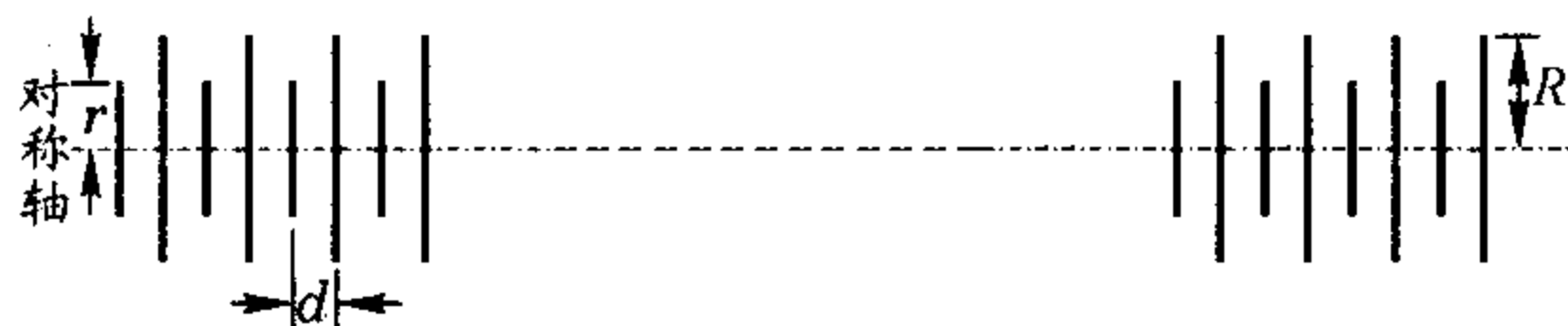


图 18-32

18. 如图 18-33 所示, 恒温的矩形盒内装有理想气体, 当一隔板将矩形盒等分为二时, 两侧气体压强均为 p_0 , 当隔板平移时无摩擦、无漏气, 两侧气体经历准静态过程。隔板是面积为 A 的金属板, 带电量为 Q , 矩形盒上与它平行的两块板也是金属板, 面积同样是 A , 相距为 $2L$, 固定并接地。隔板两侧电场均匀。盒的其余部分是绝缘板。现将隔板拉离原平衡位置一小位移, 试确定隔板的运动状况。

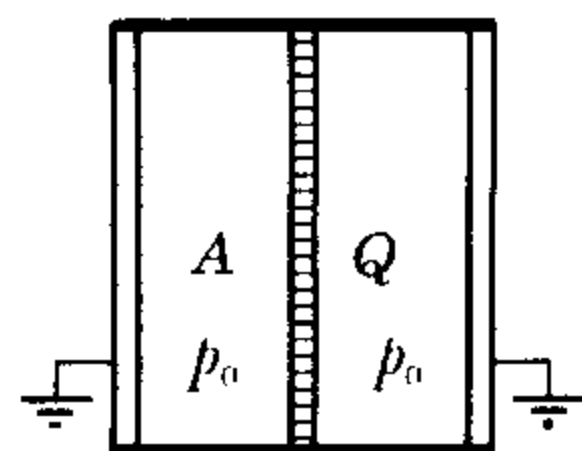


图 18-33

参考答案

1. 五电容直观电路如图答 18-1 所示,设在 A、B 两端加一电压 U , 并设 $U_M > U_N$, $M(N)$ 处连接的三块极板带电总量为 0, 则有

$$U_1 + U_2 = U,$$

$$C_1 U_1 = C_2 U_2 + (U_2 - U_1) C_3.$$

$$\text{解得 } U_1 = \frac{8}{15} U, U_2 = \frac{7}{15} U.$$

$$Q_1 = \frac{8}{15} U C_1, Q_2 = \frac{7}{15} U C_2.$$

$$\text{则 } C = \frac{8}{15} C_1 + \frac{7}{15} C_2 = \frac{74}{15} \mu\text{F}.$$

2. (1) 将电容器划分为如图答 18-2 所示 a 、 b 、 c 、 d 四部分, 所求等效电容为 a 与 b 串联、 c 与 d 串联后两部分再并联而成, 则

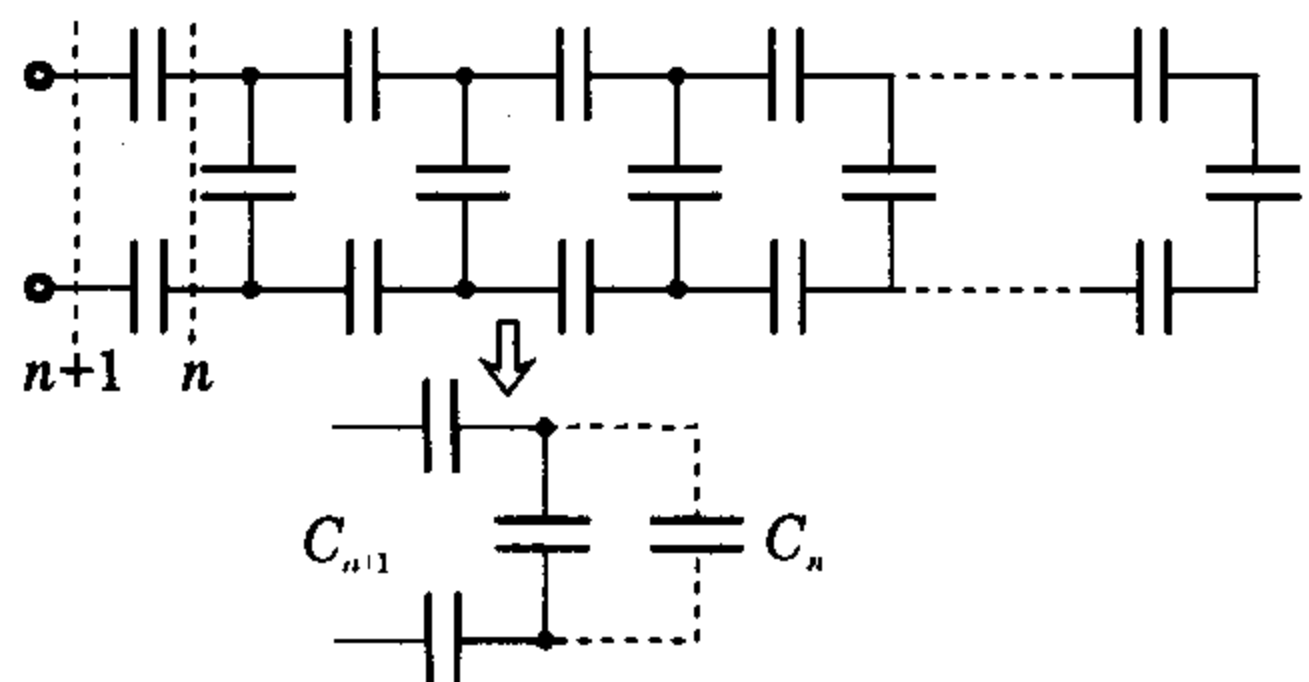
$$\epsilon = \frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}.$$

(2) 如果在 ϵ_3 和 ϵ_1 、 ϵ_2 之间插有极薄的导体薄片, 则 b 、 d 两部分与 ϵ_3 部分交接处等势, 此时等效电容应是介电常数为 ϵ_3 部分与并联后的介电常数为 ϵ_1 、 ϵ_2 两部分串联而成, 故

$$\epsilon' = \frac{2\epsilon_3(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

3. 球形电容器的电容 $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$, 本题电容器等效于介电常数为 1 和 ϵ 的两半球电容器并联, 故电容为 $C = 2\pi\epsilon_0 \frac{Rr}{R-r}(1+\epsilon)$.

4. 如图答 18-3 所示, 这个网络是由一个个相同的单元构成, 若前 n 个单元的电容为 C_n , 则



图答 18-3

$$C_{n+1} = \frac{(C_n + C) \cdot \frac{C}{2}}{C_n + C + \frac{C}{2}}, \text{ 在 } n \rightarrow \infty \text{ 时 } C_{n+1} = C_n, \text{ 即}$$

$$C_n = \frac{(C_n + C) \cdot \frac{C}{2}}{C_n + C + \frac{C}{2}}, \text{ 整理得 } 2C_n^2 + 2CC_n - C^2 = 0.$$

该方程的正根为网络的电容 $C_n = \frac{\sqrt{3}-1}{2} C$.

5. 设圆柱面电容器电容为 C , 它由 n 个电容为 nC 的元柱面电容器串联而成, 元柱面电容器可视为平行板电容器, 第 i 个元电容为

$$nC = \frac{\epsilon_0 \epsilon 2\pi r_i l}{r_i - r_{i-1}}, \quad \frac{r_{i-1}}{r_i} = 1 - \frac{\epsilon_0 \epsilon 2\pi l}{nC},$$

两边取 n 次方的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot 2\pi l}{nC}\right)^n$, 得

$$\frac{r}{R} = e^{-\frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot 2\pi l}{C}}. \text{ 故 } C = \frac{2\epsilon_0 \epsilon \pi l}{\ln R - \ln r} \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot 2\pi r l}{R - r}.$$

6. 设金属线连接两球后, 两球分别带电 q_a' 和 q_b' , 由于电荷守恒 $q_a' + q_b' = q_a + q_b$, 又因两球等势且相距很远, 有 $\frac{q_a'}{a} = \frac{q_b'}{b}$, 由此二式得

$$q_a' = \frac{a}{a+b}(q_a + q_b), \quad q_b' = \frac{b}{a+b}(q_a + q_b),$$

而此时两球电势均为 $U = \frac{k(q_a + q_b)}{a+b}$,

由电容定义得此系统的电容为 $C = \frac{q_a + q_b}{U} = \frac{a+b}{k}$.

7. 如图答 18-4 所示, 建立 x 坐标, 那么依题意 $\epsilon_i = \epsilon_1 + kx$, 故 $k = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{D}$. 设此电容器的电容为 C , 由 n

个电容为 nC 的元电容器串联而成, 第 i 个电容器电容

$$nC = \frac{\epsilon_0 S \epsilon_i}{r_i - r_{i-1}} = \frac{k \epsilon_0 S \epsilon_i}{\epsilon_i - \epsilon_{i-1}},$$

整理得 $\frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i} = 1 - \frac{k \epsilon_0 S}{nC}$, 对此式两边

取 n 次方的极限有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k \epsilon_0 S}{nC}\right)^n$, 解得

$$C = \frac{\epsilon_0 k S}{\ln \epsilon_2 - \ln \epsilon_1} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) S}{D (\ln \epsilon_2 - \ln \epsilon_1)}.$$

8. 在每个板上附加 $-2.5q$ 的电量将不影响两板间电场与电势差而电容器带电成“标准状况”: 两板带等量异种电荷, 电容器带电量为 $1.5q$, 则 $U = \frac{3q}{2C}$.

9. 考虑电容器电容、电压与电量之间的关系, 设三个电容器极板上的电量依次为 q_1 、 q_2 、 q_3 , 那么三个电容器可有如下对应的方程:

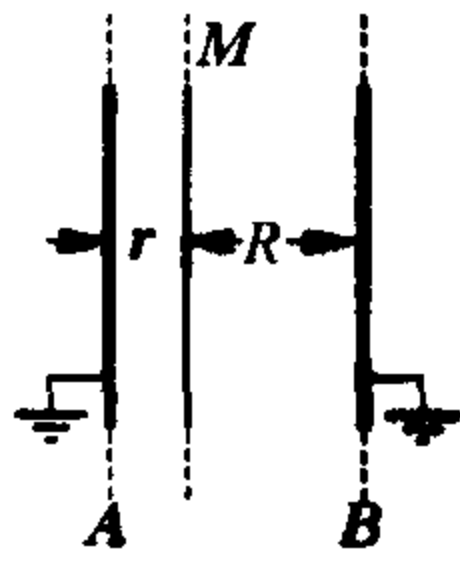
$$U_A - U_O = \frac{q_1}{C_1}, \quad U_B - U_O = \frac{q_2}{C_2}, \quad U_D - U_O = \frac{q_3}{C_3}.$$

而同连在 O 点有三个电容器的三块极板所构成的孤立系统电荷守恒 $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, 由以上四式解得

$$U_O = \frac{U_A C_1 + U_B C_2 + U_D C_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

10. 对无限大接地金属平板而言, 在距板 r 处的带电量为 q 的点电荷引起的电场及感应电荷, 与将电荷 q 等分为二, 均放在距板 r 处, 两个 $q/2$ 引起的电场

及感应电荷叠加,是完全等效的.我们可以再设想将 q 均匀细分为 n 份且均匀分布在距板 r 处的平面 M 上,如图答 18-5 所示,这样一个带电面与点电荷 q 也是完全等效的,于是我们看到了 AM 电容器与 BM 电容器并联的情况,总电量为 q ,那么, A 、 B 两板上感应电荷电量



图答 18-5

$$q_A = \frac{R}{R+r}q, q_B = \frac{r}{R+r}q.$$

11. 设三块板上电量依次为 $+q_1$ 、 $-q_2$ 、 $+q_3$, 由电荷守恒 $q_1 - q_2 + q_3 = Q$, ① 1、2 板间电场为

$$E_{12} = \frac{q_1 + q_2 - q_3}{2\epsilon_0 S}; 3、2 板间电场为 E_{23} = \frac{q_1 - q_2 - q_3}{2\epsilon_0 S},$$

则 $U = \frac{q_1 + q_2 - q_3}{2\epsilon_0 S} \cdot d_1; U = \frac{q_3 + q_2 - q_1}{2\epsilon_0 S} d_2$, 此两式等号两边相加得 $q_2 = \epsilon_0 US (\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2})$, 此两式等号两边相减得

$$q_1 - q_3 = \epsilon_0 US (\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}), \quad ④$$

由①、④两式可得

$$q_1 = \frac{Q}{2} + \frac{\epsilon_0 SU}{d_1}, q_3 = \frac{Q}{2} + \frac{\epsilon_0 SU}{d_2}.$$

12. 插入前, 有 $W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1}, W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_2}$,

$\because d_1 = 2d_2, C_1 = \frac{C_2}{2}$, 两

电容器总电能 $W_0 =$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{Q^2}{C_1}$. 第二个电容器按

两种方式插入后, 电荷分布

分别如图答 18-6 甲和

乙所示, 按甲方式有

$$W_{甲} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4C_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2Q)^2}{2C_1} = \frac{5Q^2}{4C_1} = \frac{5}{3} W_0;$$

按乙方式有 $W_{乙} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4C_1} = \frac{Q^2}{4C_1} = \frac{1}{3} W_0$.

13. 电容器带电时, 上极板所受电场力矩与质量为 m 的砝码重力矩平衡, 即 $F_e = mg$, 而 $F_e = \frac{E}{2} \cdot Q$

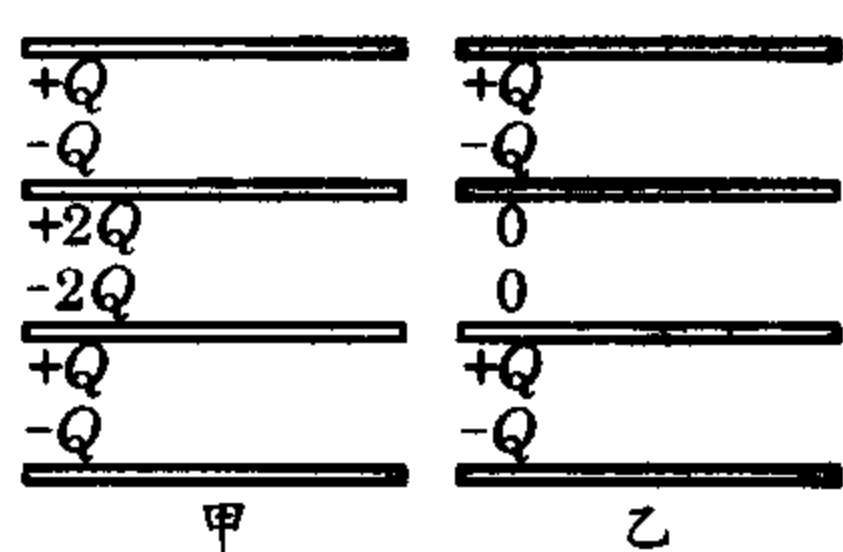
$$= \frac{U}{2x} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{x} \cdot U, \text{ 则有 } \frac{\epsilon_0 SU^2}{2x^2} = mg, U = x \sqrt{\frac{2mg}{\epsilon_0 S}}.$$

14. 充电完毕时, 串联的每个电容器上电量为 $\frac{1}{3}CE$, 接上电阻器 R , 直观电路如图答 18-7 所示, 稳定后, 相当于三个电容并联, 每个电容器电量为 $q' =$

$\frac{1}{9}CE$, 则释放的热量为 $Q_{放} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C/3} - \frac{1}{2} \frac{(3q')^2}{3C}$

$= \frac{4}{27}CE^2$, 每个电阻上放热 $Q_{R放} = \frac{2}{27}CE^2$; 中间一只电

容器的电压减小到 $E/10$ 的瞬间, 若其左板电势高于



图答 18-6

右板, 其左板电量为 $\Delta q_2 = \frac{7}{30}CE$, 由对称性, 通过上方

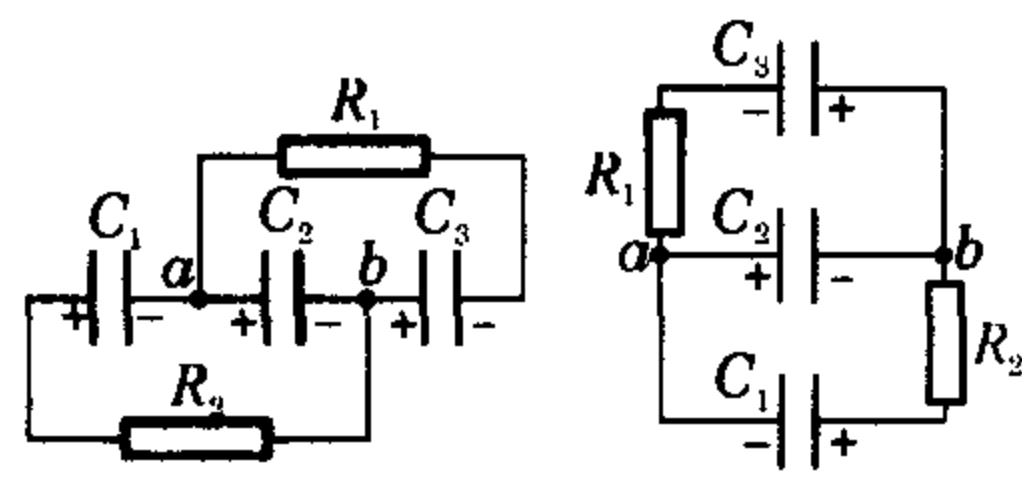
电阻 R_1 到电容 C_3

右板 (此时带电为

负) 的电量为 $\frac{7}{60}CE$,

则电容器 C_3 带电量

为 $q_3 = \frac{13}{60}CE$, 电阻



图答 18-7

R_1 两端电压为 $U_{R_1} = (\frac{1}{10} + \frac{13}{60})E = \frac{19}{60}E$, 则 $i_1 = \frac{19}{60R}E$, 同

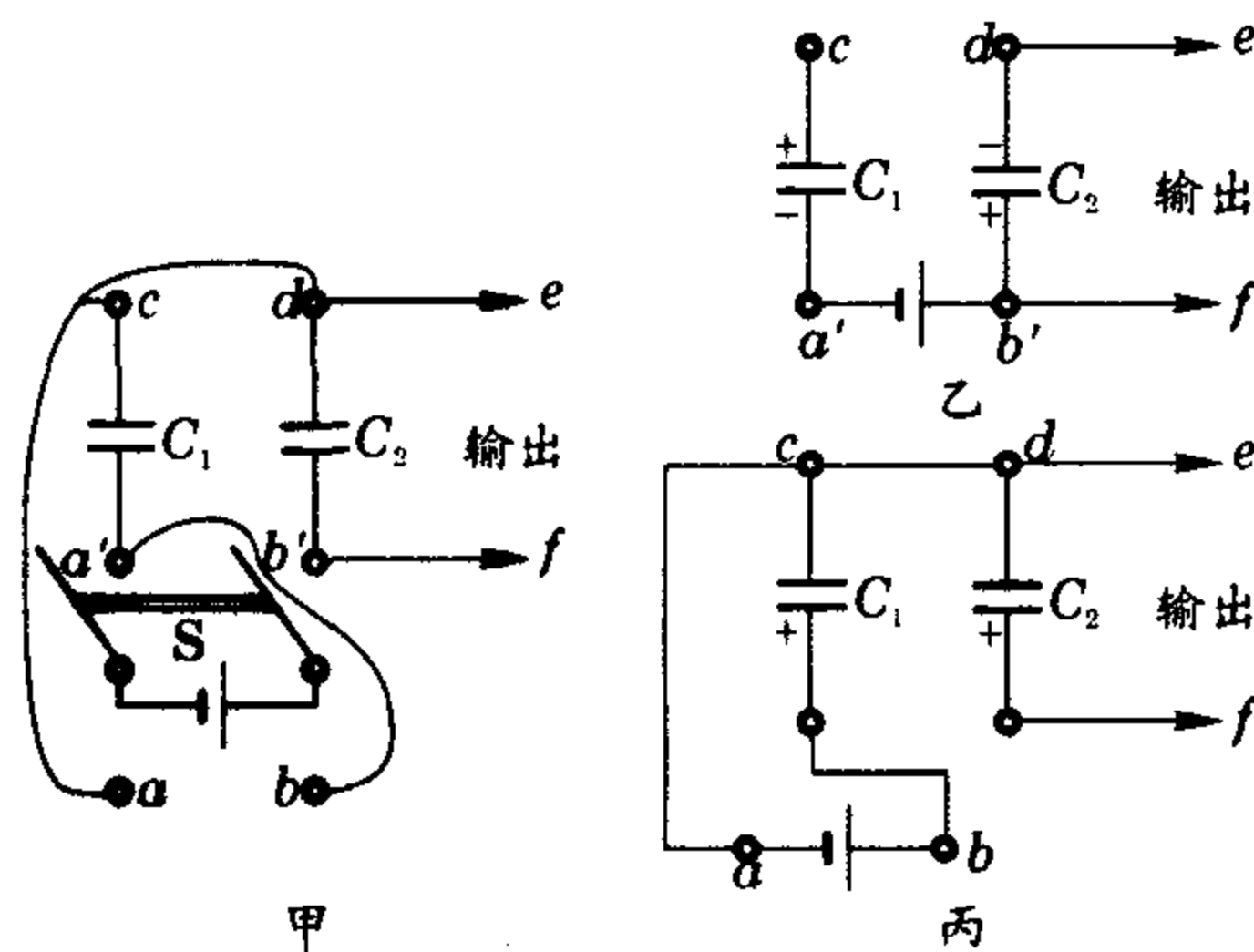
理有 $i_2 = \frac{19}{60R}E$; 另一种情况是中间一只电容器的电压

减小到 $E/10$ 的瞬间, 若其右板电势高于左板, C_1 左板

此时带电为负、 C_3 右板带电为正, 则 $\Delta q_2' = \frac{13}{30}CE$, 这

样 $i_1' = i_2' = \frac{1}{60R}E$.

15. 连接 acd ; 连接 $a'b$, 形成图答 18-8 甲所示电路, 通过开关交替掷在 $a'b'$ 与掷在 ab , 电容器 C_1 从电源获得能量, 对电容器 C_2 反复充电以提高其输出电压.



图答 18-8

先将开关掷 $a'b'$, U 加在串联的 $C_1 C_2$ 两端, 两电容均充电, C_2 输出电压 $U_1 = U/2$ 此时, 板上电量为 $CU/2$, 上板为负、下板为正, 如图答 18-8 乙所示; 然后

开关掷 ab , C_1 充电至电压 U 、电量 CU , 上板为负、下板

为正; 再将开关掷 $a'b'$, C_1 上板与 C_2 上板总电量为

$-\frac{3CU}{2}$, 稳定后 $CU_{12} + CU_{22} = \frac{3}{2}CU, U_{22} - U_{12} = U$,

故 $U_{22} = \frac{5}{4}U$; 开关动作再重复一次

$$CU_{13} + CU_{23} = \frac{9}{4}CU, U_{23} - U_{13} = U,$$

故 $U_{23} = \frac{13}{8}U$, 递推到第 n 次开关掷 $a'b'$, $U_{2n} =$

$\frac{2^{n+1}-3}{2^n}U$, 故 C_2 输出电压最大

$$U_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}-3}{2^n}U = 2U.$$

16. (1)(a) 由平行板电容器公式得空气平行板电

容器的电容

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (15 \times 10^{-2})^2}{5 \times 10^{-2}} \text{ F} \approx 3.98 \text{ pF};$$

(b) 由孤立球电容公式得木髓小球电容

$$C_0 = \frac{R}{k} = \frac{0.05}{9 \times 10^9} \text{ F} \approx 0.333 \text{ pF}.$$

(2)(a) 小球带电后被 A 板静电排斥, 与 B 板接触时放电. 而后受重力作用摆回 A 板充电, 再被推到 B 板放电, 如此往复 k 次, 使板间电压减小、场强减小, 直至小球所受电场力与重力及丝线张力平衡而静止在将要接触 B 板但未放电的位置, 则丝线与 A 板夹角为

$$\theta = \arcsin \frac{5-0.3}{10} \approx 28^\circ;$$

(b) 由于小球处于平衡状态, 有

$$\tan \theta = \frac{U_k \cdot C_0 U_k}{dmg},$$

$$U_k = \sqrt{\frac{5 \times 10^{-2} \times 0.1 \times 10^{-3} \times 9.8}{0.333 \times 10^{-12}} \tan \theta} \approx 8840 \text{ V};$$

(c) 初时 A 板与小球电势均为 $U_0 = 60000 \text{ V}$, 小球推开后 A 的电势变成 U_1 , 板上电量为 CU_1 , 小球上电量为 $C_0 U_0$, 由电荷守恒 $CU_0 = CU_1 + C_0 U_0$, $U_1 = \frac{C-C_0}{C} U_0$, 小球与板第二次接触必达到等电势 U_1 , 分开后由电荷守恒

$$CU_1 = CU_2 + C_0 U_1, U_2 = \frac{C-C_0}{C} U_1 = \left(\frac{C-C_0}{C}\right)^2 U_0,$$

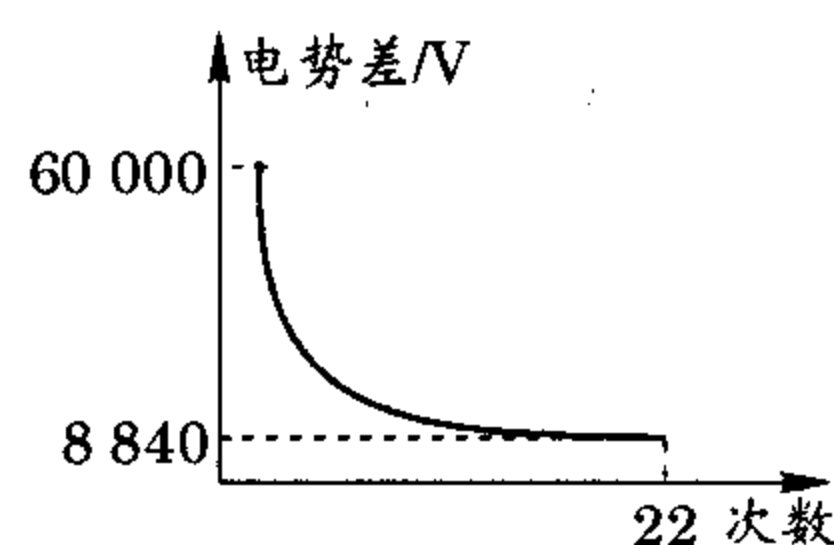
依次类推, 有 $U_k = \left(\frac{C-C_0}{C}\right)^k U_0$,

代入数据, 可得

$$k = \frac{\lg \frac{8840}{69000}}{\lg \frac{3.98-0.333}{3.98}}$$

≈ 21.9 , 故取 $k=22$ 次;

(d) 如图答 18-10 所示.



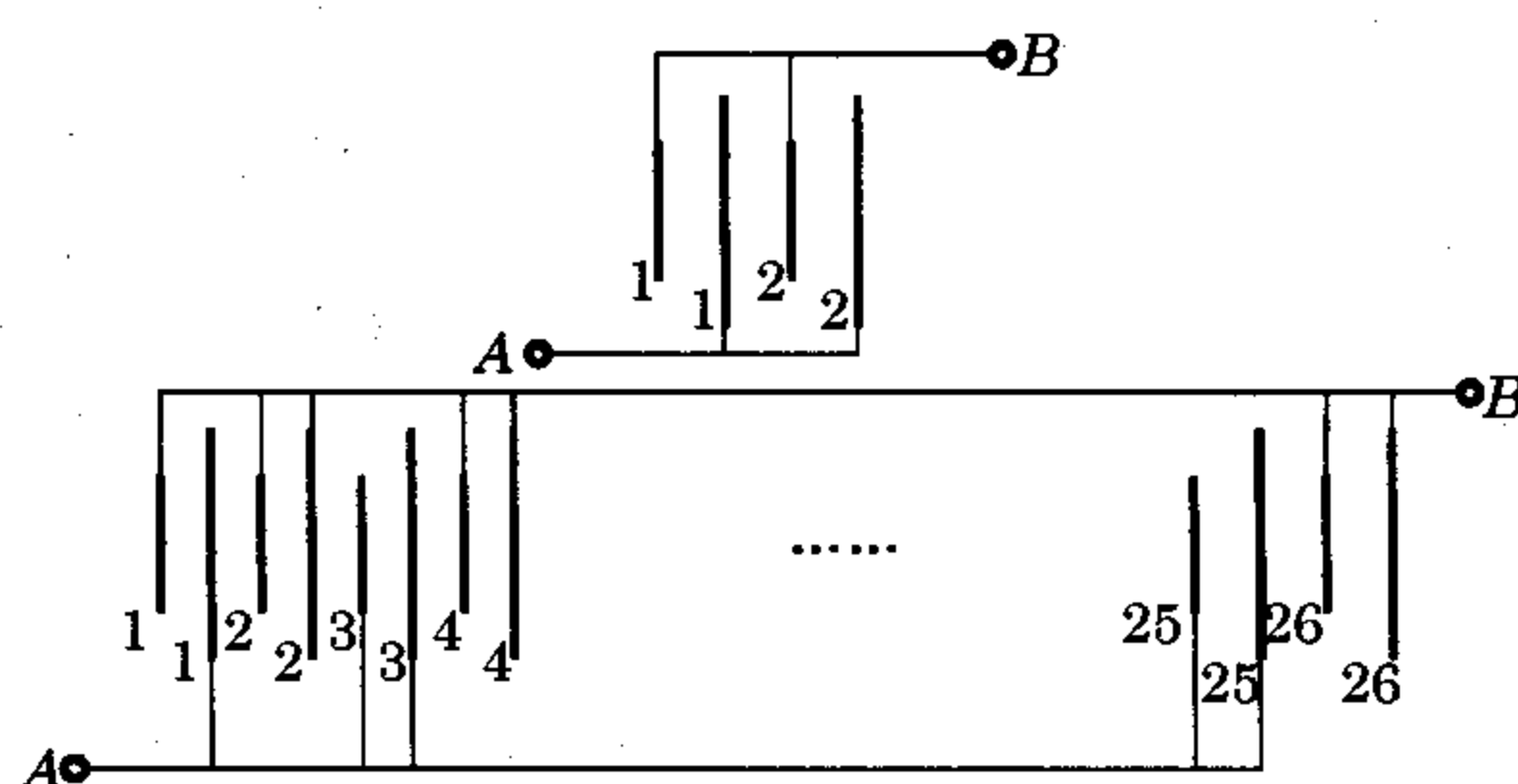
图答 18-10

17. 要使总电容最大, 采用并联形式为好, 故首先设计将小板联在一个电势点, 大板联在一个电势点, 这就相当于 51 个电容为 $C_0 = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$ 的电容并联, 总电容

$$C_1 = \frac{51 \epsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

设法增大每个被并联的电容器的正对面积也是增大电容的一条途径, 由此想到: 若两对大、小板如图答 18-11 连接, 小板 1 与大板 1 构成的电容器电容即 $C_0' = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$, 大板 1 与连通的小板 2 大板 2 构成的电容器电容为 $C = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d} + \frac{\epsilon_0 \pi (R^2 - r^2)}{2d} = \frac{\epsilon_0 \pi (R^2 + r^2)}{2d}$. 这样, 我们总共可以有 25 个 C 与 1 个 C_0 , 把它们全部并联, 做法是按从左向右的顺序, 除小板 1 外的奇数序号

大板及小板联在同一电势点 A, 偶数序号大板及小板外加小板 1 联成电势点 B, 这样, 总电容为



图答 18-11

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d} + \frac{25 \epsilon_0 \pi (R^2 + r^2)}{2d} = \frac{\epsilon_0 \pi (25R^2 + 27r^2)}{2d};$$

比较 C_1 和 C_2 , 当 $25R^2 + 27r^2 > 102r^2$, $R > \sqrt{3}r$, 最大电容为 $C_2 = \frac{\epsilon_0 \pi (25R^2 + 27r^2)}{2d}$,

否则最大电容为 $C_1 = \frac{51 \epsilon_0 \pi r^2}{d}$.

18. 设隔板向右发生一小位移 x , 两侧气体对隔板的压力

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{x左} - F_{x右} = \frac{L}{L+x} p_0 A + \frac{L}{L-x} p_0 A \\ &= -\frac{2Lx}{L^2 - x^2} p_0 A, \end{aligned}$$

带电隔板在两侧电场中受电场力. 当隔板向右移动 x 时, 右边电容器的电容为 $C_{右} = \frac{\epsilon_0 A}{L-x}$, 左边电容器电容 $C_{左} = \frac{\epsilon_0 A}{L+x}$, 两电容器是并联关系, 故隔板两侧面各分布电量为

$$Q_{右} = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{L+x}}{\frac{\epsilon_0 A}{L-x} + \frac{\epsilon_0 A}{L+x}} Q = \frac{L-x}{2L} Q, Q_{左} = \frac{L+x}{2L} Q.$$

两边电场强度大小 $E_{右} = \frac{(L-x)Q}{2\epsilon_0 LA}$, $E_{左} = \frac{(L+x)Q}{2\epsilon_0 LA}$,

隔板上电荷受两侧电场静电力合力

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{x右} - F_{x左} \\ &= \frac{(L-x)Q}{4\epsilon_0 LA} \cdot \frac{L-x}{2L} Q - \frac{(L+x)Q}{4\epsilon_0 LA} \cdot \frac{L+x}{2L} Q \\ &= \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 LA}, \end{aligned}$$

隔板受到的合力为

$$\sum F = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 LA} - \frac{2Lx}{L^2 - x^2} p_0 A \approx \left(\frac{Q^2}{2\epsilon_0 LA} - \frac{2p_0 A}{L}\right) x.$$

由此, 若 $\frac{Q^2}{2\epsilon_0 LA} < \frac{2p_0 A}{L}$, $Q^2 < 4\epsilon_0 p_0 A^2$, 隔板将在盒正中间做小幅简谐运动, 而若 $Q^2 > 4\epsilon_0 p_0 A^2$, 隔板将一直向右(左)靠到盒右(左)侧, 而 $Q^2 = 4\epsilon_0 p_0 A^2$, 则静止在新位置.



专题 19 电阻等效方法

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

计算一个电路的电阻,通常从电路的欧姆定律出发,对电阻串联构成的电路,电流为 I ,则 $IR = IR_1 + IR_2 + \dots$;对电阻并联构成的电路,两端电压为 U ,则 $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots$,于是得到串联电路的等效电阻为各个串联电阻之和,并联电路的等效电阻为各个并联电阻的调和平均.实际电路中,电阻的连接是千变万化的,这需要我们运用各种技法,通过等效变换将复杂电路降解为简单的直观的串、并联电路,这是一件饶有趣味的工作.本专题将介绍几种常用的连接复杂的二端电路及网络电路的等效电阻的计算方法.

一、对称法

这种方法适用于具有一定对称性的电路,通过对等势点拆、合和对称电路的“折叠”,使电路简化为基本的串、并联形式.

例 1 如图 19-1 所示,12 个阻值都是 R 的电阻,组成一立方体框架,试求 A、C 间的电阻 R_{AC} 和 A、B 间的电阻 R_{AB} 与 A、G 间的电阻 R_{AG} .

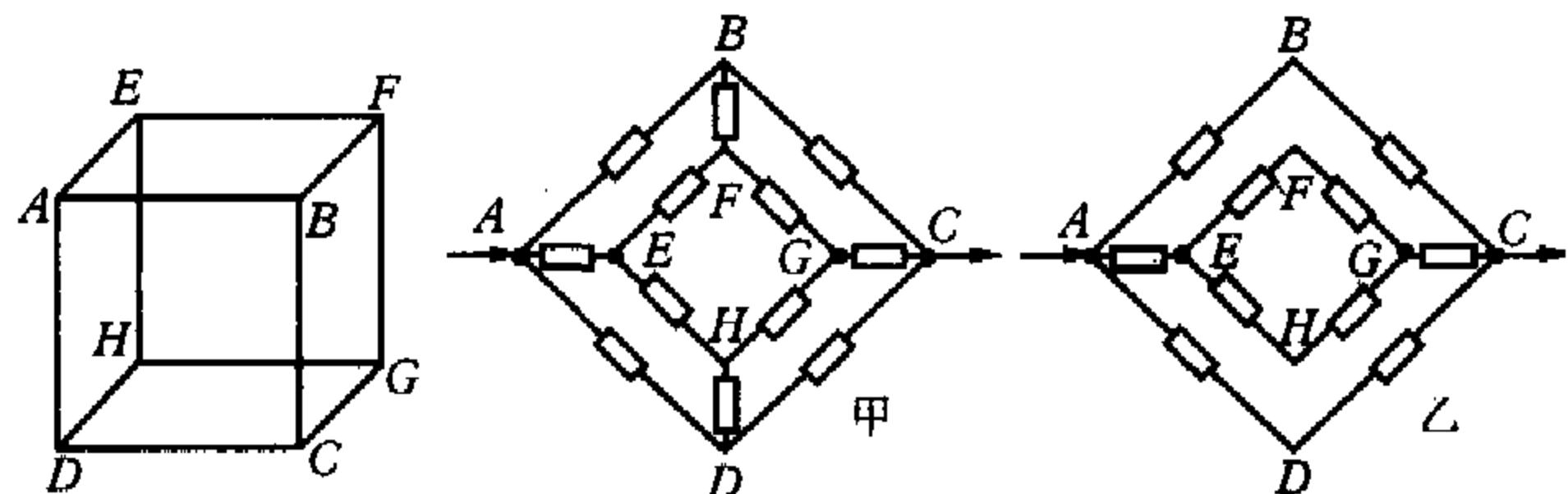


图 19-1

图 19-2

分析与解 所谓 A、C 间的电阻 R_{AC} ,即电流从 A 点流入 C 点流出所通过的电路的等效阻值.先设想 12 个电阻的载体——框架的几何形状从立方体改变为正四棱台(ABCD 与 EFGH 为它的两个底面),将棱台的一个底面压向另一个底面,12 个电阻连接成平面电路如图 19-2 甲所示,根据电路的轴对称性可知 B、F、H、D 四点电势相等,电路等效于图 19-2 乙,这个连接很直观:两个 $2R$ 与一个 $3R$ 并联,其总电阻为

$$R_{AC} = \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = \frac{3}{4}R.$$

求 A、B 间的电阻 R_{AB} 时,将立方体框架对称地“压缩”到 ABHG 所在平面,画出电流从 A 流入 B 流出的平面电路如图 19-3,其中由于对称,E 与 D、C 与 F 已合为一个电势点,对应的电阻为 R 的 AE 与 AD、EH 与 DH、EF 与 DC、BF 与 BC、

FG 与 CG 并联电阻均等效为 $\frac{R}{2}$,这个电路的连接也是直观的,

$$R_{AB} = \frac{7}{12}R.$$

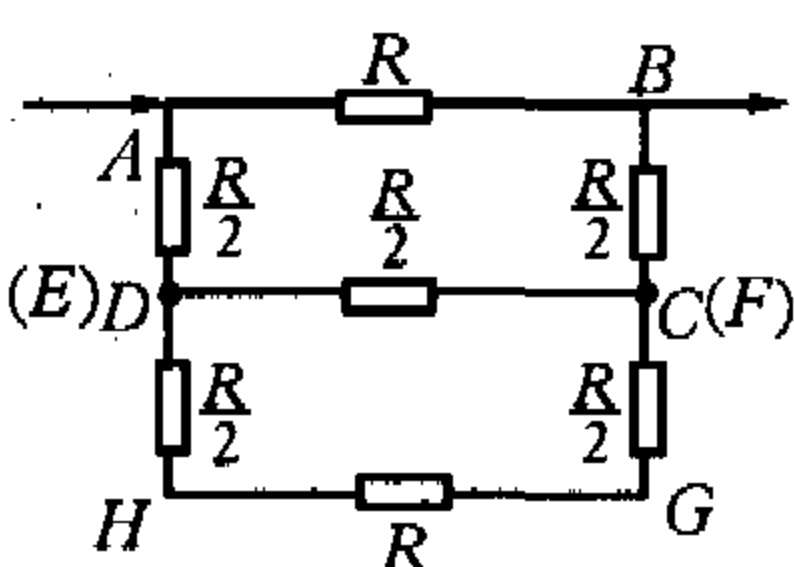


图 19-3

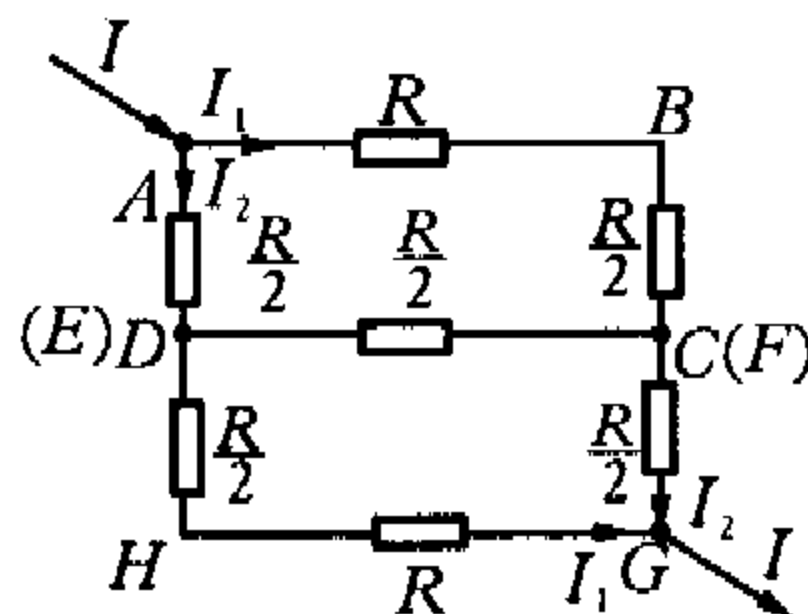


图 19-4

求 A、G 间的电阻 R_{AG} 稍微麻烦些,简化为平面电路的操作与前述相同,但电流 I 从 A 点流入 G 点流出,如图 19-4 所示,电阻的连接非纯串、并联而具有共轭对称性:流过 ABC 的电流与流过 EHG 的电流相同,设为 I_1 ,流过 AE 的电流与流过 CG 的电流相同,设为 I_2 .对 ABCG 段,有

$$I_1 \cdot \frac{3}{2}R + I_2 \cdot \frac{1}{2}R = IR_{AG};$$

对 EC 段有 $I_1 \cdot \frac{3}{2}R - I_2 \cdot \frac{1}{2}R = (I_2 - I_1) \frac{R}{2}$,

则 $I_2 = 2I_1$,而 $I = I_1 + I_2$,可得 $R_{AG} = \frac{5}{6}R$.

例 2 如图 19-5 所示的正方形网格由 24 个电阻 $r_0 = 8 \Omega$ 的电阻丝构成,电池电动势 $E = 6.0 \text{ V}$,内电阻不计,求通过电池的电流.

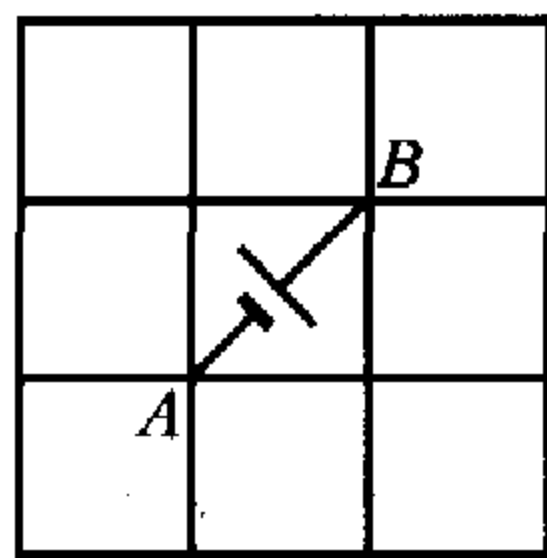


图 19-5

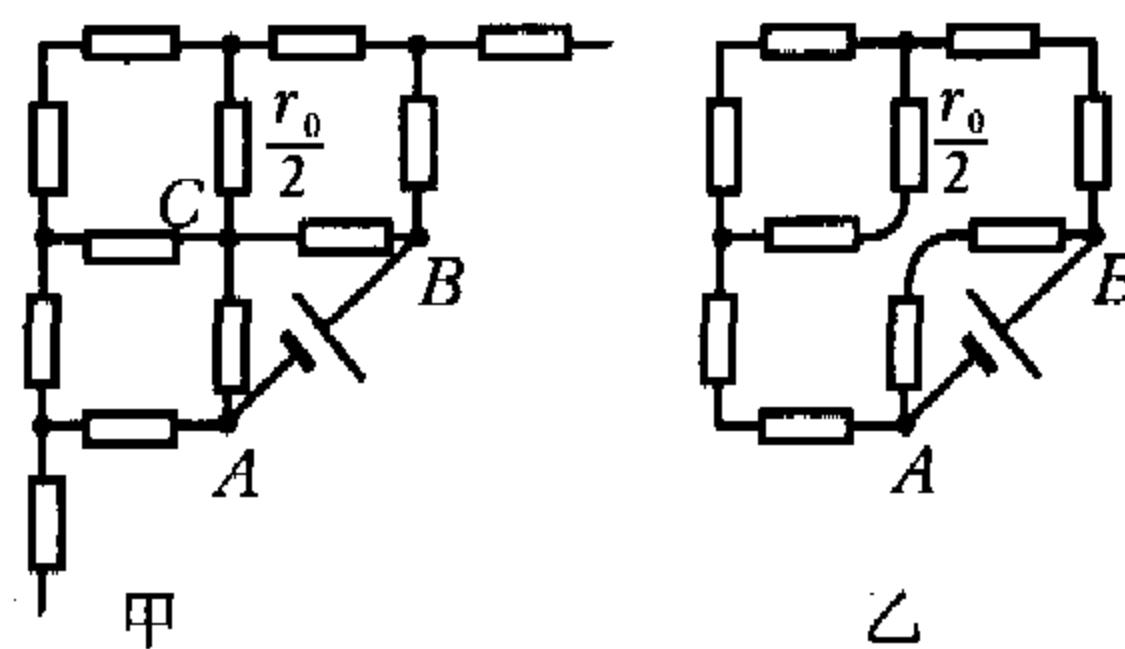


图 19-6

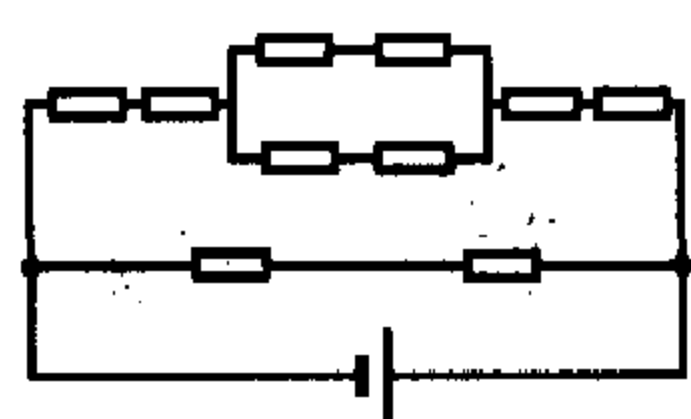
分析与解 只要求出 A、B 间的等效电阻值,即可由全电路欧姆定律求出通过电池的电流.

显然,电路关于过 A、B 的对角线对称,对称点等电势,将网格沿 AB 对折,于是 AB 间电路等效为图 19-6 甲,其中每个电阻均为 $\frac{r_0}{2}$,有两个并无电流通过可略去,再将 C 点拆分,电路等效为图 19-6 乙所示,画成标准电路如图 19-7,容易计算

它的总电阻为 $R_{AB} = \frac{r_0 \times 2.5r_0}{r_0 + 2.5r_0} =$

$\frac{5}{7}r_0 = \frac{40}{7} \Omega$, 则通过电池的电流 $I =$

$\frac{E}{R_{AB}} = 1.05 \text{ A}$.



19-7

例3 波兰数学家谢尔宾斯基在

1916年研究了一个有趣的几何图形. 他将如图19-8甲所示的一块黑色的等边三角形ABC的每一个边长平分为二, 再把平分点联起来, 此三角形被分成四个相等的等边三角形, 然后将中间的等边三角形挖掉, 得到如图19-8乙的图形; 接着再将剩下的黑色的三个等边三角形按相同的方法处理, 经过第二次分割就得到图19-8丙的图形. 经三次分割后, 又得到图19-8丁的图形. 这是带有自相似特征的图形, 这样的图形又称为谢尔宾斯基镂垫. 它的自相似性就是将其中一个小单元(例如图19-8丁中的 $\triangle BJK$)适当放大后, 就得到图19-8乙的图形. 如果这个分割过程继续下去, 直至无穷, 谢尔宾斯基镂垫中的黑色部分将被不断地镂空.

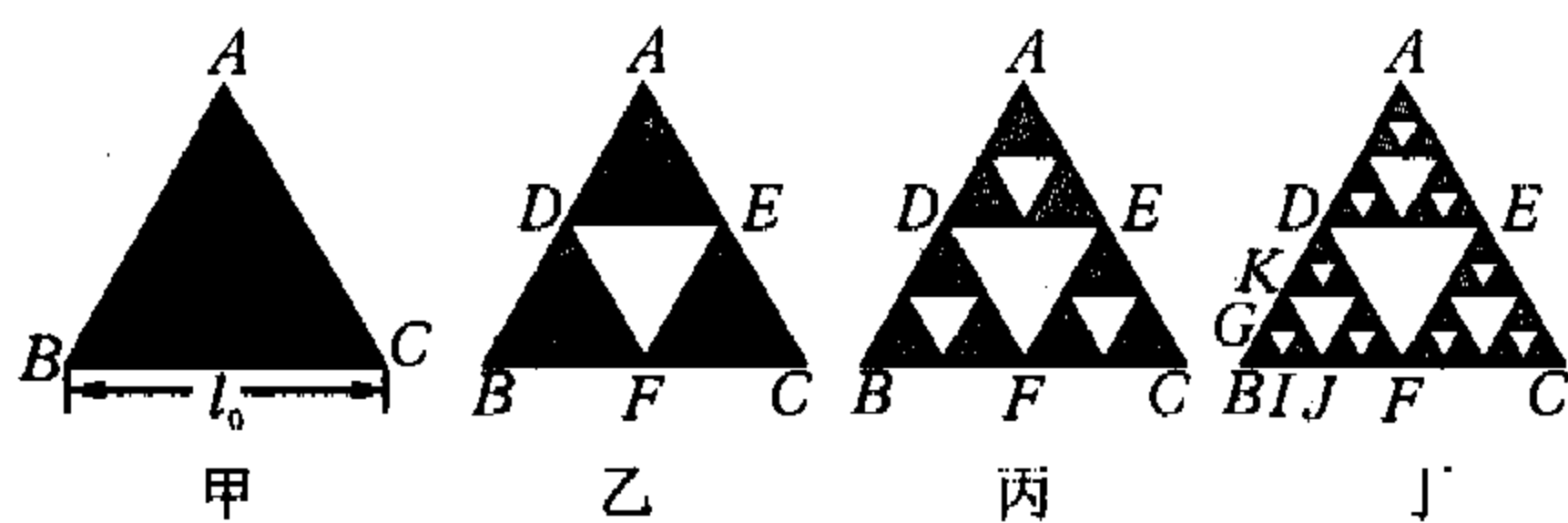


图 19-8

数学家对这类几何图形的自相似性进行了研究, 创造和发展出了一门称为“分形几何学”的新学科. 近三十多年来, 物理学家将分形几何学的研究成果和方法用于有关的物理领域, 取得了有意义的进展.

我们现在就在这个背景下研究按谢尔宾斯基镂垫图形的各边构成的电阻网络的等效电阻问题: 设如图19-8甲所示的三角形ABC边长 l_0 的电阻均为 r ; 经一次分割得到如图19-8乙所示的图形, 其中每个小三角形边长的电阻是原三角形ABC的边长的电阻 r 的二分之一; 经二次分割得到如图19-8丙所示的图形, 其中每个小三角形边长的电阻是原三角形ABC的边长的电阻 r 的四分之一; 三次分割得到如图19-8丁所示的图形, 其中每个小三角形边长的电阻是原三角形ABC的边长的电阻 r 的八分之一.

(1) 试求经三次分割后, 三角形ABC任意两个顶点间的等效电阻.

(2) 试求按此规律作了 n 次分割后, 三角形ABC任意两个顶点间的等效电阻

分析与解 这是一个具有自相似性的无限网络电路, 由于它的特点是局部与整体的相似性, 也就是对称性, 所以我们可以通过递推, 从局部及至整体.

先看图19-8甲所示的三角形ABC, 易得其任意两个顶点间的等效电阻为 $R_0 = \frac{2}{3}r$; 对经一次分割后的图形, 通过拆分

黑、白两个三角形的某一结合点例如F点后, 电阻连接等效于

图19-9甲, 则 $R_{BC1} =$

$\frac{5}{9}r = \frac{5}{6}r \times \frac{2}{3}$, 故等

效于每边电阻为 $\frac{5}{6}r$ 的原始三角形ABC,

如图19-9乙;

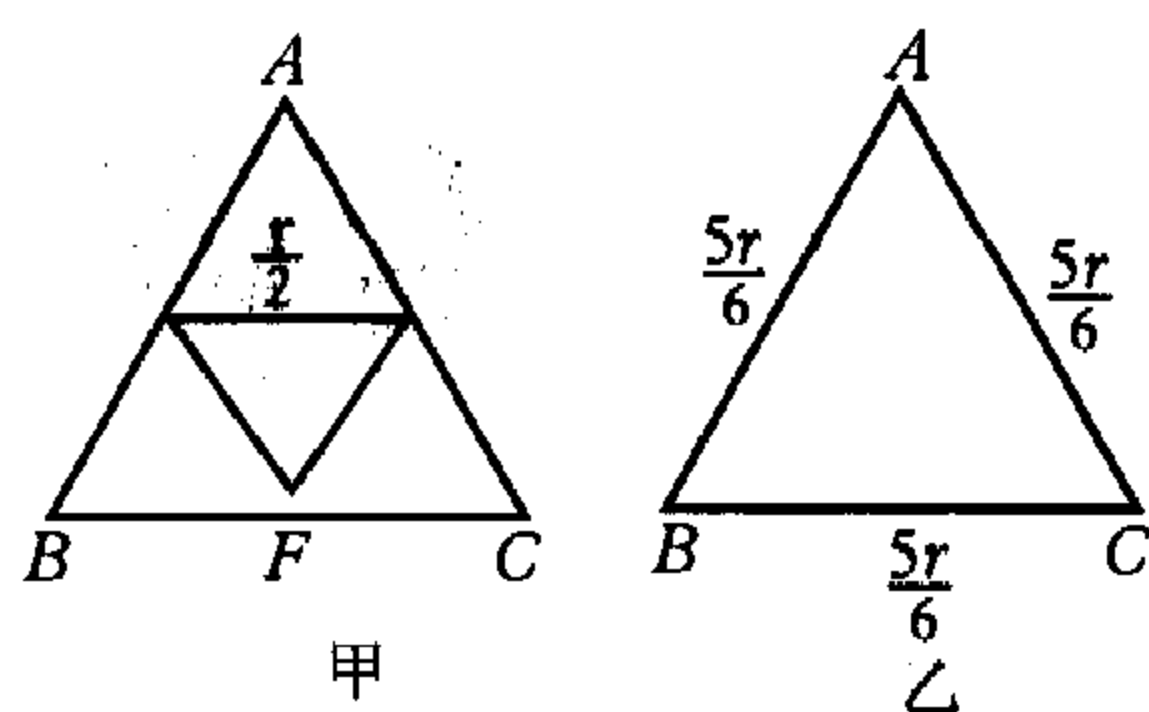


图 19-9

对如图19-10所示经二次分割后的图形, 先对虚线框中的单元做如上操作, 等效为每边电阻为 $\frac{5}{6} \cdot \frac{r}{2}$ 的三角形, 而图形还原为一次分割的情形; 再作一次相同的操作, 使图形还原为

每边电阻为 $(\frac{5}{6})^2 r$ 的原始三角形ABC, 那么, $R_{BC2} = (\frac{5}{6})^2 r \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{25}{54}r$; 依此类推, 经三次分割后, 三角形ABC任意两个顶点间的

等效电阻 $R_{BC3} = (\frac{5}{6})^3 r \times \frac{2}{3} = \frac{125}{324}r$; 而按此规律作了 n 次分割后,

三角形ABC任意两个顶点间的等效电阻 $R_n = \frac{2}{3} \cdot (\frac{5}{6})^n \cdot r$.

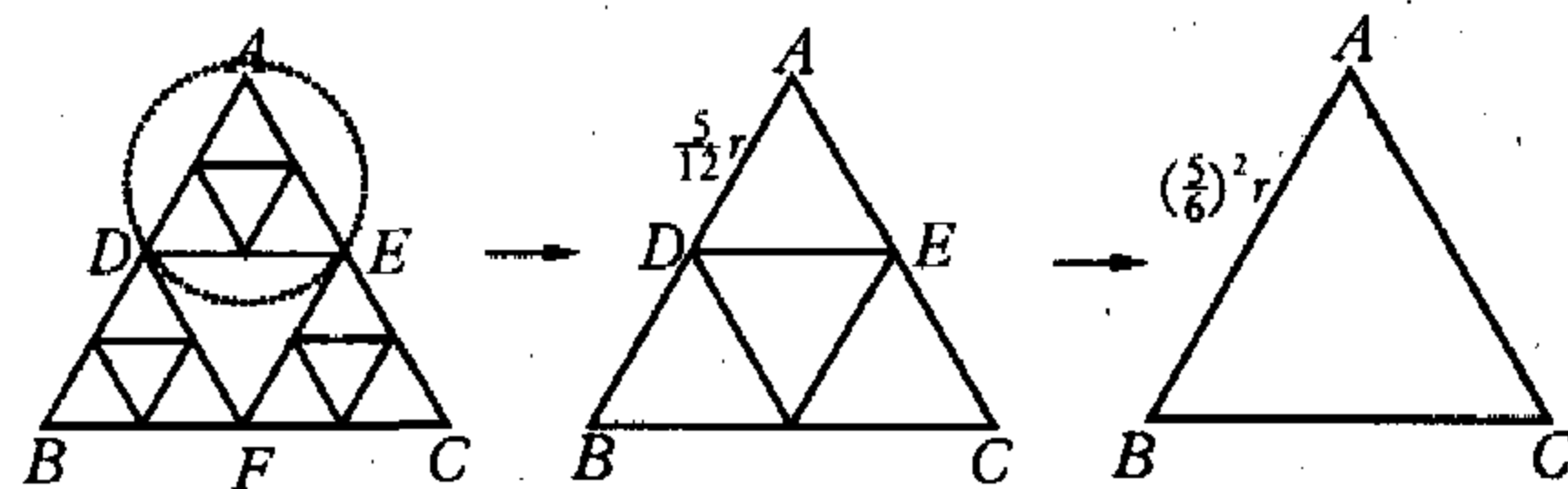


图 19-10

根据电阻连接具有自相似对称性, 循着“做回原本”的思路进行等效操作, 本题给出的解法是很有意义的.

二、电流叠加法

对于一些并不具备直观的对称性的电路, 可根据电流的可叠加性, 重新设置电流的分布方式, 将原本不对称问题转化成具有对称性的问题加以解决.

电场具有可叠加性是众所周知的: 几个点电荷引起的电场叠加, 其场强总可归结为某一个点电荷引起的电场场强; 同样, 直流电路中也存在这样的叠加关系: 各电源单独存在时的电路电流代数叠加后与所有电源同时存在的电路电流分布是一样的, 任一直流电路电流分布, 总可归结为只含某一个直流电源的电路电流分布. 这就是电流的可叠加性.

下面的例子展示通过电流叠加法寻求等效电阻.

例4 “田”字形电阻丝网络如图19-11所示, 每小段电阻丝的电阻均为 R , 试求网络中A、B两点间的等效电阻 R_{AB} .

分析与解 对应于电流 I 从A端流入、B端流出, 电流分布看不出有何种对称性, 如果我们把从A端流入、B端流出的电流 I 看做是由从A点流入、从网络中心O点流出的电流 I 与从O点流入、从B点流出的电流 I 的叠加, 电流分布的对称



性就显现出来了:前者电阻连接关于过AO的对角线对称,如图19-12甲(两个这样的电阻并联即为 R_{AO}),电流 I 从A点流

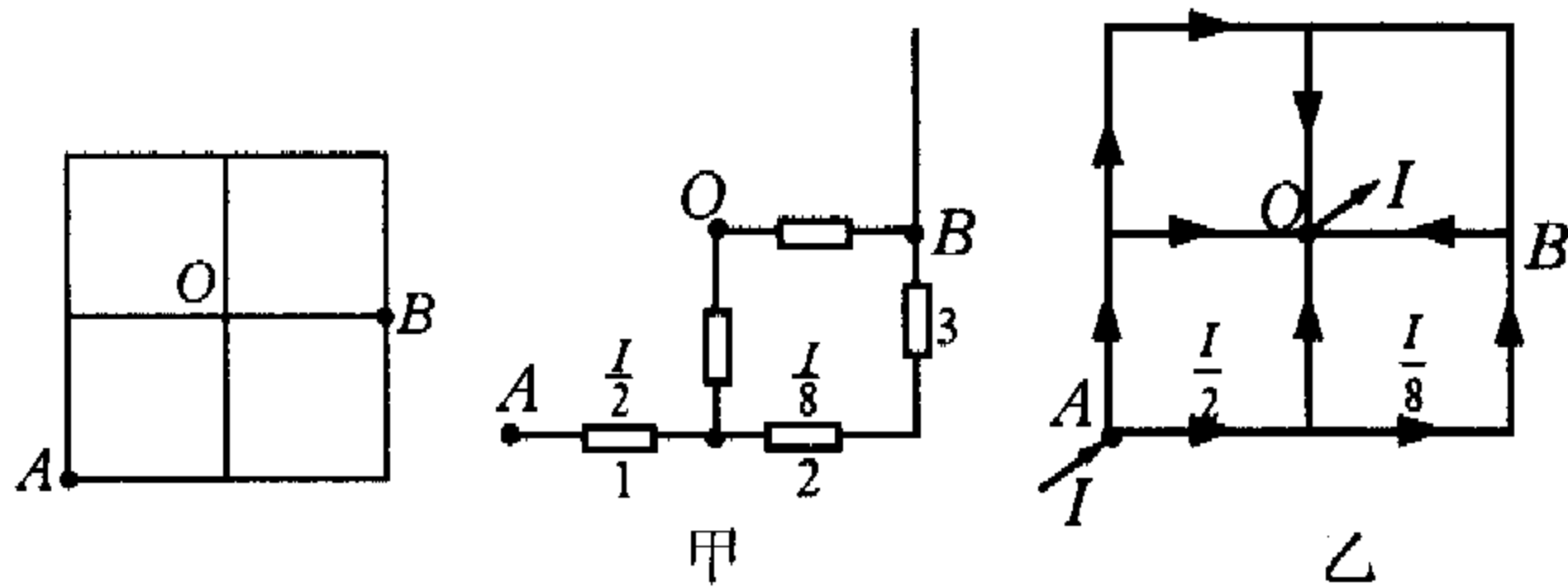


图 19-11

图 19-12

入后对称地分流,电流分布如图19-12乙,由电流按并联电阻反比例分配关系可得,电阻1上电流为 $I/2$,电阻2、3上电流为 $I/8$;后者电阻连接关于OB对称,如图19-13甲,图中画斜线的电阻阻值为 $2R$,其余为 R ,两个这样的电阻并联即 R_{OB} ,从O点流入、从B点流出的电流 I 分流到各电阻的电流如图19-13乙,同样按比例求出电阻1上电流为 $I/24$,电阻2、3上电流为 $5I/24$;现对两者叠加,以A、B间电压为等量关系,根据欧姆定律有

$$IR_{AB} = \left(\frac{I}{2} + \frac{I}{24}\right)R + \left(\frac{I}{8} + \frac{5I}{24}\right)2R,$$

于是求得
$$R_{AB} = \frac{29}{24}R.$$

例5 如图19-14所示的一个无限的平面方格导线网,连接两个结点的导线的电阻为 r_0 ,如果将A和B接入电路,求此导线网的等效电阻 R_{AB} .

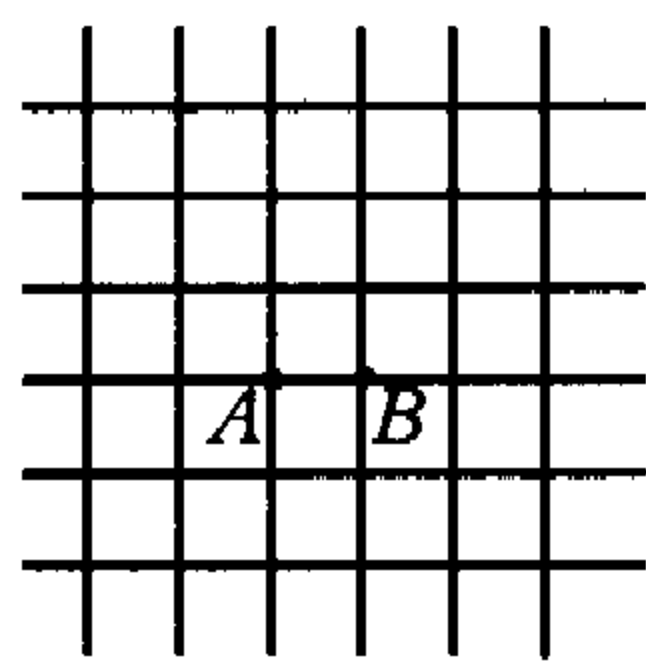


图 19-14

分析与解 将从A流入、从B流出的电流视作这样两个电流的叠加:一个是 I 从A流入通过网格流向无限远,一个是 I 从无限远通过网格汇流后从B流出,由于是无限网格,对从A流入的 I ,电路关于A中心对称,第一次分流每边 $I/4$,故A、B两结点间导线上电流大小为 $I/4$,方向 $A \rightarrow B$;对从B流出的 I ,同样由于对称,最后汇合的四路电流每边也是 $I/4$,故A、B两结点间导线上电流大小亦为 $I/4$,方向 $A \rightarrow B$;AB上电流叠加为 $I/2$,则 $IR_{AB} = Ir_0/2, R_{AB} = r_0/2$.

例6 有一无限大平面导体网络,它由大小相同的正六边形网眼组成,如图19-15所示,所有六边形每边的电阻均为 R_0 ,求间位结点a、b间的等效电阻.

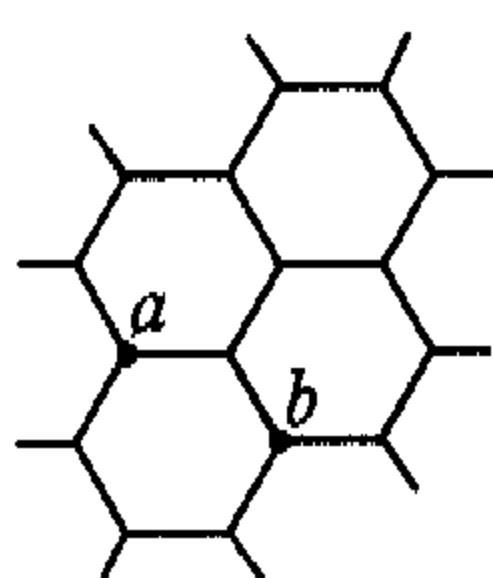


图 19-15

分析与解 本题网络图形具有更强的对称性,电流 I 若从某结点流入,第一阶分流三等分,每边上电流为 $I/3$;到下一个结点(共三个)二阶分流,都是将 $I/3$ 平分为二,每边 $I/6$;现利用电流叠加法,设 I_1 从a点流入、无限远处流出, I_2 从无限远处流入、b点流出, $I_1 = I_2 = I$,则有

$$IR_{ab} = \left(\frac{I_1}{3} + \frac{I_2}{6}\right)R_0 + \left(\frac{I_1}{6} + \frac{I_2}{3}\right)R_0, R_{ab} = R_0.$$

若要求间二位结点(如图19-16中的)a、c或a、d间的等效电阻,亦可用电流叠加法完成:注意图19-16中给出的三条等势线及各阶电流的对称分流,对于从a流入、无限远处流出的电流 I ,a与第1条等势线间的三根导线,每边上电流为 $I/3$;第1、2条等势线间的6根导线,每边上电流 $I/6$,第2、3条等势线间有12根导线,每边上电流 $I/12$,而对于无限远处流入、从c流出的电流 I ,三阶

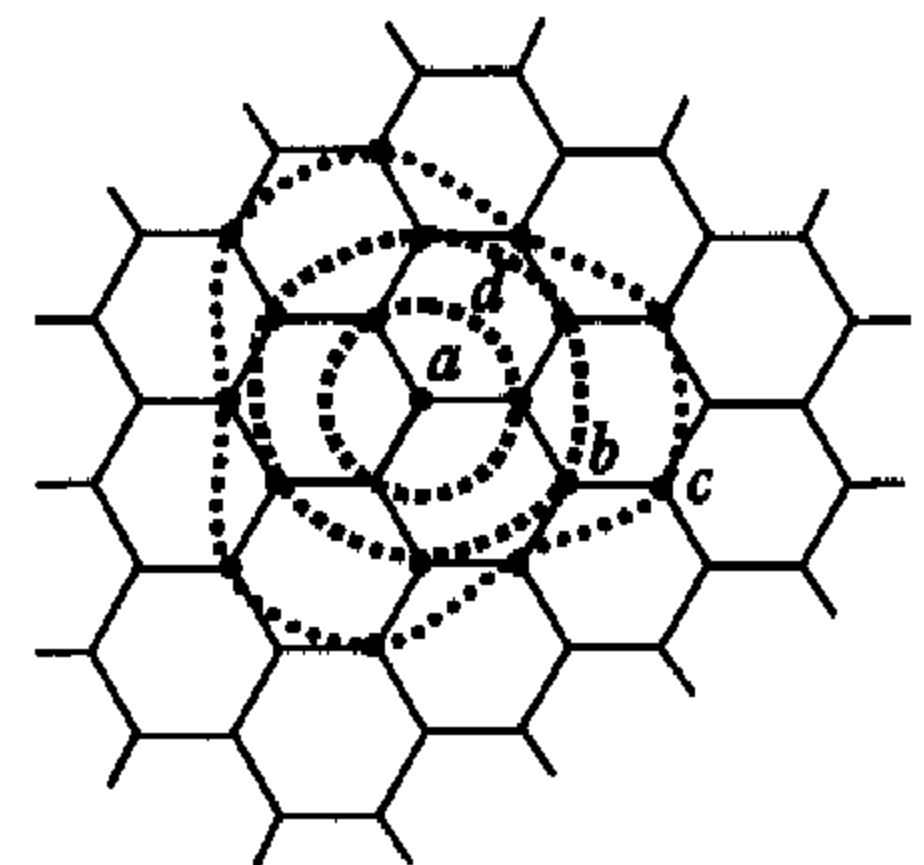


图 19-16

电流大小顺序为 $I/12, I/6, I/3$,流向相同,则 $IR_{ac} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)IR, R_{ac} = \frac{7}{6}R, R_{ad}$ 与 R_{ac} 等值吗?读者不妨一试.

三、Y-Δ变换法

这是利用Y型连接电阻与Δ型连接电阻间等价关系的结论,通过电阻Y型连接与Δ型连接方式的互换,达到简化电路成单纯串联或并联的目的.我们先推导电阻Y-Δ连接的等价关系.

如图19-17甲、乙所示的两个三端电路ABC与abc,甲电路叫做Δ型连接电路,乙电路叫做Y型连接电路,每端流入电流及各电阻阻值已标示在图上.两个电路完全等效,即对应端电流相等: $I_A = I_a, I_B = I_b, I_C = I_c$,对应两端电压相等: $U_{AB} = U_{ab}, U_{AC} = U_{ac}, U_{BC} = U_{bc}$,因而区分不出虚线框内电阻的连接方式.

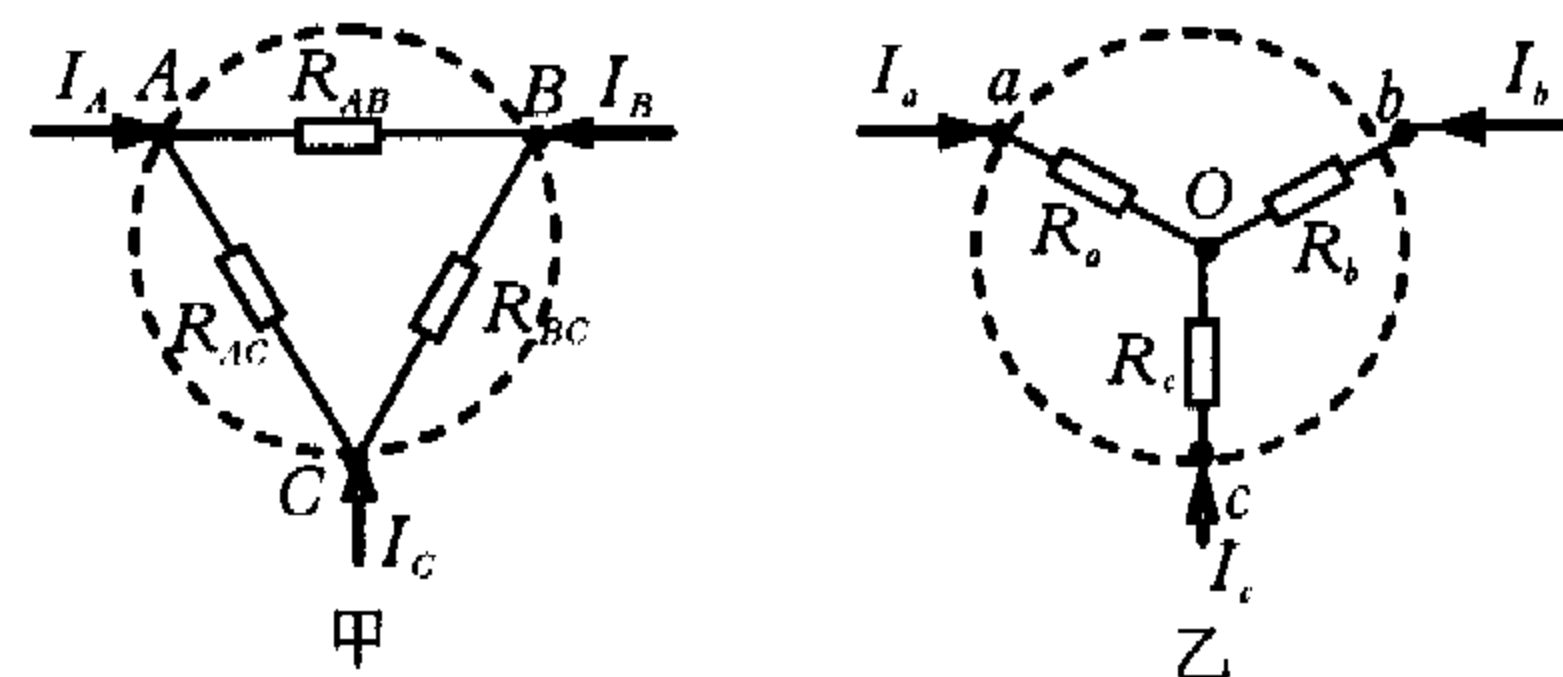


图 19-17

根据欧姆定律及电流叠加原理,对图19-17甲中Δ型连接电路,有

$$I_A = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} + \frac{U_{AC}}{R_{AC}}, I_B = \frac{U_{BA}}{R_{AB}} + \frac{U_{BC}}{R_{BC}}, I_C = \frac{U_{CA}}{R_{CA}} + \frac{U_{CB}}{R_{BC}};$$

对图19-17乙中Y连接电路,有

$$U_{ab} = I_a R_a - I_b R_b, U_{ac} = I_a R_a - I_c R_c, U_{bc} = I_b R_b - I_c R_c, I_a + I_b + I_c = 0,$$

得
$$I_a = \frac{U_{ab} R_c + U_{ac} R_b}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c}, I_b = \frac{U_{bc} R_a + U_{ba} R_c}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c},$$

$$I_c = \frac{U_{ca} R_b + U_{cb} R_a}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c}.$$

由 $I_A = I_a$,有
$$\frac{U_{ab} R_c + U_{ac} R_b}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} + \frac{U_{AC}}{R_{AC}},$$

由 $U_{AB} = U_{ab}$,必有

$$\frac{R_c}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c} = \frac{1}{R_{AB}}, \frac{R_b}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c} = \frac{1}{R_{AC}},$$

同理 $\frac{R_a}{R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c} = \frac{1}{R_{BC}}$

综上所述,当 $Y \rightarrow \Delta$ 变换, Δ 型连接每两端间代换电阻阻值为

$$R_{AB} = \frac{Y}{R_c}, R_{BC} = \frac{Y}{R_a}, R_{AC} = \frac{Y}{R_b},$$

其中 $Y = R_a R_c + R_a R_b + R_b R_c$;

当 $\Delta \rightarrow Y$ 变换时, Y 型连接每两端间等效电阻为

$$R_a = \frac{R_{AB} R_{AC}}{\Delta}, R_b = \frac{R_{AB} R_{BC}}{\Delta}, R_c = \frac{R_{AC} R_{BC}}{\Delta}$$

其中 $\Delta = R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}$.

例7 用 $\Delta \rightarrow Y$ 变换法求例1网络中 A、G 间的电阻 R_{AG} .

分析与解 在例1中,通过对称变换已得到图 19-18 所示

的电路,在 D、C、G 三端虚线内有一 Δ 型连接,现变换为画虚线的电阻表示的 Y 连接的三个电阻,由 $\Delta \rightarrow Y$ 变换关系得

$$R_1 = R_3 = \frac{1.5 \times 0.5}{2.5} R = 0.3R,$$

$$R_2 = \frac{0.5 \times 0.5}{2.5} R = 0.1R,$$

A、G 间五个电阻的串、并联直观简单,等效电阻为

$$R_{AG} = \left(\frac{0.8 \times 1.6}{0.8 + 1.6} + 0.3 \right) R = \frac{5}{6} R.$$

例8 如图 19-19 所示,一个立方体原来用 12 根相同的电阻丝构成的立方体框架,每根电阻丝的电阻均为 r ,现将其中一根拆去,求 A、B 两点间的电阻.

分析与解 先将框架“压扁”成图 19-20 所示的平面图形,每边电阻不变.而后对 a、b、c 三点间作 $\Delta \rightarrow Y$ 变换,替换电阻依次为 $\frac{r}{2}$ 、 $\frac{r}{4}$ 、 $\frac{r}{2}$,电路连接如图 19-21,再将 O-ABC 系统作 $Y \rightarrow \Delta$ 变换,在 AC、BC、AB 间阻值依次替换为 $\frac{24}{5}r$ 、 $4r$ 、 $4r$,电路如图 19-22,这已能直观电阻的串、并联情况了:

$2r$ 与 $\frac{24}{5}r$ 并联阻值为 $\frac{24}{17}r$, $4r$ 与 r 并联阻值为 $\frac{4}{5}r$,两者串联后阻值为 $\frac{188}{85}r$,再与另一 $4r$ 与 r 并联后的 $\frac{4}{5}r$ 阻值并联,终得 $R_{AB} = \frac{47}{80}r$.

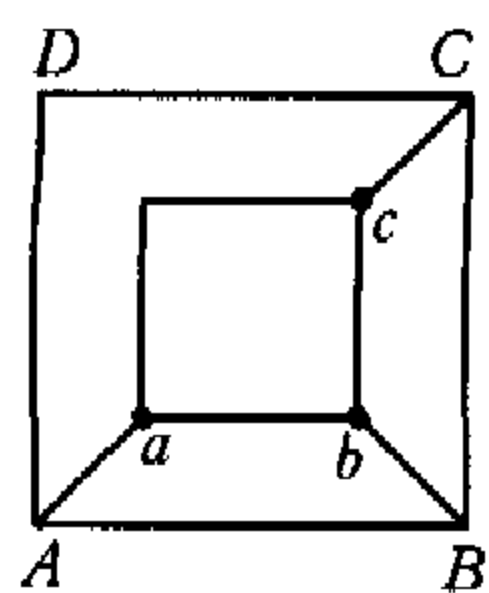


图 19-20

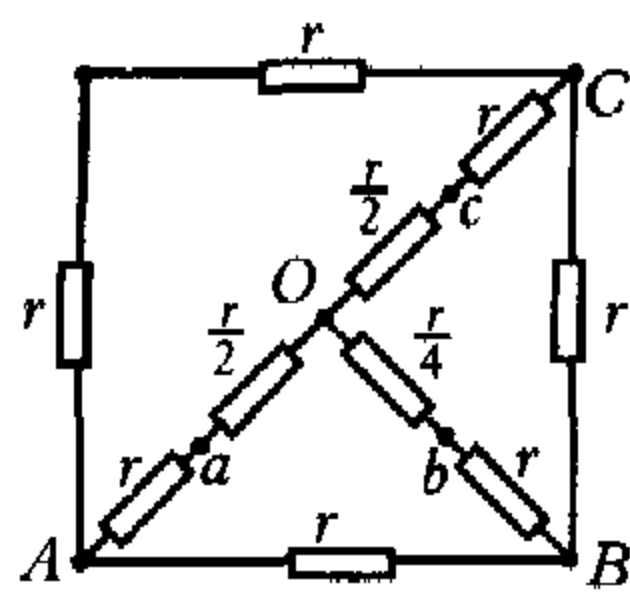


图 19-21

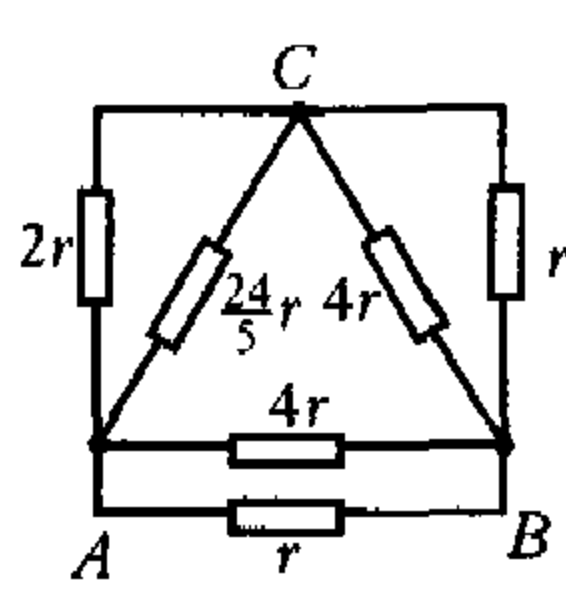


图 19-22

最后,向读者介绍多阶的共轭对称二端网络电路之等效电阻的求解.

如图 19-23 所示,由电阻为 R 的相同的电阻丝构成的 n ($n \geq 3$) 个正方形网格,每边电阻均为 R ,求 A、B 两端之间的总电阻.

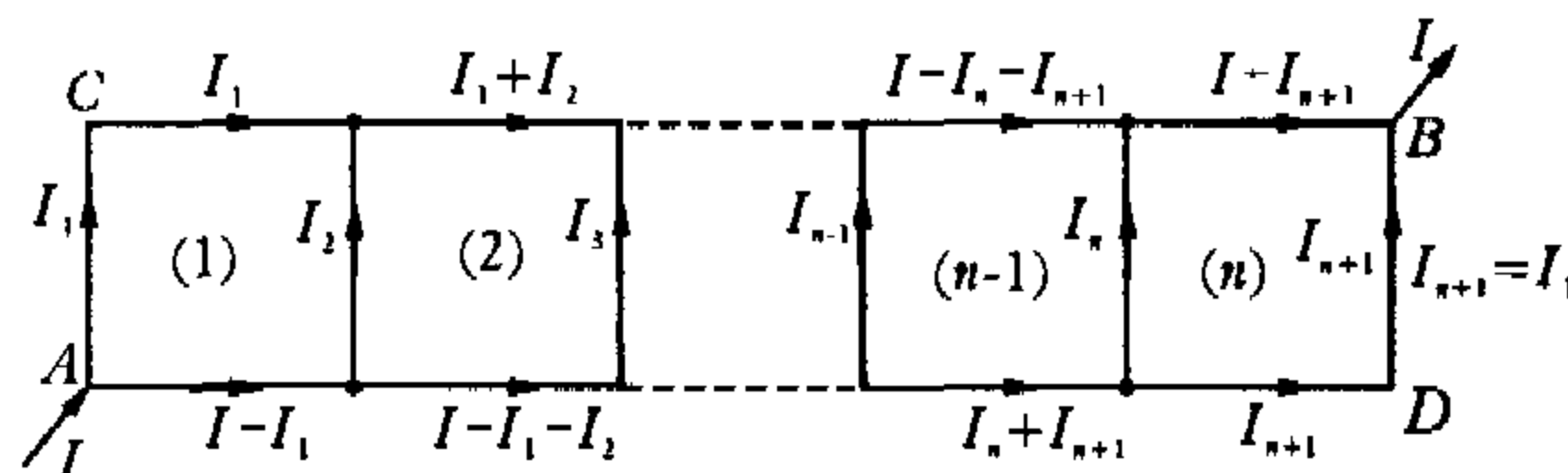


图 19-23

求解这个平面电阻网络的等效电阻的前景不容乐观——这是一个共轭对称电路,上述三种电阻等效方法对它而言无所适从.

“共轭对称”的数学模型如下:

设电流 I 从图 19-23 网络的 A 端流入,从 B 端流出,各段电阻丝上分配的电流具有某种对称性,例如若左侧第一根 AC 上电流为 I_1 ,则右侧第 $n+1$ 根 DB 上电流亦为 I_1 ;从 A 点流入的电流 I ,沿 ACB 与沿 ADB 两路,前者从 I_1 一路变化最后以 $I-I_1$ 到达 B 点,后者则从 $I-I_1$ 一路变化最后以 I_1 到达 B 点,从 B 点流出电流仍为 I ,用数学语言描述,整个电路中电流分配的变化呈现出 $a \pm bi$ 形式的规律,这就是“共轭对称”,我们把具有这种特点的电路称之为共轭对称电路.

简单的一阶共轭对称电路是常见的,例如图 19-24 甲所示电路,该电路可通过

一次 $Y-\Delta$ 变换,成为直接串、并联电路如图 19-24 乙,则 A、B 间电阻可得,我们在例 7 中已实践过;

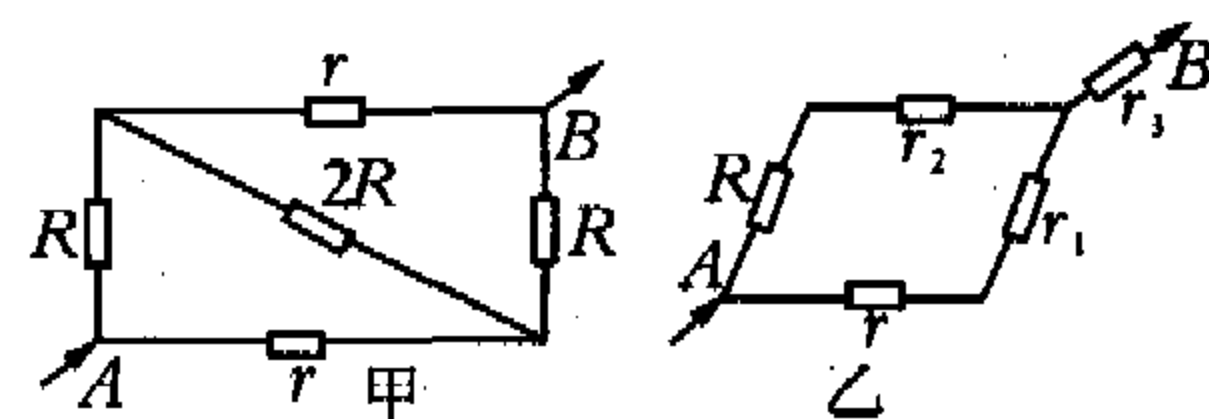


图 19-24

又如小试身手题 3 中由九根相同导线构成的一个三棱柱框架,每根导线的电阻均为 R ,求 B、D 两端间的电阻.该电路等效为平面图形后亦是一共轭对称的电路,可通过两次 $Y-\Delta$ 变换,将电路化为直接串、并联电路求解,或用电流分布法,求出各段导线上的电流,也可求出 R_{BD} .

对于多阶的共轭对称电路网络, $Y-\Delta$ 变换不现实,解决方法必定要通过递推,寻找出各阶共同的电流分布规律即通项,问题应该可以解决.设电流 I 从 A 端流入,各边导线上电流分布如图 19-23 所示,由于对称,有

$$U_{CB} = U_{AD} = [I_1 + (I_1 + I_2) + (I_1 + I_2 + I_3) + \dots + (I - I_{n+1})]R$$

$$= [(I - I_1) + (I - I_1 - I_2) + (I - I_1 - I_2 - I_3) + \dots + I_{n+1}]R.$$

可见 $2U_{CB} = nIR, U_{CB} = nIR/2,$

$$那么 U_{AB} = \frac{nIR}{2} + I_1 R; R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \left(\frac{n}{2} + \frac{I_1}{I} \right) \cdot R.$$

只要求出 $\{I_n\}$ 的第一项 I_1 ,即可求得该二端网络电路的等效电阻 R_{AB} .现在的努力方向是寻求网格中各条竖直边电流分布的



规律,即求数列 $\{I_n\}$.

考查第 $k-1$ 格与第 k 格,各段导线上电流分布设定如图19-25所示,由电压关系可得

$$I_{k-1}R + i_{k-1}'R = i_{k-1}R + I_kR,$$

$$I_kR + i_k'R = i_kR + I_{k+1}R;$$

又根据节点电流守恒有

$$i_{k-1}' + I_k = i_k', i_{k-1} = I_k + i_k.$$

由这四个方程可得 $4I_k = I_{k-1} + I_{k+1}$.

这是数列的二阶递推式,由其特征方程 $4x = 1 + x^2$ 得两共轭根,即

$$\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3},$$

则 $I_{n+1} - \alpha I_n = \beta(I_n - \alpha I_{n-1}), I_{n+1} - \beta I_n = \alpha(I_n - \beta I_{n-1})$.

即 $\{I_{n+1} - \alpha I_n\}$ 是公比为 β 的等比数列, $\{I_{n+1} - \beta I_n\}$ 是公比为 α 的等比数列,故有

$$I_{n+1} - \alpha I_n = \beta^{n-1}(I_2 - \alpha I_1), I_{n+1} - \beta I_n = \alpha^{n-1}(I_2 - \beta I_1).$$

因网络电路二端电流共轭对称,即 $I_{n+1} = I_1, I_n = I_2$, 那么

$$I_1 - \alpha I_2 = \beta^{n-1}(I_2 - \alpha I_1), I_1 - \beta I_2 = \alpha^{n-1}(I_2 - \beta I_1),$$

$$\text{则 } I_2 = \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\beta - \alpha)} I_1; \quad \text{①}$$

又在第1格中有电压关系,即

$$2I_1R = (I - I_1)R + I_2R, \text{ 即 } I_2 = 3I_1 - I, \quad \text{②}$$

$$\text{由①、②式得到 } I_1 = \left[3 - \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\beta - \alpha)} \right]^{-1} \cdot I,$$

$$\text{于是得 } R_{AB} = \left\{ \frac{n}{2} + \left[3 - \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\beta - \alpha)} \right]^{-1} \right\} R$$

$$= \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{3 - \frac{S}{T}} \right) R.$$

其中

$$S = [(2 + \sqrt{3})^{n-2} - (2 - \sqrt{3})^{n-2}],$$

$$T = [(2 + \sqrt{3})^{n-1} - (2 - \sqrt{3})^{n-1}] - 2\sqrt{3}.$$

趣味小竞赛

1. 如图19-26所示,图甲中三端电容网络为 Δ 型网络元,图乙中三端电容网络为Y型网络元,试导出其间的等效变换公式.

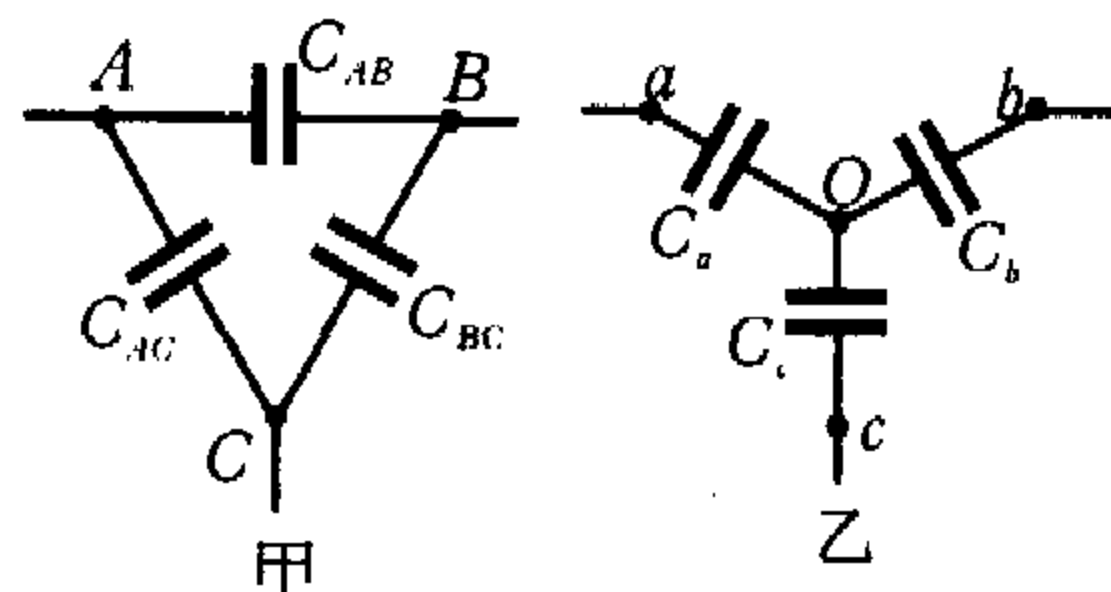


图 19-26

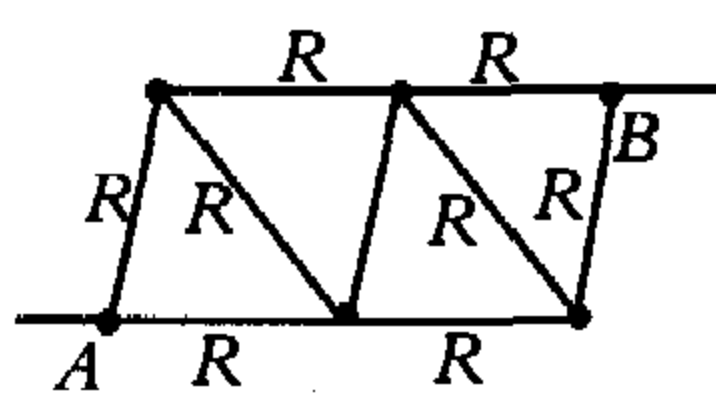


图 19-27

2. 电阻均为 R 的九个相同的金属丝组成构架如图19-27,求构架上 A 、 B 两点间电路的电阻.

3. 如图19-28所示,由九根相同的导线组成的一个三棱柱框架,每根导线的电阻为 R ,导线之间接触良好,求 B 、 D 之

间的电阻值.

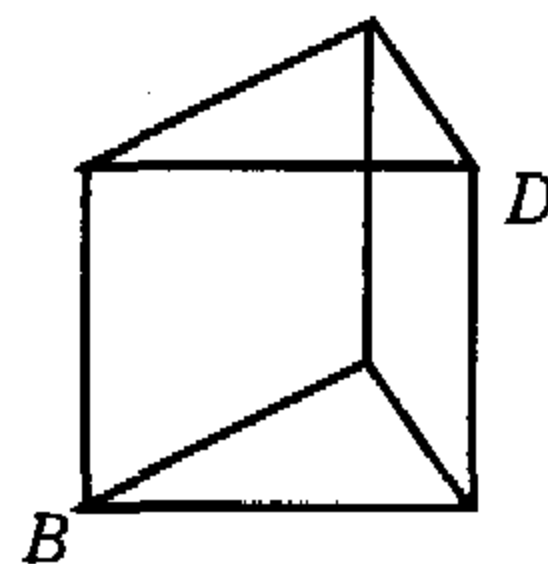


图 19-28

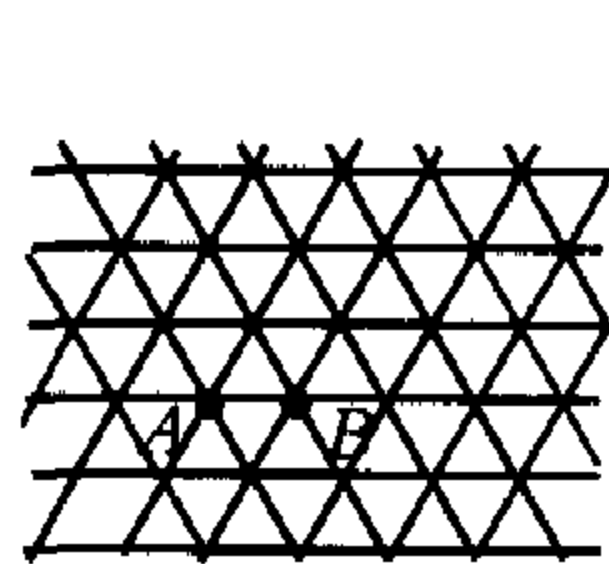


图 19-29

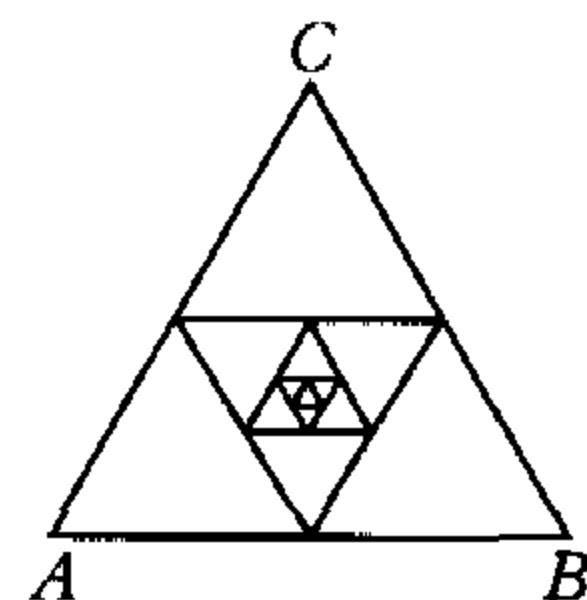


图 19-30

4. 如图19-29是一个无限大导体网络,它由无数个大小相同的正三角形网眼构成,小三角形每边的电阻均为 r ,求把该网络中相邻的 A 、 B 两点接入电路中时, A 、 B 间的电阻 R_{AB} .

5. 试求框架上 A 、 B 两点间的电阻 R_{AB} .此框架是用同种细金属制作的,单位长度的电阻为 ρ .一连串的内接等边三角形的数目可认为趋向无穷,如图19-30所示.取 AB 边长为 a ,以下每个三角形的边长依次减少一半.

6. 半径为 R 的薄壁导电球由联在 A 、 B 两点上的($AO \perp BO$, O 点是球心)两根细导线接到直流电源上,如图19-31.通过电源的电流为 I_0 .问在球面上 C 点处($OC \perp OA$, $OC \perp OB$)电荷朝什么方向运动?若在 C 点附近球面上作两个小标志,使它们相距 $R/1000$,其连线垂直电荷运动方向.问总电流中有多大部分通过这两标志之连线?

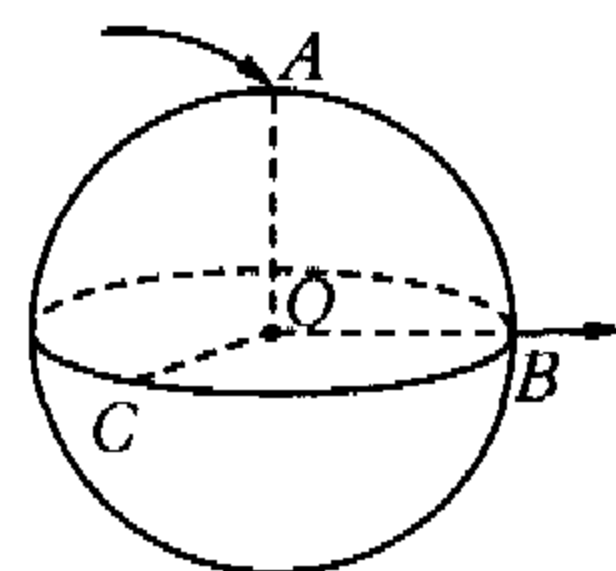


图 19-31

7. 如图19-32所示,一长为 L 的圆台形均匀导体,两底面半径分别为 a 和 b ,电阻率为 ρ .试求它的两个底面之间的电阻.

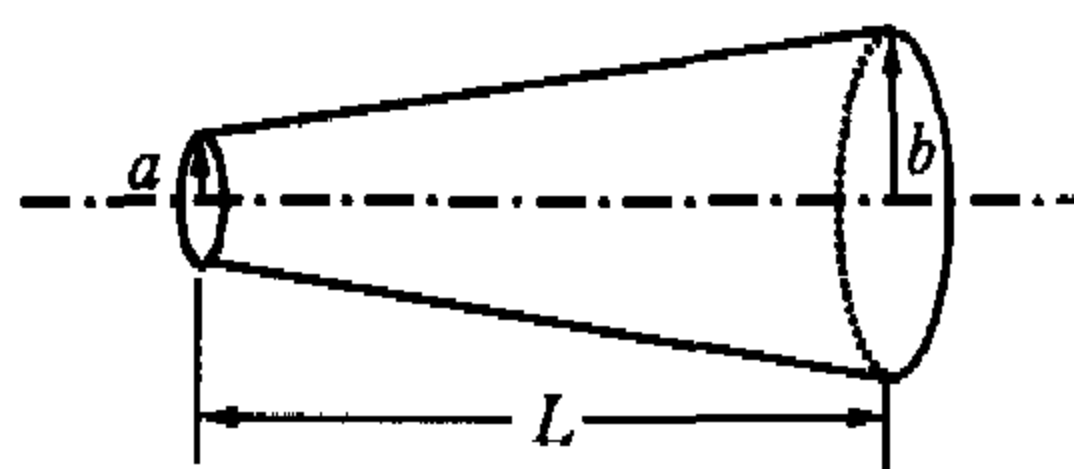


图 19-32

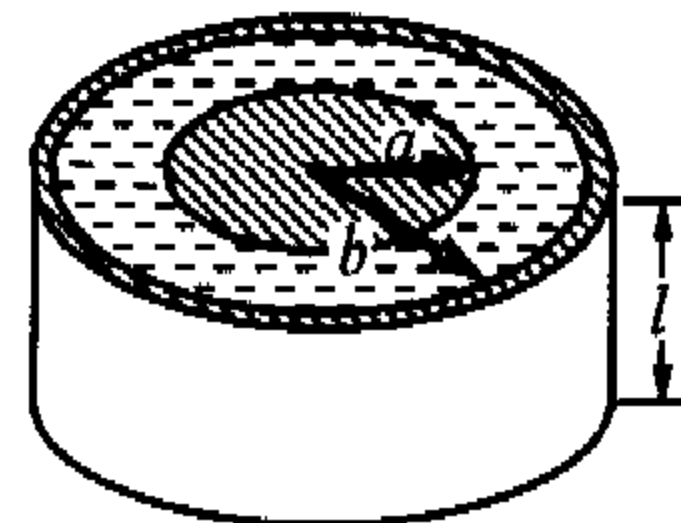


图 19-33

8. 一铜圆柱体半径为 a 、长为 l ,外面套一个与它共轴且等长的铜筒,筒的内半径为 b ,在柱与筒之间充满电阻率为 ρ 的均匀物质,如图19-33,求柱与筒之间的电阻.

9. 如图19-34所示的平面电阻丝网络中,每一线段和每一弧线段电阻丝的电阻均为 r .试求 A 、 B 两点间的等效电阻.

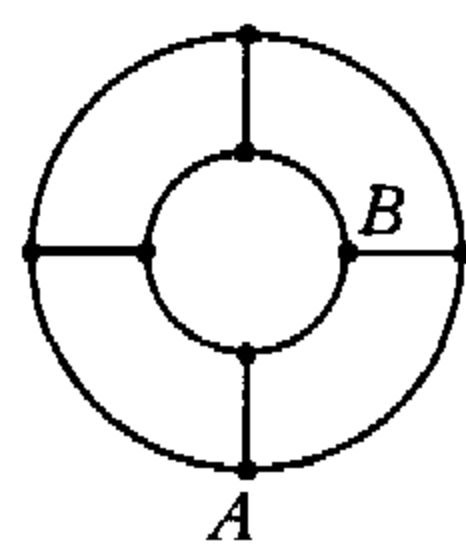


图 19-34

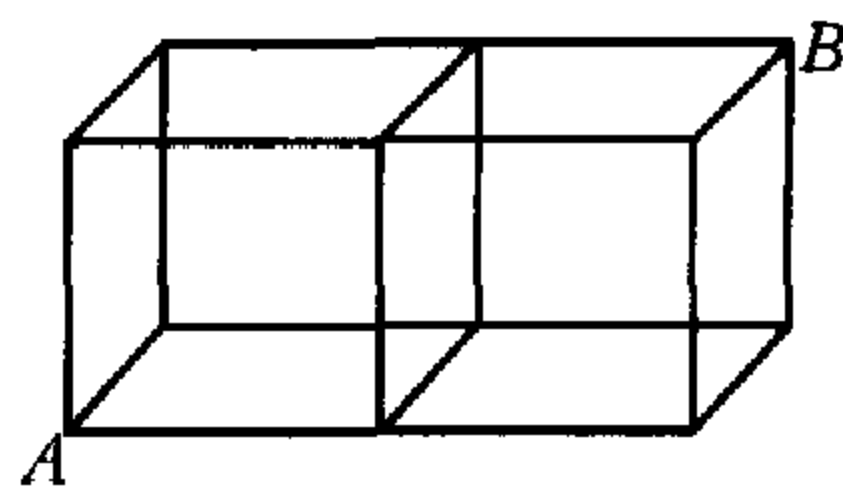


图 19-35

10. 如图 19-35 所示的电阻网络包括两个立方体, 每边电阻均为 $2r$, 求 A、B 间的电阻.

11. 如图 19-36 所示是由电阻丝连接成的无限电阻网络, 已知每一段电阻丝的电阻均为 r , 试求 A、B 两点之间的总电阻.

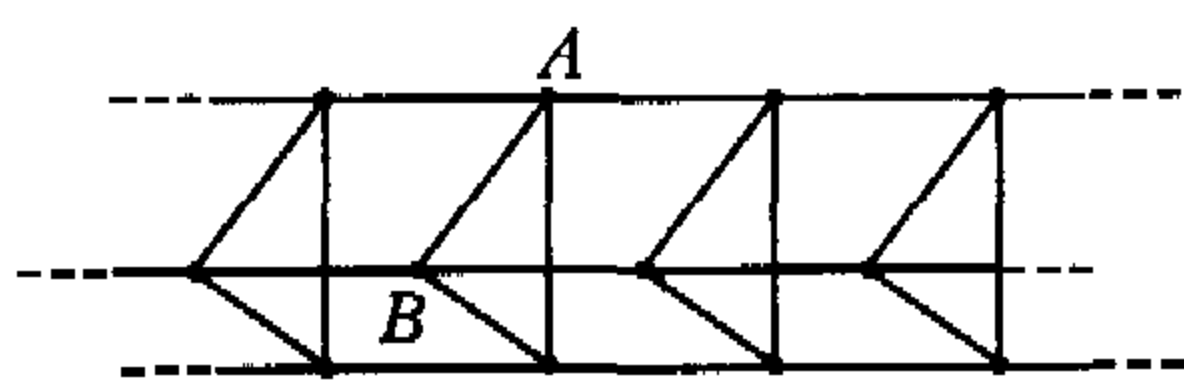


图 19-36

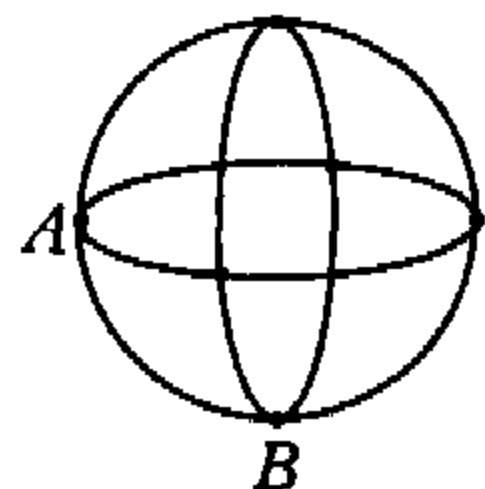


图 19-37

12. 三个相同的均匀金属圆环两两相交地连接成如图 19-37 所示的网络. 已知每一个金属圆环的电阻都是 R , 试求图中 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} .

13. 由 7 个阻值相同的均为 r 的电阻组成的网络元如图 19-38(a) 所示, 由这种网络元彼此连接形成的无限网络如图 (b) 所示, 试求 P、Q 两点之间的等效电阻.

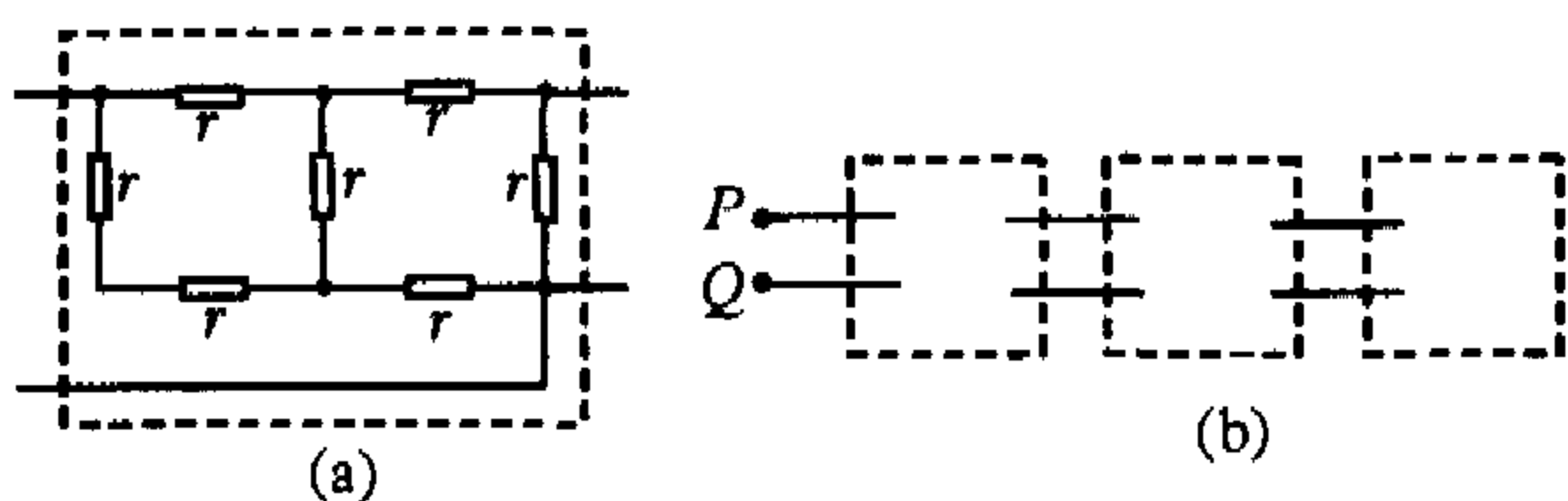


图 19-38

14. 如图 19-39 所示, 由电阻丝构成的网络中, 每一段电阻丝的电阻均为 R , 试求 R_{AB} .

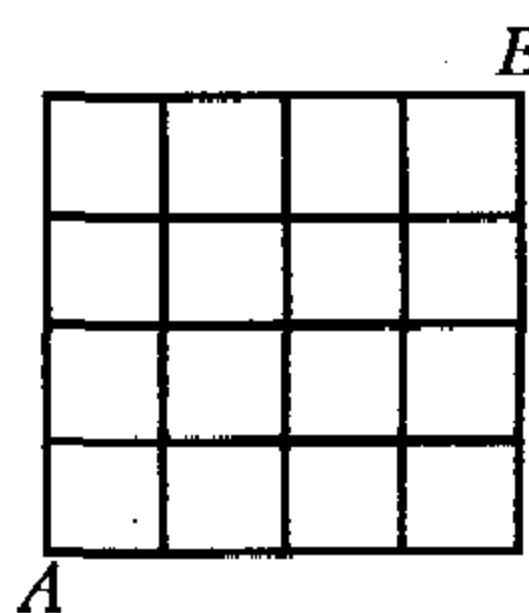


图 19-39

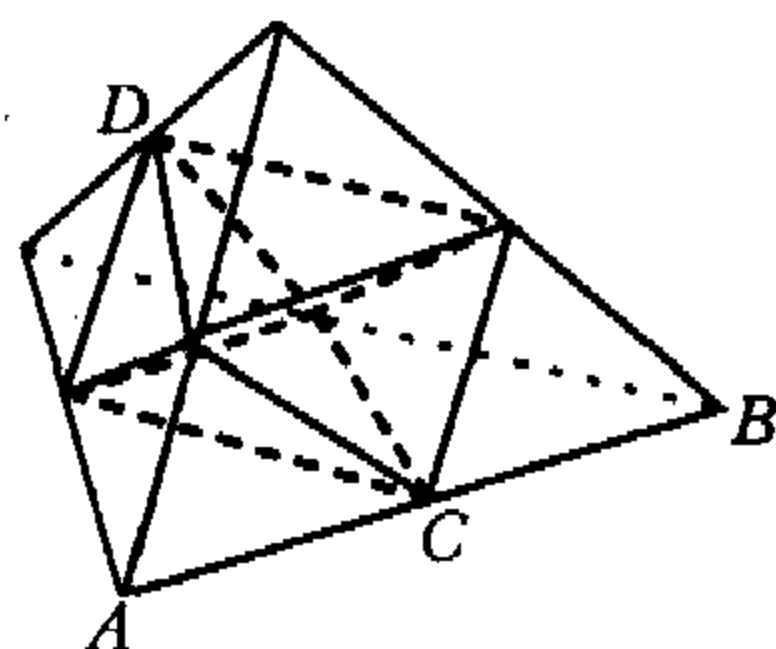


图 19-40

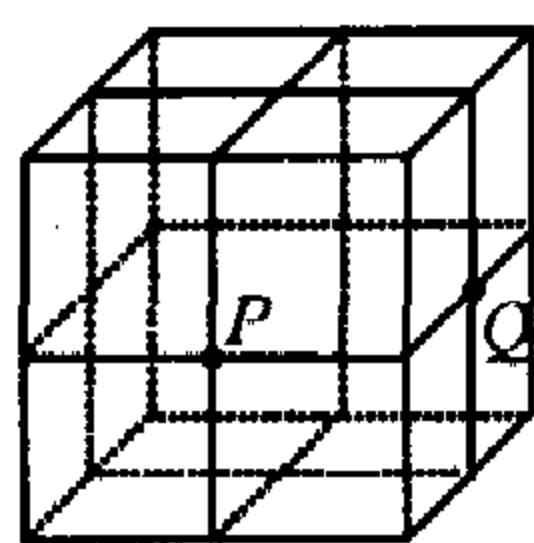


图 19-41

15. 正四面体框架形电阻网络如图 19-40 所示, 其中每一小段电阻均为 R . 试求 R_{AB} 和 R_{CD} .

16. 如图 19-41 所示的立方体网络中, 每一小段电阻丝的电阻均为 R , 试求 R_{PQ} .

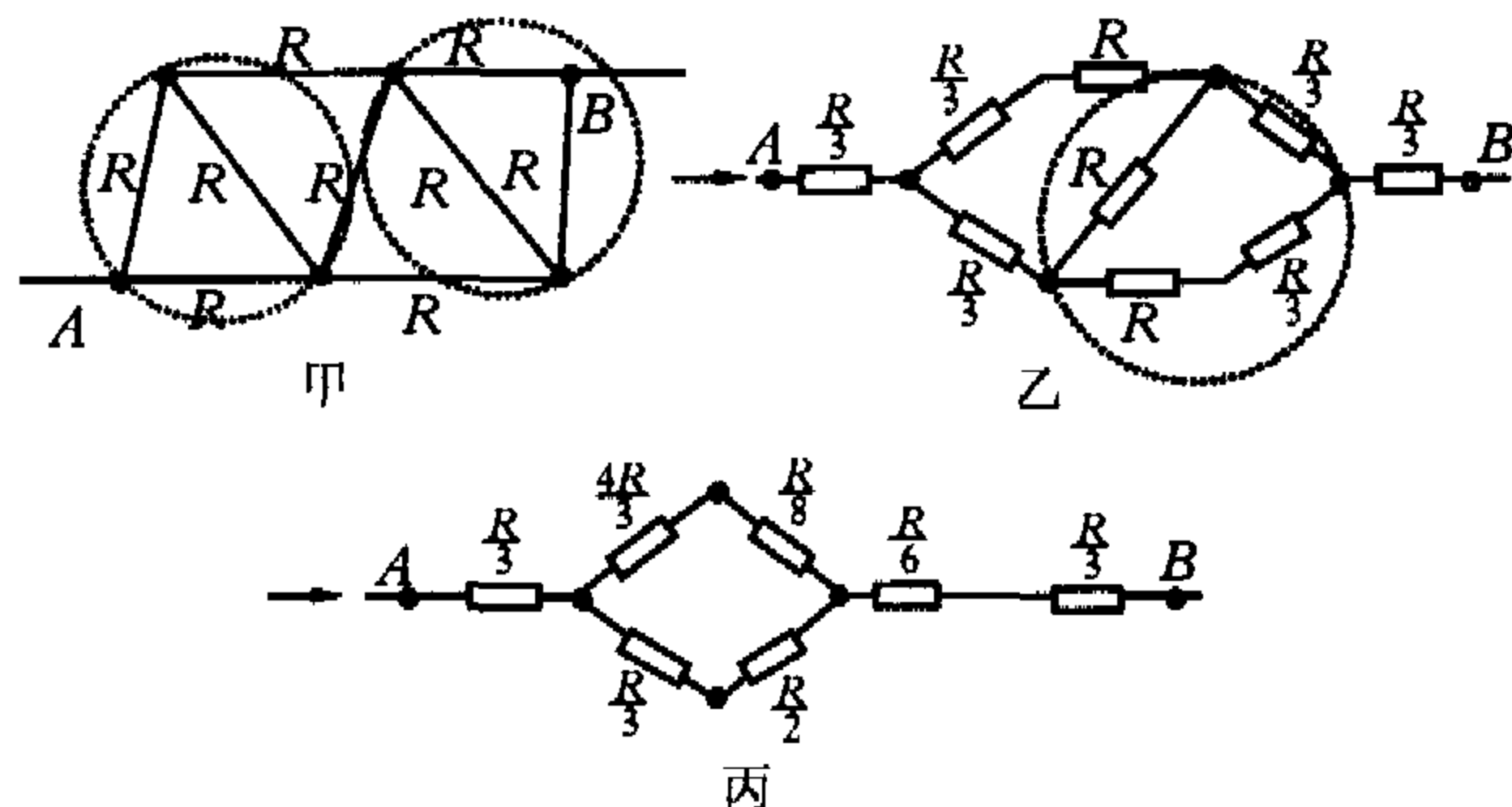
参考答案

1. 对甲中 Δ 连接电路, $q_A = U_{AB}C_{AB} + U_{AC}C_{AC}$, $q_B = U_{BA}C_{AB} + U_{BC}C_{BC}$, $q_C = U_{CA}C_{CA} + U_{CB}C_{BC}$; 对乙中 Y 型连接电路 $U_{ab} = \frac{q_a}{C_a} - \frac{q_b}{C_b}$, $U_{ac} = \frac{q_a}{C_a} - \frac{q_c}{C_c}$, $q_a + q_b + q_c = 0$.

由对应端电量相等、电压相等即得: 当 $Y \rightarrow \Delta$ 变换, Δ 型连接每两端间代换电容值 $C_{AB} = \frac{C_a C_b}{Y}$, $C_{BC} = \frac{C_b C_c}{Y}$, $C_{CA} = \frac{C_a C_c}{Y}$,

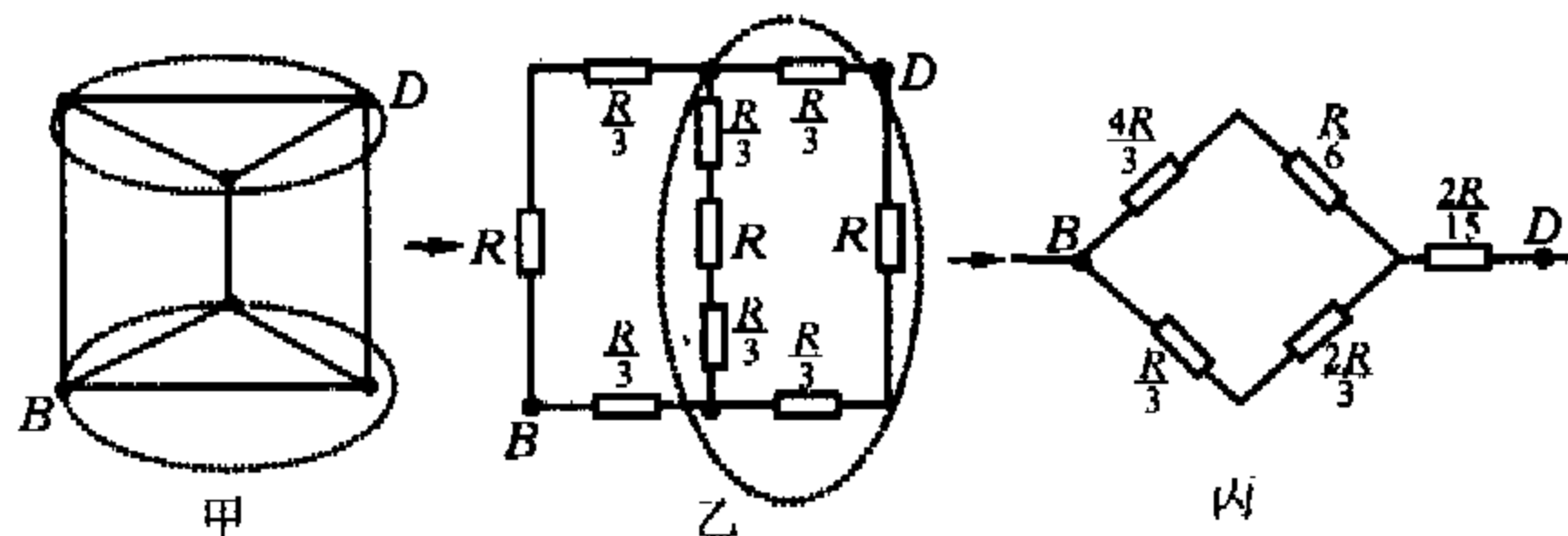
其中 $Y = C_a + C_b + C_c$; 当 $\Delta \rightarrow Y$ 变换时, Y 型连接每两端间等效电容 $C_a = \frac{\Delta}{C_{BC}}$, $C_b = \frac{\Delta}{C_{AC}}$, $C_c = \frac{\Delta}{C_{AB}}$, 其中 $\Delta = C_{AB}C_{CA} + C_{AB}C_{BC} + C_{BC}C_{CA}$.

2. 对图答 19-1 甲中两虚线框内连接各作 $\Delta \rightarrow Y$ 变换后电路及各阻值如图答 19-1 乙, 再对图乙虚线框内作一次 $\Delta \rightarrow Y$ 变换得如图答 19-1 丙所示电路及各电阻阻值, 由图丙得 $R_{AB} = \frac{15}{11}R$.



图答 19-1

3. 将第三条棱“压到”B、D 两棱所在平面形成如图答 19-2 甲示电路, 对虚线框内作 $\Delta \rightarrow Y$ 变换后成图答 19-2 所乙示电路, 各阻值标示在图乙上, 继而对图乙中虚线框内再作 $\Delta \rightarrow Y$ 变换后成图答 19-2 丙所示的直接串、并联电路, 其阻值为 $R_{BD} = \frac{11}{15}R$.



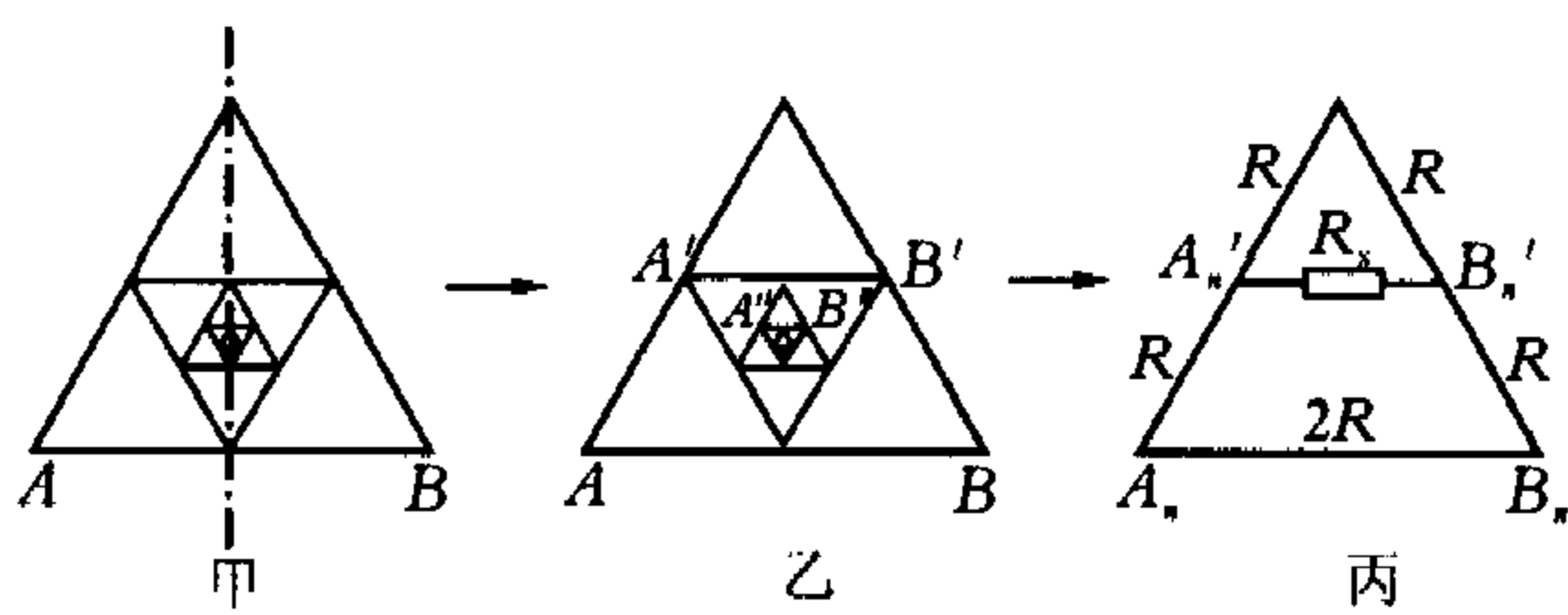
图答 19-2

4. 从 A 点流入又从无限远处流出的电流 I 与从无限远处流入后又从 B 点流出的电流叠加等效于 I 从 A 流入经网络从 B 点流出, 由对称性可知, A 点流入电流均分为六路, AB 上电流为 $\frac{I}{6}$, B 点流出的电流由六路相同支流汇合, AB 上电流亦为 $\frac{I}{6}$, 则 $IR_{AB} = 2 \times \frac{I}{6}R$, $R_{AB} = \frac{R}{3}$.

5. 由于对称, 可将 AB 中垂线上各电势点拆分, 原电路变换为图答 19-3 乙, 我们看到这是一个具有自相似性的无限网络, 其基本单元如图答 19-3 丙, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 多一个单元, 只是使 R_x 按边长同比增大, 即有

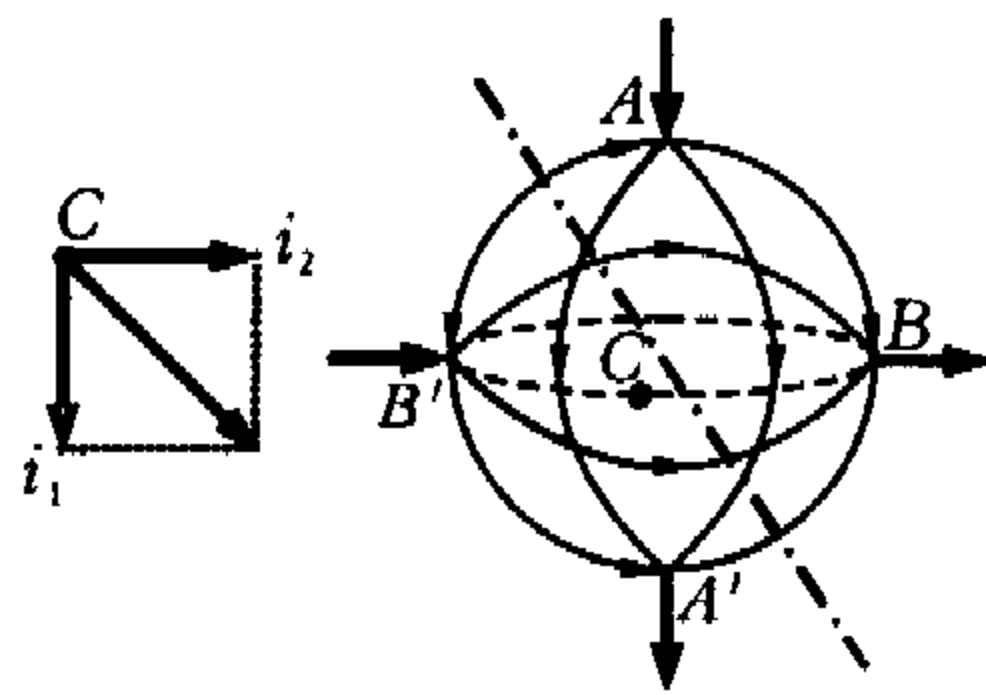
$$\frac{(\frac{2RR_x}{2R+R_x} + 2R) \cdot 2R}{(\frac{2RR_x}{2R+R_x} + 2R) + 2R} = 2R_x,$$

$$\text{即 } R_x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}R, \text{ 当 } R = \frac{\rho a}{2} \text{ 时, } R_{AB} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}\rho a.$$



图答 19-3

6. 如图答 19-4, 设想电流 I_1 从 A 流入且对称地流经球面从 A' 点流出, 电流 I_2 从 B' 点流入对称地流经球面从 B 点流出, $I_1 = I_2 = I$, 这样的两个电流与在 A、B 及 B'、A' 流入流出的两个电流等效, 对 C 点而言, “经线”方向电流 i_1 与“赤道”方向电流 i_2 等值, 流向垂直, 故方向与“赤道”平面成 45° , 合电流为 $\sqrt{2}i_2$ (或 $\sqrt{2}i_1$). 又因为在点 A、B 及点 B'、A' 流入流出的两个电流关于这个方向轴对称, 所以 C 点电流 ($\sqrt{2}i_1$) 是它们中的一个电流分布在 C 处大小的 2 倍; 从点 A 入又从点 B 出电流为 I_0 时, “赤道”上电流分布密度为 $\frac{I_0}{2\pi R}$, 则 C 点附近垂直于电荷运动方向 $\frac{R}{1000}$ 长的弧上的电流为



图答 19-4

$$i = \frac{I_0}{2\pi R} \cdot \frac{R}{1000} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}I_0}{4000\pi}$$

7. 本题用微元法求解: 将圆台沿其几何轴横截细分 n 等分, 每个薄片可视为高 $\frac{L}{n}$ 、底面积为 $\pi(a + ik \frac{L}{n})^2$ 的圆柱形电阻, 其中 $k = \frac{b-a}{L}$, 第 i 个薄片阻值 $R_i = \rho \frac{\frac{L}{n}}{\pi(a + i \cdot k \frac{L}{n})^2}$, 则

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{\rho}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{L}{n(a + i \cdot k \frac{L}{n})^2} \\ &= \frac{\rho}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{L}{n} \cdot \frac{1}{[a + (i-1) \cdot k \frac{L}{n}]^2} \cdot \frac{1}{a + i \cdot k \frac{L}{n}} \\ &= \frac{\rho}{k\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a + (i-1) \cdot k \frac{L}{n}} - \frac{1}{a + i \cdot k \frac{L}{n}}, \end{aligned}$$

这里对数列用了拆项求和, 其极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a + (i-1) \cdot k \frac{L}{n}} - \frac{1}{a + i \cdot k \frac{L}{n}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

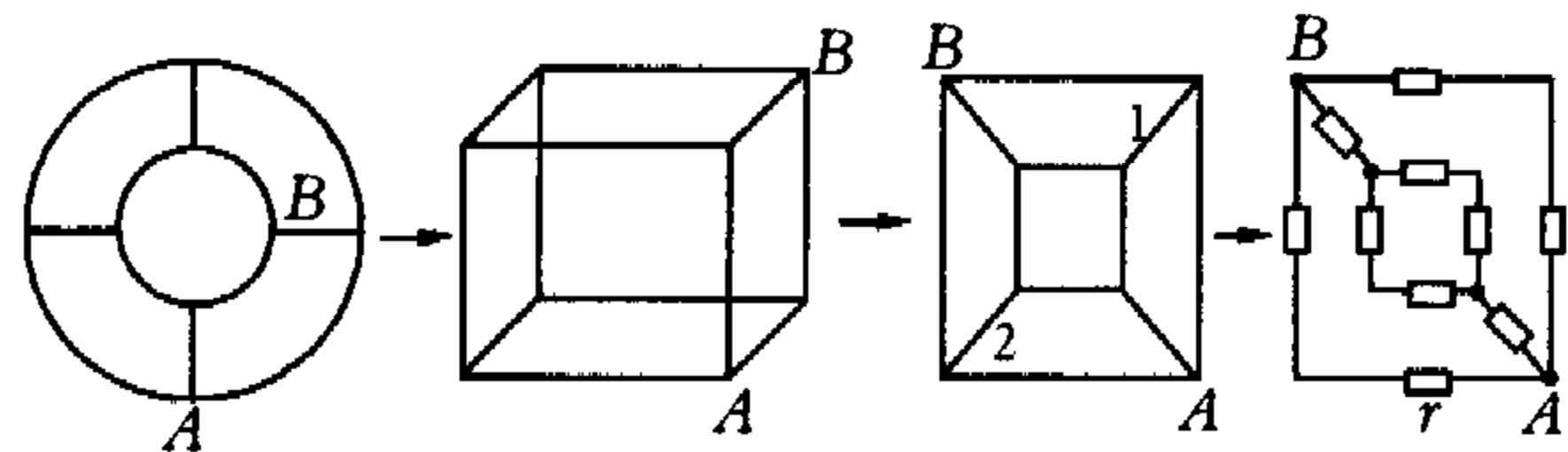
故 $R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \rho \frac{L}{\pi ab}$.

8. 本题仍需用微元法求解. 设总电阻为 R , 看做是层与层间长为 $r_{i+1} - r_i$ 、面积为 $2\pi r_i \cdot l$ 的等值元电阻串联而成, 即

$$\frac{R}{n} = \rho \frac{r_{i+1} - r_i}{2\pi r_i \cdot l}, (1 + \frac{2\pi R l}{\rho n})^n = (\frac{r_{i+1}}{r_i})^n,$$

两边取极限有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2\pi R l}{\rho n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{r_{i+1}}{r_i})^n$,
 $e^{\frac{2\pi R l}{\rho}} = \frac{b}{a}, \frac{2\pi R l}{\rho} = \ln \frac{b}{a}$, 则 $R = \rho \frac{\ln b - \ln a}{2\pi l}$.

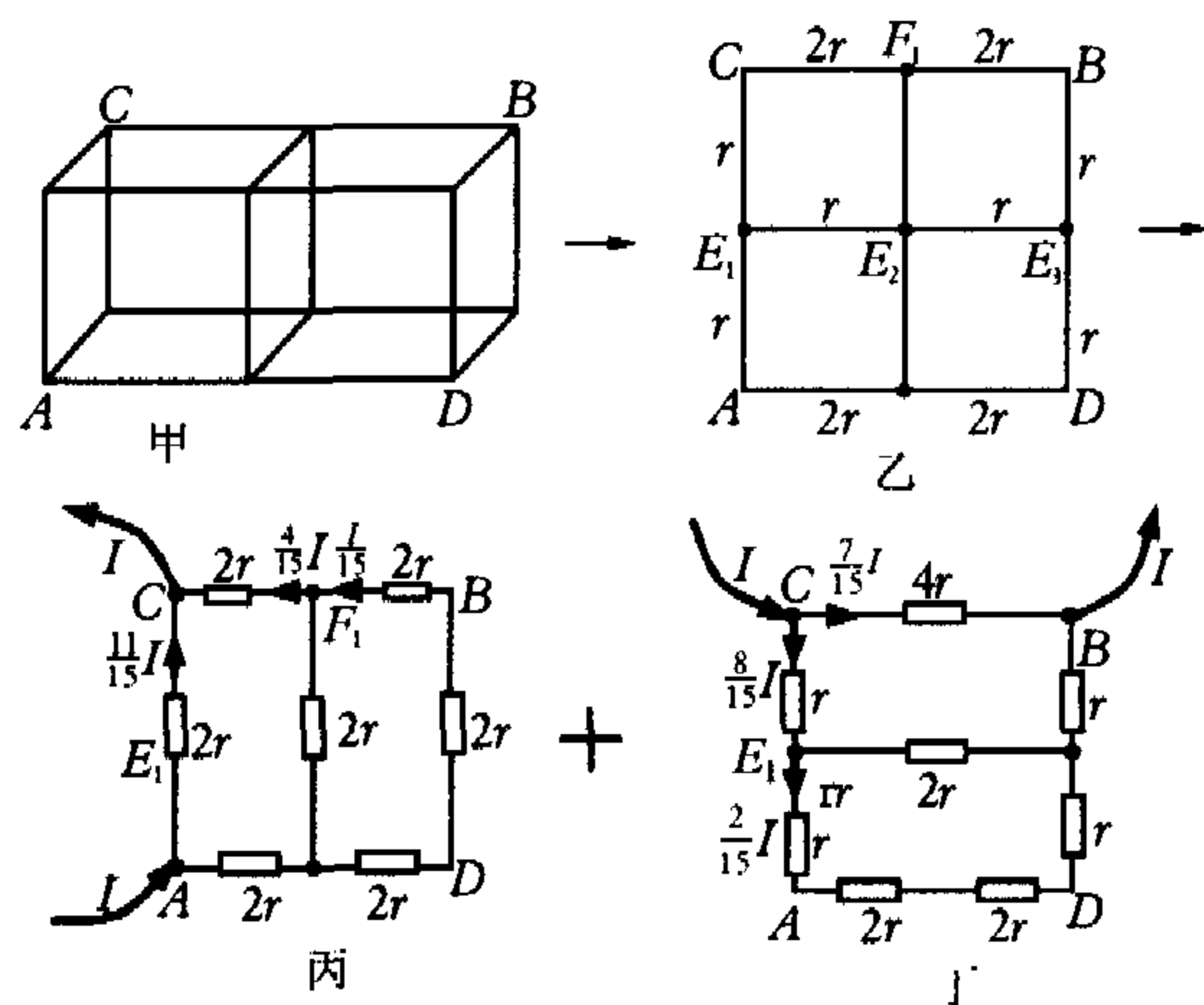
9. 先将小圆面拉起、弧线拉直, “载阻框架”成立方体, 再将各边压向 A、B 所在平面, 根据对称性, 1、2 两电阻无电流, 可拆去, 电阻连接如图答 19-5, 易得总电阻 $R_{AB} = \frac{3}{4}r$.



图答 19-5

10. 将框架压到 ACBD 平面成“田”字格, 每边电阻如图 19-6 乙所示, 下面我们用电流叠加法完成 A、B 间电阻计算: 将从 A 流入、B 流出的电流 I 视为从 A 流入、C 流出及从 C 流入、B 流出的两个大小均为 I 的电流之叠加, 相对从 A 流入、C 流出的电流, $E_1 E_2$ 、 $E_3 E_2$ 拆去, 电阻连接如图 19-6 丙, 各支路电流按电阻反比例分配: A、C 间电流 $\frac{11}{15}I$, BF_1 上电流 $\frac{I}{15}$, $F_1 C$ 上电流 $\frac{14}{15}I$, 方向标示如图丙; 相对从 C 流入、B 流出的电流, 电阻连接如图 19-6 丁, CE_1 、 $E_1 A$ 及 CB 上电流大小、方向如图丁所示, 那么

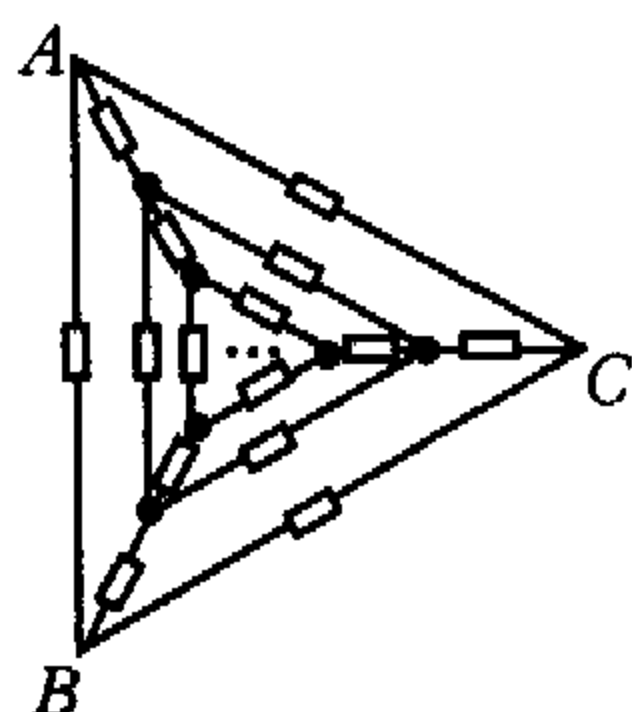
$$\begin{aligned} IR_{AB} &= \frac{11}{15}I \cdot 2r - \frac{2}{15}Ir - \frac{8}{15}Ir + \frac{7}{15}I \cdot 4r - \frac{4}{15}I \cdot 2r - \frac{I}{15} \cdot 2r, \\ R_{AB} &= 2r. \end{aligned}$$



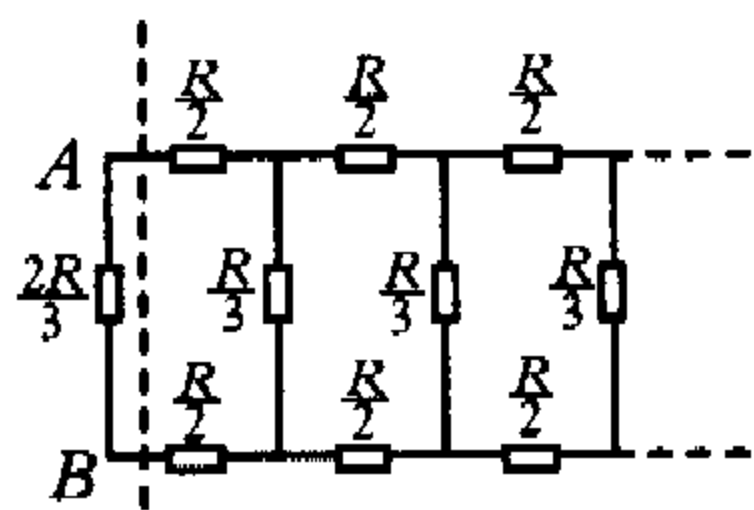
图答 19-6

11. 将原无限长立体正三棱柱框架沿左、右递缩为三棱台, 再“压”在 AB 所在平面, AB 右边各电阻连接如图答 19-7, 由图可知电阻的连接关于 AB 中垂线轴对称, 故可将过点 C 的棱拆去, 再将电路左边折到右边形成半无限平面网络电路如图答 19-8, 根据图示, 设与 $\frac{2R}{3}$ 并联的 n 个网络元电阻为 x , 则

$$\frac{x \cdot \frac{R}{3}}{x + \frac{R}{3}} + R = x, x = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} R, R_{AB} = \frac{x \cdot \frac{2}{3} R}{x + \frac{2}{3} R} = \frac{2\sqrt{21}}{21} R.$$

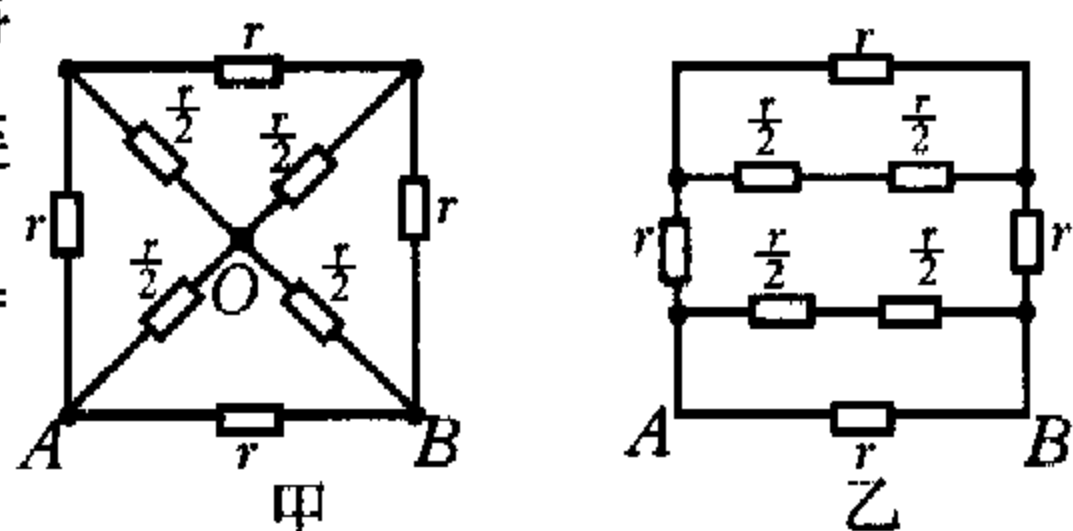


图答 19-7



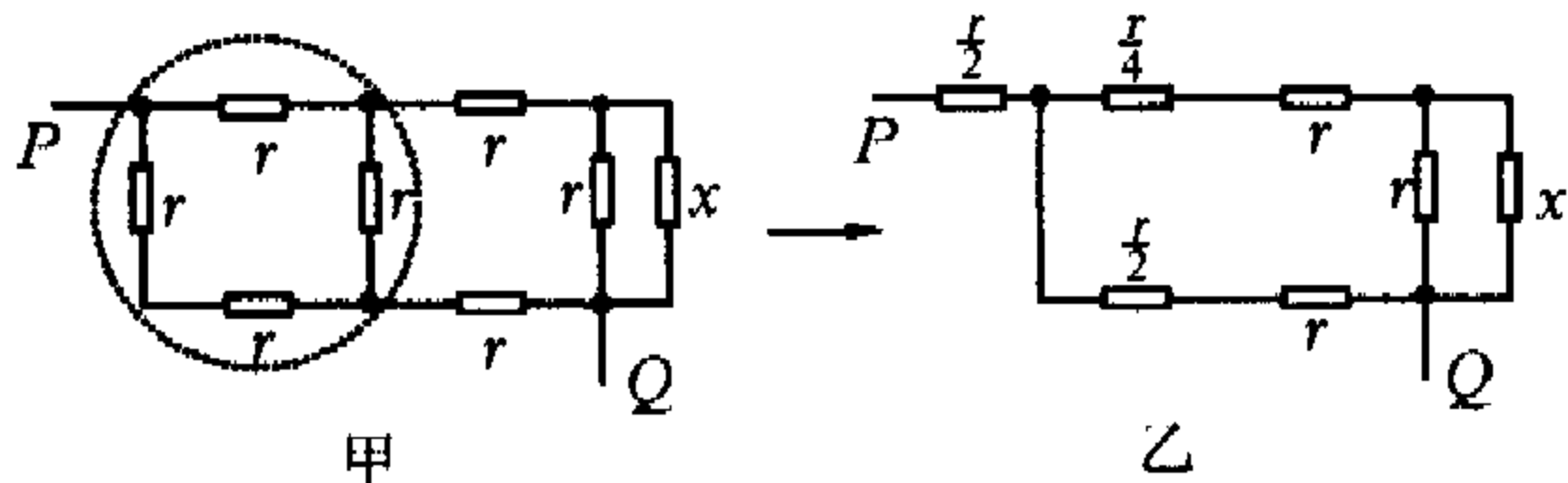
图答 19-8

12. 三个金属圈共有六个结点,每四分之一弧长的电阻 $r = \frac{R}{4}$,将三维金属圈“压扁”到 AB 所在平面并“拉直”弧线成图答 19-9 甲所示,由对称,可将 O 点拆分成图 19-9 乙所示连接,易得 $R_{AB} = \frac{2.5r \times 0.5r}{2.5r + 0.5r} = \frac{5}{12} r = \frac{5}{48} R.$



图答 19-9

13. 设 $N-1$ 个网络元二端电阻为 x ,再接一个后有 $R_{PQ} = x$,等效电路如图 19-10 甲,将虚线框内三角型连接替换为星型连接后电路如图 19-10 乙,由该图得

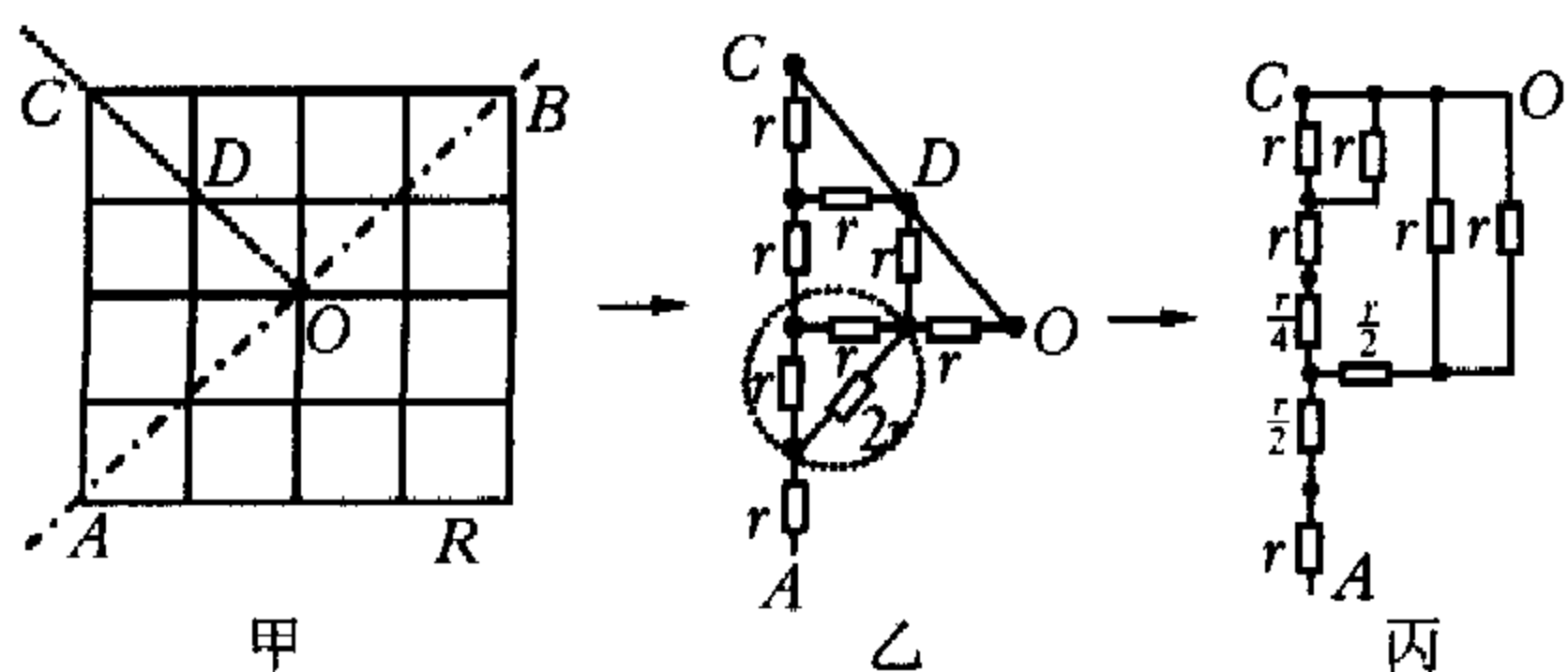


图答 19-10

$$x = \frac{r}{2} + \frac{\frac{3}{2} r \cdot (\frac{5}{4} r + \frac{xr}{x+r})}{\frac{3}{2} r + (\frac{5}{4} r + \frac{xr}{x+r})}, 15x^2 - 10rx - 13r^2 = 0,$$

$$\text{得 } x = R_{PQ} = \frac{5 + 2\sqrt{55}}{15} r.$$

14. 如图答 19-11 甲,将图形沿 AB 对折,每小段电阻为 $r = R/2, C, D, O$ 等电势,只要求出 R_{AO}, R_{AB} 即为其 2 倍.点 A, O 间电阻连接如图答 19-11 乙,对虚线圈出部分作 $\Delta \rightarrow Y$ 变换后电路连接如图答 19-11 丙所示,由图丙得



图答 19-11

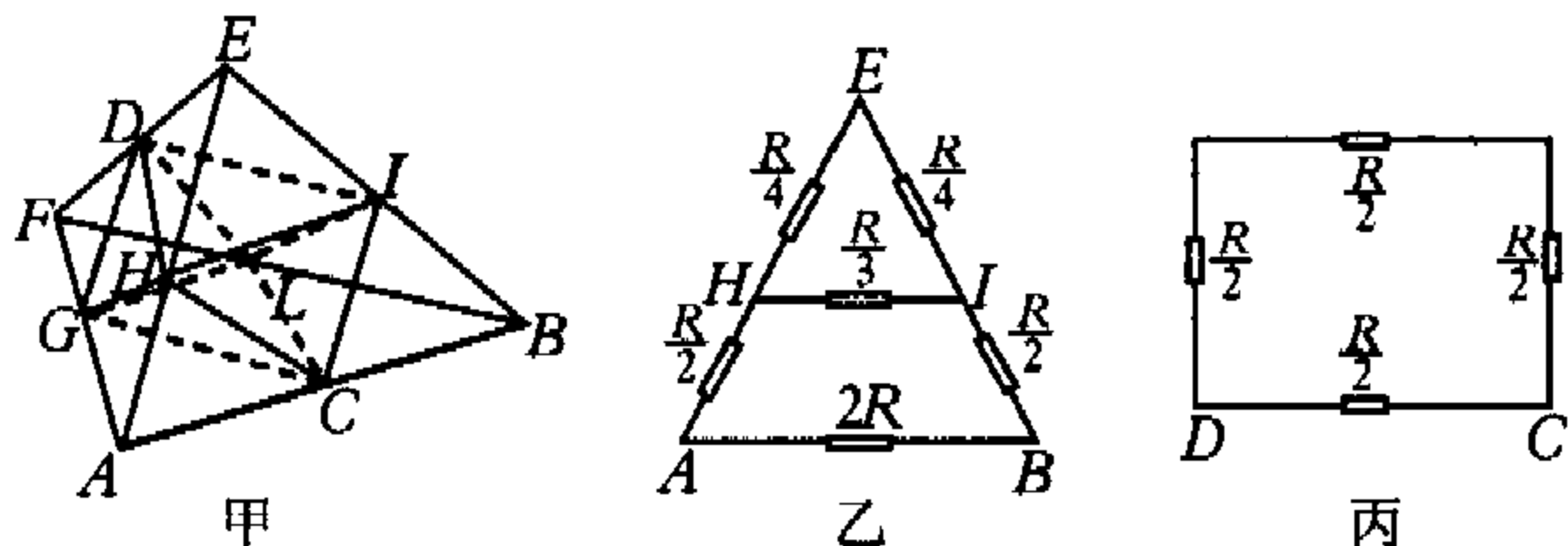
$$R_{AO} = \frac{\frac{7}{4} r \cdot r}{\frac{7}{4} r + r} + \frac{3r}{2} = \frac{47}{22} r, \text{故 } R_{AB} = \frac{47}{22} R.$$

15. 由两个正四面体框架承载电阻,充分注意框架的对称性,求 A, B 间电阻时,电路连接关于 AB 中垂面对称,故图答 19-12 甲中 E, D, F 三点等电势,其间电阻移去, GH, IL 也由同样原因移去, C 点与 AB 拆分,将 FAB 与 EAB 两面合拢,转化成如图答 19-12 乙所示电阻连接,则

$$R_{AB} = \frac{\frac{6}{5} \times 2}{\frac{6}{5} + 2} R = \frac{3}{4} R;$$

求 C, D 间电阻,注意到 G, H, I, L 均在 DC 中垂面上且为等电势点,故撤去这四点间的四个电阻,并拆分 G, H, I, L 各点与 AF, AE, EB, BF 的“粘联”,合并 A 与 B, E 与 F ,电阻连接如图 19-12 丙所示,故

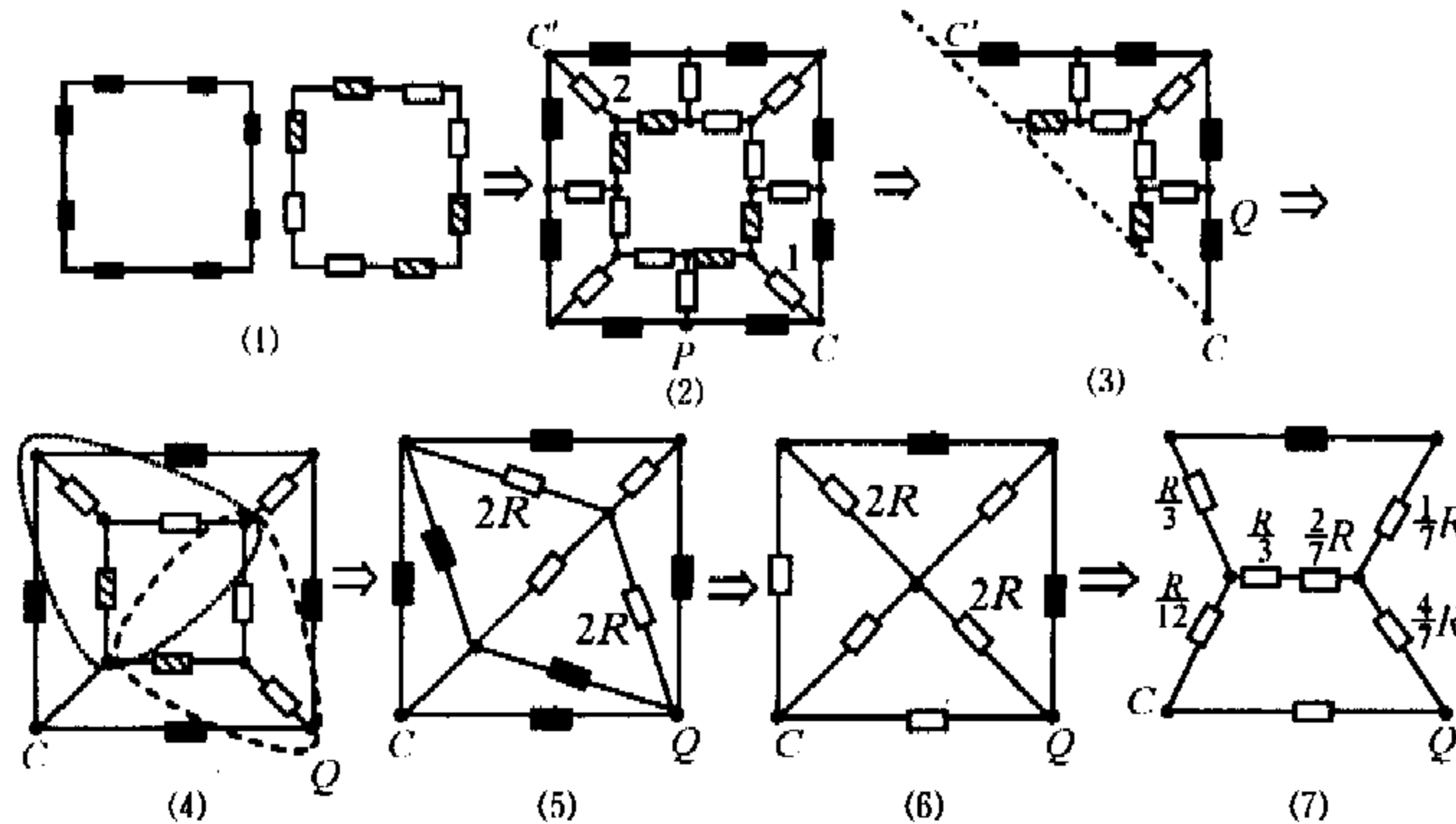
$$R_{CD} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} R = \frac{3}{8} R.$$



图答 19-12

16. 根据对称性,上、中、下各层与 PQ 垂直的对角线上等势,将上、下层中心结点拆分与顶点合并,中层与上(下)层电阻连接如图 19-13(1),其中 \blacksquare 代表阻值为 R, \square 为 $R/2, \text{▨}$ 为 $R/4$,再把上、下层压到 P, Q 所在平面,电路等效为图 19-13(2), 1, 2 可拆去;显然只须求一半阻值如图(3)中 R_{CQ}, CC' 上各点等势,将它们“粘合”如图(4),在虚线内作 $Y \rightarrow \Delta$ 变换成图(5),整理得图(6),最后对图(6)左右两个 Δ 型变换为 Y 型,得图(7)各阻值电阻的连接,现在可以求出

$$R_{CQ} = \frac{12}{35} R, \text{于是 } R_{PQ} = \frac{24}{35} R.$$



图答 19-13



专题 20 稳恒电路计算

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

稳恒电路中,电流不随时间变化,相应地,导体内部有一稳恒电场,电荷在电场力作用下做定向移动消耗电场能,电源中非静电力做功,将其他形式的能转变为电场能,这是稳恒电路的基本情况.各种形式的电路有一些共同的基本规律,例如欧姆定律,焦耳定律,基尔霍夫定律,从这些基本规律出发,抓住电路的特征,才能完成对一个电路的计算.

先介绍一段含源电路的欧姆定律.在电路计算中,常须确定整个电路中

某一段含有电源的电路的端电压,我们用电势的概念处理这类问题.如图 20-1 所示一段

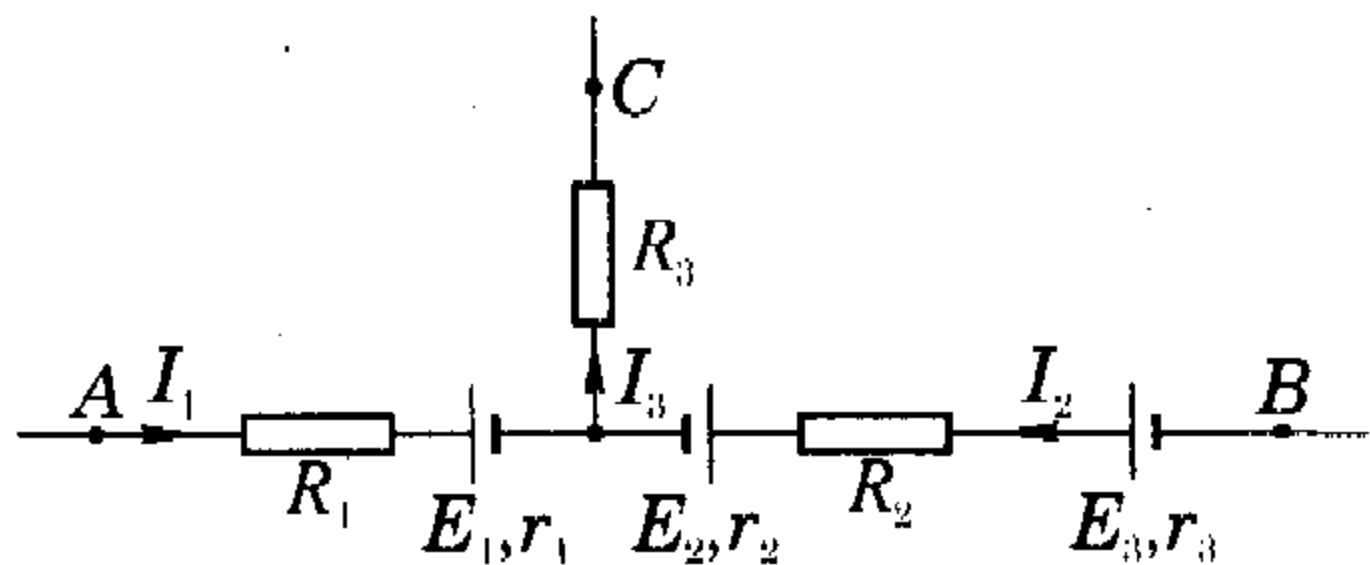


图 20-1

电路,若要确定 A 端与 B 端间的电势差,先设定从 A 向 B 电势降为正、升为负,则

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = I_1(R_1 + r_1) + E_1 - E_2 - I_2(R_2 + r_2 + r_3) + E_3;$$

若要确定 A 端与 C 端间的电势差,先设定从 A 向 C 电势降为正、升为负,则

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = I_1(R_1 + r_1) + E_1 + I_3 R_3.$$

一段电路两端电势差等于这段电路中所有电源电动势与电阻上电压降的代数和,写成一般式为 $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \sum E_i + \sum I_i R_i$.若得到 $\sum E_i + \sum I_i R_i > 0$,则 $\varphi_A > \varphi_B$; $\sum E_i + \sum I_i R_i < 0$,则 $\varphi_A < \varphi_B$.

例 1 一电路如图 20-2 所示,已知 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$, $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 9 \text{ V}$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \Omega$,求 U_{ab} 、 U_{cd} .

分析与解 先由全电路欧姆定律求出回路电流大小

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2r} = 0.4 \text{ A}, \text{ 电流方向逆时针.}$$

在图 20-2 中, a、b 两点间实际上有两段含源电路,我们可以任选其中一段,比如 $aR_1E_1R_3b$ 段来应用一段含源电路的欧姆定律, $U_{ab} = E_1 - I(R_1 + R_3 + r_1) = 10 \text{ V}$,且 a 点电势高于 b

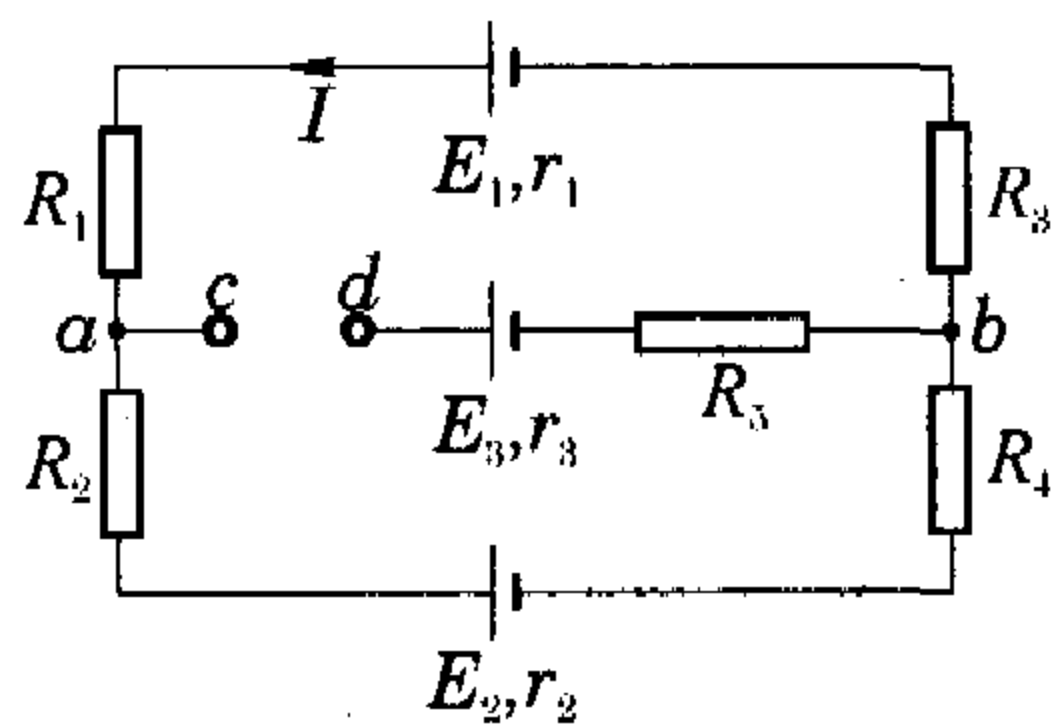


图 20-2

点电势;同样,求 U_{cd} 时也可选择两个中的任一个,例如对下半个电路应用一段含源电路的欧姆定律: $U_{cd} = E_2 - E_3 + I(R_2 + R_4 + r_2) = 1 \text{ V}$,说明 c 点电势(与 a 点相同)比 d 点高 1 V.

例 2 如图 20-3 所示电路中, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $E_1 = 24 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $r_1 = 2 \Omega$, $r_2 = 1 \Omega$, O 点接地,试确定 a、b、c、d 各点电势及每个电池的端电压 U_{ab} 、 U_{cd} .

分析与解 先求出回路中的电流:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2 + R_3}$$

$$= 2 \text{ A}, \text{ 方向如图 20-3 中标示.}$$

$\therefore U_{aO} = IR_2 = 2 \text{ V}$, O 点电势为零,则 $\varphi_a = 2 \text{ V}$;

$\therefore U_{ab} = -Ir_1 + E_1 = (-4 + 24) \text{ V} = 20 \text{ V}$,

$\therefore \varphi_b = (-20 + 2) \text{ V} = -18 \text{ V}$;

又 $U_{bc} = -IR_1 = -4 \text{ V}$,则 $\varphi_c = \varphi_b - U_{bc} = (-18 + 4) \text{ V} = -14 \text{ V}$;而 $\varphi_d = U_{cO} = -IR_3 = -6 \text{ V}$;

电池 1 两端电压 $U_{ab} = -Ir_1 + E_1 = 20 \text{ V}$,而电池 2 两端电压 $U_{cd} = -Ir_2 - E_2 = -8 \text{ V}$,"-"表示 $\varphi_d > \varphi_c$.

在电子技术等实际应用电路中,需要解决的电路问题往往较为复杂,计算这样的电路,需要用到基尔霍夫定律.基尔霍夫第一定律是电荷守恒定律在有分支的电路中的表现形式;在任一节点处,流向节点的电流之和等于流出节点的电流之和,用正号与负号区分流向节点的电流与从节点流出的电流,则电路中的各节点总有 $\sum I = 0$;基尔霍夫第二定律说明,沿任一闭合回路的电势增量的代数和等于零,即 $\sum E + \sum IR = 0$,这个定律是稳恒电场为势场的必然结果.应用基尔霍夫定律解决分支电路问题时,要根据待求未知数个数建立相同数的独立方程.一般来说,一个分支电路有 n 个节点,那么其中只有 n-1 个独立的基尔霍夫第一定律方程;取回路建立基尔霍夫第二定律方程时,各回路中至少有一段电路是其他回路中未涉及的,这样的回路方程才是互相独立的.至于每一电路上电流的方向可以先作设定,结果为负值说明实际电流方向与所设相反.

例 3 例 1 电路中,若将 c、d 短路, a、b 间电势差是多少?

分析与解 c、d 短路后,设各支路电流为 I_1 、 I_2 、 I_3 ,方向设定如图 20-4 所示.若求知 I_3 ,可得 $U_{ab} = E_3 - I_3(R_5 + r_3)$.但我们面对的是 I_1 、 I_2 、 I_3 三个未知电流,也就是说我们需要根据基尔霍夫定律建立三个独立的方程,由基尔霍夫第一定

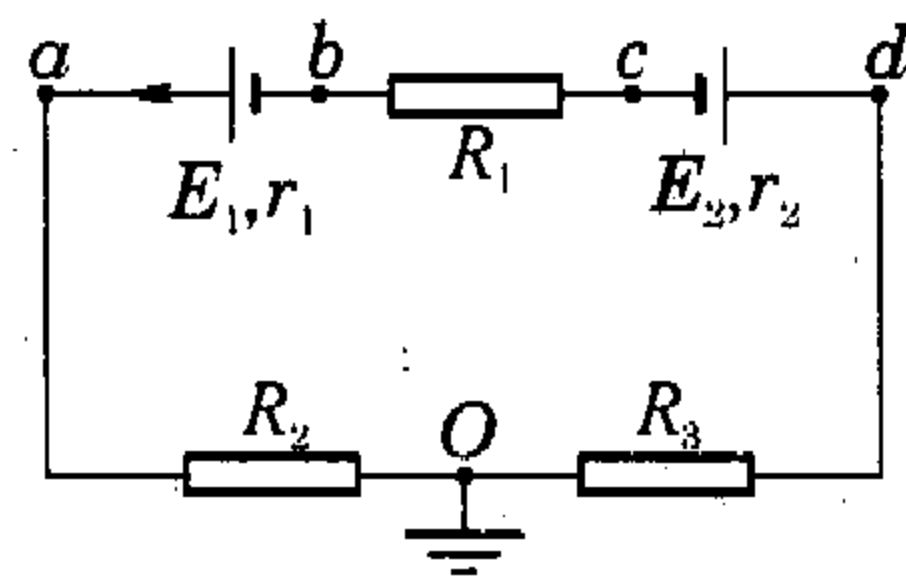


图 20-3

律只有一个独立方程,可对 a 点建立:

$$I_1 + I_3 = I_2, \quad (1)$$

再由基尔霍夫第二定律,

对上半个回路有

$$I_1(r_1 + R_1 + R_3) - E_1 + E_3 - I_3(r_3 + R_5) = 0, \quad (2)$$

对下半个回路有

$$I_2(r_2 + R_2 + R_4) + E_2 - E_3 + I_3(r_3 + R_5) = 0, \quad (3)$$

将已知数据代入: $I_1 + I_3$

$= I_2, 5I_1 - 4I_3 = 3, 5I_2 + 4I_3 = 1$, 解得

$I_3 = -2/13 \text{ A}$, I_3 方向与所设相反, 故 $U_{ab} = 9.62 \text{ V}$.

利用基尔霍夫定律, 对有多个电源连接的电路, 可用一个“等效电源”来替代. 若两个电池连接在如图 20-5 甲所示电路, 由基尔霍夫第二定律: $E_1 + I(R + r_1 + r_2) - E_2 = 0$, 则通过

电阻 R 的电流 $I = \frac{E_2 - E_1}{R + r_1 + r_2}$, 这就是说, 该电路中的两个电源可以等效为一个电动势为 $E_{\text{等效}} = (E_2 - E_1)$ 、内电阻为 $r_{\text{等效}} = (r_1 + r_2)$ 的电源; 若两个电池连接在如图 20-5 乙所示电路, 对

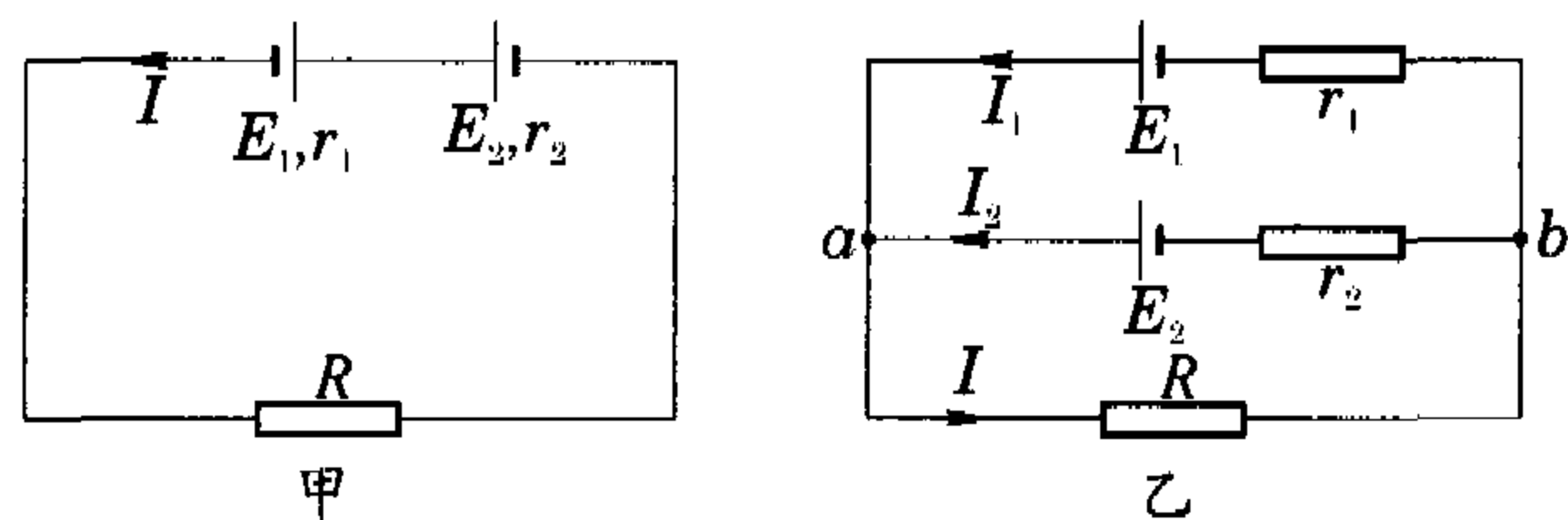


图 20-5

节点 a 和回路 $E_1 a R b r_1 E_1$ 及回路 $E_2 a R b r_2 E_2$, 由基尔霍夫定律: $I = I_1 + I_2, IR + I_1 r_1 - E_1 = 0, IR + I_2 r_2 - E_2 = 0$, 可得

$$I = \frac{E_1 - IR}{r_1} + \frac{E_2 - IR}{r_2} \Rightarrow I = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

对电阻 R 而言, 将这两个电源替换成一个电动势 $E_{\text{等效}} = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}$, 内电阻 $r_{\text{等效}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ 的电源, 通过的电流及其两端电压不变; 推广到多回路电路, 在分析某一分支电路的电流或电压时, 也可以将电路的其余部分用一个等效电源电动势(大小等于该分支电路断开时两端电压)和一个等效电源内电阻(大小等于该分支电路断开、并撤去其余部分电路中所有电动势时两端间的电阻)来代替, 这就是等效电源原理.

如图 20-6 所示的电路称为惠斯通电桥, 若接在 C, D 间“桥路”上的电流计读数为零, 叫做电桥平衡. 由于 $I_{CD} = 0$, 说明 $\varphi_C = \varphi_D$, 且通过电阻 R_1 的电流与通过电阻 R_2 的电流相同为 I_1 , 通过电阻 R_3 的电流与通过电阻 R_4 的电流相同为 I_2 , 则有 $U_{AC} = I_1 R_1 = I_2 R_3 = U_{AD}, U_{CB} = I_1 R_2 = I_2 R_4 = U_{DB}$, 两式相比有 $R_1/R_2 = R_3/R_4$. 惠斯通电桥可用来比较未知电阻与已知电阻; 若 R_2 为一标准电阻, 阻值为 R_0, R_3, R_4 为两段粗细均匀的同种电阻丝, 调节 D 点的位置至无电流通过 G 表, 若此时 R_3 的长度为 l, R_4 的长度为 L , 则待测电阻 $R_1 = (l/L)R_0$.

电势差计是用来测定未知电动势的一种装置, 其工作原理基于基尔霍夫定律. 如图 20-7 所示是电势差计工作电路, 各个电源的电动势及各电流方向标示在图上, E_x 为待测电动势. 双掷开关 S 投向 1, 对节点 A 有 $I_1 = I + I'$; 对回路 $ABCD A$ 有 $E_x + Ir + IR_g - I'R = 0$, 由此二式得 $I = (I_1 R - E_x)/(R + r + R_g)$. 调节 $R = R_x$, 使 $I = 0$, 即电流计读数为零、电势差计达到平衡时 $I_1 R_x - E_x = 0$, 即

$$E_x = I_1 R_x. \quad (1)$$

保持电路不变, 将开关 S 投向 2, 用一个标准电动势 E_0 来代替 E_x , 再调节 R 到 R_0 , 使电流计读数为零、电势差计重新平衡, 这时有

$$E_0 = I_1 R_0. \quad (2)$$

从 $AEFGA$ 回路可知 E_0 代替 E_x 重新平衡后, I_1 不变, 比较①、②两式得 $E_x = (R_x/R_0)E_0$, 这样, 用比较法从标准电动势可精确地测出未知电动势. 操作中, 使电流计读数为零, 亦即使 R 上的电压降补偿了回路 $ABCD A$ 中的电动势, 故电势差计的这种工作电路叫做补偿电路. 若电路中某一支路含有电容器, 在支路端电压发生变化时, 电容器极板上电量将发生变化, 该支路有充(放)电电流, 但达到稳定时, 该支路等效于断路, 这是计算含容电路的一个基本思路.

例 4 阻值为 R 的四个等值电阻, 电容为 $1 \mu\text{F}$ 的四个电容器以及四个电池在立方体框架的各边上连接起来, 如图 20-8 所示. 各电池的电动势 $E_1 = 4 \text{ V}, E_2 = 8 \text{ V}, E_3 = 12 \text{ V}, E_4 = 16 \text{ V}$, 它们的内阻可以忽略. (1) 求各个电容器的电压和电量; (2) 若 H 点与 B 点之间短路, 求电容器 C_2 上的电量.

分析与解 先将这个复杂的立体网络变换成平面网络如图 20-9 所示, 可以看到, 电流回路为 $HEFBCDH$, 设回路电流为 I , 方向设定如图 20-9 所示, 由基尔霍夫定律: $I = (E_1 - E_4)/4R$. 各电容器两端电压可通过取相应的一段支路, 由一段含源电路的欧姆定律求得, 它们分别是:

$$U_{DA} = E_1 - E_2 - IR, \quad (1)$$

$$U_{EA} = E_4 - E_2 + IR, \quad (2)$$

$$U_{GC} = E_1 - E_3 - IR, \quad (3)$$

$$U_{GF} = E_4 - E_3 + IR. \quad (4)$$

将数据代入①式得到 C_1 电压 $1 \text{ V} (\varphi_D < \varphi_A)$; 代入②式即得 C_2 的电压为 $5 \text{ V} (\varphi_A < \varphi_E)$; 代入③式得 C_3 电压为 $5 \text{ V} (\varphi_G < \varphi_C)$;

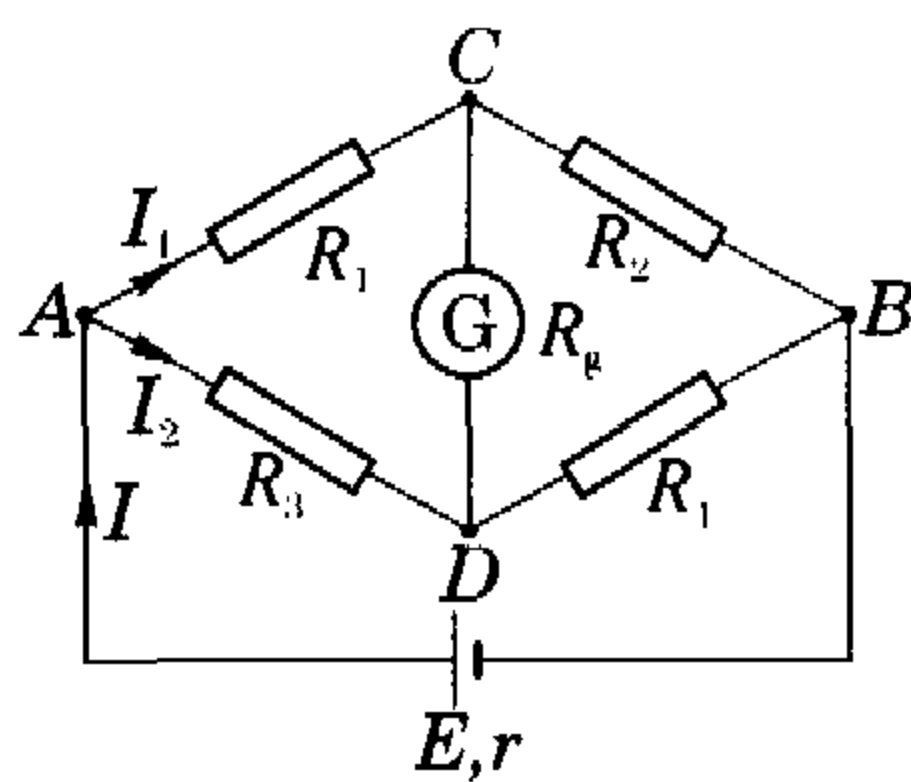


图 20-6

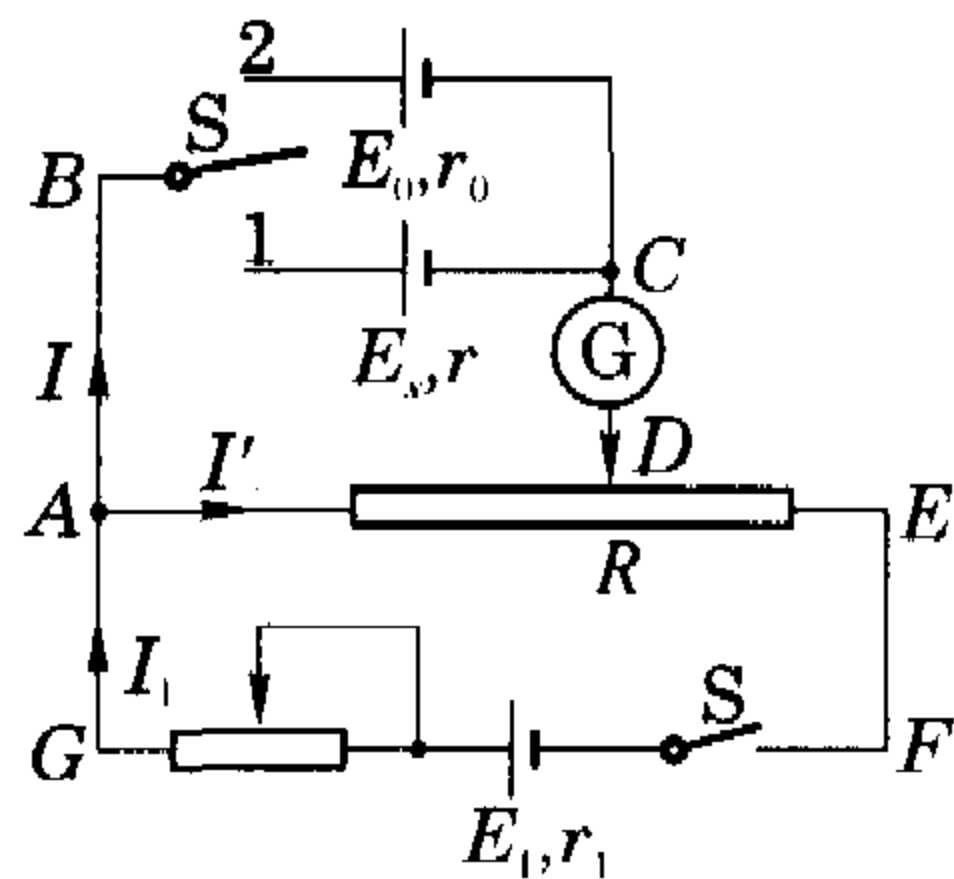


图 20-7

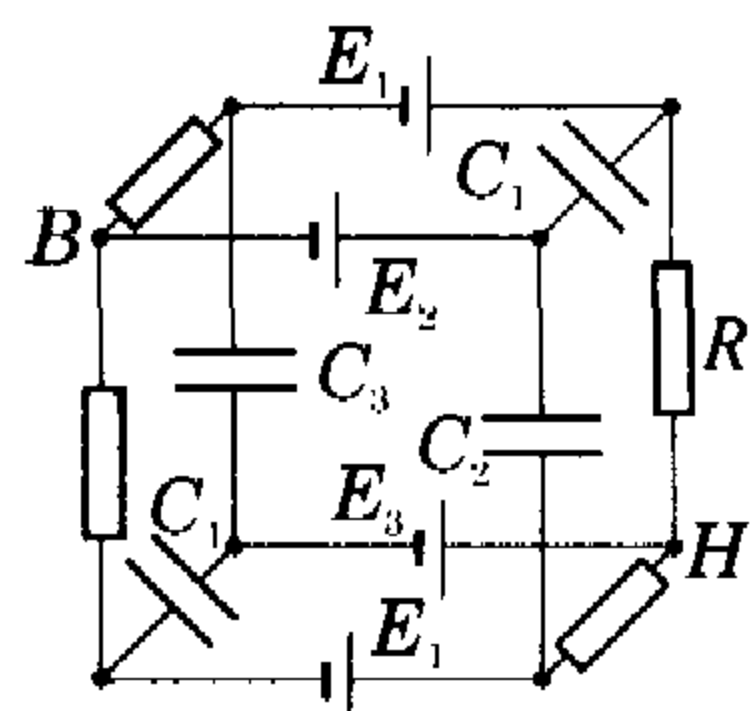


图 20-8

代入④式得到 C_4 电压 1 V ($\varphi_C > \varphi_F$), 易得四个电容器上电量依次为 $1\ \mu\text{C}$ 、 $5\ \mu\text{C}$ 、 $5\ \mu\text{C}$ 、 $1\ \mu\text{C}$. 若将 H 点与 B 点之间短路, 电流回路成 $B(H)EFB(H)$, 该回路中电流设为 I' , $I' = -E_4/2R = -8/R$, 方向为 $B(H)FEB$, 此时 $U_{EA} = E_4 - E_2 + I'R = 0$, 故电容器 C_2 此时电量为零.

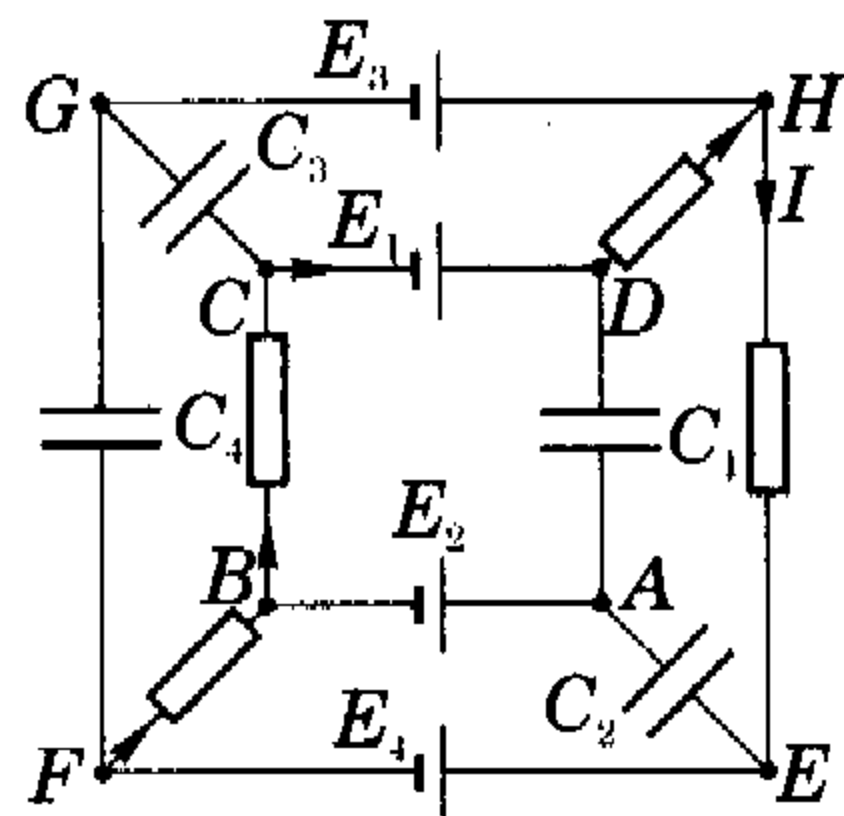


图 20-9

例 5 在图 20-10 所示的网络中, 已知部分支路上电流值及其方向, 某些元件参数和支路交点的电势值 (有关数值及参数已标在图上). 请你利用所给的有关数值及参数求出含有电阻 R_x 的支路上电流值 I_x 及其方向.

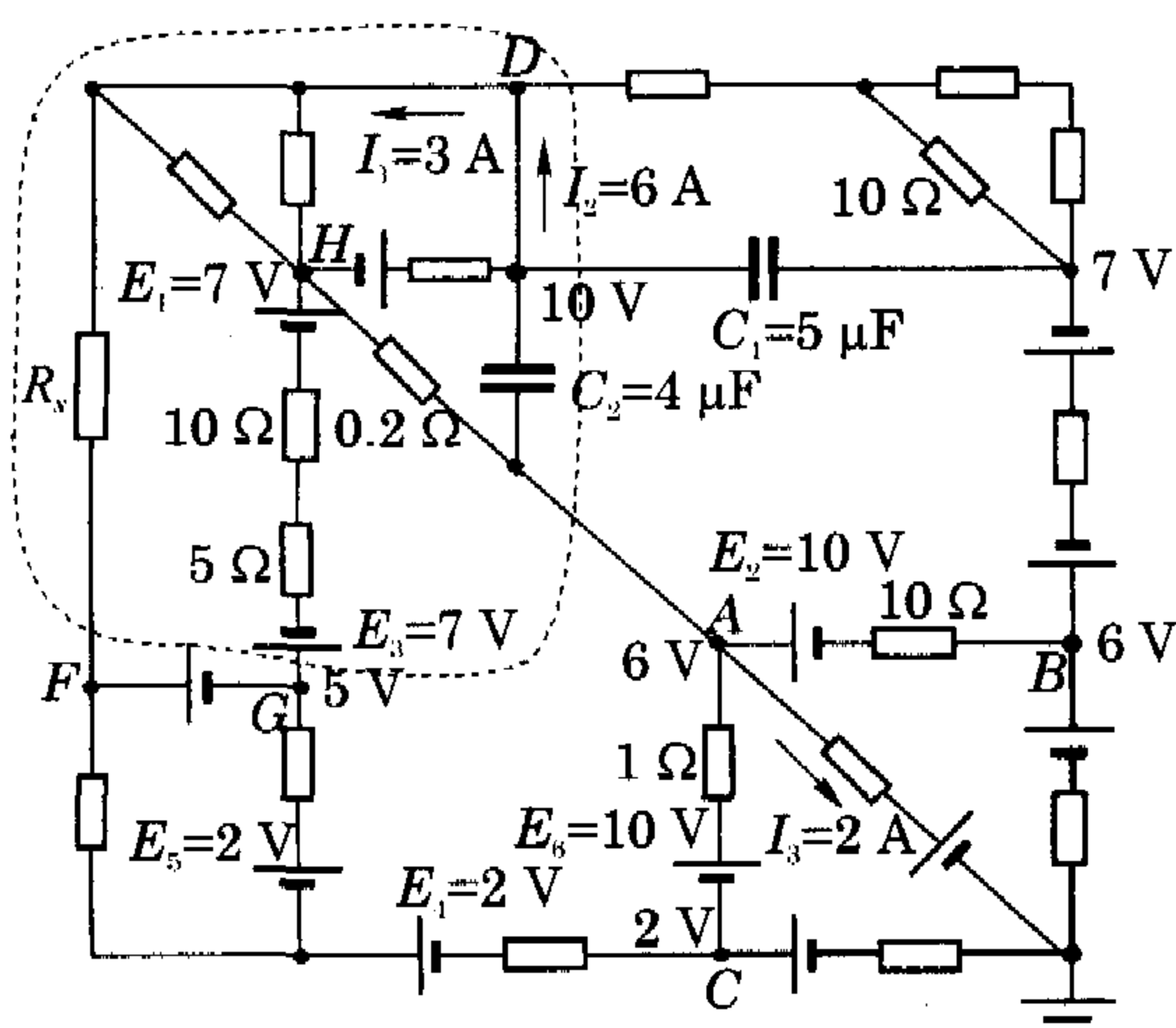


图 20-10

分析与解 这样一个复杂网络问题, 还是依据电路基本规律处理. 首先, 对网络中某一部分电路, 流入电流与流出电流相等, 对一段电路, 电流与电压遵从欧姆定律所确定的关系. 取一个包括 I_x 的电流出入区, 将其他各电流求出, 即可求得 I_x .

通过观察, 我们很快会对图 20-10 用虚线围出的区域感兴趣, 注意到有电容器的支路为断路 (无电流), 这个区域电流出入口共有 A 、 D 、 F 、 G 四个, D 端有 3 A 电流流出区域已是不争事实, 而 A 端与 G 端联系着部分确定电路, 有可能求出从这两个端口出或是入多少电流.

先计算通过 A 端的电流 I_A . 对网络右下角部分电路, 由 $\varphi_A - \varphi_B = E_2 - I_{B \rightarrow A}R$ 得 $I_{B \rightarrow A} = 1\text{ A}$ 、由 $\varphi_A - \varphi_C = E_6 + I_{A \rightarrow C}R$ 得 $I_{A \rightarrow C} = -6\text{ A}$, 则从 A 端流向虚线区域的电流 $I_A = (6 + 1 - 2)\text{ A} = 5\text{ A}$; 再取 GH 段电路, $\varphi_G = 5\text{ V}$ 已给定, 而 $\varphi_H = 6\text{ V} - 5 \times 0.2\text{ V} = 5\text{ V} = \varphi_G$, 可见并无电流沿 HG 出入口 G , 于是, 我们知道了通过电阻 R_x 的电流 $I_x = 5\text{ A} - 3\text{ A} = 2\text{ A}$, 且是从 F 点流出的.

金属的导电性质已为我们熟悉, 下面我们介绍其他一些物质的导电特性.

大块导体导电 电源两端连接着导电性质不均的导线或

大块导体, 如大块金属、材料不均匀的导线, 这时导体不能抽象成一根粗细均匀的导线, 它的电阻不能直接用电阻定律 $R = \rho \frac{L}{S}$ 计算. 大块导体加上恒定电压后, 也会建立起稳恒电场, 但电流分布情况较均匀导线中复杂, 例如半球形接地电极在附近地面下的电流分布如图 20-11 所示呈球对称; 一对电极周围的电流分布如图 20-12 所示, 与一对等量异种电荷周围的电场分布相似; 同轴电缆中的漏电电流分布则如图 20-13 所示, 是辐向均匀分布的.

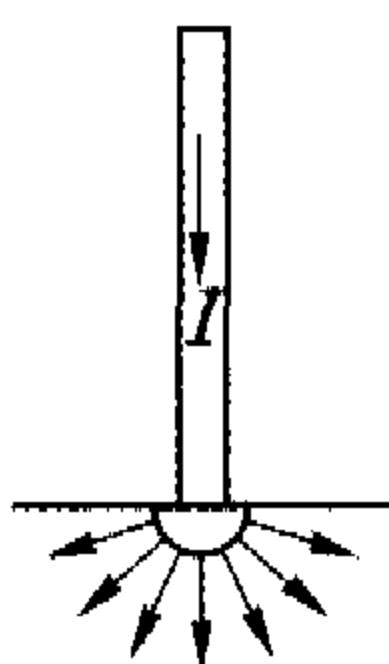


图 20-11

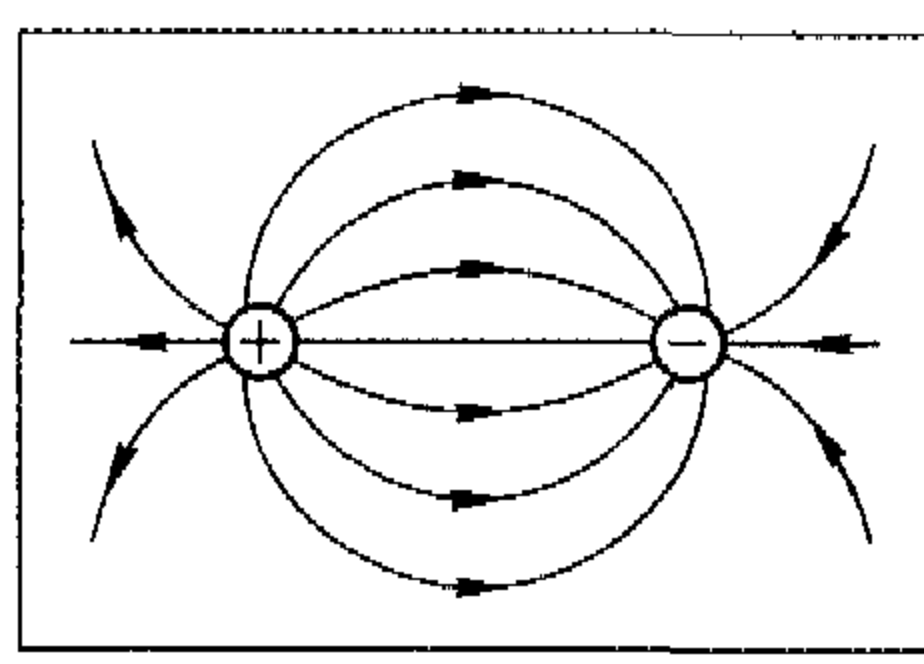


图 20-12

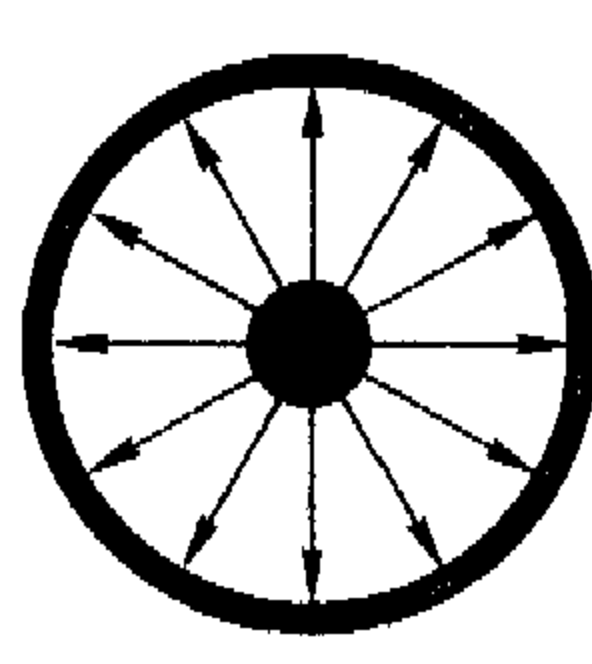


图 20-13

在以上各电流分布图中, 带箭头的曲线称为电流线, 与描述导体内电场的电场线相当, 电流线各点的方向表示正电荷在该点定向运动的方向, 亦即该点电场强度的方向; 用电流线的疏密来表示电流密度——垂直于电流方向上单位面积的电流的大小. 设在大块导体中某处电场强度为 E , 电流为 I , 沿电场方向取一长 Δl 、横截面积为 ΔS 的元导体, 根据欧姆定律, 有 $I = \frac{E \cdot \Delta l}{\rho \frac{\Delta l}{\Delta S}} = E \cdot \Delta S / \rho$, 若电流密度 $I/\Delta S$ 用 j 表示, 则有 $j = E/\rho = \gamma E$. 此式给出了大块导体中各点电场和电流分布之间的关系, 是欧姆定律在大块导体中各点的精细表述. 式中 γ 是电阻率的倒数, 叫做电导率, 国际单位为西门子/米 (S/m), 表征导体各处的导电性, 大导体电路的计算须以此式为据.

例 6 电线被风吹断, 一端触及地面, 从而使 200 A 的电流由接触点流入地内, 如图 20-14 所示. 设地面水平, 土地的电导率 $\gamma = 10^{-2}\text{ S/m}$, 当一个人走近输电线接地端, 左、右两脚间 (约 0.6 m) 的电压称做跨步电压, 试求距高压线触地点 1 m 和 10 m 处的跨步电压.

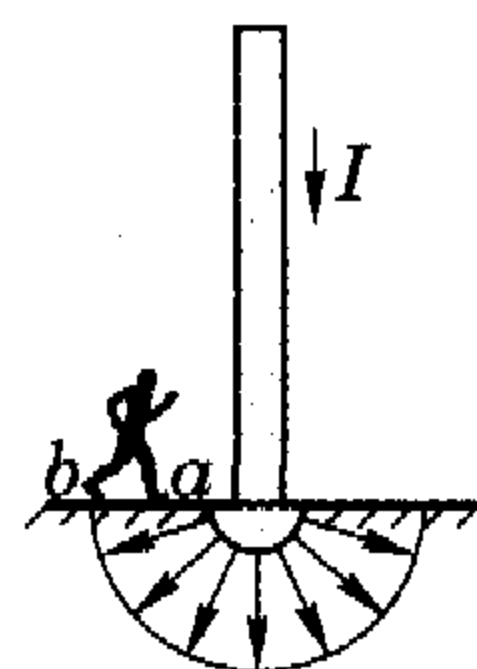


图 20-14

分析与解 高压线触地后在地内电流分布可认为球对称, 那么, 距触地点 r 处的电流密度应为 $j = \frac{I}{2\pi r^2}$, 场强为 $E = \frac{j}{\gamma} =$

$\frac{I}{2\pi\gamma r^2}$, 即场强是按到触地点距离平方反比分布的, 与点电荷电场或引力场相类比, 电势分布规律应为 $U = \frac{I}{2\pi\gamma r}$, 故人两脚 a 、 b 间的跨步电压为

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = \frac{I\Delta r}{2\pi\gamma r_a(r_a + \Delta r)}$$

将 $\Delta r = 0.6\text{ m}$ 及 $r_a = 1\text{ m}$ 或 $r_a = 10\text{ m}$ 代入, 可得距高压线触地点 1 m 处的跨步电压高达 $U_{ab} \approx 1\ 194\text{ V}$; 而 10 m 处的跨步电压 $U_{ab}' \approx 18\text{ V}$.



电解液导电 电解液里的电流是正、负离子定向移动形成的.与金属导电相比较,一是载流子——形成电流的运动电荷不同,不是自由电子而是电解液里的正、负离子;二是电解液两极间加上电压形成电场通过电流时,会在两极引起电解反应.电解液导电时,在电场不很强的情况下,电阻的微观机理与金属导电相同,电流与电压关系适用欧姆定律,产生的电热也符合焦耳定律,但由于存在化学变化,含有电解液导体的电路不是“纯电阻”电路.

电解液导电总伴随着电解——在外电场的作用下,发生在电极附近的化学反应.发生电解时,在极板上析出的物质质量与哪些因素有关呢?电磁场理论的“开山鼻祖”——英国实验物理学家法拉第通过多次实验得到了下述两条关于电解的定律:

法拉第第一定律是关于在任一电极上分离出来的物质的质量 m 跟通过电解液中的电流 I 和通电时间 t 成正比,即 $m = kIt = kq$. 式中 k 称做电化当量,它只与分离出来的物质种类有关.某种物质的电化当量是恒定的,在数值上等于单位电量通过电解液后,在电极上析出的这种物质的质量.

法拉第第二定律是关于各种物质的电化当量 k 与它们的摩尔质量 M 成正比而与化合价 n 成反比,即 $k = \frac{M}{Fn}$. 式中 F 叫做法拉第常量, $F = 9.65 \times 10^4 \text{ C/mol}$.

气体导电 气体在一定作用下(高温、高压或射线照射等)发生电离后产生的放电现象就是气体导电.气体导电时,电荷携带者有电子、正离子或电子附着在中性原子上形成的负离子.根据载流子形成的原因,气体放电分为被激放电与自激放电两种形式;只是由于加热、辐射等原因而与电场作用无关的电离形成的气体导电称为被激导电;由于强电场作用,通过动能极大的电子或正离子对中性分子碰撞电离而形成的气体导电称为自激导电.

欧姆定律对气体导电是不适用的.

半导体导电 诸如硅、锗、氧化亚铜、砷化镓等物质,由于其导电性能介于导体与绝缘体之间而被称为半导体,半导体中载流子有两种,一种是电子导电,即半导体材料中的自由电子的运动;一种是“空穴”导电,这是一种失去电子的共价键位(空穴)因被束缚电子填补的运动,对应地,把电子导电型材料叫做 N 型半导体,而空穴导电型材料叫做 P 型半导体.半导体的导电能力具有“热敏性”“光敏性”及“掺杂效应”,更特别的是,把一块 P 型半导体和一块 N 型半导体合在一起,在交界面上,由于空穴与电子向对方的扩散运动,会形成一个叫做 PN 结的薄层,PN 结具有单向导电性——加正向电压时,PN 结导通,加反向电压时,PN 结截止.晶体二极管就是有一个 PN 结的电子元件,故具有单向导电性;晶体三极管有两个厚薄不同的 PN 结调控通过三极的电流,三极管具有放大电流或电压的作用.

例 7 用 X 射线使空气电离时,在平衡情况下,每立方厘米有 1.0×10^7 对离子.已知每个正或负离子的电量均为基元电量 e ,正离子平均定向移动速率 $v_1 = 1.27 \text{ cm/s}$,负离子的平

均定向移动速率 $v_2 = 1.84 \text{ cm/s}$,求这时空气中电流密度的大小.

分析与解 这里的空气被激导电,定向移动的电荷携带者有正离子和负离子,故电流应为 $I = [n(v_1 + v_2)\Delta tSe]/\Delta t$,而电流密度 $j = n(v_1 + v_2)e \approx 5.0 \times 10^{-8} \text{ A/m}^2$.

例 8 如图 20-15 所示的晶体管工作电路中, $E = 6 \text{ V}$,内阻不计, $U_{bc} = 1.96 \text{ V}$, $U_{be} = 0.20 \text{ V}$, $I_c = 2.0 \text{ mA}$, $I_b = 20 \mu\text{A}$, $I_2 = 0.40 \text{ mA}$, $R_c = 1 \text{ k}\Omega$. 求 R_1 、 R_2 、 R_e 阻值.

分析与解 图 20-15 是三极管的一种放大工作电路.三极管的三个极分别为发射极 e ,基极 b ,集电极 c ,对应的发射极电流为 I_e ,基极电流为 I_b ,集电极电流为 I_c ,由于电荷守恒,流入三极管的电流与流出三极管的电流总是相同的,所以对一个三极管必有 $I_e = I_b + I_c$,三极管的另一个特点是 $I_c > I_b$,比值 $\beta = I_c/I_b$ 叫做三极管的放大系数,是三极管的一个主要参数.含有三极管支路的电路

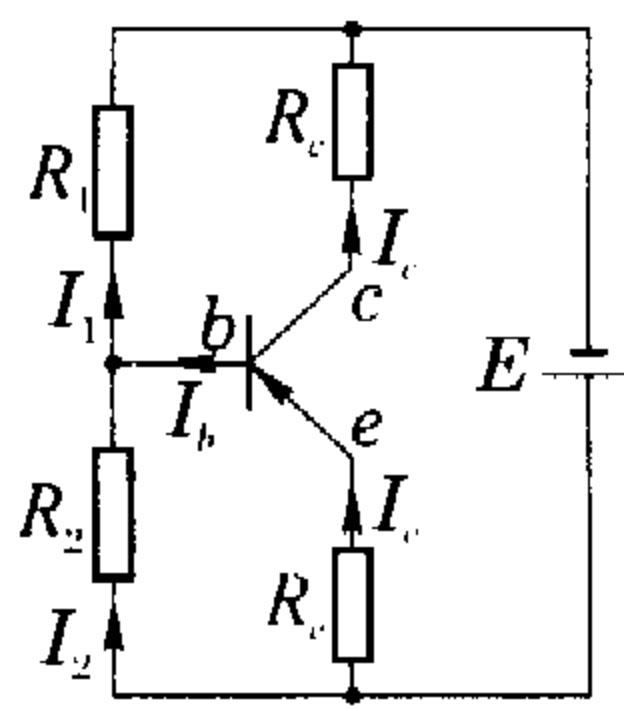


图 20-15

计算,仍依据基尔霍夫定律及欧姆定律.由电流关系可得

$$I_1 = I_b + I_2 = 0.42 \text{ mA}; I_e = I_b + I_c = 2.02 \text{ mA}$$

由电压关系可得 $U_{bc} = U_{ce} - U_{be} = 1.76 \text{ V}$.

取回路 bcR_cR_1b ,有 $U_{bc} + I_cR_c - I_1R_1 = 0$,由此得 $R_1 = 9 \text{ k}\Omega$;取回路 R_2R_1E ,有 $I_2R_2 + I_1R_1 - E = 0$,又可得 $R_2 = 5.6 \text{ k}\Omega$;取回路 ebR_eR_e ,有 $U_{be} - I_2R_2 + I_eR_e = 0$,即得 $R_e = 1.0 \text{ k}\Omega$.

小小身手

1. 如图 20-16 所示电路中,电源电动势 E 恒定,内阻不计, $R_1 = R_2 \gg r_A$,则当滑动变阻器滑动片从 a 端滑向 b 端过程中电流表读数 ()

- A. 逐渐减小
- B. 逐渐增大
- C. 先增大后减小
- D. 先减小后增大

2. 由电阻器组成的不可见的电路(暗盒)有四根引出线,如图 20-17 所示.如果电压加在接线柱 1 和 2 上,那么在断开接线柱 3 和 4 情况下,电路内释放功率 $P_1 = 40 \text{ W}$;而当闭合接线柱 3 和 4 的情况下, $P_2 = 80 \text{ W}$;如果接线柱 3 和 4 接在同一个电源上,那么当断开接线柱 1 和 2 情况下,电路中释放功率 $P_3 = 20 \text{ W}$;求当同样电压加在接线柱 3 和 4 上,在闭合接线柱 1 和 2 的情况下,电路消耗的功率 P_4 .

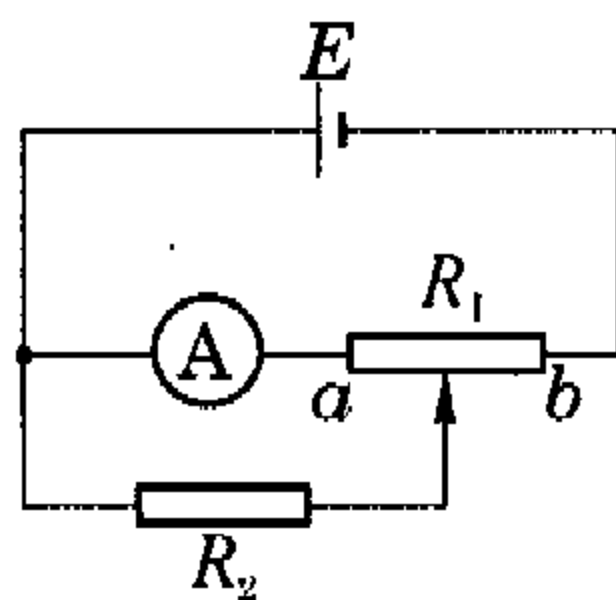


图 20-16

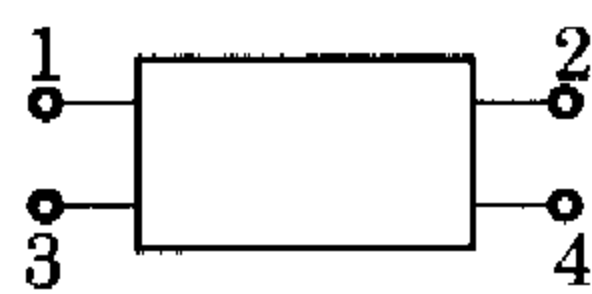


图 20-17

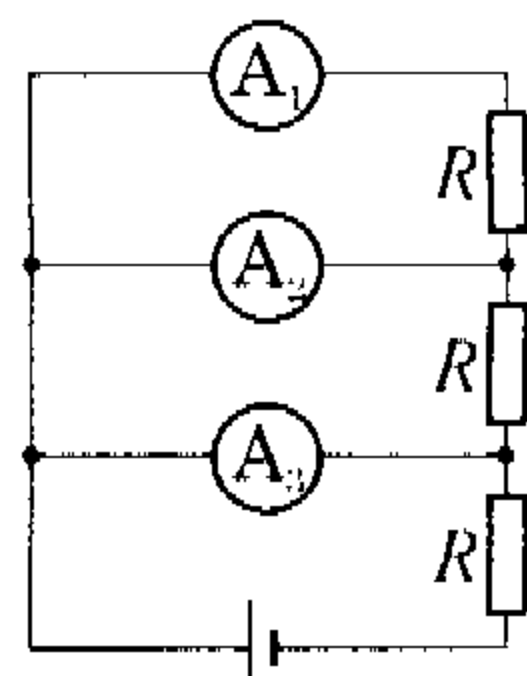


图 20-18

3. 由三个相同的电流表和三个相同的电阻器组成的电路



如图 20-18 所示, 第一只电流表的读数为 1 mA, 第二只电流表的读数为 4 mA, 电池两极间的电压为 $U=4.5\text{ V}$, 求: (1) 第三只电流表的读数; (2) 电阻器 R 的阻值.

4. 如图 20-19 所示电路中, E_1 是内阻可不计电源, E_2 是有一定内阻的电源, 此时, 有一电流通过 E_2 . 若现在使 E_2 的电动势增加 1.5 V, 但仍要保持通过 E_2 的电流不变, 电源 E_1 的电动势必须增加几伏? 电路中各电阻值如图中所示.

5. 如图 20-20 所示电路, 求通过电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 中的电流.

6. 如图 20-21, 电灯泡的电阻 $R_0=2\ \Omega$, 正常工作电压为 $U_0=4.5\text{ V}$, 用电动势 $E=6\text{ V}$ 、内阻可忽略的电池供电, 并利用一滑动变阻器将灯泡与电池相连. 试求效率为最大的条件及最大效率值. 又为使系统的效率不低于 $\eta=0.6$, 试计算电阻器的阻值及其承受的最大电流.

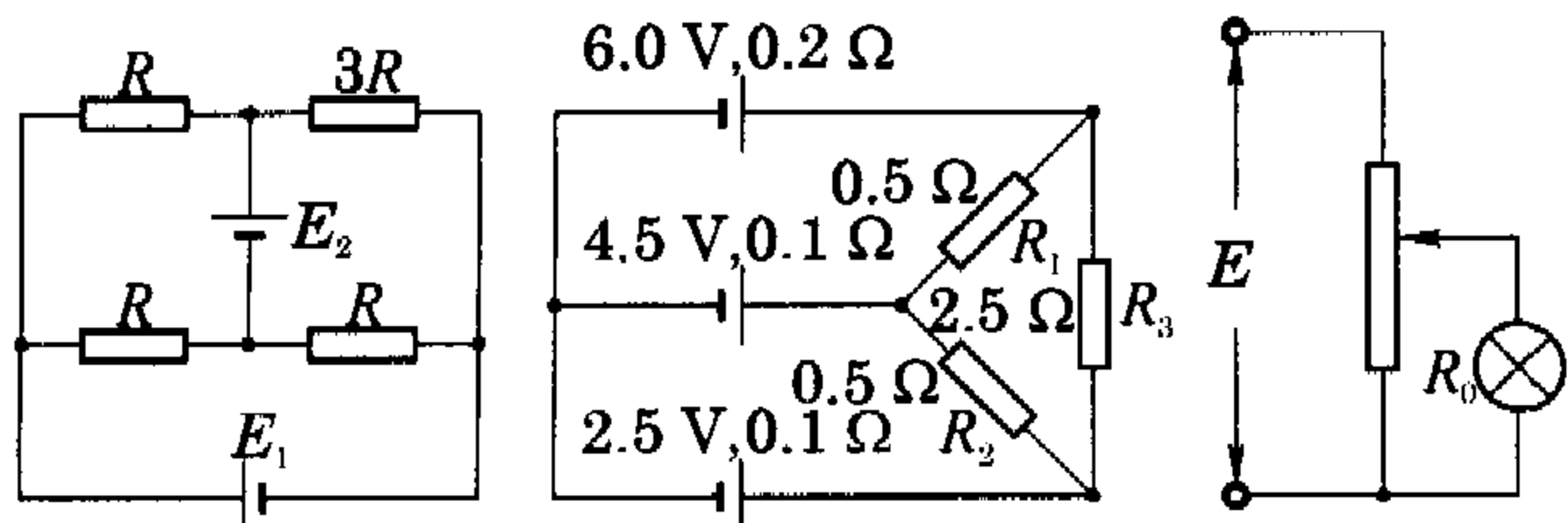


图 20-19

图 20-20

图 20-21

7. 如图 20-22 所示, 某电路中共有 8 个节点, 连接任意两个节点间的电阻丝的阻值都是 $2\ \Omega$, 在此电路的任意两个节点之间加上 10 V 电压, 试求通过电路的总电流、各支路的电流以及电路消耗的总功率.

8. 如图 20-23 所示, 两个电池电动势 $E_1=4E$, $E_2=E$, 电容器 C_1 、 C_2 电容均为 C , 电阻器 R_1 、 R_2 阻值均为 R . 求: 当开关 S 由位置 1 转换到位置 2 后, 在电阻器 R_2 上释放的热量.

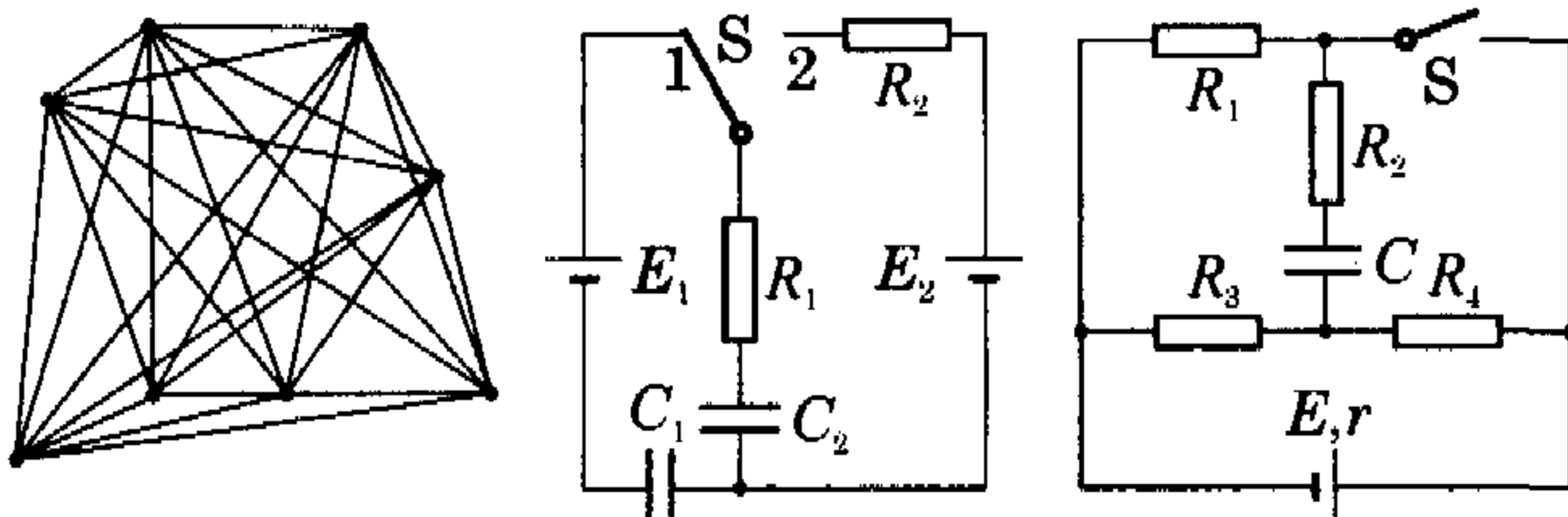


图 20-22

图 20-23

图 20-24

9. 如图 20-24 所示的电路中, 已知 $R_1=R_2=R_3=R_4=20\ \Omega$, $E=100\text{ V}$, $r=10\ \Omega$, $C=10^{-6}\text{ F}$, 求当开关 S 断开后, 通过电阻 R_2 的电量.

10. 在电压为 18 V 的直流电源与地线之间有一电路如图 20-25 所示, (1) 在开关 S 断开时, 图中 A 点和 B 点之间的电势差等于多少? (2) 又当 S 断开时, A 点和 B 点的电势哪个高? (3) 当接通 S 时, B 点对地的电势变为多少? (4) 各个电容器所积蓄的电荷在 S 接通与断开时相比, 改变了多少?

11. 如图 20-26 所示的平行板电容器极板面积为 S , 板间充满两层均匀介质, 它们的厚度分别为 d_1 和 d_2 , 介电常数为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 电阻率分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 当板间电压为 U 时, 求: (1) 通

过电容器的电流; (2) 电容器中的电场强度; (3) 两介质交界面上自由电荷面密度.

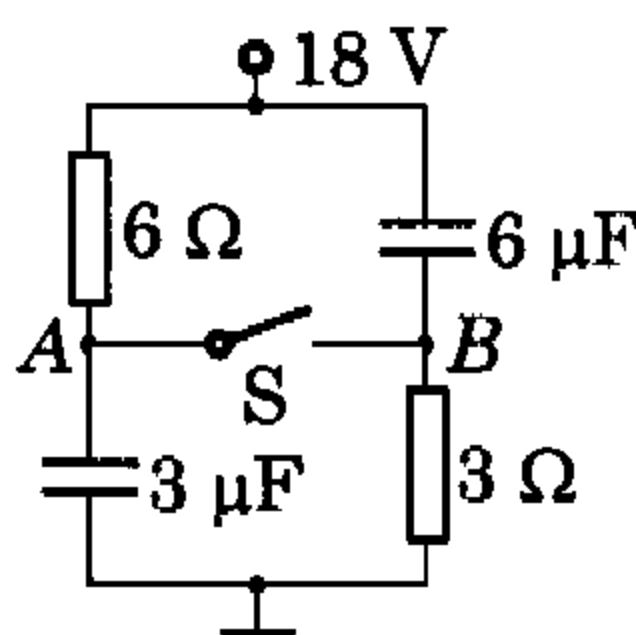


图 20-25

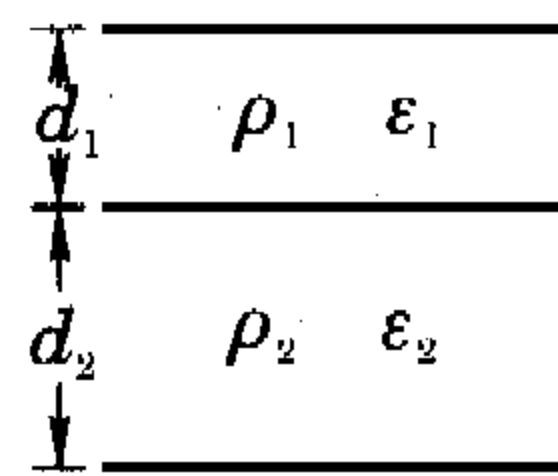


图 20-26

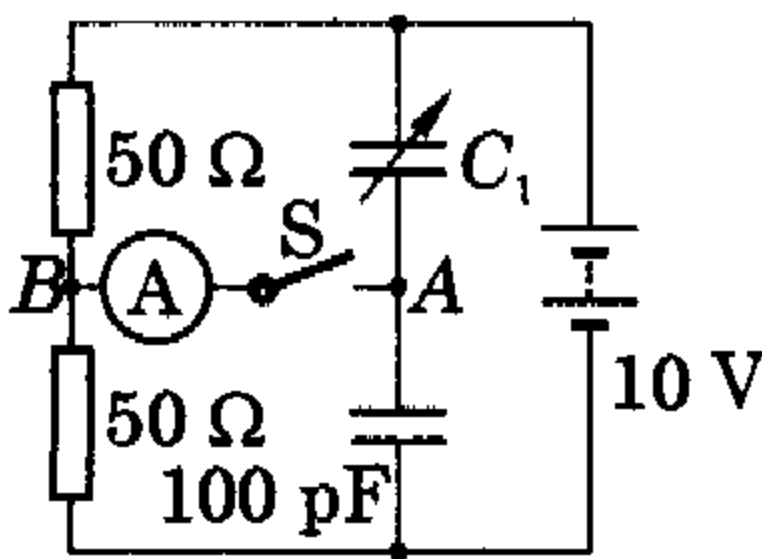


图 20-27

12. 如图 20-27, 电源电动势为 10 V, 内阻不计. C_1 为可变电容器, 可在 $7\sim 270\text{ pF}$ 间变化, 将其电容调至最小. (1) 断开开关 S , 当可变电容器的电容以每秒 5 pF 的速率增加时, A 、 B 间电势差 U_{AB} 怎么变化? (2) 合上开关 S , 电路稳定后, 以每秒 5 pF 增加其电容时流过电流表电流的方向和大小?

13. 如图 20-28 所示的电路中, 电阻、电容元件的规格如下: $R_1: 420\text{ k}\Omega, 3\text{ W}$; $R_2: 120\text{ k}\Omega, 2\text{ W}$; $R_3: 240\text{ k}\Omega, 2\text{ W}$; C_1 、 $C_3: 0.15\ \mu\text{F}, 500\text{ V}$; C_2 、 $C_4: 0.1\ \mu\text{F}, 600\text{ V}$; $C_5: 0.002\ \mu\text{F}, 600\text{ V}$. 这个电路能否正常工作? 如果不能, 试根据计算确定元件烧毁或击穿的顺序.

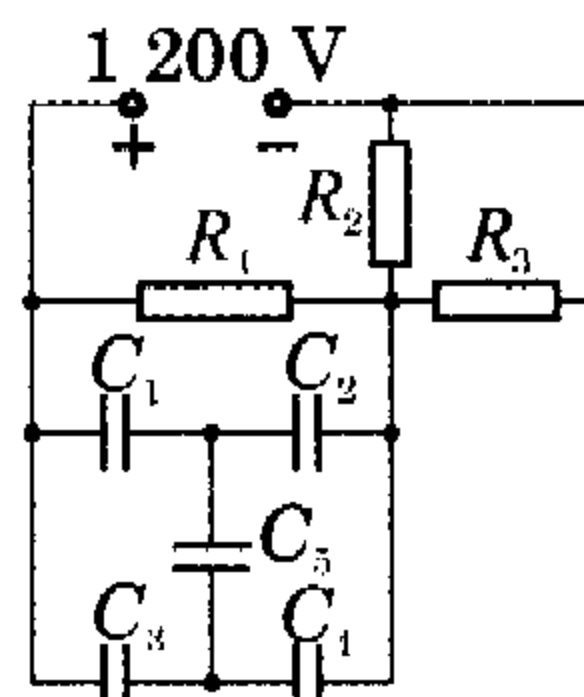


图 20-28

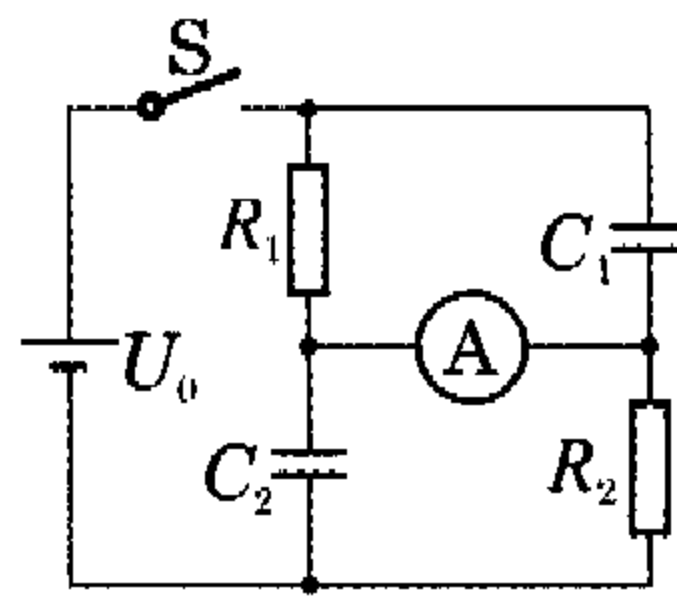


图 20-29

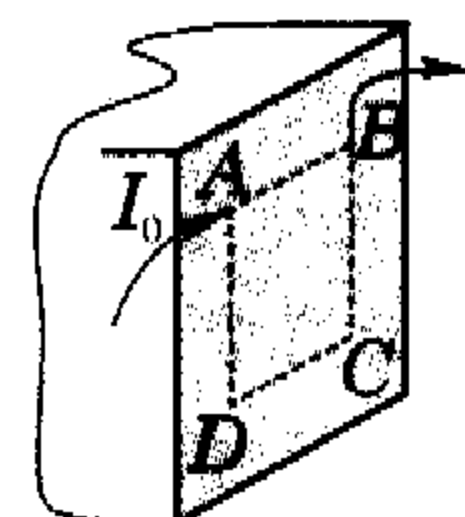


图 20-30

14. 在图 20-29 所示的电路中, 开关 S 周期性地闭合和断开, 其时间各为 $\tau_1=1\times 10^{-3}\text{ s}$ 和 $\tau_2=20\times 10^{-3}\text{ s}$. 在这样的变换频率下电流表的指针实际上不再摆动. 试问这只磁电式电流表所指示的电流的读数为多少? 已知 $R_1=R_2=100\ \Omega$, $C_1=C_2=10\ \mu\text{F}$, $U_0=10\text{ V}$, 电池和电流表的内电阻很小均忽略不计.

15. 如图 20-30, 一个平面把空间分为两个部分, 一半空间充满了均匀的导电介质, 而物理学家在另一半空间工作, 他们在平面上画出一个边长为 a 的正方形轮廓, 使电流 I_0 从正方形的相邻顶点 A 与 B 流入流出, 同时测得另两个顶点 C 、 D 间的电势差为 U , 若已知以球对称分布的电流在半空间里引起的电场强度大小 $E_r = \frac{I_0 \rho}{2\pi r^2}$ (r 为到球心的距离, ρ 为导电介质的电阻率), 物理学家确定的均匀介质的电阻率是多少?

16. 如图 20-31 为晶体管固定偏置电路, 若已知 $E_c=6.0\text{ V}$, $R_c=1.0\text{ k}\Omega$, 电流放大系数 $\beta=50$, 发射极正向电压 $U_b=0.30\text{ V}$, 基极电流 $I_b=60\ \mu\text{A}$, 晶体管在静态工作时, 求 (1) 偏置电阻 R_b ; (2) 电流 I_c ; (3) 管压降 U_c ; (4) 发射极电流 I_e .

17. 在如图 20-32 所示放大电路中, 若已知 $E_c=9.0\text{ V}$, $R_c=1.0\text{ k}\Omega$, $R_2=5.0\text{ k}\Omega$, $U_b=0.20\text{ V}$, 发射极电流 $I_e=1.05\text{ mA}$, 集电极电流 $I_c=1.0\text{ mA}$, 求偏流电阻 R_1 的阻值.

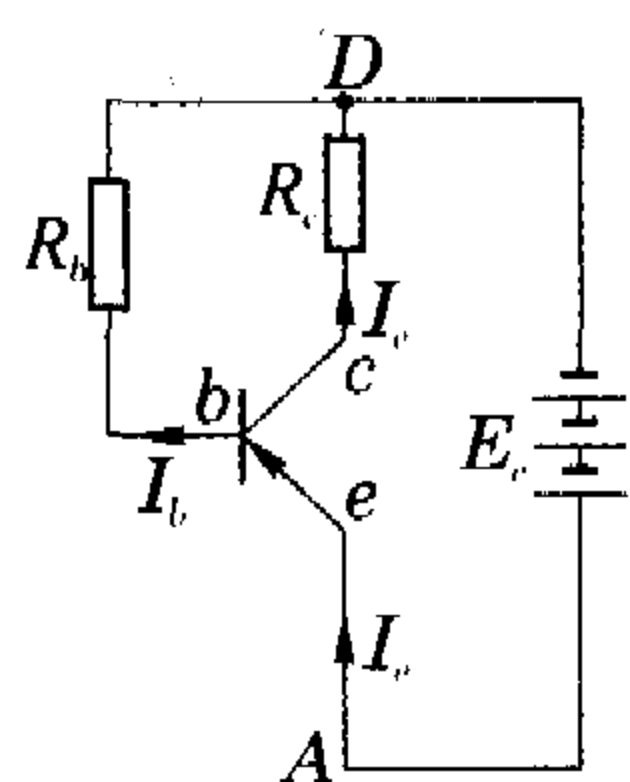


图 20-31

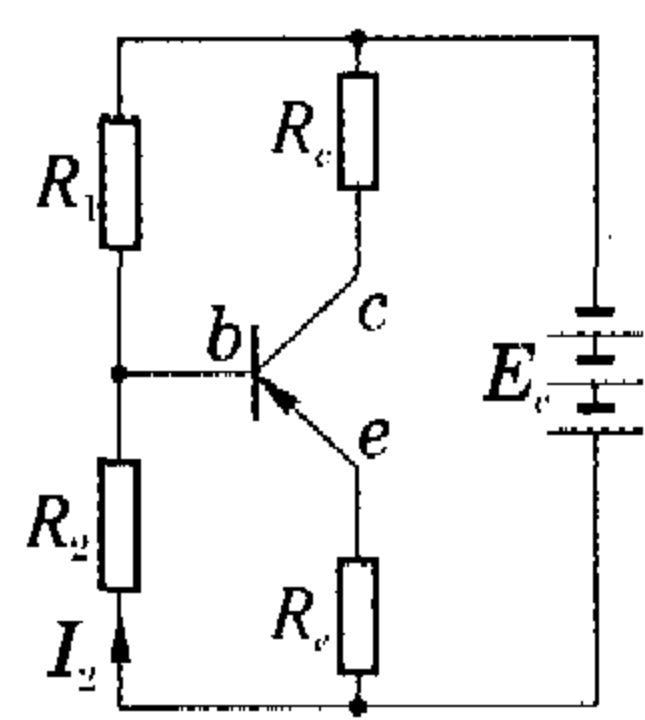


图 20-32

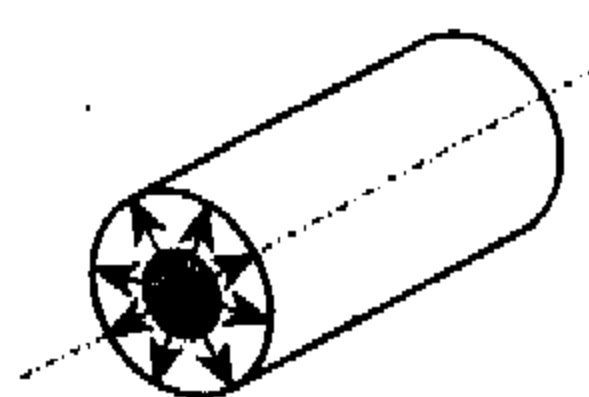


图 20-33

18. 一电缆的芯线是一根半径为 $r_1 = 5 \text{ mm}$ 的铜线, 在铜线外包有一层同轴的绝缘层, 其外半径 $r_2 = 10 \text{ mm}$, 电阻率 $\rho = 1.0 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$, 在绝缘层外又用铅层加以保护, 如图 20-33. 求(1)长 $L = 1000 \text{ m}$ 的这种电缆沿径向的漏电电阻;(2)当芯线与铅层间的电势差为 100 V 时, 电缆沿径向的电流.

19. 在地面附近的大气里, 由于土壤的放射性和宇宙射线的作用, 平均每 1 cm^3 的大气中约有 5 对离子, 已知其中正离子的迁移率(单位电场强度引起的平均定向移动速率)为 $1.37 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \cdot \text{V}$, 负离子的迁移率为 $1.91 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \cdot \text{V}$, 正、负离子所带电量大小均为 $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 求地面附近大气的电导率.

20. 如图 20-34 所示是广泛应用于电子技术中的“水银钟”的核心部分, 在封口的毛细管内有两段水银柱, 它们被一小滴 HgI_2 电解液隔开, 毛细管的内径 $d = 0.3 \text{ mm}$, 管子与电阻值为 $390 \text{ k}\Omega$ 的电阻 R 串联, 再接到电动势 $E = 10 \text{ V}$ 的电池上. “水银钟”用作小型定时装置, 运行时间计算器, 也用作库仑测量器测量长时间内通过电路的电量.

(1) HgI_2 液滴向左还是向右移动?

(2) 若“水银钟”标尺上一个刻度长度为 1 cm , 它指示多少时间? ($M_{\text{Hg}} = 201 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$, $\rho = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)

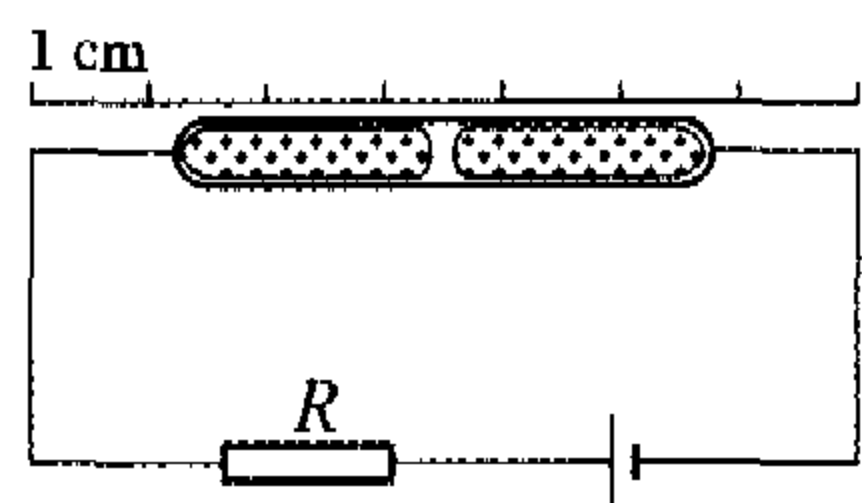


图 20-34

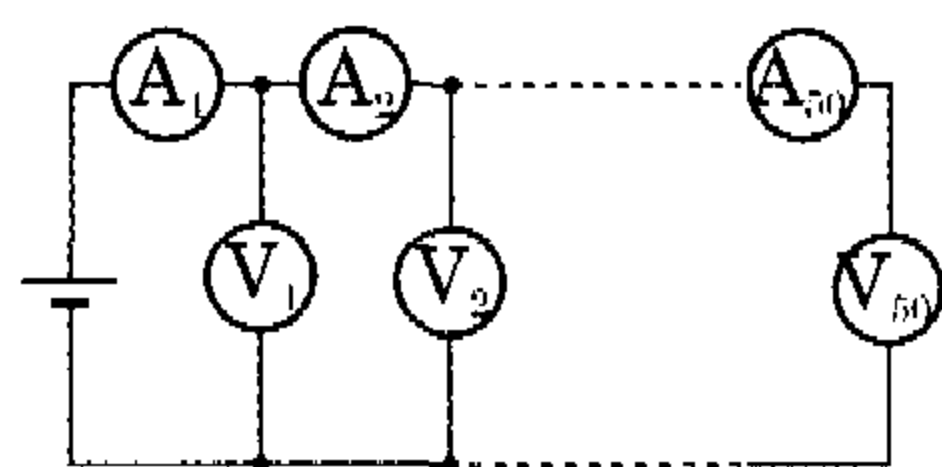


图 20-35

21. 如图 20-35 所示的电路图中, 包含有 50 只不同的电流表($A_1 \sim A_{50}$), 以及 50 只相同规格的电压表($V_1 \sim V_{50}$). 第 1 只电压表的读数为 $U_1 = 9.6 \text{ V}$, 第 1 只电流表的读数为 $I_1 = 9.5 \text{ mA}$, 第 2 只电流表的读数为 $I_2 = 9.2 \text{ mA}$. 试根据给出的这些条件求所有电压表的读数的总和.

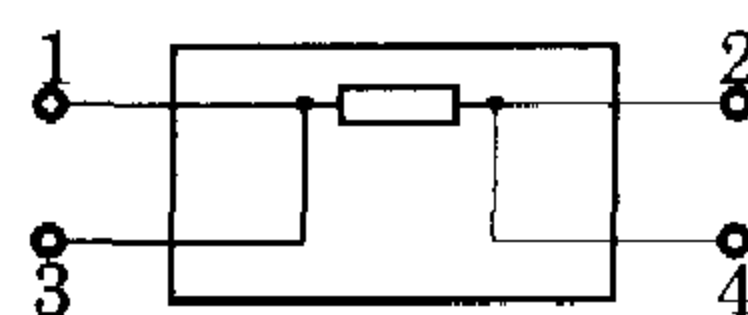
参考答案

1. 设 $R_1 = R_2 = R$, 滑动片在 a 端时 $I_A = E/R$, 在 b 端时

$$I_A = \frac{E}{R}, \text{ 而在 } a, b \text{ 正中间时 } I_A = \frac{E \cdot \frac{R/3}{R/3 + R/2}}{\frac{R}{2}} = \frac{4E}{5R}, \text{ 可知通}$$

过电流表的电流先减小后增大, 故正确选项为 D.

2. 盒内电路如图答 20-1 所示, 当电压加在接线柱 3 和 4 上而闭合接线柱 1 和 2 时, 电路消耗功率同第一次, 即 $P_1 = 40 \text{ W}$.



图答 20-1

3. A_1 及 R 支路与 A_2 支路有 $\frac{1}{4} = \frac{R_g}{R_g + R}$, 故 $R = 3R_g$; A_2 及 R

支路与 A_3 支路有 $\frac{1+4}{I_3} = \frac{R_g}{\frac{4}{5}R_g + 3R_g}$, 故 $I_3 = 19 \text{ mA}$; 对全电

路:

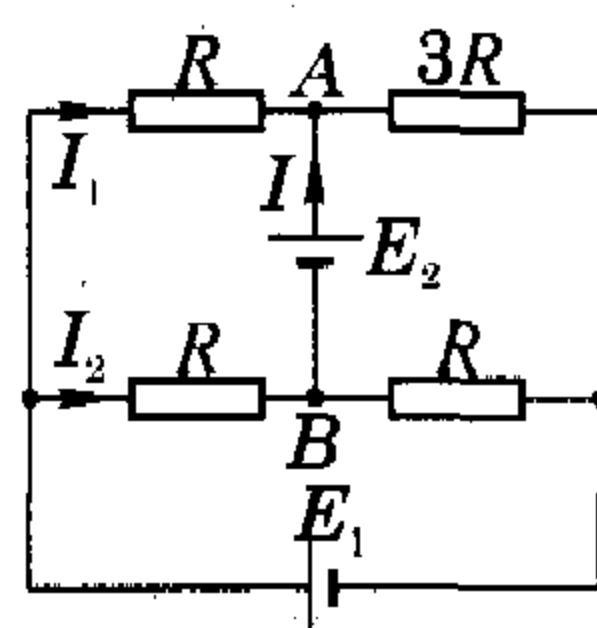
$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{\frac{4}{5} + 3 + (3 + \frac{4}{5} + 3 + 1)R_g}$$

$$R_g = \frac{4500}{91} \Omega, R \approx 148 \Omega.$$

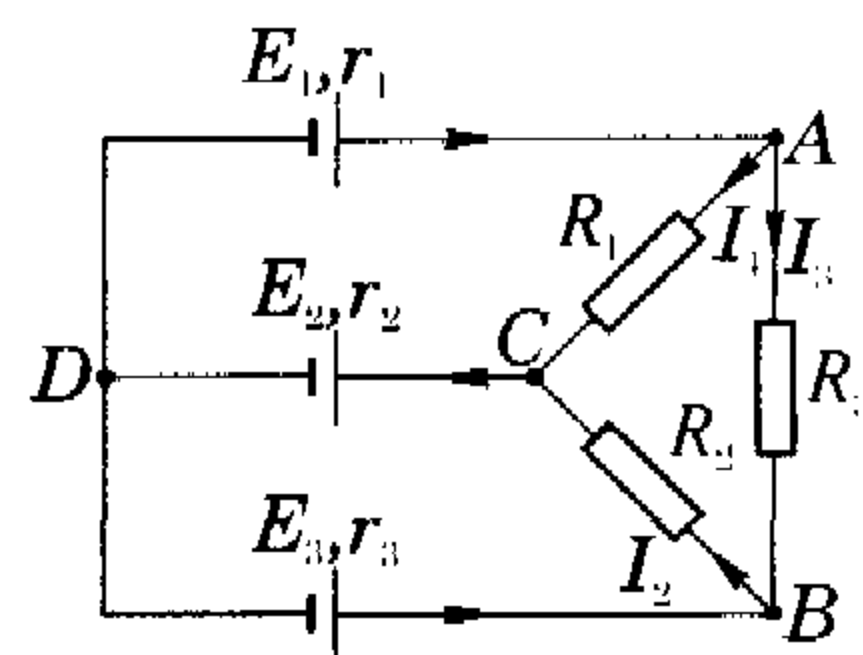
4. 各电流设定如图答 20-2, I 不变, 即 $\Delta U_{AB} = \Delta E_2 = 1.5 \text{ V}$, 电源 E_1 两端电压为 $I_1 R + (I_1 + I) 3R = I_2 R + (I_2 - I) R$, $I_2 = 2I_1 + 2I$, I 不变, 故 $\Delta I_2 = 2\Delta I_1$, $(\Delta I_1 - \Delta I_2) R = -\Delta U_{AB}$, $\Delta I_1 = \frac{1.5}{R}$, 于是 $\Delta E_1 = \Delta I_1 \cdot 4R = 6 \text{ V}$.

5. 通过电阻 R_1, R_2, R_3 的电流方向设定如图答 20-3, 对回路 ABC : $I_3 R_3 + I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0$
对回路 $ACDA$: $I_1 R_1 + (I_1 + I_2) r_2 + (I_1 + I_3) r_1 + E_2 - E_1 = 0$
对回路 $BCDB$: $I_2 R_2 + (I_1 + I_2) r_2 + (I_2 - I_3) r_3 + E_2 - E_3 = 0$

$$\text{代入数据整理后有: } \begin{cases} 5I_3 + I_2 - I_1 = 0 \\ 8I_1 + I_2 + 2I_3 - 15 = 0 \\ 7I_2 + I_1 - I_3 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 2 \text{ A} \\ I_2 = -3 \text{ A} \\ I_3 = 1 \text{ A} \end{cases}$$

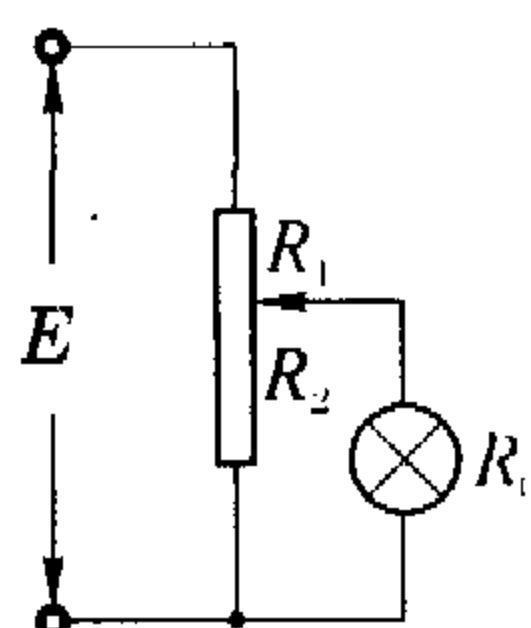


图答 20-2



图答 20-3

6. 这是一分压电路, 系统的效率 $\eta = P_0/P = U_0 I_0 / EI = U_0^2 / R_0 EI$, 式中 U_0, R_0, E 确定, 故 $\eta \propto 1/I$, 总电流越小, 效率越高, 显然, $I_{\min} = I_0$, $\eta_{\max} = U_0 / E = 75\%$, 这时图答 20-4 中滑动变阻器与灯并联的 R_2 段应断开, 而接入电路部分阻值为 $R_1 = (E - U_0) R_0 / U_0 = 2/3 \Omega$;



图答 20-4

为满足系统效率不低于 0.6, $\frac{U_0^2}{R_0 UI} \geq 0.6$, $I \leq \frac{U_0^2}{0.6 R_0 E}$ 故 $I_{\max} = \frac{U_0^2}{ER_0 \eta} = \frac{4.5^2}{0.6 \times 6 \times 2} \text{ A} = 2.8125 \text{ A}$; 灯

正常工作时, 有 $\frac{R_1}{R_0 R_2} = \frac{E - U_0}{U_0} \Rightarrow \frac{R_0 R_2}{R_0 + R_2} = 3R_1 \Rightarrow R_2 =$

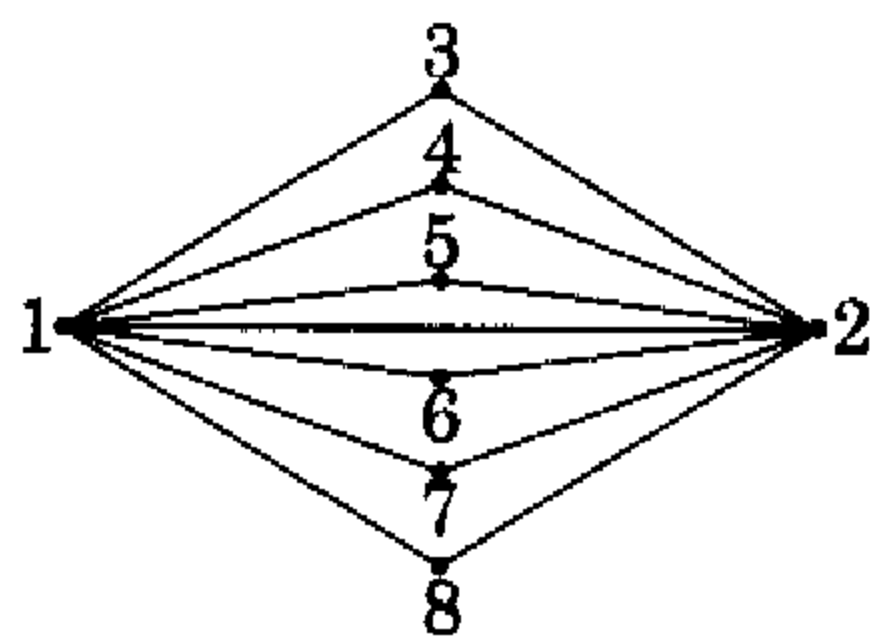


$\frac{6R_1}{2-3R_1}$, 可知 $R_1 \leq \frac{3}{2} \Omega$, 效率不低于 0.6, $\frac{U_0^2}{R_0} \geq 0.6$

$\frac{U^2}{R_0 R_2 + R_1} = 0.6 \frac{U^2}{4R_1}$ 得 $R_1 \geq \frac{8}{15} \Omega$, 故 $\frac{2}{3} \Omega \geq R_1 \geq \frac{8}{15} \Omega$, 则

$R_2 \geq 8 \Omega$, 滑动变阻器总阻值 $R \geq 8.53 \Omega$.

7. 设 10 V 电压加在 1、2 两节点间, 电路如图答 20-5, 显然 3、4、5、6、7、8 各点等势, 这是一个平衡的电桥, 3、4、5、6、7、8 各点间无电流, 则 1、2 之间



图答 20-5

总电阻为 $R = (2 \times 2/3) / (2 + 2/3) = 1/2 \Omega$, 故总电流 $I = 20$ A, 总功率 $P = 200$ W, 通过 R_{12} 的电流为 $I_{12} = I/4 = 5$ A, 其余 12 个电阻上通过电流均与 R_{13} 相同为 $I_{13} = 2.5$ A.

8. 开关 S 原接 1, E_1 对两电容器充电, 每个电容器能量 $W_1 = \frac{1}{2} C(2E)^2 = 2CE^2$, 电容器 C_2 下极板带负电, $q_2 = 2CE$;

开关 S 接 2, 稳定后电容器能量 $W = \frac{1}{2} CE^2$, 电容 C_2 下极板带负电, $q_2' = CE$, 可见通过 R_1 、 R_2 及 E_2 的电量 $\Delta q = CE$, 由能量守恒: $E \cdot \Delta q + Q = 2CE^2 - \frac{1}{2} CE^2$, $Q = \frac{3}{2} CE^2 - CE^2 = \frac{1}{2} CE^2$,

因为 R_1 、 R_2 阻值相同, 所以电阻器 R_2 上释放的热量 $Q_{R_2} = \frac{1}{4} CE^2$.

9. 开关闭合时 C 并联在 R_4 两端, 电流通路为 R_1 与串联的 R_3 、 R_4 并联, 外电阻 $R = 40/3 \Omega$, $U_{R_4} = 200/7$ V, 则电容器上电量 $q = CU_{R_4} = 200/7 \mu C$, 且上板为正; 开关断开后, 电流通路为 R_3 、 R_4 串联, C 并联在 R_3 两端, 此时 $U_{R_3} = 40$ V, 电容器上电量 $q' = CU_{R_3} = 40 \mu C$, 且上板为负, 可知通过电阻 R_2 的电量 $\Delta q \approx 68.6 \mu C$.

10. (1) 开关 S 断开时, $U_{AB} = 18$ V; (2) S 断开时, $\varphi_A = 18$ V, $\varphi_B = 0$ V, A 点电势高; (3) 接通 S, 电流通过两电阻: $I = 2$ A, $6 \mu F$ 电容器并联在 6Ω 电阻上, 电压降为 12 V, 故此时 B 点对地的电势为 6 V; (4) S 接通前, $6 \mu F$ 电容器电量 $q_1 = 108 \mu C$, $3 \mu F$ 电容器电量 $q_2 = 54 \mu C$; S 接通后, $q_1' = 72 \mu C$, $q_2' = 18 \mu C$, 各个电容器所积蓄的电荷均减少了 $\Delta q' = 36 \mu C$.

11. (1) 这个电路等效于电阻 $R_1 = \rho_1 \frac{d_1}{S}$

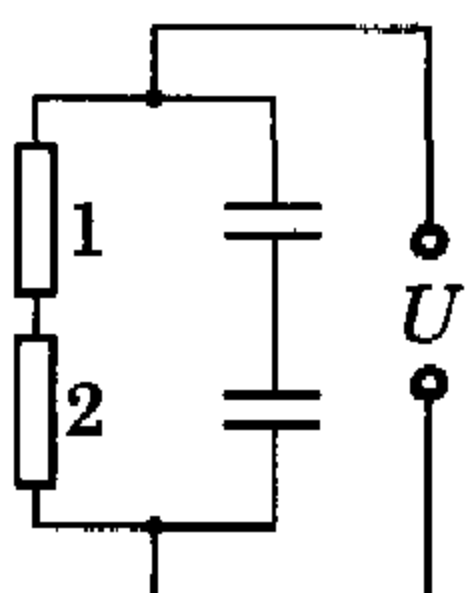
与电容 $C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S}{d_1}$ 并联, 电阻 $R_2 = \rho_2 \frac{d_2}{S}$ 与电

容 $C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S}{d_2}$ 并联, 两部分串联, 如图答 20-

6, 故通过电容器的电流 $I = \frac{US}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$; (2)

电容器中的电场强度由 $\frac{I}{S} = \frac{E}{\rho}$, $E_1 =$

$\frac{\rho_1 U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$, $E_2 = \frac{\rho_2 U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$; (3) C_1 带电量 $q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \cdot$



图答 20-6

$\frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S}{d_1} = \frac{\rho_1 \epsilon_0 \epsilon_1 S U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$, C_2 带电量 $q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \cdot \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 S}{d_2} =$

$\frac{\rho_2 \epsilon_0 \epsilon_2 S U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$, 两介质交界面上自由电荷一正一负, 则两介质交

界面上堆积的自由电荷 $q = q_1 - q_2 = \frac{\epsilon_0 S U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} (\rho_1 \epsilon_1 - \rho_2 \epsilon_2)$,

自由电荷的面密度 $\sigma = \frac{\epsilon_0 (\rho_1 \epsilon_1 - \rho_2 \epsilon_2) U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$.

12. (1) 断开开关 S, $\varphi_B = 5$ V, $U_{C_1} = \frac{10 C}{7+5t+C}$, 当 $t=0$ 时,

$U_{C_1} = \frac{1000}{107}$ V > 5 V, C_1 达 270 pF 时, $U_{C_1} = \frac{100}{37}$ V < 5 V, 故

A、B 间电势差先减小后增大, 且先是 $\varphi_A < \varphi_B$ 后 $\varphi_A > \varphi_B$; (2) 合上开关 S, 电路稳定后, C_1 电压为 5 V, 当以每秒 5 pF 增加其电容时, 电源对其充电, 充电电流为 $5 \times 5 \times 10^{-12}$ A $= 25 \times 10^{-12}$ A, 方向从 A 向 B.

13. 电流通路 R_2 、 R_3 并联与 R_1 串联, $U_{R_1} = 1008$ V, 电容器接成桥式, C_5 两极无电压, 1008 V 电压按电容大小反比例分配在 C_1 、 C_2 (C_3 、 C_4) 上, 则 C_1 (C_3) 上电压 $U_1 = \frac{0.1}{0.25} U_{R_1} =$

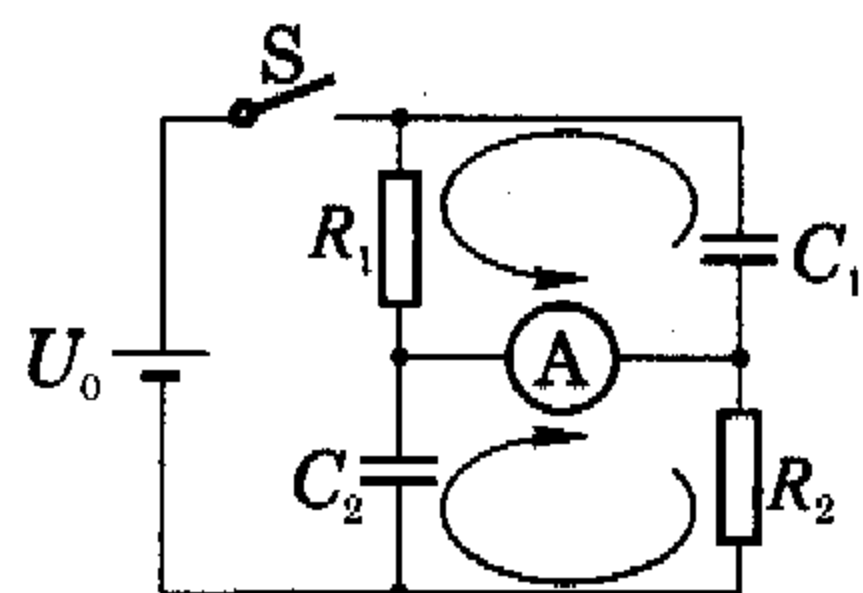
403.2 V < 500 V; C_2 (C_4) 上电压 $U_2 = \frac{0.15}{0.25} U_{R_1} = 604.8$ V $>$

600 V; 故 C_2 、 C_4 先击穿形成短路, 这时 1008 V 电压全部落在 C_1 (C_3) 上, 它们也被击穿, 将 R_1 短路, 这时 R_2 消耗功率 $P_2 = U^2/R_2 = 12$ W > 2 W, R_2 被烧毁; R_3 消耗功率 $P_3 = U^2/R_3 = 6$ W > 2 W 亦被烧毁.

14. 开关 S 闭合时, 从 C_1 下极板经 A 表到达 C_2 上板的电量 $\Delta q = \frac{U_0 C}{2}$, 则通过电流表的

电量 $q_1 = \frac{U_0}{2R} \tau_1 - \frac{CU_0}{2}$; 开关 S

切断, 两电容器放电, 如图答 20-7, 通过电流表的电量 $q_2 = CU_0$, 平均电流



图答 20-7

$$I = \frac{q_1 + q_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\frac{U_0}{2R} \tau_1 + \frac{CU_0}{2}}{\tau_1 + \tau_2}$$

$$= \frac{\frac{10}{200} \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} \times 10}{21 \times 10^{-3}} \text{ A} \approx 4.8 \text{ mA}$$

15. 若电场强度 $E_r = \frac{I_0 \rho}{2\pi r^2}$, r 处电势 $\varphi_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E_i \cdot \Delta r =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{I_0 \rho}{2\pi r_i^2} \cdot \Delta r = \frac{I_0 \rho}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r}, \varphi_D = \frac{I_0 \rho}{2\pi a}, \varphi_C =$$

$$\frac{I_0 \rho}{2\sqrt{2}\pi a}, \text{ 于是 } U = \frac{I_0 \rho}{2\pi a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ 则 } \rho = \frac{2\pi a U}{I_0 (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} =$$

$$\frac{2(2 + \sqrt{2})\pi a U}{I_0}$$

16. (1) $I_b R_b = E_c - U_\alpha$, $R_b = 95 \text{ k}\Omega$ (2) 集电极电流 $I_c = \beta I_b = 3 \text{ mA}$ (3) $I_c R_c + U_\alpha = E_c$, $E_c = 3 \text{ V}$ (4) 发射极电流 $I_e = I_c + I_b = 3.06 \text{ mA}$.



数字“神舟”六号载人飞船

王思惠

(新疆库尔勒市第二中学 841000)



2005年10月12日上午9点整,我国第二艘载人飞船——“神舟”六号通过长征二号F型运载火箭搭载,犹如一柄利剑在甘肃酒泉卫星发射中心升空,划破长空,再度飞天,将中国宇航员送入太空。

神舟六号在太空中遨游五天后,于2005年10月17日凌晨4时32分在内蒙古四子王旗主着陆地的草地上缓缓降落。中国人穿越轨道舱的飞天梦想,千年夙愿终于实现了,从“一人一天”到“两人五天”,“神舟”六号载人航天飞行圆满成功。

“神舟”六号此次共计飞行115小时32分钟,飞行325万千米,绕地球77圈,航天员各自睡了5次觉,吃了15顿饭。在船舱内脱下了航天服,并成功进行了穿越轨道舱与返回舱、工效评价、医学试验、轨道舱飞船设备操作等一系列空间科学实验。

“神舟”六号载人飞船圆满完成了飞行任务顺利返回,为中国航天事业续写了新的辉煌。以下是“神舟”六号上的数字。

- 2: 搭乘两名航天员进行多天飞行。
- 8: 飞船总长8 m。
- 9: 飞船轨道舱航天员有效空间约为 9 m^3 , 可以较为自如地转身, 做各种操作。
- 13: 飞船系统共有13个分系统组成, 按照功能分别被命名为有效载荷、结构与机构、热控制、制导导航与控制、推进、电源、数据管理、测控与通信、环境控制与生命保障、乘员、回收与着陆、仪表照明、应急救援。
- 21: 太空中飞船向阳面温度为 $100 \text{ }^\circ\text{C}$ 以上, 背阳面超过零下 $100 \text{ }^\circ\text{C}$, 飞船返回时与大气剧烈摩擦可在表面产生数千摄氏度高温, 但通过隔热和控制, 舱内温度始终保持在 $21 \text{ }^\circ\text{C}$, 上下偏差各为 $4 \text{ }^\circ\text{C}$ 。这个温度, 航天员穿着舱内工作服会感到比

较舒适。

60: 航天医学研究表明, 飞船飞行时绝对安静会对航天员心理产生影响, 但也不能太高。“神舟”六号飞船太空飞行时舱内仪器噪声约为 60 dB , 相当于站在没有汽车行驶普通商业街上。

52: 飞船的三个舱上共有52台发动机, 其中推进舱有28台发动机, 4台大的用于改变轨道、轨道维持和返回制动, 小的用于控制飞船姿态; 返回舱有8台发动机, 返回过程中穿越大气层会使飞船姿态不稳, 同时为实现精确着陆, 需要对飞船进行姿态控制; 轨道舱有16台, 为其留轨半年提供动力。各舱发动机都是偶数, 其中都有主机和备份机。

90: 飞船每绕地球一圈需要 90 min 。在圆形轨道时, 每圈飞行距离约为 $4.2 \times 10^5 \text{ km}$, 每天飞行距离约 $6.8 \times 10^6 \text{ km}$ 。

235: 返回舱有20多个较大开口, 16个小口; 轨道舱算上穿舱电缆也有20多处开口。飞船共使用了235个密封圈以保证每个口的双道甚至多道密封。密封圈小的直径 8 mm , 长多达 8 m 。

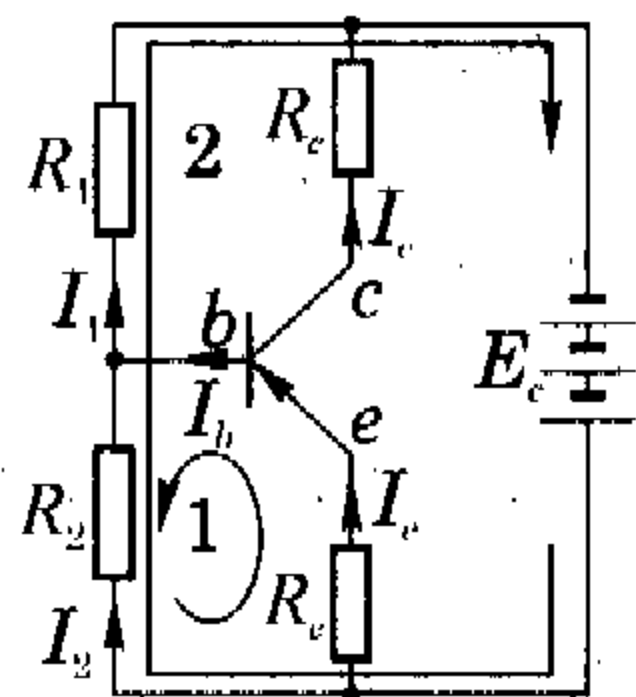
300: 电缆线是飞船的“血管”, 所有设备必须有电缆线与之相连为其供电。飞船共有电缆线多达 300 kg , 总长度约 30 km 。

343: 飞船飞行时距地面的距离 343 km 。绕地飞行的载人航天器一般都选择与之接近的近地轨道, 国际空间站距地面约 400 km 。这个轨道既节省了把飞船送入太空的燃料和成本, 又能够得到科学实验需要的微重力高真空等空间环境, 是两者之间的较优值。

600: 全船共有设备超过600台。

100000: 飞船共有超过10万个元器件, 来自数千家工厂。

17. 基极电流 $I_b = 0.05 \text{ mA}$; 对如图答20-8所示回路1有 $I_1 R_1 + U_b = I_2 R_2$, 可得 $I_2 = 0.25 \text{ mA}$, 则通过偏流电阻 R_1 的电流 $I_1 = I_b + I_2 = 0.30 \text{ mA}$, 对回路2有 $E_c = I_2 R_2 + I_1 R_1$, $R_1 \approx 26 \text{ k}\Omega$ 。



图答20-8

18. (1) 如专题19“小试身手”题8, 电缆径向电阻 $R = \rho \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{2\pi L} = 1.1 \times 10^8 \Omega$ (2) 由于芯线与铅层间存在电势差, 即存在电场, 故有一径向电流: $I = \frac{U}{R} = \frac{100}{1.1 \times 10^8} \text{ A} = 9.1 \times 10^{-7} \text{ A}$ 。

19. 空气受激导电, 定向移动的电荷携带者有正离子和负离子, 设地面大气的电场强度为 E , 电流应为 $I = \frac{q}{\Delta t} =$

$$\frac{n(v_1 + v_2)E \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot e}{\Delta t}, \text{ 而电流密度 } j = Er = \frac{I}{\Delta S}, \text{ 则}$$

$$j = \frac{I}{E \Delta S} = \frac{n(v_1 + v_2)E \cdot \Delta t \cdot \Delta S \cdot e}{\Delta t \cdot E \cdot \Delta S} = n(v_1 + v_2)e$$

$$= 5 \times 10^6 (1.37 + 1.91) \times 10^{-4} \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ S/m}$$

$$= 2.6 \times 10^{-16} \text{ S/m}.$$

20. 电流通过 HgI_2 电解液, 在两极, 即左、右两段水银柱发生电化学反应, 左边 Hg 电离成 Hg^{2+} 进入液体中, 右端 Hg^{2+} 获得电子而还原成金属 Hg , 故液滴向左移动; 由法拉第电解定律, 在时间 t 内析出水银质量为 $m = \frac{M}{Fn} It$, 而 $m = \rho \frac{\pi d^2}{4}$

$$l, I = \frac{E}{R}, \text{ 则 } t = \frac{Fn\rho\pi d^2 lR}{4ME} = 100 \text{ h}.$$

21. 由 $U_1 = 9.6 \text{ V}$, $I_1' = I_1 - I_2 = 0.3 \text{ mA}$, 得电压表的内电阻 $R = U_1 / I_1' = 32 \text{ k}\Omega$; 第1只电流表的读数是50个电压表电流之和, $I_1 = \frac{U_{50} + U_{49} + U_{48} + \dots + U_1}{R}$, 则 $\sum U = I_1 R = 304 \text{ V}$ 。



专题 21 说 磁

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

“在观察的领域里,机遇只偏爱那种有准备的头脑”,这句名言,最先是对丹麦科学家奥斯特开创性地发现电流的磁效应所发的感慨.19世纪初,在人们对电与磁的认识尚是孤立隔绝的时候,奥斯特却有了一个不同凡响的信念,他认为自然力是统一的,并且是可以互相转化的,电与磁之间也应该有联系.奥斯特致力于电与磁统一性的研究十多年,终于在1819年冬日的一次讲课中得到了机遇的惠顾:奥斯特将一根与伽伐尼电池相连接的导线垂直跨放在一枚磁针上方,没有发现磁针运动,然后再换另一个更强的伽伐尼电池重复同样的实验,还是不行.在准备结束演讲时,他忽然说“让我们把导线同磁针平行地放置试试看……”,于是出现了永垂青史的一幕——小磁针几乎和磁子午线成直角地大幅度摆动着!奥斯特实验的旋风冲破了长期以来人们所信奉的电和磁没有联系观念,开启了电磁研究的新纪元.

现在我们知道,一切磁现象的根源是电流,都是运动电荷之间通过磁场而发生的;电磁场是一个不可分割的统一体,从不同的参考系去考察电磁场时就有不同的描述,表现出电场或磁场的特征.

静磁场与静电场之间有着众多的物理相似,也存在明显的相异.

与电场一样,磁场具有物质的基本属性,会对引入磁场中的运动电荷或导体产生力的作用,描述磁场的线称磁感线,其与电场线的比较如表1所示.

表 1

	磁感线	电场线
相似点	描述磁场力的分布情况.	描述电场力的分布情况.
	磁感线上各点的切线方向,即小磁针在该点静止时 N 极的指向,亦即 N 极在该点的受力方向.	电场线上各点的切线方向,即正电荷在该点所受电场力的方向.
	磁感线的疏密可表示磁场的强弱.	电场线的疏密可表示电场的强弱.
相异点	磁场中没有磁极的地方,两条磁感线不相交.	电场中没有电荷的地方,两条电场线不相交.
	每一条磁感线都是封闭曲线.	电场线从正电荷出发,到负电荷终止.

由表1我们看到,电场线是从正电荷出发,到负电荷终止,

说明正电荷是电场的源头、负电荷是电场的尾间,静电场是有源场;磁感线都是封闭曲线,我们把磁场称为“涡旋场”,这种差异是与正负电荷可以分离而 N、S 磁极不可分离的事实相联系的.将通过某一曲面的总磁感线条数称为磁通量 Φ_m , $\Phi_m = B_n \cdot \Delta S$, 式中 B_n 是 B 在面 ΔS 法向的分量,由于磁感线总是闭合的,因此穿入闭合曲面的磁感线数必然与穿出闭合曲面的磁感线数相等,通过任何闭合曲面的磁通量一定为零,这就是磁场中的高斯定理.

在电场中,人们从实验中得到关于点电荷间相互作用的库仑定律,由库仑定律得出点电荷的场强,然后根据电场叠加原理,得到电荷系形成的电场的场强.磁场是由电流产生的,根据磁场与电场的相似性,人们做了同样的工作,安培设计精巧的实验定量研究了电流与电流间的相互作用,他把电流看作无穷多小段电流——电流元的集合,每一电流元用 $I\Delta l$ 表示,得到两个电流元间相互作用所遵从的“安培力公式” $F = k \frac{I_1 \Delta l \cdot I_2 \Delta l}{r^2}$. 与万有引力、库仑力一样,两个电流元之间的作用力也是平方反比力(场力),方向与元电流方向垂直,如图21-1所示(不遵守牛顿第三定律?). 公式中比例系数 $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, 其中 μ_0 称为真空磁导率,其值为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, 量纲为 $[M][L][T]^{-2}[I]^{-2}$. 与电场类比,将磁感应强度定义为检验电流元 $I\Delta l$ 在该点所受的安培力 $B = \frac{F}{I\Delta l}$,

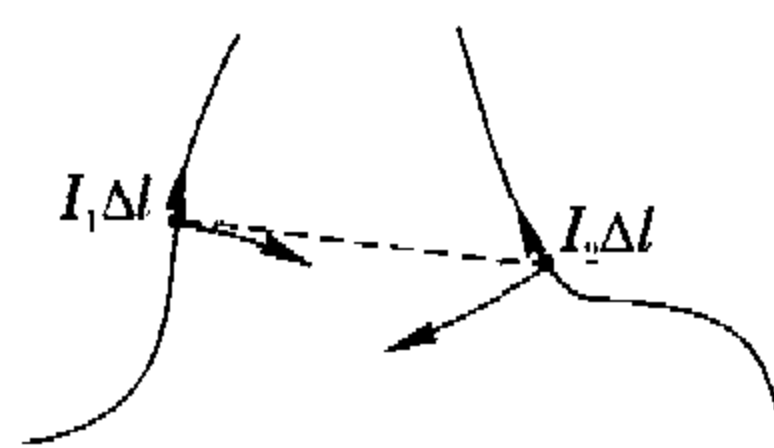


图 21-1

则电流元 $I\Delta l$ 在空间某点 P 引起的磁场的磁感应强度为 $B = k \frac{I\Delta l \sin \alpha}{r^2}$, 式中 r 是 P 点对电流元 $I\Delta l$ 矢径的大小(距离), α 是电流元 $I\Delta l$ 与矢径 r 之间小于 π 的夹角; B 的方向遵守右手螺旋定则,即垂直于电流元与矢径所构成的平面,四指从电流经 α 角转向矢径时拇指所指方向,如图21-2所示.这就是电流元在空间任一点的磁感应强度所遵从的规律,是由毕奥和萨伐尔通过直线电流磁场的实验并由拉普拉斯做了数学处理而推广到一般的,故被称为毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律.根据磁场的叠加原理,从毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律出发,

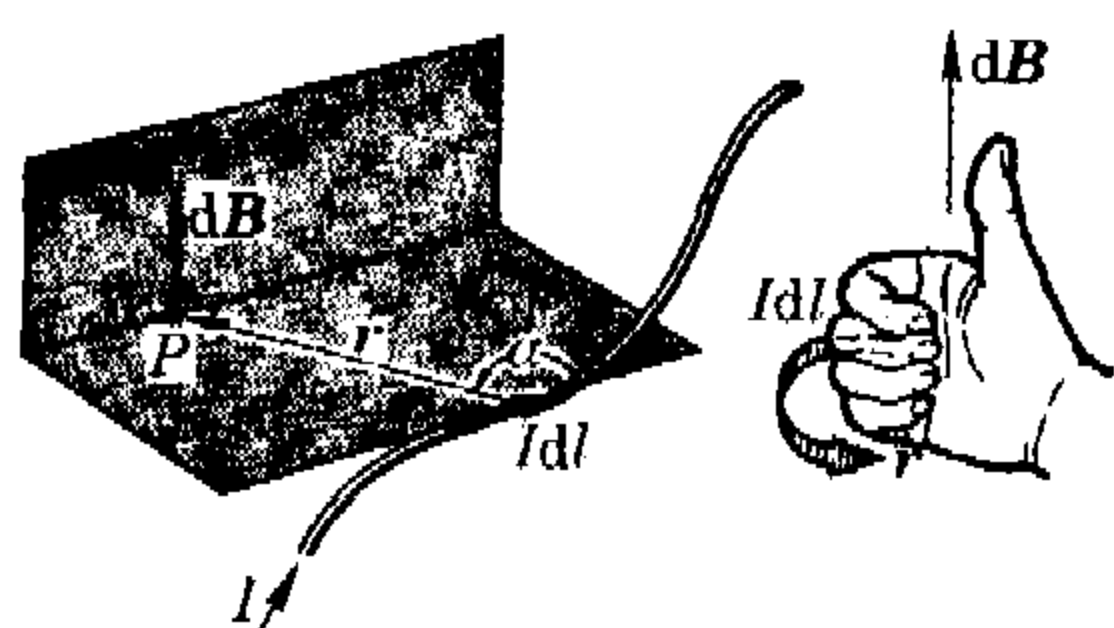


图 21-2

根据磁场的叠加原理,从毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律出发,



就可以计算电流所产生的磁场。

比如无限长直电流的磁场的磁感应强度,如图 21-3 所示,直线电流 I 方向向下,距直线电流 a 的一点 P 的磁感应强度 B 是直线电流上各电流元 $I\Delta l_i$ 在 P 点引起的 B_i 的叠加。因为导线无限长,各电流元与矢径之间的夹角从 $0 \rightarrow \pi$,取第 i 个电流元, P 点对它的张角为 $\Delta\alpha = \frac{\pi}{2n}$ $\rightarrow 0$,其长度表示为 $\Delta l_i = a[\tan i\Delta\alpha - \tan(i-1)\Delta\alpha] = a \frac{\Delta\alpha}{\cos^2(i\Delta\alpha)}$,由毕奥—萨伐尔—拉普

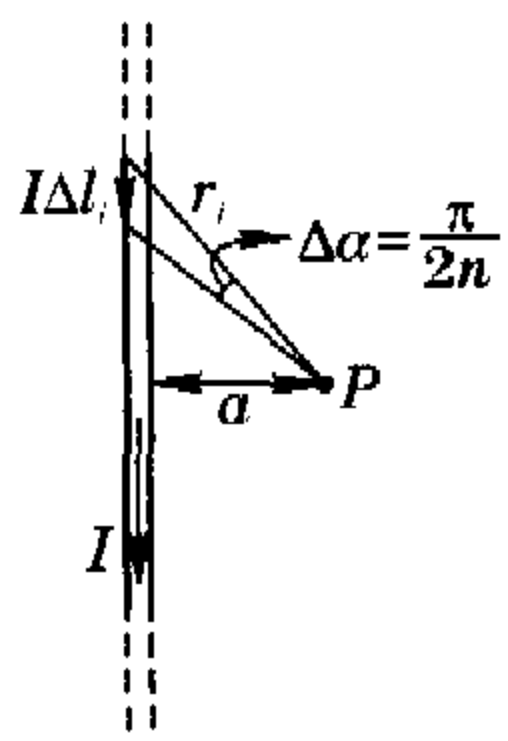


图 21-3

拉斯定律,该元电流在 P 点的磁感应强度

$$B_i = k \frac{I\Delta l_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\Delta\alpha\right)}{r_i^2} = k \frac{Ia \cdot \Delta\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\Delta\alpha\right)}{\cos^2(i\Delta\alpha) \left(\frac{a}{\cos(i\Delta\alpha)}\right)^2}$$

$$= \frac{kI \cdot \Delta\alpha \cdot \cos(i\Delta\alpha)}{a}$$

方向由右手螺旋定则判断为垂直于纸面向外;由叠加原理及对称性,直线电流在 P 点引起的磁场的磁感应强度为

$$B = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{kI \cdot \Delta\alpha \cdot \cos(i\Delta\alpha)}{a} = 2 \frac{kI}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\alpha \cdot \cos(i\Delta\alpha)$$

$$= 2 \frac{kI}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2} / \frac{\Delta\alpha}{2}\right)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{a}$$

再比如环形电流中心点 O 处的磁感应强度,如图 21-4 所示,环形电流半径设为 a ,元电流长度 $\Delta l = \frac{2\pi a}{n} \rightarrow 0$,其在 O 点处引起的磁感应强度 $B_i = k \frac{I \cdot 2\pi a}{na^2} = k \frac{I \cdot 2\pi}{na}$,方向垂直纸面向里,则环形电流在 O 点的合磁场磁感应强度为

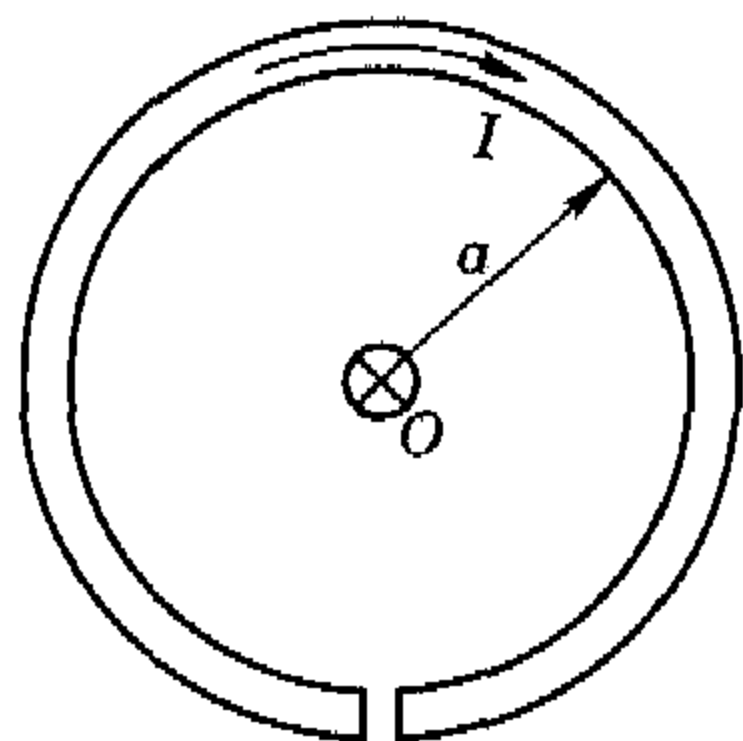


图 21-4

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k \frac{I \cdot 2\pi}{na} = k \frac{I \cdot 2\pi}{a} = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

利用毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律可计算出“无限长”通电螺线管内部是一个 $B = \mu_0 nI$ 的匀强磁场,其中 n 为单位长度线圈匝数,外部磁感应强度为零。绕得很紧密的细长的螺线管可以理想化为“无限长”螺线管。

例 1 两根长直导线沿半径方向引到铁环上 A 、 B 两点,并与很远的电源相连,如图 21-5 所示。求环中心的磁感应强度。

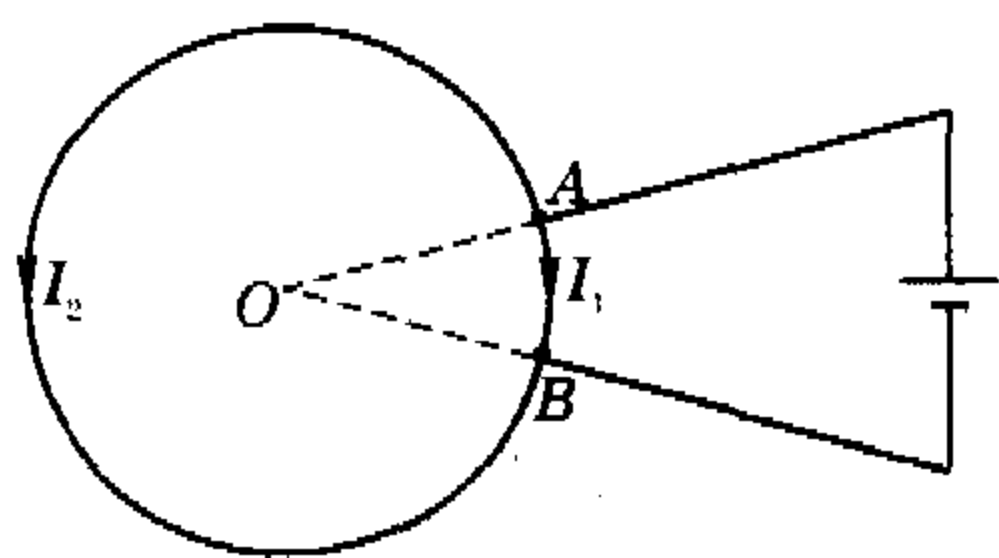


图 21-5

分析与解 电流从结点 A 分流,通过劣弧与优弧后从 B 点流出,设两弧上电流分别为 I_1 和 I_2 ,两电流与两弧长度成反比 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{l_2}{l_1}$;再来看两电流在 O 点引起的磁感应强度,

由毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律可知 $\frac{B_1}{B_2} = \frac{I_1 l_1}{I_2 l_2}$,显然, $B_1 = B_2$;由右手螺旋定则可判断 B_1 方向垂直纸面向里, B_2 方向垂直纸面向外,故环中心 O 点的磁感应强度为零。

例 2 如图 21-6 所示,一恒定电流沿着一长为 L 、半径为 R ($L \gg R$) 的螺线管流过,在螺线管内部产生了磁感应强度大小为 B_0 的磁场,试求线圈末端即图中 P 点的磁感应强度及以 P 为中心的半径为 R 的圆上的磁通量。

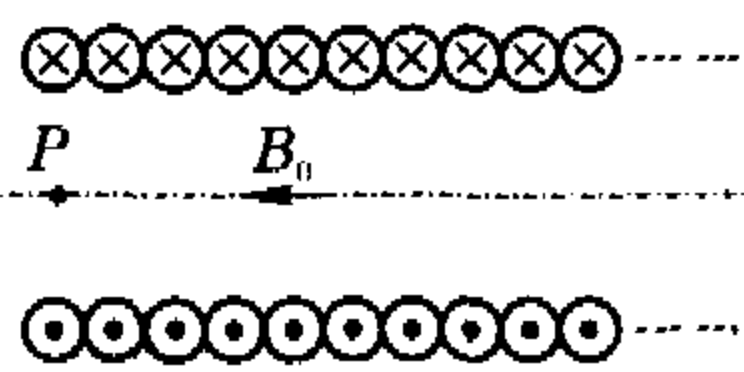


图 21-6

分析与解 设 P 点的磁感应强度为 B ,设想在此螺线管左端再加一个完全相同的通电螺线管,则 P 点成螺线管内部,其磁感应强度 $2B = \mu_0 nI = B_0$,可知 $B = \frac{B_0}{2}$;在线圈的端面,磁感应强度的水平分量为 $B = \frac{B_0}{2}$,而竖直分量之合成为零,故以 P 为中心的半径为 R 的圆上的磁通量 $\Phi_m = \frac{B_0}{2} \pi R^2$ 。

例 3 由相同导线构成的立方体框架如图 21-7 所示,让电流 I 从顶点 A 流入、 B 流出,求立方体框架的几何中心 O 处的磁感应强度。

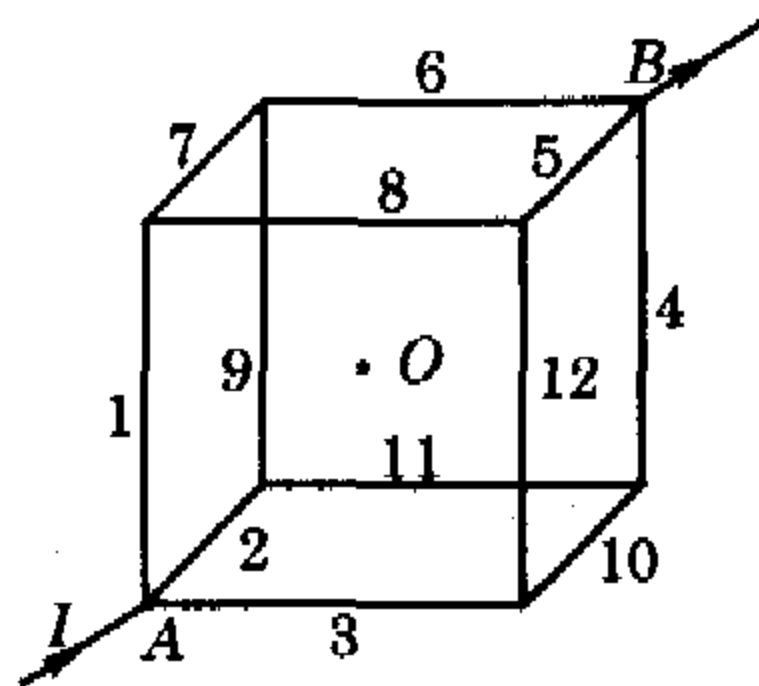


图 21-7

分析与解 如同我们在专题 19 中做过的,正方形框架各边上的电流分布情况是 1、2、3、4、5、6 导线上电流均为 $I/3$;其余各边上电流均为 $I/6$; O 点磁场是 12 条直线电流在 O 点引起的合磁场,磁感应强度由各电流在 O 点的分量叠加而成。注意到载流导线 1 和 4、2 和 5、3 和 6、7 和 10、8 和 11、9 和 12 都各是同向平行等值电流,在 O 点引起等值而反向的磁感应强度,各各对消,故 O 点的磁感应强度为零。

例 4 一 N 匝密绕的螺线管长为 L ,半径为 r ,且 $L \gg r$ 。当通有恒定电流 I 时,试求作用在长螺线管侧面上的压强 p 。

分析与解 作用在电流强度为 I 、长 Δl 的电流元上的安培力大小为 $F = BI\Delta l$, B 是受力电流元所在外磁场的磁感应强度。在如图 21-8 所示的长螺线管上 A 处取一电流元 $I\Delta l$,电流元处在除自身外的螺线管其余部分电流在该处产生的磁场中,设这个磁场磁感应强度为 B_1 。考察 A 处长螺线管外侧面,电流元在长螺线管外侧面的 A 点产生的磁感应强度设为 B' ,由于长螺线管外侧面磁感应强度为零,则有 $B_1 - B' = 0$;而在 A 处长螺线管内侧面,电流元产生的磁感应强度大小仍为 B' ,但方向相反,螺线管其余部分电流在该处产生的磁场为 B_1 ,而无限长

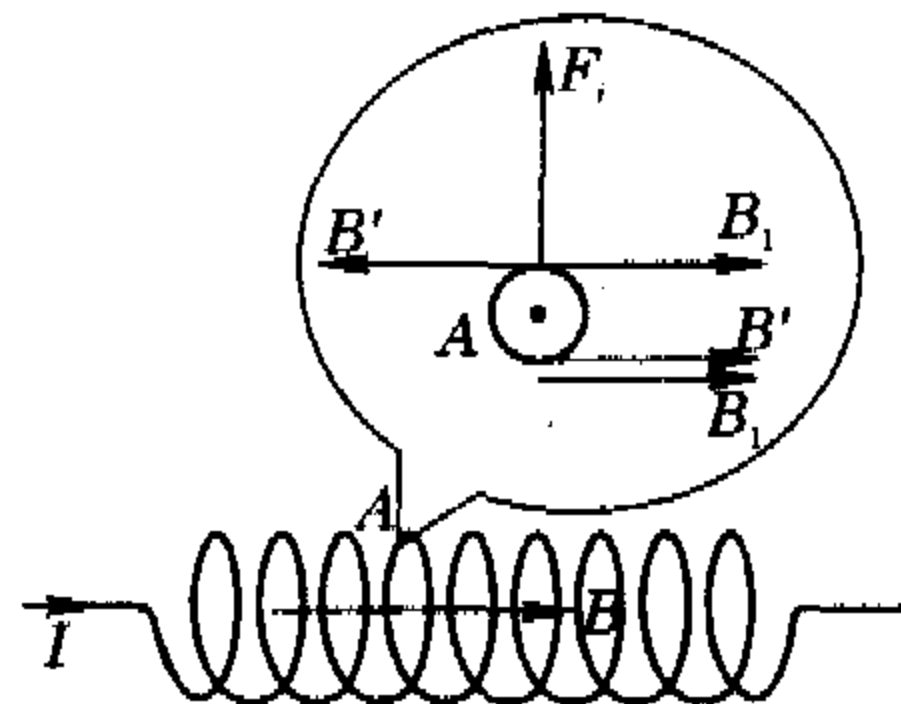


图 21-8


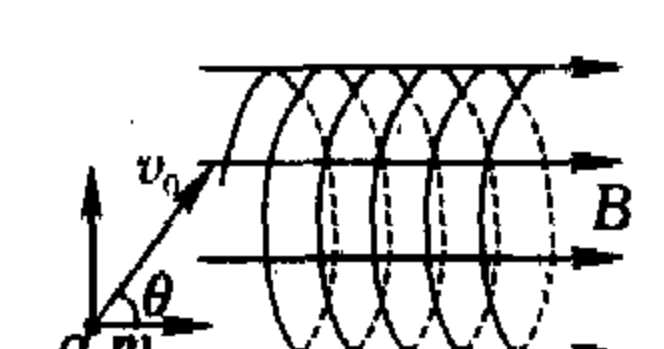
螺线管外侧面磁感应强度为零,则有 $B_1 - B' = 0$;而在 A 处长螺线管内侧面,电流元产生的磁感应强度大小仍为 B' ,但方向相反,螺线管其余部分电流在该处产生的磁场为 B_1 ,而无限长



通电螺线管内部磁场由全部电流产生,则有 $B_1 + B' = \frac{\mu_0 NI}{L}$,
故有 $B_1 = \frac{\mu_0 NI}{2L}$,于是可得电流元所受其余部分电流的力为 F_1
 $= \frac{\mu_0 NI}{2L} \cdot I \cdot \Delta L$,而作用在长螺线管侧面上的压强 $p =$
 $\frac{\mu_0 NI^2 \Delta L}{2L \Delta L} = \frac{\mu_0 NI^2}{2L}$.

磁场是一个涡旋场,这使磁场与电场在力与能的属性上有诸多不同之处.同样的带电粒子在磁场中的运动表现也与在电场中不一样.如表 2 所示是带电粒子在匀强电场与匀强磁场中运动的对照.

表 2

	匀强电场中	匀强磁场中
v_0 方向与场的方向平行	匀变速直线运动 $a = \frac{qE}{m}$	速度为 v_0 的匀速直线运动 $a = 0$
v_0 方向与场的方向垂直	匀变速曲线运动(类平抛)(轨迹为半支抛物线) $a = \frac{qE}{m}$	匀速圆周运动(轨道圆平面与磁场垂直) $a = \frac{qv_0 B}{m}, R = \frac{mv_0}{qB},$ $T = \frac{2\pi m}{qB}$
v_0 方向与场的方向成 θ 角	匀变速曲线运动(类斜抛)(轨迹为部分抛物线) $a = \frac{qE}{m}$ 	匀速圆周运动与匀速直线运动合成(轨迹为等距螺旋线) $a = \frac{qv_0 B \sin \theta}{m},$ $R = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB},$ $h = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \theta$ 

例 5 如图 21-11 所示,经 $U = 1000 \text{ V}$ 电压加速的电子(加速前静止)从电子枪 T 射出,其初速度沿直线 a 方向.若要求电子能击中在 $\varphi = 60^\circ$ 方向,与枪口相距 $d = 5.0 \text{ cm}$ 的靶 M ,试求以下两种情况下,所需的匀强磁场的磁感应强度的大小.(1)磁场 B_1 垂直于直线 a 与靶 M 所确定的平面;(2)磁场 B_2 平行于枪口 T 向靶 M 所引的直线 TM .

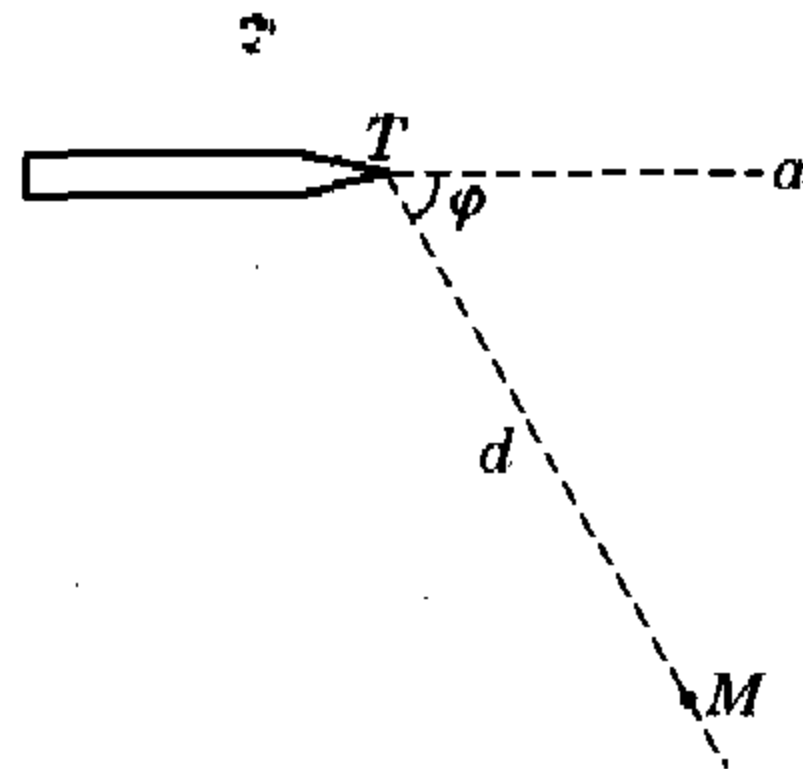


图 21-11

分析与解 磁场 B_1 垂直于直线 a 与靶 M 所确定的平面时,电子将在此平面上做匀速圆周运动,为击中靶 M ,应令其轨道过 M 点,由图 21-12 甲所示几何关系,可求出轨道圆的半

径为 $r = \frac{d}{2 \sin 60^\circ} = \frac{d}{\sqrt{3}}$;由 $\frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{m_e v}{e B_1}$,其中电子从电子枪射出时

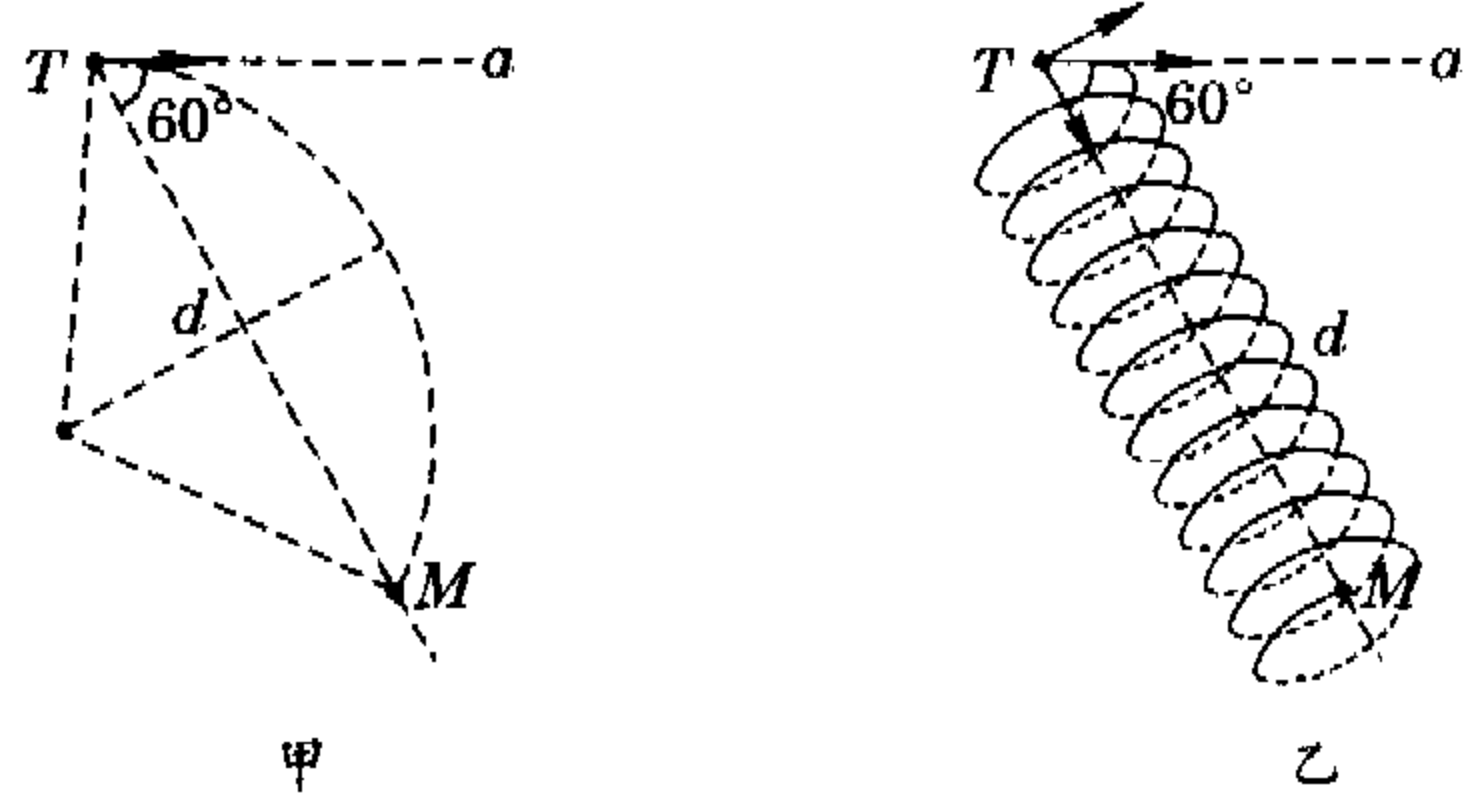


图 21-12

速度 v 可由加速电场中 $\frac{1}{2} m_e v^2 = eU$ 求出,则此种情况下所需的匀强磁场的磁感应强度 B_1 的大小为

$$B_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2m_e eU}}{de} = \frac{\sqrt{6 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1000}}{5.0 \times 10^{-2} \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ T}$$

$$\approx 3.7 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

若磁场 B_2 平行于枪口 T 向靶 M 所引的直线 TM ,电子将在与此平面垂直的平面上做匀速圆周运动,同时沿直线 TM 方向匀速直线运动,其轨迹为以 TM 的平行线为轴的等距螺旋线,为击中靶 M ,应令电子的螺旋线轨道过 M 点,如图 21-12 乙所示.为此,在匀速直线运动完成位移 d 的时间 $t = \frac{d}{v \cos 60^\circ}$ 内,匀速圆周运动应完成整周期运动,即有 $\frac{d}{v \cos 60^\circ} = n \frac{2\pi m_e}{e B_2}$,则

$$B_2 = n \frac{2\pi m_e v \cos 60^\circ}{de} = \frac{n\pi}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}. (n \text{ 为正整数})$$

代入数据计算得

$$B_2 = \frac{n\pi}{5 \times 10^{-2}} \sqrt{\frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1000}{1.6 \times 10^{-19}}} \text{ T}$$

$$\approx 6.7 \times 10^{-3} n \text{ T}.$$

例 6 如图 21-13 所示,一簇质量均为 m 、电量均为 q 的离子在 P 点以同一速率 v 沿 xy 上半平面中的各个方向射出,垂直于 xy 平面的匀强磁场 B 将这些离子聚焦在 R 点, P 点与 R 点相距为 $2a$,离子轨道应是轴对称的.试确定磁场区的边界.讨论当 $a = \frac{mv}{Bq}$ 情况下可聚焦的离子发射角范围.

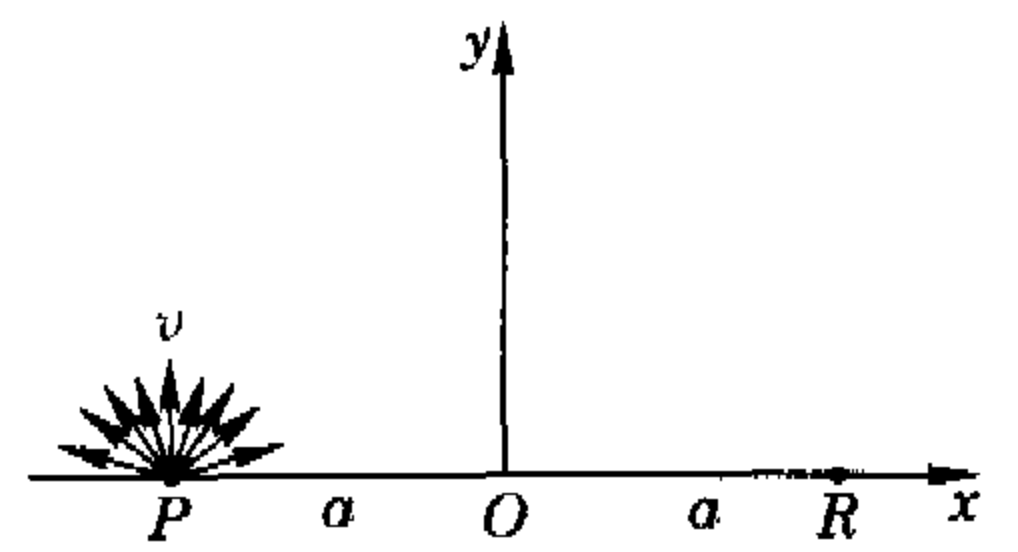


图 21-13

分析与解 我们曾在电场中研究过类似的问题(递进测试 9 第 2 题),在那里,我们确定了满足条件的电场的边界是抛物线.这里,我们也考虑到离子的运动有明显的轴对称性,设离子在进入磁场前做直线运动,进入磁场区后,在洛伦兹力作用下沿一段圆弧运动,而后离开磁场区,沿直线运动至 R .对不同的离子射出角,以适当的圆弧与之衔接,如图 21-14 所示,各轨道直线与圆弧对接点,即离子出、入磁场的点的集合为所求磁场的边界.



竞赛辅导

如图 21-14 所示,以 α 角从 P 点射出的粒子,先做直线运动,在坐标为 (x, y) 处进入磁场做匀速圆周运动,轨道半径

$r = \frac{mv}{qB}$,由几何关系 $r^2 = x^2 + (rcos \alpha)^2$,而 $\tan \alpha = \frac{y}{a - |x|}$,得 $x^2(a - |x|)^2 + x^2y^2 = y^2(\frac{mv}{qB})^2$,此即磁场 B 的边界

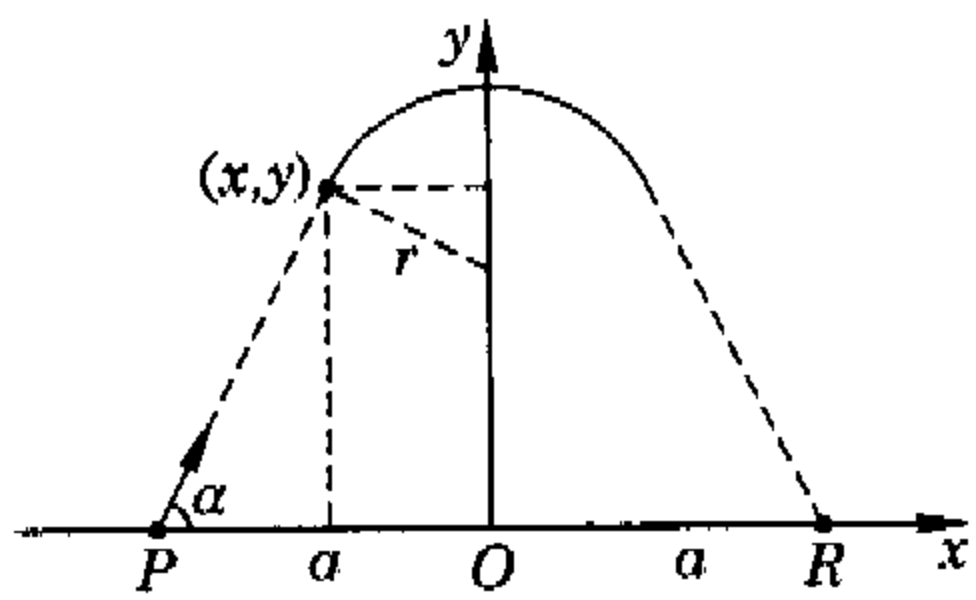


图 21-14

方程 $\begin{cases} x^2(a-x)^2 + x^2y^2 = y^2(\frac{mv}{qB})^2, (x \geq 0, \text{右边界}) \\ x^2(a+x)^2 + x^2y^2 = y^2(\frac{mv}{qB})^2, (x < 0, \text{左边界}) \end{cases}$ 或

$\begin{cases} y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{(\frac{mv}{qB})^2 - x^2}}, (x \geq 0, \text{右边界}) \\ y = \frac{x(a+x)}{\sqrt{(\frac{mv}{qB})^2 - x^2}}, (x < 0, \text{左边界}) \end{cases} \quad 0 \leq |x| \leq \frac{mv}{Bq}$

由于磁场区域受到 $0 \leq |x| \leq \frac{mv}{Bq}$ 条件的限制,可聚焦的粒子的出射角范围也有限制,在题给

条件 $a = \frac{mv}{Bq}$ 下,磁场边界方程

$\begin{cases} y = x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, (x \geq 0, \text{右边界}) \\ y = x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, (x < 0, \text{左边界}) \end{cases}$

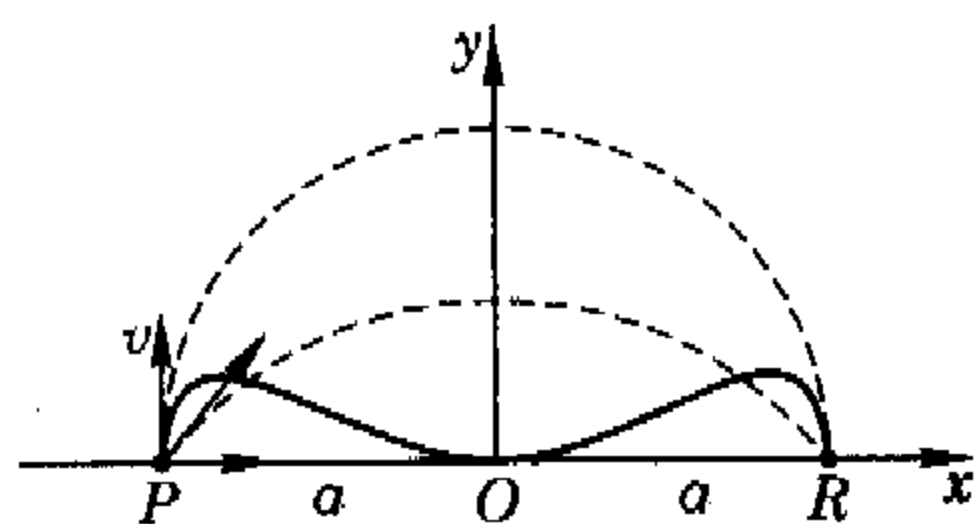


图 21-15

如图 21-15 所示,当离子射出

角为 $\frac{\pi}{2}$ 时,沿半径为 a 的半圆运动至 R ;当离子射出角为零时,沿 x 轴运动至 R ;而当射出角 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时无法聚焦到 R 处。

在 $a > \frac{mv}{Bq}$ 及 $a < \frac{mv}{Bq}$ 时可聚焦的粒子的出射角范围留给有兴趣的读者自行探讨。

带电粒子在电场与磁场的复合场中,既受电场力,又受洛伦兹力的作用,运动情况将较为复杂.我们介绍几种简单而重要的有应用背景的情况。

速度选择器 正交的匀强电场与匀强磁场区域被称为速度选择器,它因只可以让各种速度垂直于电场与磁场的带电粒子中具有一定速率的带电粒子直线通过而得名.带电粒子在正交的匀强电场与匀强磁场区域同时受到电场力 $F_e = qE$ 及洛伦兹力 $F_m = qvB$ 的作用,若该二力大小相等、方向相反,即 $qvB = qE$,粒子在该区域所受合力为零,则会沿直线通过而不因发生偏转落到电极板上,可见能通过“速度选择器”的带电粒子其速度大小须满足 $v = \frac{E}{B}$ 。

当带电粒子的速度大于或小于“选择速度”时,其运动情况如何呢?不妨设带正电粒子的初速度为零,处于如图 21-16 所示的互相垂直的匀强电场 E 与匀强磁场 B 中,释放后受电场

力的作用,粒子将会加速,一旦有了速度又将受到洛伦兹力的作用而改变速度的方向,故粒子将做较为复杂的曲线运动.现在我们运用分解运动的法宝——将复杂运动分解成较为简单的两个运动——试试:将初速度为零等效为与匀强电场 E 及匀强磁场 B 均垂直的大小 $v_1 = \frac{E}{B}$ 的速度和方向相反、大小为 $v_2 = \frac{E}{B}$ 的速度的合成,在这样的初状态下,带电粒子受到三个力的作用,电场力 $F_e = qE$;洛伦兹力 $F_{m1} = qv_1B$ 和洛伦兹力 $F_{m2} = qv_2B$,方向如图 21-16 所示,则粒子将同时完成两个运动,一个是以 v_1 做匀速直线运动;一个是在 F_{m2} 这个向心力作用下以 v_2 做匀速圆周运动,则粒子的实际运动是这两个运动的合成,其轨迹为一滚轮线,相当于半径为 $\frac{mE}{qB^2}$ 的圆轮在水平面上作纯滚动时轮缘上一点的运动。

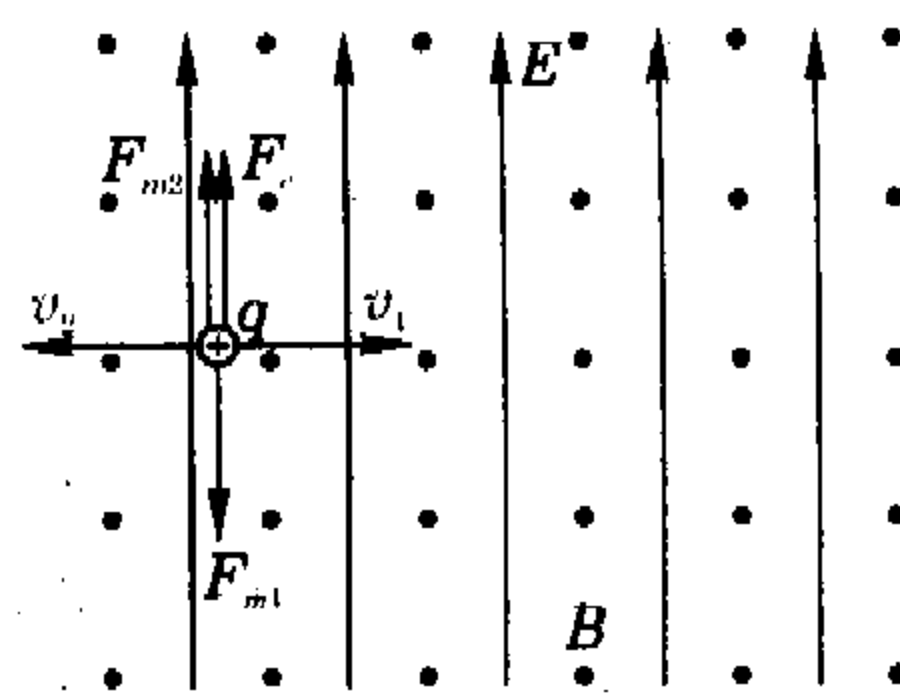


图 21-16

力的作用,粒子将会加速,一旦有了速度又将受到洛伦兹力的作用而改变速度的方向,故粒子将做较为复杂的曲线运动.现在我们运用分解运动的法宝——将复杂运动分解成较为简单的两个运动——试试:将初速度为零等效为与匀强电场 E 及匀强磁场 B 均垂直的大小 $v_1 = \frac{E}{B}$ 的速度和方向相反、大小为 $v_2 = \frac{E}{B}$ 的速度的合成,在这样的初状态下,带电粒子受到三个力的作用,电场力 $F_e = qE$;洛伦兹力 $F_{m1} = qv_1B$ 和洛伦兹力 $F_{m2} = qv_2B$,方向如图 21-16 所示,则粒子将同时完成两个运动,一个是以 v_1 做匀速直线运动;一个是在 F_{m2} 这个向心力作用下以 v_2 做匀速圆周运动,则粒子的实际运动是这两个运动的合成,其轨迹为一滚轮线,相当于半径为 $\frac{mE}{qB^2}$ 的圆轮在水平面上作纯滚动时轮缘上一点的运动。

例 7 如图 21-17 所示,质量均为 m ,电量为 $-q$ 和 $+q$ 的两个带电质点相距 $2R$.开始时,系统的质心 C 静止地位于坐标原点 O 处,且两带电质点在 xOy 平面上绕质心 C 沿顺时针方向做圆周运动.设当系统处于图 21-17 所示位置时,规定为 $t=0$ 时刻,从该时刻起在所讨论的空间加上沿 z 轴方向的弱匀强磁场 B .试求:质心 C 的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系及运动轨迹方程,定性画出质心 C 的运动轨迹.设两带电质点绕质心的圆周运动保持不变,忽略一切万有引力.两带电质点间的相互作用力视作库仑力。

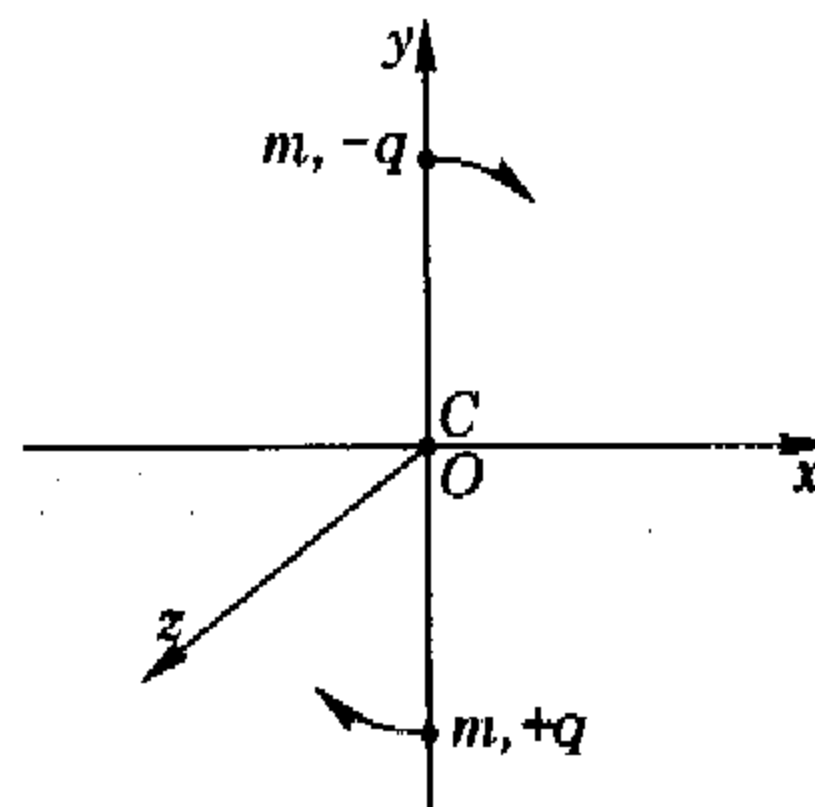


图 21-17

分析与解 两带电质点构成的“双星”系统质心位于 O 处,未加磁场时,系统不受外力,质心速度为零,两质点绕质心 C 做角速度为 ω 的匀速圆周运动,由动力学方程

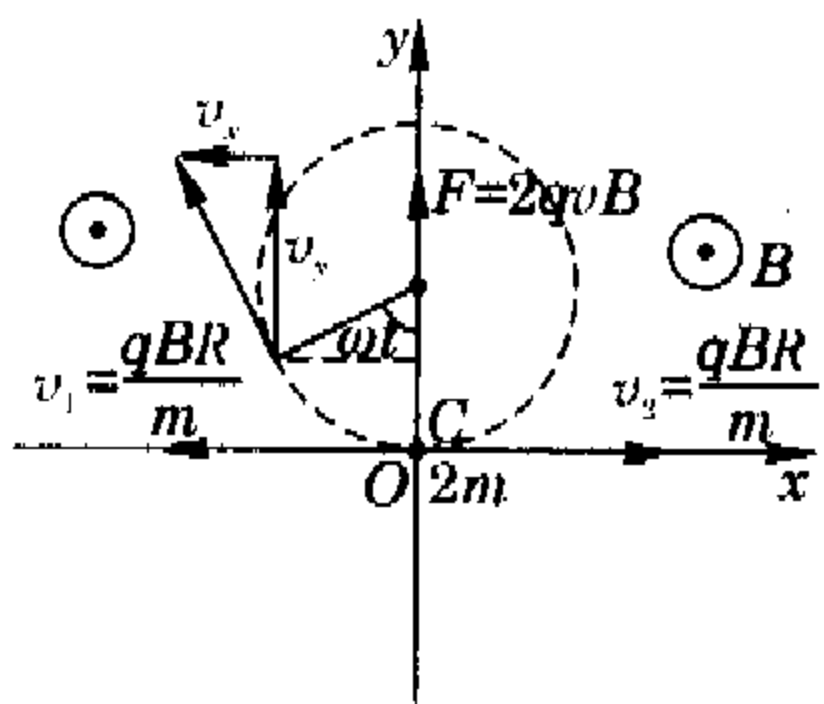
$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R^2} = mR\omega^2$,得 $\omega = \frac{q}{4R\sqrt{\pi\epsilon_0 mR}}$;

加沿 z 轴方向的弱匀强磁场 B ,质心受到的磁场力是两电荷所受洛伦兹力之合力;大小总是 $F = 2q\omega RB$,方向沿两质点连线而指向 $-q$ 方向,是一个“有心力”,此力引起的质心加速度为 $a = \frac{q\omega RB}{m}$,角速度为 $\omega = \frac{qB}{m} = \frac{q}{4R\sqrt{\pi\epsilon_0 mR}}$.这使我们想到可以把质心的运动分解成两个分运动:设质心的一个初速度为 $v_1 = \frac{qBR}{m} = \omega R$ (这是在磁场 B 作用下,电荷 q 沿半径为 R 的轨道运动所对应的速度),方向为 $-x$,则质心的一个分运动是线速度为 $v_1 = \frac{qBR}{m}$ 、角速度为 $\omega = \frac{qB}{m}$ 、向心加速度为 $a = \frac{q\omega RB}{m}$ 、

半径为 $r = \frac{qBR}{m\omega} = \frac{qBR}{m \frac{q}{4R\sqrt{\pi\epsilon_0 mR}}} = 4BR^2 \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 R}{m}}$ 的匀速圆周



运动;质心的另一个初速度是 $v_2 = \frac{qBR}{m}$, 方向为 $+x$, 故质心的另一个分运动为沿正 x 方向的速度为 $\frac{qBR}{m}$ 匀速直线运动. 这样, 质心的运动是匀速圆周运动与匀速直线运动的合成, 如图 21-18 所示, 质心速度的 x 方向分量与 y 方向分量分别是



$$\begin{cases} v_x = v_2 - v_1 \cos \omega t = \frac{qBR}{m}(1 - \cos \omega t), \\ v_y = v_1 \sin \omega t = \frac{qBR}{m} \sin \omega t; \end{cases} \quad \text{图 21-18}$$

质心在 x 方向与 y 方向的位移分别是

$$\begin{cases} x = v_2 t - r \sin \omega t = \frac{qBR}{m} t - 4BR^2 \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 R}{m}} \sin \omega t, \\ y = r(1 - \cos \omega t) = 4BR^2 \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 R}{m}} (1 - \cos \omega t). \end{cases}$$

质心运动轨迹为滚轮线, 如图 21-19 所示.

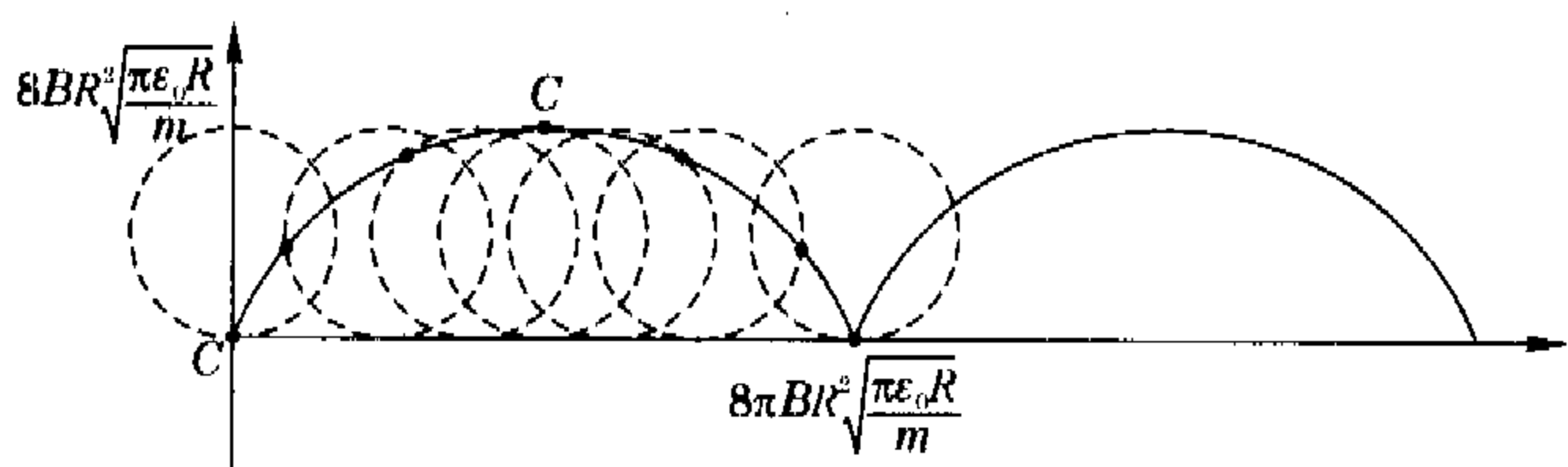


图 21-19

磁聚焦 如图 21-20 所示, 通过在一组平行金属板上加一

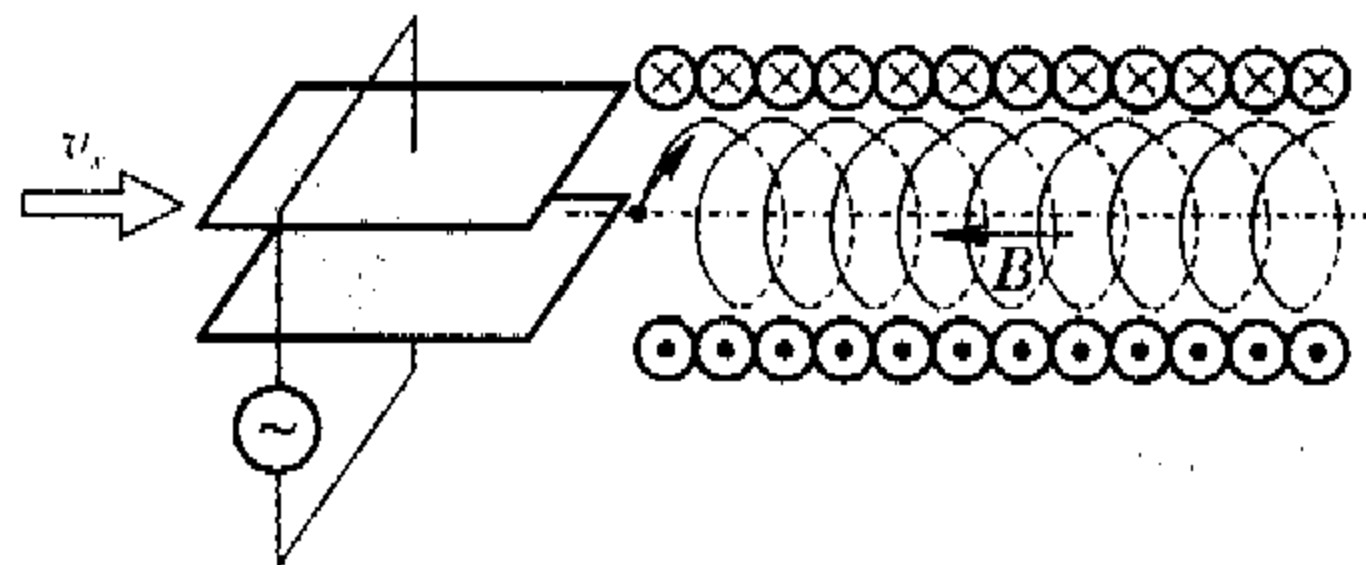


图 21-20

交变电压 U 产生横向电场, 用载流长螺线管得到其内部的纵向(轴向)匀强磁场 B , 经加速电场加速、速度为 v_x 的电子束通过横向电场后, 以各种发散角度 θ 进入纵向匀强磁场, 电子的运动轨迹为螺旋线, 每经过相同的时间 $T = \frac{2\pi m_e}{eB}$, 电子回旋一周并前进一个螺距 $h = v_x \cdot \frac{2\pi m_e}{eB}$, 若电子沿纵向磁场的运动路径长为 l , 可以调节磁感应强度 B , 使所有电子在 l 路径上完成整数个圆周运动, 即比值 $\frac{elB}{2\pi m_e v_x} = n$ 为整数, 这样, 被横向交变电场偏转发散的电子束经磁场作用, 会聚到距入射点 l 的同一处, 这就是磁聚焦. 若电子枪的加速电压为 U , 则由 $eU = \frac{1}{2} m_e v_x^2$ 可知 $v_x = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$, 则 $\frac{elB}{2\pi m_e \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}} = n$, 即 $\frac{e}{m_e} = \frac{8\pi^2 n^2}{l^2 B^2} U$,

上式中, 加速电压 U 及 l, B 可测得, 调节纵向磁场磁感应强度为 B_1 时, 电子束会聚(在荧光屏上有最细小的亮点), 此时电子绕行 n 周, 将纵向磁场磁感应强度逐渐调大到 B_2 时, 电子束又一次会聚, 此时电子绕行 $n+1$ 周, 根据上式有 $\frac{n^2}{B_1^2} = \frac{(n+1)^2}{B_2^2}$, 得 $n = \frac{B_1}{B_2 - B_1}$, 则利用磁聚焦还可以测得电子的荷质比.

例 8 如图 21-21 所示, 在螺线环的平均半径 R 处有电子源 P , 由 P 点沿磁感线方向注入孔径角 2α ($2\alpha = 1^\circ$) 的一电子束, 其中的电子都是以电压 U_0 加速后从 P 点发出的. 假设螺线环内磁场磁感应强度 B 的大小为常量, 设 $U_0 = 3 \text{ kV}, R = 50 \text{ mm}, \frac{e}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$, 并假设电子束中各电子间的静电相互作用可以忽略. (1) 为了使电子束沿环形磁场运动, 需要另加一个使电子束偏转的均匀磁场 B_1 . 对于在环内沿半径为 R 的圆形轨道运动的一个电子, 试计算所需的 B_1 大小; (2) 当电子束沿环形磁场运动时, 为了使电子束每绕一圈有四个聚焦点, 即如图 21-21 所示, 每绕过 $\pi/2$ 的周长聚焦一次, 环内磁场 B 应有多大? (这里考虑电子轨道时, 可忽略 B_1 , 忽略磁场 B 的弯曲)

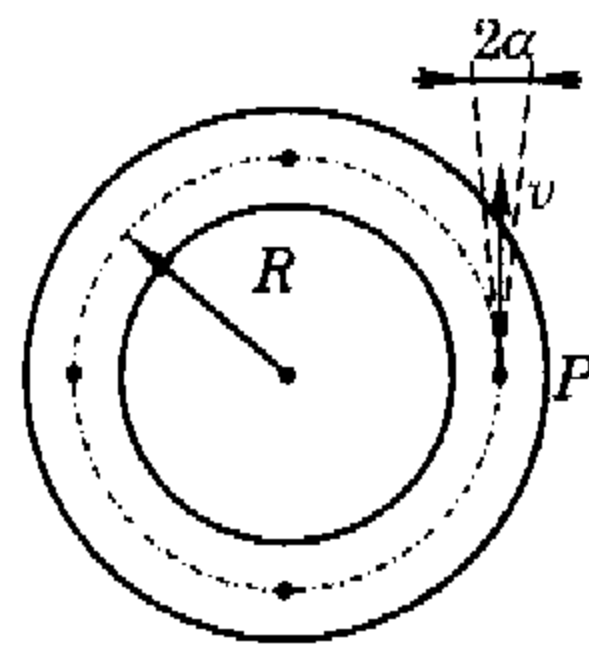


图 21-21

分析与解 绕在环形管上的一组圆形电流形成环形螺线管, 也称罗兰环, 如图 21-22 所示. 若环上线圈绕得紧密, 则磁场几乎全部集中在螺线环内, 环外磁场接近于零, 磁感线为环的一系列同心圆, 同一磁感线上各点磁感应强度的量值相等、方向沿环面. 这样的磁场不能对沿环形磁场运动的电子提供向心力, 故需另加一个使电子束偏转的均匀磁场 B_1 , 对图 21-21 所示电子速度为 v , 磁场 B_1 的方向应垂直于电子圆运动轨道平面(纸面)向外. 由 $evB_1 = m \frac{v^2}{R}, eU_0 = \frac{1}{2} m v^2$, 可得 $B_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2m_e U_0}{e}}$, 代入题给数据得 $B_1 = \frac{1}{50 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \times 3000}{1.76 \times 10^{11}}} \text{ T} = 3.7 \times 10^{-3} \text{ T}$.

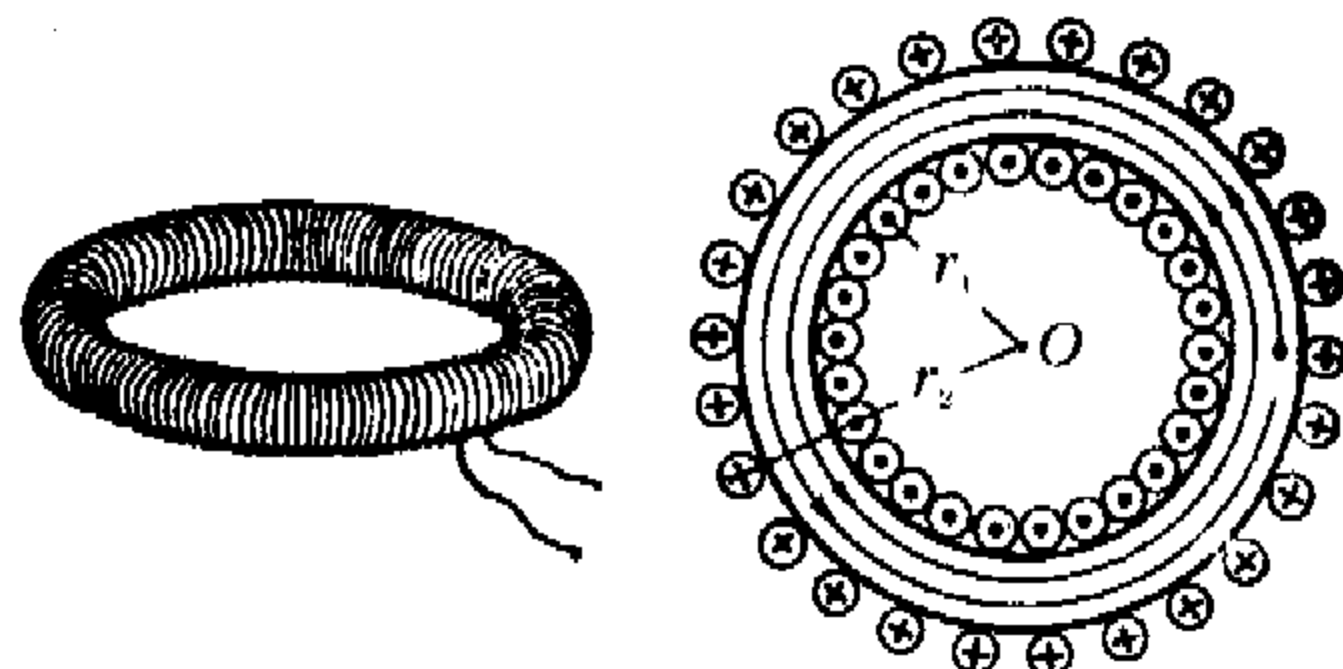


图 21-22

当电子束沿环形磁场运动时, 由于电子速度方向与磁感应强度 B 的方向成角度 α , 电子将沿螺旋线轨道运动——即在垂直于 B 的平面上做匀速圆周运动, 周期为 $T = \frac{2\pi m_e}{eB}$, 沿 B 方向速度为 $v \cos \alpha$, 螺距为 $h = v \cos \alpha \cdot \frac{2\pi m_e}{eB}$; 为了使电子束每绕一



竞赛辅导

圈有四个聚焦点, 应有 $2\pi R = 4vcos\alpha \cdot \frac{2\pi m_e}{eB}$, 其中 $v =$

$\sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}}$, 则 $B = \frac{4}{R} \sqrt{\frac{2m_e U_0}{e}} \cos\alpha$. 在 $2\alpha = 1^\circ$ 的条件下, $B \approx$

$$\frac{4}{R} \sqrt{\frac{2m_e U_0}{e}} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

霍尔效应 把一载流导体放在磁场中时, 若磁场方向与电流方向垂直, 则在与磁场及电流二者均垂直的方向上出现横向电势差, 这一现象是美国物理学家霍尔在 1879 年当他还是一个年青学生时发现的, 故被称为霍尔效应, 此电势差叫霍尔电势差. 如图 21-23 所示, 通电金属导体中的载流子——

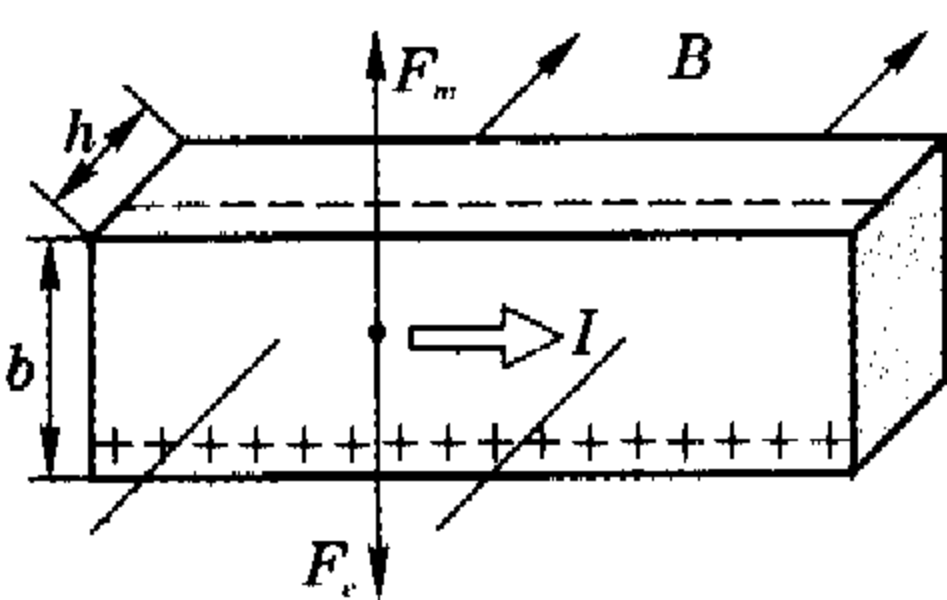


图 21-23

定向运动(\bar{v})的自由电子(e)在磁场(B)中受洛伦兹力 $F_m = e\bar{v}B$ 的作用而发生横向漂移, 方向向上, 这种横向漂移运动使导体上侧有多余的负电荷而下侧因缺少电子而有多余的正电荷, 于是在导体中形成一个方向向上的附加电场 E_H , 它将阻碍载流子的横向漂移运动, 当载流子所受的洛伦兹力与附加电场力平衡即 $eE_H = e\bar{v}B$ 时, 电子的横向漂移运动停止, 这时在导体的上下侧所形成的电势差就是霍尔电势差 $U_H = E_H b$. 导体单位体积内的自由电子数为 n , 电流 $I = ne\bar{v}hb$, 代入前式得 $U_H = \frac{IB}{neh}$, 式中 $R_H = \frac{1}{ne}$ 由金属导体性质决定, 称霍尔系数, 则金属导体的霍尔电势差 $U_H = R_H \frac{IB}{h}$.

不但固体中有霍尔效应, 在导电流体中也同样会产生霍尔效应, 目前正在研究中的“磁流体发电”的基本原理就是利用等离子流体的霍尔电势差.

例 9 如图 21-24 所示的一块半导体样品放在垂直于竖直面外的匀强磁场中, 磁感应强度为 $B = 5 \times 10^{-3} \text{ T}$, 当有恒定电流 $I = 2.0 \text{ mA}$ 通过样品时, 产生的霍尔电势差 $U_H = 5.0 \text{ mV}$, 极性如图 21-24 中标示, $a = 1.00 \text{ mm}$, $b = 3.00 \text{ mm}$.

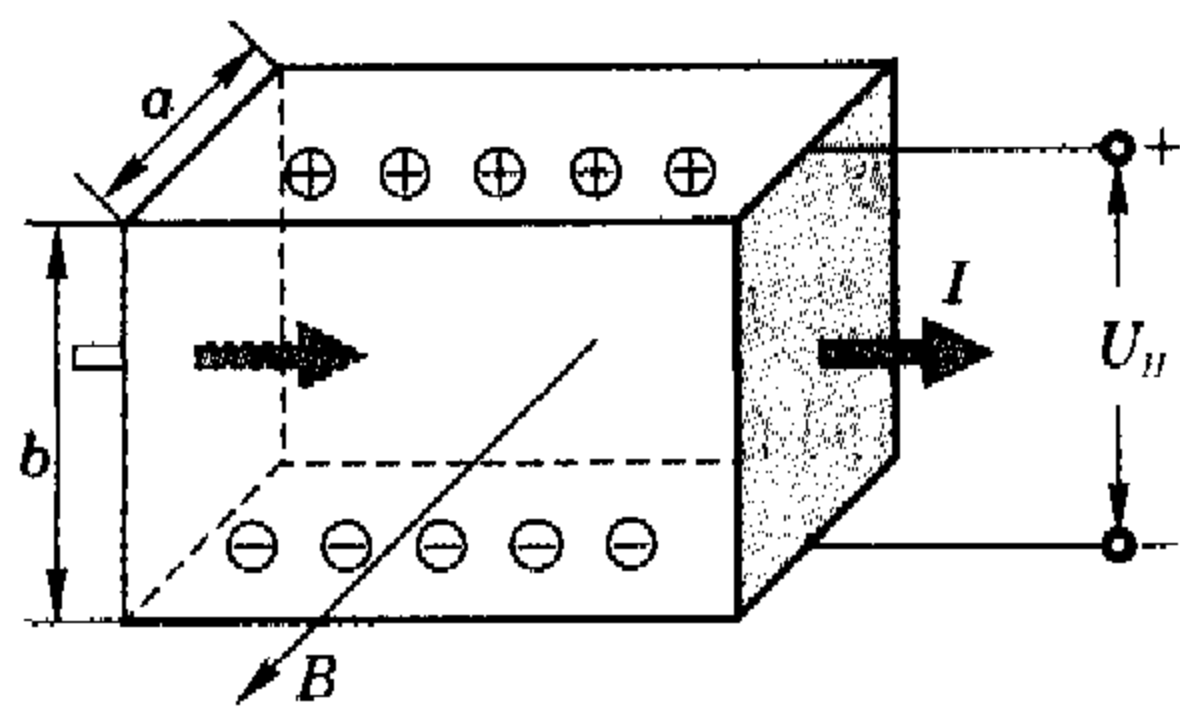


图 21-24

这块样品是 N 型半导体还是 P 型半导体? 载流子密度是多少, 载流子定向运动的速度是多少?

分析与解 根据磁场方向与电流方向可知载流子所受洛伦兹力方向是向下的, 而下板聚集负电荷, 说明这块样品中多数载流子是电子, 是 N 型半导体.

载流子密度设为 n , 由 $U_H = \frac{IB}{ena}$, 得 $n = \frac{IB}{eaU_H} = \frac{2.0 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3}} = 1.25 \times 10^{19}$; 载流子漂移

速度 \bar{v} 由 $e\bar{v}B = \frac{U_H}{b}e$ 可得 $\bar{v} = \frac{U_H}{bB} = \frac{5 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3}} \text{ m/s} \approx 333 \text{ m/s}$.

半导体中载流子密度比金属小, 霍尔系数比金属大, 所以半导体中的霍尔电势差更大, 用半导体晶片做成的四端霍尔元件在自动控制和检测技术中有广泛应用.

磁镜 有一如图 21-25 所示的非均匀磁场, 该磁场两端很强, 中间较弱. 带电粒子在此非均匀磁场中向磁场较强的方向运动时, 可做螺旋线运动, 我们已经知道, 螺旋线半径 $r = \frac{mv}{qB}$, 带电

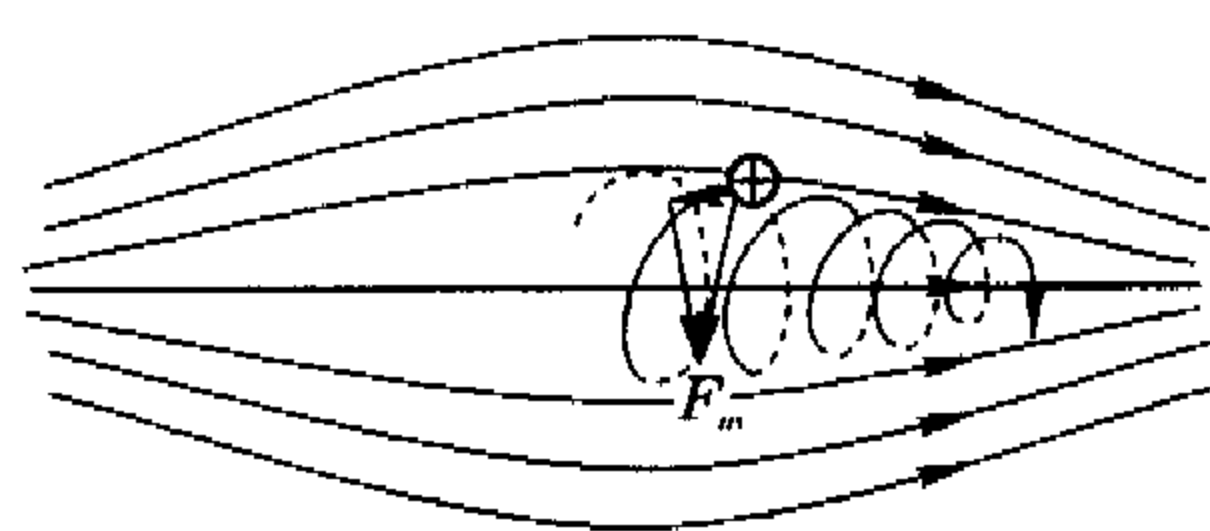


图 21-25

粒子在非均匀磁场中向磁场较强的方向运动时的螺旋线轨迹半径随 B 的增大而减小; 同时, 带电粒子在非均匀磁场中所受洛伦兹力总有一指向磁场较弱方向的分量, 此分力的作用效果是阻碍粒子向磁场强的方向运动, 最终使带电粒子掉头返转, 就像光线遇到镜面反射一样, 非均匀磁场对带电粒子的这种效应称为磁镜效应. 由于磁场两端强、中间弱, 磁镜效应使带电粒子如同被两平面镜反射的光线, 在两端之间来回振荡, 被约束在一定范围内, 形成磁约束. 形成这种磁场效应的装置叫磁镜. 在受控热核反应装置中, 一般都采用这种磁场来约束等离子体.

磁约束现象也展现在宇宙空间, 例如地球这个大磁体, 其磁场分布就是两极强而中间弱, 成为一个天然的磁镜. 外层空间的带电粒子进入后, 将绕地磁感线做螺旋运动, 并被两极来回反射, 约束在地磁感线区域, 形成所谓范·阿伦辐射带, 如图 21-26 所示. 美丽的极光也是范·阿伦辐射带中的粒子因空间磁场的变化而有机会进入地极附近的大气层而产生的.

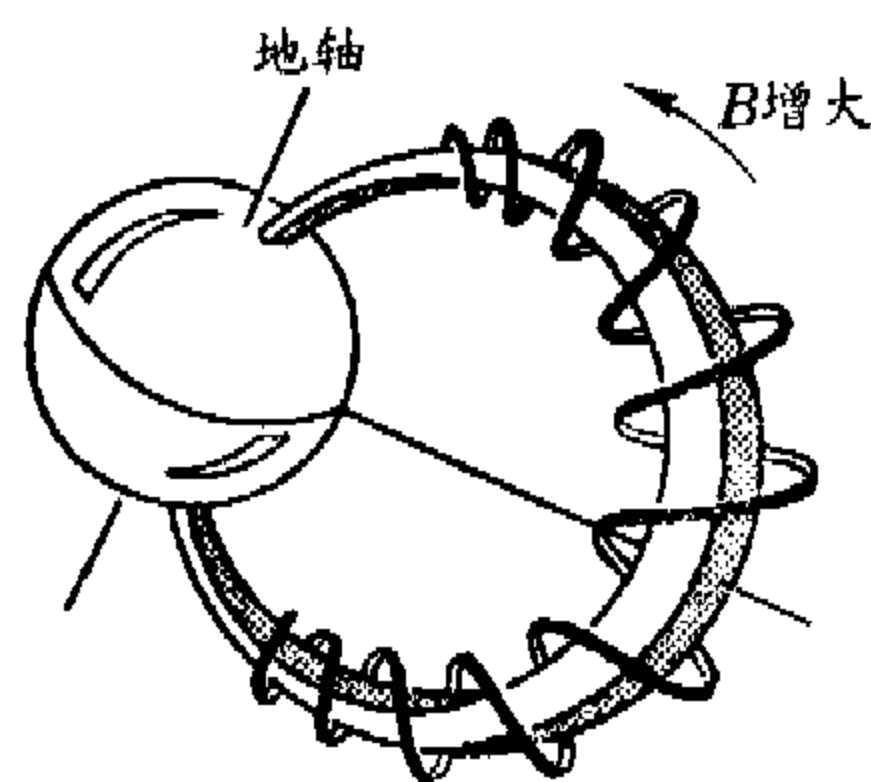


图 21-26

例 10 围绕地球周围的磁场是两极强、中间弱的空间分布. 1958 年, 范·阿伦通过人造卫星搜集到的资料研究了带电粒子在地球磁场空间中的运动情况后, 得出了在距地面几千公里到几万公里的高空存在着电磁辐射带(范·阿伦辐射带)的结论. 有人在实验室中通过实验装置, 形成了如图 21-27 所示的磁场分布区域 MM , 在该区域中, 磁感应强度 B 的大小沿 z 轴从左到右, 由强变弱, 由弱变强, 对称面为 PP . 已知 z 轴上 O 点磁感应强度 B 的大小为 B_0 , 两端 M 点的磁感应强度为 B_M . 现有一束质量均为 m 、电量均为 q 、速度大小均

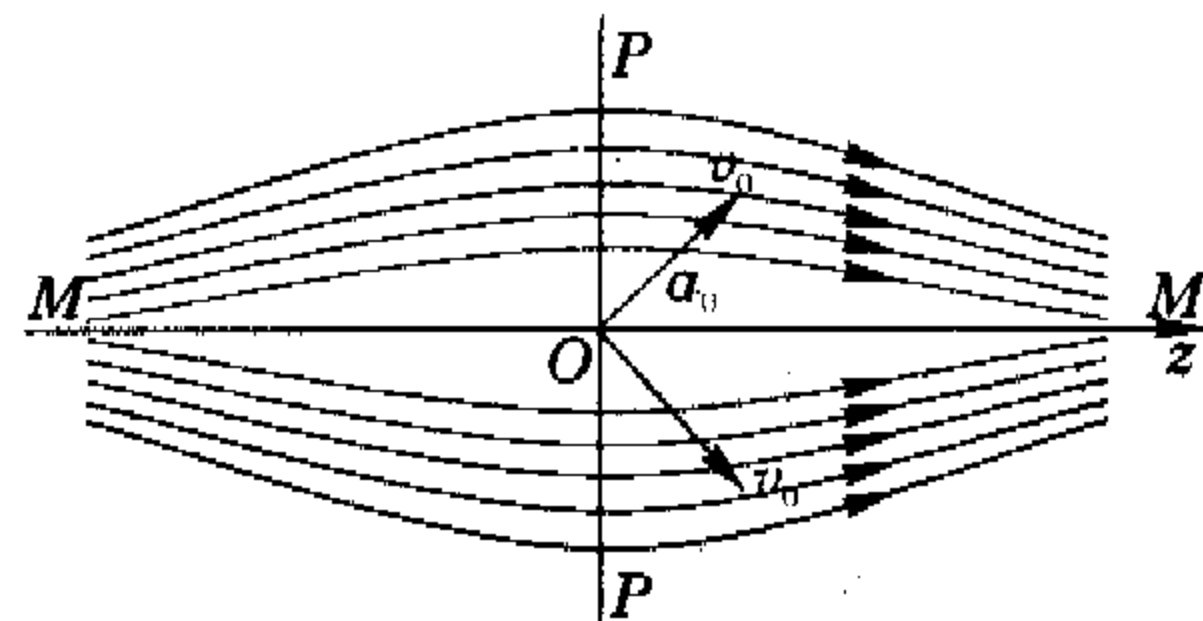


图 21-27

速度大小均



为 v_0 的粒子,在 O 点以与 z 轴成不同的投射角 α_0 向右半空间发射.设磁场足够强,粒子只能在紧邻 z 轴的磁感线围成的截面积很小的“磁力管”内运动.试分析说明具有不同的投射角 α_0 的粒子在磁场区 MM 间的运动情况.

提示:理论上可证明:在细“磁力管”的管壁上粒子垂直磁场方向的速度 v_{\perp} 的平方与磁力管轴上的磁感应强度的大小 B 之比为一常量.

分析与解 通过本题我们半定量地了解磁镜的作用.我们知道,题给磁力管是理想化的磁镜,粒子在其中沿螺旋线在中心 O 两侧往复运动,或从两端飞出.在 O 点,由题给条件

$$v_{\perp}^2 = k B_0 = (v_0 \sin \alpha_0)^2, \text{ 比值 } k = \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0};$$

带电粒子向 M 运动过程中,洛伦兹力总与速度方向垂直,故合速度大小 v_0 保持不变,但做圆运动的垂直于该处磁场 B 方向的分速度 $v_{\perp}^2 = \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0} B$,会随 B 的增大而增大;螺旋半径

$$R = \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{m v_0 \sin \alpha_0}{q} \sqrt{\frac{1}{B_0 B}} \text{ 随 } B \text{ 的增大而减小;沿磁场 } B \text{ 方}$$

向的分速度(管向速度) $v_{\parallel}^2 = v_0^2 - \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0} B$,则会随 B 的增大而减小.下面讨论粒子在 M 端的管向速度情况.

在 M 端,粒子沿磁场方向即管向速度 $v_{\parallel M}^2 = v_0^2 - \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0} B_M$,若这个速度大于零, $v_0^2 - \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0} B_M > 0$,即

$$\alpha_0 < \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}, \text{ 具有这样的投射角的粒子将从 } M \text{ 冲出磁力}$$

管;若粒子管向速度等于零, $v_0^2 - \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0} B_M = 0$,即 $\alpha_0 =$

$$\arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}, \text{ 具有这样的投射角的粒子在 } M \text{ 处做半径为 } r =$$

$\frac{m v_0}{q B_M}$ 的圆运动;若粒子管向速度小于零, $v_0^2 - \frac{(v_0 \sin \alpha_0)^2}{B_0} B_M <$

$$0, \text{ 即 } \alpha_0 > \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}, \text{ 这种情况下,粒子在到达 } M \text{ 前,管向速}$$

度已然减为零,那么粒子在 $B = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0}$ 处在垂直于管的平面上

以 v_0 做匀速圆周运动,这包括时 $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ 时,粒子在 PP 面上做匀速圆周运动的情况.

事实上在 $\alpha_0 \geq \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}$ 时粒子在非均匀磁场中某处的匀速圆周运动是不稳定的,由于微扰,粒子会偏离原轨道平面,前面我们分析过,带电粒子在非均匀磁场中所受洛伦兹力总有一指向磁场较弱方向的分量,因此,粒子会在 O 两侧 $B = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0}$ 的位置之间振荡,即约束在磁力管内.

综上,磁力管中投射角 $\alpha_0 < \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}$ 的粒子将冲出管

区;投射角 $\alpha_0 \geq \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_M}}$ 的粒子则被约束在管区内.

小球身手

1. 如图 21-28 所示,在半径为 R 的圆周上沿诸大圆绕有细导线,诸导线相交于同一直径 AB 的两端,共有六个线圈,每相邻两线圈平面的夹角均为 30° ,导线上流过电流 I ,求在木球球心 O 处磁感应强度的大小与方向.

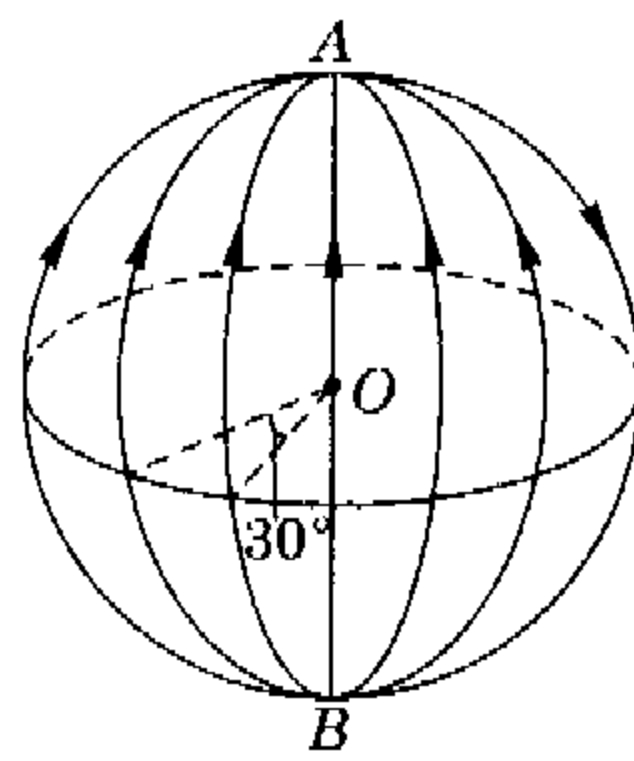


图 21-28

2. 有一个宽为 b 、无限长薄铜片,通有电流 I_0 . 求铜片中心线正上方 h ($h=b$) 处的 P 点的磁感应强度.

3. 一个塑料圆盘,半径为 R ,带电 q ,均匀分布在盘表面上,圆盘绕通过圆心垂直于盘面的轴转动,角速度为 ω ,试求圆盘中心处 O 的磁感应强度.

4. 试应用毕奥-萨伐尔定律,求解方程为 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ ($A > B$,其中 A 和 B 均为已知量)的椭圆形闭合导线当导线中通以稳恒电流 I 时,椭圆导线焦点处磁感应强度 B_f 的大小.

5. 长直圆柱形载流导线内磁场具有轴对称性,离轴 r 处的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0}{2} \cdot j \cdot r$. 现有半径为 a 的金属长圆柱体内挖去一半径为 b 的圆柱体,两圆柱体的轴线平行,相距 d ,如图 21-29 所示. 电流 I 沿轴线方向通过,且均匀分布在柱体的截面上,试求空心部分中的磁感应强度.

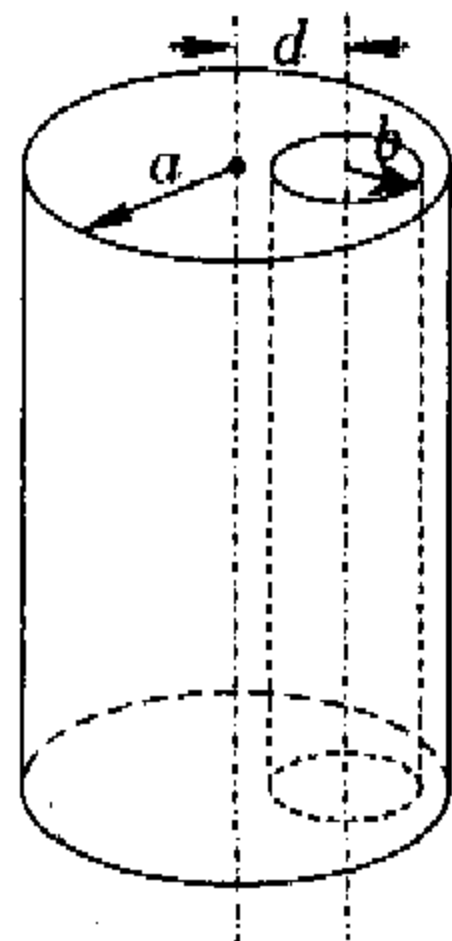


图 21-29

6. 如图 21-30 所示,质量不计的柔韧细导线的一端悬挂质量为 M 的重物,给细线提供张力 T ,另一端固定于天花板上.它的一段处于图中所示匀强磁场 B 中并通有电流 I ,求弧线的曲率半径 R . 若带电量为 q 、质量为 m 的粒子从 a 点入射磁场,其动量如何才能使它沿弧线运动?

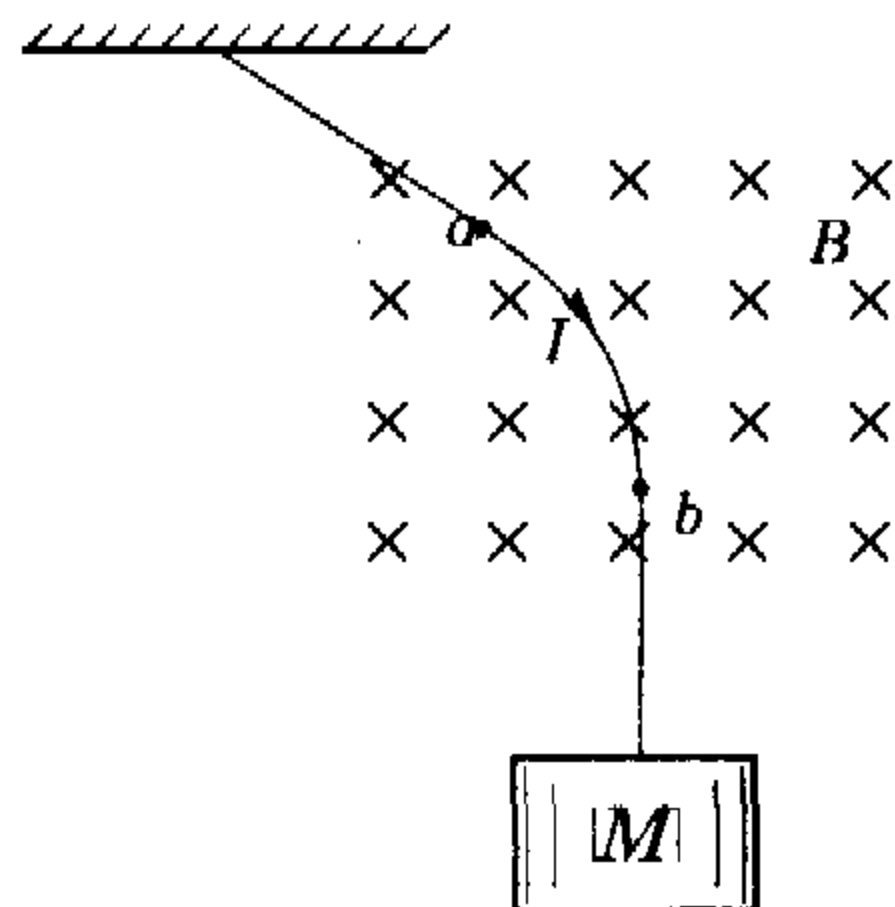


图 21-30

7. 带电粒子进入介质中,受到的阻力跟它的速度成正比.在粒子完全停止前,所通过的位移为 $s_1 = 10 \text{ cm}$,如果在介质中有一个跟粒子速度方向垂直的磁场,当粒子以跟原来相同的初速度进入这一带有磁场的介质时,它则停止在距入射点的距离为 $s_2 = 6 \text{ cm}$ 的位置上,如果磁场强度减少 $1/2$,那么该粒子应停留在距入射点多远(s_3)的位置上?

8. 如图 21-31 所示, S 为一离子源,它能机会均等地向各个方向持续发射大量质量为 m 、电量为 q 、速率为 v 的正离子,在离子源的右侧有一半半径为 R 的圆屏,离子源在其轴线 OO'



上. 在离子源与圆屏之间的空间有范围足够大的方向水平向右并垂直于圆屏的匀强磁场, 磁感应强度为 B , 在发射的离子中有的离子不管 SO 距离如何改变, 总能打在圆屏上. 求这样的离子数目与总发射离子数目之比.

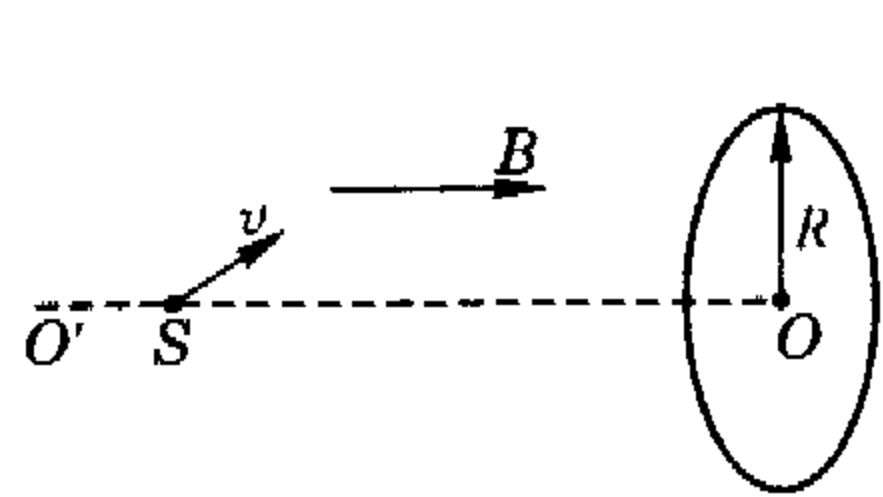


图 21-31

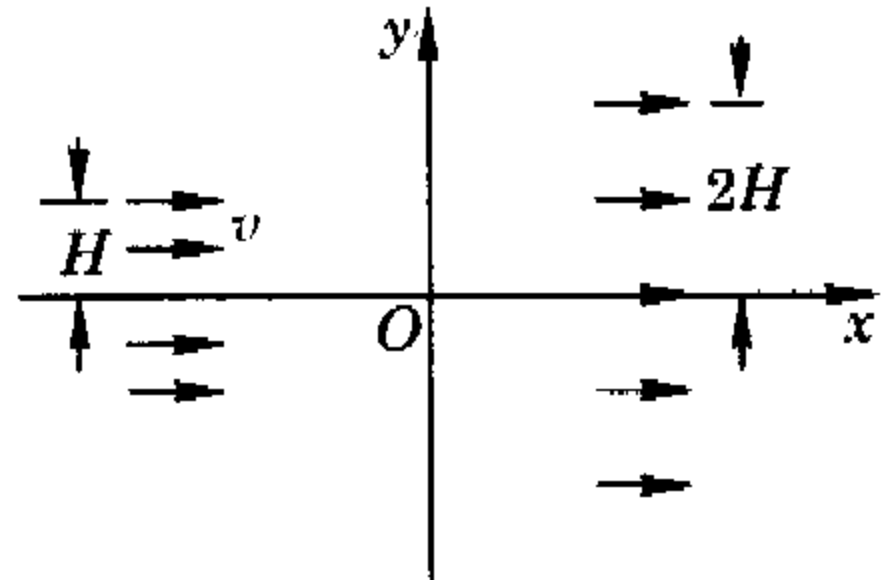


图 21-32

9. 如图 21-32 所示, 在 xy 平面上有一束稀疏的电子(其间的相互作用可忽略), 在 $-H < y < H$ 范围内, 从 x 负半轴的远处以相同的速率 v 沿着 x 轴方向平行地向 y 轴射来. 试设计一磁场区域, 使得(1)所有电子都能在磁场力的作用下通过坐标原点 O ; (2)这束电子最后扩展到 $-2H < y < 2H$ 范围内继续沿着 x 轴方向向 x 正半轴的远处平行地以相同速率射去.

10. 如图 21-33 所示, 一窄束单能氩离子通过一扇形匀强磁场, 此束射线的轴在进、出磁场时离子束的轴线都与场的边界垂直. 求质量数 $m_1 = 36$ 和 $m_2 = 40$ 的氩同位素的发散角. 已知 $\varphi = 60^\circ$.

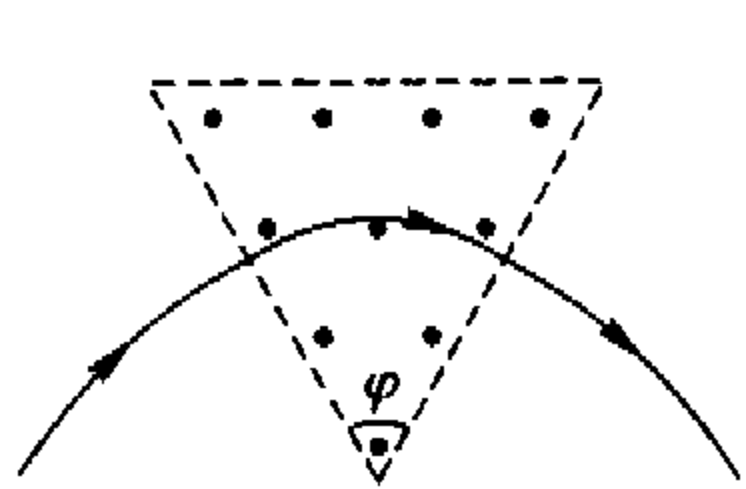


图 21-33

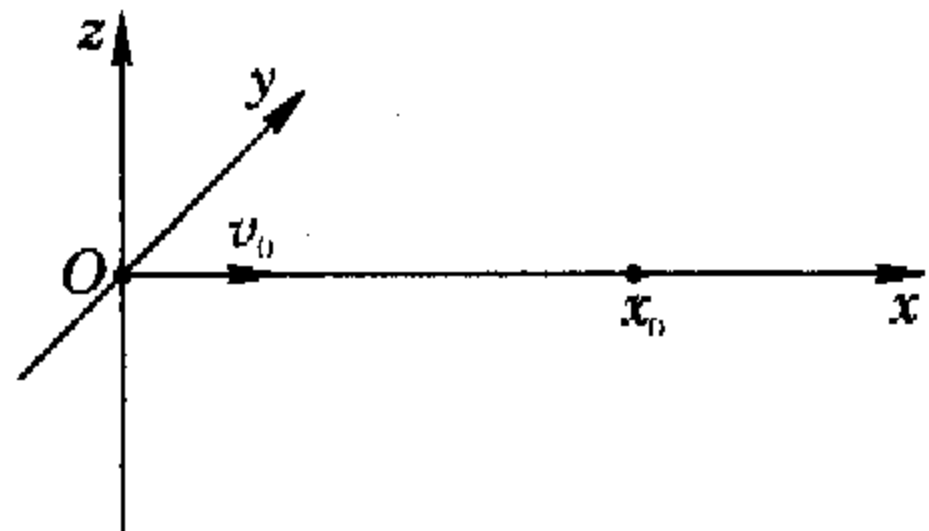


图 21-34

11. 如图 21-34 所示的空间直角坐标系, z 轴为竖直方向, 空间存在着匀强磁场, 磁感应强度 B 的方向沿 y 轴正方向, 一个质量为 m 、带电量为 q 的带电微粒从原点 O 处以速度 v_0 射出, 初速度方向为 x 轴正方向, 试确定各物理量间满足什么条件, 就能保证 v_0 的大小不论取何值, 带电微粒运动过程中都能经过 x 轴上的 x_0 点.

12. 质量为 m 、电量为 $q (q > 0)$ 的小球, 在离地面高度为 h 处从静止开始下落, 为使小球始终不会和地面相碰, 可设想在它开始下落时就加上一个足够强的水平匀强磁场, 试求该磁场磁感应强度的最小可取值 B_0 , 并求出当磁场取 B_0 时小球的运动轨道.

13. 如图 21-35 所示的磁动力泵是高 $h = 0.1$ m 的矩形槽, 槽相对的两壁是导电的, 距离为 $l = 0.05$ m. 两导电壁加上电势差 $U = 1.4$ V, 垂直于两非导电壁加上磁感应强度 $B = 0.1$ T 的均匀磁场. 槽的下部与水银面接触, 上部与竖直的非导电管相连. 试问水银上升多高? (水银的电阻率 $\gamma = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$, 水银密度 $\rho = 14 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$)

14. 一个初始时未充电的电容器的两个极板之间的距离为 d . 有一个磁感应强度为 B 的磁场, 平行于电容器的极板, 如图 21-36 所示. 当一电中性的相对介电常数为 ϵ_r 的液体以速度 v 流过两个极板之间时, 连接在电容器两个极板间的电压表的读数是多少?

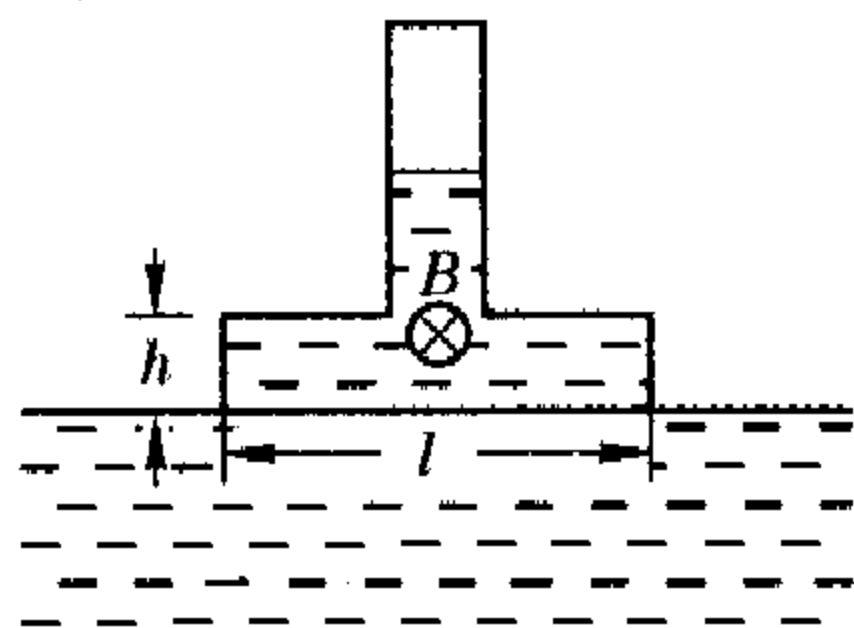


图 21-35

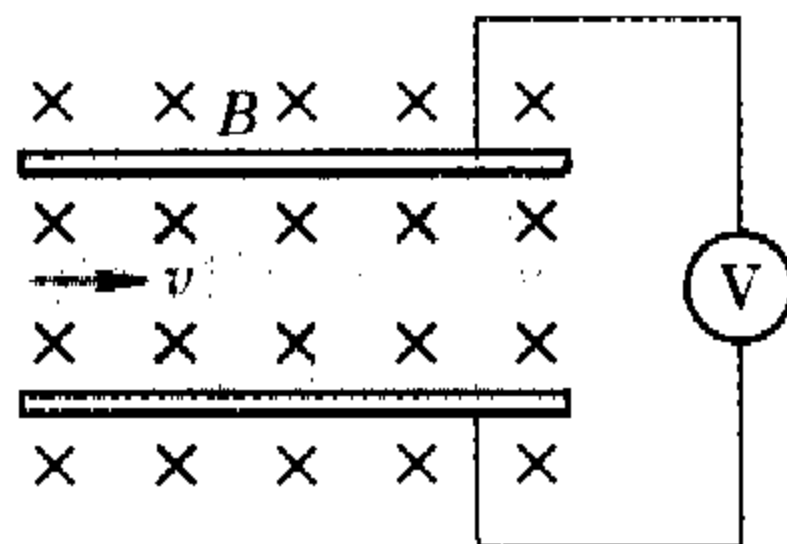


图 21-36

15. 如图 21-37 所示, 长为 L 、截面半径为 R 的圆柱体内, 沿轴向流过均匀电流 I , 忽略边缘效应, 已知 $L \gg R$. 一束质量为 m 、电量为 $+q$ 的粒子以速度 v 平行于主轴从圆柱体左端入射, 不考虑粒子间的相互作用及与圆柱体内部微粒的作用, 且忽略圆柱体内电场; (1)忽略粒子在圆柱体内的径向移动距离及粒子轴向速度的变化, 试证明通过圆柱体后粒子将聚焦于一点; (2)考虑粒子在圆柱体内的径向运动而不计粒子轴向速度的变化, 求粒子束聚焦在圆柱右端所需满足的条件.



图 21-37

16. 有一正点电荷 Q 和细长磁棒的磁极处于同一位置, 在它们所生成的电磁场中, 有一质量为 m 、电量为 q 的质点, 沿圆轨道运动, 圆轨道直径对产生电磁场的电荷及磁极所在点张角为 2θ , 已知细长磁铁的一个磁极产生的磁场 $B = \frac{a}{r^3} \cdot r$, a 为常量, 求质点运动的轨道半径.

17. 如图 21-38 所示, 一个非常短的磁铁 A , 质量为 m , 被一根长 $l = 1$ m 的线水平地悬起. 移动另一个非常短的磁铁 B 慢慢地靠近 A , 保持两磁铁的磁极相互之间始终在同一水平线上. 当两个磁极间的距离为 $d = 4$ cm 时, 磁铁 A 与最初位置的水平距离为 $s = 1$ cm, 此后磁铁 A 可自发地慢慢向 B 移动. (1)磁铁间的相互作用力与其间距离的关系为 $F_m(x) = \pm \frac{k}{x^n}$, 正负表示两磁铁磁极间为引力或斥力. 试确定 n 的值; (2)现将两磁铁放在开口向上的玻璃管中, B 在上方, 并使两个磁铁相互排斥, 磁铁 A 在玻璃管中有掉转方向的趋势, 求两个磁铁处于平衡时所能分开的距离.

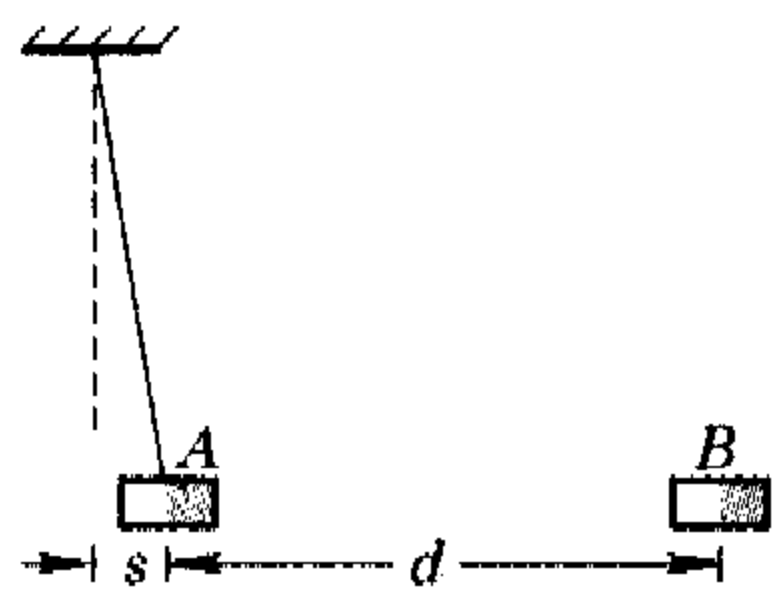


图 21-38

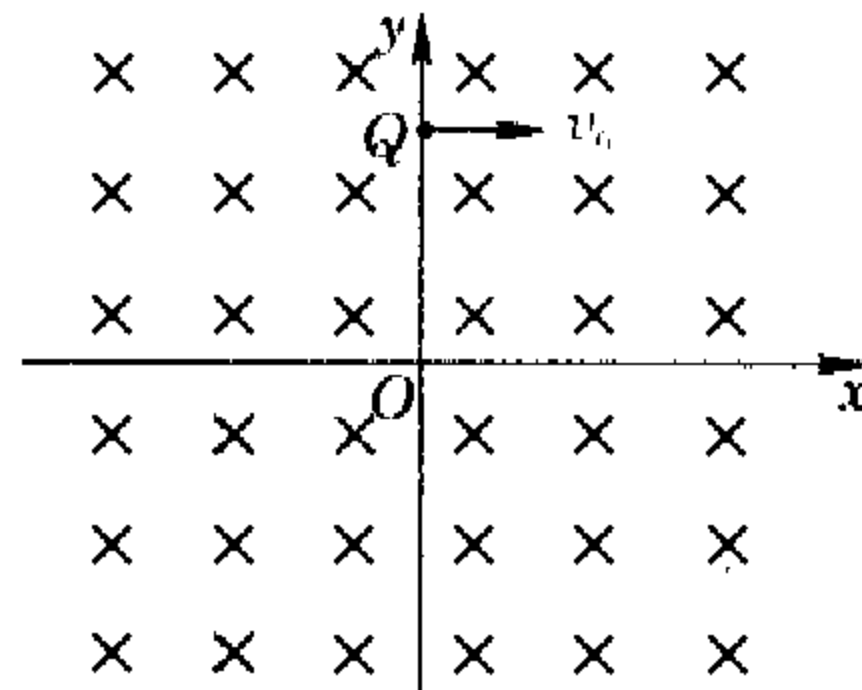


图 21-39



18. 如图 21-39 所示的无限大匀强磁场磁感应强度为 B , 一个质量为 m 、电量为 $-q$ 的粒子以初速度 v_0 从 y 轴上的 Q 点开始运动, 运动中受到大小恒定的阻力 F , 已知出发点坐标为 $(0, \frac{mv_0}{qB})$. (1) 试确定粒子运动的轨迹方程; (2) 若 $F = \frac{qv_0 B}{\pi}$, 求粒子的最终位置.

19. 在一个真空箱内, 电流 I 流过一根电阻很小的长直导线, 初速度为 v_0 的电子垂直于导线从距导线的径向距离为 r_0 的一点开始运动. 已知电子不能比 $r_0/2$ 更靠近导线, 试确定电子的初速度 v_0 . 不考虑地磁场的影响.

20. 在外磁场中的超导体, 平衡后超导体内部的磁感应强度处处为零, 超导体表面外侧的磁感应强度与表面平行. 如图 21-40 所示的 $Oxyz$ 直角坐标中, xy 平面是水平面, 其中有一超导平板, z 轴竖直向上, 超导平板在 $z=0$ 处, 在 $z=h$ 处有一质量为 m 、半径为 r 、环心在 z 轴上、环平面为水平面的匀质金属圆环, 且有 $r < h$. 在圆环内通以稳恒电流, 刚好使圆环漂浮在 $z=h$ 处. (1) 试求圆环中的电流强度; (2) 若使圆环保持水平, 从平衡位置稍稍偏上或偏下, 则圆环将上、下振动, 试求振动周期 T_1 ; (3) 当圆环处在平衡位置时, 其中与 x 轴平行的直径标为 P_1P_2 , 与 y 轴平行的直径标为 Q_1Q_2 . 若保持 P_1P_2 不动, 使圆环绕 P_1P_2 稍有倾斜, 即使 Q_1Q_2 与 y 轴有很小的夹角, 则圆环将以 P_1P_2 为轴摆动, 试求周期 T_2 .

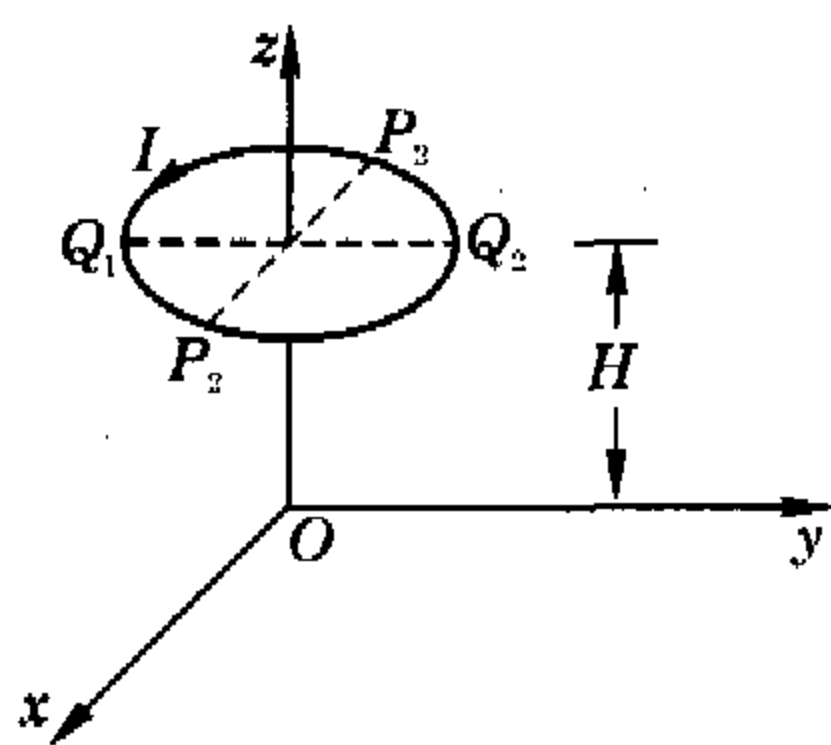
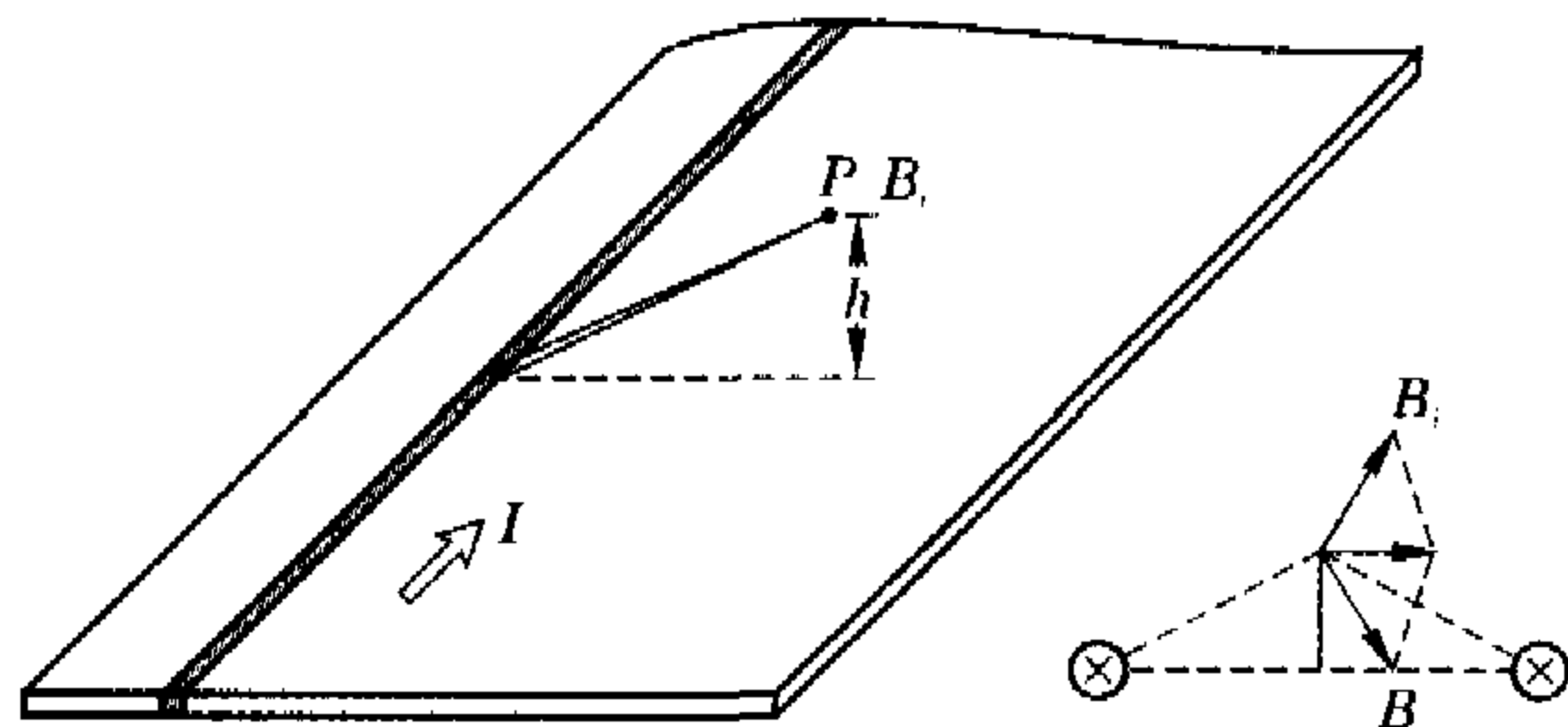


图 21-40

为 $a_i = \frac{h}{\cos i\Delta\alpha}$, 该元线电流在 P 点引起的磁感应强度大小为

$$B_i = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_i}{a_i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\frac{I}{b} \cdot h[\tan i\Delta\alpha - \tan(i-1)\Delta\alpha]}{\frac{h}{\cos i\Delta\alpha}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\cos i\Delta\alpha};$$



图答 21-2

注意到对称性, B_z 的竖直分量总和为零, 全部电流在 P 点的磁感应强度即为 $B = \sum B_x$, 同时由于 $h=b$, 矢径与元线电流的角度在 $0 \sim \pi$ 之间, 则 $B = 2 \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot \frac{\Delta\alpha \cdot \cos i\Delta\alpha}{\cos i\Delta\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2b}$.

3. 电荷随盘运动引起磁场. 盘上电流为 $I = \frac{q\omega}{2\pi/\omega} = \frac{q\omega}{2\pi}$, 密度 $j = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{q\omega}{2\pi^2 R^2}$, 电流线为轴心 O 的一系列同心圆, O 处磁感应强度为各环形电流在 O 点产生的磁场合成

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 I_i}{2R_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{q\omega}{2\pi^2 R^2} 2\pi \cdot i \frac{R}{n} \cdot \frac{R}{n}}{i \frac{R}{n}} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

4. 如图答 21-3 所示, 在椭圆导线上取一电流元 $I\Delta l$, 它对

焦点张开的角度为 $\Delta\theta = \frac{\pi}{n}$, 其在焦点处引起的元磁感应强度为

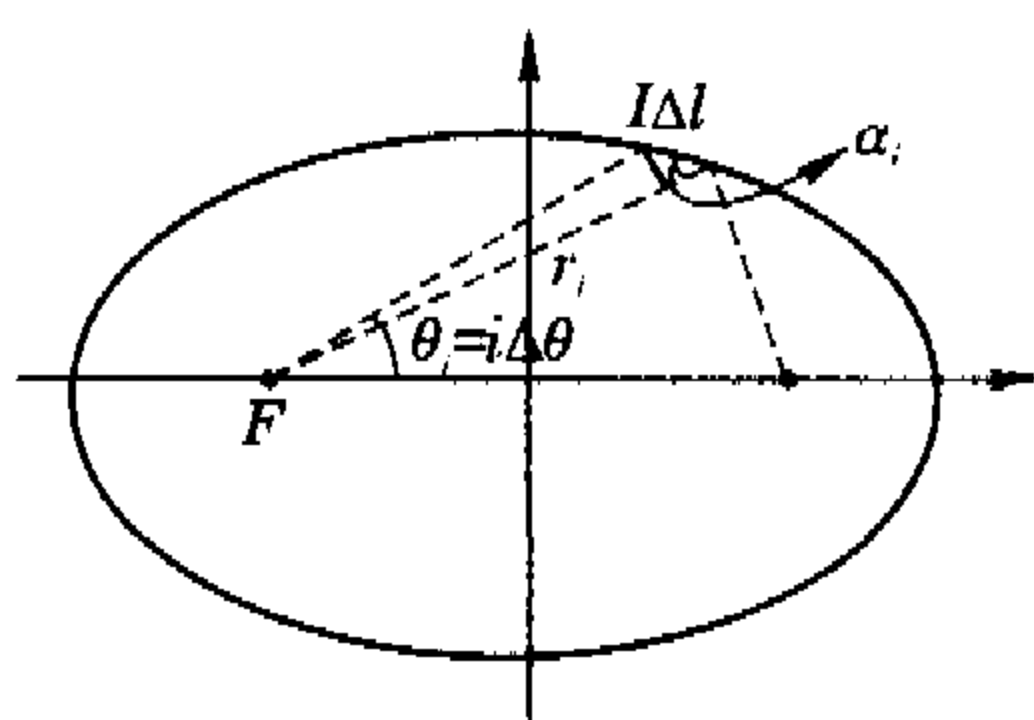
$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta l \cdot \sin \alpha_i}{r_i^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\Delta l \cdot \frac{r_i \sin \Delta\theta}{\Delta l}}{r_i^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\Delta\theta}{r_i}$$

又由 $r_i^2 + (2C)^2 - 2 \cdot r_i \cdot 2C \cdot \cos i\Delta\theta = (2A - r_i)^2$,

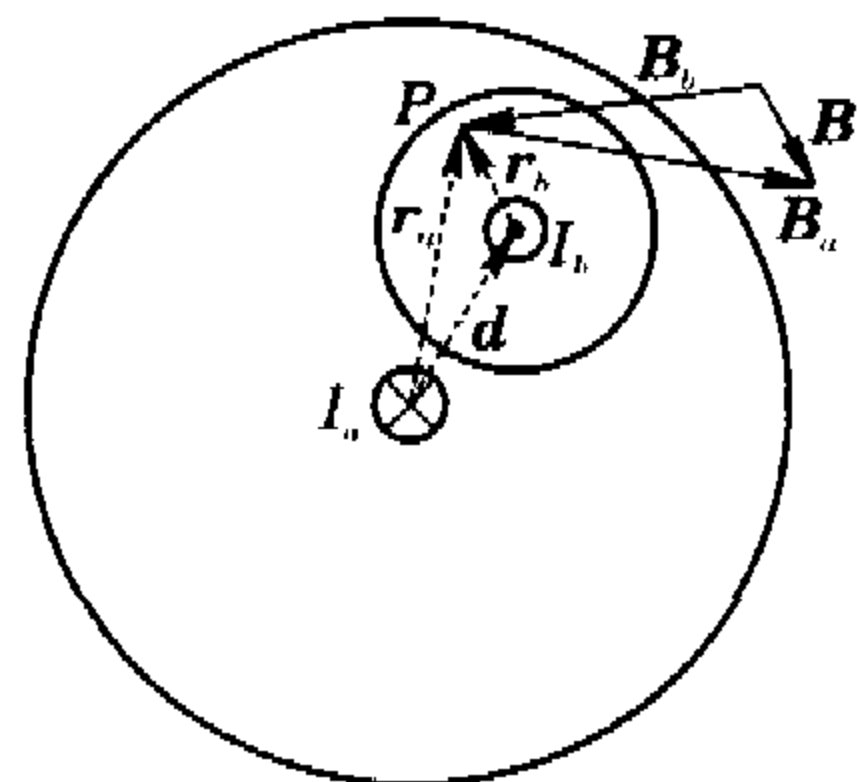
$$\text{得 } r_i = \frac{A^2 - C^2}{A - C \cos i\Delta\theta}$$

代入 B_i 表达式中有 $B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{(A - \sqrt{A^2 - B^2} \cos i\Delta\theta) \cdot \Delta\theta}{B^2}$,

$$\text{则 } B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi B^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (A - \sqrt{A^2 - B^2} \cos i \frac{\pi}{n}) \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\mu_0 IA}{4B^2}$$



图答 21-3

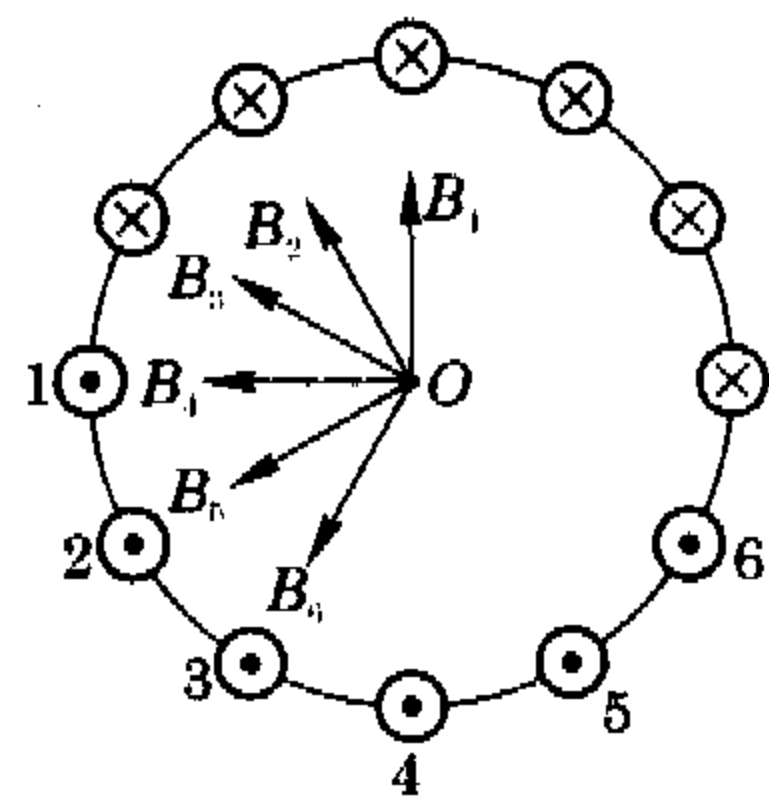


图答 21-4

参考答案

1. 从 A 处俯视木球“赤道”平面, 六个线圈编号如图答 21-1 所示, 它们在 O 点产生的磁感应强度均沿“赤道”平面, 方向标示在图上, 每个线圈在 O 点的磁

感应强度大小均为 $B_i = \frac{\mu_0 I}{2R}$, 由对称性, B_1 与 B_5 合成等于 B_3 ; B_2 与 B_6 合成等于 B_4 , 则 O 点磁感应强度 $B_0 = 4B_i \cos 15^\circ = 4 \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{R}$, 方向与线圈 1 平面向



图答 21-1

后成 15° 角.

2. 已知距离无限长直线电流 a 处的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{a}$, 对于宽 b 的无限长薄铜片, 可视作由 $n(n \rightarrow \infty)$ 根无限长直线电流共同引起. 即有 $B = \sum B_i$. 如图答 21-2 所示, 取第 i 根元线电流, P 点对其宽度张开的角度为 $\Delta\alpha = \frac{\pi}{2n}$, 其上

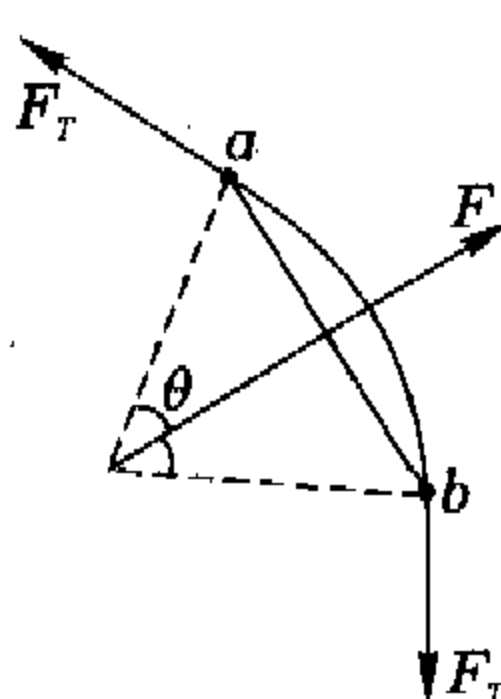
电流为 $I_i = \frac{I}{b} \cdot h[\tan i\Delta\alpha - \tan(i-1)\Delta\alpha]$, P 点对其矢径大小



竞赛辅导

5. 有空洞的圆柱体电流密度 $j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$, 设挖去部分是由电流密度为 j 与 $-j$ 两沿轴方向电流形成, 两反向电流大小 $I_b = j \cdot \pi b^2$, 于是, 空心部分任一点 P 的磁感应强度是完整长直圆柱电流 $I_a = \frac{Ia^2}{a^2 - b^2}$ 在该点引起的 $B_a = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)} \cdot r_a$ 及反向长直圆柱电流在该点引起的 $B_b = -\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)} \cdot r_b$ 的合成, r_a, r_b 分别是 P 到整圆柱轴 O 及到空心圆柱轴 O' 的矢径, 如图答 21-4 所示, 由图知 $B = B_a + B_b = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)} (r_a - r_b)$, 由图答 21-4 所示中矢量关系, 可得空心部分磁感应强度大小 $B = \frac{\mu_0 Id}{2\pi(a^2 - b^2)}$, 方向与 OO' 连线垂直, 为一均匀磁场区域.

6. 设圆弧段所对圆心角为 2θ , 其受力情况如图答 21-5 所示, 其中安培力 $F = BI \cdot 2R \sin \theta$, 两端张力的合力 $F_T = 2Mg \cdot \sin \theta$, 此二力平衡 $BI \cdot 2R \sin \theta = 2Mg \cdot \sin \theta$, 故 $R = Mg / (BI)$; 带电粒子要沿弧 ab 运动, 须满足 $qvB = mv^2 / R$, 即 $p = qMg / I$.



图答 21-5

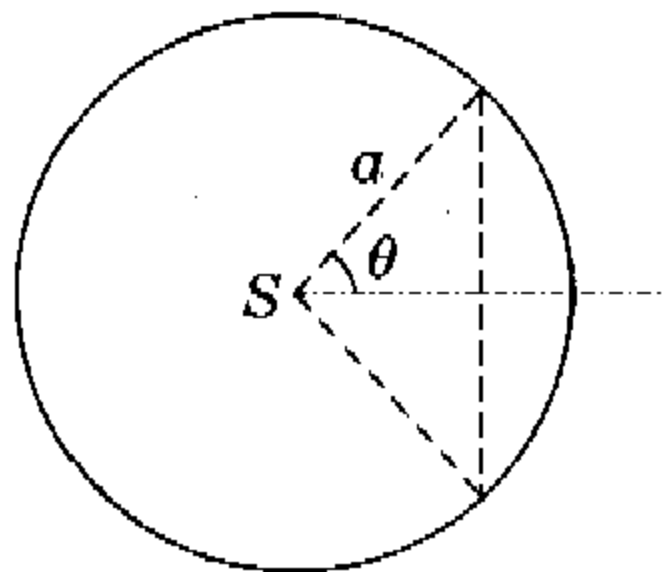
7. 设阻力 $F_f = kv$, 第一次位移为 $s_1 = 10 \text{ cm}$, 由动量定理有 $\sum kv_i \cdot \Delta t = mv_0, k \cdot s_1 = mv_0, \text{ ①}$
 v_0 为所设粒子进入时的速度; 加一磁感应强度为 B 的匀强磁场, 粒子受阻力与洛伦兹力共同作用, 两力方向始终互相垂直, 轨迹为曲线, 在某一元过程中, 有 $\sqrt{(kv_i)^2 + (qv_i B)^2} \cdot \Delta t = m(v_i - v_{i-1})$, 即 $\sqrt{k^2 + (qB)^2} \cdot s_i = m(v_i - v_{i-1})$, 全过程中有 $\sqrt{k^2 + (qB)^2} (s_1 + s_2 + L) = mv_0, \sqrt{k^2 + (qB)^2} s_2 = mv_0, \text{ ②}$
同理, 当磁感应强度为 $\frac{B}{2}$ 时, 有

$$\sqrt{k^2 + \left(q \frac{B}{2}\right)^2} s_3 = mv_0, \text{ ③}$$

由①式得 $k = \frac{mv_0}{s_1}$, 代入②式得 $qB = \frac{2}{15} mv_0$, 由③式得

$$s_3 = \frac{mv_0}{\sqrt{k^2 + \frac{q^2 B^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{225}}} m \approx 9.2 \text{ m}.$$

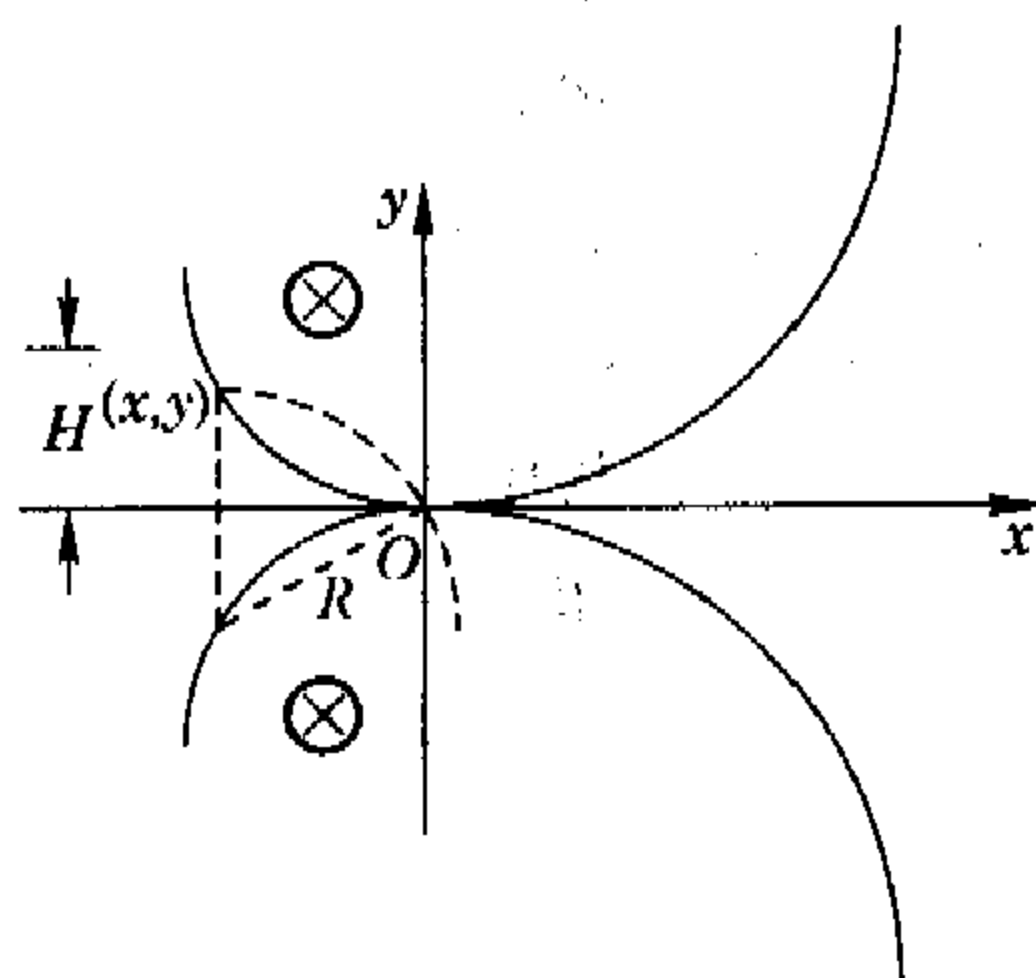
8. 离子的运动是一系列等螺距的螺旋运动, 若离子的初速度 v 与 SO 成 θ 角, 则其轨迹的螺距为 $h = \frac{2\pi m}{qB} \cdot v \cos \theta$, 螺旋截面圆的半径为 $r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$, S 点是该圆圆周上的点, 所有这些圆的包络线也是圆, 包络圆半径为 $2r$, 在 $2r \leq R$ 且 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 的条件下, 离



图答 21-6

子向右运动且轨迹通过圆屏, 即 $\frac{2mv \sin \theta}{qB} \leq R, \sin \theta \leq \frac{qBR}{2mv}, \theta \leq \arcsin \frac{qBR}{2mv}$, 认为发射源 S 周围密度均匀, 取一个如图答 21-6 所示半径为 a 的球面, 这样的离子从面积为 $2\pi a^2 (1 - \cos \arcsin \frac{qBR}{2mv})$ 球面上通过, 故与总发射离子数之比为 $k = \frac{2\pi a^2 (1 - \cos \arcsin \frac{qBR}{2mv})}{4\pi a^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - (\frac{qBR}{2mv})^2}}{2}$.

9. (1) 相同速度的电子在同一磁场中有相同的轨道半径, 因为要过 O 点, 电子的初速度沿 x 轴正方向, 故设计电子沿一段半径为 $R = \frac{mv}{qB}$ 的过 O 的圆弧运动, 圆弧的起点曲率半径沿 y 方向, 所有圆弧轨道的起点的集合为磁场边界, 磁场方向垂直于纸面向里, 其边界方程求解如图答 21-7, 对某一从 (x, y)

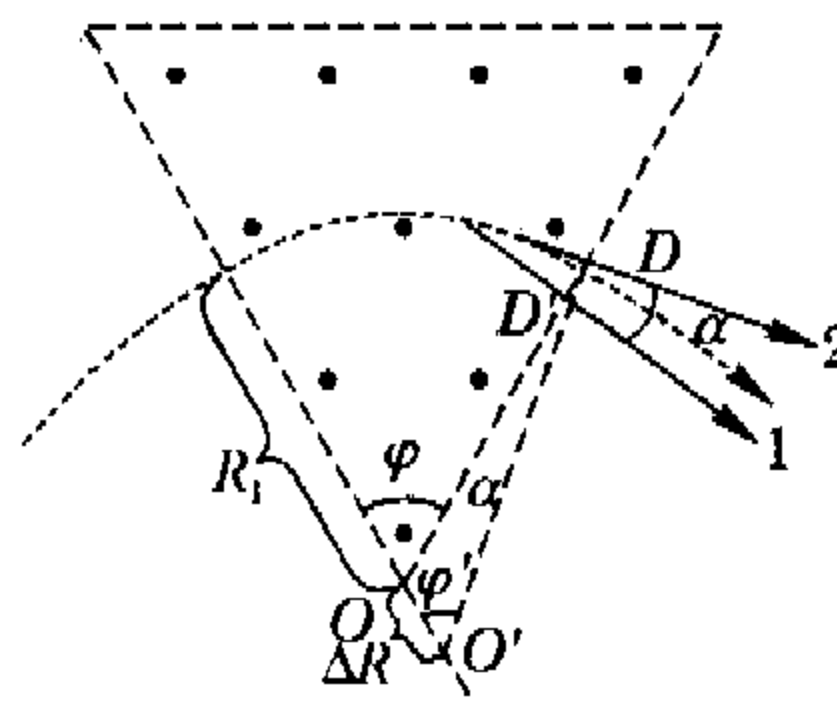


图答 21-7

进入磁场的电子, 必有 $\begin{cases} (R-y)^2 + x^2 = R^2, (y > 0) \\ (R+y)^2 + x^2 = R^2, (y < 0) \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2Ry = 0 (y > 0), \\ x^2 + y^2 + 2Ry = 0 (y < 0), \end{cases} x \in [-H, 0], y \in [-H, H]$, 这是圆心为 $(0, R)$ 和 $(0, -R)$ 、半径为 R 的两段圆弧, 如图答 21-7 中 $x < 0$ 区域实线为一种边界, 磁场在其与 y 轴之间, $B \leq \frac{mv}{eH}$;

(2) 同样方法, 在 $x > 0$ 处, $B' \leq \frac{mv}{2eH}$, $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4Ry = 0 (y > 0), \\ x^2 + y^2 + 4Ry = 0 (y < 0), \end{cases} x \in [0, 2H], y \in [-2H, 2H]$ 是圆心为 $(0, 2R)$ 和 $(0, -2R)$ 、半径为 $2R$ 的两段圆弧, 如图答 21-7 中 $x > 0$ 区域实线为一种边界, 磁场在其与 y 轴之间.

10. 由 $qvB = \frac{mv^2}{R} = \frac{2E_0}{R}$, 两种离子的轨道半径 $R_1 = \frac{\sqrt{2m_1 E_0}}{qB}, R_2 = \frac{\sqrt{2m_2 E_0}}{qB}$. 如图答 21-8 所示几何关系, 在三角形 $O'D$ 中有 $\frac{R_1}{\sin \varphi} = \frac{\Delta R}{\sin \alpha}$, 注意到 α 很小, $\varphi \approx \varphi'$, 则有 $\alpha \approx \sin \alpha = \frac{\Delta R \sin \varphi}{R_1} = \frac{\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1}} \sin \varphi \approx 0.04$, 故两同位素的发散角约 $2^\circ 41'$.



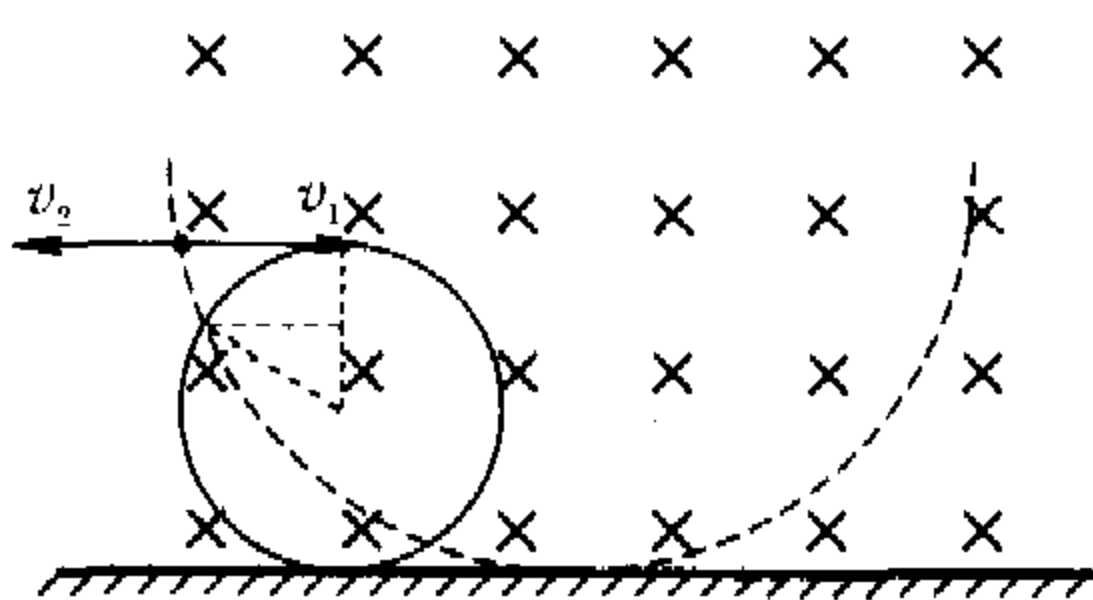
图答 21-8

11. 带电粒子在重力场与磁场的复合场中运动, 将 v_0 分解为 $v_1 = \frac{mg}{qB}$ (正 x 方向) 和 $v_2 = v_0 -$



$\frac{mg}{qB}$ 两个分量, 粒子在以 v_1 做匀速直线运动的同时在 xz 平面做匀速圆周运动, 周期为 $T = \frac{2\pi m}{qB}$, 为了能经过 x_0 处, 应使在正 x 方向完成 x_0 距离时, 圆运动完成整周期而回到 x 轴, 即各物理量满足 $\frac{2n\pi m}{qB} = \frac{x_0}{v_1} = \frac{x_0 qB}{mg}$, $x_0 = \frac{2n\pi m^2 g}{q^2 B^2}$ (n 为正整数), 不论初速度如何, 均能经过 x_0 处.

12. 如图答 21-9 所示, 若小球滚轮线轨道恰与地面相切, 就不会和地面相碰, 将小球初速度视为等值而反向的两个大小均为 $v_1 = v_2 = \frac{mg}{qB}$ 的水平速度, 且使圆运动半径 $\frac{mv_2}{qB} \leq \frac{h}{2}$, 故满足要求的磁场磁感应强度最



图答 21-9

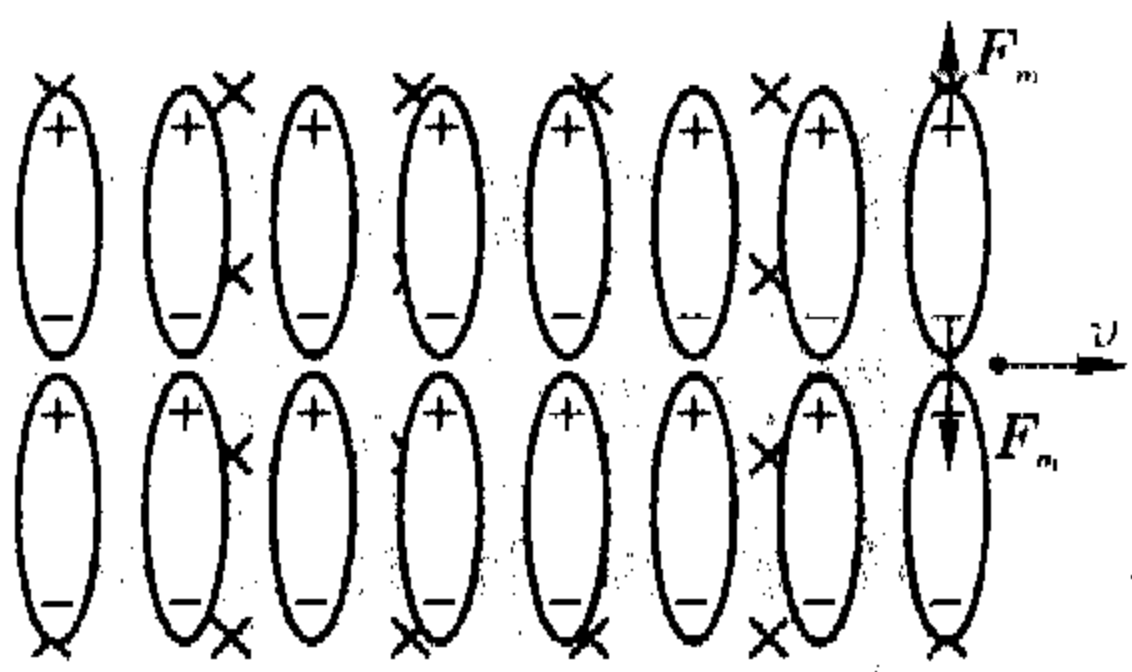
小值 $B_0 = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2g}{h}}$, 此时轨道的时间参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{gh}{2}} \cdot t - \frac{h}{2} \sin \sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot t, \\ y = \frac{h}{2} \left(1 + \cos \sqrt{\frac{2g}{h}} \cdot t \right). \end{cases}$$

13. 本题涉及磁场对电流的安培力, 槽下部与水银接触面达到稳定时, 其电流所受磁场力(竖直向上)与水银柱压力平衡 $\rho g H \cdot al = Bl \cdot \frac{U}{\gamma \cdot \frac{l}{ah}}$, 式中 a 为所设前后非导电壁间距离, H

为待求水银高度, 由此式得 $H = \frac{BUh}{\gamma l \rho g} = 2 \text{ m}$.

14. 电中性的液体以速度 v 通过两板之间, 若其为 $\epsilon_r = 1$ 的介质, 则两板之间不会有电势差, 若为“容易”极化的介质——导体, 则产生霍尔电势差 $U = Bvd$, 板间有一电场 $E_0 = Bv$, 现为介电常数为 $\epsilon_r > 1$ 的

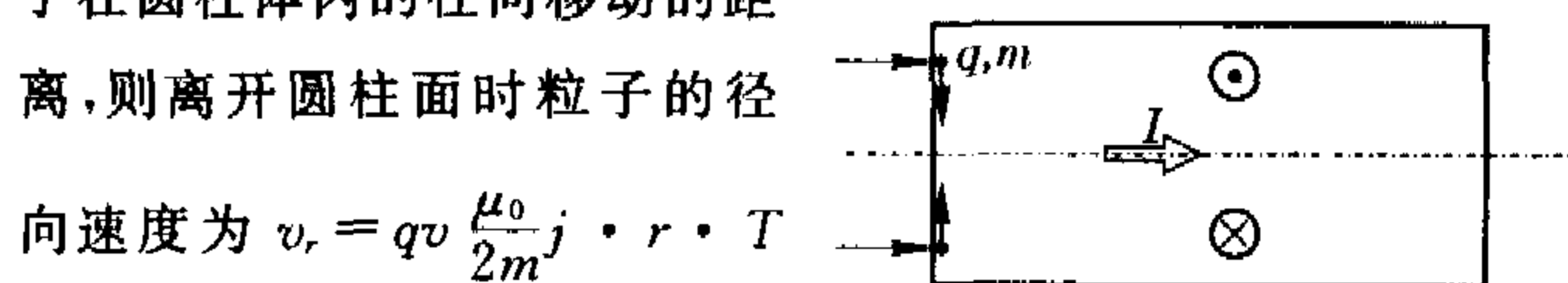


图答 21-10

运动的中性分子, 在磁场洛伦兹力作用下, 会变成极化分子, 沿垂直于磁场及流动速度 v 方向排列, 如图答 21-10 所示, 极化电荷建立了电场 E' , 在电容器两极板上引起电压 $U' = E'd$, 与自由电荷引起的 E_0 相比, $E' = E_0 - \frac{E_0}{\epsilon_r} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Bv$, 故 $U' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Bvd$.

15. (1) 考察轴平面如图答 21-11 所示, 圆柱体内电流密度 $j = \frac{I}{\pi R^2}$, 距轴 r 处磁感应强度为 $B_r = \frac{\mu_0}{2} j \cdot r$, 从距轴 r 处进入

的带正电粒子沿径向受到洛伦兹力 $F_m = qvB_r$, 方向如图答 21-11 中所示, 粒子在圆柱内运动的时间为 $T = \frac{L}{v}$, 因忽略粒子在圆柱体内的径向移动的距离, 则离开圆柱面时粒子的径向速度为 $v_r = qv \frac{\mu_0}{2m} j \cdot r \cdot T$



图答 21-11

$= \frac{\mu_0 q I L}{2m\pi R^2} \cdot r$, 离开圆柱右端面, 粒子以 v_r 向轴线运动, 时间 $t = \frac{r}{v_r} = \frac{2m\pi R^2}{\mu_0 q I L}$, 与 r 无关, 故所有粒子同时到达轴线上距圆柱右端面 $s = \frac{2m\pi v R^2}{\mu_0 q I L}$; (2) 考虑粒子在圆柱体内的径向运动而不计粒子轴向速度的变化, 带正电粒子沿径向受到洛伦兹力 $F_m = qv \frac{\mu_0}{2} j \cdot r$ 为线性变化力, 故沿径向粒子做简谐运动, 所有进入圆柱的粒子振动的周期相同, 从距轴 r 处进入的粒子到达轴心时间

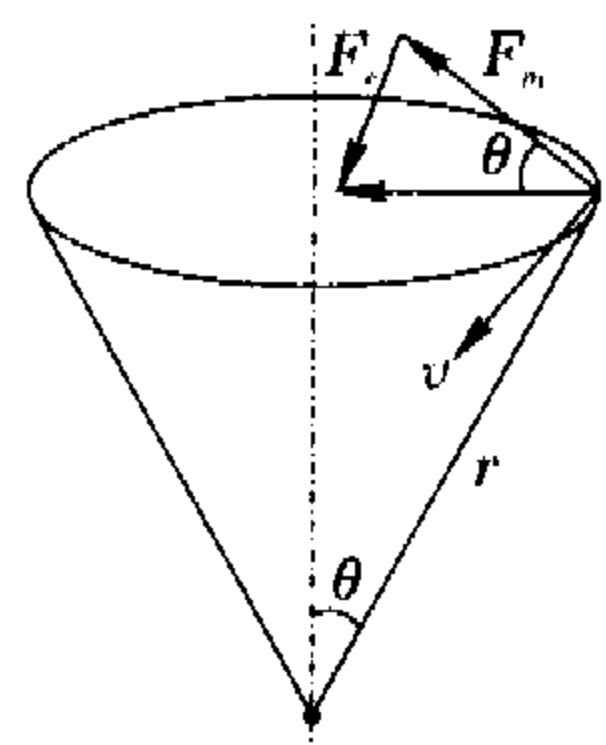
$$t = (2n-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m}{qv\mu_0 j}} \quad (n=1, 2L),$$

为了会聚在右端面轴心, 应有

$$(2n-1) \frac{\pi R}{2} \sqrt{\frac{2m\pi}{qv\mu_0 I}} = \frac{L}{v} \quad (n=1, 2L).$$

16. 设质点运动速度为 v , 其所受库仑力与磁场力的合力提供向心力, 如图答 21-12 所示, $F_c =$

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}, F_m = qvB = \frac{qva}{r^2}, \text{ 且 } \tan \theta = \frac{F_c}{F_m}, \text{ 故 } v = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \cot \theta, \text{ 合力满足 } \frac{F_c}{\sin \theta} = m \frac{v^2}{R}, \text{ 而 } r = \frac{R}{\sin \theta}, \text{ 故有 } R = \frac{4\pi\epsilon_0 qa^2}{mQ} \tan^2 \theta \sin \theta.$$



图答 21-12

17. (1) 把两个相互作用(吸引)的磁极视为“点磁荷”, 对 A 而言, 处于准静态平

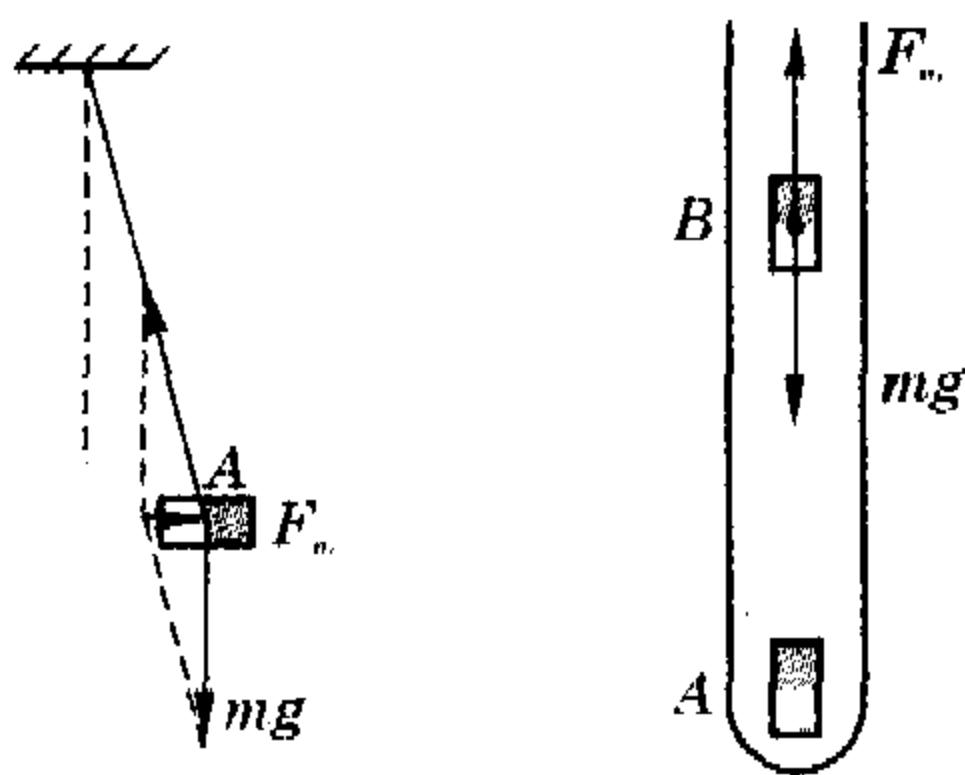
衡中, 受力分析如图答 21-13 所示, 由合力为零有 $mg \frac{d+s-x}{l}$

$$= \frac{k}{x^n} \text{ 当 } x=d \text{ 时, } mg \frac{s}{l} = \frac{k}{d^n}, \text{ 根据题给条件: 此后磁铁 A 可自发地慢慢向 B 移动, 即 A 处于随机平衡, 则当磁铁 A 向右移一小位移 } \Delta x \text{ 时仍有 } mg \frac{s+\Delta x}{l} = \frac{k}{(d-\Delta x)^n}, \text{ 对该式做小量运算}$$

$$mg \frac{s+\Delta x}{l} = \frac{k}{(d-\Delta x)^n} = \frac{k}{d^n \left(1 - \frac{\Delta x}{d}\right)^n} \approx \frac{k}{d^n} \left(1 + n \frac{\Delta x}{d}\right) = \frac{k}{d^n} + n \frac{k \Delta x}{d^{n+1}}, \text{ 将 } mg \frac{s}{l} = \frac{k}{d^n} \text{ 代入得 } \frac{mg}{l} = \frac{nk}{d^{n+1}} = \frac{n}{d} \cdot \frac{mgs}{l}, n = \frac{d}{s} = 4, \text{ 同时可得 } k = \frac{sd^4 mg}{l}, \text{ 即磁铁间的相互作用力与距离的关系为 } F_m(x) = \pm \frac{sd^4 mg}{lx^4};$$

$$\text{(2) 如图答 21-14 所示, 此时 B 处于悬浮平衡状态, 有 } mg$$

$= \frac{sd^4 mg}{lx^4}$, 可得 $x = \sqrt{\frac{s}{l}} \cdot d \approx 1.3 \text{ cm}$.



图答 21-13

图答 21-14

18. (1) 粒子在运动切向受阻力 F , 法向受洛伦兹力, 则

$a_t = \frac{F}{m}, a_n = \frac{qB}{m} v_t = \frac{qB}{m} (v_0 - \frac{F}{m} t)$.

设曲率半径为 ρ_t , 由 $\frac{qB}{m} (v_0 - \frac{F}{m} t) = \frac{v_t^2}{\rho_t}$ 得 $\rho_t = \frac{mv_0 - Ft}{qB}, \omega$

$= \frac{v_t}{\rho_t} = \frac{qB}{m}$, 可知粒子运动中速率均匀减小、曲率半径均匀减小, 角速度不变; 先确定曲率中心 D 的轨迹(渐屈线): 如图答 21-15 所示, $t=0$

时, $\rho_0 = \frac{mv_0}{qB}$, 取元过程 Δt 时间内, 曲率

半径变化 $\Delta \rho = \frac{F}{qB} \Delta t$, 曲率中心 D 速度 v

$= \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{F}{qB}$, 即沿一半径为 $R = \frac{v}{\omega} = \frac{mF}{q^2 B^2}$

的圆周匀速率移动, 设 t 时刻该粒子坐标为 (x, y) , 则该粒子轨迹的参数方程

$$\begin{cases} x = \rho \sin \omega t + R(1 - \cos \omega t), \\ y = \rho \cos \omega t + R \sin \omega t, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\begin{cases} x = \frac{mv_0 - Ft}{qB} \sin \frac{qB}{m} t + \frac{mF}{q^2 B^2} (1 - \cos \frac{qB}{m} t), \\ y = \frac{mv_0 - Ft}{qB} \cos \frac{qB}{m} t + \frac{mF}{q^2 B^2} \sin \frac{qB}{m} t; \end{cases}$$

(2) 由动能定理, 有 $Fs = \frac{1}{2} mv_0^2$, 可得粒子运动路径 $s =$

$\frac{mv_0^2}{2F} = \frac{\pi mv_0}{2Bq}$, 运动时间 $t = \frac{2s}{v_0} = \frac{\pi m}{Bq}$, 代入轨迹方程, 得

$$\begin{cases} x = \frac{2mv_0}{\pi qB}, \text{ 即粒子停止在 } x \text{ 轴上距出发点 } \frac{2mv_0}{\pi qB} \text{ 处.} \\ y = 0. \end{cases}$$

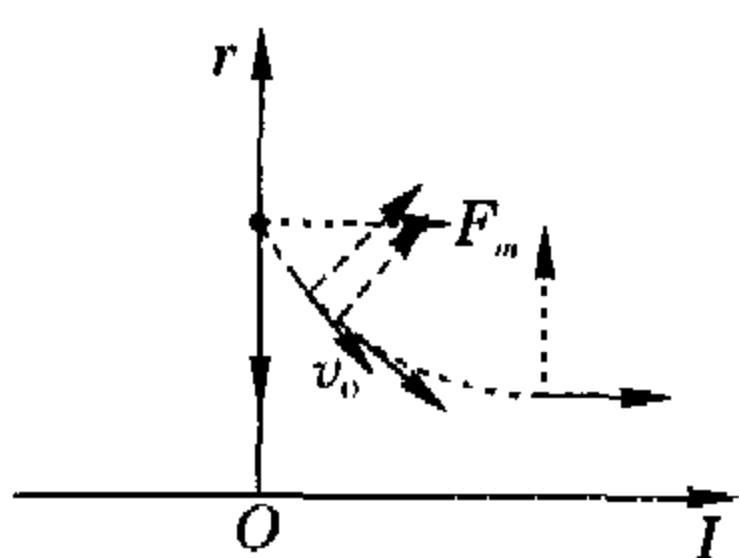
19. 如图答 21-16 所示, 电子以初速度 v_0 垂直于导线运

动, 洛伦兹力 $F_i = \frac{qv_0 \mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_i}$, 要求

距导线最近为 $\frac{r_0}{2}$, 即此时径向速度为

零, 电子径向位置从 $r_0 \rightarrow \frac{r_0}{2}$ 中速度方

向完成 $\frac{\pi}{2}$ 的改变; 考察径向力的分布



图答 21-16

情况: 在距离导线 r_i 处, 磁感应强度为 $B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}$, 速度为 v_0 的

电子受到的力为 $F_i = \frac{qv_0 \mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_i}$, 径向分力为 $F_{ri} = \frac{qv_0 \mu_0 I}{2\pi}$

$\frac{1}{r_i} \sin \theta_i$, 式中 θ_i 为电子速度与径向的夹角, $\theta_i = i \frac{\pi}{2n} (n \rightarrow \infty)$;

电子在径向力 $F_{ri} = \frac{qv_0 \mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_i} \sin \theta_i$ 作用下, 做减速运动, 使

在 r_0 处初速度为 v_0 的电子到达 $\frac{r_0}{2}$ 时径向速度为零, 对其中某

元过程, 由运动学导出公式:

$(v_0 \cos \theta_i)^2 - (v_0 \cos \theta_{i+1})^2 = \frac{qv_0 \mu_0 I \sin \theta_i}{\pi m} \cdot \frac{(r_i - r_{i+1})}{r_i}$,

即 $\frac{\pi}{2n} \cdot \cos(i \frac{\pi}{2n}) = \frac{q\mu_0 I}{2\pi m v_0} \cdot \frac{(r_i - r_{i+1})}{r_i}$ ①

先计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \cdot \cos(i \frac{\pi}{2n}) = 1$, 设元过程取为 $\frac{\pi}{2n} \cdot \cos(i \frac{\pi}{2n}) =$

$\frac{1}{n}$, ①式成为 $\frac{r_i - r_{i+1}}{r_i} = \frac{2\pi m v_0}{n q \mu_0 I}$, 整理得 $\frac{r_{i+1}}{r_i} = 1 - \frac{2\pi m v_0}{n q \mu_0 I}$, 两边

取 n 次方的极限有 $e^{-\frac{2\pi m v_0}{q \mu_0 I}} = \frac{1}{2}$, 于是得 $v_0 = \frac{q \mu_0 I}{2\pi m} \ln 2$.

20. (1) 通电圆环悬浮在 $z=h$ 处, 超导体的内部磁感应强度

为零而表面外侧磁感应强度与表面平行, 这可等效为通电圆环与它的

像电流——在 $z=-h$ 虚设一个

相同的通以反向电流的环——共同

产生的结果, 如图答 21-17 所示, 通

电圆环必有其所受重力与像电流施

予的磁场力相平衡, 由 $r < h$ 这个条

件, 将两环形电流近似为反向平行电流 $mg = F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{2h} \cdot I \cdot$

$2\pi r, I = \sqrt{\frac{2mgh}{\mu_0 r}}$; (2) 若令圆环水平地上下振动, 当与平衡位置

有任一位移(如向下 x)时, $\Sigma F = mg - \frac{\mu_0 r I^2}{2(h-x)} \approx mg - \frac{\mu_0 r I^2}{2h}$

$\cdot (1 + \frac{x}{h}) = -\frac{\mu_0 r I^2}{2h^2} x$, 可见为一简谐运动, 回复力常数

$\frac{\mu_0 r I^2}{2h^2} = \frac{mg}{h}$, 则 $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$; (3) 当以

P_1, P_2 为轴做小幅摆动时, 圆环转动惯

量 $J = \frac{1}{2} mr^2$, 当有一小量角位移 $\Delta \theta$

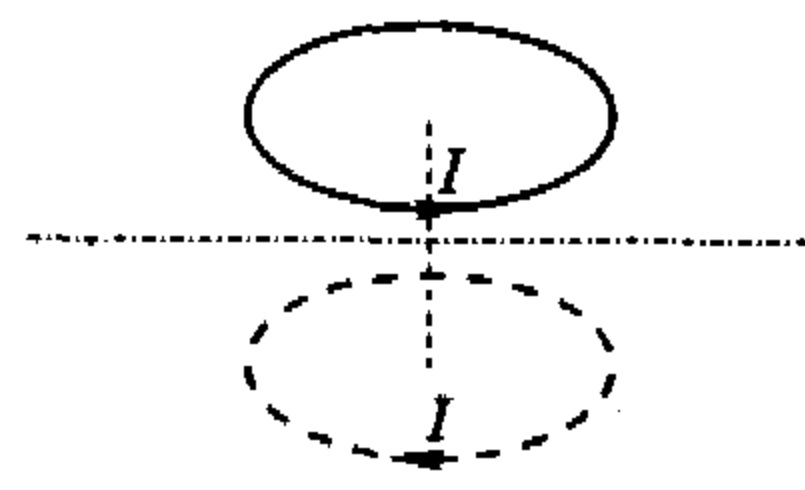
时, 如图答 21-18 所示, 有

$$\begin{aligned} \Sigma M &= (F_1 - F_2)r \\ &= \frac{\mu_0 I^2 r^2}{2} \left(\frac{1}{2h+r \cdot \Delta \theta} - \frac{1}{2h-r \cdot \Delta \theta} \right) \end{aligned}$$

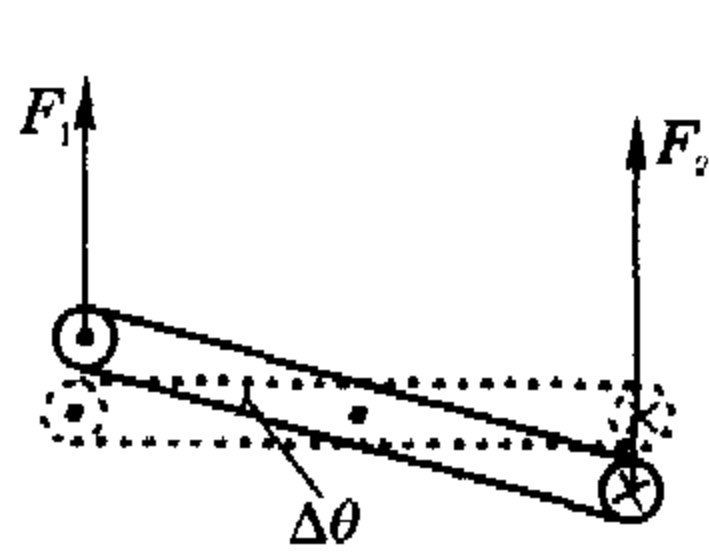
$$= \frac{\mu_0 I^2 r^2}{4h} \left[\left(1 - \frac{r}{2h} \cdot \Delta \theta \right) - \left(1 + \frac{r}{2h} \cdot \Delta \theta \right) \right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2 r^3}{4h^2} \Delta \theta = -\frac{mgr^2}{2h} \Delta \theta.$$

则 $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2} mr^2}{\frac{mgr^2}{2h}}} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$.



图答 21-17



图答 21-18



专题 22 电磁感应面面观

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

奥斯特发现电流的磁效应现象吸引了众多科学家的眼球,当时正致力于化学研究的青年学者法拉第也将研究的热情转到了电磁学领域,法拉第在重复奥斯特实验的同时,产生了一个日后导致极大地改变世界的想法:既然电流能够产生磁场,能否利用磁场来产生电流呢?从1824年起,法拉第历经反复,上下求索,终于在1831年11月向英国皇家学会报告了他的发现:

“把一根长度为203英尺(约62 m)的铜丝绕在一个大圆木块上,再把另一根同样长的铜丝嵌绕在同一个圆木块上,两线圈之间用绝缘线隔开,不让它们有接触.其中一匝线圈与一只电流计连成闭合回路,另一匝线圈则通过开关与一组电池组相连……实验中发现,当开关突然接通时,与另一线圈相连的电流计会发生突然而极其微小的摆动;当开关突然断开时,电流计也会发生同样的微弱效应.不过当开关一直接通,电流不断通过第一只螺线管时,在另一只螺线管上并没有什么类似的效应,与它连接的电流计也没有什么表现……重新做这个实验……我们查明了一个事实:开关突然接通时电流计指针的微小偏转常循着一个方向;开关突然断开时,电流计指针的偏转则循着另一个方向.”

法拉第公布的关于“极其微小的摆动”的发现,据说被一位贵夫人不解为“这有什么用?”法拉第以他坚定的信念作了绝妙的回答:“那么,一个新生的婴儿又有什么用呢?”今天,我们看到,法拉第的“电磁感应婴儿”已长成地球与现代人类社会最不可或缺的“超人”.

法拉第从做过的几十种类似的实验——改变电流、改变磁场、导体在磁场中运动、通有稳恒电流的导线的运动、磁铁的运动等等——总结出电磁感应的发生是与某种变化相关联的,现在学过高中物理的人都知道,这种变化就是磁通量的变化.

诚然,电磁感应的发生总可归结为由于磁通量随时间发生了变化,但根据引起感应电动势的非静电力——我们知道,非静电力移送电荷才会产生电动势,而电动势的大小也是用非静电力移动单位电量所做的功 $\epsilon = \frac{W}{q}$ 来量度的——不同,可将感应电动势分为动生电动势与感生电动势.

由于导体在磁场中运动而产生的电动势称为动生电动势,如图22-1所示,导体棒在匀强磁场中匀速向右做“切割磁感线”运动,导体棒中自由电子因受洛伦兹力 $F_m = evB$ 作用,而向图中棒的下端运动,这样,在棒的上、下两端就会积累起正电荷(失去电子的离子)与负电荷(洛伦兹力移送的电子),两端之间形成一电场,当这个电场施予电子的电场力与洛伦兹力平衡 $qE = qvB$,

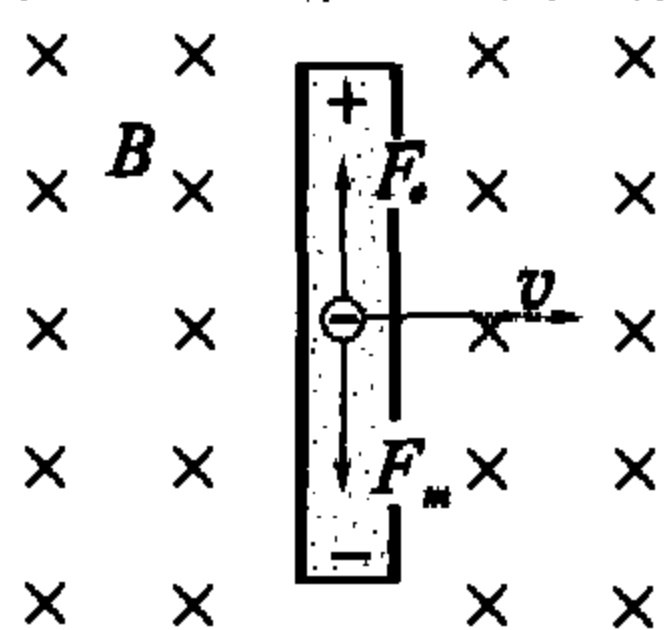


图 22-1

棒上非静电场强度 $E = vB$ 时,两端建立起一个稳定的电动势 $\epsilon = El = Blv$.

动生电动势发生的微观机理是由于洛伦兹力移送电荷所致.产生动生电动势的条件是导体做切割磁感线的运动即 v 与 B 垂直.

如图22-2所示是法拉第做成的世界上第一个发电机模型的原理图.把一个圆铜盘放在匀强磁场 B 中,使磁感线垂直通过铜盘,转动铜盘就可以获得动生电动势.这是因为整个铜盘可视为由很多根从中心到边缘的辐条组成,当铜盘转动时,每根辐条都同样地切割磁感线而引起动生电动势,相当于一节电

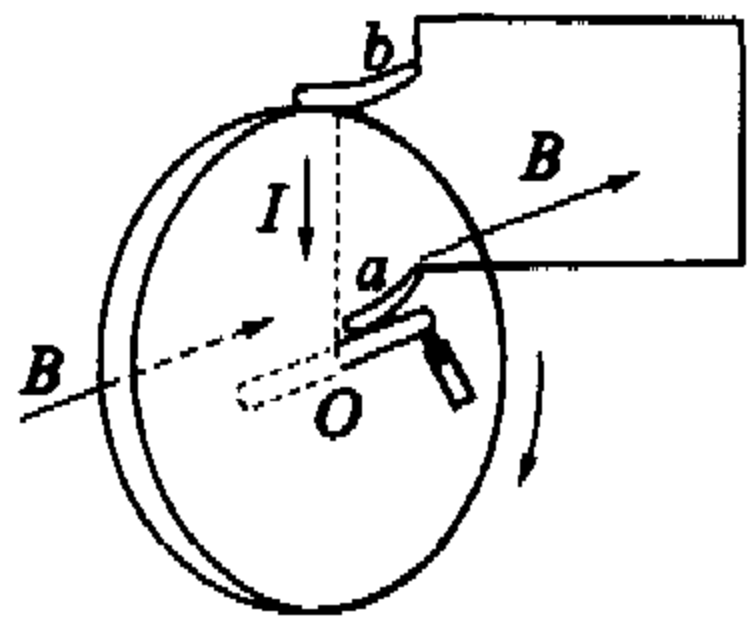


图 22-2

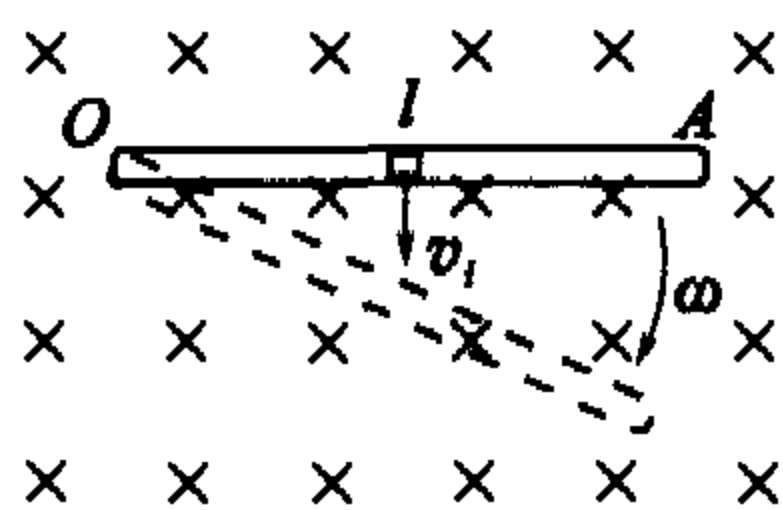


图 22-3

池,整个铜盘就是一个并联电池组,其电动势与一根辐条上的电动势是相同的.现在,我们来计算一根长 l ,以角速度 ω 绕其一端 O 匀速转动的导体棒 OA 上的电动势,如图22-3所示:首先注意,棒上各点的切割速度 v_i 是不同的,我们将 OA 均匀细分 n 段,第 i 个元段的切割速度 $v_i = \omega \cdot i \cdot \frac{l}{n}$,每段上的元电动势

$$\epsilon_i = \omega \cdot i \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{l}{n} \cdot B,$$

则 OA 间的电动势为

$$\begin{aligned} \epsilon_{OA} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega \cdot i \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{l}{n} \cdot B \\ &= \omega Bl^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \omega Bl^2. \end{aligned}$$

例1 如图22-4所示,一长直导线中通有电流 $I = 10 \text{ A}$,有一长 $l = 0.2 \text{ m}$ 的金属棒 AB ,以 $v = 2 \text{ m/s}$ 的速度平行于长直导线做匀速运动,若棒的近导线的一端与导线距离 $a = 0.1 \text{ m}$,求金属棒 AB 中的动生电动势.

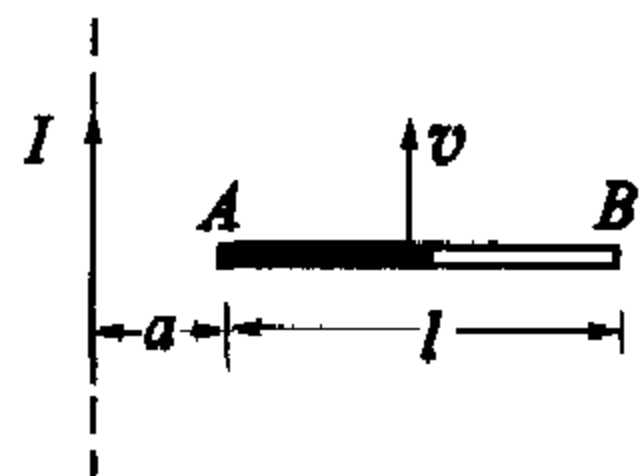


图 22-4

分析与解 这个问题里,棒 AB 上各点的切割速度是相同的,但所处磁场的磁感应强度 B 是变化的,所以求整根棒上的动生电动势须用微元法.

在上一个专题中,我们用毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律推导出无限长直线电流周围磁感应强度的分布规律是 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,式中 r 是点到直线电流的距离.取 AB 上第 i 元段 $\Delta l_i = r_i - r_{i-1}$,认为元段上磁感应强度均为 $B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}$,设 AB 间总电动



势为 ϵ_{AB} , 该段上元电动势

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon_{AB}}{n} = v \cdot \Delta l_i \cdot B_i = v(r_i - r_{i-1}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}$$

整理后有 $\frac{r_{i-1}}{r_i} = 1 - \frac{2\pi\epsilon_{AB}}{nv\mu_0 I}$, 两边取 n 次方的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2\pi\epsilon_{AB}}{nv\mu_0 I}\right)^n, \text{ 得 } \frac{a}{a+l} = e^{-\frac{2\pi\epsilon_{AB}}{v\mu_0 I}}$$

于是有 $\epsilon_{AB} = \frac{v\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$, 代入题给数据得

$$\epsilon_{AB} = 2 \times 2.0 \times 10^{-7} \times 10 \times \ln \frac{0.1+0.2}{0.1} \text{ V} \approx 4.4 \times 10^{-6} \text{ V}$$

例 2 如图 22-5 所示是单极发电机示意图, 金属圆盘半径为 r , 可以无摩擦地在一个长直螺线管中绕一根沿螺线管对称轴放置的导电杆转动, 线圈导线的一端连接到圆盘的边缘, 另一端连接到杆上, 线圈的电阻为 R , 单位长度有 n 匝, 它被恰当地放置而使它的对称轴和地球磁场矢量 B_0 平行, 若圆盘以角速度 ω 转动, 那么流过图中电流表的电流为多少?

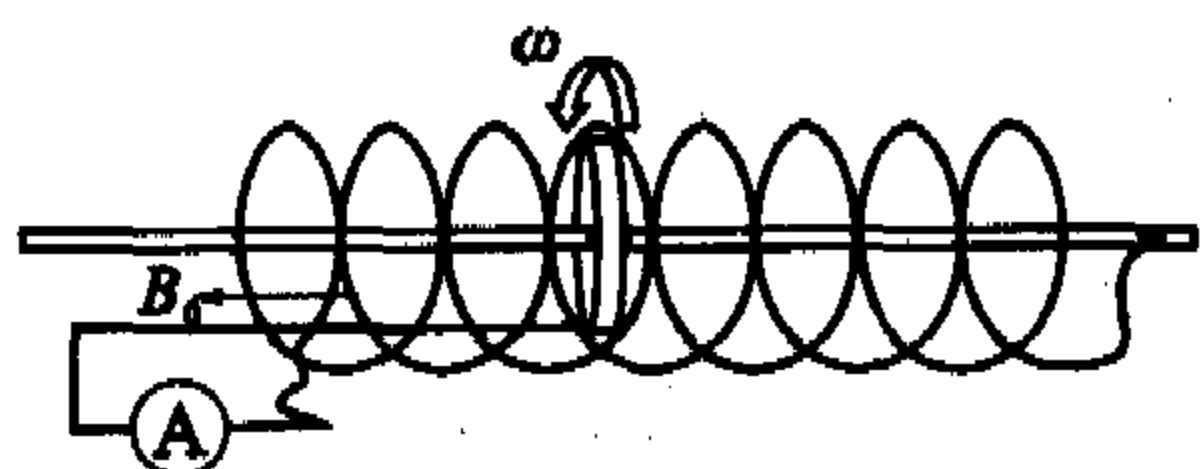


图 22-5

分析与解 法拉弟圆盘转动产生动生电动势, 使线圈中有感应电流 I 通过, 这电流又在螺线管中引起平行于螺线管对称轴的均匀磁场 $B = \mu_0 nI$, 该磁场因圆盘转动方向不同、动生电动势方向不同而取与地磁场同向或反向. 现在我们先设 ω 方向如图 22-5 所示, 则感应电流的磁场方向与 B_0 相同, 螺线管内合磁场大小 $B_0 + \mu_0 nI$, 圆盘上动生电动势方向从中心指向边缘, 大小为

$$\epsilon = \frac{1}{2} (B_0 + \mu_0 nI) \omega r^2$$

对由圆盘(电源)、导线、电流表、导电杆构成的电路, 由全电路欧姆定律, 通过电流表的电流

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{(B_0 + \mu_0 nI) \omega r^2}{2R}, \text{ 即 } I = \frac{\omega r^2 B_0}{2R - \mu_0 n \omega r^2} \quad (1)$$

同理可知, 若圆盘转动方向与图 22-5 所示相反, 则通过电流表的电流

$$I = \frac{\omega r^2 B_0}{2R + \mu_0 n \omega r^2} \quad (2)$$

我们对电流与圆盘转动角速度间关系作一统观: 在①式表述的情况下, 感生电流磁场对地磁场作正反馈, 随着 ω 的增大, 电流增大, 当 $\omega \rightarrow \frac{2R}{\mu_0 n r^2}$ 时, 电流将趋向无穷, 当 $\omega > \frac{2R}{\mu_0 n r^2} \rightarrow \infty$ 时, 由①式分析, 电流要反向, 且逼近于 $I_{\max} = -\frac{B_0}{\mu_0 n}$, 这种奇异的行在实际上不可能出现, 因为角频率在达到 $\frac{2R}{\mu_0 n r^2}$ 之前电流已过大而使导线烧断;

通过电流表的电流在②式表述的情况下, 感生电流磁场对地磁场作负反馈, 随着 ω 的增大反向电流增大, 当 $B_0 - \mu_0 nI \rightarrow 0$ 时, 反向电流趋向最大为 $I_{\max} = \frac{B_0}{\mu_0 n}$. 单极发电机提供的电流随圆盘角速度变化的上述分析可用图 22-6 图象表述.

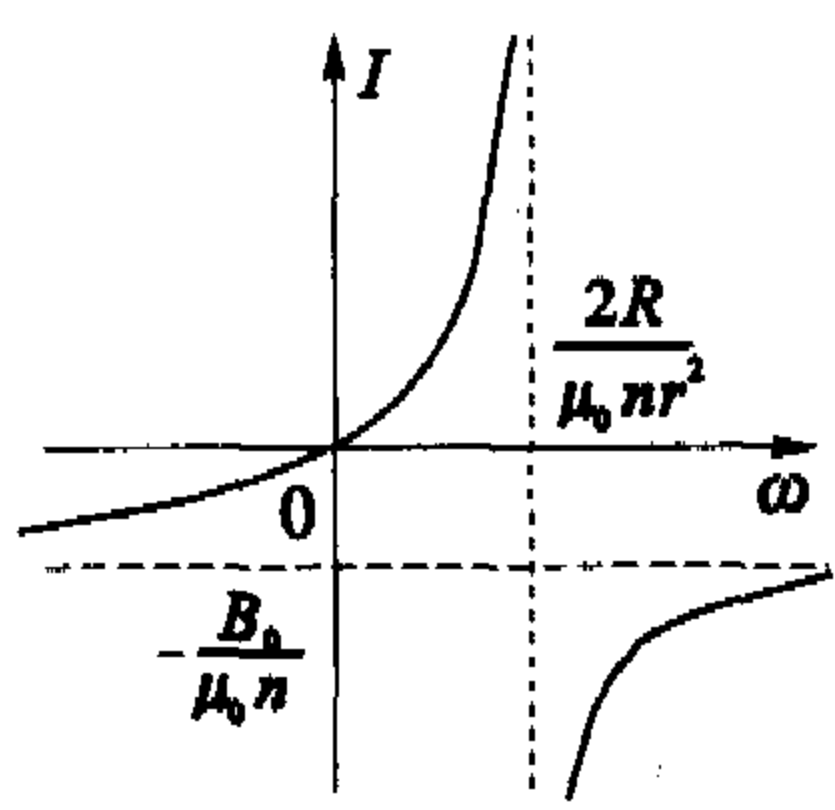


图 22-6

导体不动, 由于磁通量的变化而引起的电动势称为感生电动势. 感生电动势是怎么引起的呢? 如图 22-7 所示, 若图示方向的磁场正在变化, 那么, 这变化的磁场将会激发出一种电场, 叫做“感生电场”, 这种电场的电场线如图 22-7 中带箭头细实线所示, 是一圈一圈的闭合线, 不同于静电场(有源场)而类似于磁场, 所以由变化的磁场激发的感生电场是涡旋场, 设图 22-7 所示方向磁场正均匀增大, 则感生电场的方向由楞次定律确定如图所示, 设想在该磁场中置一圆导线, 导线中的自由电子将在感生电场力作用下发生移动, 设感生电场强度为 E , 那么由电动势定义, 感生电场力移送电子通过 l 距离引起的电动势应为 $\epsilon = \frac{eE \cdot l}{e} = El$, 若圆导线长为

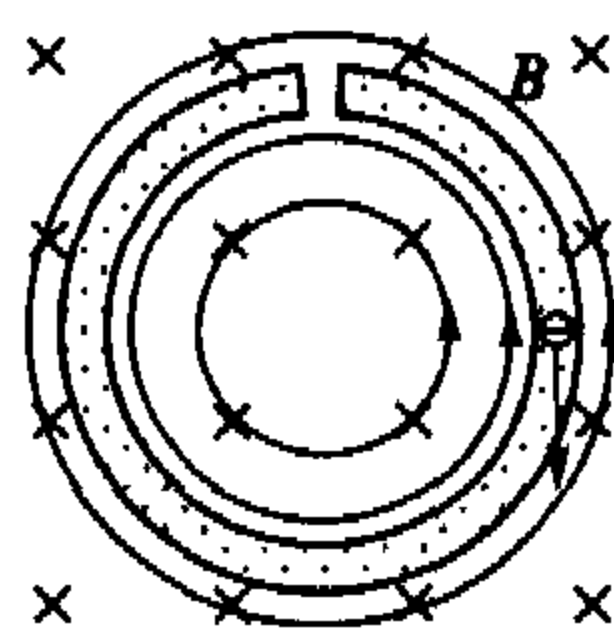


图 22-7

L , 则圆导线上感生电动势为 $\epsilon = El$, 而法拉弟电磁感应定律告诉我们, 线圈上感生电动势 $\epsilon = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = kS$, k 为磁感应强度变化率, S 为线圈包围的磁场面积, 那么 $EL = kS$, 可知圆导线所处位置感生电场强度大小 $E = \frac{k \cdot S}{L}$. 感生电动势发生的微观机理为感生电场力移送电荷所致. 产生感生电动势的条件是由磁场变化而引发感生电场.

例 3 一个“扭转”的环状带子(称为莫比乌斯带)是由长度为 L , 宽度为 d 的纸条制成. 一根导线沿纸带的边缘绕了一圈, 并连接到一个电压表上, 如图 22-8 所示. 当把绕在纸带上的线圈放入一个均匀的垂直于纸带环所在面的磁场中, 且磁场随时间均匀变化, 即 $B(t) = kt$, 电压表记录的数据为多少?

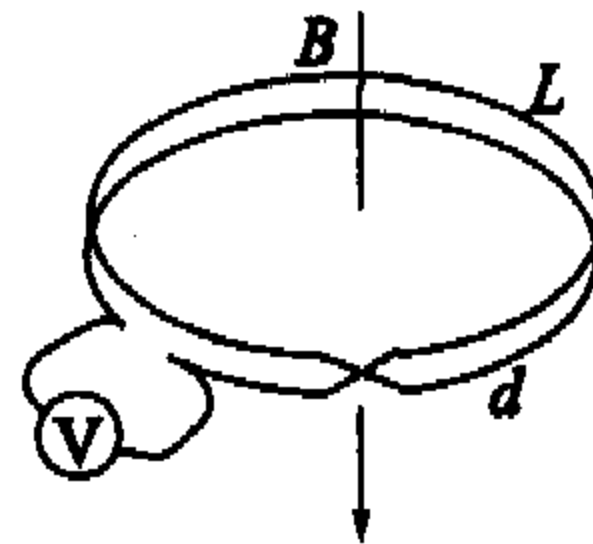


图 22-8

分析与解 电压表记录的数据就是长 $2L$ 的导线上总共产生的感生电动势, 对此, 我们可用两种方法求解. 其一, 根据感生电动势成因. 在导线所处的磁场中, 由变化的磁场引起一感生电场, 其大小为

$$E = \frac{k(L^2/4\pi)}{L} = \frac{kL}{4\pi}$$

感生电场是一涡旋场, 则在 $2L$ 长的导线上电动势

$$\epsilon = \frac{kL}{4\pi} \cdot 2L = \frac{kL^2}{2\pi}$$

其二, 根据法拉弟电磁感应定律. 将原“合”起的两匝线圈展开成图 22-9 所示, 由法拉弟电磁感应定律, 每个线圈上电动势是

$$\epsilon = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = k\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{kL^2}{4\pi}$$

而根据楞次定律可确定两线圈上电动势方向(电势升的方向)

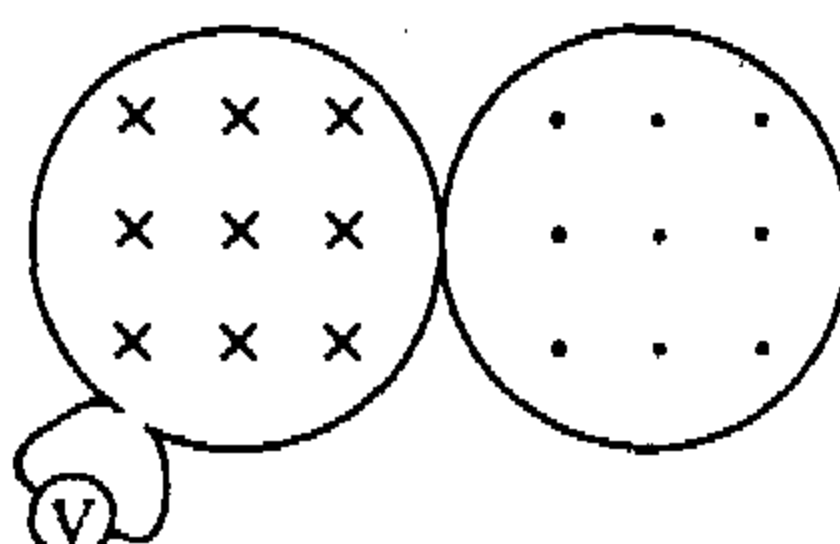


图 22-9

相同而叠加的, 故有 $\epsilon = \frac{kL^2}{2\pi}$.

例 4 一个长圆柱形螺线管包括了另一个同轴的螺线管, 它的半径 R 是外面螺线管半径的一半, 两螺线管单位长度具有相同的匝数, 且初时都没有电流. 在同一瞬时, 电流开始在两个螺线管中线性地增大, 任意时刻, 通过里边螺线管的电流为外边螺线管中电流的两倍且方向相同, 由于增大的电流, 一个



处于两个螺线管之间初始静止的带电粒子开始沿一条同心圆轨道运动,如图 22-10 所示,求该圆轨道半径 r .

分析与解 由于螺线管中的电流变化,在管内磁场变化,因而引起感生电场,感生电场力使带电粒子获得速度,继而受到洛伦兹力,在适当的轨道,磁场、感生电场提供给带电粒子的向心力与其速度相适配,粒子将在该轨道做匀速圆周运动.

先表示半径为 r 的感生电场场强 E_r . 外螺线管中的 $B_1 = \mu_0 n I$, 内螺线管中的 $B_2 = 2\mu_0 n I$, 在粒子运动一周时间 ΔT 过程中,两磁场变化率为 $\frac{\mu_0 n I}{\Delta T}$ 和 $\frac{2\mu_0 n I}{\Delta T}$, 则感生电场为

$$E_r = \frac{\mu_0 n I}{\Delta T} \cdot \frac{r}{2} + \frac{2\mu_0 n I}{\Delta T} \cdot \frac{R^2}{2r} = \frac{\mu_0 n I}{\Delta T} \cdot \frac{r^2 + 2R^2}{2r}, \quad (1)$$

时间 ΔT 内,感生电场力使带电粒子获得速度 v , 则有

$$qE \cdot \Delta T = mv, \quad (2)$$

而此时磁场施予的洛伦兹力表达为

$$F_m = qvB = qv\mu_0 n I,$$

由粒子的动力学方程 $qv\mu_0 n I = \frac{mv^2}{r}$ 得 $r = \frac{mv}{q\mu_0 n I}$,

将①、②两式关系代入得

$$r = \frac{q \cdot \frac{\mu_0 n I}{\Delta T} \cdot \frac{r^2 + 2R^2}{2r} \cdot \Delta T}{q\mu_0 n I} = \frac{r^2 + 2R^2}{2r}, r = \sqrt{2}R.$$

这里,我们看到利用感生电场加速带电粒子的一种可能.在核物理实验中需要的高能粒子,也可通过感应加速器来加速射入高频变化的磁场的带电粒子而获得.如图 22-11 所示环形真空室,当磁场增大时,令电子沿切线方向射入,而当磁场达到最大时,即将加速后的电子导出,由于磁场高频变化,感生电场较强,而入射电子速度一般已很大,在很短的时间内可绕行几十万圈,感生电场力在几十万圈路径上做的功可使电子动能加大到几十兆电子伏特.为了使电子在环形真空室中按一定轨道 R 运动,磁场设计应满足一定的要求.若轨道内磁场区域的平均磁感应强度为 B , 则电子轨道处感生电场强度

$$E = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{R}{2},$$

电子速度的增加 $eE \cdot \Delta t = m\Delta v$, 当电子速度达到 v 时,其所受洛伦兹力

$$F_m = evB_0 = m \frac{v^2}{R},$$

式中 B_0 为电子轨道处的磁感应强度 $B_0 = \frac{mv}{eR}$, 则

$$\frac{\Delta B_0}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{eR\Delta t} = \frac{E}{R} = \frac{k \cdot \frac{R}{2}}{R} = \frac{k}{2} = \frac{\Delta B}{2\Delta t},$$

可知高频变化的磁场中,被加速的电子“约束”在这样的轨道上;轨道所在处的磁场磁感应强度为轨道内磁场平均磁感应强度的一半,即 $B_0 = \frac{B}{2}$, 例 4 中的磁场就是这样设计的,不妨验证一下:粒子轨道半径 $r = \sqrt{2}R$, 此处磁场 $B_1 = \mu_0 n I$; 轨道内磁

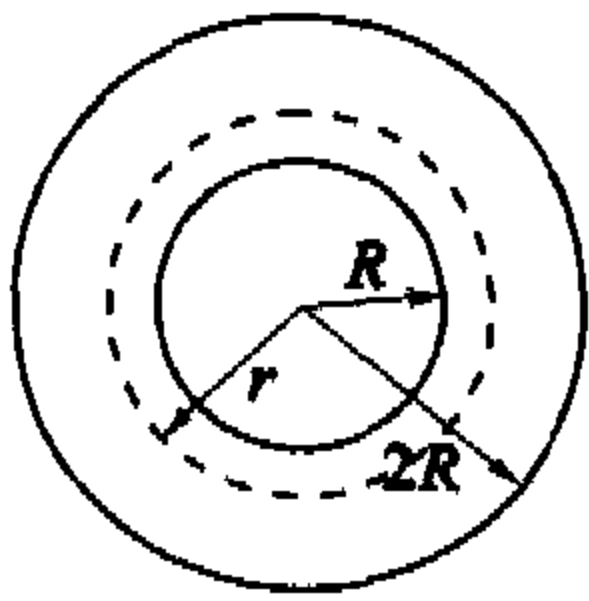


图 22-10

场总磁通量

$$\Phi = \mu_0 n I \pi (\sqrt{2}R)^2 + 2\mu_0 n I \pi R^2,$$

平均磁感应强度

$$B = \frac{\Phi}{\pi (\sqrt{2}R)^2} = \frac{4\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi R^2} = 2\mu_0 n I,$$

可见

$$B_1 = \frac{1}{2} B.$$

磁场变化引起涡旋电场,当涡旋电场中有导线构成的闭合回路时,就形成感应电流,而有大块金属体存在时,则会形成涡电流,由于大块导体电阻很小,涡电流可以达到很大的数值,产生大量的焦耳热,此称感应加热.读者可通过小试身手 13 题,体验涡电流的一种实际应用.

由于回路中电流引起的磁场的变化,又会在回路自身激起感生电动势与感生电流,即自感现象在螺线管中最为明显.由法拉第电磁感应定律: $\epsilon_{自} = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$, 由于螺线管中的磁通量由

电流引起,故 $\Phi = LI$, L 称为自感系数,则 $\epsilon_{自} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$. 自感系数与线圈的面积、单位长度的匝数、总匝数及有无铁芯等因素均有关.对一个具有电感的电路来说,在电路中,会产生自感电动势 $\epsilon = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, 这个过程是电源电动势克服自感电动势做功将电能转变为电路周围的磁场能,设某元过程 Δt 时间,电流增至 $i \frac{I}{n}$, 电源移送电量 $i \frac{I}{n} \cdot \Delta t$, 其元功量为

$$W_i = i \frac{I}{n} \cdot \Delta t \cdot \epsilon_{自},$$

电流由零增大到稳定值 I 的过程总功为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \frac{I}{n} \cdot \Delta t \cdot \epsilon_{自} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \frac{I}{n} \cdot \Delta t \cdot L \frac{I/n}{\Delta t} = \frac{1}{2} LI^2.$$

则通有电流 I 的线圈周围磁场的能量 $E_m = \frac{1}{2} LI^2$.

例 5 有一个 N 匝的螺旋状弹簧如图 22-12 所示,线圈半径为 R 、弹簧自然长度为 x_0 ($x_0 \gg R$), 劲度系数为 k , 当电流 I_0 通过弹簧时,求弹簧的长度改变了多少?

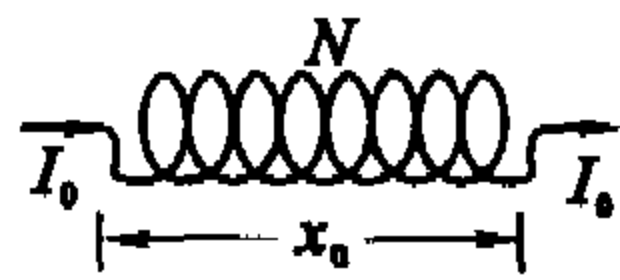


图 22-12

分析与解 电流通过螺线圈时,一方面各匝线圈间存在电流相互吸引的

安培力作用,同时由于长度缩短而受到弹力的作用,达到稳定时,弹簧将缩短,长度变化了的弹簧其自感系数亦改变,使电流周围磁场的一部分能量转化为弹簧的弹性势能.

先计算 N 匝细长螺线圈的自感系数. 当有电流 I 通过螺线圈时,螺线管中磁感应强度 $B = \mu_0 n I$, 每匝线圈的磁通量

$$\Phi = B\pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2,$$

当电流 I 变化时,螺线管中产生自感电动势

$$\epsilon_{自} = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N \frac{\mu_0 n \pi R^2 \Delta I}{\Delta t} = N \mu_0 n \pi R^2 \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

则

$$L = N \mu_0 n \pi R^2.$$

设螺线管缩短后的长度为 x_1 , 螺线管中磁感应强度 $B = \mu_0 n I$, 由于螺线管长度缩短, n 变大, 磁通量 $\Phi = B\pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2$ 变化, 故螺线管中发生自感现象而使电流从 I_0 变小, 电流达到稳定时, 通过该螺线管的电流减为 I_1 , 而磁通量不



变,故有 $\mu_0 \frac{N}{x_0} I_0 \pi R^2 = \mu_0 \frac{N}{x_1} I_1 \pi R^2$,

则稳定时的电流 $I_1 = \frac{x_1}{x_0} I_0$, 该螺线管原来的自感系数

$$L_0 = \frac{\mu_0 \frac{N^2}{x_0} I_0 \pi R^2}{I_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{x_0}$$

缩短后的自感系数 $L_1 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{x_1}$, 线圈磁场的能量对应地有

$$E_0 = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{x_0} I_0^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I_0^2}{2x_0}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{x_1} \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} I_0\right)^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I_0^2}{2x_0} x_1$$

那么,在缩短 $(x_0 - x_1)$ 过程中由能量守恒

$$\frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I_0^2}{2x_0} \cdot (x_0 - x_1) = \frac{1}{2} k(x_0 - x_1)^2$$

可得 $(x_0 - x_1) = \frac{\mu_0 \pi I_0^2 R^2 N^2}{kx_0^2}$.

电磁感应的直接结果是产生电动势,如果有闭合回路存在,则可形成感应电流,所以感应电流只是回路中存在感应电动势的外在表现之一,是电磁感应的间接效果,感应电动势只取决于产生它的原因——磁通量的变化,感应电流的情况还与电路条件有关.各种感应电流电路的分析与计算是一个经常的课题.

例6 在半径为 a 的细长螺线管中,均匀磁场的磁感应强度随时间均匀增大,即 $B = B_0 + bt$. 一均匀导线弯成等腰梯形闭合回路 $ABCD$, 上底长为 a , 下底长为 $2a$, 总电阻为 R , 放置如图 22-13 所示; 试求: (1) 梯形各边上的感生电动势, 及整个回路中的感生电动势; (2) B 、 C 两点间的电势差.

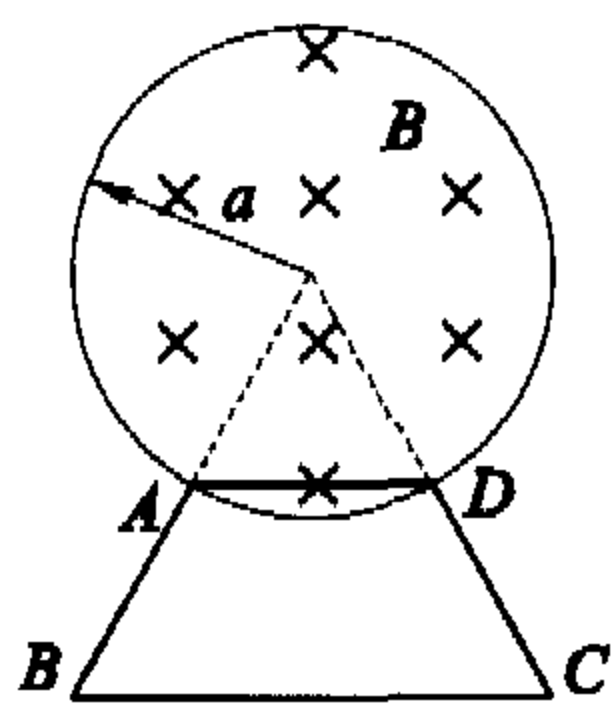


图 22-13

分析与解 梯形回路处于感生电场中, 梯形回路中的电动势为感生电动势, 注意到涡旋电场线为一系列的圆心为 O 的同心圆, 则“等势线”沿径向, 故可知 $\epsilon_{AB} = 0, \epsilon_{CD} = 0$, 为了求 AD 边上的电动势, 可取回路 $\triangle OAD$, 这个回路中的电动势就是 AD 上的电动势, 因为 OA 、 OD 均沿涡旋电场的等势线, 不产生电动势, 由法拉弟电磁感应定律知回路 $\triangle OAD$ 中的电动势

$$\epsilon_{DA} = bS_{\triangle OAD} = b \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 b$$

相似地, 回路 $\triangle OBC$ 中的电动势即 BC 边上的电动势 $\epsilon_{CB} = bS_{\triangle OBC} = b \cdot \frac{\pi a^2}{6}$. 对梯形回路 $ABCD$, 上述两电动势反向, 故回路

总电动势为 $\epsilon = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) a^2 b$.

分析由两个电动势与四段电阻构成的电路. 总电阻为 R , 则梯形 $ABCD$. 各边电阻依次为

$R/5, 2R/5, R/5, R/5$, 等效电路如图 22-14 所示, 由欧姆定律, 回路中的电流

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2 b}{12R}$$

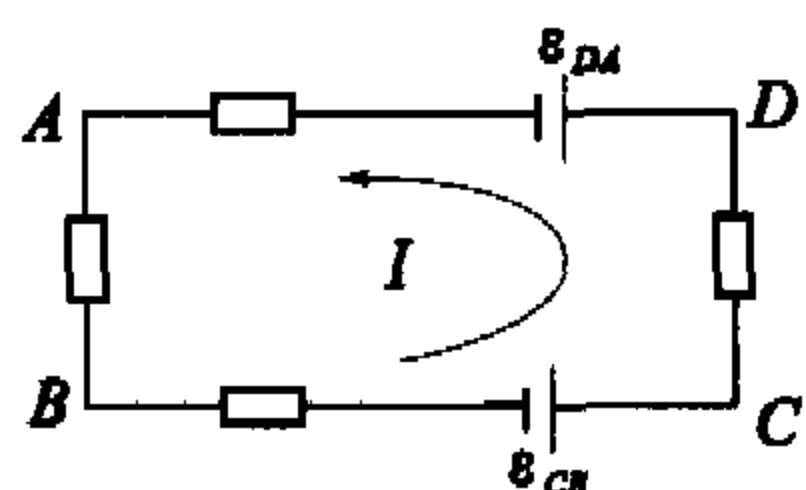


图 22-14

对一段含源电路 BC 有

$$\begin{aligned} U_{BC} &= I \cdot \frac{2}{5} R - \epsilon_{CB} \\ &= \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2 b}{12R} \cdot \frac{2}{5} R - b \cdot \frac{\pi a^2}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3} + \pi}{10} a^2 b. \end{aligned}$$

例7 两个同样的金属环半径为 R , 质量为 m , 放在均匀磁场中, 磁感应强度为 B_0 , 其方向垂直于环面, 如图 22-15 所示. 两环接触点 A 和 C 有良好的电接触, 角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 若突然撤去磁场, 求每个环具有的速度. 构成环的这段导线的电阻为 r , 环的电感不计, 在磁场消失时环的移动

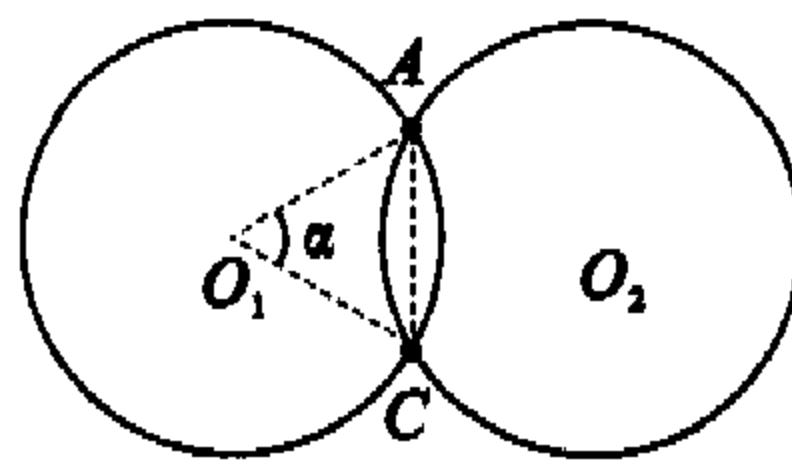


图 22-15

忽略不计, 没有摩擦.

分析与解 在极短时间内磁场消失, 这就会在两环中引起感生电动势, 根据电路结构, 环上各段有一定大小方向的感应电流, 载流导线在磁场中受安培力冲量导致金属环获得动量.

等效电路如图 22-16 所示, 先由基尔霍夫定律求环中感应电流. 两环情况具有对称性, 取左环回路研究, 设磁场方向垂直于环面向下, 环中电动势 $\epsilon_1 =$

$\frac{B\pi R^2}{\Delta t}$, 方向如图示, 优弧段电阻为劣弧段的 5 倍, 优弧段及劣弧段电流方向设定如图

22-16, 有

$$\frac{B\pi R^2}{\Delta t} = I_1 \frac{5r}{6} + I_2 \frac{r}{6}, \quad (1)$$

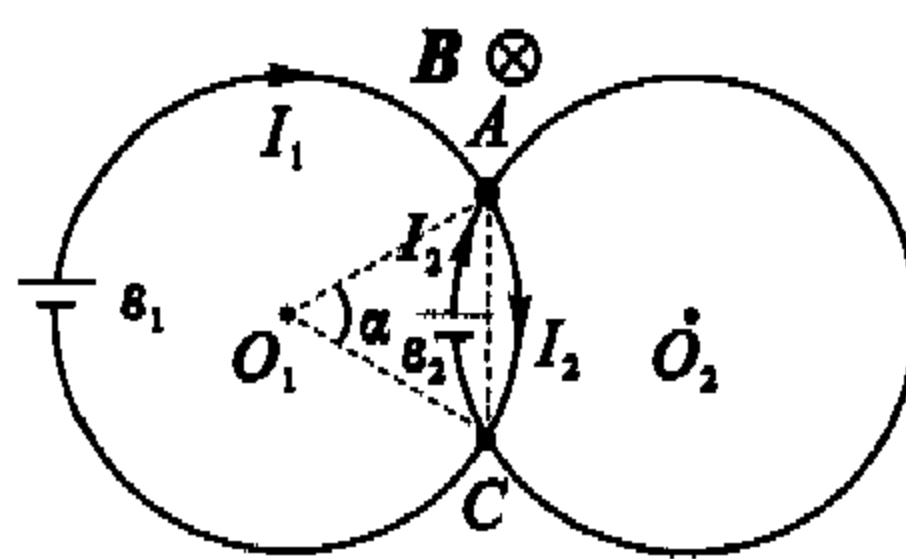


图 22-16

取 A 、 C 间两劣弧构成的回路, 该回路中电动势

$$\epsilon_2 = \frac{B \cdot 2 \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \right)}{\Delta t}$$

$$\frac{B \cdot \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3} R^2}{2} \right)}{\Delta t} = I_2 \frac{r}{6} + I_2 \frac{r}{6}, \quad (2)$$

由②式解得 $I_2 = \frac{BR^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})}{2\Delta t \cdot r}$, 代入①式中得

$$I_1 = \frac{BR^2 \cdot (10\pi + 3\sqrt{3})}{10\Delta t \cdot r}$$

电流方向与所设相符.

现在来求整个左环所受安培力, 优弧与劣弧的等效受力长度均为 AC 弦长 R , 但由左手定则知力的方向相反, 注意到磁场消失的 Δt 时间内 B 在减小, 取 $\bar{B} = \frac{1}{2} B$, 则左环所受合力大小

$$F = \bar{B} R (I_1 - I_2) = \frac{9\sqrt{3} B^2 R^3}{10r \cdot \Delta t}$$

方向向左. 由动量定理



$$\frac{9\sqrt{3}B^2R^3}{10r \cdot \Delta t} \cdot \Delta t = mv,$$

求出环获得的速度大小为 $v = \frac{9\sqrt{3}B^2R^3}{10mr}$,

方向向左,对称地,右环以同样速率向右运动。

例 8 一个磁感应强度为 B 的均匀磁场,垂直于一轨距为 l 的导轨平面,轨道平面与水平面有 α 的倾角。一根无摩擦的导体棒,质量为 m ,横跨在两根金属导轨上,如图 22-17 所示。若开关依次接通 1、2、3,使阻值为 R (其余电阻均不计)、电容为 C 或电感为 L 的元件与棒构成电路,当从静止放开导体棒后,求棒的稳定运动状态。

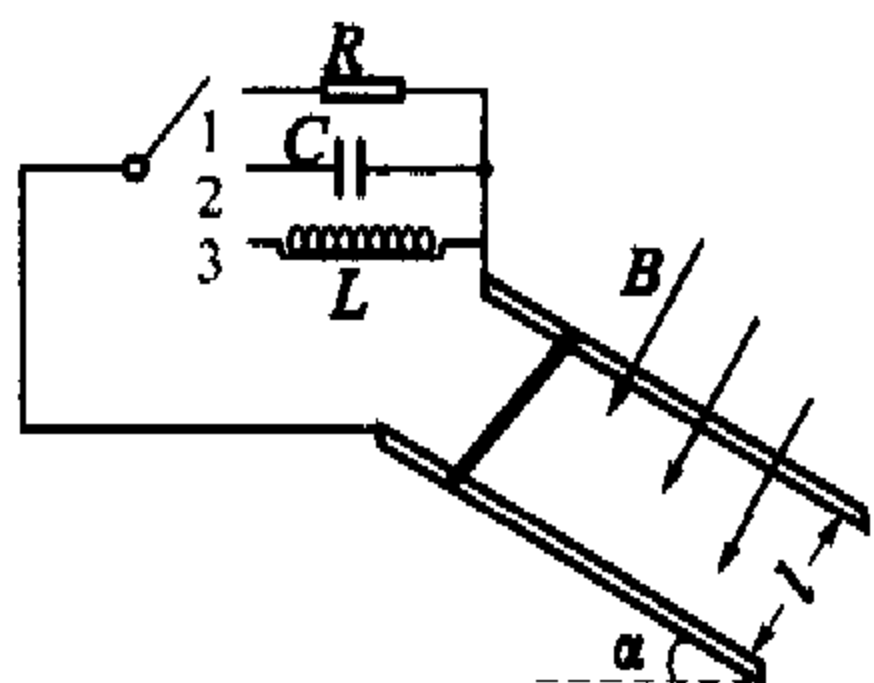


图 22-17

分析与解 本题设置了这样一种问题情景:提供动生电动势的导体受一恒定外力作用,这样的“电源”与电阻或电容器或电感线圈构成电路,在不同的电路条件下会产生不同的效应。

显见,放在导轨上的棒总受到一个沿导轨向下的重力的分力 $F = mg \sin \alpha$ 。当开关接 1,导体棒与电阻 R 构成回路,初时棒的加速度为 $g \sin \alpha$,随着速度增大,棒上电动势(Blv)增大,通过回路的电流增大,这使棒受到的与 F 力反向的安培力 F_m 也增大,从而使合力减小,棒在开始时是做加速度减小的加速运动,当 $F_m = mg \sin \alpha$ 时加速度减为零,棒达到收尾速度 v ,此时电阻回路的感应电流达到一个恒定值。由上分析可知,棒与电阻构成回路时,电路中电流最终达到稳恒,棒的运动状态是做匀速直线运动,由 $B \cdot \frac{v l B}{R} = mg \sin \alpha$,可得匀速运动时的速度

$$v = \frac{mgR}{l^2 B^2} \sin \alpha.$$

当开关接 2,导体棒与电容器构成回路,棒开始以加速度 $g \sin \alpha$ 运动,并产生动生电动势而对电容器充电,随着棒速度增大,棒上电动势增大,维持充电电流 $i = \frac{C \cdot \Delta \epsilon}{\Delta t}$,因而使棒上总受到与 F 力反向的安培力 F_m ,棒的动力学方程

$$mg \sin \alpha - lB \cdot \frac{C \cdot lB \Delta v}{\Delta t} = ma, \text{ 即 } mg \sin \alpha - l^2 B^2 C \cdot a = ma,$$

可见棒以加速度 $a = \frac{mg \sin \alpha}{m + B^2 l^2 C}$ 做匀加速运动。

当开关接 3,导体棒与电感线圈构成回路,棒以加速度 $g \sin \alpha$ 开始运动后,随着速度增大,产生的动生电动势增大,增大的电流通过电感线圈,使线圈两端的电压随动生电动势而增大,电压与电流有关系 $Blv_i = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$,即 $\Delta I = \frac{Blv_i \Delta t}{L} = \frac{Bl}{L} \Delta x$,因初始时 $I=0, x=0$,可知棒开始运动后棒上电流与棒的位移成正比,即 $I = \frac{Bl}{L} x$,棒的运动方程为

$$mg \sin \alpha - lB \cdot \frac{Bl}{L} x = ma, \text{ 即 } ma = mg \sin \alpha - \frac{l^2 B^2}{L} x,$$

若将 x 坐标原点取在棒的平衡位置,即棒下滑 $x_0 = \frac{mgL \sin \alpha}{l^2 B^2}$,则

$$ma = \sum F = mg \sin \alpha - \frac{l^2 B^2}{L} \left(\frac{mgL \sin \alpha}{l^2 B^2} + x \right) = -\frac{l^2 B^2}{L} x.$$

这说明棒所受合力为与棒对平衡位置的位移成正比而方向相反的线性力,棒做简谐运动,运动周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{l^2 B^2}}$,振幅 $A = \frac{mgL \sin \alpha}{l^2 B^2}$,振动方程

$$x = \frac{mgL \sin \alpha}{l^2 B^2} \cos \left(\sqrt{\frac{l^2 B^2}{Lm}} t + \pi \right).$$

例 9 如图 22-18 所示,在与匀强磁场区域 B 垂直的水平面上有两根足够长的平行导轨,在它们上面放着两根平行导体棒,每根长度均为 l 、质量均为 m 、电阻均为 R ,其余部分电阻不计。导体棒可在导轨上无摩擦地滑动,开始时左棒静止,右棒获得向右的初速度 v_0 。试求

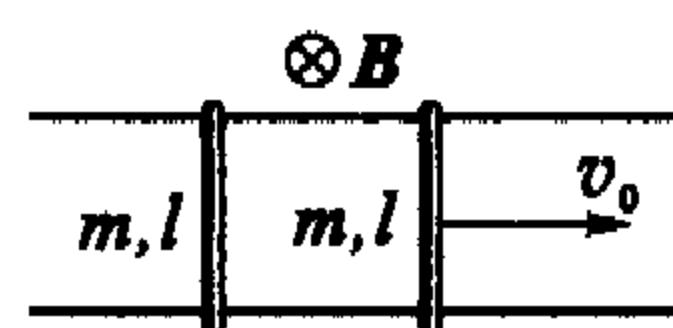


图 22-18

(1) 右导体棒运动速度 v_1 随时间 t 的变化;

(2) 通过两棒的电量;

(3) 两棒间距离增量的上限。

分析与解 本题中,两棒通过导轨构成回路,两棒产生的动生电动势互为反电动势,右棒 $\epsilon_1 = Blv_1$,左棒 $\epsilon_2 = Blv_2$,电路中电流 $I = \frac{lB(v_1 - v_2)}{2R}$,右棒受安培力作用而减速运动,左棒则受安培力作用从静止开始加速,由于系统不受外力,总动量守恒,故两棒速度有 $mv_0 = mv_1 + mv_2$,当 $v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2}$ 时,两棒均做匀速运动。现取右棒速度从 v_0 变为 v_1 的时间 t 内的第 i 个 $\frac{t}{n}$ 元过程,右棒的动力学方程为 $lB \frac{lB(v_{i1} - v_{i2})}{2R} = m \frac{\Delta v_i}{\Delta t}$,即

$$\frac{v_i - v_{i+1}}{(2v_i - v_0)} = \frac{l^2 B^2 \Delta t}{2Rm}, \quad \frac{(2v_i - v_0) - (2v_{i+1} - v_0)}{(2v_i - v_0)} = \frac{l^2 B^2 t}{Rmn},$$

于是有 $\frac{(2v_{i+1} - v_0)}{(2v_i - v_0)} = 1 - \frac{l^2 B^2 t}{Rmn}$,

取两边 n 次方的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2v_{i+1} - v_0}{2v_i - v_0} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{l^2 B^2 t}{Rmn} \right)^n,$$

可得

$$\frac{2v_1 - v_0}{v_0} = e^{-\frac{l^2 B^2 t}{Rm}},$$

于是得右棒速度公式 $v_1 = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-\frac{l^2 B^2 t}{Rm}})$;

由两棒速度关系易得左棒速度随时间变化关系

$$v_2 = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-\frac{l^2 B^2 t}{Rm}}).$$

两棒电阻串联,通过每棒的感应电流电量相等,任取其中一棒例如左棒,由动量定理

$$lB \frac{q}{t} t = m \frac{v_0}{2}, \quad q = \frac{mv_0}{2lB};$$

若设两棒间距离的最大增量为 x ,则由 $q = \bar{I} t = \frac{Blx}{2Rt} \cdot t$,得

$$x = \frac{2Rq}{lB} = \frac{Rmv_0}{l^2 B^2}.$$



小球滚动

1. 在磁感应强度为 B , 水平方向的匀强磁场内, 有一个细金属丝环以速度 v 做无滑滚动, 如图 22-19 所示. 环上有长度为 l 的很小的缺口, 磁场方向垂直于环面. 求当 $\angle AOC$ 为 α 时, 环上产生的感应电动势.

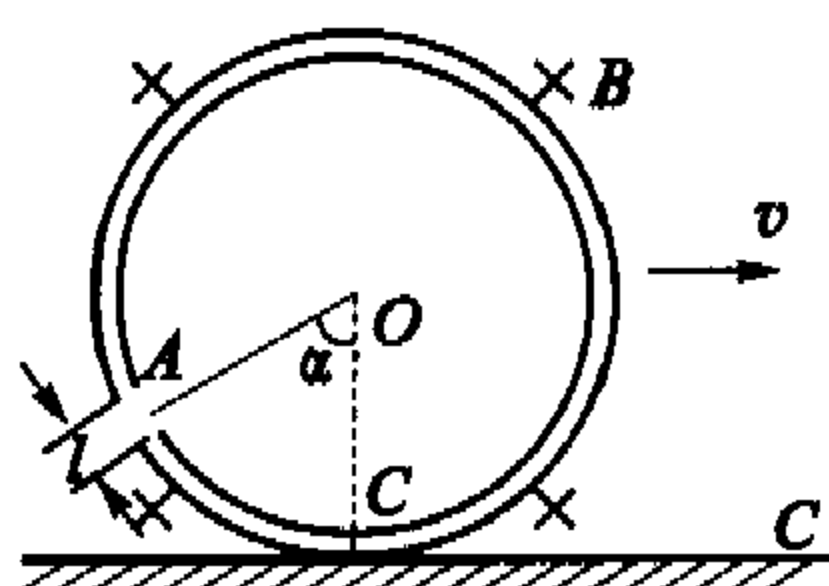


图 22-19

2. 如图 22-20 所示, 在电流为 I 的无限长直导线外有与它共面的直角三角形线圈 ABC , 其中 AB 边与电流平行, AC 边长 l , $\angle BCA = \theta$, 线圈以速度 v 向右做匀速运动, 求当线圈与直线电流相距 d 时, 线圈中的动生电动势.

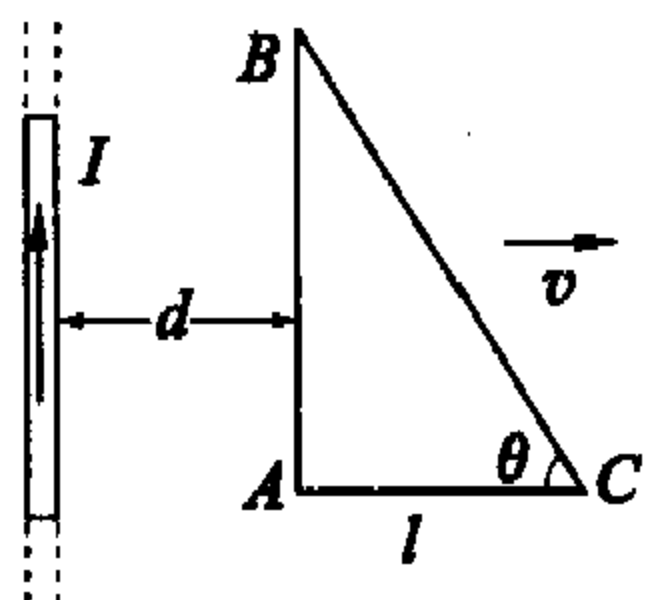


图 22-20

3. 在半径为 R 的圆柱形体积内充满磁感应强度为 B 的匀强磁场. 有一长为 l 的金属棒放在磁场中, 如图 22-21 所示, 设磁场在增强, 其变化率为 k . (1) 求棒中的感生电动势, 并指出哪端电势高; (2) 如棒的一半在磁场外, 其结果又如何?

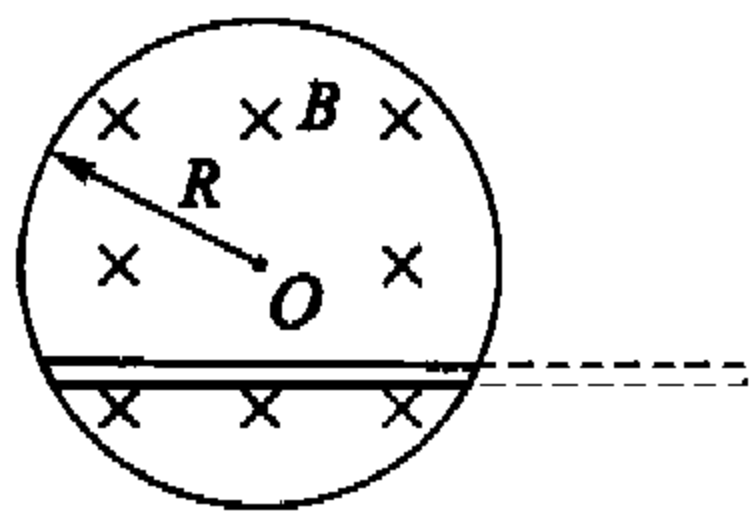


图 22-21

4. 一个很长的直螺线管半径为 R , 因线圈通过交流电而在管内引起均匀的交变磁场 $B = B_0 \sin \omega t$, 求螺线管内、外感生电场 E 的分布规律.

5. 一无限长圆柱, 偏轴平行地挖出一个圆柱空间, 两圆柱轴间距离 $OO' = d$, 图 22-22 所示为垂直于轴的截面. 设两圆柱间存在均匀磁场, 磁感应强度 B 随时间 t 线性增长, 即 $B = kt$. 现在空腔中放一与 OO' 成 60° 角、长为 L 的金属杆 $AO'B$, 求杆中的感生电动势.

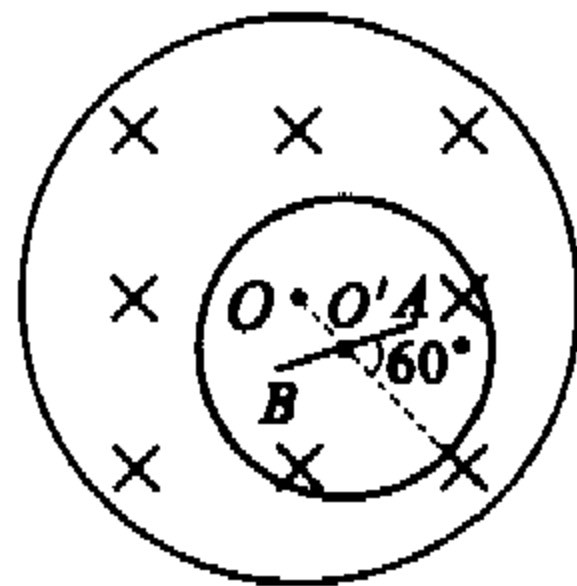


图 22-22

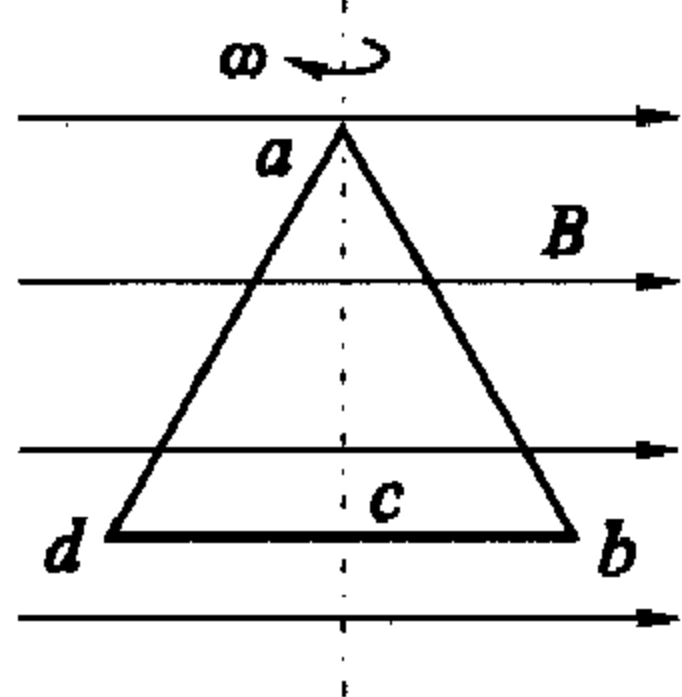


图 22-23

6. 如图 22-23 所示, 由均匀金属丝折成边长为 l 的等边三角形, 总电阻为 R , 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中, 以恒定角速度 ω 绕三角形的高 ac 轴转动, 求线圈平面与 B 平行时, 金属框的总电动势及 ab 、 ac 的电势差 U_{ab} 、 U_{ac} .

7. 在轻的导电杆的一端固定一个金属小球, 球保持与半径为 $R = 1.0 \text{ m}$ 的导电球面接触. 杆的另一端固定在球心处, 并且杆可以无摩擦地沿任何方向转动. 整个装置放在均匀磁场中, 磁场方向竖直向上, 磁感应强度 $B = 1.0 \text{ T}$. 球面与杆的固定端通过导线、开关与电源相连, 如图 22-24 所示. 试描述当开关闭合后, 杆如何运动? 如果杆与竖直线之间的夹角稳定在 $\alpha = 60^\circ$, 求电源的电动势.

8. 如图 22-25 所示, 无限长密绕螺线管半径为 r , 其中有电流, 在螺线管内产生一匀强磁场 B . 在螺线管外同轴套一粗细均匀的金属圆环, 金属环由两个半环组成, a 、 b 为其分界面, 半环的电阻分别为 R_1 和 R_2 , 且 $R_1 > R_2$, 当螺线管中电流按 $I = I_0 + \beta t$ 均匀增大时, 求 a 、 b 两处的电势差 U_{ab} .

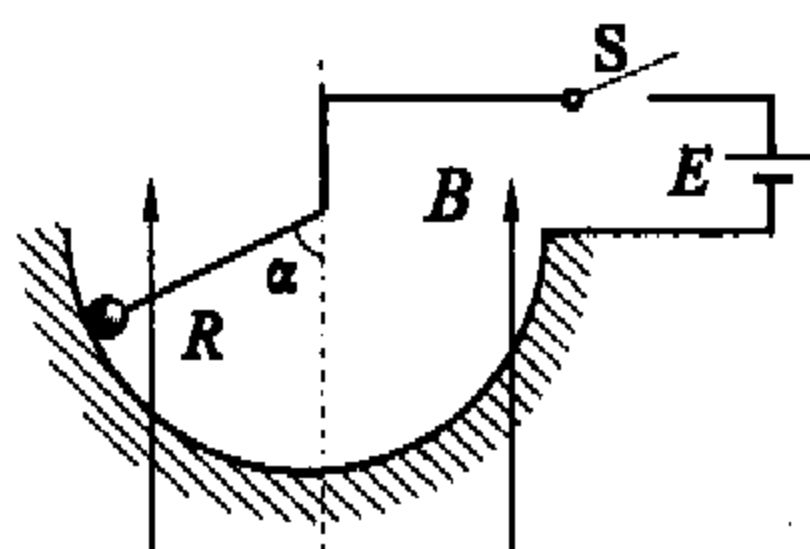


图 22-24

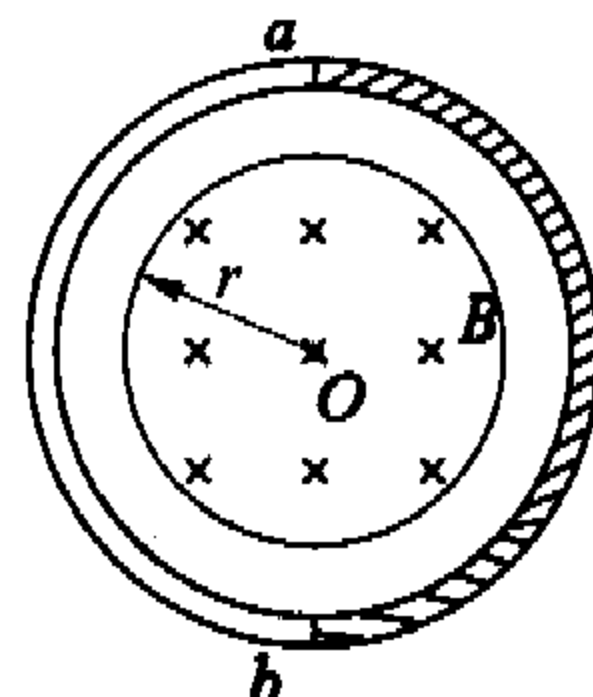


图 22-25

9. 由绝缘均匀导线做成的闭合回路如图 22-26 所示弯成 ∞ 字形, 交叉处 M 点在 N 点之上, 回路 1 的半径为 r_1 , 回路 2 的半径为 r_2 , 当磁感应强度按 $B = B_0 t$ 规律穿入回路时, 确定 M 与 N 两点间电压; 若将回路 2 向左翻折在回路 1 上, M 与 N 间电压又是多少?

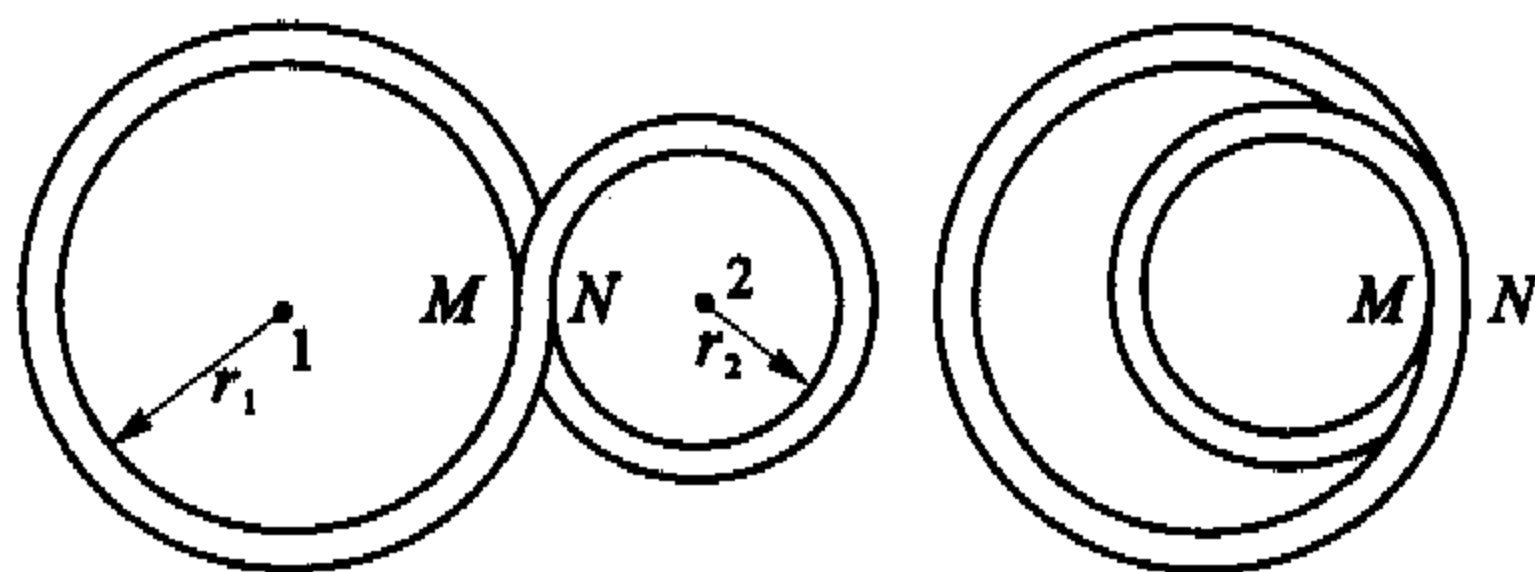


图 22-26

10. 环形金属丝箍围在很长的直螺线管的中部, 箍的轴与螺线管的轴重合, 如图 22-27 所示. 箍由两部分组成, 每部分的电阻 R_1 、 R_2 不同且未知. 三个有内阻的电压表接到两部分接头处 A 点和 B 点, 并且导体 $A-V_3-B$ 严格地沿箍的直径放置, 而导体 $A-V_1-B$ 和 $A-V_2-B$ 沿螺线管任意两个不同方位放置, 交变电流通过螺线管, 发现这时电压表 V_3 的读数 $u_0 = 5 \text{ V}$, 电压表 V_1 的读数 $u_1 = 10 \text{ V}$. 问电压表 V_2 的读数是多少? 螺线管外的磁场以及回路电感不计.

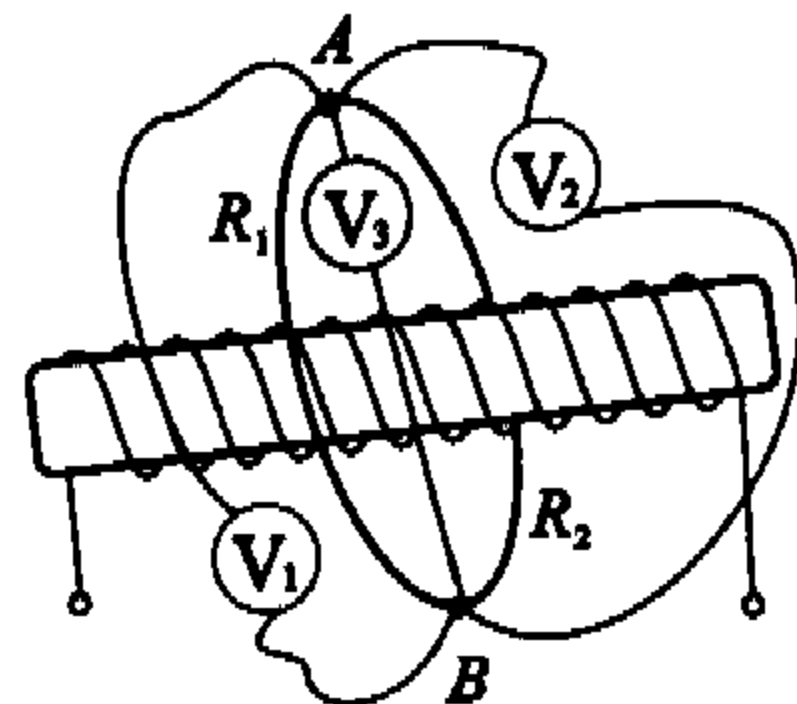


图 22-27

11. 半径为 R 的金属丝圆环, 有一个沿直径方向放置的金属跨接线, 左、右两半圆上分别接上电容器 C_1 和 C_2 , 如图 22-28 所示. 将环放置在磁感应强度随时间而线性增大的磁场中, $B(t) = \frac{B_0 t}{T}$, 磁场方向垂直于环面. 某一时刻撤去跨接线, 接着磁场停止变化, 求每个电容器上带的电量.

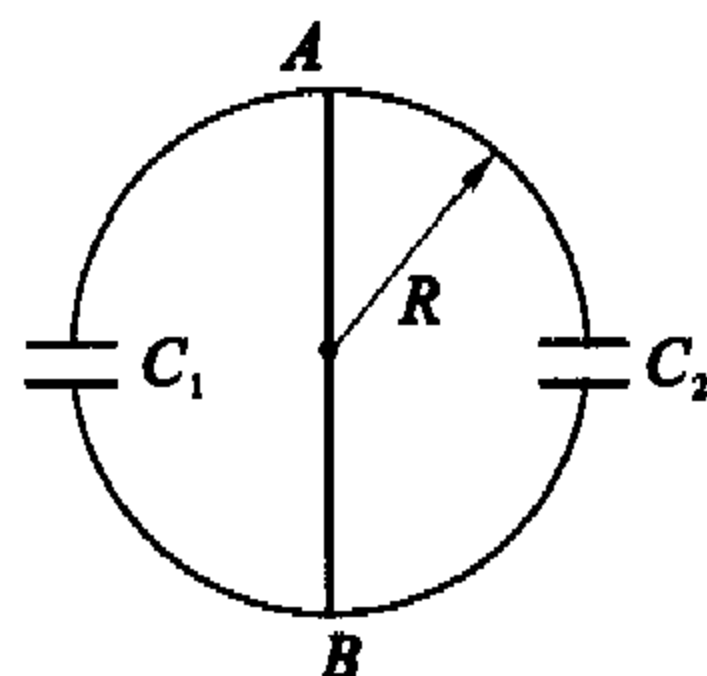


图 22-28

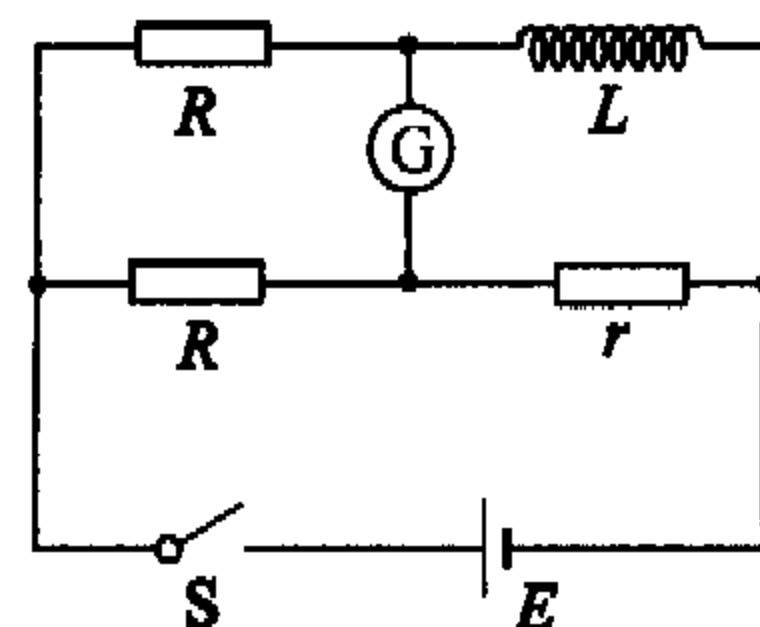


图 22-29



12. 如图 22-29 所示电路, 直流电源的电动势为 E , 内阻不计, 两个电阻值为 R , 一个电阻值为 r , 电感的自感系数为 L , 直流电阻值为 r . 闭合开关 S , 待电路电流稳定后, 再打开开关 S (电流计 G 内阻不计)

- (1) 打开开关时, 电阻值为 r 的电阻两端电压为多少?
- (2) 打开开关后有多少电量通过电流计?
- (3) 闭合开关到电流稳定时, 有多少电量通过电流计?

13. 电磁涡流制动器由一电阻为 ρ 、厚度为 τ 的金属圆盘为主要部件, 如图 22-30 所示. 圆盘水平放置, 能绕过中心 O 的竖直轴转动, 在距中心 O 为 r 处, 一边长为 a 的正方形区域内有垂直于圆盘平面的匀强磁场, 磁感应强度为 B , 若 $r \gg a$, 试写出圆盘所受的磁制动力矩与圆盘转动角速度之间的关系式.

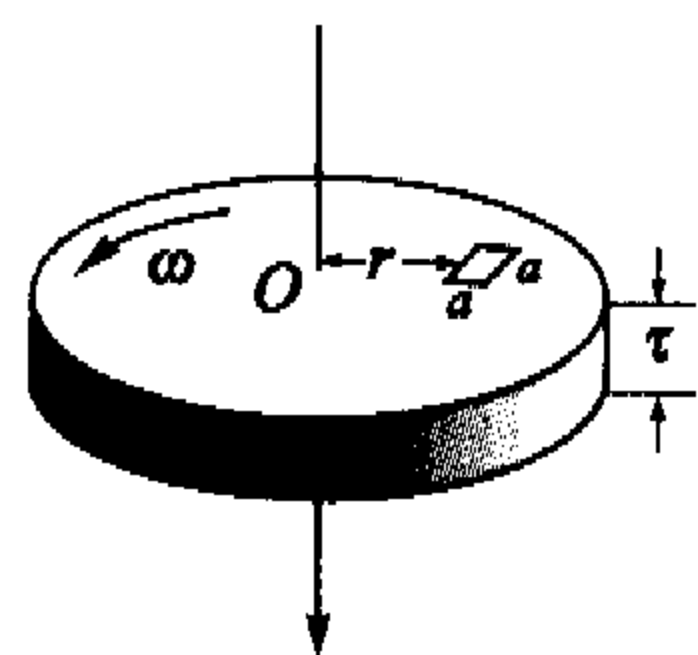


图 22-30

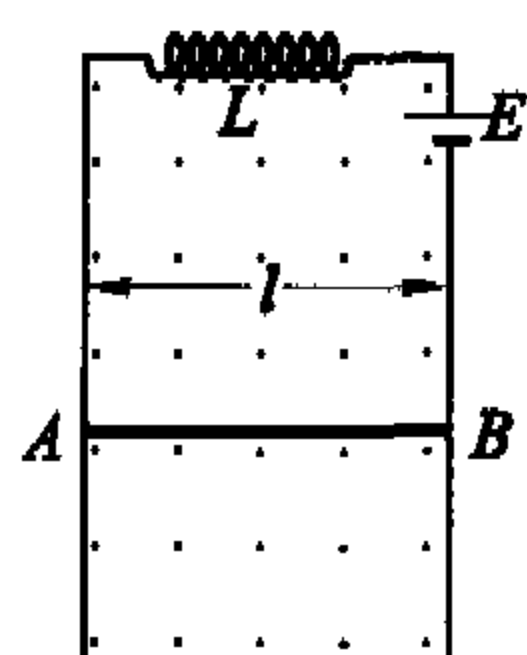


图 22-31

14. 如图 22-31, 在竖直面内两平行导轨相距 $l=1\text{ m}$, 且与一纯电感线圈 L 、直流电源 $E(\epsilon, r)$ 、水平金属棒 AB 联为一闭合回路, 开始时, 金属棒静止, 尔后无摩擦地自由下滑 (不脱离轨道). 设轨道足够长, 其电阻可忽略, 空间中磁场 B 的大小为 0.4 T , 其方向垂直于轨道平面, 已知电源电动势为 $\epsilon=9\text{ V}$, 内电阻 $r=0.5\ \Omega$, 金属棒质量 $m=1\text{ kg}$, 其电阻 $R=1.1\ \Omega$, 线圈自感系数 $L=12\text{ H}$, 试求金属棒下落可达到的最大速度.

15. 如图 22-32 所示一椭圆形轨道, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 在中心处有一圆形区域, 圆心在 O 点, 半径为 r , $r < b$. 圆形区域中有一匀强磁场 B_1 , 方向垂直纸面向里, B_1 以变化率 k 均匀增大. 在圆形区域外另有一匀强磁场 B_2 , 方向与 B_1 相同. 在初始时, A 点有一带正电 q 、质量为 m 的粒子, 粒子只能在轨道上运动, 把粒子由静止释放, 若要其通过 C 点时对轨道无作用力, 求 B_2 的大小.

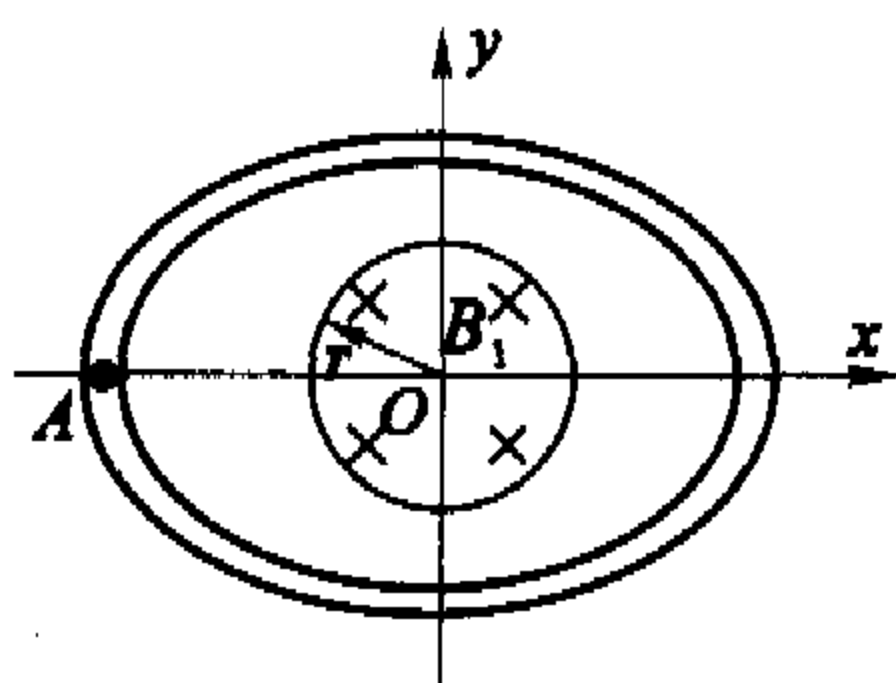


图 22-32

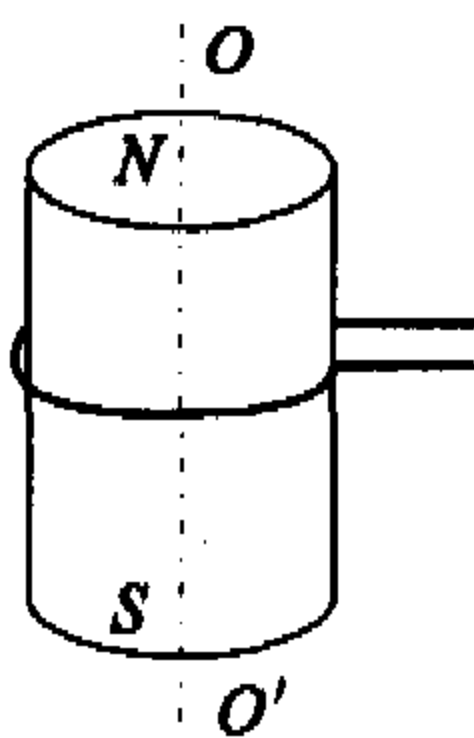


图 22-33

16. 一根永久性圆磁棒, 在它的磁极附近套上一环形线圈, 摆动线圈, 使线圈沿轴 OO' 做简谐运动, 如图 22-33 所示,

振幅 $A=1\text{ mm}$ (这比磁铁和线圈的尺寸小得多), 频率 $f=1\ 000\text{ Hz}$. 于是, 在线圈里产生感应电动势, 其最大值 $\epsilon_m=5\text{ V}$, 如果线圈不动, 线圈通以电流 $I=200\text{ mA}$, 求磁场对线圈的作用力.

17. 如图 22-34, 半径为 R 的无限长圆柱形匀强磁场区域的磁感应强度为 B , 方向竖直向上, 半径为 R 的绝缘光滑细环水平放置, 正好套住磁场区. 在细环上串有一质量为 m 、电量为 q 的带正电小珠. $t=0$ 时, 磁场 $B=0$; $0 < t < T$ 时, B 随时间 t 均匀增大; $t=T$ 时, $B=B_0$; 此后保持 B_0 不变. 试定量讨论 $t > T$ 时小珠的运动状态及小珠对圆环的径向正压力. (小珠所受重力与圆环支持力平衡)

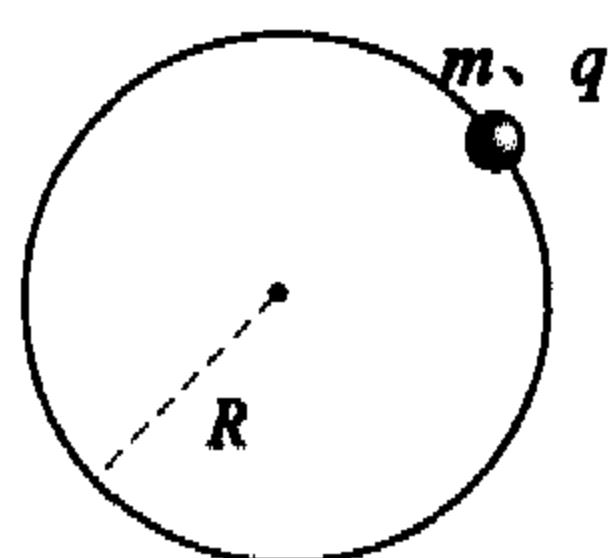


图 22-34

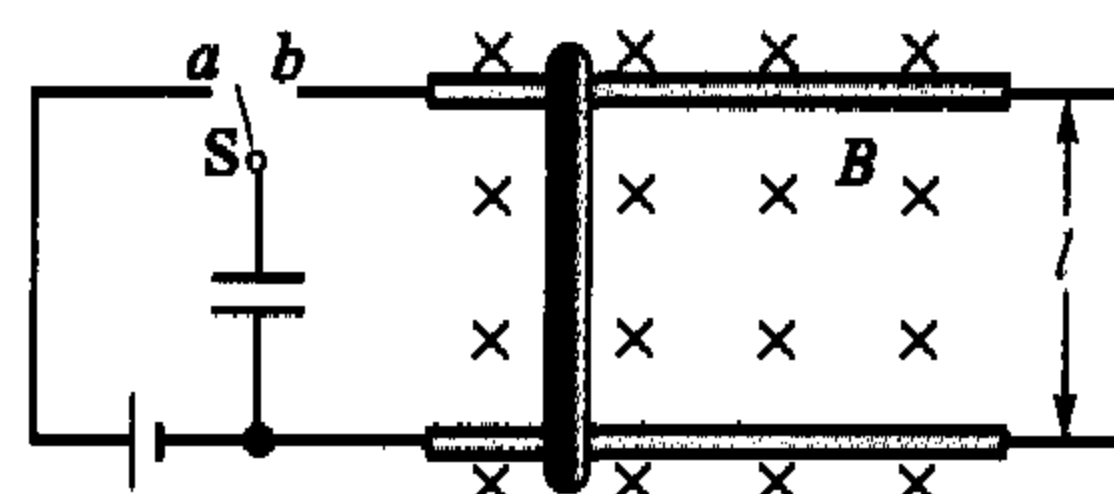


图 22-35

18. 如图 22-35 所示为一“电磁枪”, 它有一轨距为 l 、电阻可以忽略的水平导轨, 导轨另一端与一个电容为 C 、所充电压为 U_0 的电容器相连接, 该装置的电感可以忽略, 整个装置放入均匀的竖直的磁感应强度为 B 的磁场中, 一根无摩擦的质量为 m 、电阻为 R 的导体棒垂直于轨道放在导轨上, 将开关翻转到 b , 求导体棒获得的最大速度 v_{\max} 及这个“电磁枪”的最大效率.

19. 一个细的超导圆环质量 m 、半径 r 、电感 L , 放在竖直的圆柱形磁棒上面, 如图 22-36 所示. 圆环与棒有同一对称轴. 在圆环周围的圆柱形磁棒的磁场在以圆环中心为坐标原点的 $x-O-y$ 坐标中可近似地表示为 $B_y = B_0(1 - \alpha y)$ 和 $B_x = B_0\beta x$, 其中 B_0 、 α 、 β 为常量. 初始时, 圆环中没有电流, 当它被放开后开始向下运动且保持它的轴仍为竖直, 试确定圆环的运动并求圆环中的电流.

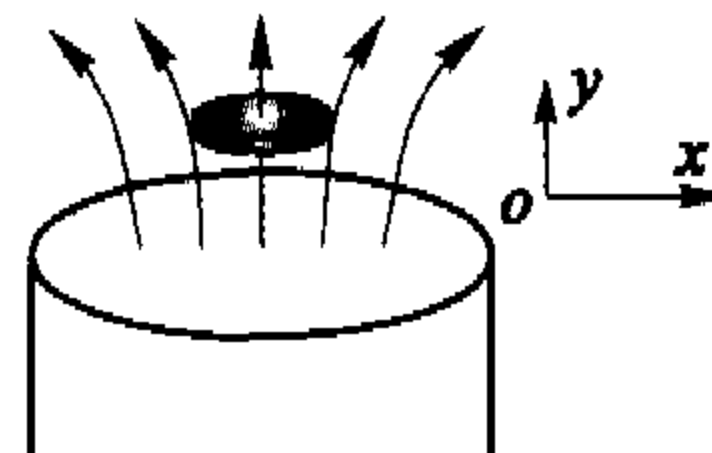


图 22-36

20. 如图 22-37(a) 所示, 在水平地面上有足够长的两条平行金属导轨, 导轨上放着两根可无摩擦地滑行的平行导体棒, 每根棒中串接电容为 C 的相同固体介质电容器, 构成矩形回路. 整个回路处在匀强磁场中, 磁场方向与回路平面垂直. 已知两棒长均为 l , 质量均为 m , 电阻均为 R , 其余电阻不计. 开始时左棒静止, 右棒以初速 v_0 平行导轨运动, 则在运动过程中可给两电容器充电.

- (1) 两棒的最终速度是否相同?
- (2) 就电容器 C 充电过程而言, 回路可等效为图 22-37(b)



所示无外磁场的静态回路,试求图(b)中 ϵ' 和 C' 值.

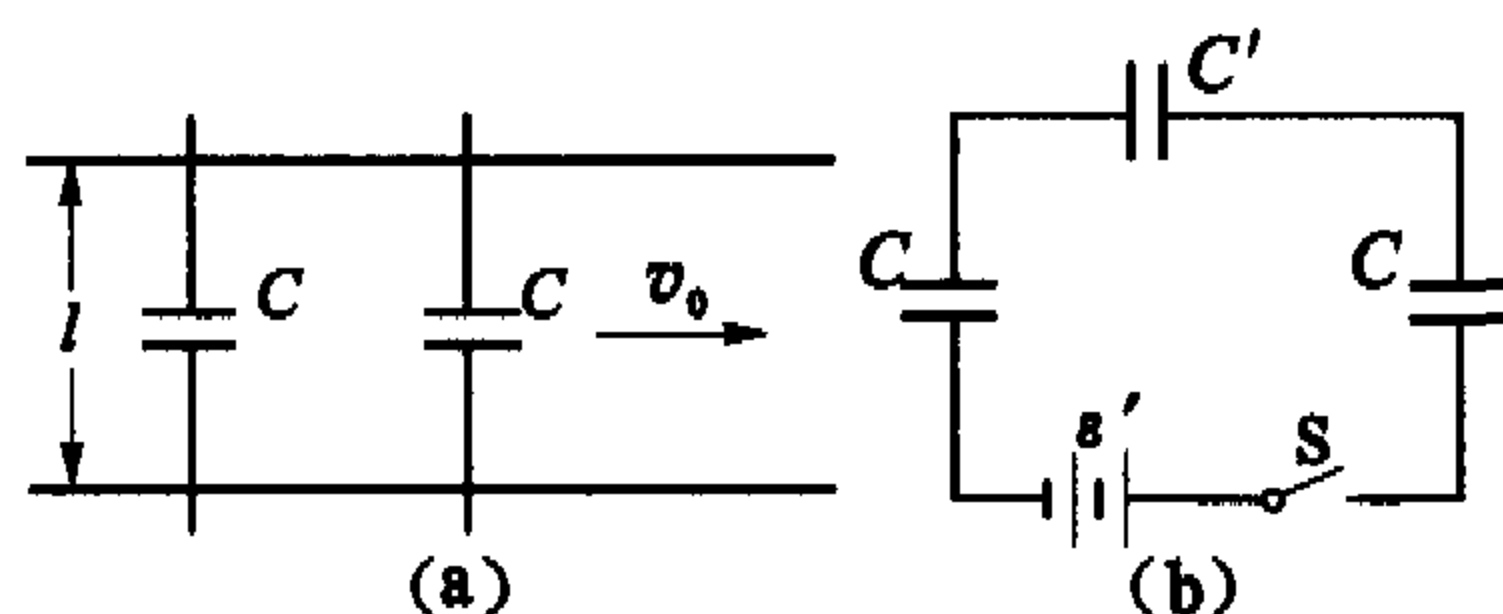
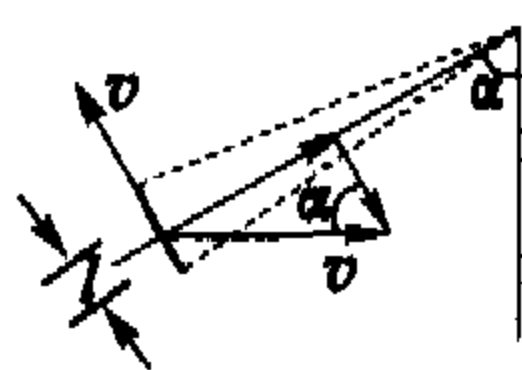


图 22-37

参考答案

1. 开口的细金属丝环在滚动过程“切割”磁感线而产生动生电动势,其效果等同于如图答 22-1 所示,长 l 的金属丝弧对磁场的“切割”,金属丝弧的速度可视为由对环心 O 的转动速度及与 O 相同的水平速度两部分构成,前者不产生“切割”磁感线的效果,后者与 l 垂直的哪个分量即所谓切割速度,其值 $v_{\perp} = v \sin \alpha$,故当 $\angle AOC$ 为 α 时,环上产生的感应电动势 $\epsilon = v l B \sin \alpha$.



图答 22-1

2. 无限长直导线电流周围磁感应强度的分布规律 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,如图答 22-2 所示,直角三角形线圈 ABC 的 AB 边在距直导线电流 d 时的动生电动势容易得到

$$\epsilon_1 = B_d v l \tan \theta = \frac{\mu_0 I v l}{2\pi d} \tan \theta,$$

AC 边上无电动势,而 BC 边上各元段所处磁场不同,取 BC 上第 i 元段,其有效切割长度 $\Delta l_i = (r_i - r_{i-1}) \tan \theta$, θ 是 BC 与 v 的夹角,认为元段上磁感应强度均为 $B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}$,设 BC 上总电动势为 ϵ_2 ,该段上元电动势

$$\epsilon_i = \frac{\epsilon_2}{n} = v \cdot \Delta l_i \cdot B = v(r_i - r_{i-1}) \tan \theta \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i},$$

整理后有 $\frac{r_{i-1}}{r_i} = 1 - \frac{2\pi \epsilon_2}{n v \mu_0 I \tan \theta}$,两边取 n 次方的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2\pi \epsilon_2}{n v \mu_0 I \tan \theta}\right)^n, \text{得}$$

$$\frac{d}{d+l} = e^{-\frac{2\pi \epsilon_2}{v \mu_0 I \tan \theta}}, \text{于是有}$$

$$\epsilon_2 = \frac{v \mu_0 I \tan \theta}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d},$$

AB 、 BC 上电动势方向相逆,故三角形线圈上总电动势

$$\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \tan \theta \left(\frac{l}{d} - \ln \frac{d+l}{d}\right).$$

3. (1)如图答 22-3 甲,棒中感生电动势与回路 OPQ 中相同,即

$$\epsilon = k \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{k l \sqrt{4R^2 - l^2}}{4},$$

电势升的方向为 $P \rightarrow Q$.

(2)如棒的一半在磁场外,如图答 22-3 乙,棒中感生电动势仍与回路 OPQ 中相同,而这次回路 OPQ 中,因 C 为 PQ 中点,三角形 OPC 面积 $S_{\triangle OPC} = \frac{l \sqrt{4R^2 - l^2}}{8}$,设 $\angle COQ = \alpha$,

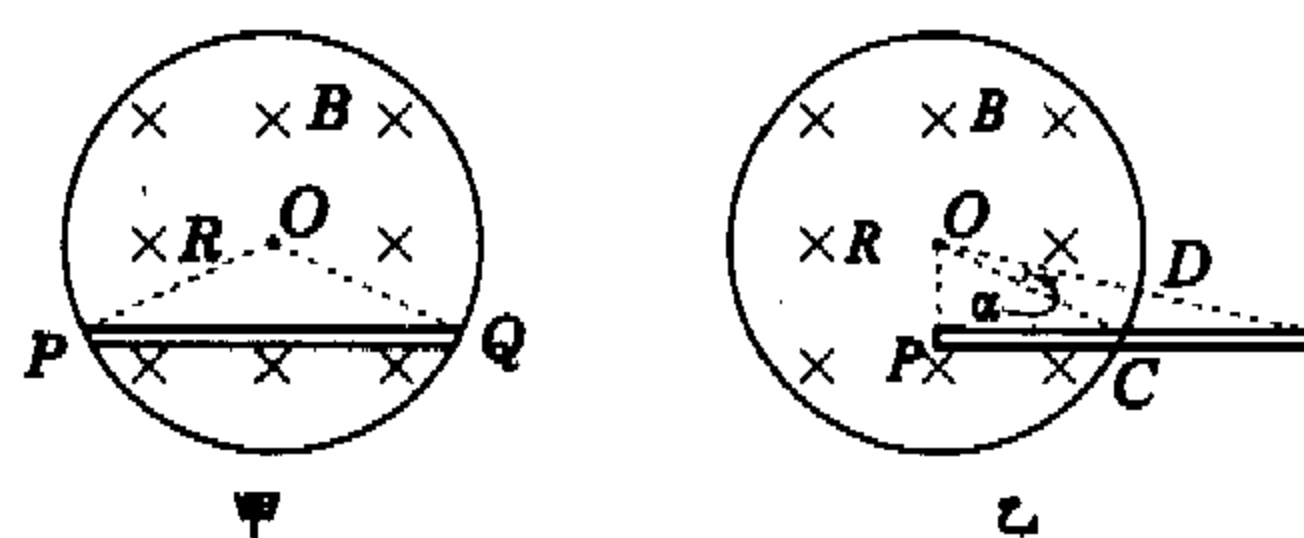
$$\alpha = \arctan \frac{2l}{\sqrt{4R^2 - l^2}} - \arctan \frac{l}{\sqrt{4R^2 - l^2}},$$

扇形 OCD 的面积

$$S_{\text{扇}} = \frac{R^2}{2} \left(\arctan \frac{2l}{\sqrt{4R^2 - l^2}} - \arctan \frac{l}{\sqrt{4R^2 - l^2}} \right),$$

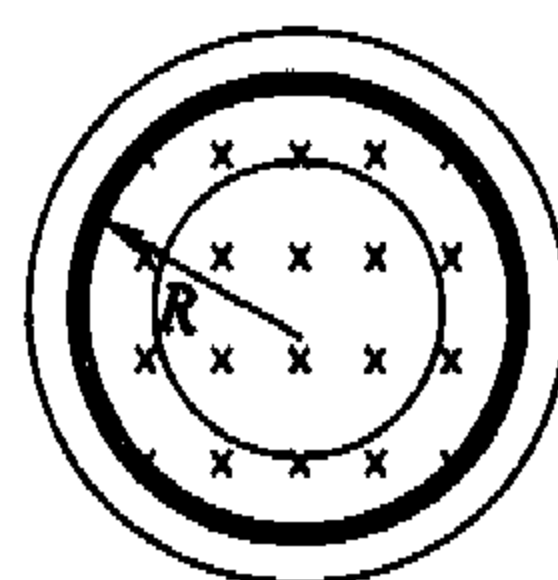
则棒中感生电动势为

$$\epsilon = k \left[\frac{l \sqrt{4R^2 - l^2}}{8} + \frac{R^2}{2} \left(\arctan \frac{2l}{\sqrt{4R^2 - l^2}} - \arctan \frac{l}{\sqrt{4R^2 - l^2}} \right) \right].$$



图答 22-3

4. 把螺线管理想化为无限长通电直螺线管,其磁场均匀且只分布在管内.由于磁场按正弦规律变化,必会引起感生电场,图答 22-4 为磁场与感生电场的大致情况.在管内 ($r \leq R$) 的每条电场线的电场强度应为 $E = k \frac{\pi r^2}{2\pi r}$,其中磁场变化率



图答 22-4

$$k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta t} = B_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega(t + \Delta t) - \sin(\omega t)}{\Delta t}$$

$$= B_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \cos \omega(t + \frac{\Delta t}{2}) \cdot \sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t}$$

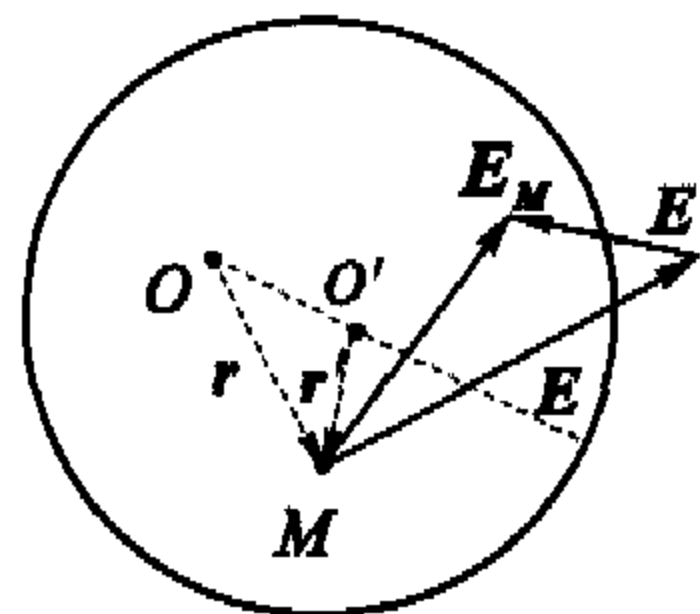
$$= B_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \omega(t + \frac{\Delta t}{2}) \cdot \sin(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t / 2}$$

$$= \omega B_0 \cos(\omega t),$$

故在管内 $E = \frac{r}{2} \omega B_0 \cos(\omega t)$;在管外 $r > R$ 处,电场强度应为

$$E = k \frac{\pi R^2}{2\pi r} = \frac{R^2}{2r} \omega B_0 \cos(\omega t).$$

5. 设挖去的空腔部分是由大小相同、变化率相同但方向相反的均匀磁场叠加而成,任取空腔中一点 M ,它对 O 及 O' 的矢径为 r 、 r' ,由于磁感应强度 B 随时间 t 线性增大,产生感生电场 $E = k \frac{r}{2}$,方向与矢径 r 垂直,如图答 22-5 所示,由于 B 随时间 t 线性增大,产生感生电场 $E' = k \frac{r'}{2}$,方向与矢径



图答 22-5



r' 垂直,由图答 22-5 两矢量三角形相似关系可知, M 点感生电场

$$E_M = E + E' = \frac{k}{2}(r - r')$$

则空腔中感生电场大小 $E_M = \frac{k}{2}d$,方向与 OO' 垂直,为一匀强场;长为 L 的金属杆 $AO'B$ 与 OO' 成 60° 角,沿电场方向长度为 $L \cos 30^\circ$,故杆中的感生电动势

$$\epsilon = E_M L \cos 30^\circ = k \frac{\sqrt{3}dL}{4}$$

6. 线圈平面与 B 平行时,金属框的总电动势

$$\epsilon = BS\omega \cdot \frac{1}{2}l^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}B\omega l^2$$

三角形线圈等效电路如图答 22-6

所示,电路中总电流 $I = \frac{\epsilon}{R}$,由含源电路的欧姆定律

$$U_{ab} = I \frac{R}{3} - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{R} \cdot \frac{R}{3} - \frac{\epsilon}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{24}B\omega l^2$$

$$U_{ca} = I \left(\frac{R}{3} + \frac{R}{6} \right) - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{R} \cdot \frac{R}{2} - \frac{\epsilon}{2} = 0$$

7. 开关闭合后,电源电流通过电路,杆在安培力作用下开始绕球面球心转动并产生与电源相反的电动势,达到稳定时,金属小球在适当位置沿球面做匀速圆周运动,回路中电流为零;如果杆与竖直线之间的夹角稳定在 $\alpha = 60^\circ$,小球轨道半径

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$,动力学方程为 $mg \tan 60^\circ = m r \omega^2$,杆上动生电动势

$$\epsilon = \frac{1}{2}B\omega r^2 = \frac{1}{2}B \sqrt{\frac{g}{r} \tan 60^\circ} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R \right)^2 = \frac{3}{8}BR \sqrt{2gR}$$

则电源电动势

$$E = \frac{3}{8}BR \sqrt{2gR} = \frac{3}{8} \times 1.0 \times 1.0 \times \sqrt{2 \times 10 \times 1.0} \approx 1.68 \text{ V}$$

8. 无限长密绕螺线管内磁场磁感应强度 $B = \mu_0 n I$,则金属

环上感生电场 $E = \mu_0 n \beta \frac{\pi r^2}{L}$, L 为所设金属圆环之周长,感生电

动势 $\epsilon = \mu_0 n \beta \frac{\pi r^2}{L} = \mu_0 n \beta \pi r^2$,

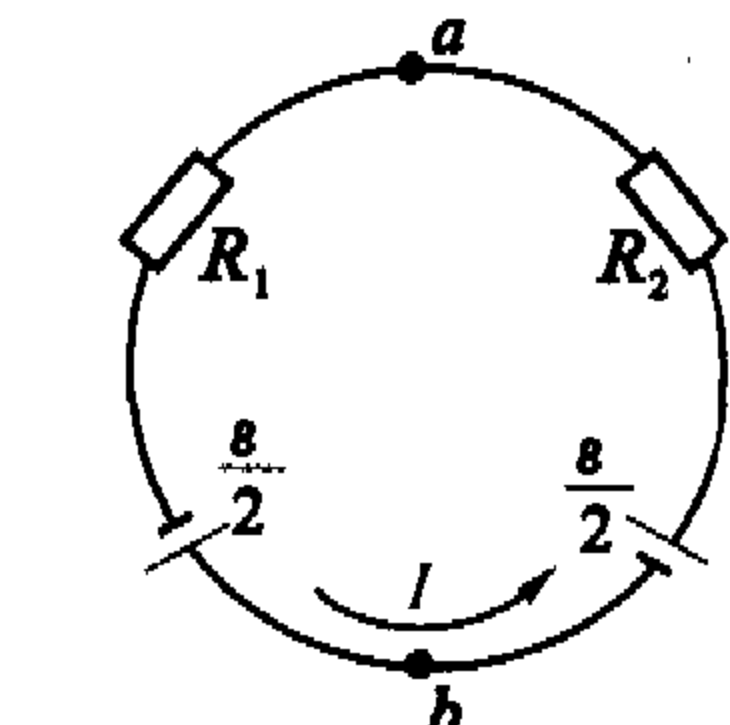
金属环等效电路如图答 22-7,金属环中感应电流 $I_0 =$

$\frac{\epsilon}{R_1 + R_2}$,由含源电路的欧姆定律

$$U_{ab} = I_0 R_1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$= \frac{R_1 \mu_0 n \beta \pi r^2}{R_1 + R_2} - \frac{\mu_0 n \beta \pi r^2}{2}$$

$$= \mu_0 n \beta \pi r^2 \frac{R_1 - R_2}{2(R_1 + R_2)}$$



图答 22-7

因 $R_1 > R_2$,故 $U_{ab} > 0$,即 $U_a > U_b$.

9. 设导线的线电阻率为 ρ ,回路 1 电阻 $R_1 = 2\pi r_1 \rho$,回路 2 电阻 $R_2 = 2\pi r_2 \rho$;回路 1 中电动势 $\epsilon_1 = B_0 \pi r_1^2$,回路 2 中电动势 $\epsilon_2 = B_0 \pi r_2^2$, ∞ 字形时等效电路如图答 22-8 甲所示,

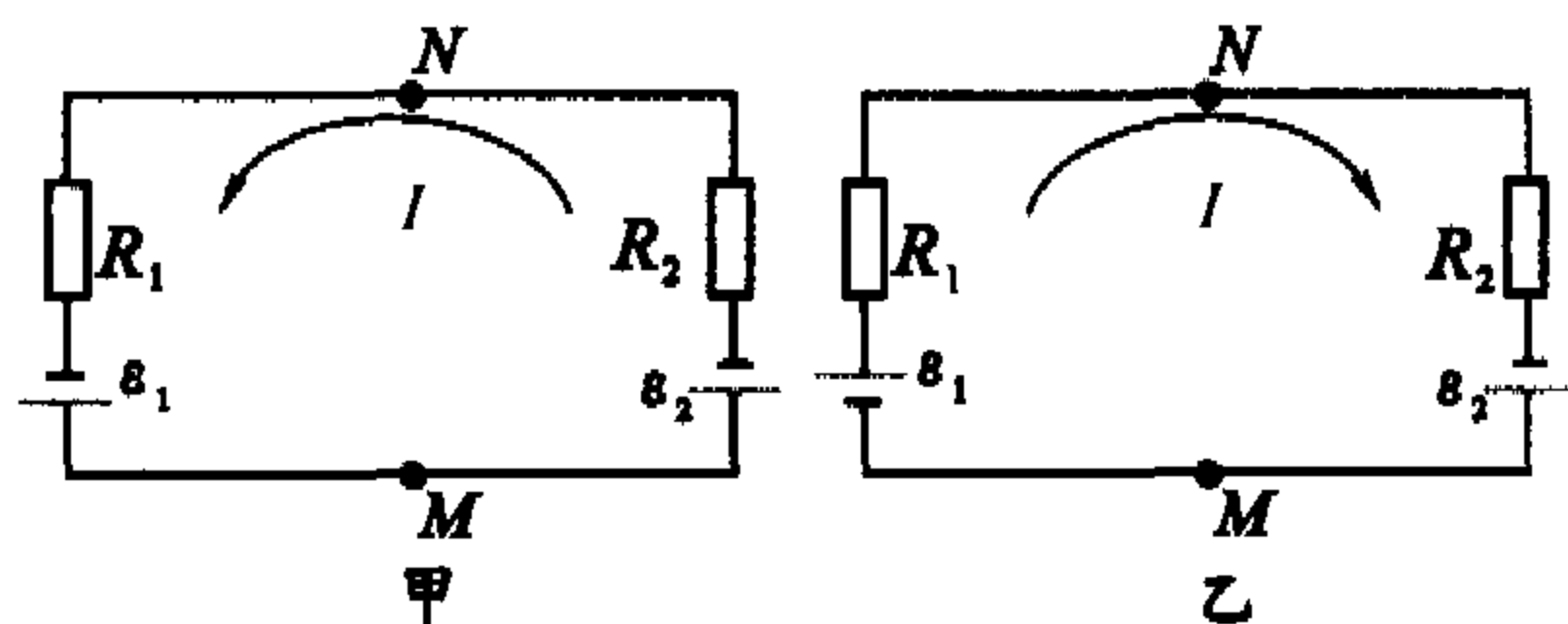
$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{B_0 \pi (r_1^2 - r_2^2)}{2\pi \rho (r_1 + r_2)} = \frac{B_0 (r_1 - r_2)}{2\rho}$$

$$\begin{aligned} U_{MN} &= \frac{B_0 (r_1 - r_2)}{2\rho} 2\pi r_2 \rho + B_0 \pi r_2^2 \\ &= B_0 (r_1 - r_2) \pi r_2 + B_0 \pi r_2^2 = B_0 \pi r_1 r_2 \end{aligned}$$

将回路 2 向左翻折在回路 1 上时,等效电路如图答 22-8 乙所示,此时电路中电流

$$I = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{B_0 \pi (r_1^2 + r_2^2)}{2\pi \rho (r_1 + r_2)} = \frac{B_0 (r_1^2 + r_2^2)}{2\rho (r_1 + r_2)}$$

$$\begin{aligned} U_{MN} &= \frac{B_0 (r_1^2 + r_2^2)}{2\rho (r_1 + r_2)} 2\pi r_2 \rho - B_0 \pi r_2^2 \\ &= \frac{B_0 (r_1^2 + r_2^2)}{r_1 + r_2} \pi r_2 - B_0 \pi r_2^2 \\ &= B_0 \pi r_1 r_2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned}$$



图答 22-8

10. 设长直螺线管在金属丝箍中引起的电动势为 ϵ_0 ,由于导体 $A-V_3-B$ 严格地沿箍的直径

放置,箍两部分上电动势各为 $\frac{\epsilon_0}{2}$,设

$U_A < U_B$ 而感生电场方向为顺时针,等效电路如图答 22-9 所示,回路 AV_1BR_1A 中无磁通量,故 $U_{R_1} = u_1$

$= 10 \text{ V}$,对回路 AR_1BV_3A ,有

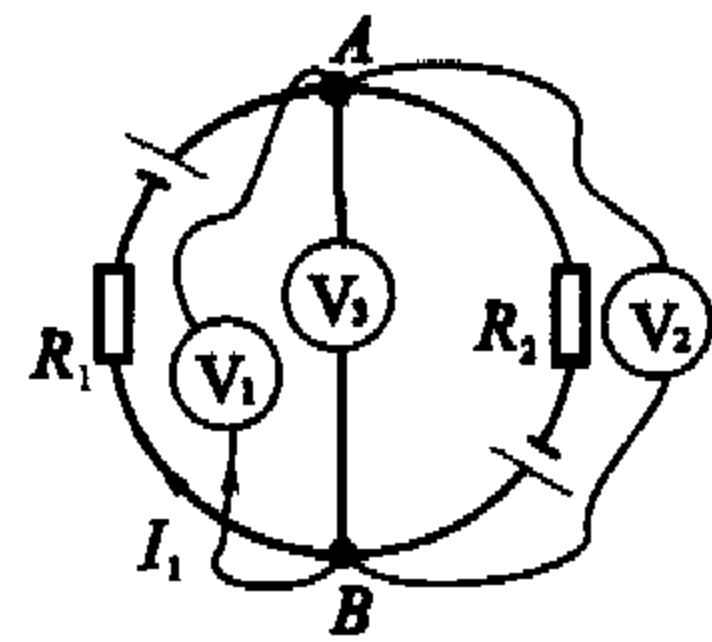
$$u_0 - U_{R_1} + \frac{\epsilon_0}{2} = 0, \frac{\epsilon_0}{2} = 5 \text{ V}$$

在回路 AR_2BV_3A ,有 $u_0 - \frac{\epsilon_0}{2} + U_{R_2} = 0, U_{R_2} = 0$,则对回路 $AV_2BR_2A, U_{R_2} + u_2 = 0, u_2 = 0$;若 $U_A < U_B$ 而感生电场方向为逆时针 $U_{R_1} = 10 \text{ V}$,但电压降方向与先前相反,对回路 AR_1BV_3A ,有

$$u_0 + U_{R_1} - \frac{\epsilon_0}{2} = 0, \frac{\epsilon_0}{2} = 15 \text{ V}$$

在回路 AR_2BV_3A ,有

$$u_0 + \frac{\epsilon_0}{2} - U_{R_2} = 0, U_{R_2} = 20 \text{ V}$$



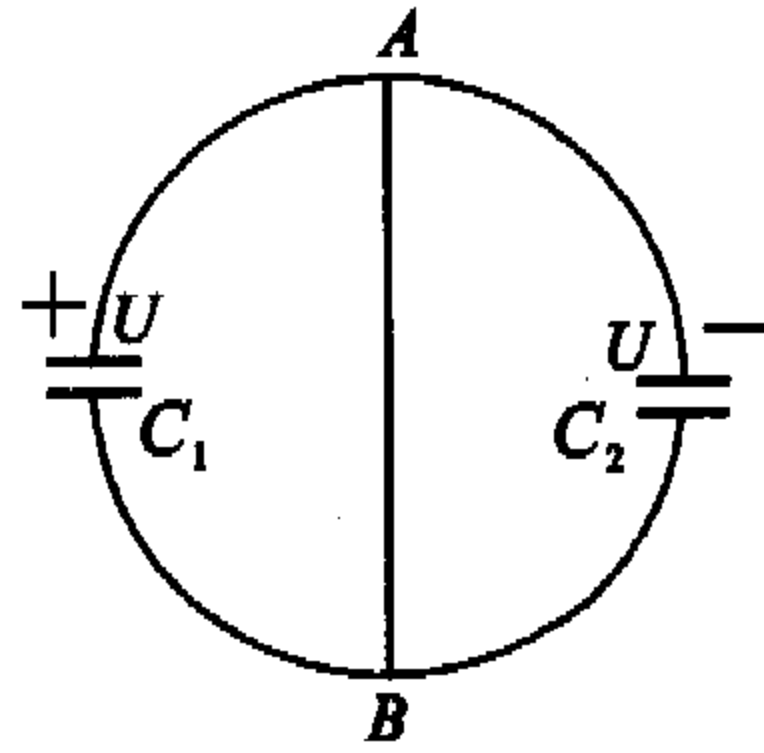
图答 22-9



则对回路 AV_2BR_2A , $u_2 = U_{R_2} = 20 \text{ V}$.

11. 金属跨接线两端电压即原来各电容器电压: $U = \frac{B_0 \pi R^2}{2T}$, 两电容器电量 $q_1 = \frac{C_1 B_0 \pi R^2}{2T}$, $q_2 = \frac{C_2 B_0 \pi R^2}{2T}$,

极性如图答 22-10 所示; 撤去跨接线并磁场停止变化, 两电容器成并联, 总电量为 $Q = \frac{B_0 \pi R^2}{2T} (C_1 + C_2)$, 每个板上电量依电容正比例分配



图答 22-10

$$Q_1 = \frac{B_0 \pi R^2 (C_1 + C_2)}{2T} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

$$Q_2 = \frac{B_0 \pi R^2 (C_1 + C_2)}{2T} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

12. (1) 打开开关时, $U_r = \frac{r}{R+r} E$;

(2) 打开开关后, 电感器上电流从 $\frac{E}{R+r}$ 减为零, 自感电动势 $\epsilon = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, 电感与电阻 r 构成回路, 故通过 G 表的电量为

$$Q = L \frac{\Delta I}{2r \Delta t} \cdot \Delta t = L \frac{\frac{E}{R+r} - 0}{2r} = \frac{LE}{2r(R+r)};$$

(3) 闭合开关到电流稳定时, L 上电流从 $0 \rightarrow \frac{E}{R+r}$,

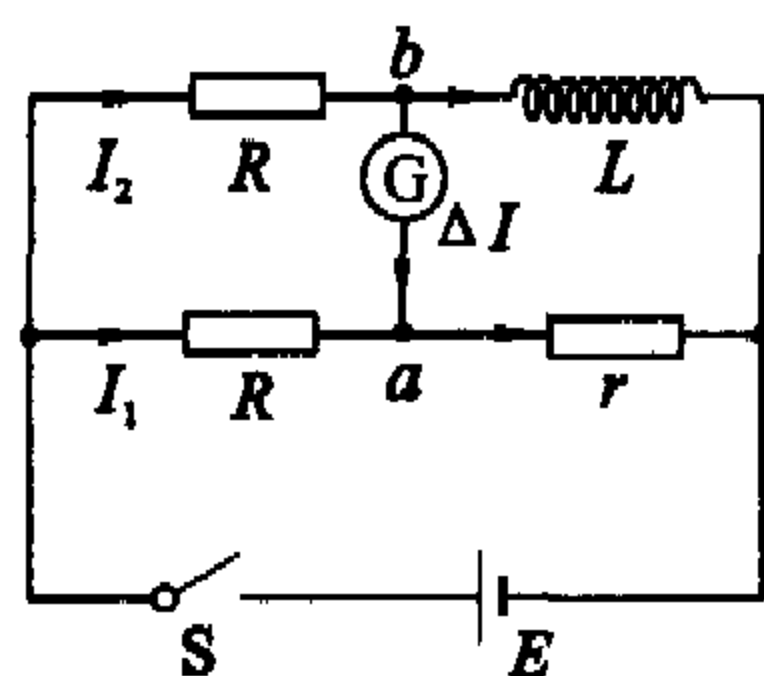
$$U_a = U_b, I_1 = I_2 = I,$$

如图答 22-11 所示, 在 GLr 构成的回路中有

$$(I + \Delta I)r = (I - \Delta I)r + \epsilon_0,$$

解得 $\Delta I = \frac{\epsilon_0}{2r} = \frac{EL}{2r(R+r)\Delta t}$, 则通

过 G 表的电量 $q = \frac{EL}{2r(R+r)}$.



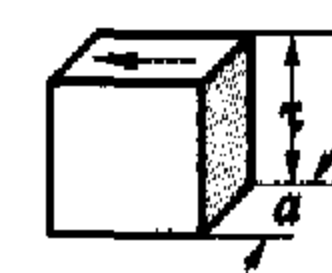
图答 22-11

13. 如图答 22-12, 处在磁场中的小金属块电阻为 $R = \rho \frac{a}{a \cdot \tau}$; 由法拉弟电磁感应定律, 小金属块中感应电动势为 $E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{B \cdot a^2}{\Delta t}$, 小金属块中产生的感应电流(涡流)

$$I = \frac{E}{R} = \frac{B \cdot a^2 \cdot \tau}{\rho \cdot \Delta t},$$

$$\because r \gg a,$$

$$\therefore \Delta t = \frac{a}{r \cdot \omega} \Rightarrow I = \frac{Ba\tau r \omega}{\rho},$$



图答 22-12

$$\text{磁制动力矩 } M = BIa \cdot r = \frac{B^2 a^2 r^2 \omega \tau}{\rho}.$$

14. 释放后棒在重力与安培力共同作用下做加速度减小的加速运动, 由于线圈自感及棒的切割运动, 产生与电源电动势相反的感应电动势, 使通过 AB 棒的电流逐渐减小, 当感应电动势与电源电动势相等时, 棒上无电流, 棒加速度为 g , 此后感应电动势大于电源电动势, 安培力与重力方向相反, 当电流达到恒定, 棒速度达到最大时, 线圈自感电动势为零, 通过电流

$$I = \frac{Blv_m - E}{R+r}, \text{ 而 } mg = lB \frac{Blv_m - E}{R+r};$$

代入数据可得 $v_m = 122.5 \text{ m/s}$.

15. 椭圆形轨道 A 处感生电场方向 $-y$, C 处感生电场方向 $-x$, 如图答 22-13 所示, 带正电粒子由静止释放, 在轨道上逆时针运动, 在 C 处对轨道无作用力, 必是所受 B_2 磁场作用力全部用作 C 处所需向心力, 设过 C 时速度为 v , 有

$$vqB_2 = m\frac{v^2}{\rho},$$

式中 ρ 是 C 处轨道曲率半径, 由椭圆性质 $\rho = a^2/b$; 椭圆轨道一周上的感应电动势 $\epsilon = k\pi r^2$, 从 A 出发, 到达 C 感生电场力做功(与路径有关)使粒子获得速度 v , 故有

$$qk\pi r^2 \left(\frac{3}{4} + n \right) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

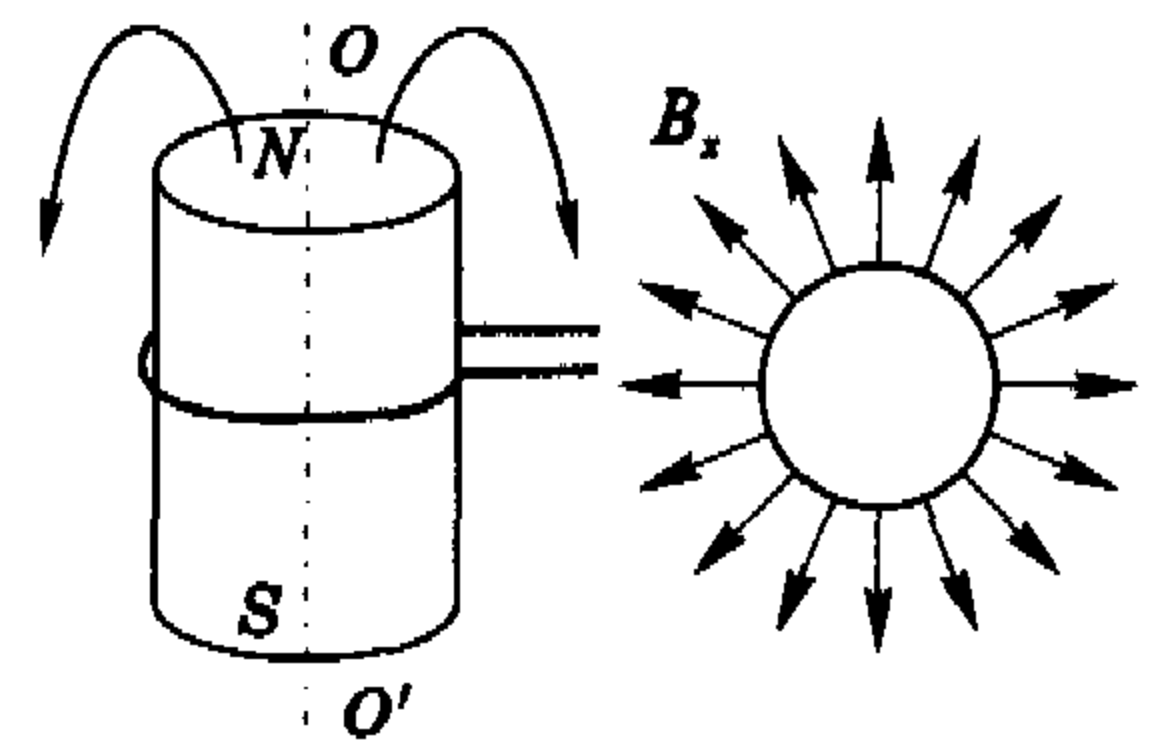
综上

$$B_2 = \frac{br}{a^2} \sqrt{\frac{(3+4n)mk\pi}{2q}}.$$

16. 圆磁棒磁极附近磁场对中心轴对称, 在同一垂直于轴的平面上辐向分量中心对称, 如图答 22-14 所示, 设线圈所在处磁场辐向分量为 B_x , 线圈摆动时“切割” B_x 而产生动生电动势, 线圈简谐运动最大速度 $v_m = 2\pi fA$, 此时有最大电动势

$$\epsilon_m = 2\pi fA \cdot L \cdot B_x,$$

L 设为线圈周长; 当线圈不动而通以电流 I , 则线圈上各段元电流均受 B_x 磁场的安培力, 方向均平行于轴 OO' , 则磁场对线圈的作用力 $F = \sum \frac{L}{n} IB_x$



图答 22-14

$= I \frac{\epsilon_m}{2\pi fA}$, 代入数据得

$$F = \frac{0.2 \times 5}{2 \times 3.14 \times 1000 \times 10^{-3}} \text{ N} \approx 0.16 \text{ N}.$$

17. 在 $0 < t < T$ 时, B 随时间 t 均匀增大, 细环处在强度 $E = \frac{B_0}{T} \cdot \frac{R}{2}$ 的感生电场中, 在感生电场力作用下, 在 T 时间内切向速度达到 v , 则有 $q \frac{B_0}{T} \cdot \frac{R}{2} \cdot T = mv$, ①

此后 B_0 不变, E 消失, 带正电小珠在洛伦兹力 qvB_0 与圆环的径向力 F_N 作用下做匀速圆周运动, 如图答 22-15 所示, 其动力学方程为

$$vqB_0 - F_N = m \frac{v^2}{R}, \text{ 即}$$

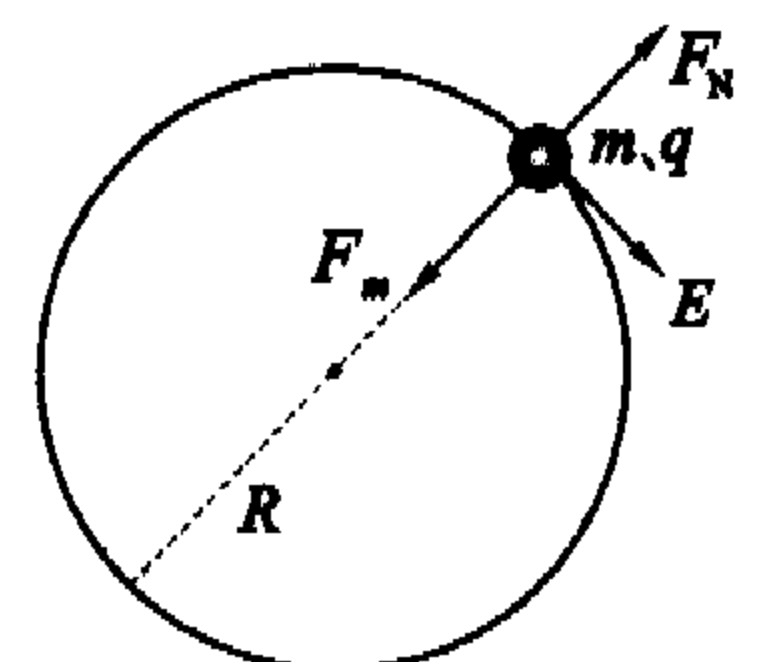
$$F_N = vqB_0 - m \frac{v^2}{R}, \quad \text{②}$$

由①式得 $v = \frac{qB_0 R}{2m}$, 代入②式中得

$$F_N = \frac{q^2 B_0^2 R}{2m} - \frac{m}{R} \left(\frac{qB_0 R}{2m} \right)^2 = \frac{q^2 B_0^2 R}{4m},$$

那么小珠对圆环的径向正压力即此力的反作用力.

18. 电容器上原电量为 $Q_1 = CU_0$, 当棒的速度达最大时电容器电量 $Q_2 = l v_m BC$, 设此过程历时 Δt , 由动量定理, 得



图答 22-15



诺贝尔奖评委清华畅谈诺贝尔奖与科学发现

什么样的科学家才能够问鼎诺贝尔奖？是什么促成了创造力的极大发挥？3月23日在清华大学，由瑞典皇家工学院院长安德士·弗洛斯特姆与诺贝尔奖三位评委博吉·约翰逊、伯蒂弗·雷德霍姆、斯文·林丁做客“清华论坛”主讲“诺贝尔奖与科学发现”，为在场的400余名清华师生揭示了诺贝尔奖评选中诸多事情，也探询了诺贝尔奖与科学探索之间的关系。

诺贝尔科学奖从1901年首次颁奖至今，已走过了一百多个年头。其间，它见证了20世纪几乎全部的重大科学发现、发明，以其权威性和公正性而受到全世界的关注和尊重。清华大学副校长谢维和在清华论坛上致辞欢迎诺奖评委代表团的到来，他说，诺贝尔奖评委代表团的来访对清华而言是一件非常重要且有很大意义的事情。

什么样的人能够获得诺贝尔奖？诺贝尔物理奖评选委员会委员、瑞典皇家工学院应用材料物理学教授、瑞典皇家科学院院士博吉·约翰逊先生列举了物理奖获得者的情况，他们中最年轻的是25岁，年纪最大的有88岁，而子女、父子、兄弟获奖的情况也有，但是他们的共同特点就是：研究成果非常具有实践的意义，而且他们都专注于一项研究相当长的时间。

而诺贝尔生理和医学奖评选委员会委员、瑞典卡罗林斯卡医学院教授兼生理及药理学院院长、瑞典皇家科学院院士伯蒂弗·雷德霍姆先生通过分析获奖的对象总结出，很少有单独从

事一项研究的人获奖的，获奖的更多的是“一对科学家”，他认为这是一个非常重要的合作方式。伯蒂弗·雷德霍姆进一步总结出，获奖者都是非常有创造力的，那么什么促成了创造力的极大发挥呢？他说，拥有很强创造力的人做事情的方式一般与常人不同，好的、促使思想自由发展的环境可以激发他们的创造力，相反一些环境也可以破坏、压抑他们的创造力；对于非常有创造力的人，应该有人专门指导、资助，保护其创造力不受到伤害，并且使得他们在研究中专注，不会因为经费而操心，这样他们就很有可能获得诺贝尔奖。

诺贝尔化学奖评选委员会委员、瑞典斯德哥尔摩大学教授兼化学学院院长、瑞典皇家科学院院士斯文·林丁先生指出，要想获得诺贝尔奖，通常研究者要非常清楚什么才是重大的发明，并且有足够多的资金和足够好的设备以比别人更快的速度做实验，而且需要大量的时间和经历的投入，还需要大量的勤奋的工作。“而且研究工作者要多思考，为什么做和怎样能够做得更好。”斯文·林丁说。

很多人都非常关心中国人在什么时候才能够获得诺贝尔奖，在提问阶段，就这个问题伯蒂弗·雷德霍姆说，现在中国人更有可能首先获得文学奖和和平奖。

(本刊资料室供稿)

$$Bl \frac{CU_0 - v_m lBC}{\Delta t} \cdot \Delta t = mv_m, \text{ 可得 } v_{\max} = \frac{lBCU_0}{m + l^2 B^2 C};$$

$$\text{而 } \eta = \frac{\frac{1}{2}mv_m^2}{\frac{1}{2}CU_0^2} = \frac{ml^2 B^2 C}{(m + l^2 B^2 C)^2} \leq \frac{ml^2 B^2 C}{(2\sqrt{ml^2 B^2 C})^2} \leq \frac{1}{4},$$

故最大效率为25%。

19. 初始时，圆环中没有电流，环中磁通量 $\Phi_y = B_0 \pi r^2$ ，竖直向下运动过程中，随 B_y 增大，环中产生感应电流，感应电流的磁通量 $\Phi_L = LI$ ，则圆环中总磁通量 $\Phi = B_0(1 - \alpha y)\pi r^2 + LI$ ，由于超导环中无电压降 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0$ ，故环中总磁通量不变，即有

$$B_0(1 + \alpha|y|)\pi r^2 + LI = B_0 \pi r^2,$$

可知 $I = \frac{B_0 \alpha \pi r^2}{L}|y|$ ，即电流随圆环向下而线性增大，而环形电流受 B_x 磁场的安培力作用，即

$$F = B_0 \beta x \cdot \frac{B_0 \alpha \pi r^2}{L}|y| \cdot 2\pi r = \frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}{L}|y|,$$

方向沿正 y ，那么圆环所受合力为

$$F = \frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}{L}|y| - mg,$$

环在平衡位置时有

$$\frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}{L}|y_0| = mg, |y_0| = \frac{mgL}{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4} = A,$$

以平衡位置为 $y=0$ ，相对于平衡位置圆环有一位移 y 时，

$$F = mg - \frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}{L}(A + y) = -\frac{2B_0^2 \alpha \beta \pi^2 r^4}{L}y,$$

可知圆环做简谐运动，周期 $T = \frac{1}{B_0 r^2} \sqrt{\frac{2mL}{\alpha\beta}}$ ；电流随时间变化规律为

$$I = \frac{mg}{2B_0 \beta \pi r^2} [\cos(\pi r^2 B_0 \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{Lm}}t) - 1].$$

20. (1) 右棒以初速 v_0 平行导轨运动时产生电动势 $\epsilon_0 = lv_0 B$ ，此后至两棒速度差恒定即达到稳定态；由动量定理：右棒 $BlQ = m(v_0 - v_1)$ ，左棒 $BlQ = mv_2$ ，

$$\text{可知两棒速度差 } v_1 - v_2 = v_0 - \frac{2BlQ}{m},$$

当达到稳定时，回路中总电动势 $lB(v_1 - v_2) = 2\frac{Q}{C}$ ，由此得

$$v_1 - v_2 = v_0 - \frac{B^2 l^2 C(v_1 - v_2)}{m}, v_1 - v_2 = \frac{m}{B^2 l^2 C + m}v_0,$$

两棒的极限速度不相同，速度差恒定。

(2) 图(a)电路中电容器充电的初始电压是右棒的动生电动势 $v_0 lB$ ，故图(b)中 $\epsilon' = v_0 lB$ ，即开始充电的电压与图(a)电路等效；充电完毕后两电路等效，应有

$$\frac{2}{C} + \frac{1}{C'} = \frac{\epsilon'}{Q} = \frac{v_0 lB}{CBlmv_0} = \frac{2(B^2 l^2 C + m)}{mC},$$

$$\text{则 } \frac{1}{C'} = \frac{2(B^2 l^2 C + m)}{mC} - \frac{2}{C} = \frac{2B^2 l^2}{m}, C' = \frac{m}{2B^2 l^2}.$$



专题 23 交变电路

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

交变电路除具有电路的共性——遵守基尔霍夫二定律、欧姆定律、能量守恒定律外,又有其个性,现概述如下。

一、正弦式交流电的平均值与有效值

面积为 S 的线圈在匀强磁场 B 中以角速度 ω 匀速转动产生正弦式交流电,其电动势表达式为 $E = BS\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = E_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ 。其平均值可由法拉第电磁感应定律求出:若从线圈平面处于中性面开始计时,每半个周期时间内,磁通量的变化量均为 $2BS$,则平均电动势 $\bar{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2BS}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi} E_m$;其有效值根据正弦式交流电的对称性,取四分之一周期时间,交流电通过电阻 R 所做的功为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{E_m^2 \sin^2(\omega \cdot i \frac{\pi}{2\omega n})}{R} \cdot \frac{\pi}{2\omega n}$$

$$= \frac{\pi E_m^2}{2\omega R} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin^2(i \frac{\pi}{2n}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{\pi E_m^2}{4\omega R}$$

则由有效值定义,电动势有效值为与交流电有相同热效应的恒定值 E ,即

$$\frac{E^2}{R} \cdot \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi E_m^2}{4\omega R}, \text{ 故 } E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

二、纯电路

在交流电路中,除电阻外,电感器因电磁感应产生的感抗、电容器因静电感应产生的容抗均对电流有阻碍作用。若电路中这些阻碍交变电流通过的因素只有一个,这样的电路称为纯电路,例如纯电阻电路、纯电感电路、纯电容电路。纯电路的规律列表如下:

	纯电阻电路	纯电感电路	纯电容电路
阻抗	$X_R = \rho \frac{L}{S}$	$X_L = 2\pi fL = \omega L$	$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\omega C}$
欧姆定律形式	$I = \frac{U}{X_R}$	$I = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}$	$I = \frac{U}{X_C} = U\omega C$
电压、电流变化的相位关系	同相	电压超前 电流 $\frac{\pi}{2}$	电流超前 电压 $\frac{\pi}{2}$
矢量图			
能量	消耗电能 $P = UI$	存储磁场能 $w = \frac{1}{2} Li^2$	存储电场能 $w = \frac{1}{2} Cu^2$

三、简单串联电路

实用交流电路中很多是由电阻、电感、电容连接而成的。

如图 23-1, 设正弦电流 $i = I_m \sin \omega t$ 通过一段由电阻 R 、电感 L 和电容 C 串联的电路, 则电阻上的电压 $u_R = RI_m \sin \omega t$, 电感上电压 $u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, 电容上电压 $u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, 根据基尔霍夫定律, 电路两端 A 、 B 间的电压为

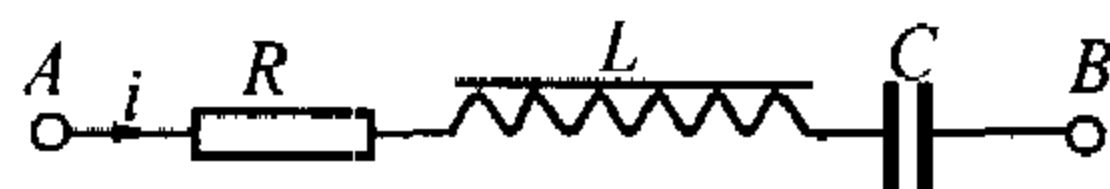


图 23-1

$$u = u_R + u_L + u_C$$

$$= RI_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$= RI_m \sin \omega t + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_m \cos \omega t,$$

设 $\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = Z$, 有

$$u = Z I_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

其中 $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$. 可知该电路等效于一个总阻抗为

$\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = Z$ 的正弦电路, 该电路的电压与电流有

一个 $\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$ 的相位差. 计

算总阻抗时, 先将感抗与容抗合并——相减为总电抗 X , 再与电阻 R 用公式 $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ 求出整个电路总阻抗 Z . 电阻、电抗与总阻抗构成如图 23-2 所示直角三角形关系, 总阻抗

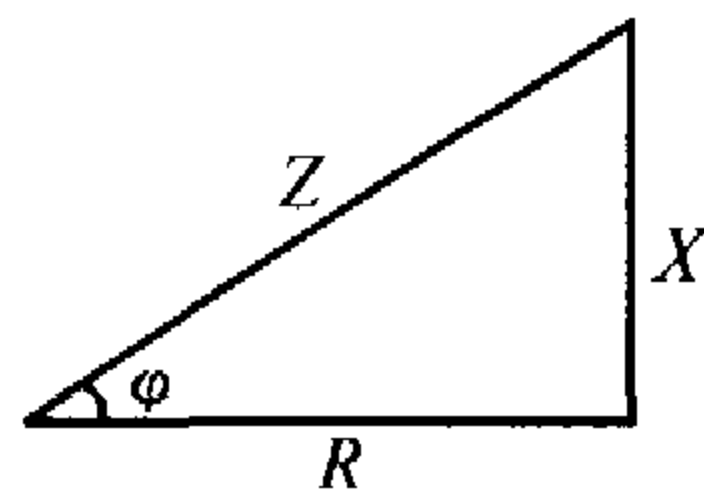


图 23-2

边与电阻边所夹锐角即为相差 φ , 故 φ 也被称为阻抗角. 同时, 电路两端电压 U 、电流 I 及电阻、电感、电容上的电压 U_R 、 U_L 、 U_C 的相位关系也可用如图 23-3 所示矢量图表示, 图中有向线段长度表示相应的电压、电流有效值。

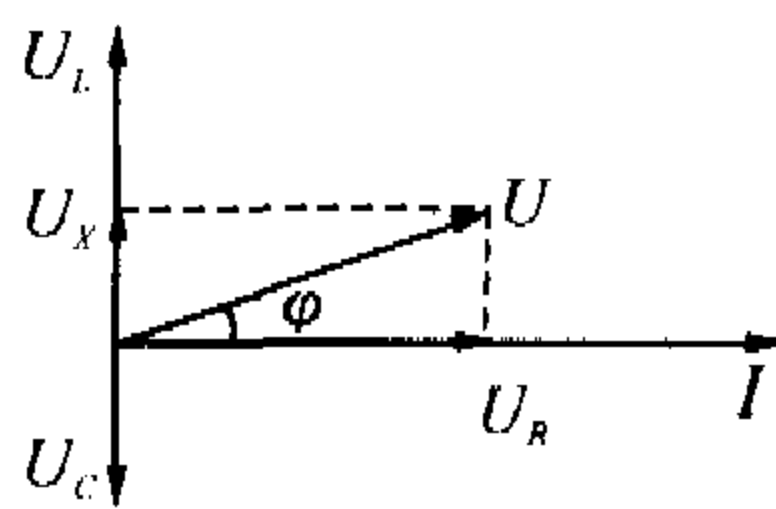


图 23-3

四、简单电路的暂态过程

实用电路中, 由于电路的接通或断开, 各种类型的改接, 电路参数或电源的变化, 信号的突然注入等等原因, 会使电路稳定状态发生改变, 从一种稳定态过渡到另一种稳定态的过程称暂态过程. 电路发生变化时, 电感上的电流(磁通量)和电容上电压(电量)只能是渐变而不可能是跃变。

1. RC 充放电电路

电容器通过充电过程存储电能. 如图 23-4, 原不带电的电容器与电源接通, 两个极板上带上等量异种电荷, 板间形成电场, 电荷从电源向电容器极板移动形成充电电流, 充电完毕, 电流消失, 电容器达到稳定态. 设充电过程中的 t 时刻, 电容器极板上电量为 q , 电路中电流为 I , 在充电元过程 Δt

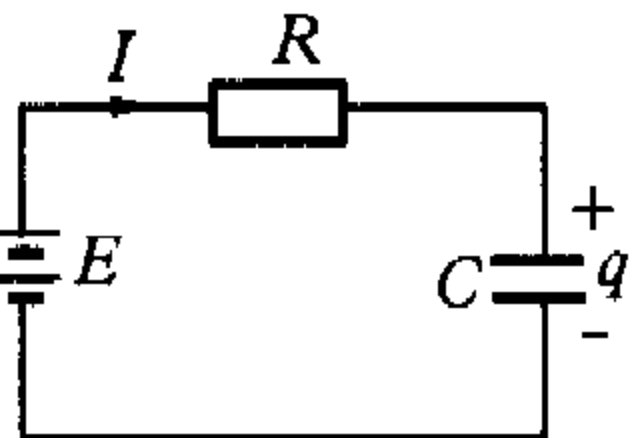


图 23-4

$= \frac{t}{n} (n \rightarrow \infty)$ 中, 由基尔霍夫定律得

$$E = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t} R + \frac{q_{i+1}}{C},$$

即有 $\frac{t}{nRC} = \frac{q_{i+1} - q_i}{CE - q_{i+1}} = \frac{(CE - q_i) - (CE - q_{i+1})}{CE - q_{i+1}},$

则 $\frac{CE - q_i}{CE - q_{i+1}} = 1 + \frac{t}{nRC},$

对该式等号两边取 n 次方极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{CE - q_i}{CE - q_{i+1}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{nRC} \right)^{\frac{nRC}{t}} = e^{\frac{t}{RC}}, \frac{CE - q_i}{CE - q} = e^{\frac{t}{RC}},$$

$$q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad \text{①}$$

此即电容器充电时电荷量随时间变化规律, 同理可得充电电流的变化规律为

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad \text{②}$$

在①、②两式中, 乘积 RC 叫 RC 电路的时间常数, 当 $t = RC$ 时, $q = CE(1 - e^{-1}) = 0.63CE$, $I = \frac{E}{R} e^{-1} = \frac{0.37E}{R}$, 即经 $t = RC$ 时间, 电容器电荷已达最大值的 63%, 而充电电流已从最大值减为最大值的 37%, 时间常数反映充电过程的快慢, R 越大、 C 越大, 充电过程越长.

带电电容器放电电路如图 23-5, 若初始电容器带电量 Q , 放电时有

$$q = Q \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, I = \frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

放电快慢也由时间常数 RC 决定.

2. LR 自感电路

LR 电路中由于自感而使电路具有保持原有电流“不变”的性质, 即当电流增大时有一滋长过程, 当电流减小时有一衰减过程. 如图 23-6 所示 LR 电路, 电源电动势 E . 接通开关 S , 由于自感产生自感电动势, 电流有一滋长过程, 某时刻 t 电路中电流为 I , 则由基尔霍夫定律得

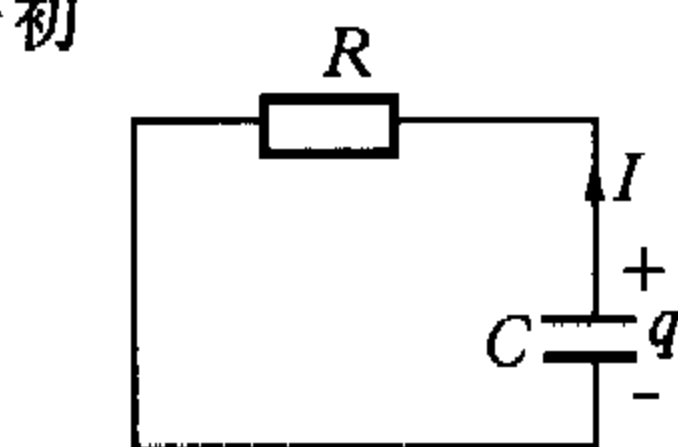


图 23-5

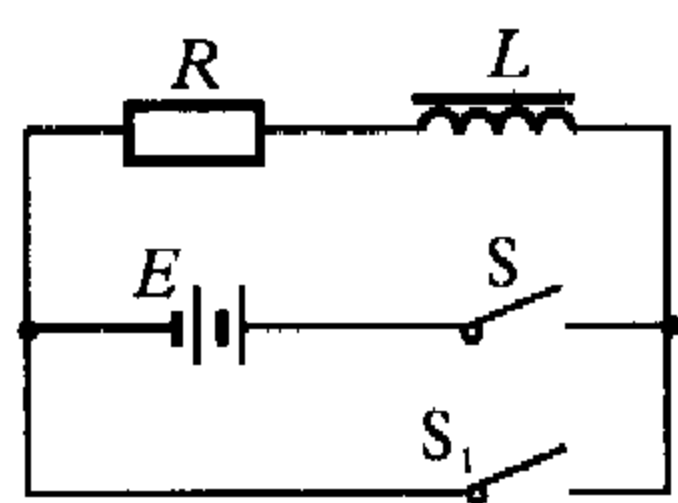


图 23-6

$$E - L \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta t} = I_{i+1} R,$$

即有 $\frac{Rt}{Ln} = \frac{I_{i+1} - I_i}{\frac{E}{R} - I_{i+1}} = \frac{(\frac{E}{R} - I_i) - (\frac{E}{R} - I_{i+1})}{\frac{E}{R} - I_{i+1}},$

则

$$\frac{\frac{E}{R} - I_i}{\frac{E}{R} - I_{i+1}} = 1 + \frac{Rt}{Ln},$$

对该式等号两边 n 次方取极限可得

$$I = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

由上式知, LR 电路接通电源后, 电流是逐渐增大到无电感时的电流稳定值 $\frac{E}{R}$ 的, 这里有一个时间延迟, 而当 $\tau = \frac{L}{R}$ 时, $I = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) = \frac{0.63E}{R}$, 即电流达到稳定电流值的 63%, $\tau = \frac{L}{R}$ 反映电流滋长的快慢, 称为 LR 电路的弛豫时间.

当电流达到稳定值后, 若切断电源开关 S 且同时闭合开关 S_1 , 由于自感产生自感电动势, 电流有一衰减过程, 电路中满足 $I_{i+1} = L \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta t}$, 则 $I = \frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$. 此过程经一段弛豫时间, 电流减少为稳定值的 37%.

3. LC 谐振电路

LC 电路是由自感线圈和电容器所组成的电路, 是一种简单的能够产生大小和方向都做周期性变化的振荡电流的电路. 由 LC 回路产生的振荡电流是一种按正弦规律变化的高频交变电流. 在 LC 回路中, 若先对电容器充电, 此后, 电容器历经放电、反向充电、反向放电、充电的过程, 电容极板上的电荷 q 、电路中的振荡电流 i 、电容器里的电场强度 E (极板间电压 u)、线圈磁场的磁感应强度 B 均按正弦规律作周期性变化, 即产生电磁振荡, 其振荡周期为 $T = 2\pi \sqrt{LC}$.

五、三相交流电路

三相交流电路是由三个相差互为 $\frac{2\pi}{3}$ 的同频率正弦电动势作用下的正弦交流电路, 三相电动势的数学表达式分别是

$$e_A = E_m \sin \omega t, e_B = E_m \sin (\omega t - \frac{2\pi}{3}), e_C = E_m \sin (\omega t - \frac{4\pi}{3}),$$

三相电动势的波形图与矢量图如图 23-7 所示. 前述交流电路的规律与电路分析方法对三相电路完全适用, 同时, 三相电路由于其对称性而具有一些特殊规律.

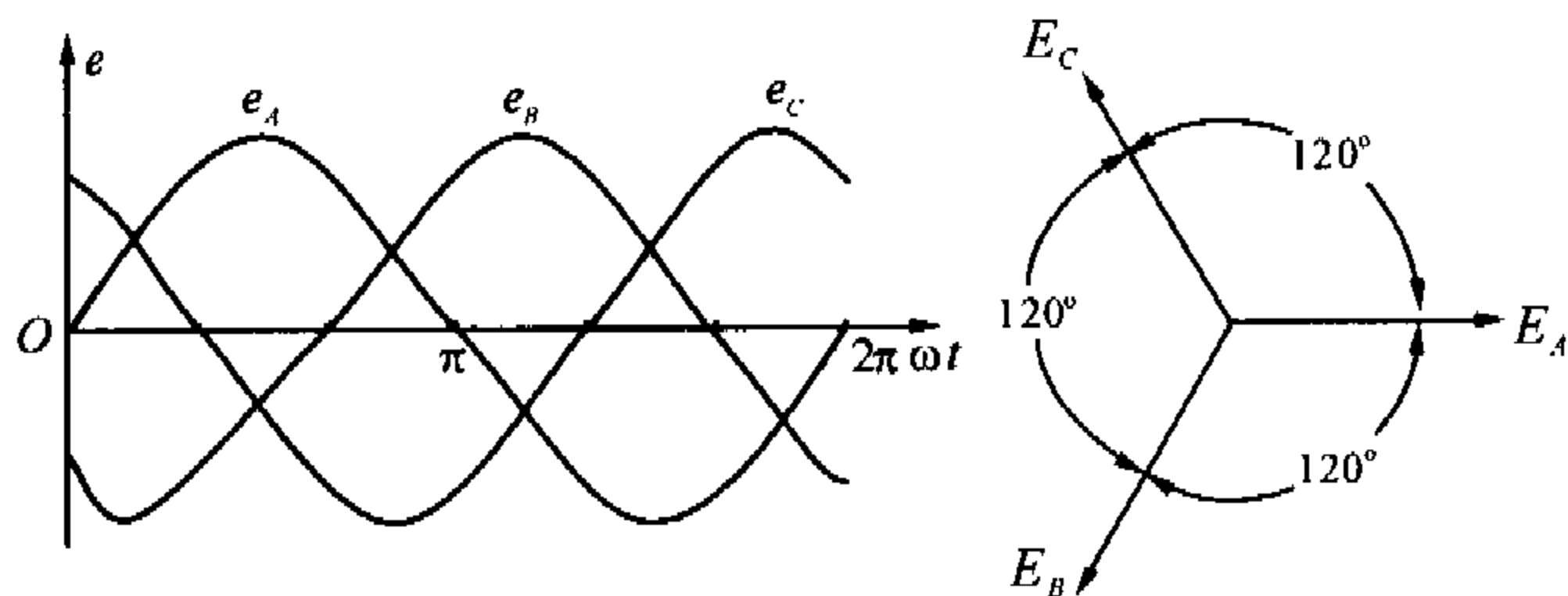


图 23-7

三相电路中电源与负载有两种基本连接方式, 即星形连接与三角形连接.

1. 星形连接 (Y 连接)

把三相发电机的三相线圈绕组末端 X, Y, Z 接在一起, 此点称中性点, 标为 O , 把始端 A, B, C 引出来, 如图 23-8 左边所



示即为三相电源的星形连接方式;该图右边是对称的三相负载(实用中如三相电动机、三相变压器等)星形连接, O' 为三相负载的中性点,将星形电源和星形负载用三根导线——称为端线(火线)——连接,电源和负载的中性点也用导线——称为中线(地线)——连接,就组成了星形连接的三相四线制,在负载对称的情况下,中线上并无电流通过,可以不接,只有三根端线,此为三相三线制.在三相电源的星形连接中,每相线圈两端电压即相电压与两根端线间电压即线电压是不同的,它们间的关系是

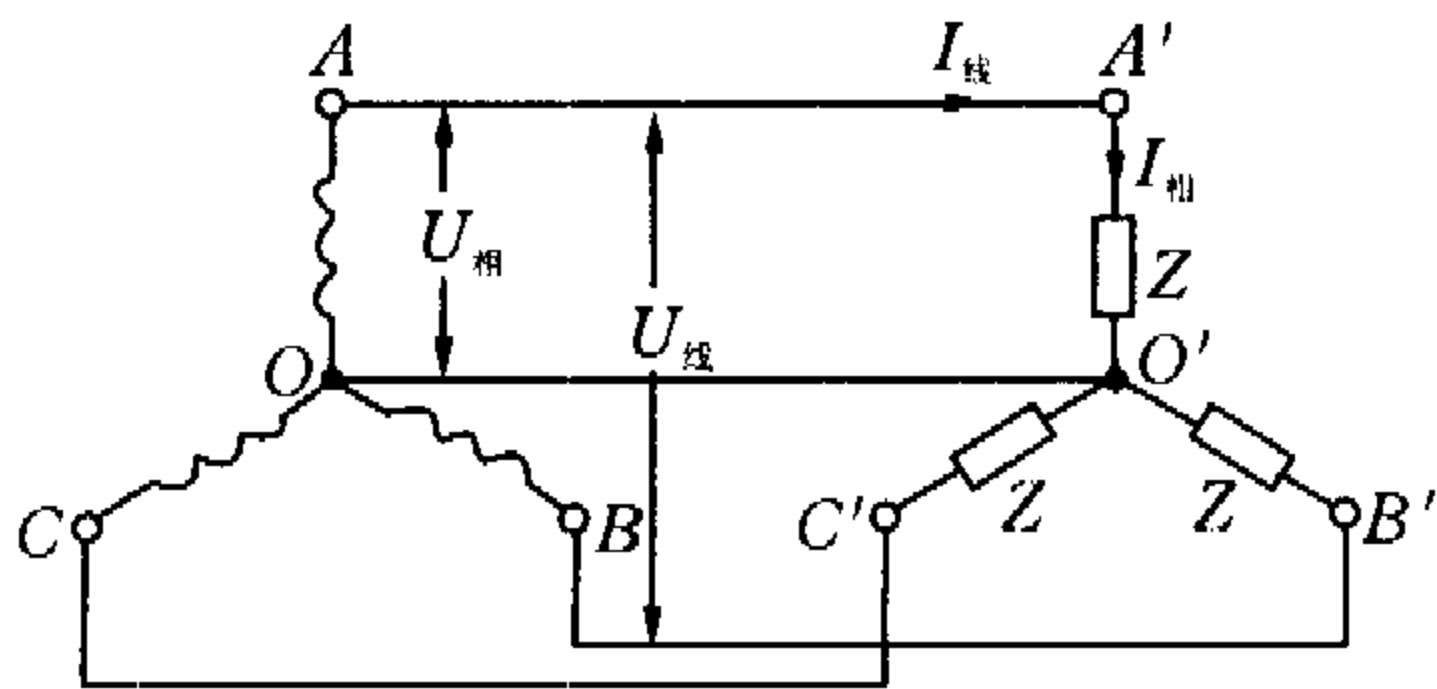


图 23-8

$$u_{\text{线}} = U_{\text{相}} [\sin \omega t - \sin (\omega t - \frac{2\pi}{3})]$$

$$= 2U_{\text{相}} \cos (\omega t - \frac{\pi}{3}) \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}U_{\text{相}} \sin (\omega t + \frac{\pi}{6}),$$

即线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍, $U_{\text{线}} = \sqrt{3}U_{\text{相}}$,且相位超前 $\frac{\pi}{6}$;三相负载的星形连接中,线电流等于相电流,每相电路中均有

$$I_{\text{相}} = \frac{U_{\text{相}}}{Z}.$$

2. 三角形连接(Δ 连接)

若把三相电源的三个绕组始端 A、B、C 与末端 X、Y、Z 依次相接: X 与 B、Y 与 C、Z 与 A 相接,再从各结点引出端线来,如图 23-9 左边所示,就得到三相电源的三角形连接方式.对称的三相负载也作三角形连接如图 23-9 右边所示,将三角形电源和三角形负载用三根端线连接,就组成了三角形连接的三相电路.在三相电源的三角形连接中,相电压与线电压相同;负载方面,每相负载上的电压是线电压,每相电路中均有 $I_{\text{相}} = \frac{U_{\text{线}}}{Z}$,当三相负载对称时,三相有相同的相电流,线电流是两个相电流的代数和,即

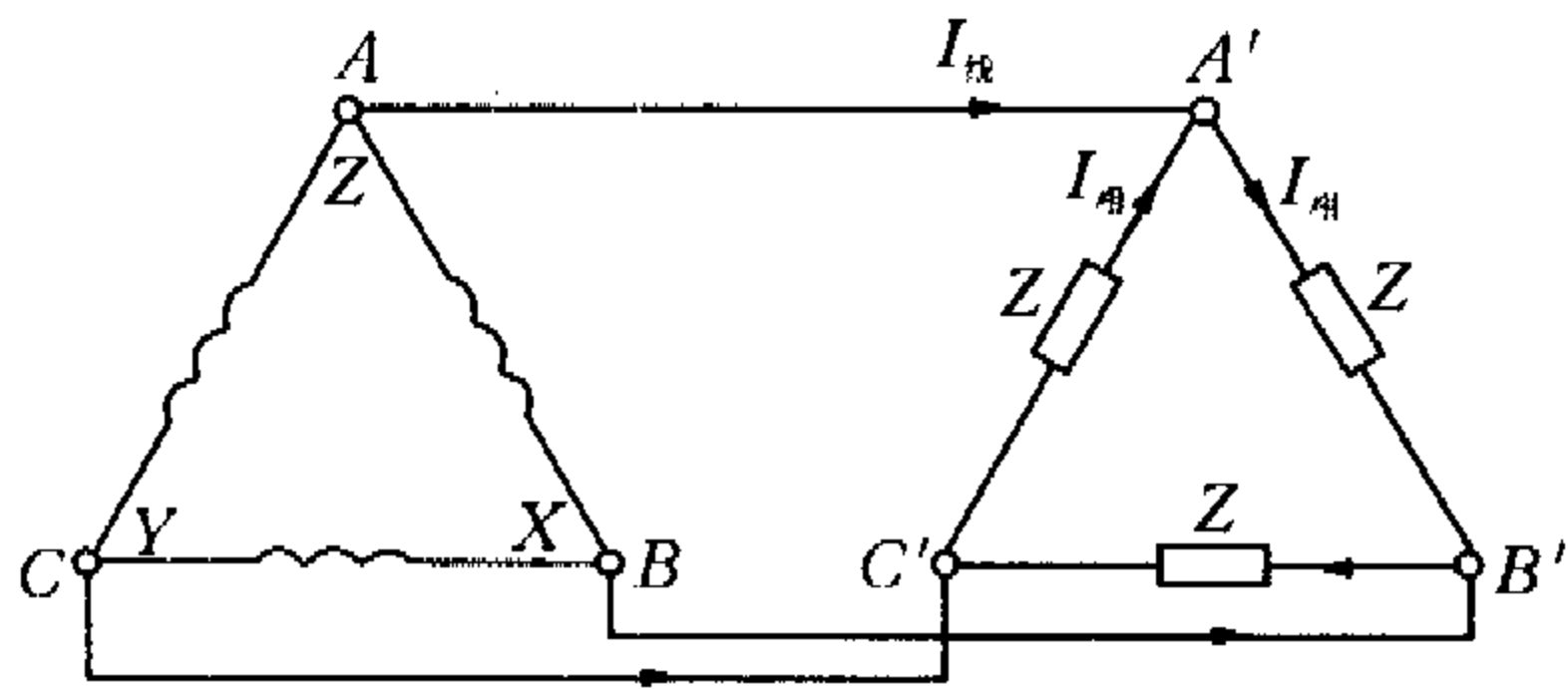


图 23-9

$$i_{\text{线}} = I_{\text{相}} [\sin \omega t - \sin (\omega t - \frac{4\pi}{3})] = \sqrt{3}I_{\text{相}} \sin (\omega t - \frac{\pi}{6}),$$

它们间的关系是 $I_{\text{线}} = \sqrt{3}I_{\text{相}}$,且相位落后 $\frac{\pi}{6}$.

在三相三线制下星形电源也可以与三角形负载连接,三

角形电源也可以与星形负载连接.在对称的情况下,上述三角形连接和星形连接中电流、电压的相值与线值之间的关系仍然适用.

下面,我们分析各类典型的交变电路.

例 1 如图 23-10 所示的电路已经达到稳定状态,两个无内阻电源电动势值分别为 $E_1 = E_0 \sin^2 \omega t$, $E_2 = E_0 \cos \omega t$; 两个电阻 $R_1 = R_2 = R$, 电感 $L = \frac{R}{2\omega}$, 电容 $C = \frac{1}{2\omega R}$, 试求通过电阻 R_1 的电流 $i_1(t)$.

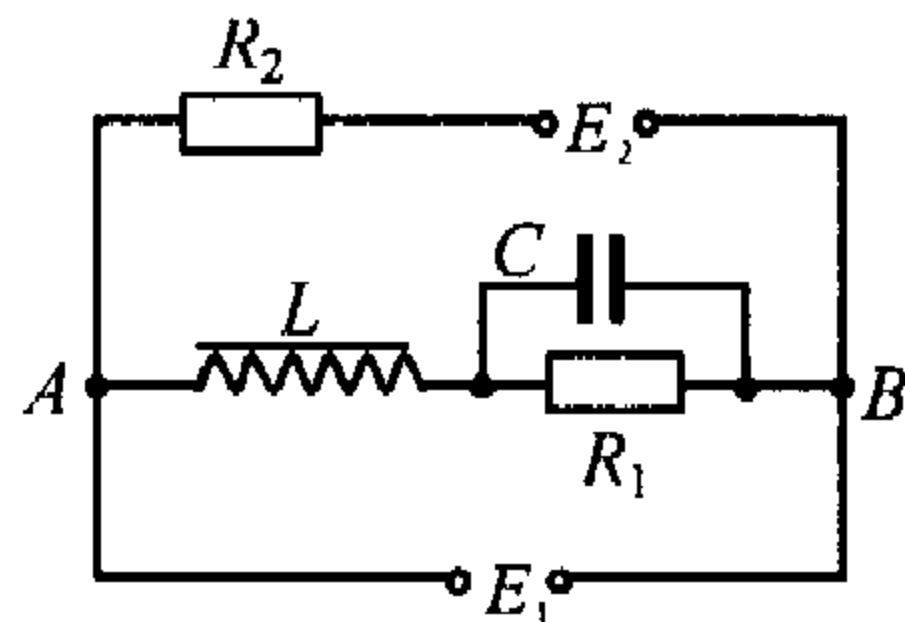


图 23-10

分析与解 由于电路中电源的电动势 $E_1 = E_0 \sin^2 \omega t = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cos 2\omega t$, 电动势 $E_2 = E_0 \cos \omega t$, 由电流叠加原理,两电动势同时存在时在 R_1 上产生的电流 $i_1(t)$, 可视作直流电源 $\frac{E_0}{2}$ 、圆频率为 2ω 的正弦式交流电源 $-\frac{E_0}{2} \cos 2\omega t$ 及圆频率为 ω 的正弦式交流电源 $E_0 \cos \omega t$ 独立存在时各自在电路中的电阻 R_1 上产生的电流之和,下面分别考虑各电源独立作用的情况.

直流电源 $\frac{E_0}{2}$ 独立存在时, L 短路、 C 断路, R_1 两端电压即电动势 $\frac{E_0}{2}$, 则产生电流 $i_{\text{直}} = \frac{E_0}{2R}$.

正弦式交流 $-\frac{E_0}{2} \cos 2\omega t$ 独立存在时,电感器感抗 $X_L = 2\omega \cdot \frac{R}{2\omega} = R$, 电容器容抗 $X_C = \frac{1}{2\omega \cdot \frac{1}{2\omega R}} = R$, A、B 间电压 $u_{AB} = \frac{E_0}{2} \sin (2\omega t + \frac{3\pi}{2})$, $U_{AB} = \frac{E_0}{2}$. 由于电阻与容抗相等,通过 R_1 与 C 的电流大小相等,即 $I_R = I_C$, 而电容器电流 I_C 超前 R 与 C 并联电压 U_{RC} 的相位为 $\frac{\pi}{2}$, R 上电流 I_R 与电压同相位,则由图 23-11 矢量图所表示的相位关系可知,通过电感 L 的电流大小为 $I_L = \sqrt{2}I_R$, 超前于 I_R 的相位为 $\frac{\pi}{4}$. 在电感上,电压 U_L 超前

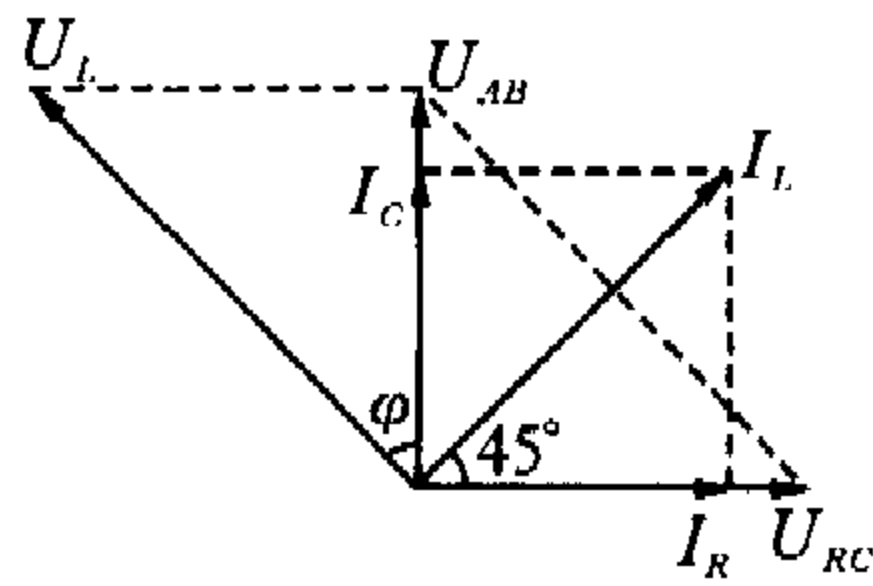


图 23-11

电流 I_L 的相位为 $\frac{\pi}{2}$, 大小为 $U_L = I_L X_L = \sqrt{2}I_R R = \sqrt{2}U_{RC}$, 故图中 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 于是有

$$U_{RC} = U_{AB} = \frac{E_0}{2}, I_R = \frac{E_0}{2R}.$$

因为 R 上电流落后于 U_{AB} 的相位为 $\frac{\pi}{2}$, 故可得此电源引起的电流为



$$i_{2\omega} = \frac{E_0}{2R} \sin(2\omega t + \pi) = -\frac{E_0}{2R} \sin 2\omega t.$$

最后是只存在正弦式交流电源 $E_2 = E_0 \cos \omega t$, 因电源 E_1 无电阻, 相当于将 A、B 短路, 故无电流通过 R_1 . 则通过电阻 R_1 的电流为

$$i_1(t) = \frac{E_0}{2R} (1 - \sin 2\omega t).$$

例2 如图 23-12 所示, 有一金属圆环, 它的轴竖直向上, 今将它放置在电磁铁上方距离为 y 处, 电磁铁线圈中电流 $i = I_m \cos \omega t$, 假定 M 为在此位置的圆环和电磁铁之间的互感系数, 圆环的电阻为 R . 试求:

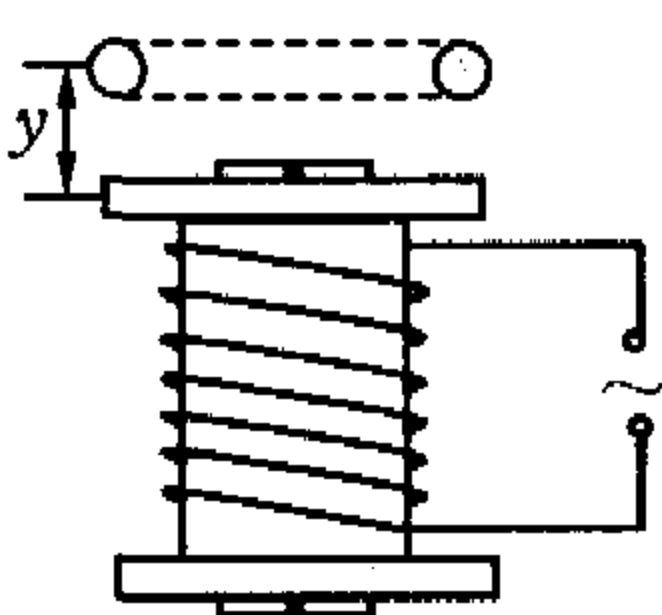


图 23-12

- (1) 金属圆环内的感应电流;
- (2) 说明当圆环由此下落时作用于圆环的电磁力的方向.

分析与解 在演示电磁感应现象时, 常常会表演一个“跳环实验”, 这个实验把一个铝环套在一个直螺线管的铁芯上, 当直螺线管通以 50 Hz 交流时, 可以看到铝环克服重力而跳起. 通过本题讨论, 我们可对跳环实验作出解释.

先来求金属圆环内的感应电动势. 由于电磁铁线圈中电流按 $i = I_m \cos \omega t$ 变化, 由法拉第电磁感应定律 $E = M \frac{\Delta I}{\Delta t}$, 金属圆环中有感应电动势产生, 即

$$\begin{aligned} E &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \frac{\Delta I}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M I_m \frac{\cos \omega(t + \Delta t) - \cos \omega t}{\Delta t} \\ &= M I_m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \omega(t + \frac{\Delta t}{2}) \sin \omega \frac{\Delta t}{2}}{\Delta t} \\ &= M I_m \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega(t + \frac{\Delta t}{2}) \sin \omega \frac{\Delta t}{2}}{\omega \frac{\Delta t}{2}} = M I_m \sin \omega t. \end{aligned}$$

可以看到, 圆环上的感应电动势的变化比施感电流及其磁场的变化落后 $\frac{\pi}{2}$ 的相位.

再来考虑圆环中的感应电流. 这里必须考虑到金属环除了电阻 R , 还有感抗 $X_L = \omega L$, L 为圆环电感. 故圆环上感应电流通过一 RL 串联电路, 总阻抗为 $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, 且感应电流相位落后于电动势 $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 故通过圆环的感应电流为

$$i_{\pi} = \frac{M I_m \omega}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

当圆环由电磁铁上方 y 处下落时, 作用于圆环的电磁力 F 是斥力(向上)还是引力(向下); 要视 i 与 i_{π} 的方向关系确定: 若两者处于方向一致状态, 圆环将被电磁铁吸引向下, 反之将因受斥力作用而向上. 我们来作两电流的图象如图 23-13, 由图可知由于两电流有一相位差 $\varphi = (\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega L}{R})$, 使

在电流变化的每个周期内, 两电流及其磁场的方向在 $\Delta t_1 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{2\varphi}{\omega}$ 时间内同向, 而 $\Delta t_2 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\varphi}{\omega}$ 时间内反向, 即反向的时间占多, 故金属圆环受到的平均电磁力为斥力, 方向向上.

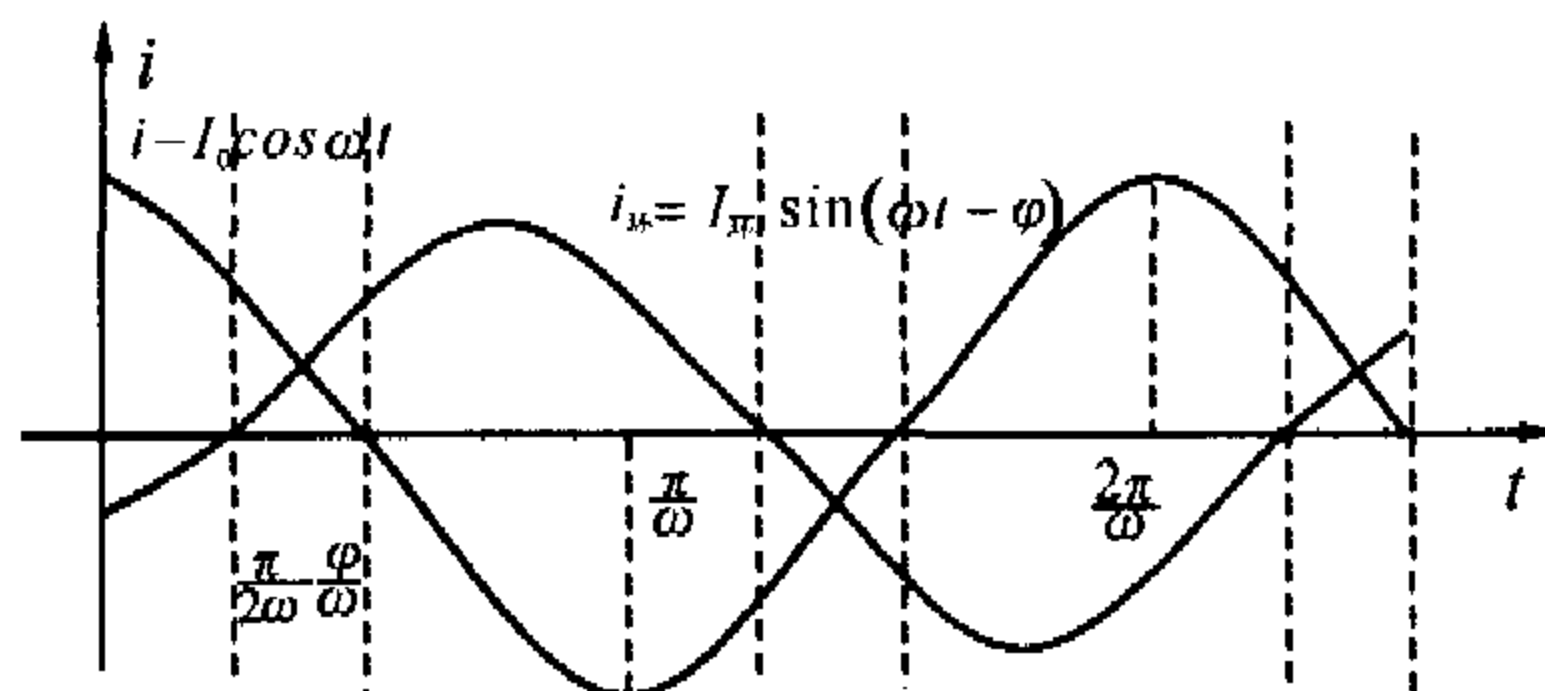


图 23-13

例3 图 23-14 为一测子弹速度的机构的示意图, 已知电源 $E = 100 \text{ V}$, 电阻 $R = 6 \text{ k}\Omega$, 电容 $C = 0.1 \mu\text{F}$, 距离 $l = 3 \text{ m}$. 设电路已达稳态. 测子弹速度时, 子弹先将开关 S 打开, 经距离 l 飞至 S_1, S_2 连锁开关, 使 S_1 打开的同时 S_2 闭合, 若此时冲击电流计 G 测出电荷 $Q = 3.45 \mu\text{C}$, 求子弹的速度.

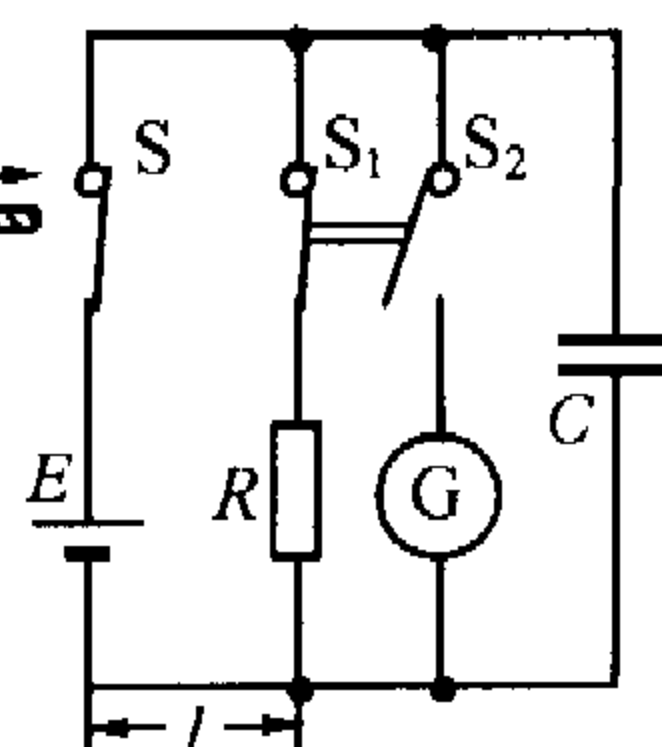


图 23-14

分析与解 本题介绍了 RC 电路的一种实际应用. 电路处于稳定态时, 电容器上电量为 $Q_0 = CE = 0.1 \times 100 \mu\text{C} = 10 \mu\text{C}$; 飞行的子弹将开关 S 打开后, 在子弹从 S 飞至 S_1 的时间 $t = \frac{l}{v}$ 内, RC 电路处于放电过程, 连锁开关 S_1 打开、同时 S_2 闭合, 电容器极板上原通过电阻 R 放电剩余的电荷现通过冲击电流计 G 而中和, 故有

$$Q = Q_0 e^{-\frac{l}{RCv}} = Q_0 e^{-\frac{l}{RCv}}, v = \frac{l}{RC \ln \frac{Q_0}{Q}} \approx 4.69 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

例4 如图 23-15 所示电路中, $E = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$. 求下列条件下, I_1, I_2, I_3 的值. (1) 开关 S 刚接通时; (2) 开关 S 接通长时间后; (3) 开关 S 接通后再切断的瞬间; (4) 开关 S 切断长时间后.

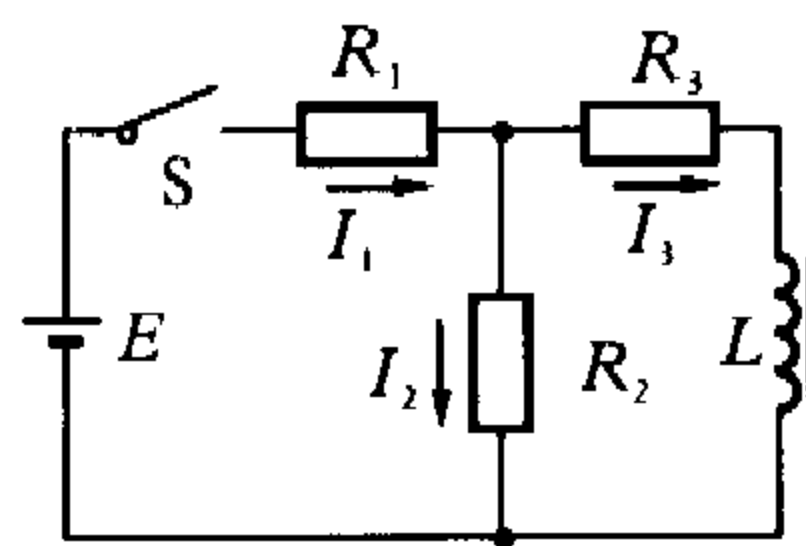


图 23-15

分析与解 (1) 开关 S 接通时, L 与 R_3 串联支路上, 由于 L 自感产生自感电动势, 电流从零开始增大, 故开关 S 刚接通瞬间, $I_3 = 0$, $I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{3} \text{ A}$;

(2) S 接通、电路稳定时, 电路总电阻为 $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 22 \Omega$, 则通过 R_1 的电流为 $I_1 = \frac{50}{11} \text{ A}$; 通过 R_2 的电流为 $I_2 = \frac{30}{11} \text{ A}$; 通过 R_3 及电感 L 的电流 $I_3 = \frac{20}{11} \text{ A}$;

(3) 再来看 S 接通后再切断的情形: 切断瞬间, R_1 上电流



立刻为零, 而由 R_2, R_3, L 构成的 LR 回路中, 电流有一衰减过程, 衰减电流 $I = I_3 e^{-\frac{R_2+R_3}{L}t}$, 切断瞬间即 $t=0$ 时, L, R_2, R_3 回路中电流为 $\frac{20}{11}$ A;

(4) 开关 S 切断长时间后, 即电路达到稳定后, 三个电阻上均无电流通过。

例 5 如图 23-16 所示, 自感系数分别为 L_1 和 L_2 的两个线圈, 通过开关 S_1 和 S_2 接入电动势为 E 、内电阻为 r 的电源上, 开始时两个开关都断开, 当开关 S_1 闭合并且通过线圈 L_1 的电流达到某个值 I_0 后, 开关 S_2 闭合. 求在开关 S_2 闭合后, 通过线圈 L_1 和 L_2 的稳定电流. 线圈的电阻不计。

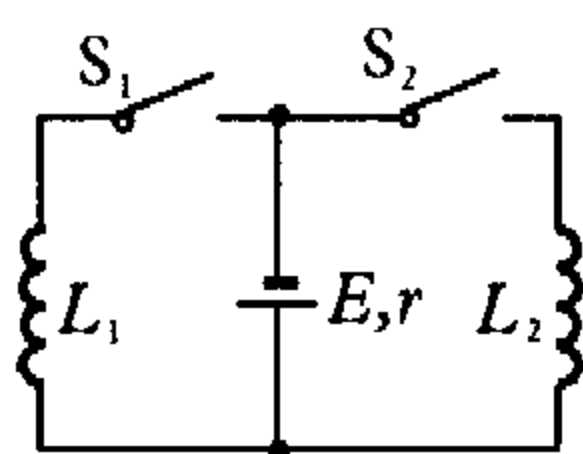


图 23-16

分析与解 开关 S_2 闭合瞬时, 通过线圈 L_1 的电流为 I_0 , 通过线圈 L_2 的电流为零. 设达到稳定时, 通过两线圈的电流分别为 I_1 和 I_2 , 而通过电源的电流为 $\frac{E}{r}$, 由节点电流的基尔霍夫定律, 有

$$I_1 + I_2 = \frac{E}{r},$$

在开关 S_2 闭合至电流稳定的时间内, 两并联线圈上均产生自感电动势: 线圈 L_1 电流从 I_0 减为 I_1 , 故电动势大小为 $E_1 = L_1 \frac{I_0 - I_1}{\Delta t}$, 沿图 23-17 中箭头所示方向电势升高; 线圈 L_2 电流从零增为 I_2 , 故电动势大小为 $E_2 = L_2 \frac{I_2}{\Delta t}$,

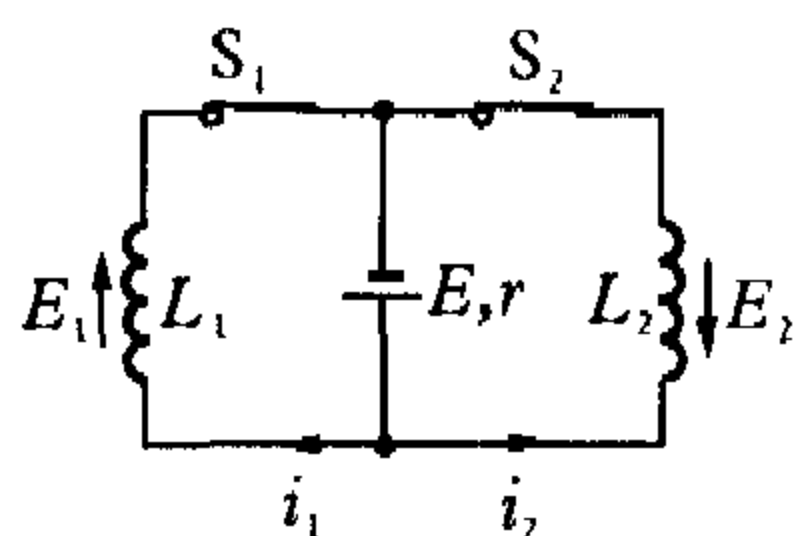


图 23-17

沿图 23-17 中箭头所示方向电势升高. 那么对回路 $S_1 S_2 L_2 L_1$ 应用基尔霍夫第二定律, 得

$$E_1 + E_2 = L_1 \frac{I_0 - I_1}{\Delta t} + L_2 \frac{I_2}{\Delta t} = 0.$$

解上列两个基尔霍夫定律方程, 得到两线圈中稳定电流依次为

$$I_1 = \frac{L_2 E + L_1 I_0 r}{r(L_1 + L_2)}, I_2 = \frac{L_1 E + L_1 I_0 r}{r(L_1 + L_2)}.$$

例 6 在如图 23-18 所示的电路中, $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 20$ mH, $C_1 = 10$ μ F, $C_2 = 5$ μ F, $R = 100$ k Ω , 电源的正弦交流成分振幅保持不变, 开关 S 长时间闭合. 现打开开关, t_0 时间后, 通过 L_1 和 L_2 的电流分别为 $i_{01} = 0.1$ A, $i_{02} = 0.2$ A, 电压 $U_0 = 40$ V. 试计算电路的固有振荡频率; 确定导线 AB 上的电流以及线圈 L_1 中电流的振幅。

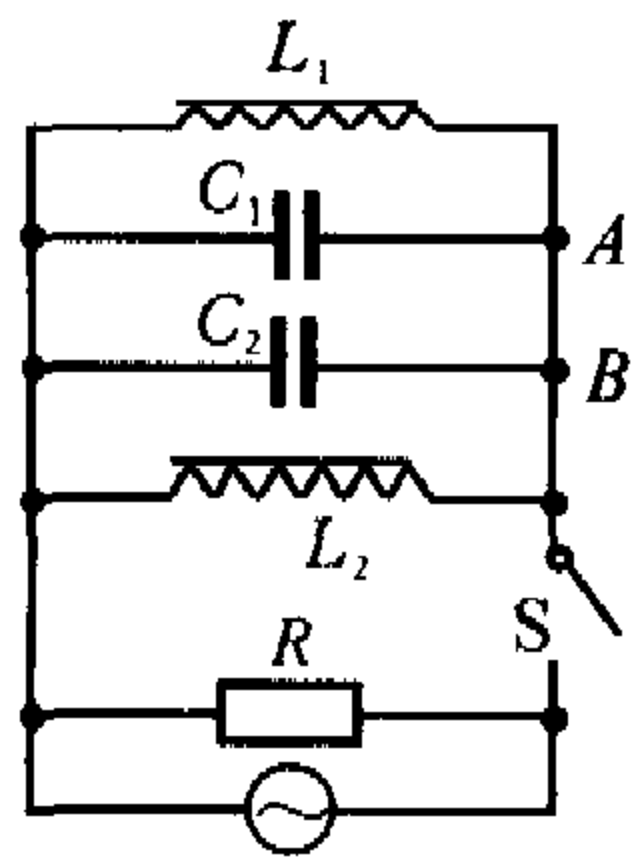


图 23-18

分析与解 开关 S 长时间闭合, 原电路为 L_1, C_1, L_2, C_2 与 R 并联的交流电路, 打开开关, 电源与 R 不再起作用, 能量不再减少, 电路成为 $L_1 C_1$ 与 $L_2 C_2$ 两个 LC 振荡电路并联, 由固有频率公式 $f =$

$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 可知, 两回路频率相同均为

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5.0 \times 10^2 \text{ Hz};$$

为了计算 t_0 时通过 AB 的电流, 我们可利用基尔霍夫定律对节点 A, B 列出电流守恒方程. 设此时正值电容器右极板放电, 两电感线圈中电流如图 23-19 所示, 对 A 点, 流入电流有 i_{01}, i_{C1} , 流出电流为 i_{AB} ; 对 B 点, 流入电流为 i_{02}, i_{C2}, i_{AB} , 则有

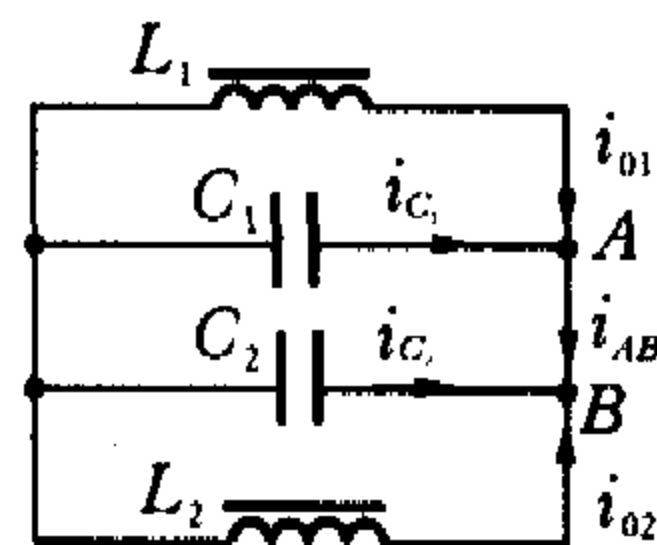


图 23-19

$$i_{01} + i_{C1} = i_{AB}, i_{02} + i_{C2} + i_{AB} = 0,$$

$$\text{即 } i_{01} + i_{C1} = -(i_{02} + i_{C2}), \quad (3)$$

由于 C_1 与 C_2 并联, 故有

$$\frac{q_{C1}}{C_1} = \frac{q_{C2}}{C_2}, \text{ 则 } \frac{\Delta q_{C1}}{\Delta t \cdot C_1} = \frac{\Delta q_{C2}}{\Delta t \cdot C_2}, \text{ 即 } \frac{i_{C1}}{C_1} = \frac{i_{C2}}{C_2},$$

代入③式中得

$$i_{C1} + \frac{C_2}{C_1} i_{C1} = -(i_{01} + i_{02}), \text{ 则 } i_{C1} = 0.2 \text{ A},$$

将其代入关于 A 点或 B 点的电流方程中即可求出 $i_{AB} = -0.1$ A, “-”表示方向与所设方向相反。

打开开关后, $L_1 C_1$ 与 $L_2 C_2$ 两个 LC 振荡电路独立地以相同频率振荡, 连接两回路的导线 AB 中似乎应无电流通过, 但我们求出 t_0 时刻 $i_{AB} \neq 0$, 这表明在这个回路里除振荡电流成分外, 还有直流成分, 当然它来自电源, 即交流电源由正弦式电流与直流合成, 切断电源后, 由于 LC 回路无电阻, 直流成分不会衰减. 在 t_0 时刻, L_1 上电流 i_{01} 应是振荡电流 i_{01L} 与直流 i_{AB} 之和, 因为直流不能通过电容器, 直流 i_{AB} 肯定全部通过电感线圈. 故此时 L_1 上振荡电流 $i_{01L} = i_{01} - i_{AB} = 0.2$ A, 当振荡电流达最大值 i_{1Lm} 时, 电容器放电完毕, 由能量守恒可知, t_0 时的磁场能与电场能此时全部为线圈中磁场所有, 即

$$\frac{1}{2} C_1 U_0^2 + \frac{1}{2} L_1 i_{01L}^2 = \frac{1}{2} L_1 i_{1Lm}^2,$$

代入数据得 $i_{1Lm} = \sqrt{i_{01L}^2 + \frac{C_1}{L_1} U_0^2} = 1.28$ A.

例 7 如图 23-20(a)、(b) 是 Δ 接法和 Y 接法的两个对称的三相负载电路, 每相电阻分别是 R 和 r , 将它们先后接在同一个三相电源上后, 线电流恰好相等, 求 R 与 r 的关系。

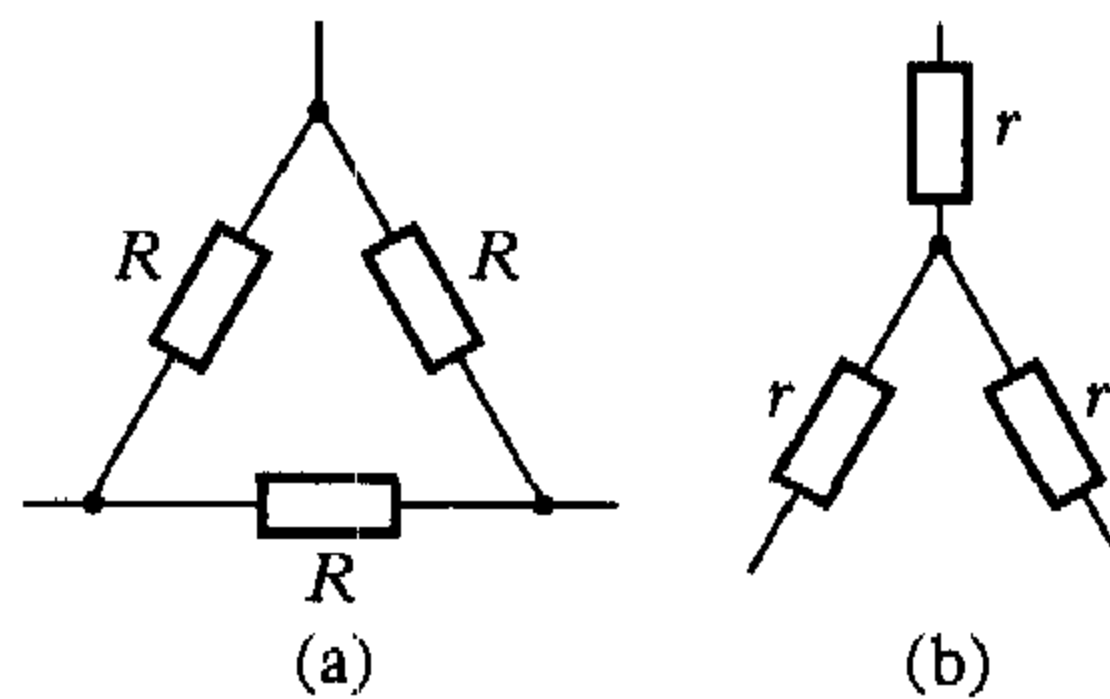


图 23-20

分析与解 设三相电源的线电压为 $U_{\text{线}}$. 对 Δ 接法的三相负载, 其相电压即为 $U_{\text{线}}$, 相电流为 $I_{\Delta\text{相}} = \frac{U_{\text{线}}}{R}$, 线电流 $I_{\Delta\text{线}} =$



$\sqrt{3} \cdot \frac{U_{\text{线}}}{R}$, 对 Y 接法的三相负载, 其相电压为 $\frac{U_{\text{线}}}{\sqrt{3}}$, 相电流为

$I_{Y\text{相}} = \frac{U_{\text{线}}}{\sqrt{3}r}$, 线电流等于相电流. 由题意两负载先后接同一个三

相电源上后, 线电流恰好相等, 即

$$\sqrt{3} \cdot \frac{U_{\text{线}}}{R} = \frac{U_{\text{线}}}{\sqrt{3}r},$$

易得 R 与 r 的关系满足 $R=3r$.

例 8 如图 23-21 所示, 三相交流的相电压为 220 V, 负载是不对称的纯电阻, $R_A=R_B=22 \Omega$, $R_C=27.5 \Omega$, 按星形连接. (1) 试求中线电流; (2) 试求各线电压; (3) 若中线断开, 试求各线电流.

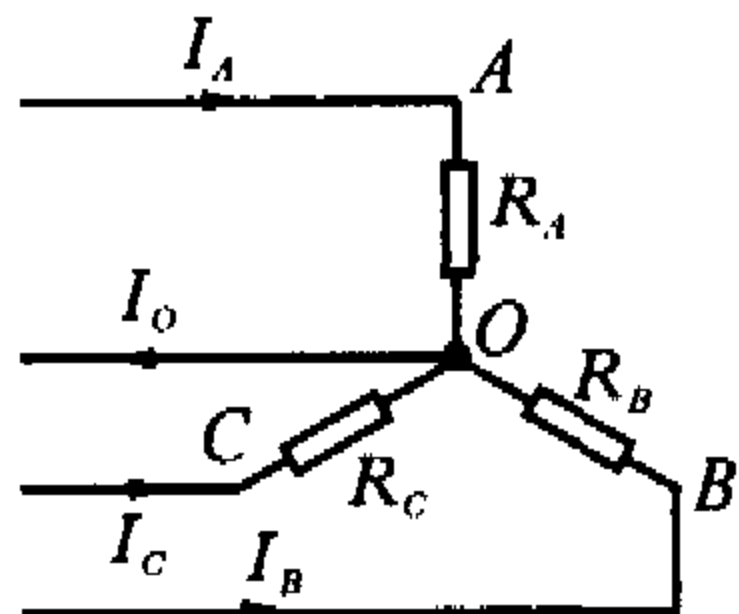


图 23-21

分析与解 先用计算中线电流 I_0 . 由于星形连接的三相负载不对称, 故中性线上有电流, 三相电流两

两之间有 $\frac{2\pi}{3}$ 的相差, 同时每相电流

振幅不尽相同, 由欧姆定律可求出各相电流为

$$I_A = I_B = \frac{220}{22} \text{ A} = 10 \text{ A}; I_C = \frac{220}{27.5} \text{ A} = 8 \text{ A}.$$

$$\text{若 } i_A = 10\sqrt{2}\sin\omega t \text{ A, 则 } i_B = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \text{ A, } i_C =$$

$8\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \text{ A}$, 中线上电流为三相电流之和, 故有

$$\begin{aligned} i_0 &= [10\sqrt{2}\sin\omega t + 10\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + 8\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})] \\ &= [-10\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + 8\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})] \\ &= -2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \text{ A}. \end{aligned}$$

即中线上电流(有效值) $I_0=2 \text{ A}$, 相位比 A 相电流落后 $\frac{\pi}{3}$.

现在确定各线电压分别为

$$u_{AB} = u_A - u_B = 220\sqrt{2}[\sin\omega t - \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})] \text{ V}$$

$$= 380\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) \text{ V}$$

$$= 380\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \text{ V};$$

$$u_{BC} = u_B - u_C$$

$$= 220\sqrt{2}[\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})] \text{ V}$$

$$= 380\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ V};$$

$$u_{CA} = u_C - u_A = 220\sqrt{2}[\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) - \sin\omega t] \text{ V}$$

$$= 380\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{7\pi}{6}) \text{ V}.$$

可见三相四线制中, 相电压为 220 V, 各线电压均为 $U_{\text{线}} = \sqrt{3}U_{\text{相}} = 380 \text{ V}$, 三个线电压两两之间有 $\frac{2\pi}{3}$ 的相差.

若中线断开, 电路如图 23-22 所示, 各线电压保持不变,

各线电流设为 I_A', I_B', I_C' , 则有

$$i_A' + i_B' + i_C' = 0,$$

$$22i_A' - 22i_B' = 380\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{6}),$$

$$22i_B' - 27.5i_C' = 380\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

解之得

$$i_A' = \frac{5\sqrt{366}}{7}\sin(\omega t + \arctan\frac{\sqrt{3}}{27}) \text{ A},$$

$$i_B' = \frac{5}{7}\sqrt{366}\sin(\omega t + \pi + \arctan\frac{13\sqrt{3}}{15}) \text{ A},$$

$$i_C' = \frac{60\sqrt{2}}{7}\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \text{ A}.$$

故各线电流的有效值分别为

$$I_A' = \frac{5}{7}\sqrt{183} \text{ A}, I_B' = \frac{5}{7}\sqrt{183} \text{ A}, I_C' = \frac{60}{7} \text{ A}.$$

动手动脑

1. 用如图 23-23 所示的电路测量二极管的反向电流 I .

电容器接入前先充电, 使两极板间电压等于电池电动势, 即 $U = E = 4.5 \text{ V}$. 然后接入电路, 将其正极板与电池负极相接. 将开关 S 置于位置 1, 经时间 $t_1 = 1 \text{ min}$, 再换接到位置 2, 此时电流计指针偏转 $n_1 = 5$ 小格. 电容器重新充电再重复实验, 这次将 S 置

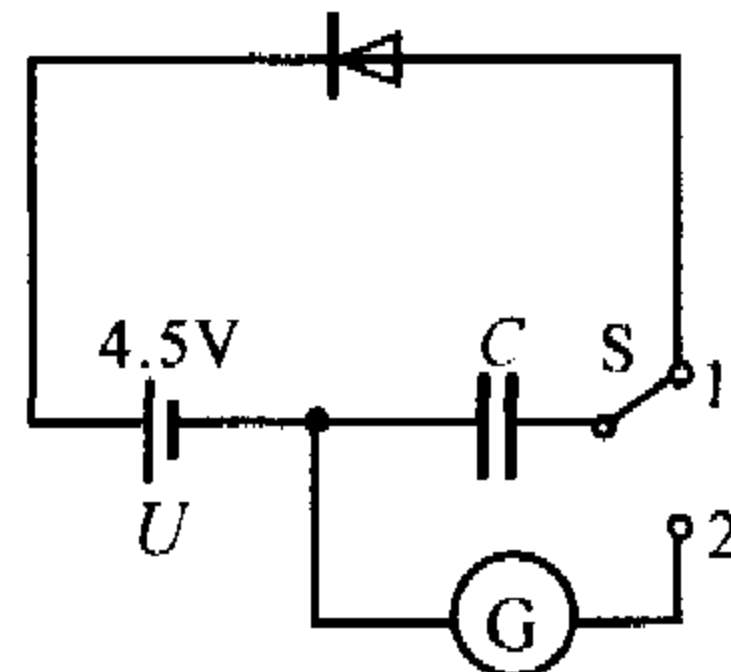


图 23-23

于 1 的时间 $t_2 = 2 \text{ min}$, 则指针向反方向偏转 $n_2 = 20$ 小格. 设二极管反向电流与所加反向电压无关, 求该反向电流. ($C=10 \mu\text{F}$)

2. 如图 23-24 所示, 电容为 C 的电容器充电到电势差为 U , 通过开关与自感系数分别为 L_1 和 L_2 的两个并联线圈相连. 如果 S 闭合, 那么经过某段时间后完全重新充电(即电容器上电压反向)到两极板间电势差大小仍为 U . 求在这段时间内通过每个线圈的电量 q_1 和 q_2 , 线圈的电阻不计.

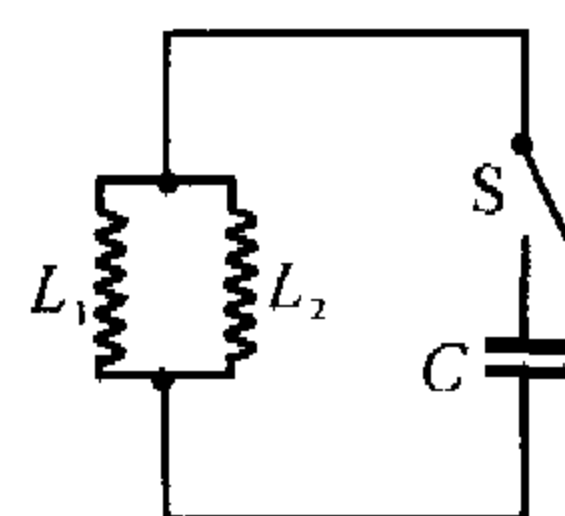


图 23-24

3. 如图 23-25 所示, 两个电容器 $C_1 = C_2 = C$, 最初两电容器分别带有电量 $Q_1 = Q_2 = Q_0$, 线圈的自感系数为 L , 整个电路的电阻均不计. (1) 若先闭合开关 S_1 , 则电路中产生电磁振荡, 振荡中电容器 C_1 的带电量的最大值为多少? (2) 若接着再闭合开关 S_2 , C_1 带电量的最大值有无变化? 如有, 则变化情况如何?

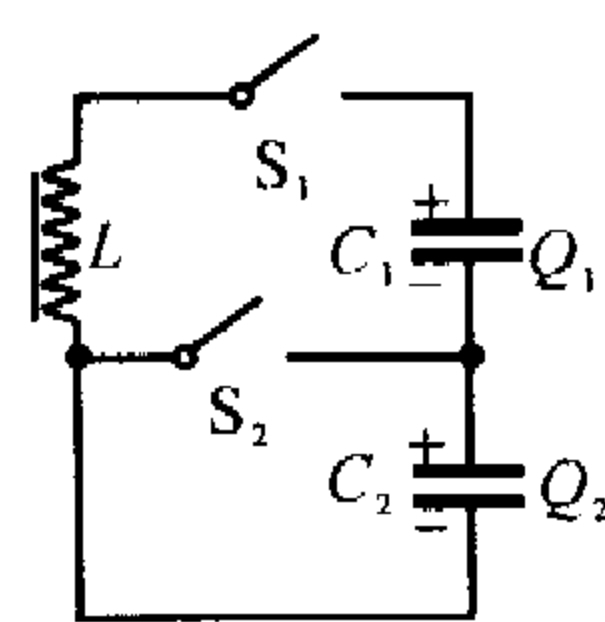


图 23-25

4. 在图 23-26 所示电路中, 电池、二极管、电感线圈都是理想的, 电池电动势为 $E=1.5 \text{ V}$, 电容器两板间的电压为 U . 若开关闭合及电流停止后发现, 电容器两板极性改变, 电压变为 $U_1=1 \text{ V}$, 求电容器原电压 U 的值.

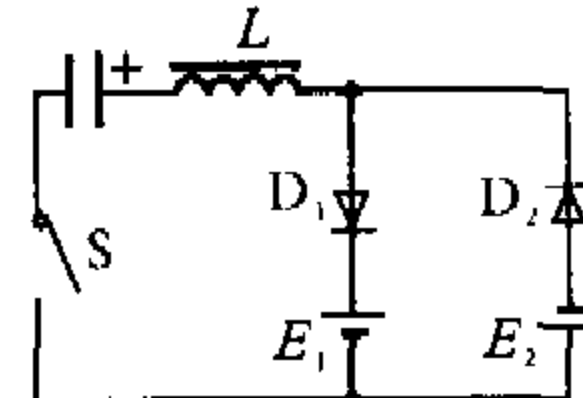


图 23-26



5. 在如图 23-27 所示的铁芯上绕有两个线圈, 每个线圈产生的磁场都不穿出铁芯, 并且在分叉处分为相等两部分. 当线圈 1 接入电压为 $U_1 = 40$ V 的交流电路中时, 线圈 2 上电压为 U ; 如果线圈 2 接入电压为 U 的交流电路中, 问线圈 1 上的电压为多少?

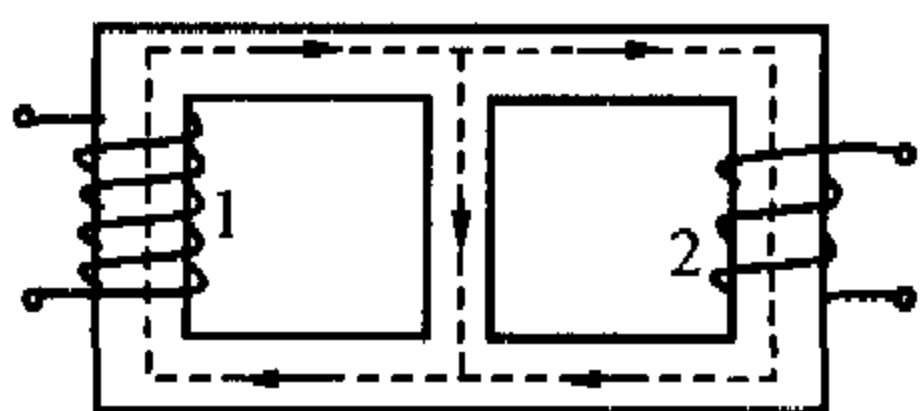


图 23-27

6. 如图 23-28 所示交变电路中, 理想的二极管接入交流电路中, 试求 A 与 K 两点间电压变化范围, 并作出电路中电流 i 、电容器电压 u_c 及 A、K 间电压随时间变化图线.

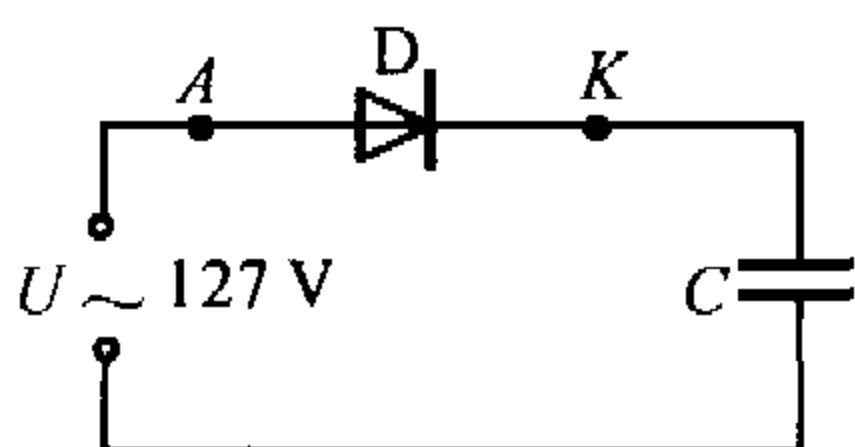


图 23-28

7. 如图 23-29, 阻值 $R = 200 \Omega$ 的电阻和电容 $C = 5 \times 10^{-6}$ F 的电容并联, 通过此并联电路的交流电的圆频率 $\omega = 10^3$ rad/s, 交流电流表 A_1 的读数 $I_1 = 1$ A, 其内阻很小. 试求交流电流表 A_2 的读数.

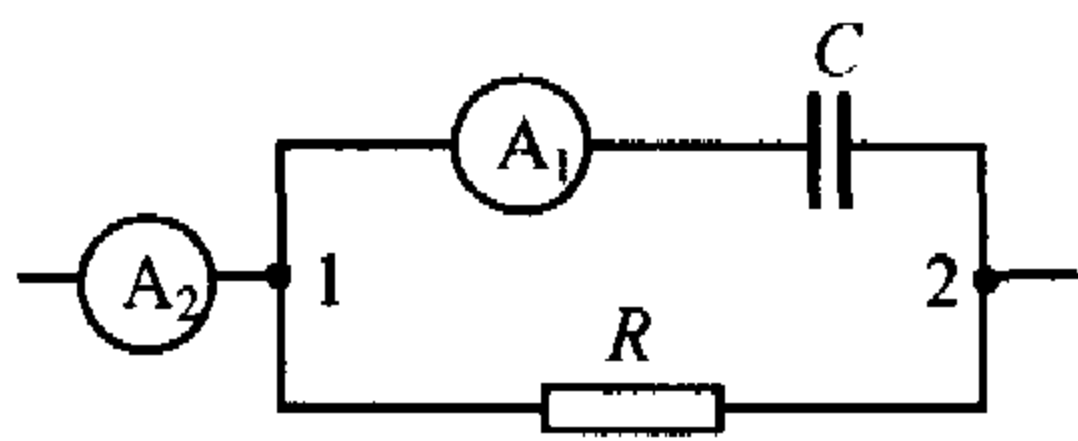


图 23-29

8. 如图 23-30 所示的电路系统. 已知 R_1, R_2, R_3, R_4, L_1 和 L_2 的值是这样选择的: 不管 E 是固定的, 还是随时间作正弦变化的, 都没有电流流过电流计 G. 假若 $R_2 = 90 \Omega, R_3 = 300 \Omega, R_4 = 60 \Omega, L_2 = 900$ H, 求 R_1 和 L_1 .

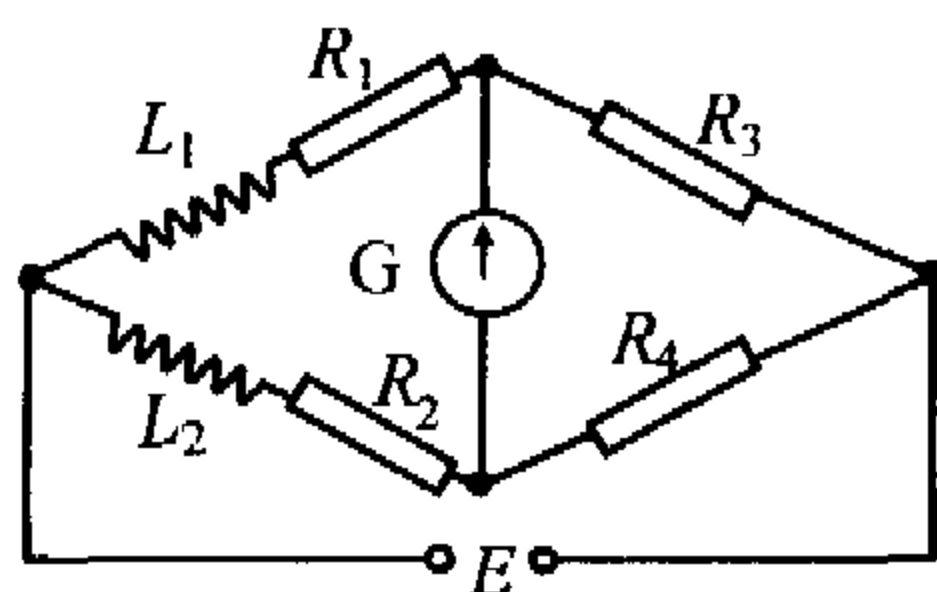


图 23-30

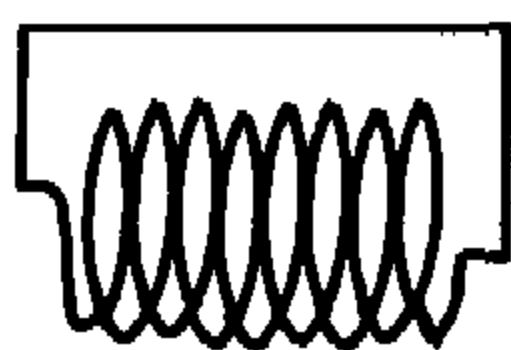


图 23-31

9. 如图 23-31 所示为一短路的超导螺线管, 由于接触不完善, 超导螺线管里电流发生变化, 这个电流产生的磁场磁感应强度每小时减小 2%. 试求接触电阻 R , 已知螺线管的自感系数 $L = 1$ H.

10. 如图 23-32 所示, 每个灯泡的额定电压均为 220 V, 额定功率相同, 则 a 与 a' 两灯的实际功率之比为 _____. (设灯泡电阻恒定)

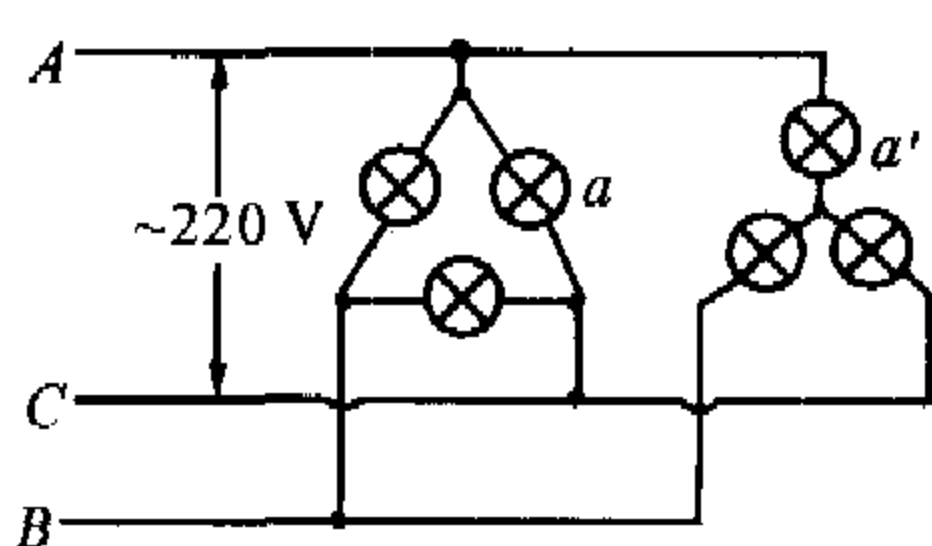


图 23-32

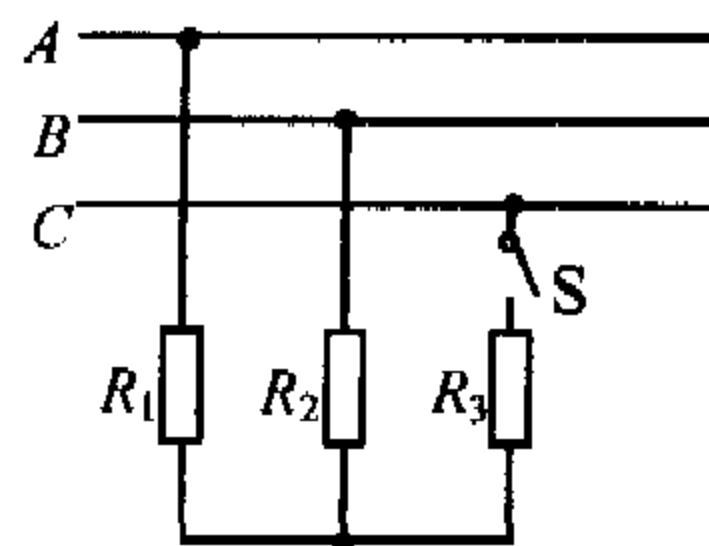


图 23-33

11. 如图 23-33 所示, A、B、C 是三相交流电的三根端线,

它们的线电压是 380 V. R_1, R_2, R_3 是阻值相同的三个电阻.

- (1) S 闭合时, R_2 发热功率为 100 W, 可知 R_2 的阻值是 _____ Ω .
- (2) S 断开时, R_2 上的电压是 _____ V. 这时它的发热功率为 _____ W, R_1 发热功率是 _____ W.

12. 如图 23-34 所示, 把三组额定电压均为 220 V, 额定功率分别为 $P_1 = 1000$ W, $P_2 = 500$ W, $P_3 = 2000$ W 的白炽灯 L_1, L_2, L_3 接入线电压为 380 V 的三相电路中, 则:

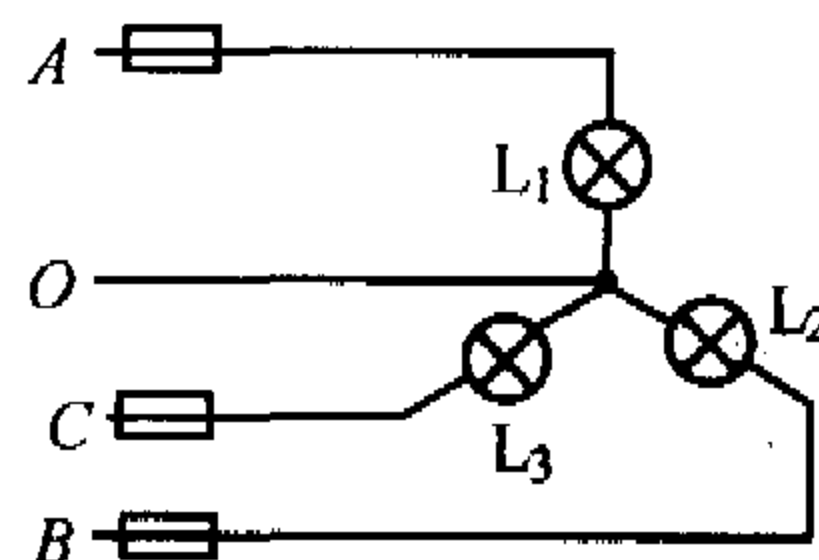


图 23-34

- (1) 流过每相负载的电流 $I_A =$ _____ A, $I_B =$ _____ A, $I_C =$ _____ A.
- (2) A 相负载断开和短路时, 对 B、C 两相负载有何影响?

13. 如图 23-35 所示, A、B、C 是三相交流发电机中三个线圈的始端, O 是三个线圈的末端. E、F、G 间是三个相同负载的示意图. 照明电路中的三个电灯相同. E、F、G 间某个负载两端的电压与某个灯泡两端的电压之比是 _____. 若交流电流表 A_1 的读数是 I_1 , 交流电流表 A_2 的读数是 I_2 , 那么通过 F、G 间的负载的电流是 _____, 通过交流电流表 A_3 的电流是 _____.

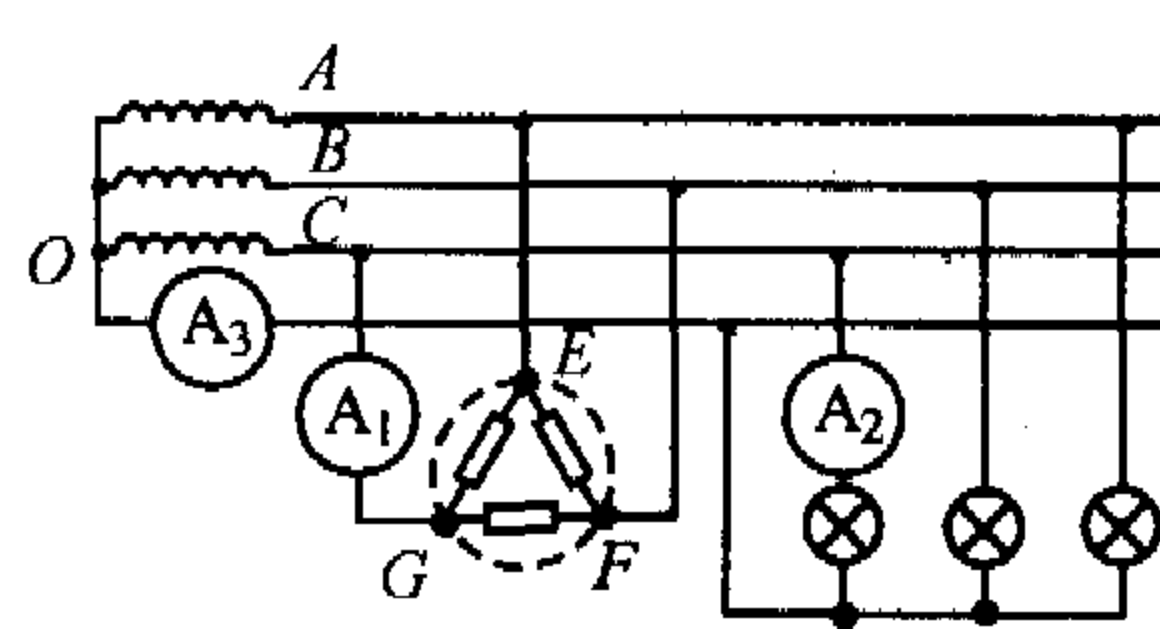


图 23-35

14. 如图 23-36 所示, 采用三相四线制供电的线路, 相电压是 220 V. 今有一三相交流电动机, 铭牌上标明: 接法 Δ , 电压 380 V. 为使此电动机能正常工作, 请在图中画出正确的连

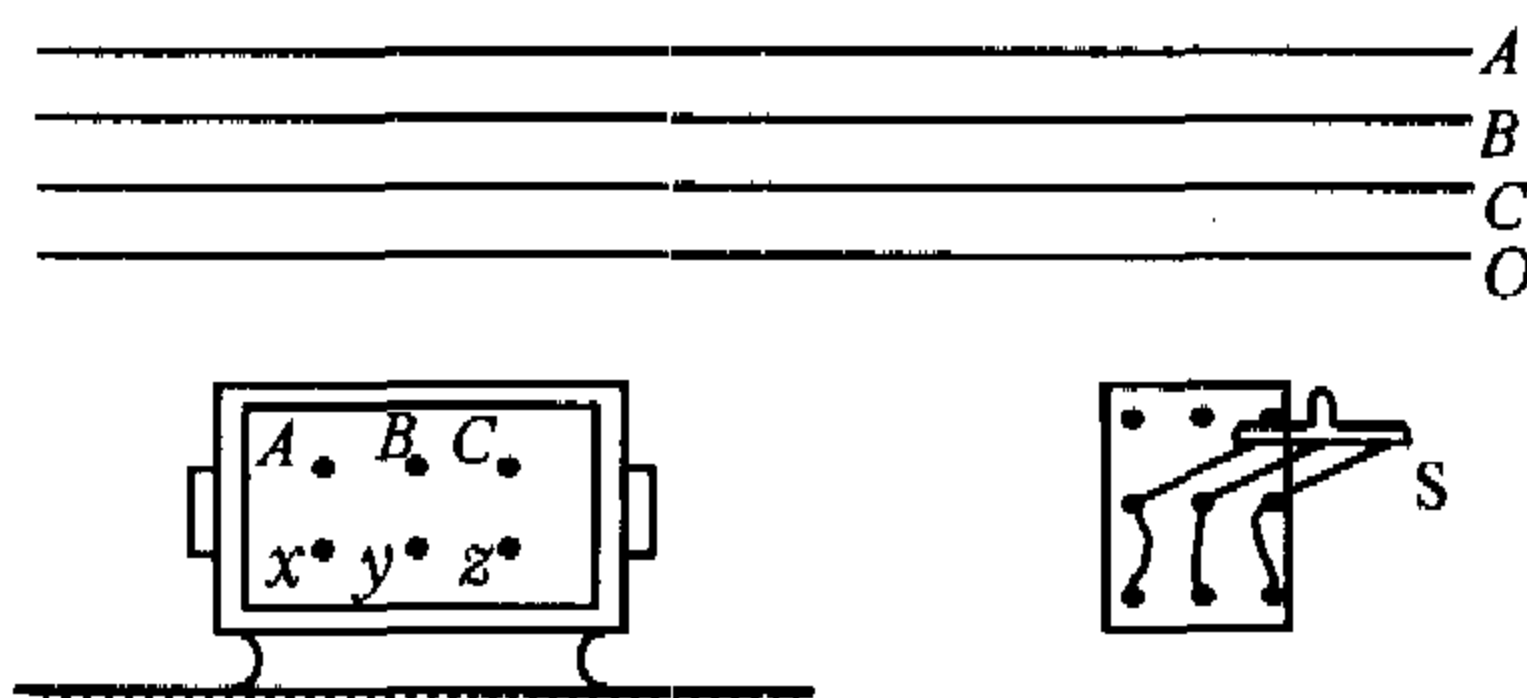


图 23-36

线. (图中 S 为三刀单掷开关)

15. 在三相四线制照明电路中, A 相接通 8 盏“220 V 100 W”灯泡, B 相接通 2 盏“220 V 100 W”灯泡, C 相中没有接通灯泡, 这时接通的灯泡都正常发光. 因某种原因, 中性线断开, 将会发生什么现象?

16. 如图 23-37 所示的交流电路, 电源电动势 $E = E_0 \sin \omega t$, 且 $\omega L = \frac{1}{\omega C} = R$, 试求电路中干路电流 $i(t)$.

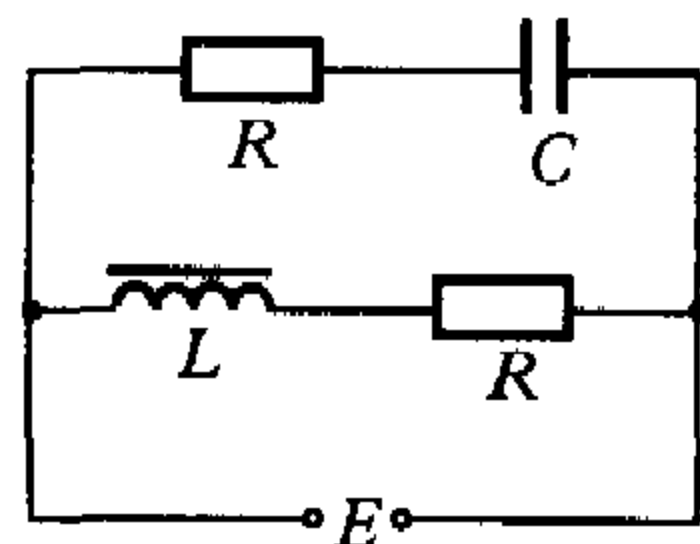


图 23-37



参考答案

1. 第一次, 电源有 It_1 的正电荷

通过二极管到达电容器负极板, 在那里与负电荷中和, 剩余电荷 $CU - It_1$, 当开关置于 2 时全部通过电流计, 表示为

$$CU - It_1 = 5Q_G;$$

第二次经较长时间 t_2 , 电容器原带电量全部中和后又重新充电, 那么, 通过电流计的电量是

$$It_2 - CU = 20Q_G,$$

由此二式得 $(4t_1 + t_2)I = 5CU$,

代入题给数据得 $I = 0.625 \mu\text{A}$.

2. 从开关 S 闭合到电容器上电压反向, 通过两线圈的总电量为 $2CU$, 由电荷守恒得

$$q_1 + q_2 = 2CU;$$

又两线圈并联, 两端电势差总相同, 有

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}, \text{ 即 } L_1 q_1 = L_2 q_2,$$

则

$$q_1 = \frac{2L_2 CU}{L_1 + L_2}; q_2 = \frac{2L_1 CU}{L_1 + L_2}.$$

3. (1) 若先闭合开关 S_1 , 则电路等效于电容 $\frac{C}{2}$ 与电感 L 组成的 LC 振荡电路, C_1 带电量最大值为 Q_0 ; (2) 若接着再闭合开关 S_2 , C_1 带电量的最大值如何视开关 S_2 闭合的时机: 若当振荡电流恰好为零时闭合 S_2 , 各电容器带电量均为 Q_0 , C_2 两板正负电荷中和, C_1 与 L 继续构成振荡电路, 故 C_1 带电量的最大值无变化; 若当振荡电流恰好为最大时闭合 S_2 , 振荡电流最大时能量全部为线圈中磁场所有, 以后 L 与 C_1 构成振荡电路, 将能量转化为 C_1 的电场能, 由能量守恒关系 $\frac{Q_0^2}{C} = \frac{Q_1^2}{2C}$ 可知, C_1 带电量的最大值变为 $Q_1 = \sqrt{2}Q_0$, 即增大; 开关 S_2 闭合的时刻介于上述两种情况之间, 即电路原来所具能量 $\frac{Q_0^2}{C}$ 中有一部分表现为电容器 C_2 中的电场能, 因 S_2 的闭合而损失, C_1 与 L 振荡电路总能量小于 $\frac{Q_0^2}{C}$, 但大于 $\frac{Q_0^2}{2C}$, 故 C_1 带电量的最大值为 $Q_0 < Q_1 < \sqrt{2}Q_0$.

4. 设电路在一次全振荡内即成终态, 电容器先通过 D_1 、 E_1 放电, 然后仍通过 D_1 、 E_1 充电至 U_1 , 电容器能量变化为 $\frac{1}{2}C(U^2 - U_1^2)$, 电路中移动的总电量为 $\Delta Q = C(U + U_1)$, 电容器能量减少是因为电荷在通过电池对电池充电时做功 $W = CUE + CU_1E$, 由能量守恒 $\frac{1}{2}C(U^2 - U_1^2) = CE(U_1 + U)$, 代入数据得 $U = 4 \text{ V}$; 如开始所加电压 U 较大, 可以经 n 次振荡后电容器电压减为 4 V , 最后电流停止时电压反向且为 1 V , 经 i 次全振荡, 电容器电压为 U_i , 而后先通过 D_1 、 E_1 放电至电压为 1.5 V , 然后仍通过 D_1 、 E_1 放电反向充电至电压为 -1.5 V , 再经由 E_2 、 D_2 反向放电充电至 1.5 V 再至 U_{i+1} , 此过程中电容极板电量减少为 $C(|U_i| - |U_{i+1}|)$, 对电池充电量

$4CE$, 即有 $|U_i| = |U_{i+1}| + 4E$, 故电容器原电压 U 可取 $U = 4 \text{ V} + 4nE, (n=0, 1, 2, \dots)$

例如 $4 \text{ V}, 10 \text{ V}, 16 \text{ V} \dots$

5. 由于铁芯构造原因, 通过原、副线圈的磁通量不相同, 推出两线圈两端电压的一般关系: 因为

$$U_{\text{原}} = n_{\text{原}} \frac{\Delta \Phi_{\text{原}}}{\Delta t}, U_{\text{副}} = n_{\text{副}} \frac{\Delta \Phi_{\text{原}}}{2\Delta t},$$

所以 $\frac{U_{\text{原}}}{U_{\text{副}}} = \frac{2n_{\text{原}}}{n_{\text{副}}}$;

当线圈 1 为原线圈时, 得

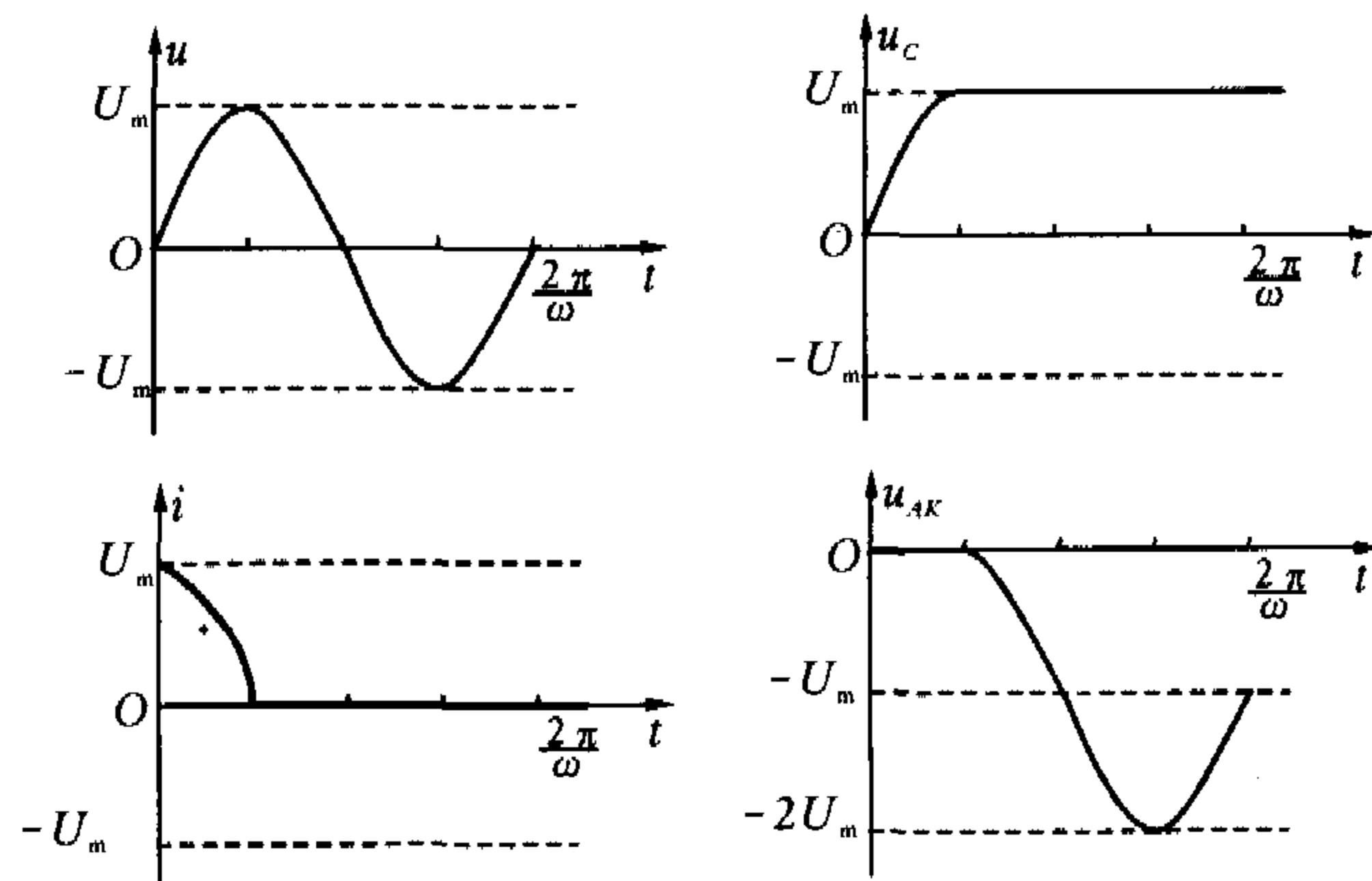
$$\frac{40}{U} = \frac{2n_1}{n_2},$$

当线圈 2 为原线圈时, 若线圈 1 受激电压为 U_1 , 有

$$\frac{U}{U_1} = \frac{2n_2}{n_1},$$

由此二式得 $U_1 = 10 \text{ V}$.

6. 交流电源提供的电压最大值为 $U_m = 127\sqrt{2} \text{ V}$, 电源电压设为 $u = 127\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, 设初始电容器不带电, 正 $\frac{1}{4}$ 周二极管导通时 $u_{AK} = 0$, 电容器充电至 U_m 在此期间, $u_C = U_m \sin \omega t$, 电路中电流为 $i_C = U_m \omega C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, 此后电源电压降低, A 点电势总低于 K 点电势, 二极管截止, $u_{AK} = U_m(\sin \omega t - 1)$, 电容器两端电压 $u_C = U_m$, 电路中电流为零, u_C-t 、 $i-t$ 、 $u_{AK}-t$ 图线如图答 23-1.



图答 23-1

7. 容抗 $X_C = \frac{1}{\omega C} = 200 \Omega$, 与电阻相同, 故两支路电流大小相同且分别为

$$i_R = \sqrt{2} \sin(1000t) \text{ A},$$

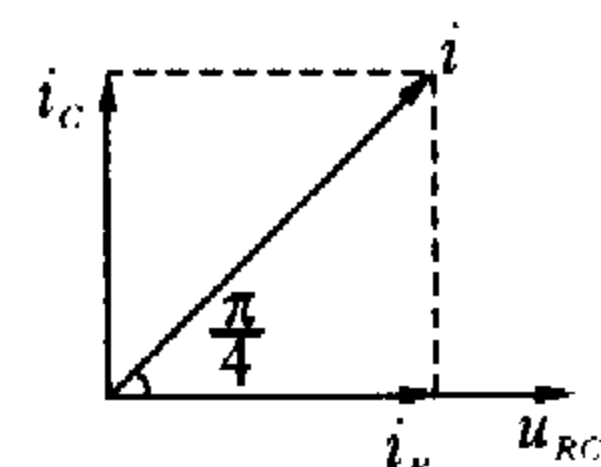
$$i_C = \sqrt{2} \sin(1000t + \frac{\pi}{2}) \text{ A},$$

相位关系如图答 23-2 所示, 故

$$i = i_R + i_C = 2 \sin(1000t + \frac{\pi}{4}) \text{ A},$$

交流电流表 A_2 的读数显示有效值, 故为 $\sqrt{2} \text{ A}$.

8. E 是恒定电源时, 电感电阻为零, 系统为一惠斯登电



图答 23-2



桥,没有电流流过电流计 G 的条件是 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$, 易得

$$R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2 = \frac{300}{60} \times 90 \Omega = 450 \Omega;$$

E 是作正弦变化的电源时, L_1 与 R_1 串联阻抗为

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L_1}^2},$$

L_2 与 R_2 串联阻抗为 $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{L_2}^2}$,

此时没有电流流过电流计 G 的条件是

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_2, I_1 R_3 = I_2 R_4,$$

则 $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_3}{R_4} = 5, \frac{X_{L_1}^2 + R_1^2}{X_{L_2}^2 + R_2^2} = 25, 25X_{L_2}^2 = X_{L_1}^2,$

得 $L_1 = 5L_2 = 4500 \text{ H}.$

9. 螺线管回路中由于电流变化产生自感电动势为 $E = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, 由欧姆定律得 $E = IR$, 螺线管中电流引起的磁场磁感应强度与电流成正比, 即 $B = \alpha I$, 则

$$\Delta B = \alpha \Delta I, R = L \frac{\Delta I}{I \Delta t} = L \frac{\Delta B}{B \Delta t} = 5.6 \times 10^{-6} \Omega.$$

$$10. \frac{P_a}{P_a'} = \frac{220^2/R}{(220/\sqrt{3})^2/R} = 3.$$

11. (1) S 闭合时, R_2 的电压为 220 V, 则

$$R_2 = \frac{220^2}{100} \Omega = 484 \Omega;$$

(2) S 断开时, R_1, R_2 串联在 380 V 线电压上, 故 R_1, R_2 上的电压均为 $U = 190 \text{ V}$, 发热功率为

$$P_1 = P_2 = \frac{190^2}{484} \text{ W} \approx 74.6 \text{ W}.$$

12. (1) 每相负载阻值分别为

$$R_1 = \frac{48400}{1000} \Omega = 48.4 \Omega, R_2 = 96.8 \Omega, R_3 = 24.2 \Omega,$$

每相电压均为 220 V, 故流过每相负载的电流为

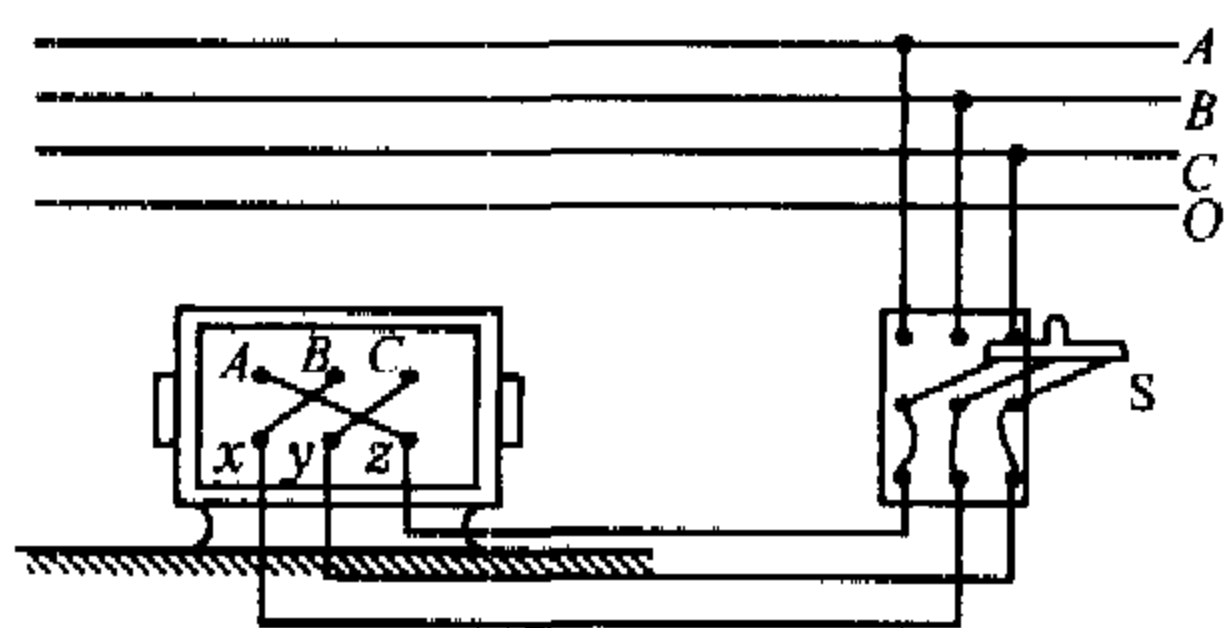
$$I_A = \frac{50}{11} \text{ A}, I_B = \frac{25}{11} \text{ A}, I_C = \frac{100}{11} \text{ A};$$

(2) A 相负载断开和短路时, 对 B、C 两相负载无影响, 因为有中性线.

13. 电源星形接, 三个对称负载分别作三角形与星形连接, E, F, G 间某个负载两端的电压与某个灯泡两端的电压之比是线电压与相电压之比, 即 $\sqrt{3}:1$; A_1 读数 I_1 显示线电流, A_2 的读数 I_2 显示相电流, 通过 F, G 间的负载的电流应是 Δ 连接的相电流, 其大小为 $\frac{I_1}{\sqrt{3}}$; 由于负载对称, 通过 A_3 的电流

即中性线上的电流是零.

14. 如图答 23-3 所示.



图答 23-2

15. 各相总电阻分别为

$$R_A = \frac{484}{8} \Omega = 60.5 \Omega, R_B = \frac{484}{2} \Omega = 242 \Omega, R_C = \infty (\text{断$$

路).

若中性线断开, 则 A、B 两相串接在 380 V 线电压上, 此时 B 相负载上承受电压为

$$U_B = \frac{R_B}{R_A + R_B} U_{\text{线}} = 304 \text{ V},$$

这个电压已超过灯泡的额定电压, 故 B 相灯泡烧坏, A 相用电器断路.

16. 电源电动势 $E = E_0 \sin^2 \omega t = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cos 2\omega t$, 干路电流

$i(t)$ 可等效为恒定电源 $E_1 = \frac{E_0}{2}$ 与圆频率为 2ω 的正弦式交流

电源 $E_2 = \frac{E_0}{2} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2})$ 产生电流的叠加. 对直流, 电容器支路无电流, 电感器短路, 故引起电流为

$$i_1 = \frac{E_0}{2R};$$

对交流, $u_{AB} = E_2 = \frac{E_0}{2} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2})$, L, R 串联支路阻抗为

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (2\omega L)^2} = \sqrt{5}R,$$

引起电流为 $I_{LRm} = \frac{E_0}{2\sqrt{5}R}$,

阻抗角即 L, R 支路电流与 u_{AB} 相差为

$$\varphi_1 = \arctan 2, i_{LR} = \frac{E_0}{2\sqrt{5}R} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan 2);$$

R, C 串联支路阻抗 $Z_2 = \sqrt{R^2 + (2\omega C)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$, 引起电

流 $I_{RC} = \frac{E_0}{\sqrt{5}R}$, R, C 支路电流与 u_{AB} 相差为

$$\varphi_2 = \arctan \frac{1}{2}, i_{RC} = \frac{E_0}{\sqrt{5}R} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2}),$$

由交流引起干路电流为

$$\begin{aligned} i_2 &= i_{LR} + i_{RC} = \frac{E_0}{2\sqrt{5}R} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan 2) + \\ &\quad \frac{E_0}{\sqrt{5}R} \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2}) \\ &= -\frac{E_0}{\sqrt{5}R} \left[\frac{1}{2} \sin(2\omega t + \arctan \frac{1}{2}) + \cos(2\omega t + \arctan \frac{1}{2}) \right] \\ &= -\frac{E_0}{\sqrt{5}R} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\sin(2\omega t + \arctan \frac{1}{2}) \cos(\arctan 2) + \right. \\ &\quad \left. \cos(2\omega t + \arctan \frac{1}{2}) \sin(\arctan 2) \right] \\ &= -\frac{E_0}{2R} \sin(2\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{E_0}{2R} \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

电路中干路电流为 $i(t) = \frac{E_0}{2R} - \frac{E_0}{2R} \cos 2\omega t = \frac{E_0}{R} \sin^2 \omega t.$



专题 22 几何光学问题集成

沈 展

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

几何光学是在把光的传播抽象成光线模型并认定光的下述两条基本性质的基础上建立起来的一门学问。光的第一条基本性质：光总是沿着光程为极值的路径传播——在均匀介质里沿直线传播，因为给定两点间直线路径最短；在不均匀的介质中，光沿着所有可能的光程中有最小、最大或稳定的光程的路径传播，即遵从费马原理。光的另一条基本性质：独立传播原理——不同方向的光线相交时互不扰乱，不会改变每束光的颜色、强弱与传播方向。

在均匀介质中光程 l 表示光的几何路程 s 与物质的折射率 n 的乘积： $l=ns$ 。在不均匀介质中，取元光程 $\Delta l=n_i \cdot \Delta s$ ，总光程为 $l=\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N n_i \Delta s$ 。本专题我们将通过几个特例说明费马原理的正确性，并以费马原理为基础，给出各种反射与折射光具的物像公式。

在两种均匀介质的平面界面上，光发生反射时，遵守反射定律的光程为最小，这是很容易证明的；在如图 24-1 所示旋转椭球形的凹面上的反射，是光程为稳定值的情形；若光从椭球的一个焦点 F_1 射出，则在镜面上任一点 P 反射后都要落在第二个焦点 F_2 上，根据椭球的几何性质，若半长轴为 a ，可知光程 F_1PF_2 总等于 $2na$ ；若有如图 24-2 所示与椭球面相切于 P

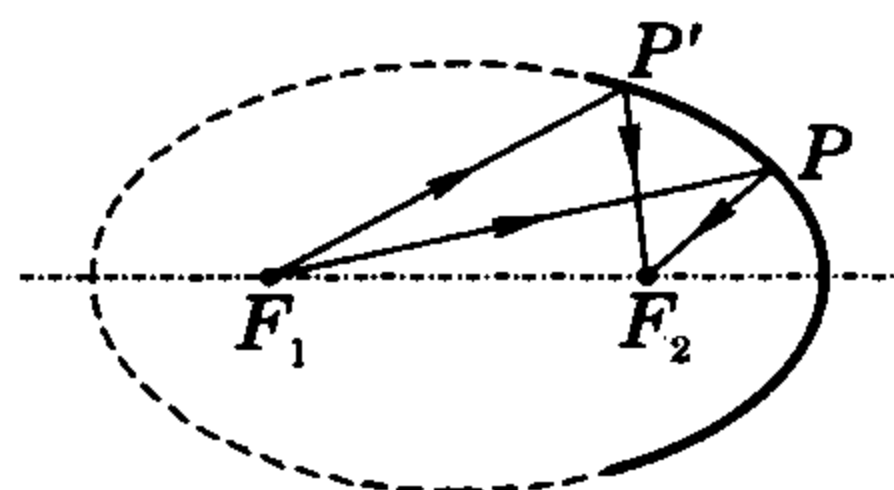


图 24-1

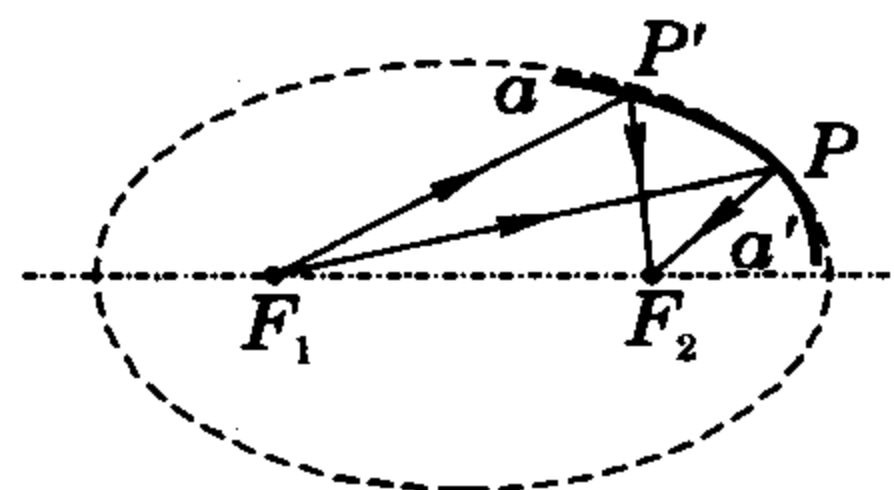


图 24-2

的镜面 aa' (其余部分都在椭球面内)，光线 F_1PF_2 也是被镜面 aa' 反射的光线，且遵守反射定律，其光程 F_1PF_2 总比另外的不遵守反射定律的光程、例如图中的 $F_1P'F_2$ 大，即当光线在镜面 aa' 上反射时，遵守反射定律的光程为最大；又若有如图 24-3 所示与椭球面相切于 P 的镜面 bb' (其余部分都在椭球面外)，光线 F_1PF_2 亦是被镜面 bb' 反射且遵守反射定律的光线，其光程 F_1PF_2 总比另外的不遵守反射定律的光程、例如图中的 $F_1P'F_2$ 小，即当光线在镜面 bb' 上反射时，遵守反射定律的光程为最小。

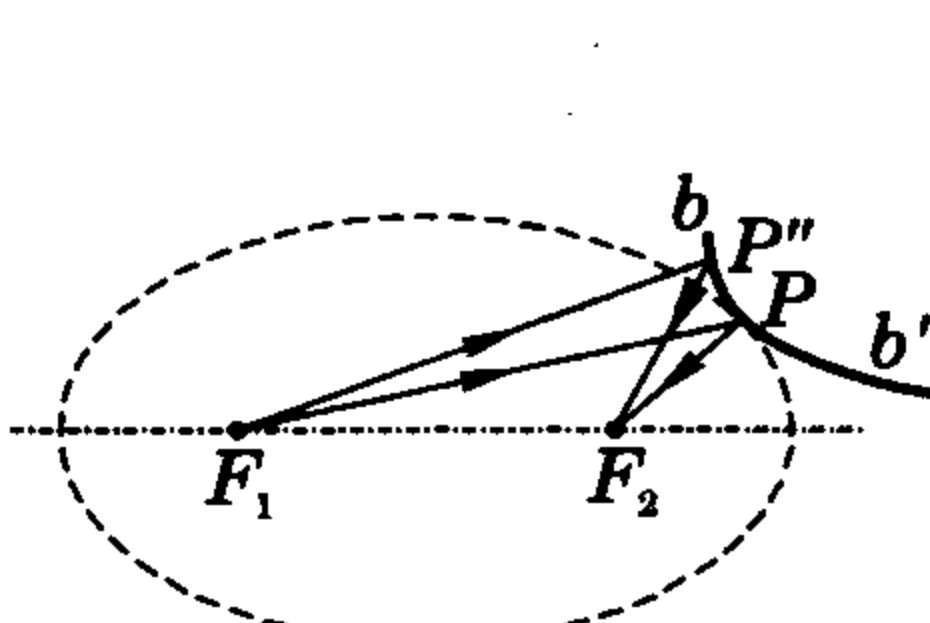


图 24-3

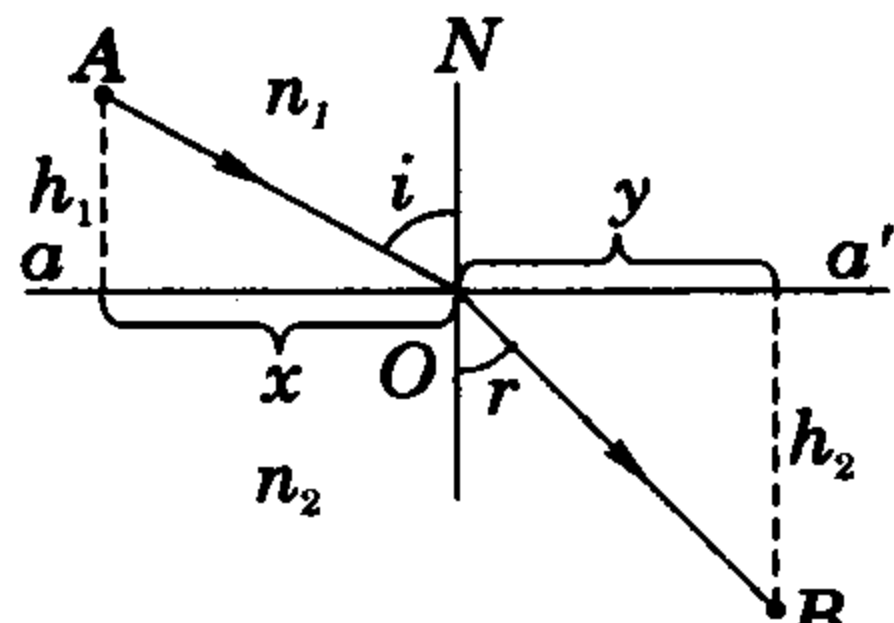


图 24-4

当光线在两种均匀介质的界面上发生折射时，光程也遵守费马原理，如图 24-4， aa' 为折射率各是 n_1 、 n_2 的两种介质的界面，入射光线 AO 在 O 点折射后的折射光线为 OB ，对给定的两点 A 、 B ，光程 AOB 为 $l=n_1 \cdot AO+n_2 \cdot OB$ ；由图得

$$AO=\sqrt{h_1^2+x^2}, BO=\sqrt{h_2^2+y^2}, x+y=k,$$

$$\text{则 } l=n_1 \sqrt{h_1^2+x^2}+n_2 \sqrt{h_2^2+y^2}. \quad (1)$$

根据费马原理，这方程应取极值，即①式的一阶导数应该等于零：

$$l'=\frac{n_1 x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{n_2(k-x)}{\sqrt{h_2^2+(k-x)^2}}=0,$$

$$\text{则 } n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}=n_2 \cdot \frac{y}{\sqrt{h_2^2+y^2}},$$

即 $n_1 \sin i=n_2 \sin r$ ，这就是折射定律，可见，满足极值条件的光程也满足折射定律。

例 1 某行星上大气的折射率随着行星表面的高度 h 按照 $n=n_0-ah$ 的规律而减小，行星的半径为 R ，行星表面某一高度 h_0 处有光波道，它始终在恒定高度，光线沿光波道环绕行星传播，试求高度 h_0 。

分析与解 在专题 13“小试身手”中，读者根据光波的惠更斯原理，已求解过这个圆形光波道高度问题，这里，我们依据费马原理换角度求解。如图 24-5，设光线在 X 行星表面高 h_0 处沿圆周绕行星一周，则其光程为 $l=n \cdot 2\pi r$ ，式中 $n=n_0-ah_0$ ， $r=R+h_0$ 。由费马原理可知，光是沿着光程为极值的路径传播的，所设光线路径实际存在的特定条件是其光程为极值，故只须求出使 l 取极值时的 h_0 即可：

$$l=2\pi(n_0-ah_0) \cdot (R+h_0)=\frac{2\pi}{a}(\frac{n_0}{a}-h_0) \cdot (R+h_0).$$

$$\text{上式中 } \frac{n_0}{a}-h_0>0, R+h_0>0, \text{ 且 } \frac{n_0}{a}-h_0+R+h_0=\frac{n_0}{a}+R$$

为定值，故当 $\frac{n_0}{a}-h_0=R+h_0$ 时，光程有最大值。由此可见，在 $h_0=\frac{1}{2}(\frac{n_0}{a}-R)$ 处，存在光的圆折射路径。

根据费马原理，可以确定光线在各种具体情况下的传播方向，从而可以用来研究光在平面和球面系统中的反射或折射成像问题。发光点形成发散光束，具有一个顶点的光束被称为单心光束，顶点被我们称为物点，单心光束通过光具反射或折射后若仍为单心光束，则将这被作用后的光束的顶点称为像点，其中，被光具作用后的单心光束实际会聚的顶点，称为实像点；

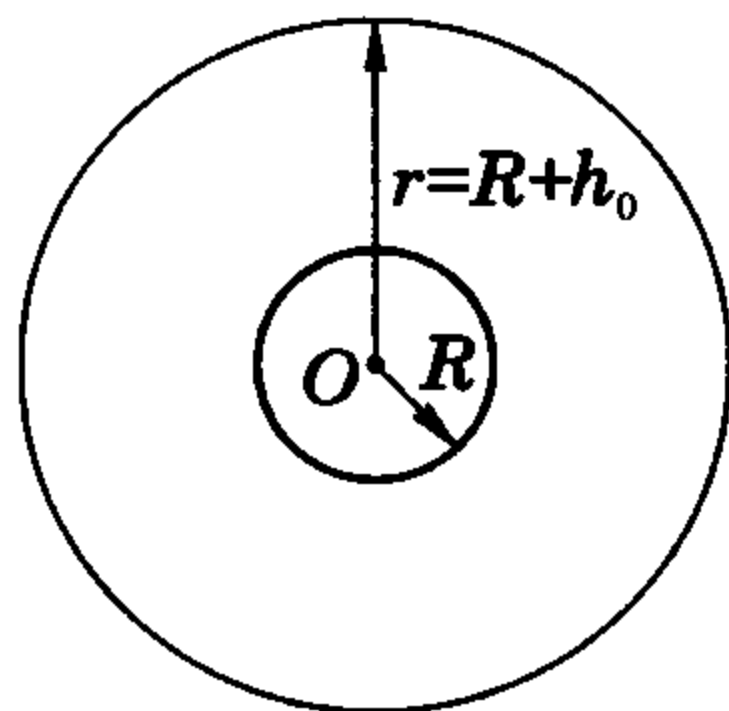


图 24-5

而相反的情况——被光具作用后的单心光束发散,即经反射或折射后的光线反向延长线通过的顶点,则该顶点称为虚像点.几何光学主要研究各种成像规律,关注像如何准确地反映发光物体形状,也就是怎样保持光束单心性的问题.

平面镜成像与球面镜成像均属反射成像情况.平面镜成像特点是不改变光束的敛散性,即若入射光束为单心发散光束(实物),反射光束必为单心发散光束(虚像);反之,若入射光束为单心会聚光束(虚物),反射光束必为单心会聚光束(实像),故平面镜是一个最简单的能成完善像的光学系统.球面反射会破坏光束的单心性,我们通常考虑近轴光线条件下的球面反射.如图 24-6 所示,反射镜面 AOB 是球面的一部分,C 为球面

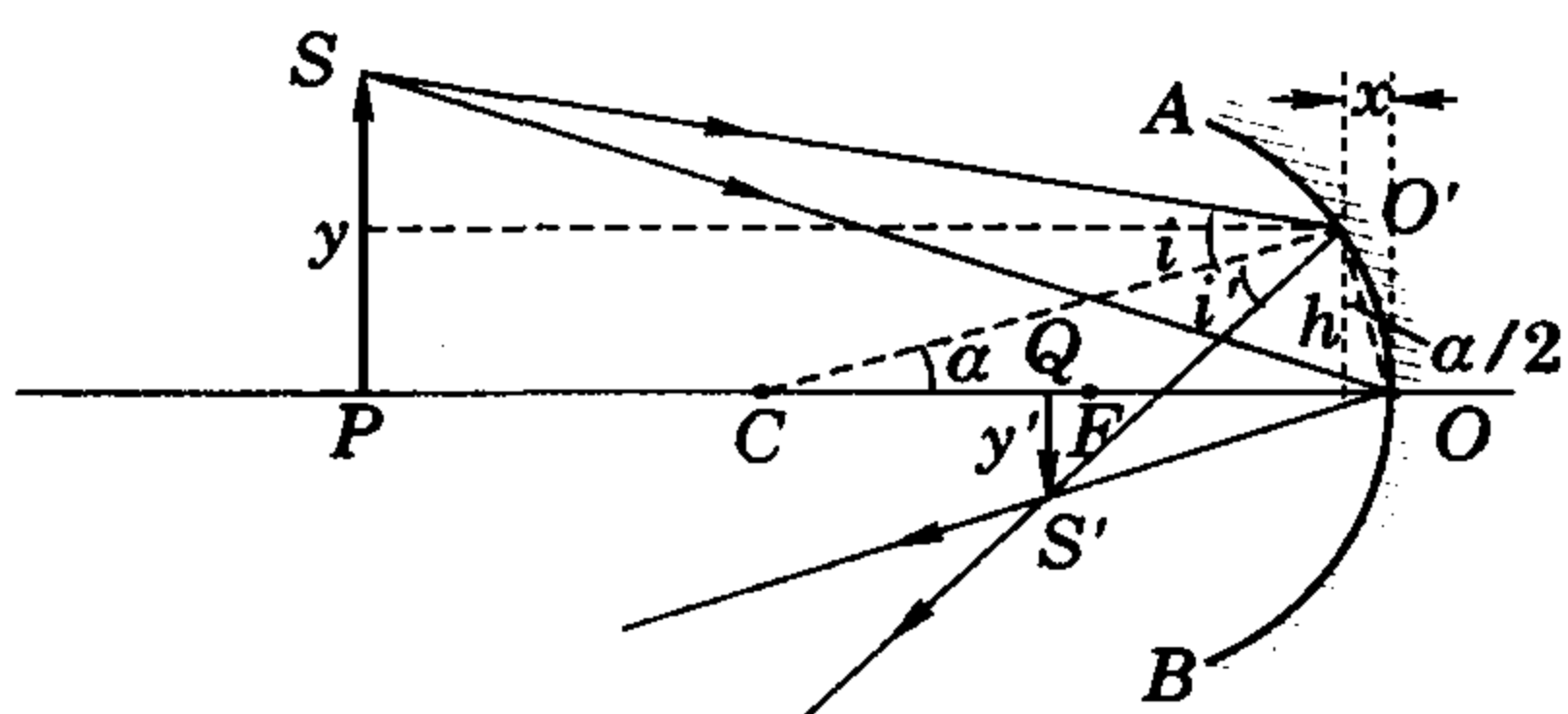


图 24-6

曲率中心,F 为焦点,O 为球面顶点,C、O 所在直线为主轴,物点 S 距主轴 y,物距 $OP = u$,单心光束经 O_1 、O 间球面反射后会聚于 S' , S' 即为像点,像点距主轴 y' ,像距 $OQ = v$.根据费马原理可以推论,任一发光点所发光束经球面反射或折射后能成像于一点的条件是,从物点到达像点的所有光线的光程都相等,在图 24-6 所示情况中,从 S 发出的任一光线——例如 SO_1S' 的光程为

$$l = SO_1 + O_1S' = \sqrt{(u-x)^2 + (y-h)^2} + \sqrt{(v-x)^2 + (y'+h)^2} \quad (2)$$

在近轴光线的条件下,与反射面所在球半径 r 相比, y 、 y' 、 x 、 h 以及入射角 i 、反射角 i' 都是小量,图 24-6 中法线 CO_1 与主轴所夹角 α 亦为小量,且有 $x = h \cdot \frac{\alpha}{2} = h \cdot \frac{h}{2r} = \frac{h^2}{2r}$.利用二项式定理对②式展开并略去小量高次项得

$$l \approx (u-x) + \frac{(y-h)^2}{2(u-x)} + (v-x) + \frac{(y'+h)^2}{2(v-x)}$$

$$\text{上式中第 2 项 } \frac{(y-h)^2}{2(u-x)} \approx \frac{(y-h)^2}{2u(1-\frac{x}{u})} \approx \frac{(y-h)^2}{2u} (1 + \frac{x}{u})$$

$$\approx \frac{(y-h)^2}{2u} (1 + \frac{h^2}{2ru}) \approx \frac{(y-h)^2}{2u};$$

$$\text{同理,第 4 项 } \frac{(y'+h)^2}{2(v-x)} \approx \frac{(y'+h)^2}{2v}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} l &\approx (u-x) + \frac{(y-h)^2}{2u} + (v-x) + \frac{(y'+h)^2}{2v} \\ &\approx u+v + \frac{y^2}{2u} + \frac{y'^2}{2v} - h(\frac{y}{u} - \frac{y'}{v}) + \frac{h^2}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}) - 2x \\ &= u+v + \frac{y^2}{2u} + \frac{y'^2}{2v} - h(\frac{y}{u} - \frac{y'}{v}) + \frac{h^2}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{2}{r}). \end{aligned}$$

要使所有从物点 S 发出的光线到达像点 S' 光程都相等,必须满足 l 与 h 无关这样一个条件,即上式中含有 h 、 h^2 的各

项应等于零,故有

$$\frac{y}{u} - \frac{y'}{v} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{2}{r} = 0;$$

在近轴光线条件下焦距 $f = \frac{r}{2}$,故有

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}. \quad (4)$$

此即近轴光线条件下球面反射的成像公式,式中 u 、 v 、 f 均以“+”“-”表示实与虚.③式体现了近轴光线条件下球面反射成像的理想性亦即物与像的几何相似性,放大率

$$k = \frac{y'}{y} = \frac{v}{u}.$$

近轴光线条件下球面反射成像规律如下表,表中 u 、 v 、 f 只指代表物距、像距与焦距大小:

物距	像				
	凹面镜			凸面镜	
$u = \infty$	$v = f$	缩小	倒立	实像	
$u > R$	$R > v > f$	缩小	倒立	实像	
$u = R$	$v = R$	等大	倒立	实像	$v \leq f$ 缩小
$R > u > f$	$u > R$	放大	倒立	实像	正立 虚像
$u = f$	$v = \infty$	放大	倒立	实像	
$u < f$	$v > u$	放大	正立	虚像	

棱镜、透镜等均属折射光具.

光在两种介质的平面分界面上折射时,除平行光束仍为平行光束外,单心光束将被破坏其单心性,仅当单心光束中各条光线几乎垂直于界面时,被平面界面折射后的光束才几乎保持为单心.考虑近轴(界面法线)光线条件下的平面折射,如图 24-7, aa' 为两种介质(折射率 $n_1 > n_2$) 的界面,设物点 P 距界面 H,从 P 作正入射光线(入射角为 0)与一条近轴光线(入射角 i 很小),前者折射后方向不变仍垂直于界面,后者改变方向,折射角为 r ,两折射光线的反向延长交于 P' ,此即 P 的虚像,设其距界面 h ,由图中几何关系知: $H \cdot \tan i = h \cdot \tan r \Rightarrow h = \frac{\tan i}{\tan r} H$,

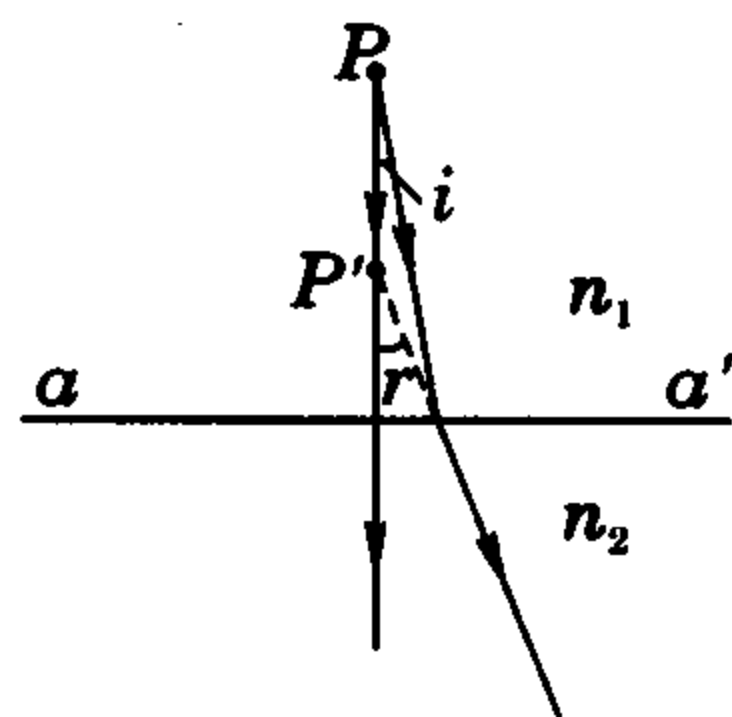


图 24-7

在近轴光线条件下, $\frac{\tan i}{\tan r} \approx \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$,故 $h = \frac{n_2}{n_1} H$.这里像与界面的距离 h 被称为像似深度,当折射光所在介质折射率 n_2 小于入射光所在介质折射率 n_1 时, $h < H$,譬如在水面上沿着竖直方向看水中物体,所见像较清晰,且所见“物体”上升了,所谓“水清池浅”是也;当折射光所在介质折射率 n_2 大于入射光所在介质折射率 n_1 时, $h > H$,我们通过大气层所见中天之日,其位置比太阳的实际位置高正属此种情况.

例 2 某观察者通过一块薄玻璃板去看在凸面镜中他自己眼睛的像.他移动着玻璃板,使得在玻璃板中与在凸面镜中所看到的他眼睛的像重合在一起.若凸面镜的焦距为 10 cm,



眼睛与凸面镜顶点的距离为 40 cm,问玻璃板距观察者眼睛的距离为多少?

分析与解 观察者通过薄玻璃板看到的像是物(眼睛)S 发出的光通过平面反射而成的等大虚像 S_1 ,若设玻璃板距观察者眼睛的距离为 x ,则 S_1 到玻璃板的距离也是 x ;玻璃板面同时还对物 S 发出的光折射而成一虚像 S_2 ,它的位置与物 S 在同一侧,距离薄玻璃板 nx ;被玻璃板折射后入射到凸面镜上的光束就如同来自 S_2 ,故对凸面镜而言, S_2 是它的物,经凸面镜反射成一缩小虚像 S' ,根据题意 S' 与 S_1 重合,故位于距玻璃板 x 处,成像光路如图 24-8 所示.

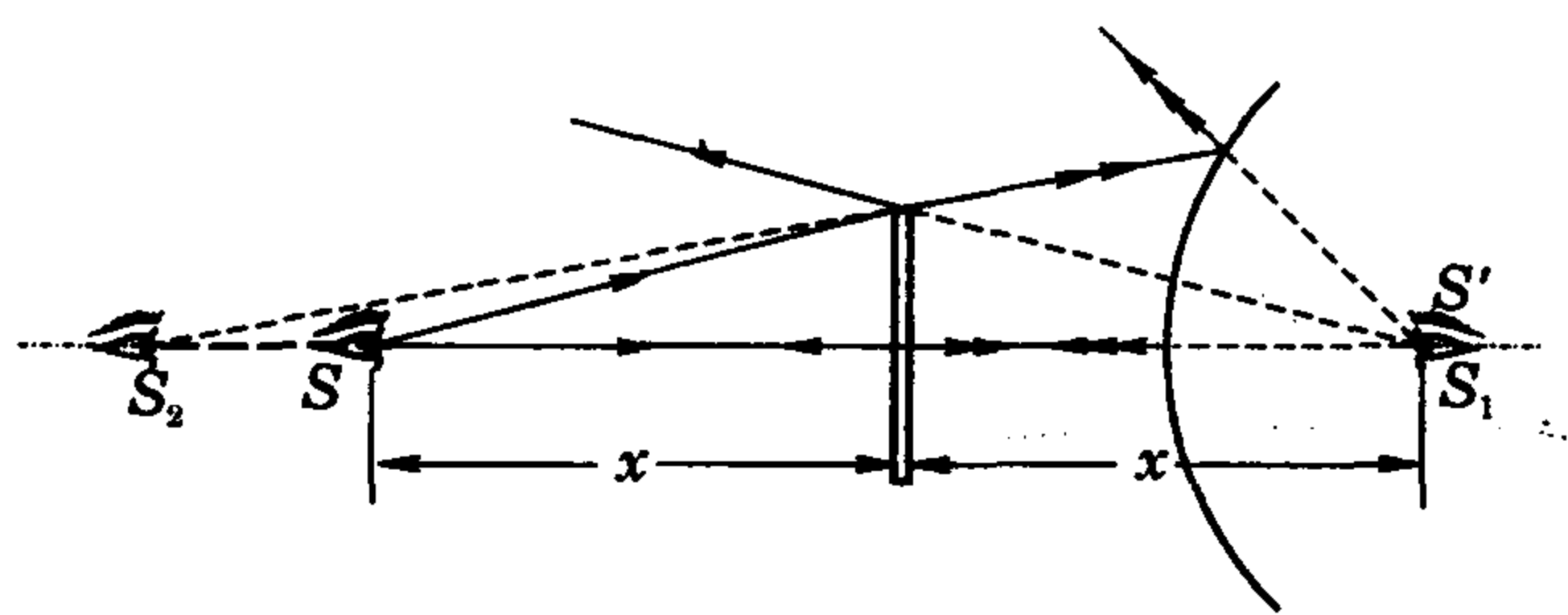


图 24-8

由上分析,运用球面镜物像公式,有

$$\frac{1}{(n-1)x+40} - \frac{1}{2x-40} = -\frac{1}{10},$$

取玻璃的折射率为 1.5,可得

$$x \approx 24.2 \text{ cm}.$$

例 3 如图 24-9 所示,介质在一定区域 $x > 0, y > 0$ 内的折射率随着 y 的变化而连续变化.一束细光束沿 x 方向垂直入射到介质表面,并沿着一个半径为 R 的圆弧路径穿过介质,求折射率 n 随 y 变化的规律.如果 $y=0$ 时折射率 $n_0=1$,已知的材料中最大折射率(金刚石折射率)不超过 2.5,圆弧所对应的圆心角最大可能达多少?

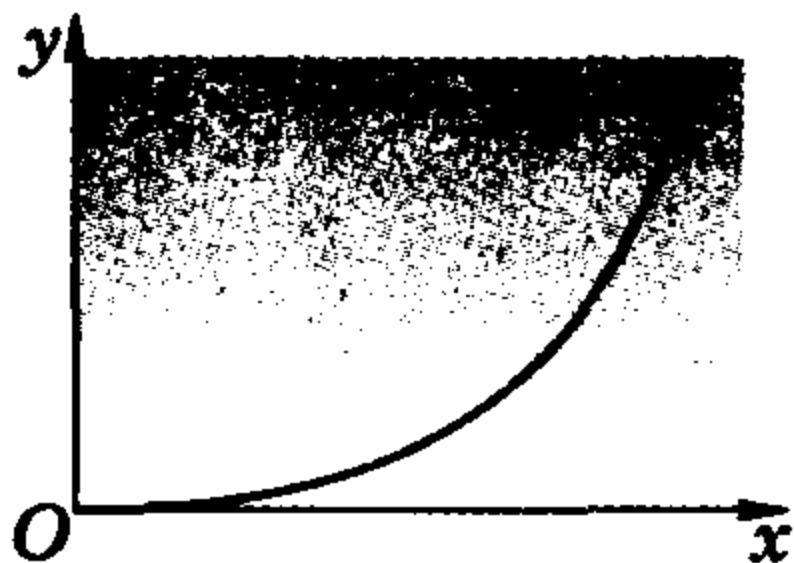


图 24-9

分析与解 我们先看一下光穿过几个互相平行的、折射率不同的介质区的情况,如图 24-10 所示,光以入射角 θ 从折射率为 n_0 的介质进入折射率为 n_1 的介质中,折射角为 r_1 ,由折射定律, $\frac{\sin \theta}{\sin r_1} = \frac{n_1}{n_0}$,即 $n_0 \sin \theta = n_1 \sin r_1$,同样的方法可得 $n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 \dots$ 即 $n_0 \sin \theta = n_1 \sin r_1 = \dots = n_i \sin r_i = \text{常数}$,与各介质区厚度及个数无关.这个规律可以运用到折射率连续变化的不均匀介质中.

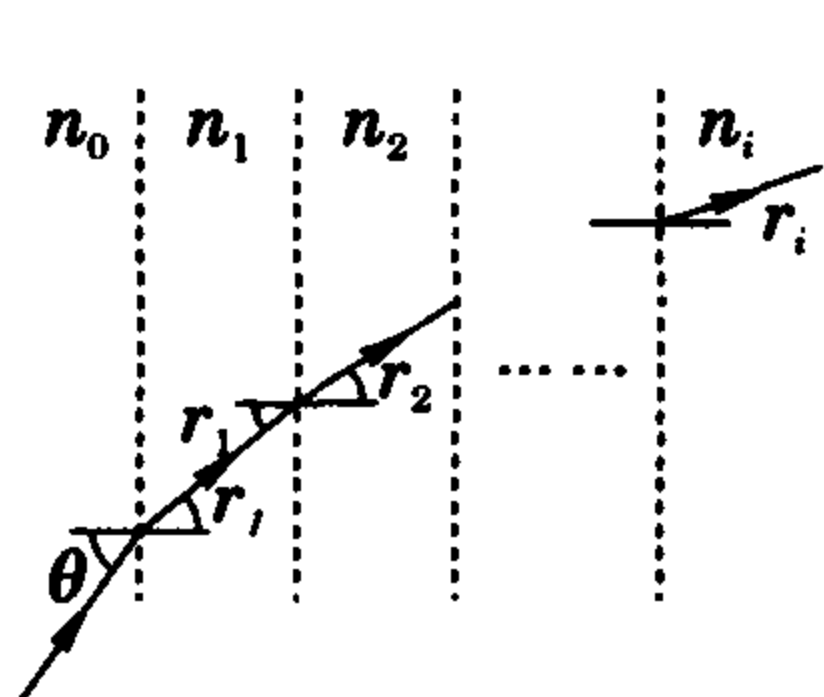


图 24-10

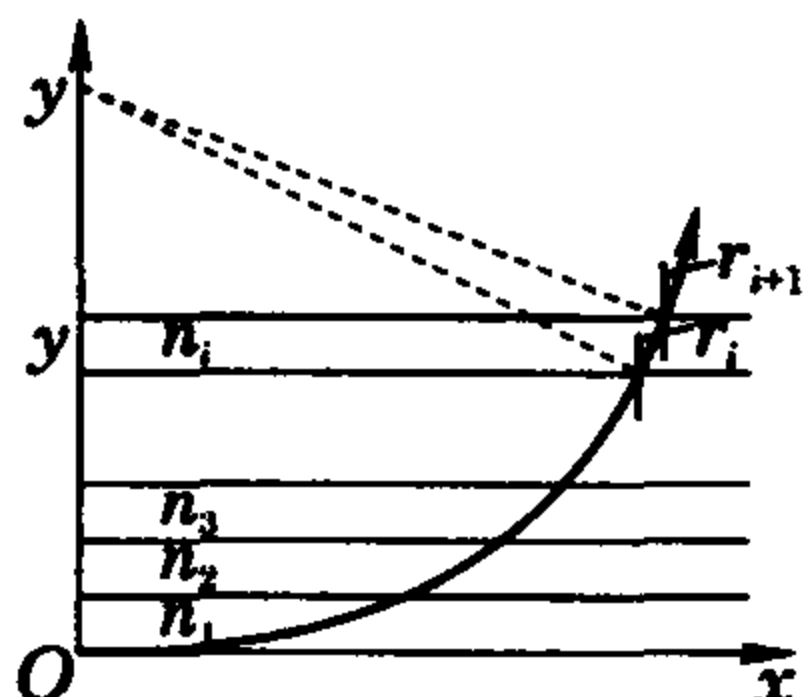


图 24-11

如图 24-11 所示,我们将题给介质区域分成与 x 轴平行的 N 薄层($N \rightarrow \infty$),各层的折射率 $n(y)$ 可视为不变, x 轴上方 y 处的第 i 层的折射率为 n_i ,光在该薄层轨迹为极小一段圆弧(可视作直线),进入该薄层的光束折射角为 r_i ,射出该薄层的光束折射角变为 r_{i+1} .由于初始细光束沿 x 方向垂直入射到介质表面,故有 $n_0 \sin 90^\circ = n_i \sin r_i$,那么, $\sin r_i = \frac{n_0}{n_i}$,由图 24-11 所示几何关系可知, $y = R - R \sin r_i = R(1 - \frac{n_0}{n_i})$,则 $n(y) = \frac{R}{R-y} n_0$,此即所求折射率 n 随 y 变化的规律.

如果 $y=0$ 时折射率 $n_0=1$,已知的具有最大折射率的材料其折射率不超过 2.5,这是能使折射光束对应的圆心角达到最大的折射率极限,取 $\sin r_{\max} = \frac{n_0}{n_{\max}} = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5}$,则相应的最大圆心角可达 $\theta = 90^\circ - \arcsin \frac{2}{5} \approx 66.4^\circ$.

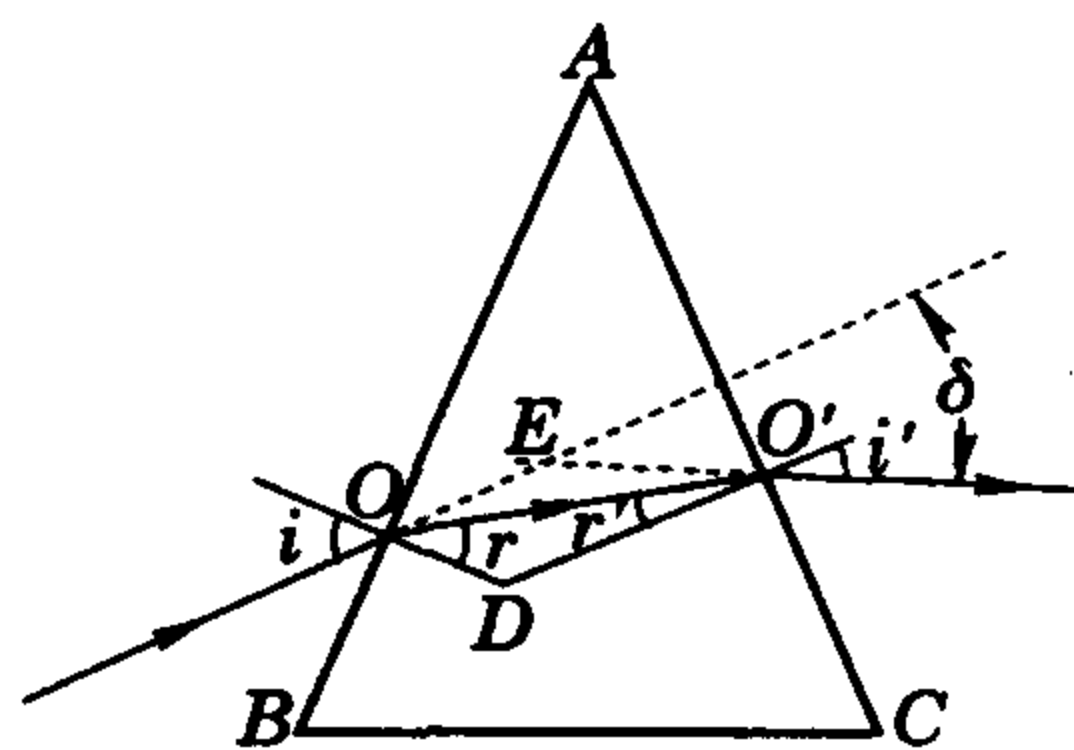


图 24-12

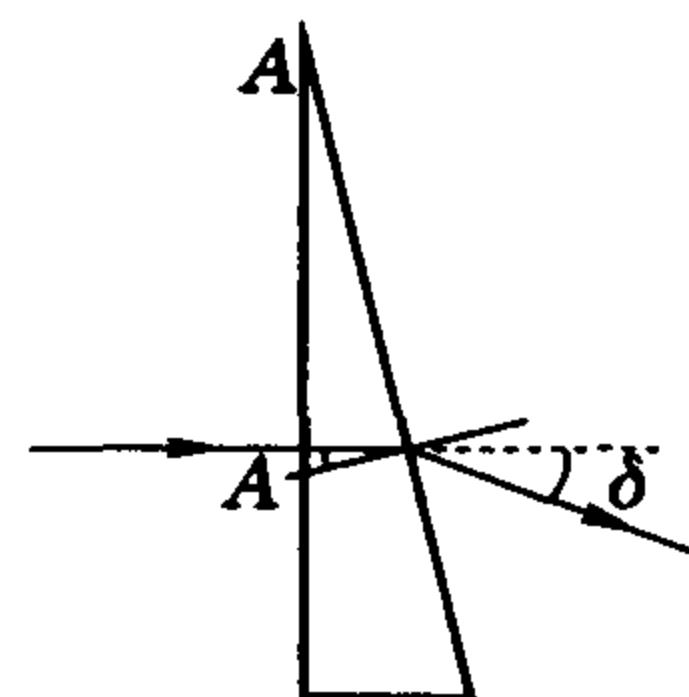


图 24-13

在棱镜中光线入射与出射的两个平面界面互不平行,我们来探讨三棱镜对光路控制的一些特殊规律.如图 24-12 所示为一块放在空气中、折射率为 n 的三棱镜的主截面,该图中 AB, AC 在两个折射面上, A 为折射棱角,当单色光束通过棱镜时,将连续两次折射,出射线与入射线间夹角 δ 称为偏向角,它反映三棱镜改变光传播方向的程度.由图 24-12 所示几何关系知, $\delta = (i - r) + (i' - r')$,而 $r + r' = A$,故 $\delta = i + i' - A$.由此式可知,若三棱镜折射棱角确定,入射角 i 变化时,出射光线偏向角将随之改变,其中,当 $i = i'$,即光线对称地进出三棱镜时,偏向角 δ 有最小值 $\delta_{\min} = 2i - A$.若三棱镜折射棱角 A 很小,当光垂直于一个折射面射入,如图 24-13 所示,即 $i = 0^\circ$ 时, $r = 0^\circ, r' = A$,则 $i' \approx nA$,由 $\delta = i + i' - A$ 可得: $\delta = (n-1)A$.

例 4 通常用阿贝数 $v = (n_D - 1)(n_F - n_C)$ 来表示光学材料的色散特性,其中 n_D, n_C, n_F 分别表示材料对单色光 D 及单色光 C 及 F 的折射率.一束白光照射到一顶角 $A = 60^\circ$,冕牌玻璃($n_D = 1.500, n_C = 1.495, v = 40$)棱镜上,使单色光 D 在棱镜中的传播方向垂直于角 A 的平分面.求从棱镜射出的单色光 C 和 F 之间的夹角.

分析与解 根据题给条件,白光以入射角 i 进入棱镜后,

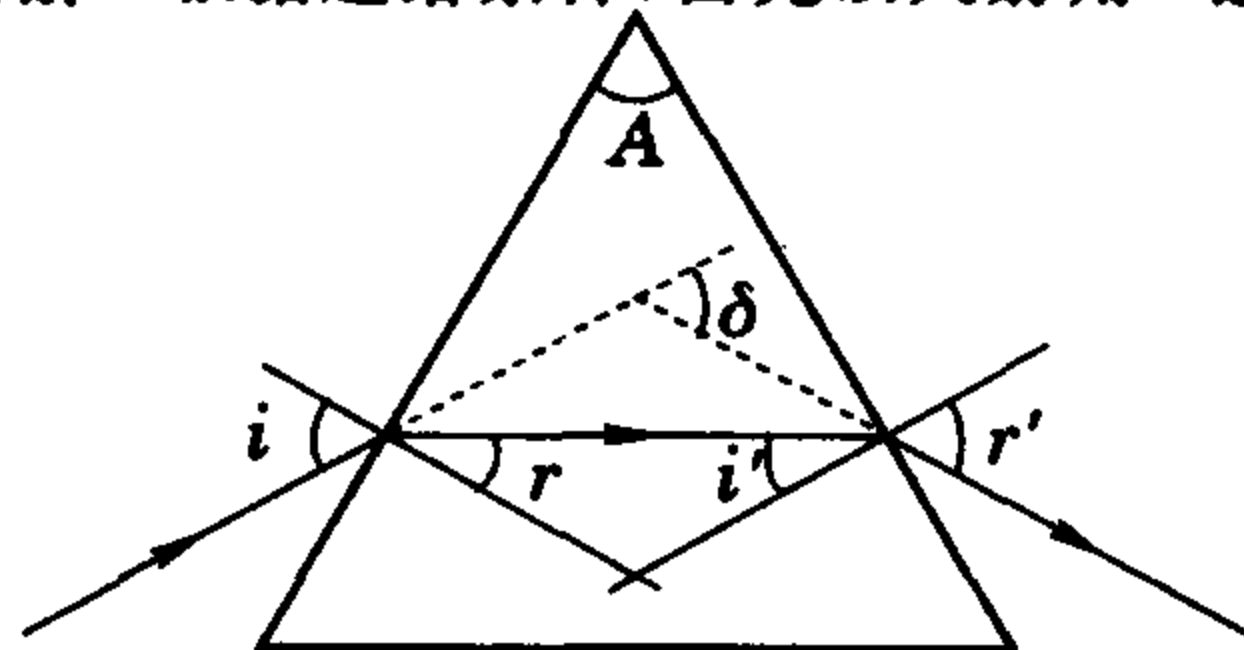


图 24-14



单色光 D 对称地进出三棱镜, 偏向角 δ 有最小值 $\delta_{\min} = 2i - A$; 单色光 C 的偏向角小于 $2i - A$; 单色光 F 的折射率 $n_F = 1.5075$, 偏向角大于 $2i - A$. 做出 D 通过三棱镜的光路如图 24-14, 由图可得, $r = r' = \frac{A}{2} = 30^\circ$, 由折射定律 $n_D = \frac{\sin i}{\sin r}$ 可知

白光中各单色光的人射角均为 $i = \arcsin(n_D \sin r) = \arcsin 0.750$, 单色光 C 的偏向角 $\delta_C = i + i_C' - A$, 单色光 F 的偏向角 $\delta_F = i + i_F' - A$, 那么从棱镜射出的单色光 C 和 F 之间的夹角 $\delta_F - \delta_C = i_F' - i_C'$, 由折射定律 $n_F = \frac{\sin i_F'}{\sin(A - r_F)} = \frac{\sin i}{\sin r_F}$, $n_C =$

$$\frac{\sin i_C'}{\sin(A - r_C)} = \frac{\sin i}{\sin r_C}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} \sin i_F' &= \sin A \sqrt{n_F^2 - \sin^2 i} - \cos A \cdot \sin i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1.5075^2 - 0.750^2} - \frac{1}{2} \times 0.750 \\ &\approx 0.7575, i_F' \approx 49.24^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin i_C' &= \sin A \sqrt{n_C^2 - \sin^2 i} - \cos A \cdot \sin i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1.495^2 - 0.750^2} - \frac{1}{2} \times 0.750 \\ &\approx 0.74496, i_C' \approx 49.16^\circ. \end{aligned}$$

于是得 $\delta_F - \delta_C = 1.08^\circ$, 入射白光经三棱镜的折射发生色散而使折射率不同的 C 光与 F 光射出棱镜后的传播方向有约 1° 的张角.

现在来讨论近轴物在近轴光线条件下的球面折射, 如图 24-15 所示, 球面 AOB 为 n_1, n_2 两不同折射率的介质的分界面, C 为球面曲率中心, O 为折射球面中心, C, O 在主轴上, 物

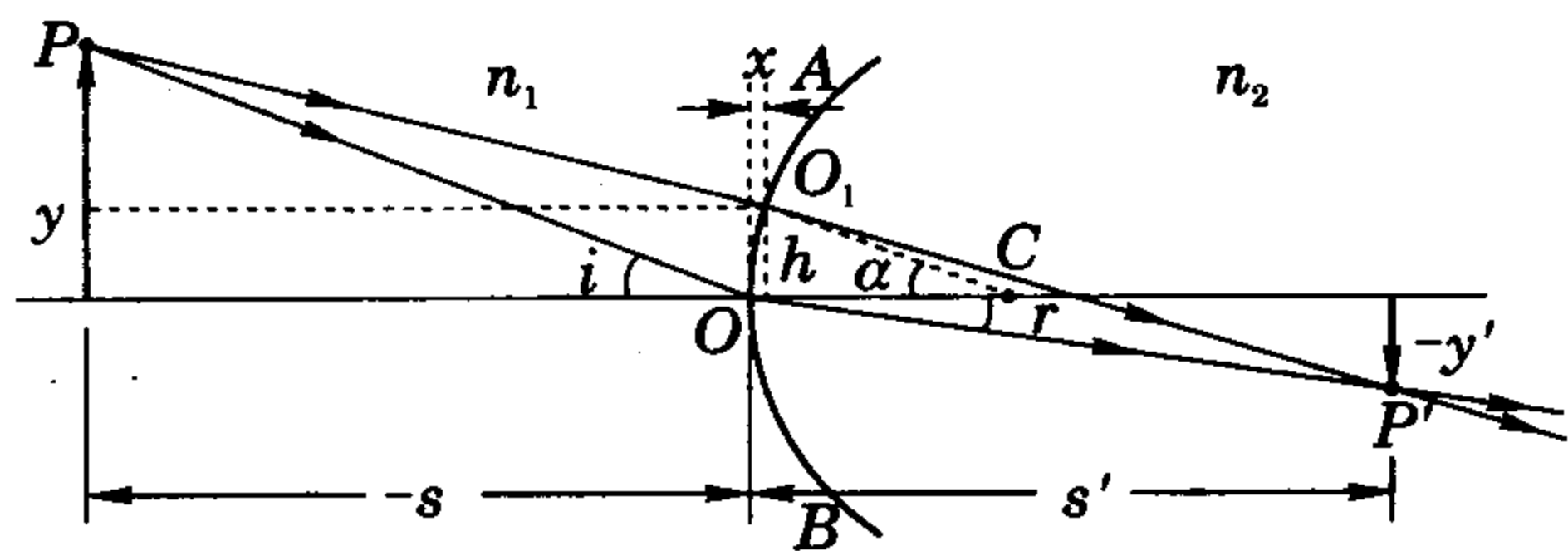


图 24-15

点 P 距主轴 y , 物距 $OP = -s$ (根据笛卡儿符号法则, 与光传播方向一致的长度取正, 相反的长度取负), 单心光束经 $O_1 O$ 间球面折射后会聚于 P' , P' 即为像点, 像点距主轴 $-y'$ (“-”表示像在主轴下方), 像距 $OP' = s'$. 根据费马原理, 任一发光点所发光束经球面折射后能成像于一点的条件是, 从物点到达像点的所有光线的光程都相等, 在图 24-15 所示情况中, 从 P 发出的任一近轴光线——例如 $PO_1 P'$ 的方程为

$$l = n_1 \cdot PO_1 + n_2 \cdot O_1 P' = n_1 \sqrt{(-s+x)^2 + (y-h)^2} + n_2 \sqrt{(s'-x)^2 + (-y'+h)^2}, \quad (1)$$

在近轴光线的条件下, 与球半径 R 相比, y, y', x, h 以及入射角 i , 折射角 r 都是小量, 且有 $\sin i \approx i, \sin r \approx r, x = h \cdot \frac{a}{2} =$

$h \cdot \frac{h}{2R} = \frac{h^2}{2R}$, 利用二项式定理对①式展开并略去小量高次项得

$$\begin{aligned} l &\approx n_1(-s+x) - n_1 \frac{(y-h)^2}{2s} + n_2(s'-x) + n_2 \frac{(-y'+h)^2}{2s'} \\ &= -n_1 s + n_2 s' - \frac{n_1 y^2}{2s} + \frac{n_2 y'^2}{2s'} + h \left(\frac{n_1 y}{s} - \frac{n_2 y'}{s'} \right) + \frac{h^2}{2} \left(-\frac{n_1}{s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_2}{s'} + \frac{n_1}{R} - \frac{n_2}{R} \right), \end{aligned}$$

要使所有从物点 P 发出的光线到达像点 P' 光程都相等, 必须满足 l 与 h 无关这样一个条件, 即上式中含有 h, h^2 的各项应等于零, 故有

$$n_1 \frac{y}{s} - n_2 \frac{y'}{s'} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (3)$$

平行于主轴在 n_1 介质方的人射光线折射后与主轴的交点称为像方焦点 F_2 , O 点与其距离即像方焦距 f_2 , 以 $s = \infty$ 代入③式即得 $f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$, 对称地, 物方焦距 $f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R$; 将此二式代入③式可得

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} \Rightarrow \frac{f_1}{s} + \frac{f_2}{s'} = 1.$$

此即近轴光线条件下球面折射的物像公式, 称为高斯公式. 由图 24-15 可知 $y \approx s \cdot i, y' \approx s' \cdot r$, 在近轴光线条件下, $\frac{i}{r} \approx \frac{n_2}{n_1}$, 则 $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{s'}{s}$, 这正是②式所表示的像关于物的横向放大率.

透镜成像是两个折射面对光线作用的结果. 设如图 24-16

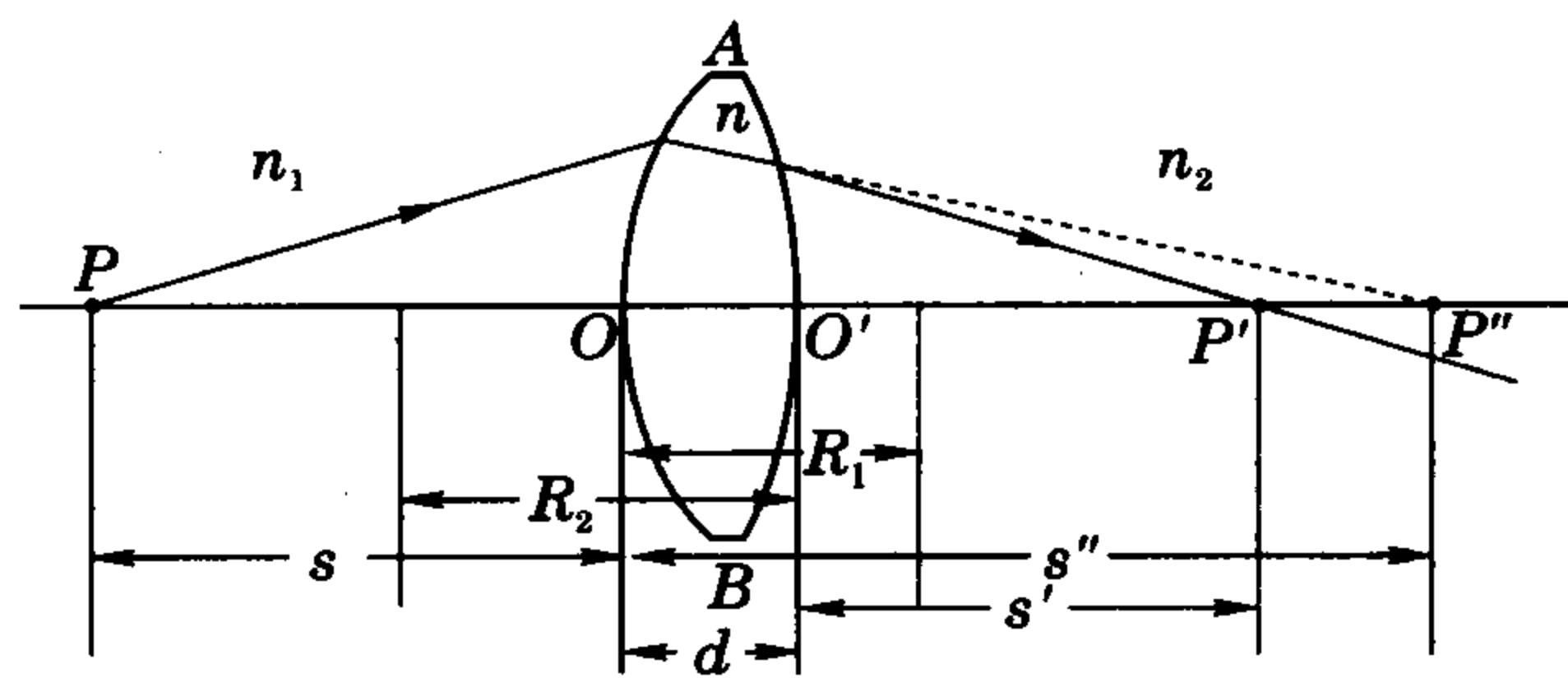


图 24-16

所示的透镜材料折射率为 n , 物方介质折射率为 n_1 , 球面曲率半径为 R_1 ; 像方介质折射率为 n_2 , 球面曲率半径为 $-R_2$, 透镜厚度 OO' 设为 d , 物点 P 在主轴上, 物距 $OP = -s$, P 发出的近轴光线经球面 AOB 一次折射所成像 P'' 在主轴上, 像距 $OP'' = s''$ (这时假设球面 $AO'B$ 不存在且球面 AOB 右边被折射率为 n 的介质充满), 由球面折射的物像公式:

$$\frac{n}{s''} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{R_1}, \quad (4)$$

再考虑光线经球面 $AO'B$ 的二次折射, 对该面而言, P'' 是入射光延长后的会聚点, 即为虚物, 物距为 $(s'' - d)$, 经 $AO'B$ 折射所成像 P' 仍在主轴上, 像距 $O'P' = s'$, 对球面 $AO'B$ 有

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n}{(s'' - d)} = \frac{n_2 - n}{R_2}, \quad (5)$$

在薄透镜的情况下, $d \rightarrow 0$, 由④、⑤两式消去 s'' 得



$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

这就是薄透镜成像的普适公式,若以物方焦距 $-\frac{1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 R_1} + \frac{n_1 - n_2}{n_1 R_2}$, 像方焦距 $\frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R_1} + \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_2}$ 代入薄透镜成像的普适公式,亦可得高斯物像公式: $\frac{f_1}{s} + \frac{f_2}{s'} = 1$. 进而若将薄透镜置于空气中, $n_1 = n_2 = 1$, 焦距 $-\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$, 则有 $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2}$. 我们较熟悉的用几何方法推导出的薄透镜成像公式 $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ 与该式相比,薄透镜成像公式 $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ 中的 u, v, f 可正可负,“正实负虚”,高斯物像公式中 s, s', f 只用正值,而加正、负号表示与光传播方向的一致或相反,例如物方焦距是 $-f_1$, 因为定义为从折射球面顶点算起到焦点的长度与入射光的方向是相反的.

例5 如图24-17所示,一玻璃半球的曲率半径为 R , 折射率 $n=1.5$, 其平面的一边镀银. 一物高为 h , 放在曲面顶点前 $2R$ 处. 求: (1) 由球面所成的第一个像的位置; (2) 这一光具组的最后一个像在哪里?

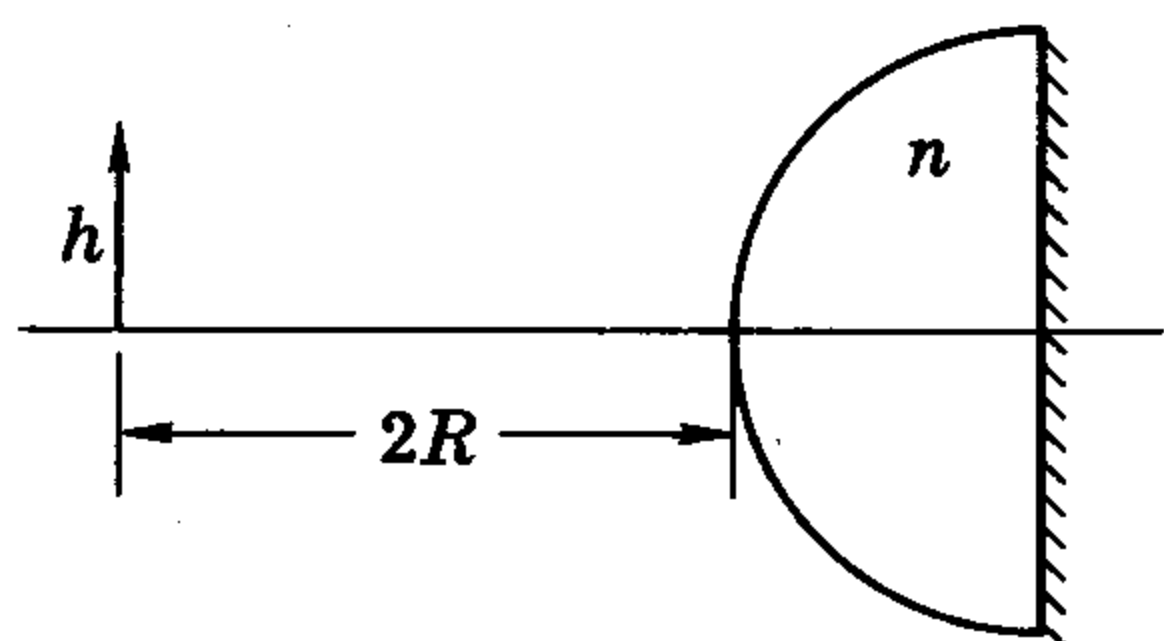


图 24-17

分析与解 发光物体经球面折射所成的第一个像可运用球面折射的高斯公式: $\frac{f_1}{s} + \frac{f_2}{s'} = 1$, 其中

物方焦距 $f_1 = \frac{n_0}{n_0 - n} R = -2R$; 像方焦距 $f_2 = \frac{n}{n - n_0} R = 3R$, 则有

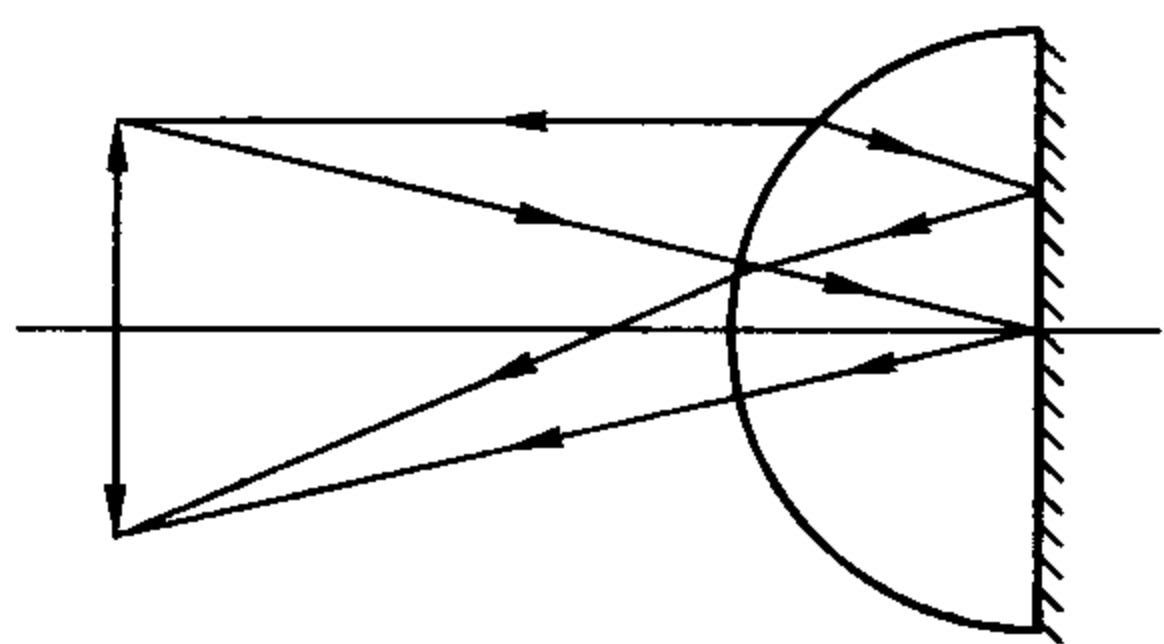


图 24-18

$\frac{-2R}{-2R} + \frac{3R}{s'} = 1$, 可得 $s' = \infty$, 即入射光经球面第一次折射后成平行光, 物体上端点光束光路如图24-18; 图中示出此后平行光由平面镜反射仍成平行光而第二次由球面折射, 成像在球面左侧距球面顶点 s'' 处, 由高斯公式得 $-\frac{3R}{\infty} + \frac{2R}{s''} = 1, s'' = 2R$, 即最后所成像在出射光线一侧距球面顶点 $2R$ 处, 是一个倒立等大的实像.

例6 水中的发光体位于距盛水器皿壁 x 处, 从外面往器皿壁上贴一个平凸透镜, 透镜在空气中的焦距等于 f . 透镜和器皿壁是非常薄的, 水的折射率为 $n_{\text{水}} = \frac{4}{3}$, 而玻璃的折射率 $n_{\text{玻}} = \frac{3}{2}$. 物体位于透镜的主光轴上. 求出并讨论像的位置 y 与物体的位置 x 的关系. 作为特例, 求出 $x=f$ 时像的位置和放

大倍数. 如果透镜是贴在器皿内壁, 情况是否会发生变化? 怎样变化?

分析与解 透镜和器皿壁都非常薄, 不考虑器皿壁对光的作用而将平凸透镜视为薄透镜. 平凸透镜平面曲率半径为 ∞ , 由 $\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2}$, 在空气中 $n_1 = n_2 = n_0 = 1$, 以 $s' = \infty$ (或 $s = \infty$), $s' = f$ (或 $s = f$) 代入, 知凸面曲率半径 $R = (n_{\text{玻}} - 1)f = 0.5f$. 当透镜贴在器皿壁外面时, 如图24-19所示, 物

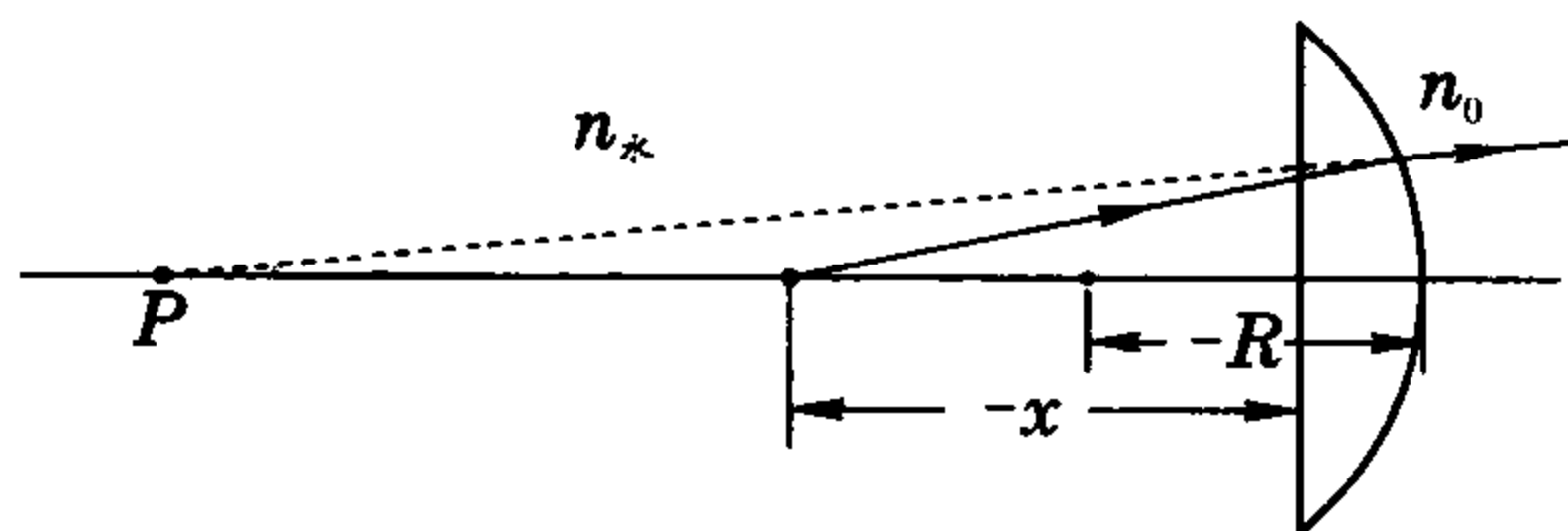


图 24-19

方介质为水, 透镜的平面曲率半径为 ∞ , 根据薄透镜物像公式 $\frac{1}{y} - \frac{n_{\text{水}}}{-x} = \frac{n_{\text{玻}} - n_{\text{水}}}{\infty} + \frac{1 - n_{\text{玻}}}{-R}$, $\frac{1}{y} + \frac{4}{3x} = \frac{1}{f}$, 即

$$\frac{1}{y} - \frac{n_{\text{水}}}{-x} = \frac{n_{\text{玻}} - n_{\text{水}}}{\infty} + \frac{1 - n_{\text{玻}}}{-R}, \frac{1}{y} + \frac{4}{3x} = \frac{1}{f}, \text{ 即}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} - \frac{4}{3x}$$

由此式, 当 $\frac{1}{f} - \frac{4}{3x} > 0, x > \frac{4}{3}f$ 时, $y > 0$, 即像在透镜出射光同侧, 是实像; 当 $\frac{1}{f} - \frac{4}{3x} < 0, x < \frac{4}{3}f$ 时, $y < 0$, 即像在透镜出射光的另一侧, 是虚像; 若 $x = f < \frac{4}{3}f, y = -3f$, 即所成像在距透镜 $3f$ 的水中一侧成一放大虚像, $\beta = \frac{n_{\text{水}}}{n_0} \cdot \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \times \frac{3f}{f} = 4$.

如果透镜是贴在器皿内壁, 如图24-20所示, 此时物方焦距为

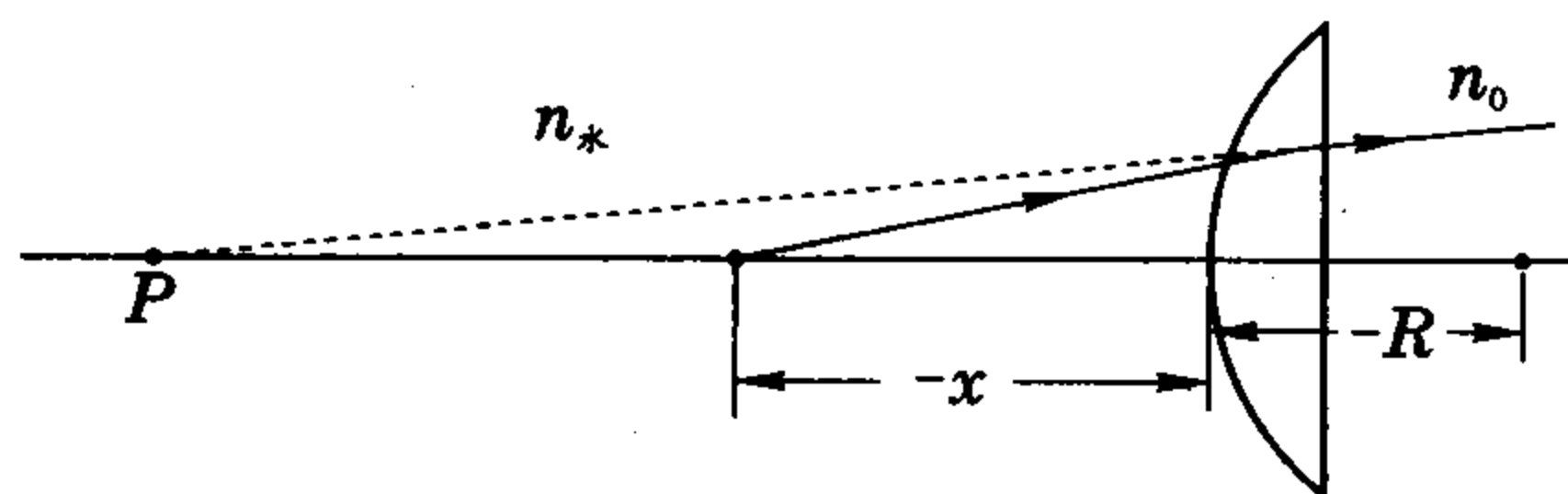


图 24-20

$$-\frac{1}{f_{\text{物}}} = \frac{n_{\text{玻}} - n_{\text{水}}}{n_{\text{水}} R} + \frac{n_0 - n_{\text{玻}}}{n_{\text{水}} \infty} = \frac{1.5 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} \times 0.5f}$$

$$f_{\text{物}} = -4f;$$

像方焦距为 $\frac{1}{f_{\text{像}}} = \frac{n_{\text{玻}} - n_{\text{水}}}{n_0 R} + \frac{n_0 - n_{\text{玻}}}{n_0 \infty} = \frac{1.5 - \frac{4}{3}}{0.5f}, f_{\text{像}} = 3f$, 由高斯公式:

$$\frac{-4f}{-x} + \frac{3f}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3f} - \frac{4}{3x}$$

这时, 当 $x=f$ 时, $y=-f$, 即在水中一侧距壁 f 处成一放大虚像, $\beta = \frac{n_{\text{水}}}{n_0} \cdot \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \times \frac{f}{f} = \frac{4}{3}$.



例7 有一薄透镜如图 24-21 所示, S_1 面是旋转椭球面(椭圆绕长轴旋转而成的曲面), 其焦点为 F_1 和 F_2 ; S_2 面是球面, 其球心 C 与 F_2 重合. 已知此透镜放在空气中时能使从无穷远处位于椭圆长轴的物点射来的全部入射光线(不限于傍轴光线)会聚于一个像点上, 椭圆的离心率为 e . (1) 求此透镜材料的折射率 n (要论证); (2) 如果将此透镜置于折射率为 n' 的介质中, 并能达到上述的同样的要求, 椭圆应满足什么条件?

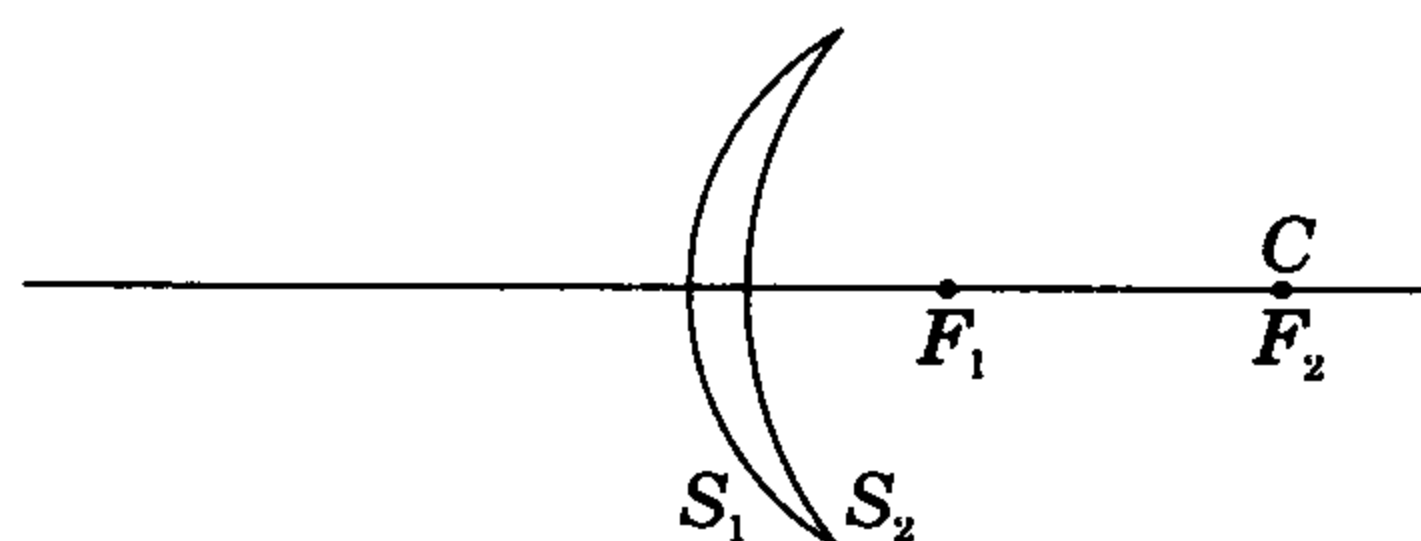


图 24-21

分析与解 对题给薄透镜, 不需要傍轴光线的条件也可会聚理想成像. 我们先做出光路图如图 24-22, 来自无穷远处主光轴上物点的光线可视作平行于主轴, 任意平行于主轴的光线入射到椭球面上任一点 O_1 , NN' 为 O_1 点椭球面的法线, 入射角

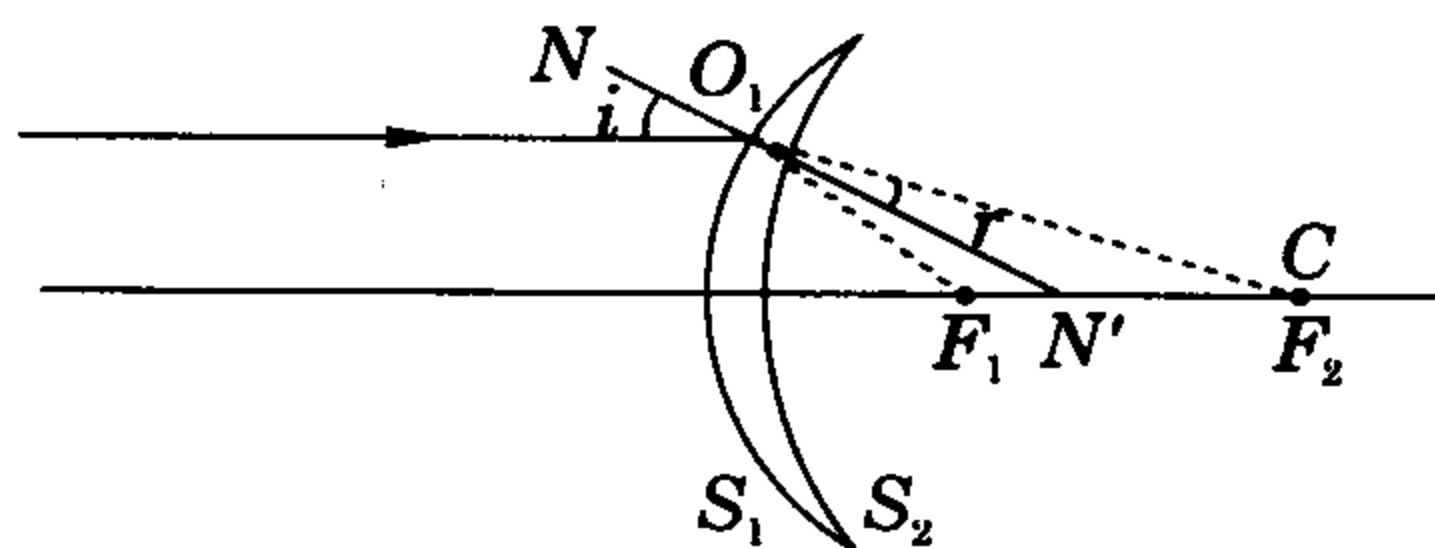


图 24-22

为 i , 如若让该光经椭球面 S_1 折射进入透镜中的传播方向沿 O_1F_2 , 由于 F_2 同时又是球面 S_2 的球心, 则再经球面 S_2 折射将不改变传播方向而到达 $F_2(C)$, $F_2(C)$ 即为像点位置. 由椭圆几何性质知, 法线 NN' 是 O_1 与两焦点 F_1, F_2 张角的平分线, $\angle F_2O_1N' = \angle N'O_1F_1 = r$, 设椭圆半长轴为 a , 则 $O_1F_1 + O_1F_2 = 2a = \frac{F_1F_2}{e}$; 将正弦定理运用于 $\triangle O_1F_1F_2$, 得 $\frac{F_1F_2}{\sin 2r} =$

$\frac{O_1F_1}{\sin(i-r)} = \frac{O_1F_2}{\sin(i-r)}$, 由该二式可解得 $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{e}$, 即此透镜

材料的折射率应取 $n = \frac{1}{e}$.

如果将此透镜置于折射率为 n' 的介质中, 并同样能理想成像, 根据以上分析, 应有 $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{e} = \frac{n'}{n}$, 则椭圆的离心率应满足 $e = \frac{n'}{n}$.

实际运用的光学系统往往由多个共轴的折射面构成, 可用上面所讨论的成像规律逐个求解, 但在解决数量很多的球面系统问题时, 将面临大量的运算, 这时, 我们可以通过等效方法, 把共轴系统简化成一个等效光具组来处理. 包括两个折射面的薄透镜就是一个简单的光具组, 我们已经看到薄透镜成像也遵守高斯公式, 即等效于某个球面折射. 空气中的薄透镜又是最简单的情况, 其物像关系简化为 $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$, 物方的任一点都

与像方的一点共轭. 许多光学助视仪器如放大镜、显微镜、望远镜等都是由透镜或透镜组构成, 下面我们关注助视光学仪器的放大本领.

最简单的放大镜是一个单独的凸透镜, 物体 AB 放在凸透镜的焦点里面一些,

隔着透镜观察物体可看到正立、放大的虚像 $A'B'$, 如图 24-23.

设物长 y , 放在眼的明视距离 d 处, 肉眼直接观察物体时的视角 $\alpha = \frac{y}{d}$, 使用凸透

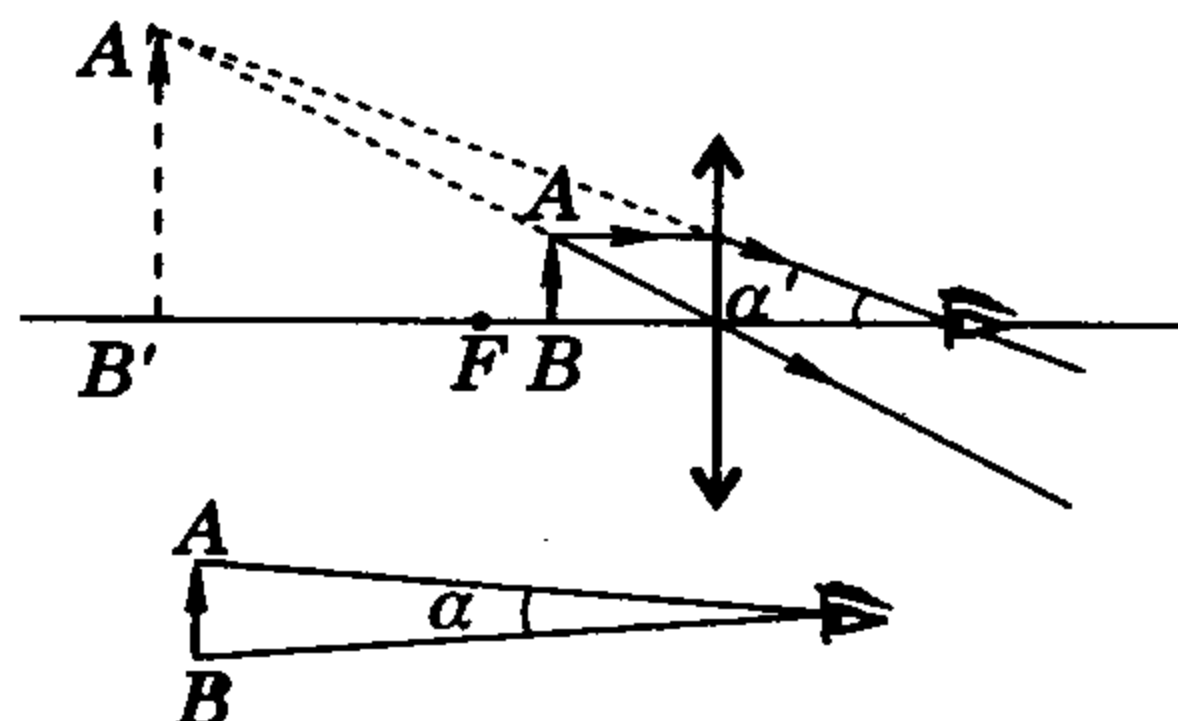


图 24-23

镜后, 让物的虚像成在眼睛明视距离处, 设像长 y' , 观此像时视角 $\alpha' = \frac{y'}{d} = \frac{y}{f}$, 故放大镜的角放大率 $m = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{d}{f}$.

显微镜由四个以上的透镜组合而成, 其原理可用一个目镜为凸透镜和一个物镜为凸透镜来等效. 如图 24-24, 物镜 L_o 焦距 f_o 很小, 用来成一实像; 目镜 L_e 的焦距 f_e 大于 f_o , 它的作

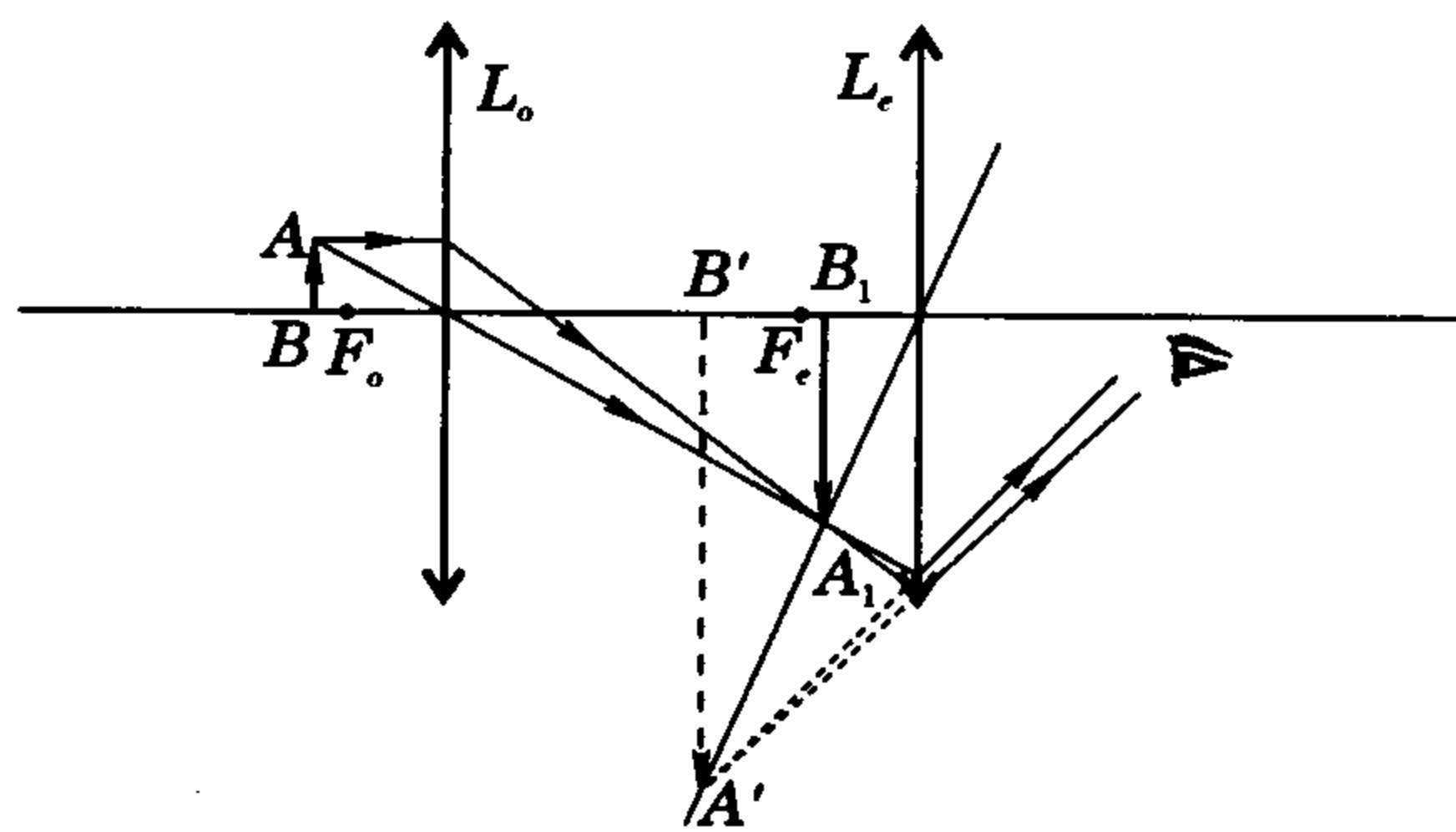


图 24-24

用等同于放大镜. 两镜共主轴, 物体 AB 放在物镜 L_o 焦点 F_o 外面一些, 由物镜成一倒立放大实像 A_1B_1 在目镜焦点 F_e 里面, 此像对目镜而言是物, 再通过目镜成放大虚像 $A'B'$ 在眼睛明视距离处. 设两镜间距离(即显微镜筒长) l , 对物镜, 物体的物距接近 f_o , 像距约等于 l , 则物镜的横向放大率(像长放大率) $\beta_o = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{l}{f_o}$, 对目镜, 像 $A'B'$ 对眼所张的视角 $\alpha' = \frac{A'B'}{d}$

$= \frac{A_1B_1}{f_e}$; 不用显微镜, 物体 AB 的视角 $\alpha = \frac{AB}{d}$, 则显微镜的角

放大率 $m = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A_1B_1}{f_e} \cdot \frac{d}{AB} = \frac{ld}{f_o f_e} = \beta_o \cdot \beta_e$.

天文望远镜是一种折射式望远镜, 如图 24-25, 物镜 L_o 与目镜 L_e 都是凸透镜, 两镜共主轴, 物镜的像方焦点与目镜的物方焦点重合, 筒长 $l = f_o + f_e$, 物镜 L_o 的焦距 f_o 较大, 用来成实像; 目镜 L_e 的焦距 f_e 较小. 无限远处天体各点发出的光对物镜而言, 相当于平行光束, 经凸透镜折射会聚于物镜焦平面, 之后再经目镜折射在无穷远处成一虚像 $A'B'$. 由于肉眼直接看遥远的天体, 视角 $\alpha = \frac{AB}{s} = \frac{A_1B_1}{f_o}$, 从目镜看像 $A'B'$, 视角



$$\alpha' = \frac{A_1 B_1}{f_e}, \text{ 则望远镜角放大率 } m = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_o}{f_e}.$$

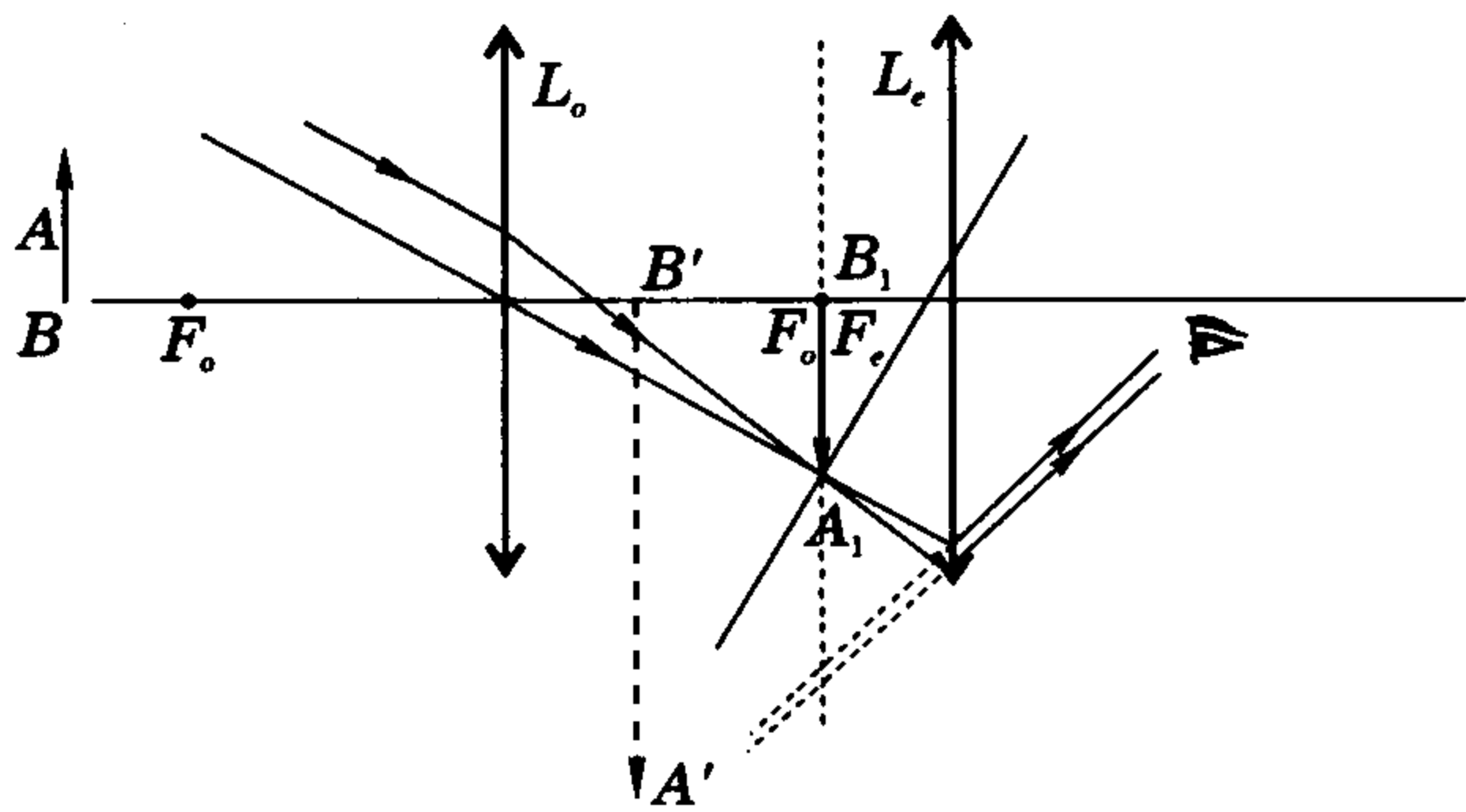


图 24-25

例 8 复式显微镜中物镜焦距为 1 cm, 目镜焦距为 4 cm, 两者相距 16 cm, 观察者明视距离为 24 cm, 被观察物体应放在物镜前多远处? 显微镜的放大率是多少?

分析与解 题中已知目镜的焦距和像距, 所以应先求出目镜的物距, 现设为 u' , 有

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{u'} = \frac{1}{f_e}, u' = \frac{df_e}{d - f_e} = \frac{(-24) \times 4}{(-24) - 4} \text{ cm} = \frac{24}{7} \text{ cm}.$$

对物镜, 像距 $v = l - u' = (16 - \frac{24}{7}) \text{ cm} = \frac{88}{7} \text{ cm}$, 对物镜运用透镜公式:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_o} \Rightarrow u = \frac{88}{81} \text{ cm} \approx 1.09 \text{ cm}.$$

再求总放大率. 一次成像放大率为 $\beta_1 = \frac{v}{u} = \frac{81}{7}$, 二次成像放大率为 $\beta_2 = \frac{d}{f_e} = 7$, 因此总的放大率为 $m = \beta_1 \cdot \beta_2 = 81$. 即像长为物长的 81 倍, 像面积是物面积的 6 561 倍.

例 9 讨论具有长焦距镜头的照相机摄远景的工作原理.

分析与解 最简单的照相机是由一个会聚透镜作为物镜, 使景物在底片上成倒立缩小实像, 由透镜公式 $\frac{1}{u} + \frac{1}{f} = \frac{1}{v}$, $v = \frac{uf}{u-f}$, 其横向放大率 $\beta = \frac{v}{u} = \frac{f}{u-f}$. 拍摄远景时, 物距远大于像距 (镜头到底片间距离), 即 $u \gg v, u \gg f$, 横向放大率 $\beta \approx \frac{f}{u}$, 可知在物距比镜头焦距大得多时, 相机镜头的横向放大率与焦距成正比. 因此为了在底片上留下足够大的像, 必须设法加大镜头的焦距, 这正是远摄镜要采用长焦距镜头的原理.

长焦距远摄镜可由前方的一个会聚透镜和后方的一个共轴的发散透镜组成, 如图 24-26. 图 24-26 中从景物发出的一条平行于主轴的人射光先到达组合光具的前透镜 L_1 , 经其作用后的折射光应指向透镜 L_1 的像方焦点 F_1 , 该光再入射在后方的发散透镜 L_2 , 经 L_2 作用, 从光具组出射的光线与主轴交于 F' , 出射光线这样求作: 过凹透镜光心作平行于向 L_2 入射的光 MN 的副光轴, 副光轴与 L_2 的像方焦平面交于 P , P 为一副焦点, 根据凹透镜性质——与副光轴平行的入射光线, 经凹透镜折射后, 发散自副焦点, 只需连接 PN , 并继续延伸且与

主光轴相交即可. 对系统而言, 平行于主轴的人射光折射后会聚于主焦点, 故 F' 即为系统的等效凸透镜的像方焦点. 将出射光线 NF' 反向延长与平行入射光交于 Q , 过 Q 点垂直于主轴的位置就是与光具组等效的一个凸透镜 L' 之所在, 我们看到等效凸透镜的焦距变长了, 因而这种相机镜头不但可成像, 还可增大横向放大率.

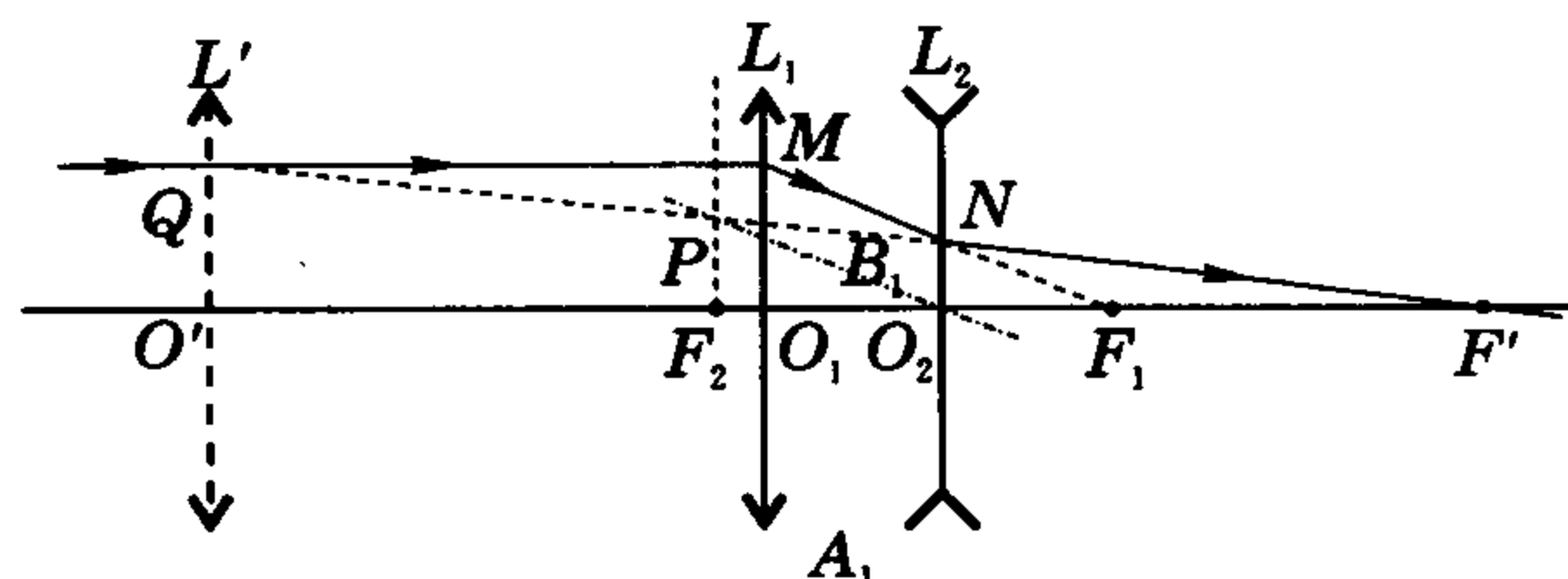


图 24-26

若两透镜间距 $d = 60 \text{ mm}$, $f_1 = 76 \text{ mm}$, $f_2 = -25 \text{ mm}$, 我们用几何方法来计算该系统的等效焦距 f' . 由图 24-26 所示三角形相似关系可得 $\frac{f'}{MO_1} = \frac{F_2 F'}{PF_2} \Rightarrow f' = \frac{MO_1 \cdot F_2 F'}{PF_2}$, 其中

$$\frac{MO_1}{PF_2} = \frac{f_1}{|f_2|}, \text{ 而 } F_2 F' = \frac{PF_2}{PF_2 - NO_2} |f_2|, \frac{NO_2}{MO_1} = \frac{f_1 - d}{f_1}, \text{ 于是}$$

$$\text{有 } f' = \frac{f}{|f_2|} \cdot \frac{PF_2}{PF_2 - NO_2} |f_2| = \frac{PF_2}{PF_2 - \frac{f_1 - d}{f_1} MO_1} f_1 =$$

$$\frac{\frac{PF_2}{MO_1}}{\frac{PF_2}{f_1} - \frac{f_1 - d}{f_1}} f_1 = \frac{\frac{|f_2|}{f_1}}{\frac{|f_2|}{f_1} - \frac{f_1 - d}{f_1}} f_1 = \frac{f_1 \cdot |f_2|}{|f_2| - f_1 + d},$$

$$\text{代入数据后得 } f' = \frac{76 \times 25}{60 - 76 + 25} \text{ mm} \approx 211 \text{ mm}.$$

趣味物理

1. 圆锥面的内表面镀上反射层, 构成圆锥面镜. 在圆锥形内沿轴拉紧一根细丝. 要使细丝发出的光线在圆锥内面上反射不多于一次, 圆锥形最小的展开角 $\alpha =$ _____.

2. 小路灯 L 发出的光束在离灯 $R_0 = 100 \text{ m}$ 处会聚成小光斑 A . 在光传播的路径上放两个正方形平面镜, 如图 24-27. 两镜面的交线到灯的距离 $r = 70 \text{ m}$, 并且垂直穿过光束轴. 两镜面互相垂直, 其中一个平面镜与光束轴交成角 $\alpha = 30^\circ$, 则现在光束将会聚在离灯 _____ m 处.

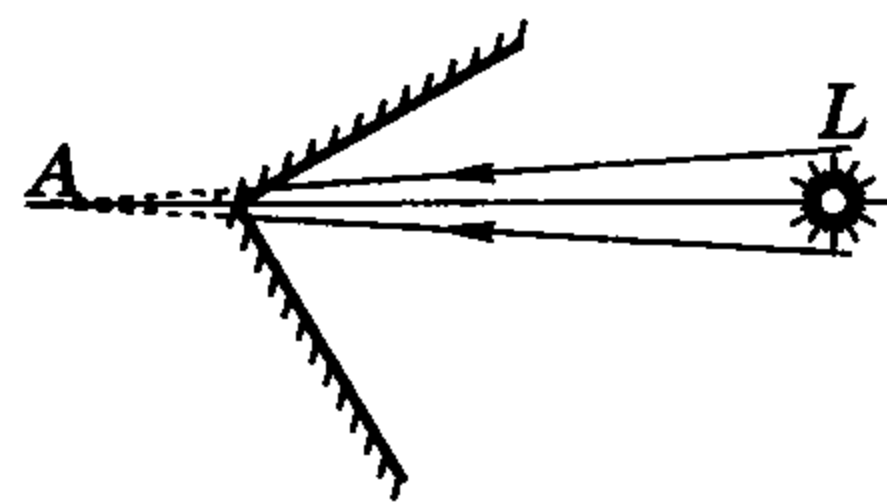


图 24-27

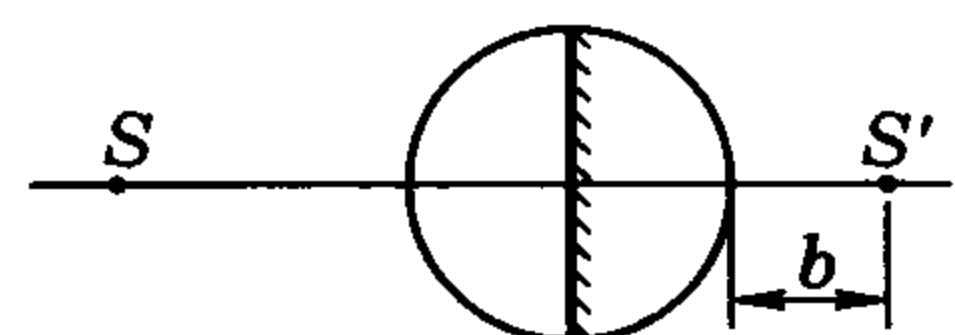


图 24-28

3. 由点光源 S 发出的近轴光线经透明球形成像 S' , 像到透明球的距离为 b , 如图 24-28. 如果沿垂直于水平轴将球分成两半, 左边一半的平面上镀银, 那么像的位置在 _____, 与球



的距离为_____.

4. 深度为 3 cm 的水面上($n_1=1.33$)漂浮着 2 cm 厚的醇($n_2=1.36$)层,则水底距醇表面的像似深度为_____.

5. 两块平面镜宽度均为 $L=5$ cm, 相交成角 $\alpha=12^\circ$, 如图 24-29 所示, 构成光通道. 两镜的右端相距为 $d=2$ cm, 左端靠在光接收器的圆柱形的感光面上. 试问入射光线与光通道的轴成的最大角度 φ_{\max} 为多少才能射到光接收器上?

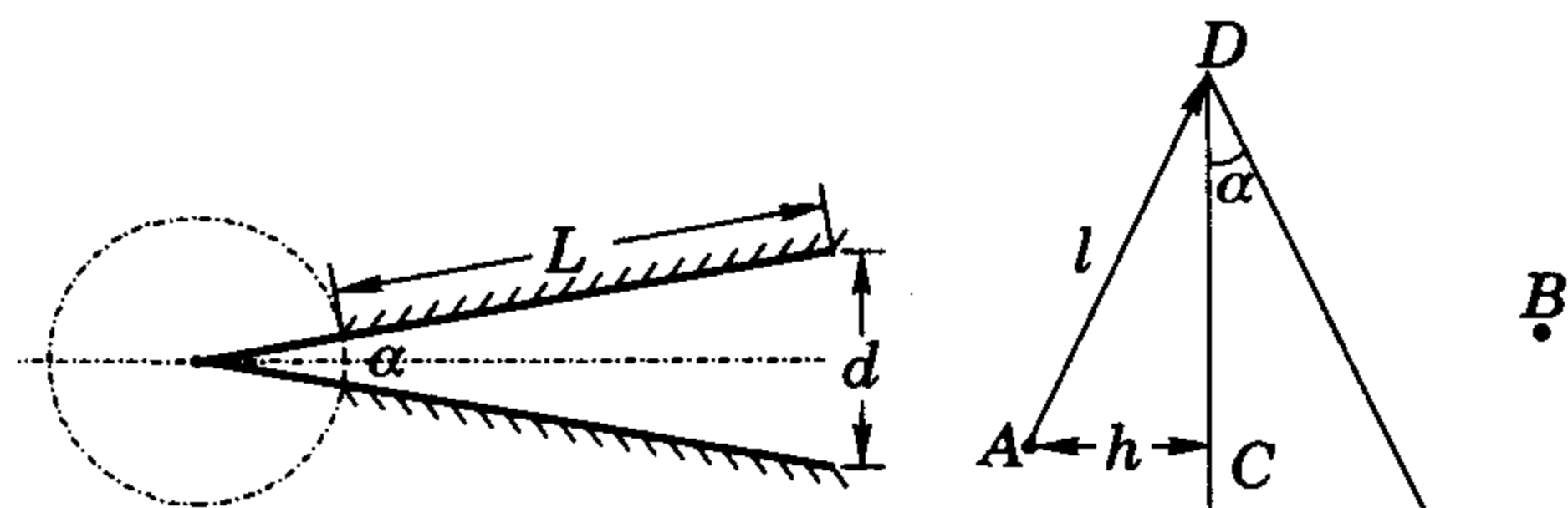


图 24-29

图 24-30

6. 湖湾成顶角为 α 的楔形, 岸上住有一个渔人: 他的房子在 A 点, 如图 24-30. 从 A 点到他离湖最近的 C 点距离为 h , 而到湖湾的一头, 即到 D 点的距离为 l . 湖对岸 B 点处有渔人好友的房子, 点 B 位置与 A 点相对湖对称. 渔人有一只小船, 他可以速度 v 沿岸步行或以速度 $\frac{v}{2}$ 乘船在湖中划行, 他从自己家出发到好友家里去. 求他需要的最短时间.

7. 等腰直角玻璃镜的底面 AC 和侧面 BC 是光滑的, 而侧面 AB 是毛糙的, 如图 24-31, 棱镜的底面放在报纸上, 一位观察者从光滑面 BC 看去, 只看见报纸上一篇文章的一部分, 且可见部分与应见部分之比为 $k=0.95$ (按面积), 试求玻璃的折射率.

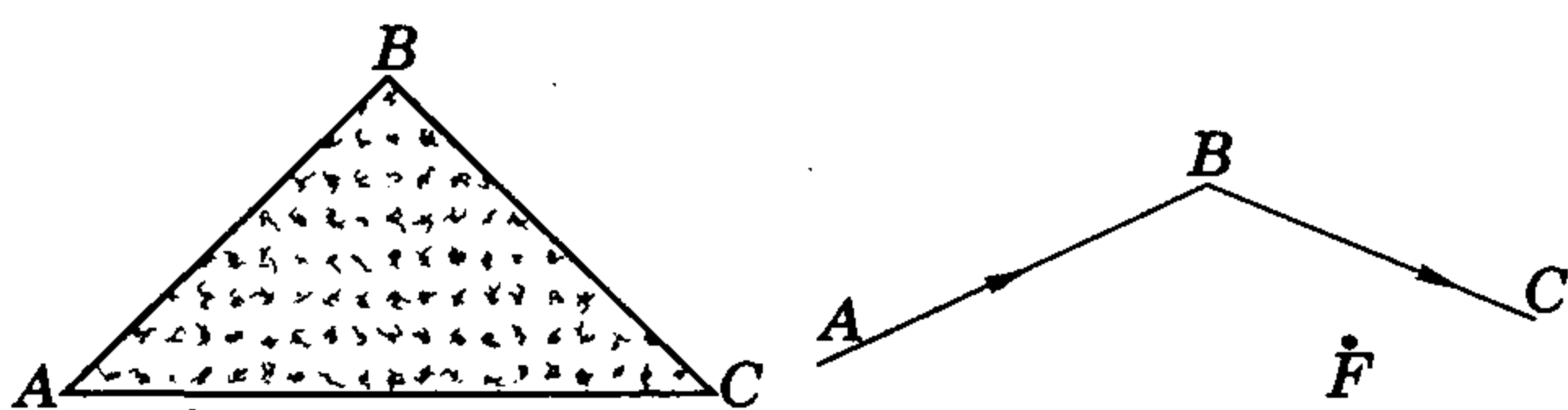


图 24-31

图 24-32

8. 图 24-32 表示一条光线经过薄会聚透镜折射的光路 ABC 和透镜的后焦点 F. 试用圆规和直尺, 做出透镜所在位置和它的主光轴.

9. 利用薄凸透镜得到三齿的像, 如图 24-33. 三齿 ABCEDG 的底边 AC 位于主光轴上, $AB=BC$. AB 部分成像放大率 $\beta_1=6$, 而 BC 部分的放大率 $\beta_2=3$, 试求 BD 部分成像的放大率.

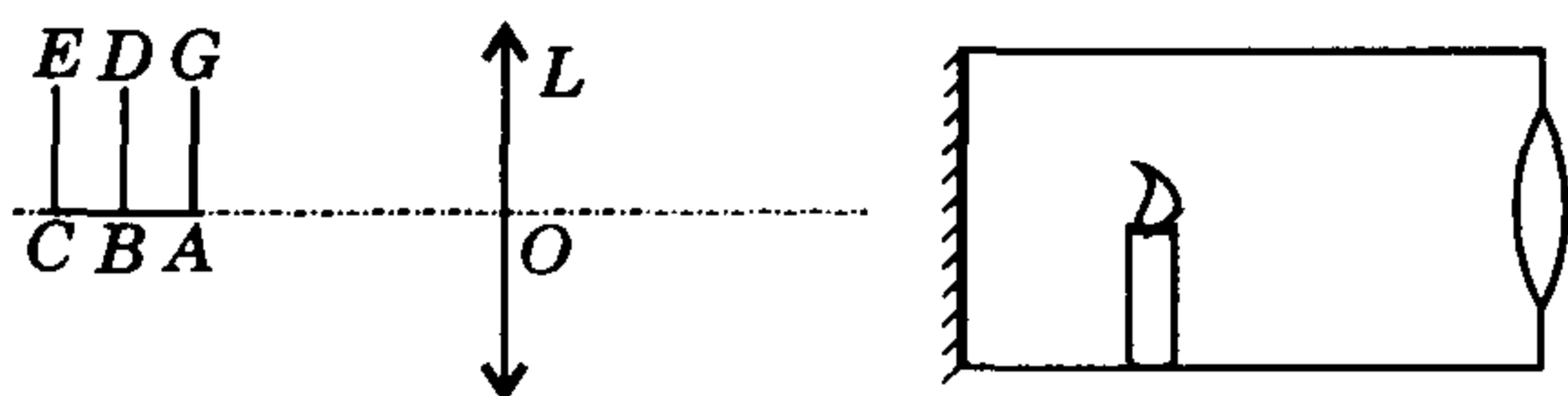


图 24-33

图 24-34

10. 在不透光的箱内直立着一根蜡烛, 箱的后壁是平面镜, 前壁嵌有透镜, 如图 24-34, 箱长为 L , 在这光具组中观察

到蜡烛火焰的两个像, 并且像的大小相等. 试求透镜的焦距.

11. 凸透镜后面距离 $L=4$ cm (大于焦距) 处放置有一块垂直于主光轴的平面镜, 透镜前面垂直于主光轴放一页方格纸, 如图 24-35. 当这页纸相对透镜移动两个位置时 (这两个位置相距 $=9$ cm), 纸上均得到其方格的像. 试求凸透镜的焦距.

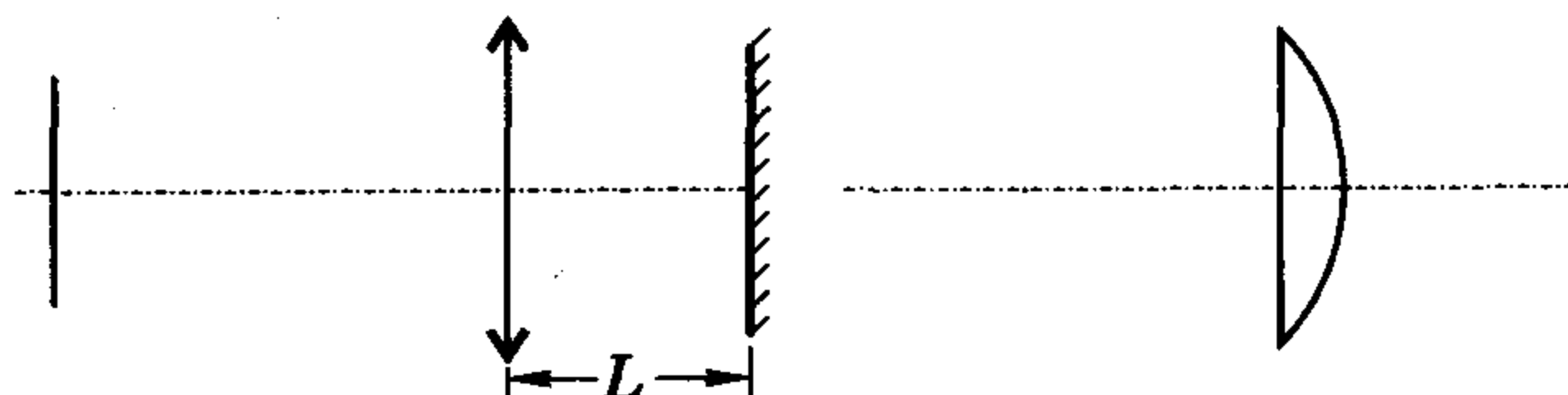


图 24-35

图 24-36

12. 有一薄凸透镜, 凸面曲率半径 $R=30$ cm, 如图 24-36 所示. 已知在利用近轴光线成像时: (1) 若将此透镜的平面镀银, 其作用等同于一个焦距是 30 cm 的凹面镜; (2) 若将此透镜的凸面镀银, 其作用也等同于一个凹面镜. 求在 (2) 情况下的等效凹面镜的焦距.

13. 如图 24-37 所示, 两个完全相同的球面薄壳玻璃合在一起, 中空, 其中一块涂银成为球面反射镜. 屏上小孔 Q 为点光源, 它发出的光经反射后成像于 Q' 点. 调整屏与表壳间的距离 L , 当 $L=20$ cm 时, 像点 Q' 正好落在屏上. 然后在表壳玻璃间注满折射率 $n=\frac{4}{3}$ 的水. 试问当 L 为何值时, 像点 Q' 仍落在屏上?

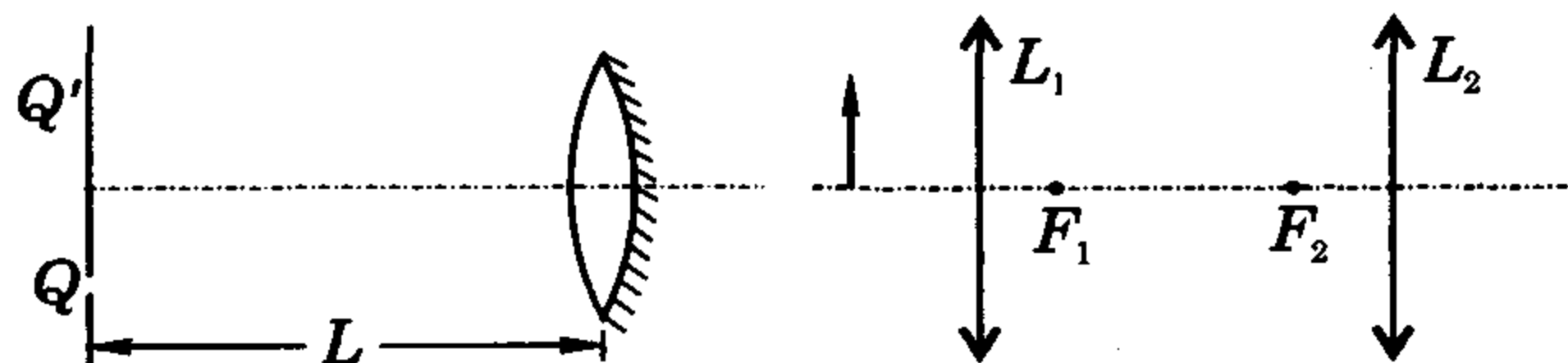


图 24-37

图 24-38

14. 如图 24-38 所示的薄透镜系统中, 透镜 L_1 和 L_2 的焦距 $f_1=f_2=10$ cm, 两透镜的间距为 70 cm, 物在 L_1 的前方 20 cm 处, 试求最后像的位置、大小与正倒; 为提高光能利用率 (增加系统的聚光能力以增加像亮度), 可增加第三个会聚透镜 L_3 , 为了使最后像的位置仍保持不变, 试问 L_3 应放在何处? 试借助特殊光线用作图法解释 L_3 能提高聚光能力的原因.

15. 如图 24-39 所示, 薄壁球形玻璃鱼缸的半径为 R , 所盛水的折射率 $n=4/3$. 鱼缸左侧与轴线垂直的平面反射镜离球心的距离为 $3R$. 一条位于左球面顶点处的小鱼沿缸壁以速度 v 游动. 从鱼缸右侧观察鱼是直接像与反射像 (先经平面镜反射, 再经鱼缸所成的像). 试求两像之间的相对速度.

16. 假定你站在水平的大沙漠上. 你会看见在远处好似水面的东西, 当你靠近“水面”时, 它会同时后退, 并保持你同它的距离不变, 试解释这一现象. 假定你的两眼离地面 1.6 m, 且你同“水面”的距离保持为 250 m, 试计算地表温度. 空气在 15 $^\circ\text{C}$, 1 标准大气压下的折射率为 1.000 276 0, 假定在距地面 1 m 以上空气温度恒为 30 $^\circ\text{C}$, 大气压强为 0.101 3 MPa. 折射率用 n 表示, 并假定 $n-1$ 同空气密度成正比.

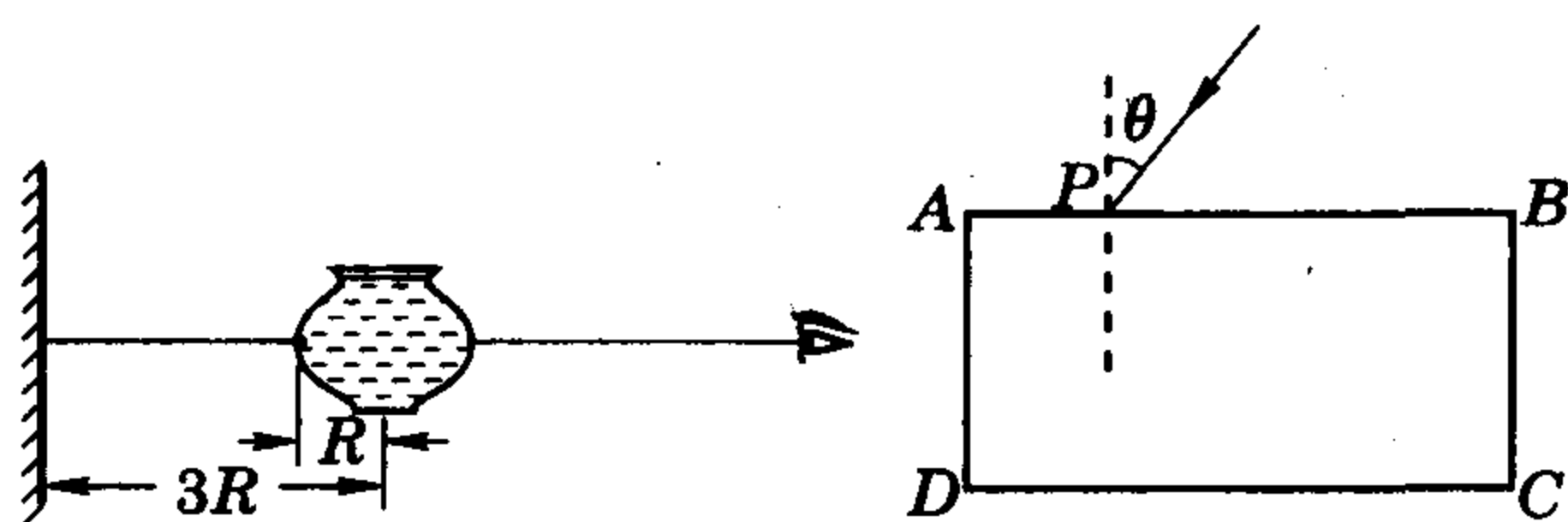


图 24-39

17. 图 24-40 中的矩形 ABCD 代表一个折射率为 n 的透明长方体, 其四周介质的折射率为 1, 一束单色细光束以角 θ 入射至 AB 面上的 P 点, $AP = \frac{1}{2}AD$. 不考虑在长方体内的二次及二次以上的多次折射, 试解下面三个问题.

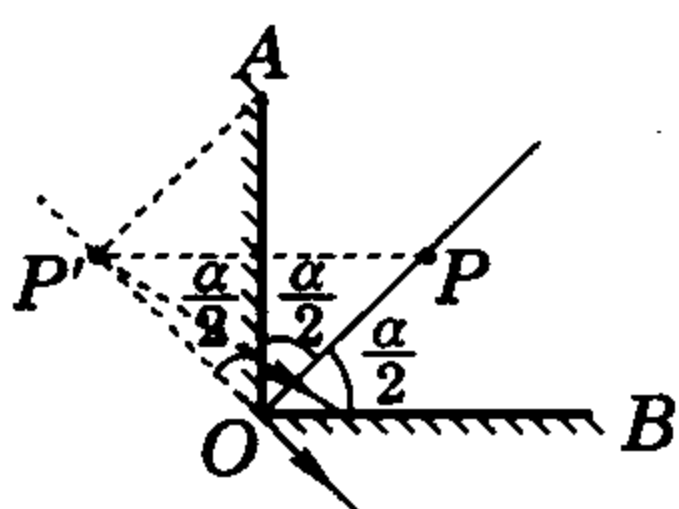
(1) 若要求此光束进入长方体能射至 AD 面上, 角 θ 的最小值 θ_{\min} 应为多大?

(2) 若要求此光束能在 AD 面上全反射, 角 θ 应在什么范围内? 长方体材料的折射率 n 应在什么范围内?

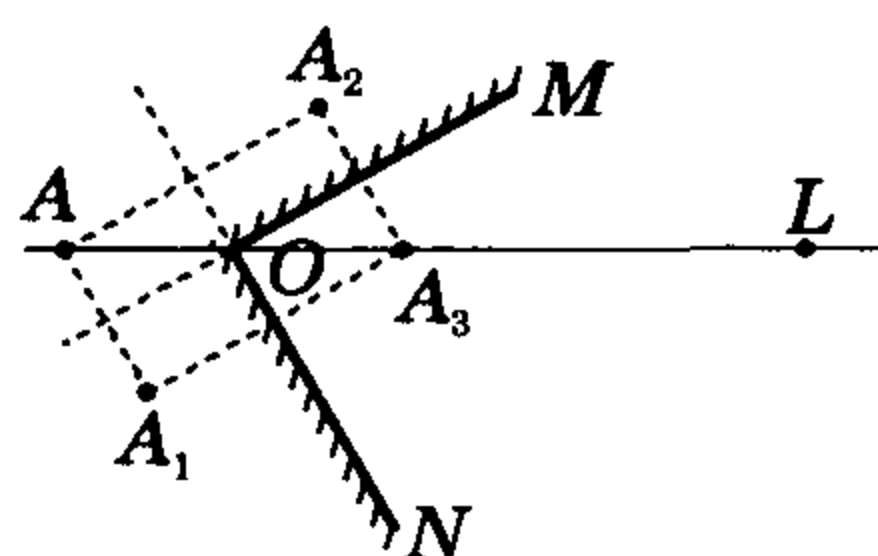
(3) 画出角 θ 小于上问中许可的最小角及大于上问中许可的最大角时的光路图.

参考答案

1. 120° ; 如图答 24-1, P' 为细丝上 P 点在锥面第一次反射所成的像, PP' 以上的反射光线不会投射在 OB 线上, PP' 以下反射线当 $3 \frac{\alpha}{2} \geq 180^\circ, \alpha \geq 120^\circ$ 时, 也不能投射在 OB 线上, 则不会发生二次反射.



图答 24-1

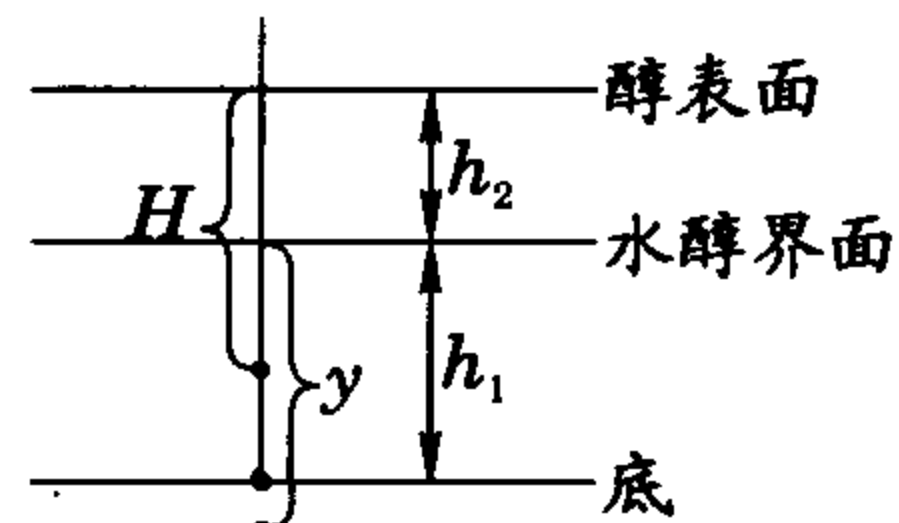


图答 24-2

2. 40 m; 如图答 24-2, L 发出的光为会聚光束, A 为虚物点, 轴以上部分光束经平面镜 OM 反射仍为会聚光束, 顶点在 A_1 , A_1 与 A 关于 OM 对称, 向 A_1 会聚的这束光射向平面镜 ON 并被二次反射, 反射光束会聚于 A_3 , 相当于虚物 A_1 通过 ON 成实像, A_3 与 A_1 关于 ON 对称, 由于 OM 与 ON 垂直, 易知 A_3 在 L 发出的光束轴上且 $OA_3 = OA$; 同理, L 发出的轴以下部分光束先经平面镜 ON 反射、再经平面镜 OM 反射亦不改变会聚性, 并由对称性知会聚于 A_3 , 则两垂直平面镜将令灯发出的光束会聚于离灯 $R_0 - 2(R_0 - r) = 40$ m 处.

3. 左侧 b; 左半平面镜银成平面镜, 通过左球面的折射光线通过平面镜反射不改变光束敛散性只是再次由左球面折射而已.

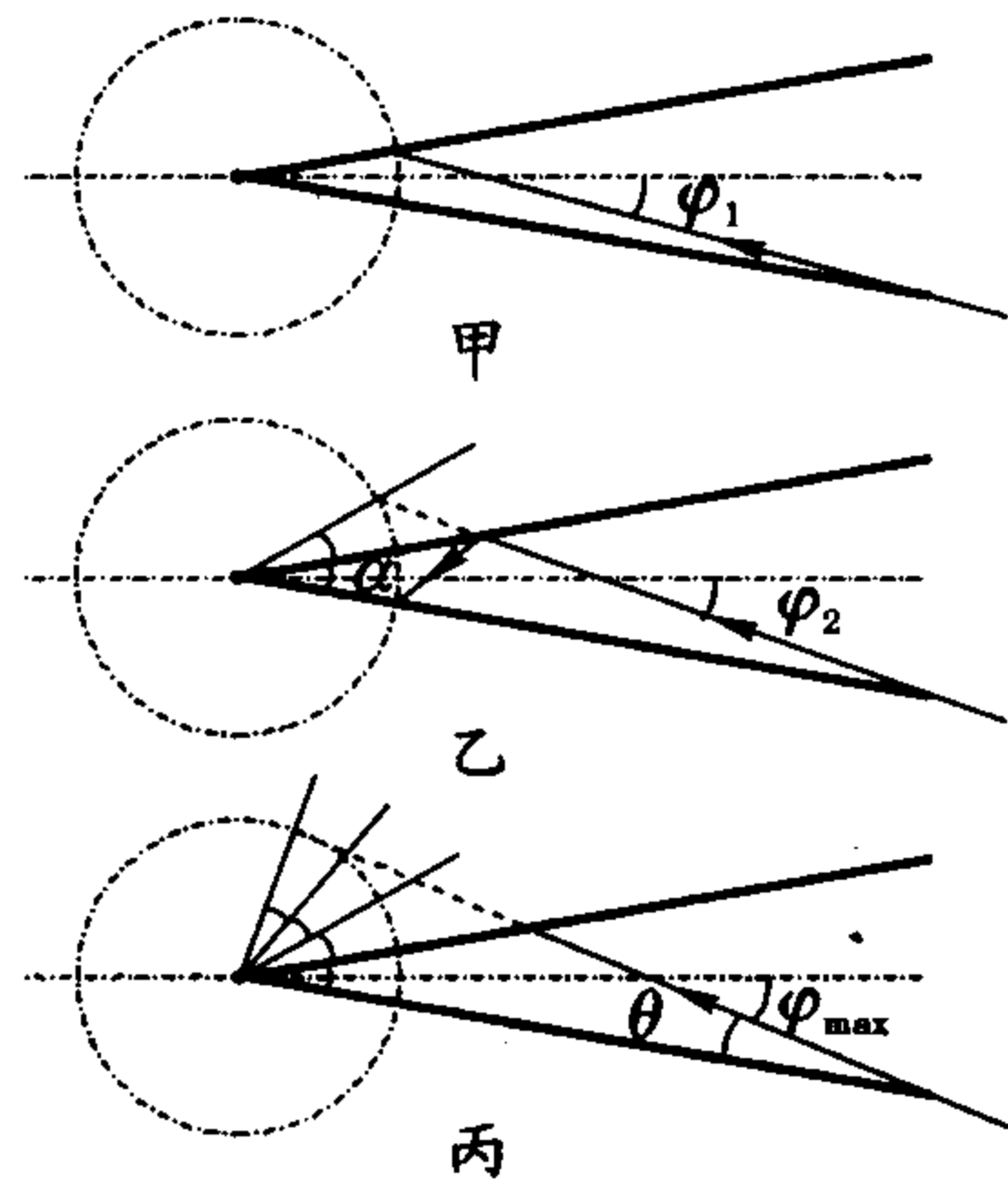
4. 如图答 24-3, 通过水与醇界面折射, 水底的像距水与醇界面 $y = \frac{n_2}{n_1} h_1$, 再通过醇与空气界面折射, 二次像距醇表



图答 24-3

面的像似深度 $H = \frac{y+h_2}{n_2} = \frac{1.36}{1.33} \times 3 + 2$
 $\text{cm} \approx 3.7 \text{ cm}.$

5. 不经反射, 入射光能射到感光面上, 入射光与轴所成最大角 φ_1 如图答 24-4 甲所示; 经一次反射而能入射在感光面上, 入射光与轴所成最大角 φ_2 如图答 24-4 乙所示, 由平面镜反射的对称性, 入射光延长能交在 2α 所对圆面上, 同理可推得, 以最大角度 φ_{\max} 入射的光线延长后应恰与接收器表面相切, 如图答 24-4 丙所示, $\varphi_{\max} = \theta + \frac{\alpha}{2}$, 其中 $\sin \frac{\alpha}{2} =$



图答 24-4

$\frac{d}{2(L+r)}, \sin \theta = \frac{r}{r+L} = 1 - \frac{2L}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \approx 0.5, \theta \approx 30^\circ$, 则 $\varphi_{\max} = 30^\circ + 6^\circ = 36^\circ.$

6. 走光对称进出三棱镜时的路径时间最短, 即沿图答 24-5 中折线 APQB, 其中 $PQ \parallel AB$, 借助光折射模型, $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v}$

$2, r = \frac{\alpha}{2}$; 由几何关系 $AP = QB = \frac{h}{\cos i}, PQ = 2(\sqrt{l^2 - h^2} - h \tan i) \sin \frac{\alpha}{2}$, 则最短时间为

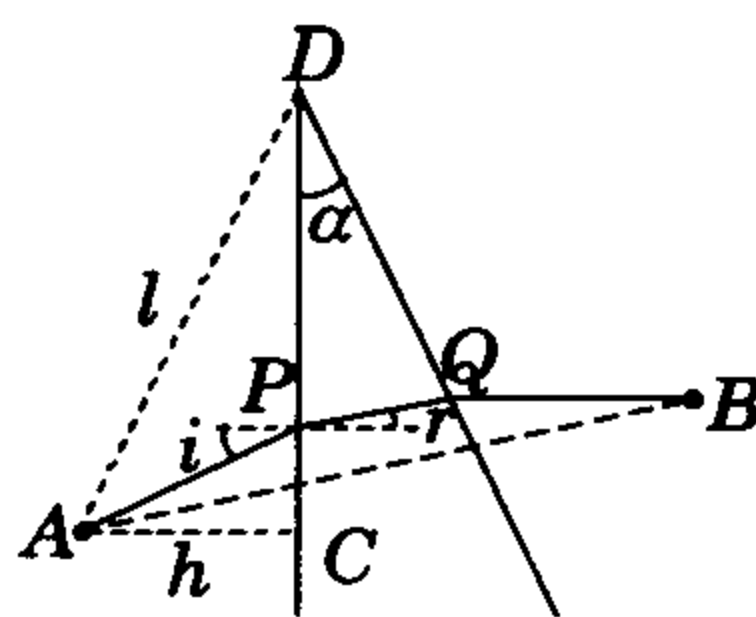
$$t = \frac{2h}{v \cos i} + \frac{4(\sqrt{l^2 - h^2} - h \tan i) \sin \frac{\alpha}{2}}{v}$$

$$= \frac{2h}{v \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + 4 \left(\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{v} - h \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{v \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \sin \frac{\alpha}{2}$$

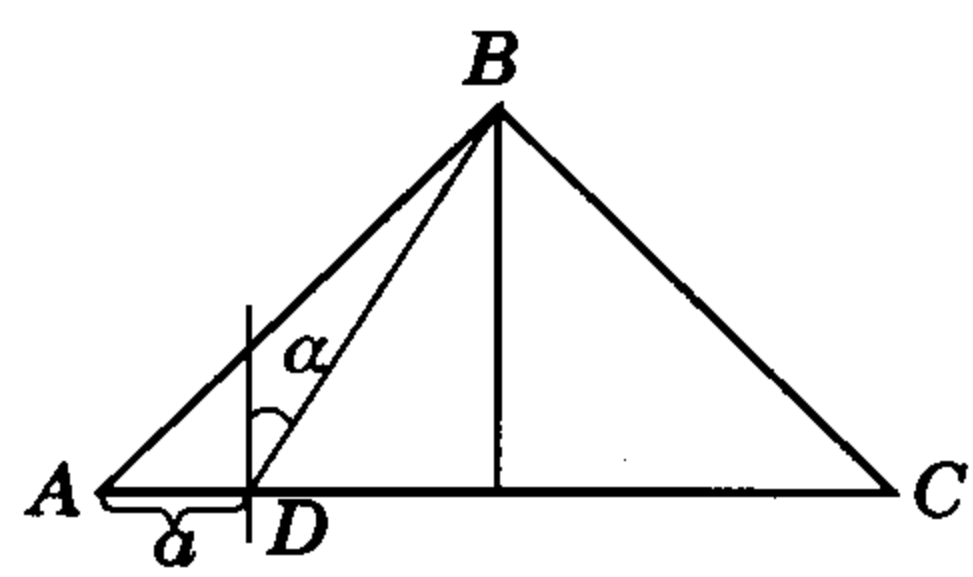
$$= \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{l^2 - h^2} + 2h \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{v}$$

若 $PQ=0$, 即 $\sqrt{l^2 - h^2} = h \tan i, \frac{l^2 - h^2}{h^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ 时,

$$t = \frac{2l}{v}$$



图答 24-5



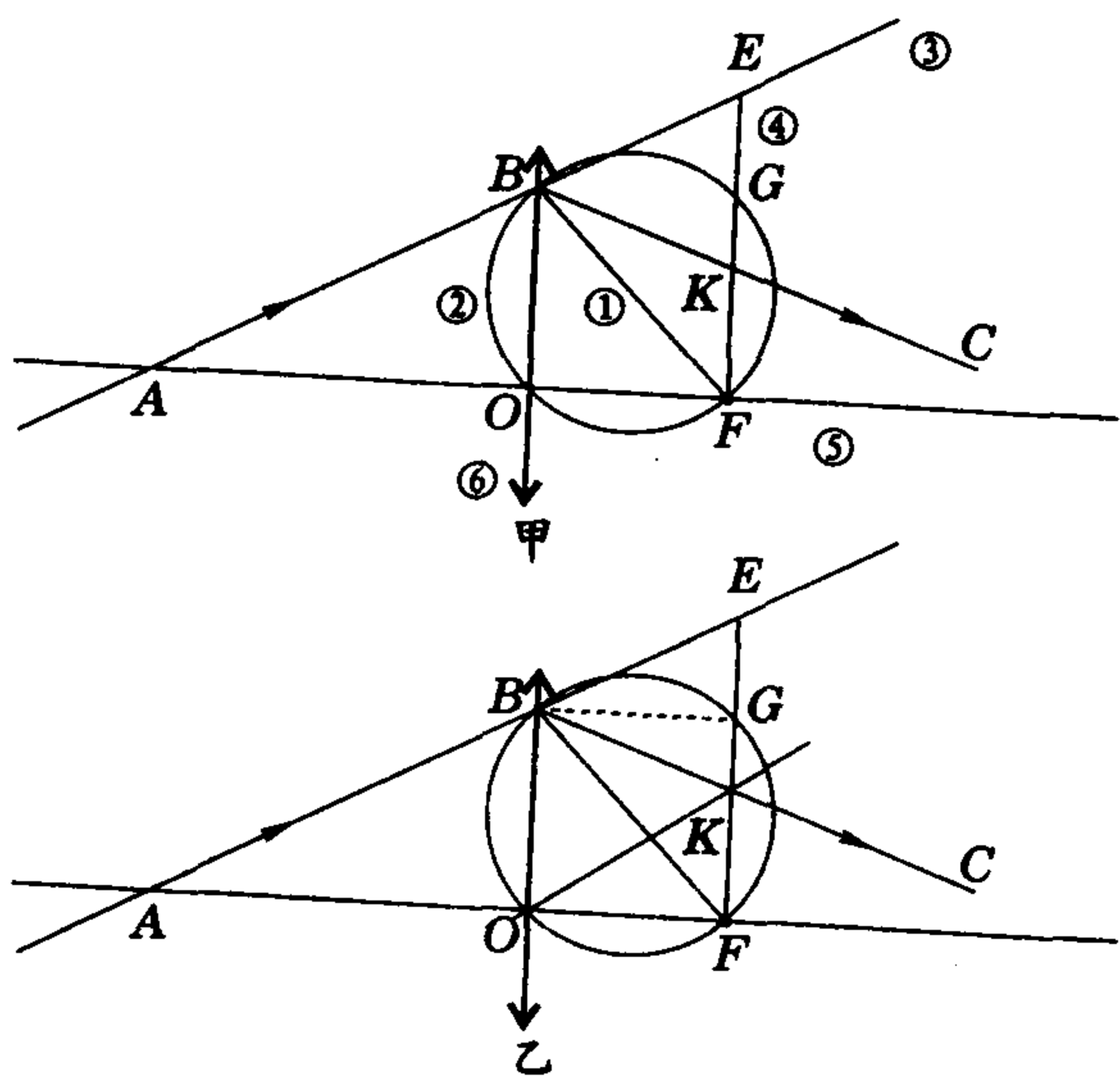
图答 24-6



7. 怎样才能从 BC 看到压在玻璃棱镜下的文字? 需有进入棱镜的光从 AC 面折射到报纸, 经由纸面反射回棱镜再出射到观察者视场中, 若投射到 AC 面某部分的光发生了全反射, 其下面文字就看不见了, 如图答 24-6, 设全反射临界角为 α , 从 BC 面最上端进入的光线 BD 恰发生全反射, 则 AD 间没有射向报纸的光线, 是看不到文字的区域, 即有 $\frac{\alpha}{l} = 1 - 0.95$ ($AC = l$), 由几何关系, 在 $\triangle ADB$ 中有 $\frac{l}{\sqrt{2}\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{\alpha}{\sin(45^\circ - \alpha)}$,

$$\tan \alpha = 0.9, \text{ 因 } \sin \alpha = \frac{1}{n}, n = \frac{\sqrt{1+0.9^2}}{0.9} \approx 1.5.$$

8. 如图答 24-7 甲, ①连接 B、F 两点; ②以 BF 为直径作圆; ③延长入射线 AB; ④用有刻度的直尺零刻线对准点 F, 以 F 为轴转动直尺, 当 $FK = GE$ 时, 作线段 EF; ⑤过 F 点作 EF 的垂线为主轴, 与圆交于 O 即为光心; ⑥ OB 为透镜所在位置; 证明如图答 24-7 乙, $BG \perp EF$, $\text{Rt}\triangle BEG \cong \text{Rt}\triangle OKF$, 则 $OK \parallel AB$ 为副光轴, EF 为焦平面, AB 经透镜折射后的光线过副焦点 K, 即为 BC.



图答 24-7

$$9. \beta_1 = \frac{v_A - v_B}{u_B - u_A} = 6; \beta_2 = \frac{v_B - v_C}{u_C - u_B} = 3, \text{ 而}$$

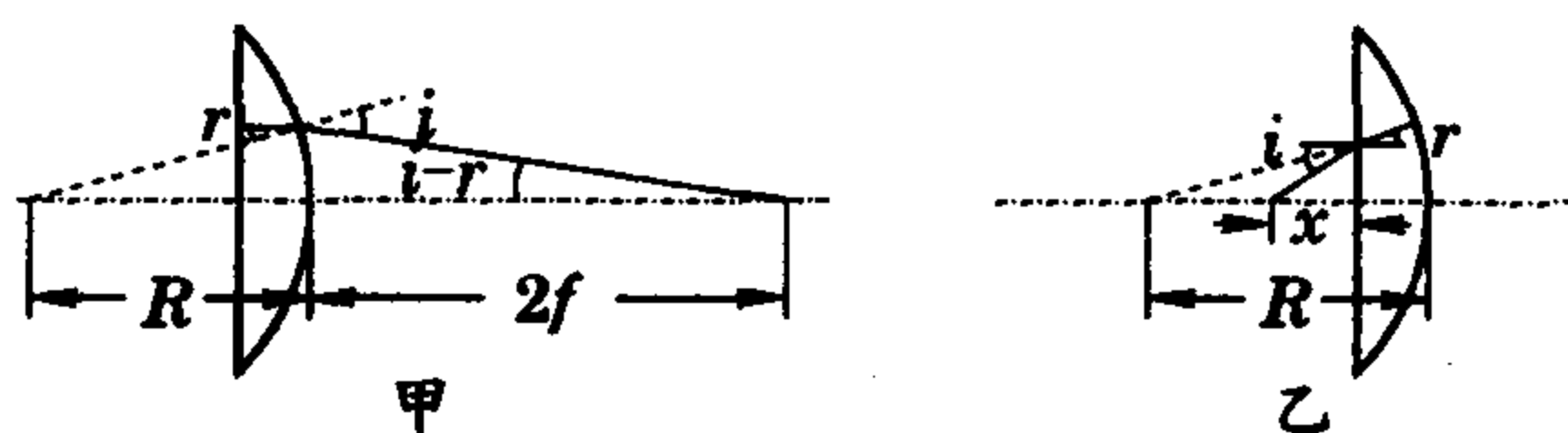
$$\begin{cases} \frac{1}{f} = \frac{1}{u_A} + \frac{1}{v_A} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{u_B} + \frac{1}{v_B} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{u_C} + \frac{1}{v_C} \end{cases}, \beta = \frac{v_B}{u_B} = \sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} = 2.$$

10. 火焰的两个等大像中, 一个是直接由透镜成一放大虚像, 另一个是先由平面镜反射之后由透镜成一放大实像, 设前者的像距为 v_1 , 后者的像距为 v_2 , 蜡烛距透镜为 u , 则有

$$\begin{cases} \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{2L-u} + \frac{1}{v_2} \end{cases}, \text{ 而两像放大率 } \frac{v_1}{u} = \frac{v_2}{2L-u}, \text{ 得 } f=L.$$

11. 当物(方格纸)放在焦平面时, 各点发光通过凸透镜成平行光束, 经平面镜反射仍为平行光束, 经透镜会聚于焦平面成像, 这时有 $u_1 = f$; 当物通过透镜成实像在平面镜镜面上时, 根据物像对称, 反射后第二次通过透镜仍在原处成实像, 即 $u_2 = f+l$, 由透镜成像公式 $\frac{1}{f} = \frac{1}{f+l} + \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f+9} + \frac{1}{4}$ 得 $f = 3 \text{ cm}$.

12. (1) 若将此透镜的平面镀银, 其作用要等同于一个焦距是 30 cm 的凹面镜, 应使主轴上距球面顶点 $2f$ 的物点发出的光进入球内后与镀银平面垂直地入射, 则反射后光反向沿原路径到达主轴上物点处, 即等效于凹面镜过曲率中心的光线反射后仍过曲率中心, 由图答 24-8 甲, 有 $2f \cdot \tan(i-r) = R \cdot \tan r$, 在近轴光线条件下有 $2i - 2r = r, n = \frac{i}{r} = 1.5$; (2) 若将此透镜的凸面镀银, 其作用也要等同于一个凹面镜, 应使进入镜中的光沿凸面的径向射至镀银球面, 则反射后光沿原路径返回, 设等效凹面镜曲率半径为 x , 由图答 24-8 乙, $x \cdot \tan i = R \cdot \tan r$, 易知 $x = 20 \text{ cm}$, 则等效凹面镜焦距为 10 cm.



图答 24-8

13. 当表壳间为空气时, 忽略不涂银薄表壳对光传播的影响, 物点 Q 经由球面反射成像, 设表壳球面曲率半径为 r , 则 $\frac{1}{L} + \frac{1}{L} = \frac{2}{r}, r = 20 \text{ cm}$; 当表壳间注满水时, 这个水透镜的像方焦距由 $\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \left(\frac{4}{3}-1\right)\frac{2}{20} = \frac{1}{30}, f_2 = 30 \text{ cm}$, 物点 Q 先经水透镜成一次像 Q_1 :

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{L'} + \frac{1}{s_1'} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{L'} + \frac{1}{s_1'} \quad (1)$$

一次像 Q_1 作为虚物对凹镜成二次像 Q_2 :

$$\frac{2}{r} = -\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_2'} \Rightarrow \frac{1}{10} = -\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_2'} \quad (2)$$

二次像作为虚物对水透镜三次成像, 也就是最终的像 Q' , 成在屏上, 故有

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L'} + \frac{1}{s_2'} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{L'} + \frac{1}{s_2'} \quad (3)$$

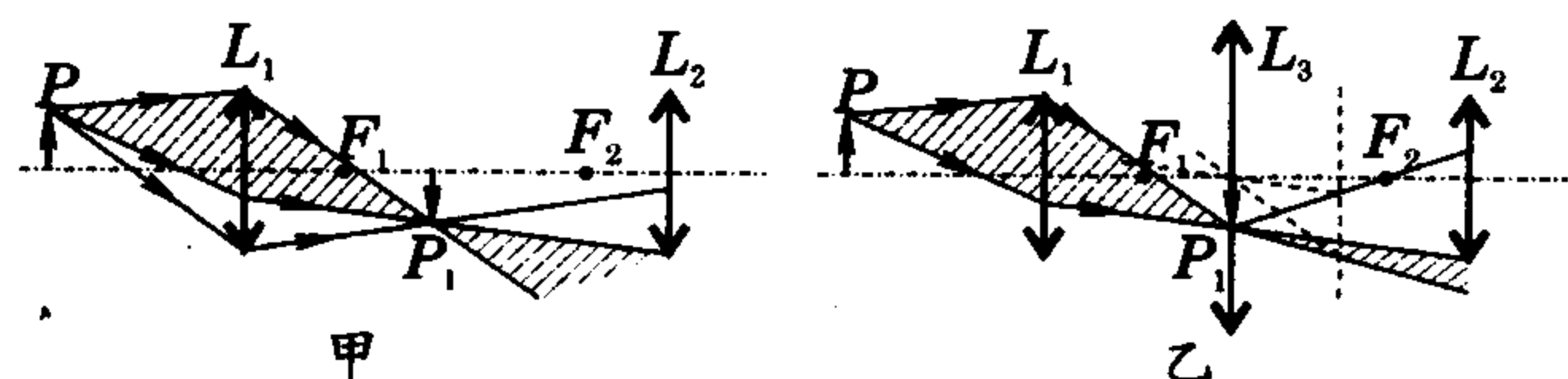
由①②③式解得 $L' = 12 \text{ cm}$.

14. 对透镜 L_1 , 由 $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v_1}$ 求出一次像对 L_1 的像距 $v_1 = 20 \text{ cm}$, 为等大实像, 于物倒立; 对透镜 L_2 , 由 $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d-v_1} + \frac{1}{v}$, 即 $\frac{1}{10} = \frac{1}{50} + \frac{1}{v}, v = 12.5 \text{ cm}$, 即最后像位置在 L_2 镜后 12.5 cm 处, 为缩小实像, 于一次像为倒立, 于物为正立;

增加第三面透镜而又要使最后像的位置保持不变, 必须将

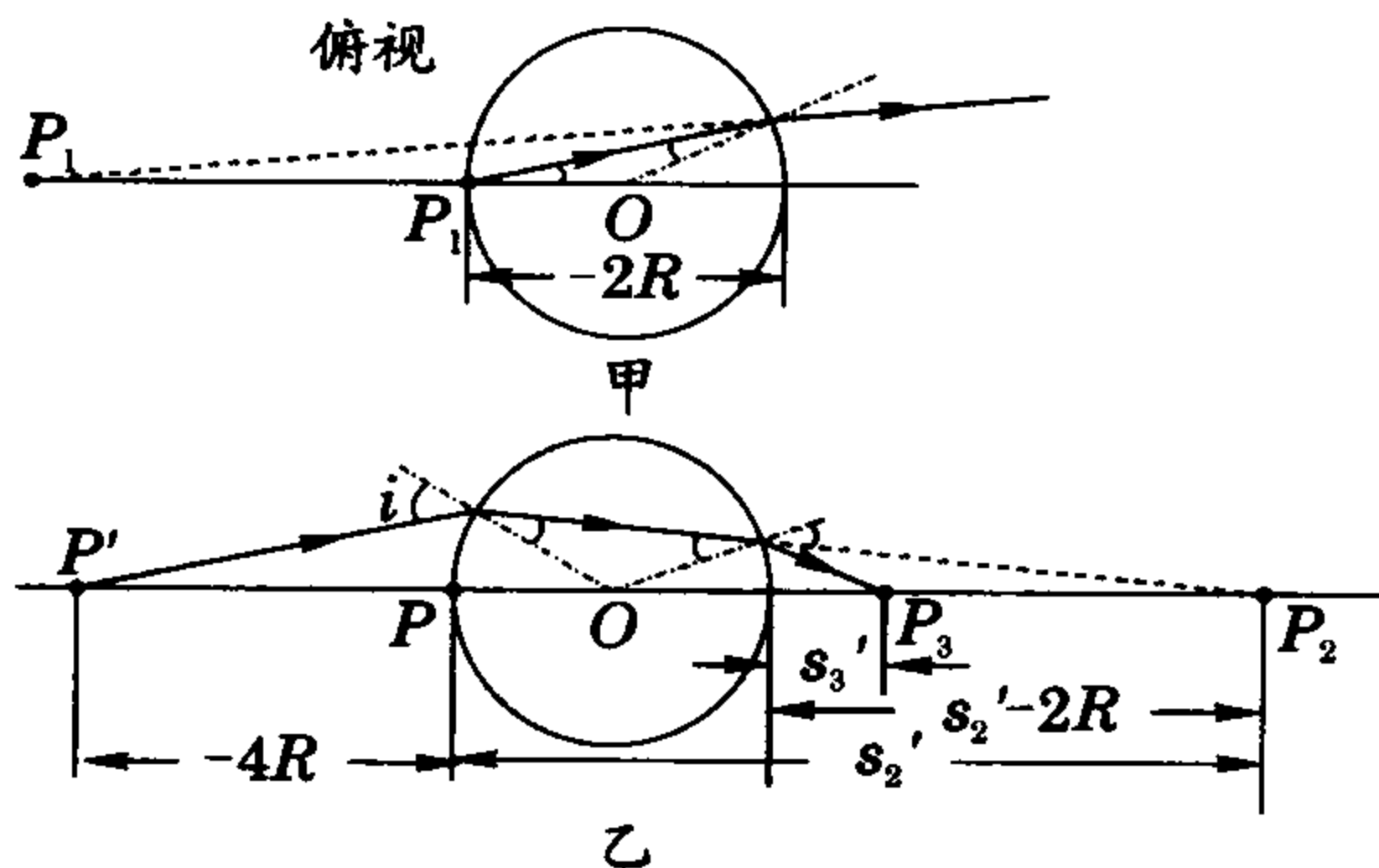


透镜 L_3 置于一次像位置即 L_1 与 L_2 之间距 L_1 20 cm 处, 一次实像对 L_3 相当于实物, 在 L_3 镜前面入射, 从 L_3 镜后面射出, 再经 L_2 会聚成像, 由于对 L_2 物距未变, 像距不变, 但由于透镜 L_3 的作用, 原来不能到达 L_2 的光线, 部分可以到达了, 如图答 24-9 甲中 P 点发出、通过 L_1 后到达像点 P_1 的光束中画阴影线部分光束完全不能进入 L_2 而参与最后成像, 加会聚透镜 L_3 后, 光路如图答 24-9 乙, 原本那束光中不能到达 L_2 的现在有一部分光能进入 L_2 , 使到达最后所成像的光线增加, 系统的聚光能力提高了.



图答 24-9

15. 研究近轴光线. 鱼的直接像即通过鱼缸右侧球面一次折射成像, 由 $\frac{n}{2R} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1-n}{-R}$ 得 $s_1' = -3R$, 横向放大率 $\beta_1 = \frac{ns_1'}{s_1} = 2$, 即为放大正立虚像, 位置在右球面左侧 $3R$ 处, 光路如图答 24-10 甲所示; “反射像”即以鱼在平面镜中虚像 P' 为物, 先后由鱼缸左、右球面折射所成像 P_3 , 如图 24-10 乙所示, 由左球面折射成像公式: $\frac{1}{4R} + \frac{n}{s_2'} = \frac{n-1}{R}$ 得 $s_2' = 16R$, 横向放大率 $\beta_2 = -\frac{s_2'}{n4R} = -3$ (放大、倒立实像); 由右球面折射成像公式: $\frac{1}{s_3'} - \frac{n}{14R} = \frac{1-n}{-R}$ 得 $s_3' = \frac{7}{3}R$, 横向放大率 $\beta_3 = \frac{ns_3'}{14R} = \frac{2}{9}$ (缩小、正立实像); “反射像”总的横向放大率为 $\beta' = -3 \times \frac{2}{9} = -\frac{2}{3}$, 即为缩小倒立实像; 设鱼游动速度为 v , 则直接像速度为 $v_1 = 2v$, “反射像”速度为 $v_3 = -\frac{2}{3}v$, 则两像相对速度为 $v_1 - v_3 = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v$.

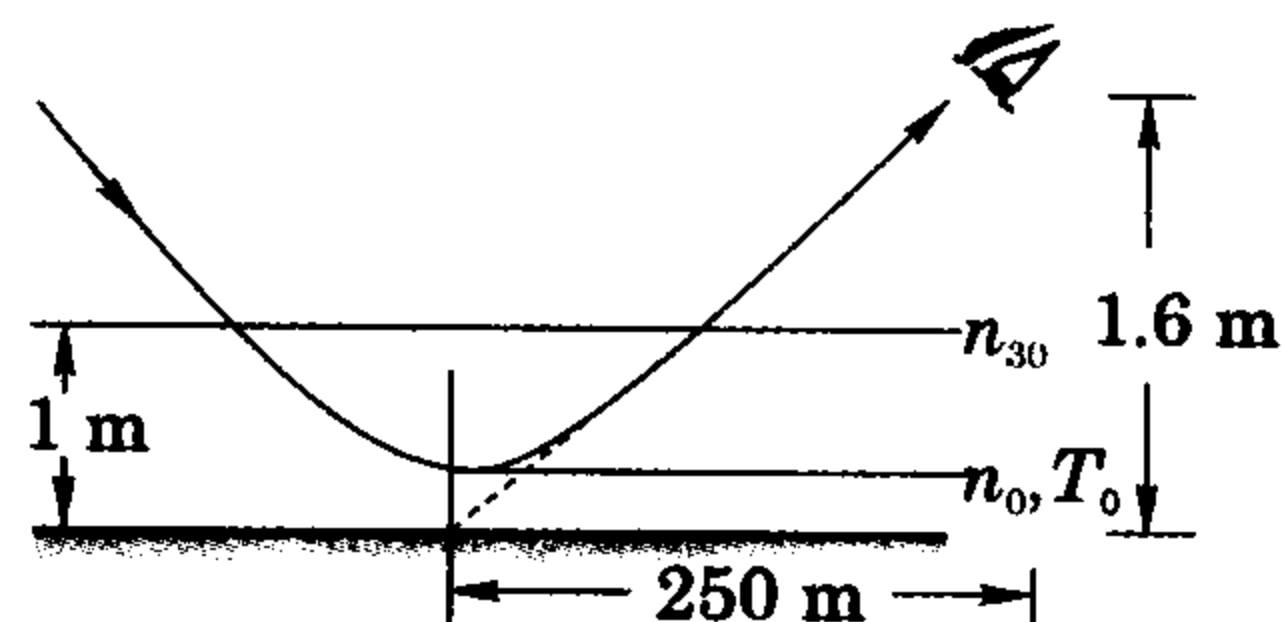


图答 24-10

16. 由于 $(n-1) \propto \rho$, 温度 T 越高, 空气密度越小, 折射率也越小, 沙漠地表温度较高, 高处景物 (例如白云) 的光自上向下行进, 连续从光密介质向光疏介质折射, 在地面附近发生全

反射, 反射光进入人眼的结果是看到了景物的虚像, 形似水面;

在一定压强下, 根据克拉珀龙方程, 有 $T\rho=C$, 而 $(n-1) \propto \rho$, 设地面温度为 T_0 , 空气折射率为 n_0 , 则 $\frac{n_0-1}{n_{30}-1} = \frac{303}{T_0}$; $(n_{30}-1) = (n_{15}-1) \frac{288}{303}$, 如图答 24-11 所示, 设在地面上 1 m 界面上光的折射角为 θ , 运用折射率连续变化的不均匀介质中的折射



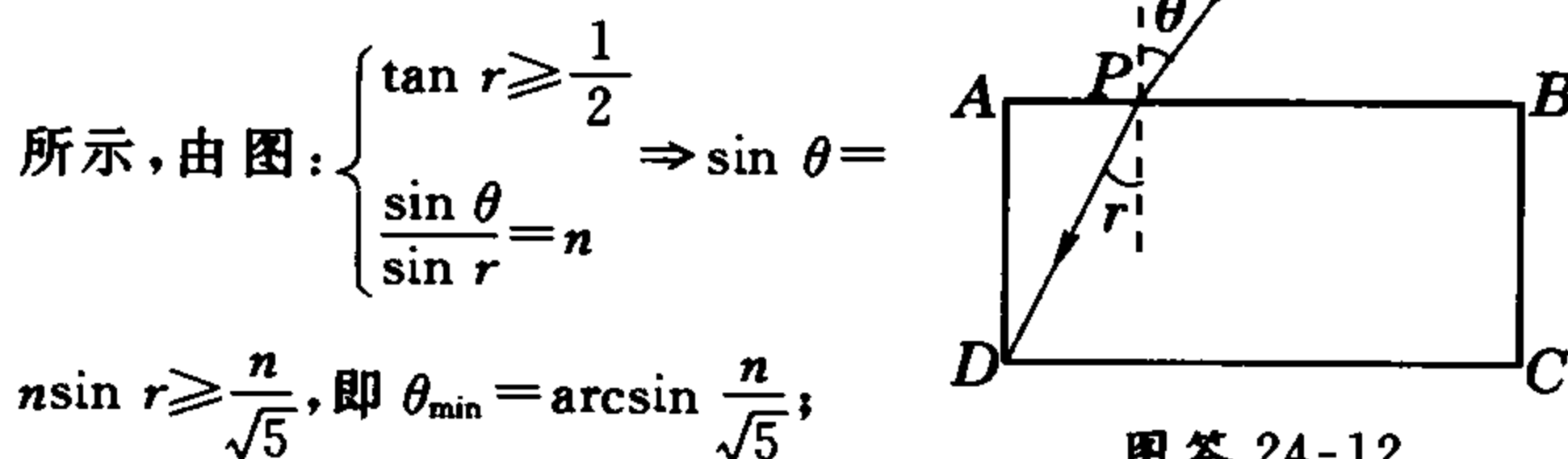
图答 24-11

公式 (见本专题例 3), 有 $n_{30} \sin \theta = n_0 \sin 90^\circ$, 而 $\sin \theta = \frac{250}{\sqrt{250^2 + 1.6^2}}$, 由上各式可得

$$T_0 = \frac{288 \times 0.0002760}{\left[\frac{288}{303} \times 0.0002760 + 1 \right] \times \frac{250}{\sqrt{250^2 + 1.6^2}} - 1} \approx 329 \text{ K},$$

即地表温度约 56°C .

17. (1) 若要求此光束进入长方体能射至 AD 面上, 折射光至少能射至 D 点, 如图答 24-12



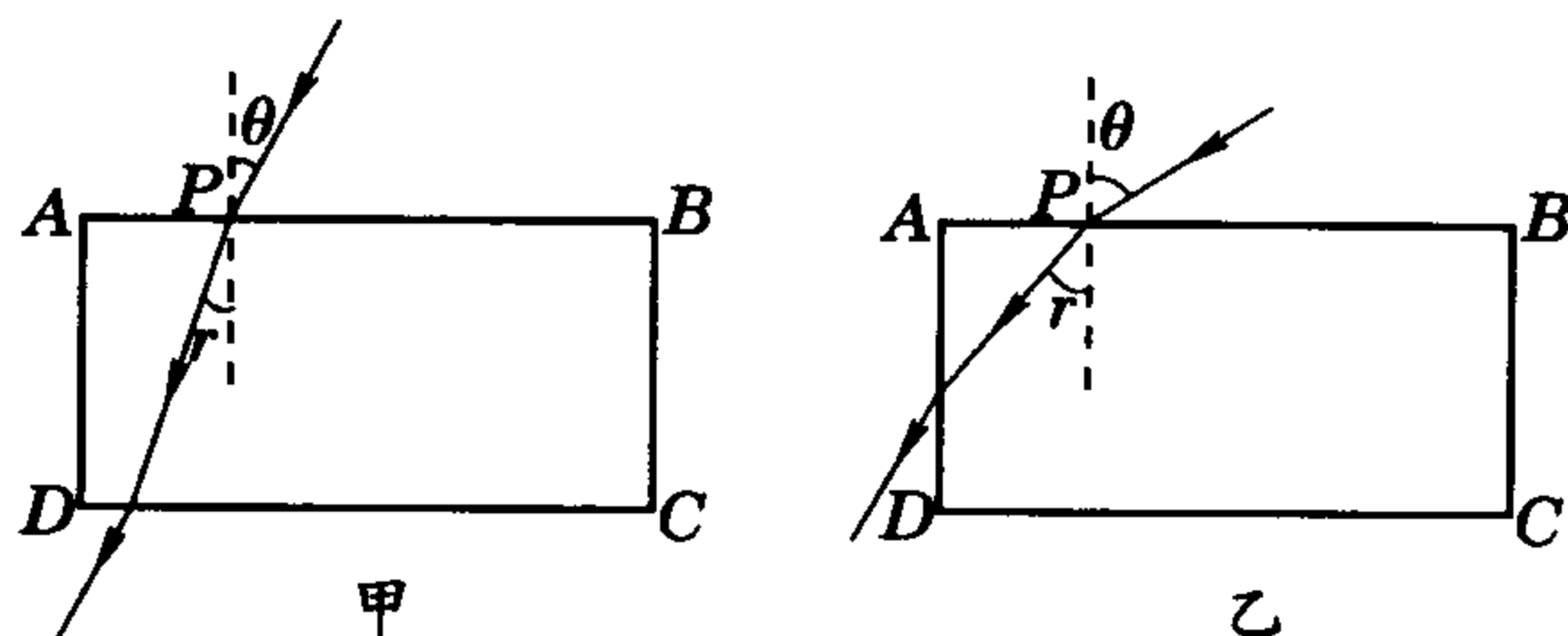
图答 24-12

所示, 由图: $\begin{cases} \tan r \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sin r} = n \end{cases} \Rightarrow \sin \theta =$

$$n \sin r \geq \frac{n}{\sqrt{5}}, \text{ 即 } \theta_{\min} = \arcsin \frac{n}{\sqrt{5}};$$

(2) 若要求此光束能在 AD 面上全反射, 应满足 $\sin(90^\circ - r) \geq \frac{1}{n}$, $\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{n}\right)^2} \geq \frac{1}{n}$, $\sin \theta \leq \sqrt{n^2 - 1}$, 由 (1) 知 $\sin \theta \geq \frac{n}{\sqrt{5}}$, 则 $\frac{n}{\sqrt{5}} \leq \sin \theta \leq \sqrt{n^2 - 1}$, $\sqrt{n^2 - 1} \geq \frac{n}{\sqrt{5}}$, $n \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$, 同时应有 $\frac{n}{\sqrt{5}} \leq 1$, $n \leq \sqrt{5}$, 故角 θ 取值范围为 $\sin^{-1} \frac{n}{\sqrt{5}} \leq \theta \leq \sin^{-1} \sqrt{n^2 - 1}$, 长方体材料的折射率 n 应在 $\frac{\sqrt{5}}{2} \leq n \leq \sqrt{5}$ 范围内;

(3) $\theta \leq \arcsin \frac{n}{\sqrt{5}}$ 时不能射至 AD 面, 光路如图答 24-13 甲, $\theta \geq \arcsin \sqrt{n^2 - 1}$ 时, 光要射入长方体中, 必有 $\theta \leq \sqrt{n^2 - 1} \leq 1$, $1 \leq n \leq \sqrt{2}$, 可以射到 AD 面但不发生全反射, 光路如图答 24-13 乙.



图答 24-13



专题 25 波动光学与量子理论拾零

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

本专题简略介绍波动光学、量子物理学的若干知识与方法。

人们发现光的干涉、衍射与偏振等现象以及测出水中光速小于空气中的光速使光的波动说有了重要的实验论据；麦克斯韦建立的电磁理论，进一步指出光是一种电磁波；实验测得的光速与电磁波在真空中的传播速度的理论值 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 很好地相符；与电磁波一样，光是一种横波；可见光是波长在 $400 \sim 760 \text{ nm}$ 、频率在 $4.3 \times 10^{14} \sim 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 之间的电磁波；各种色光具有一定的频率。

频率相同、相差恒定的两列光波相遇会发生干涉现象，历史上著名的获得相干光源的干涉实验有：

杨氏双缝实验 这是最早以明确形式确立光波叠加原理，用光的波动性解释干涉现象的一个实验。杨氏实验示意图如图 25-1 所示，根据惠更斯原理，认为双缝 S_1 和 S_2 是两个发射子波的波源，它们都是从同一个光源 S 而来并位于同一个子波波面，故它们的相位总是相同而能构成相干光源。如图

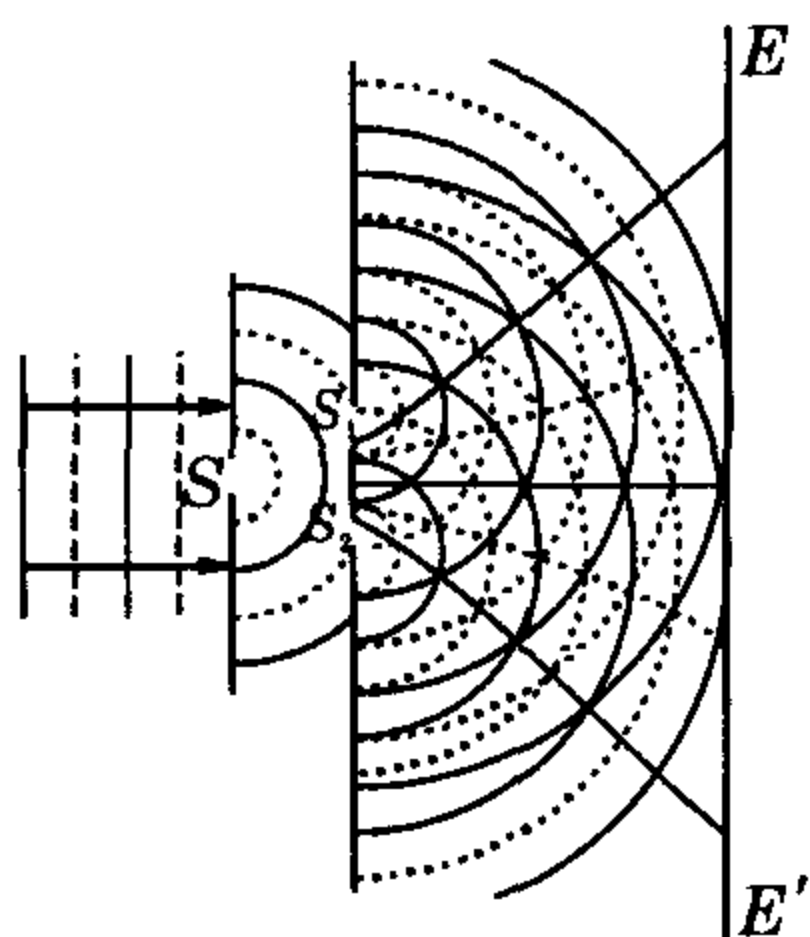


图 25-1

25-2 所示，若双缝间距离为 d ，缝屏到光屏 EE' 间距为 D ，光屏上任一点 P 到双缝的距离为 r_1, r_2 ，从 S_1 和 S_2 到达 P 的光程差为

$$\Delta l = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta,$$

式中 θ 表示 PO 对双缝中点的张角，如图 25-2 所示。若光程差等于波长整数倍，即 $d \sin \theta = k\lambda, k=0, 1, 2, \dots$ ， P 点为亮点。通常能观察到干涉条纹的情况下 θ 总是很小，则 $d \sin \theta = d \tan \theta = d \frac{x}{D} = k\lambda$ ，故光屏上各级亮纹离中心 O 的距离为

$$x = \pm \frac{D}{d} k \lambda, k=0, 1, 2, \dots$$

若光程差满足 $d \sin \theta = (2k-1) \frac{\lambda}{2}, k=1, 2, 3, \dots$ ， P 点为暗点，则各级暗纹离中心 O 的距离为

$$x = \pm (2k-1) \frac{D\lambda}{2d}, k=1, 2, 3, \dots$$

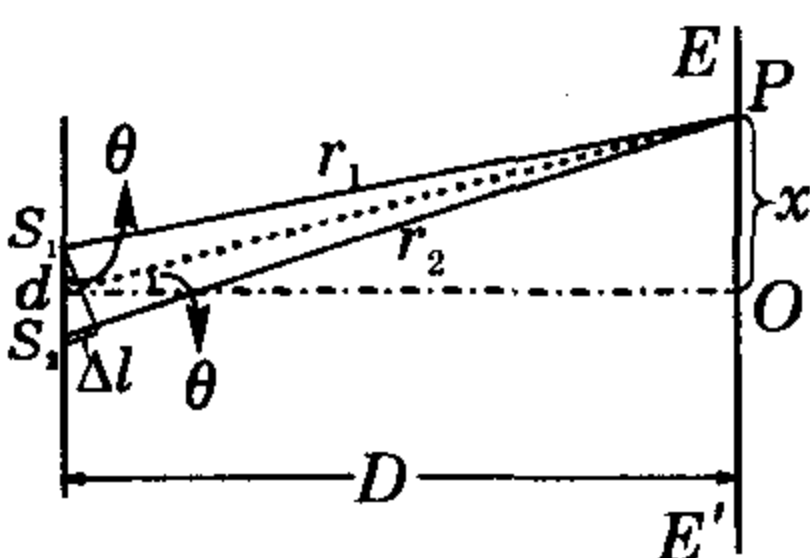


图 25-2

两相邻明条纹或暗条纹间距 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ ，即能观察到的干涉条纹是等距离分布的。

菲涅尔双棱镜实验 如图 25-3 所示，双棱镜截面为等腰三角形，由上、下两顶角 A, A' 各约 1° 左右、底面重合的直角三棱镜构成，从狭缝（垂直于纸面，下同）光源 S 发出的光波，经过这个薄薄的双棱镜，光束向相反方向偏折，分成的

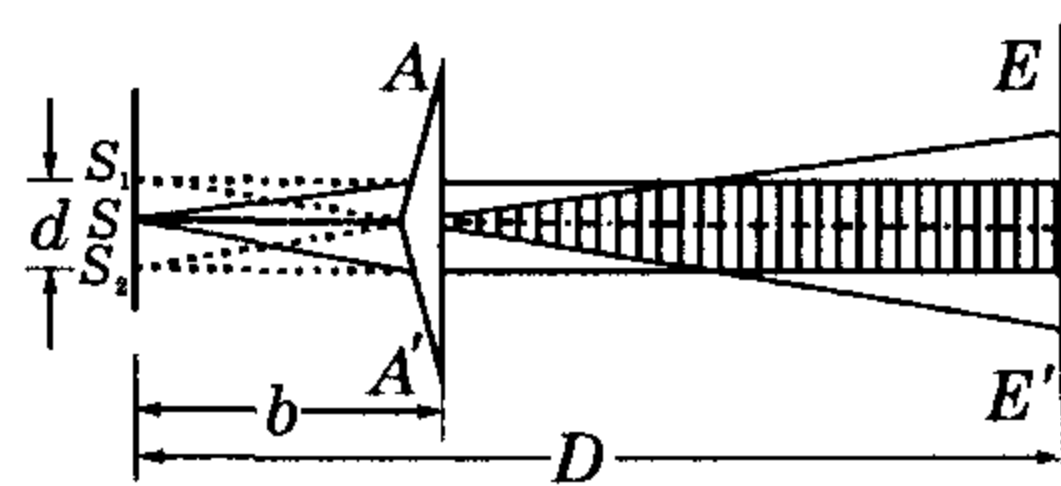


图 25-3

两束光波，好像来自虚线光源 S_1 和 S_2 ，两虚光源发出的光在画有阴影线的部分叠加，使这个区域成为干涉区，虚线光源 S_1 和 S_2 即为相干光源。若双棱镜玻璃折射率为 n ，狭缝光源 S 到双棱镜距离为 b ，当从三棱镜出射光垂直于出射面时，有最小偏向角 $\delta_{\min} = (n-1)A$ ，这也正是光源 S 发出的光束的半张角，光源 S 发出的沿对称轴的光从双棱镜射入时入射角 $i=A$ ，出射时的折射角为 $i' = (A - \frac{A}{n})n = (n-1)A$ ，这也正是虚光源 S_1 或 S_2 发出的光束的张角，由此，两相干光源间距离 $d = 2b(n-1)A$ ，若在与光源相距 D 处置一光屏 EE' ，与杨氏双缝一样，屏上会有明暗相间均匀分布的干涉条纹，相邻明（暗）条纹间的距离

$$\Delta x = \frac{D}{2b(n-1)A} \lambda.$$

菲涅尔双镜实验 菲涅尔双镜是两个交角很小的平面镜，如图 25-4 所示，从狭缝 S 发出的光波，经平面镜 M_1 和 M_2 反射后成为两束相干光波，两束光好像来自光源 S 在两镜中所成虚像 S_1 和 S_2 ， S_1 和 S_2 即为相干光源，两光束叠加部分

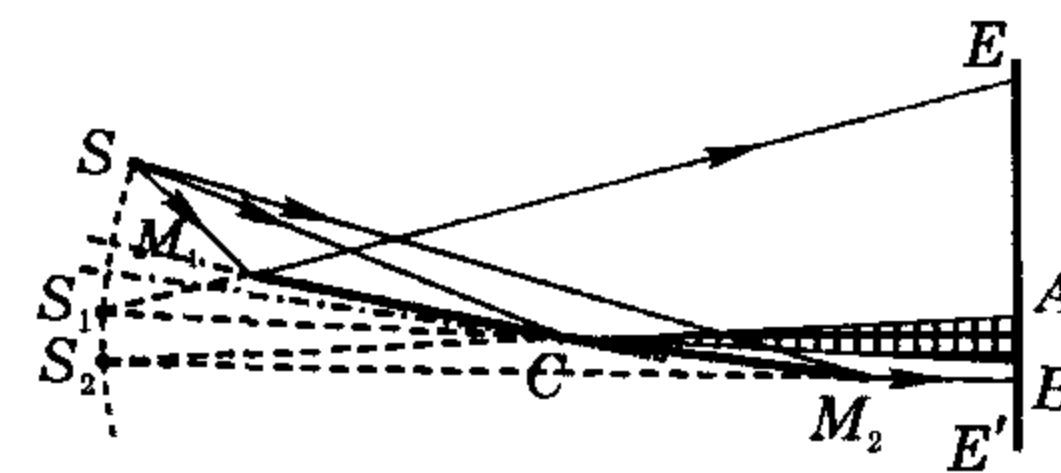


图 25-4

如图 25-4 中画阴影部分所示。若两镜间很小的夹角为 θ ，图 25-4 中 $SC = S_1C = S_2C = r$ ， S_1 与 S 关于 M_1 对称， S_2 与 S 关于 M_2 对称，由几何关系可知狭缝 S 的两虚像 S_1, S_2 对两平面镜交线 C 的张角为 2θ ，故 S_1 和 S_2 的距离 $d = 2r\theta$ ；若在与两相干光源 S_1 和 S_2 距离为 D 处置光屏，在两反射光交叠处，如图中屏上 AB 间，可观察到干涉条纹，相邻两明（暗）条纹间距离为

$$\Delta x = \frac{D}{2r\theta} \lambda.$$



洛埃镜实验 洛埃镜是一种更简单的观察干涉现象的装置,实验示意如图 25-5 所示, S_1 为狭缝光源,其一部分光直射在光屏 EE' ,另一部分几乎与镜面平行地射向镜面,然后反射光到达屏上,反射光就像来自 S_1 的虚像 S_2 , S_1 与 S_2 构成一对相干光源,直射光束与反射光束重叠区域即可观察到干涉条纹.在洛埃镜实验中,平面镜处在两相干光源的对称轴上,图 25-5 中 P 点到两波源光程差为零,但此处为一暗条纹,这是因为光从光疏介质射向光密介质界面而发生反射时,有半波损失.屏上各级亮条纹出现在两光源光程差为半波长奇数倍的那些位置,各级暗条纹则出现在两光源光程差为波长整数倍的那些位置,干涉条纹间距的计算与杨氏实验相同.

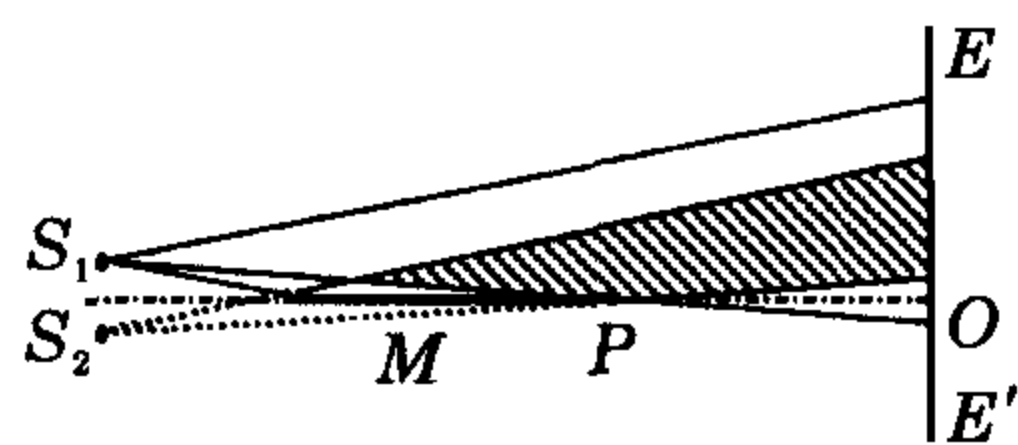


图 25-5

上面介绍的各种干涉,都属于同一类干涉,即把同一光源发出的同一波面设法分开造成光程差而引起干涉;另一类干涉是利用同一入射光波的振幅(能量)通过两个表面的先后反射加以分解,例如薄膜干涉.

例 1 如图 25-6 所示,在玻璃基底上涂两层薄膜,它们的厚度分别用 t_1 和 t_2 表示.空气,两层膜以及玻璃的折射率依次为 n_0, n_1, n_2, n_3 ,且满足 $n_0 < n_1 < n_2 > n_3$. 波长为 λ 的单色光垂直入射,已知在三个界面处反射后所得三束光振幅相等.为了使反射光的总强度为零,必须适当选择所涂薄膜的厚度 t_1 和 t_2 . 试求 t_1 的最小值,以及 t_1 取上述最小值时 t_2 的最小值.

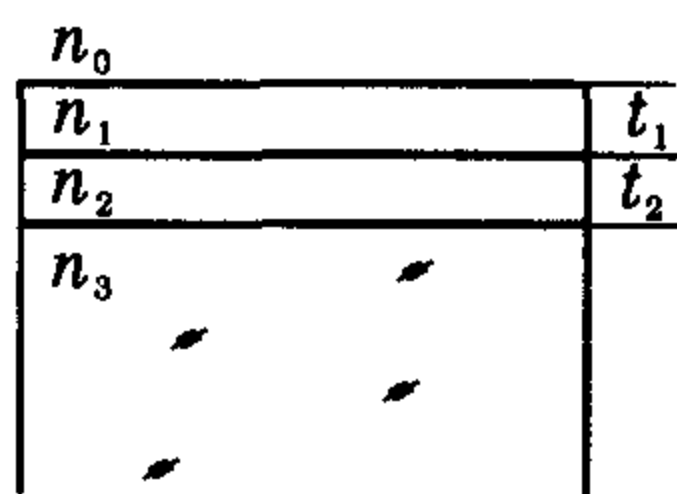


图 25-6

分析与解 设入射光相位为零,在空气与 n_1 界面上的反射光称反射光 1, n_1 与 n_2 界面上的反射光称反射光 2, n_2 与玻璃界面上的反射光称反射光 3,因为三束反射光总光强为零,振幅相同,故三束反射光两两之相差必为 $\frac{2}{3}\pi$,注意到光从光疏介质射向与光密介质的界面时反射光的半波损失,各光矢量关系如图 25-7 所示.当 t_1 取最小值时,反射光 2 与反射光 1 光程差为 $2t_1 n_1$,由图 25-7 知反射光 2 与反射光 1 相位差为 $\frac{2\pi}{\lambda}$,则 $\frac{2\pi}{\lambda} 2t_1 n_1 = \frac{2\pi}{3}$,故 $t_1 = \frac{\lambda}{6n_1}$;反射光 3 与反射光 1 的光程差为 $2t_1 n_1 + 2t_2 n_2 - \frac{\lambda}{2}$,而相位差由图可知为 $\frac{4\pi}{3}$,即 $\frac{2\pi}{\lambda} (2t_1 n_1 + 2t_2 n_2 - \frac{\lambda}{2}) = \frac{4\pi}{3}$, $2t_1 n_1 + 2t_2 n_2 = \frac{7\pi}{6}$,代入 $t_1 = \frac{\lambda}{6n_1}$ 可得 $t_2 = (\frac{7}{6} - \frac{1}{3}) \cdot \frac{\lambda}{2n_2} = \frac{5\lambda}{12n_2}$.

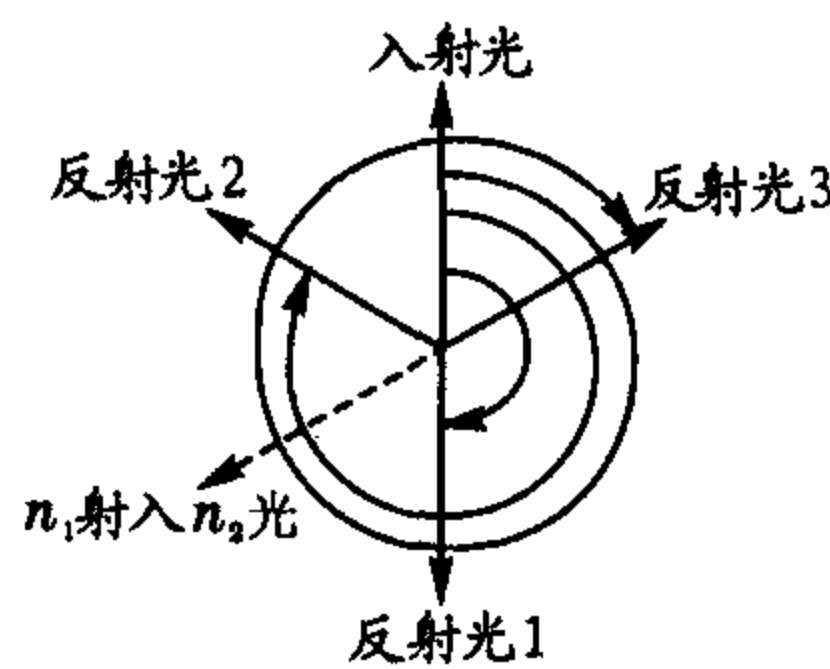


图 25-7

例 2 利用空气劈尖的等厚干涉条纹可测量精密加工工件表面极小的纹路的深度.在工件表面上放一平板玻璃,使其形成空气楔,如图 25-8 甲所示,以单色光垂直照射玻璃表面,在显微镜中观察干涉条纹.由于工件表面不平,观察到的条纹

如图 25-8 乙所示,试根据纹路弯曲的方向,说明工件表面上纹路是凹还是凸?并证明纹路深度可用下式表示

$$H = \frac{a}{b} \frac{\lambda}{2}$$

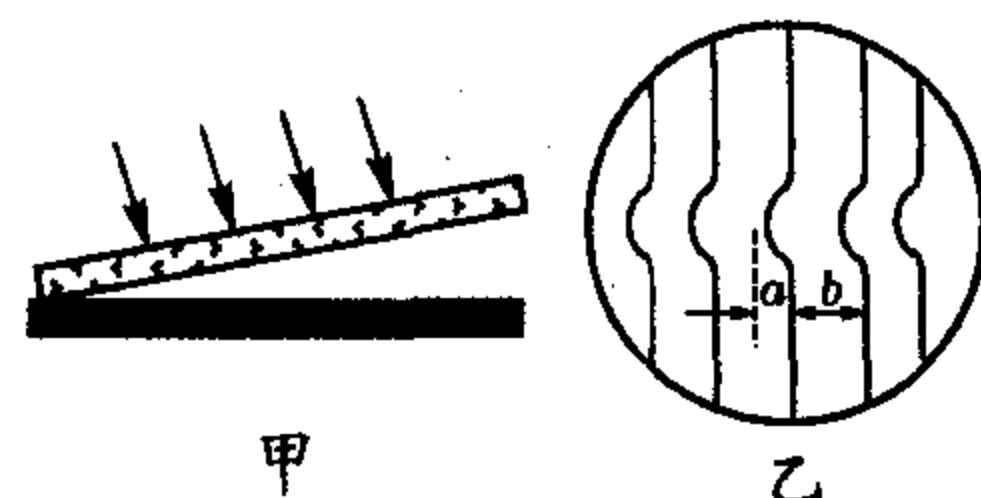


图 25-8

分析与解 本题是光的薄膜干涉应用于精密加工检验的一个实例.先讨论一下楔形空气薄膜的干涉原理:如图 25-9 所示,两块大的平板玻璃一端密合,另一端嵌一极薄垫层(图中已特别予以放大),两板间即形成顶角为 α 的楔形空气薄膜,膜的上、下两个表面即玻璃板内表面.用单色光垂直照射玻璃板,就可观察到明暗相间、间隔等距的干涉条纹,其发生原因是由于单色光在楔形空气薄膜上、下两个表面的反射光有相差.在某些点 P_i ,入射光在空气膜上表面反射的反射光相位无变化,在下表面反射得到的反射光有半波损失,再加上在这空气层一个往返的光程 $2y$,两反射光在 P_i 点叠加时若有 $2y + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, k = 1, 2, 3, \dots$,此处两反射光叠加加强,出现亮纹,而在另一些点 Q_i ,两反射光在 Q_i 点叠加时若有 $2y + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$,此处两反射光叠加减弱,出现暗纹,由于各处厚度均匀增大,即有 $y = x \tan \alpha$,相邻两明(暗)条纹间距离为 $l = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$.由上讨论可知,楔形空气薄膜干涉中,各级亮、暗条纹分别出现在膜的厚度 y 为 $\frac{\lambda}{4}$ 奇数倍与 $\frac{\lambda}{2}$ 整数倍的那些位置,每一条纹都与一定的 k 值相当,故这样的干涉条纹称为等厚条纹.

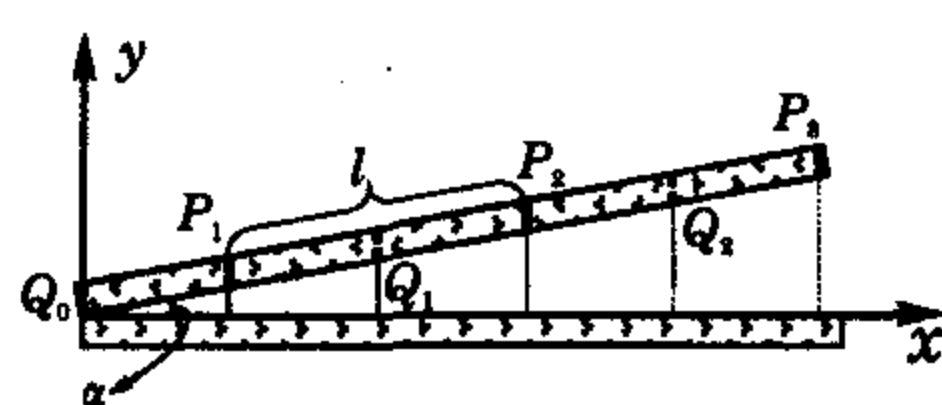


图 25-9

用来测量精密加工工件表面极小纹路深度的空气楔是在被测工件表面上放一平板玻璃(称平面验规)而形成,若工件表面不平,观察到的干涉条纹会有弯曲.本题中我们看到,条纹是向楔顶方向弯凸的,说明凸处空气膜的厚度已达到离楔顶稍远处某一条纹所对应的膜厚,故此被验表面一定有凹陷,如图 25-10 所示.根据上面的讨论,等厚条纹间距 $\Delta x = \frac{\lambda}{2} \cot \alpha = b$,若以 H 表示凹陷最大深度,无凹陷时,该处膜的厚度比距它 a 的那一级条纹所对应的膜厚小 H ,则 $H = a \cdot \tan \alpha = \frac{\lambda}{2b} = \frac{a\lambda}{2b}$.

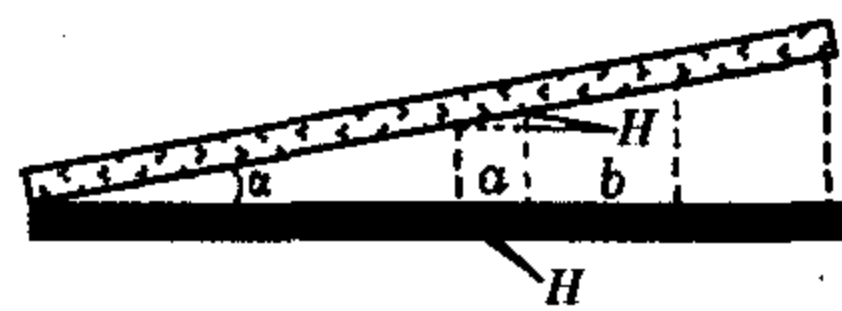
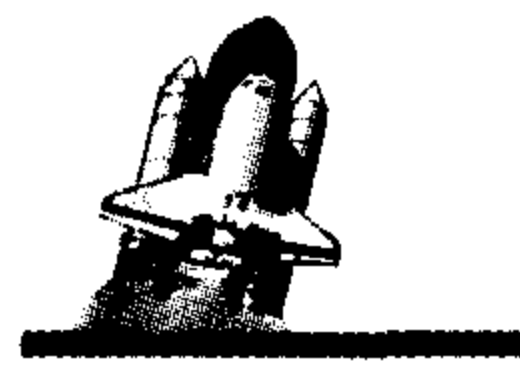


图 25-10

光的直进现象是在衍射不明显时的近似,而衍射才是光波的本性特征之一,能观察到明显光衍射的条件是孔、缝、障碍物尺寸与光波波长可比.因可见光波长的数量级在几百纳米,故一般情况下,不易观察到明显的光衍射现象,但在障碍物大小与光波波长差不多时,光偏离直线路径的现象会很明显.大气中天然出现的衍射现象——月晕和日晕,是悬浮在高空的微粒



所导致的:如果高空的水气达到饱和,月光在雾滴上弯折了路径,使得地面上观察者看到月边上有彩色光环,这就是月晕;著名的日晕发生在喀拉卡火山爆发后,火山爆发后的灰土被风卷扬至高空,日光经尘埃微粒而弯曲,使人们看到太阳外周出现赤色的光环.一些助视光学仪器的分辨本领与光的衍射有关,在上一个专题里,我们讨论光学仪器的成像与放大本领时,是基于几何光学的直线传播规律,在那里,似乎只要适当选择透镜的焦距,得到所需要的放大率,就可以将任何微小物体放大到清晰可见的程度.但实际上,各种光学仪器由于衍射现象所限制,即使所成的像很大(即对人眼的张角足够大),但明晰程度却并不增加.这是因为物点发出的光通过物镜时,由于衍射,并不能聚焦为几何像点,而是成一衍射图样,衍射图样中央亮区是有一定大小的亮斑,极小的物体两端点相隔极近,其光通过物镜,将是两个大部分相重叠的亮斑,则我们仍然不能分辨这两点.恰能分辨两物点,至少应使两物点的衍射图样中心间的距离等于中央亮斑的半径,这个条件被称为瑞利准则.此时,两物点在物镜处的张角称为最小分辨角,用 $\delta\varphi$ 表示,如图 25-11. 根据数学分析得出最小分辨角大小以下式确定为

$$\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{d},$$

即最小分辨角的大小与仪器孔径 d 及光波波长有关. 最小分辨角的倒数被称为仪器的分辨率.

例 3 一天文望远镜的物镜直径为 2.5 m, 试求能够被它分辨的双星对它张开的最小夹角, 设入射光的波长为 550 nm. 若人眼瞳孔的直径为 2.5 mm, 求该望远镜与人眼相比, 其分辨率是人眼的多少倍?

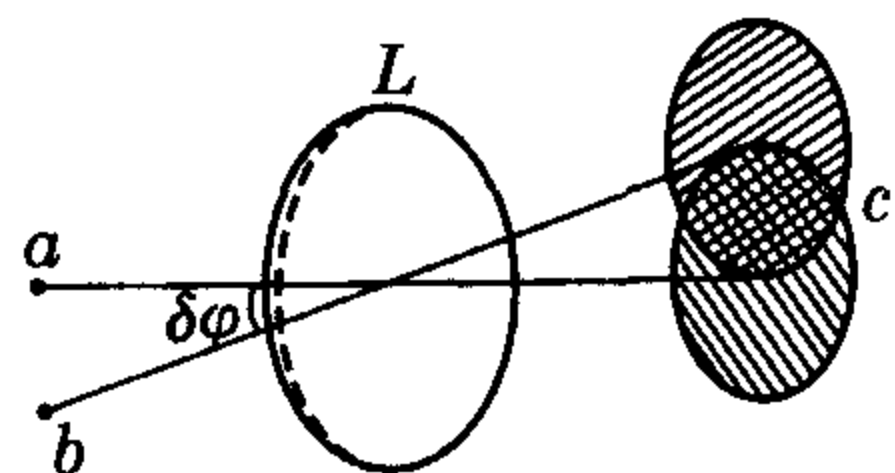


图 25-11

分析与解 望远镜的最小分辨角 $\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{d} = \frac{1.22 \times 550 \times 10^{-9}}{2.5} \text{ rad} = 2.68 \times 10^{-7} \text{ rad}$. 人眼的最小分辨角则为 $\delta\varphi' = 1.22 \frac{\lambda}{d'} = \frac{1.22 \times 550 \times 10^{-9}}{2.5 \times 10^{-3}} \text{ rad} = 2.68 \times 10^{-4} \text{ rad}$, 望远镜与人眼相比, 其分辨率是人眼分辨率的倍数为 $N = \frac{\delta\varphi'}{\delta\varphi} = 1000$ 倍.

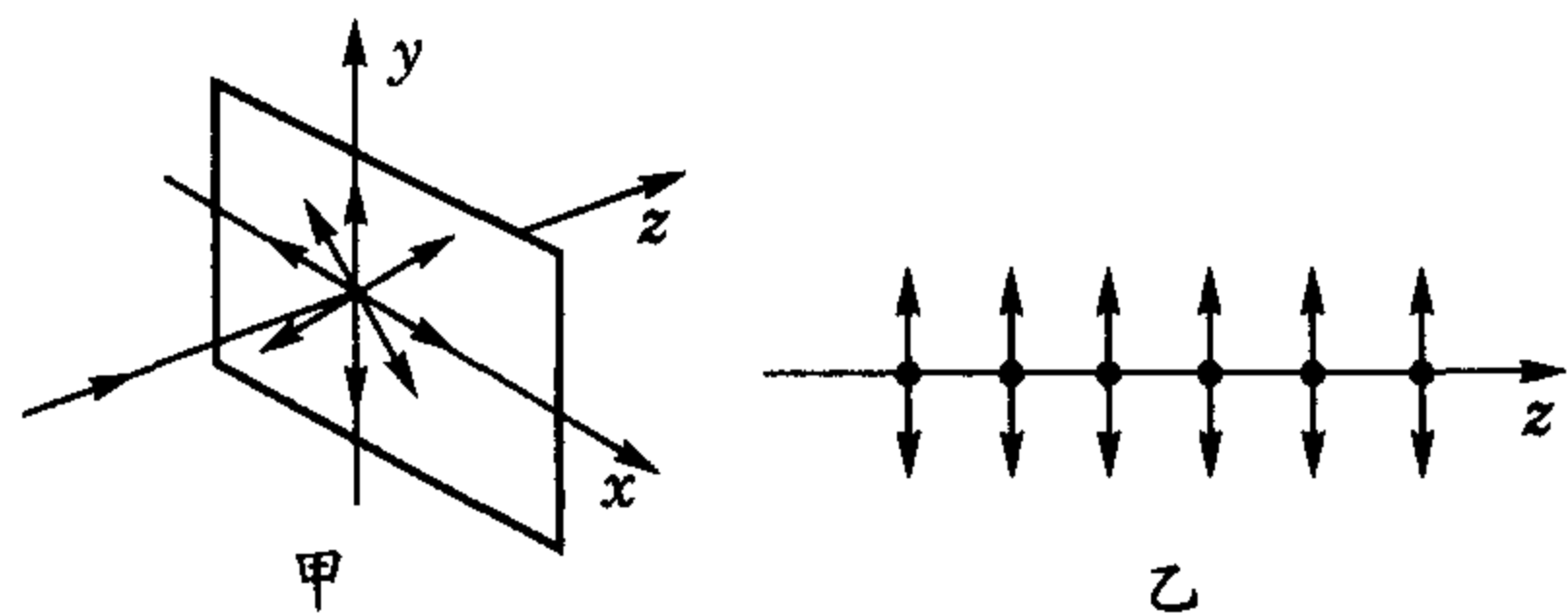


图 25-12

人们从光的偏振现象认识到光是横波. 我们知道, 光是电磁波的特例, 电磁波被表征为互相垂直的电场强度矢量与磁场强度矢量的振动(周期性变化), 光振动指的是电场强度矢量——光矢量的振动. 普通光源发出的光称为自然光, 这是因为大量原子发光时, 各原子所发光的光矢量取所有可能的方向, 没有哪个方向较其他方向更占优势, 平均来看, 光矢量的振

动对于光传播方向是对称而又均匀分布的; 激光器所发出的光是偏振光, 即光矢量在一个固定平面内只沿一个固定方向做振动. 光矢量振动方向与光传播方向所成平面称为振动面. 图 25-12 甲表示沿 z 轴传播的自然光, 对自然光中任何取向的光矢量都分解为相互垂直的两个方向上的分量, 就可以用振动方向互相垂直的两个偏振光来表示自然光, 如图 25-12 乙所示. 图中用黑点表示垂直于纸面的光振动, 双箭头短线表示在纸面内的光振动, 点、线画成均匀分布, 表示代表自然光的这两个方向的偏振光强度是一样的. 图 25-13 则表示各种偏振光.

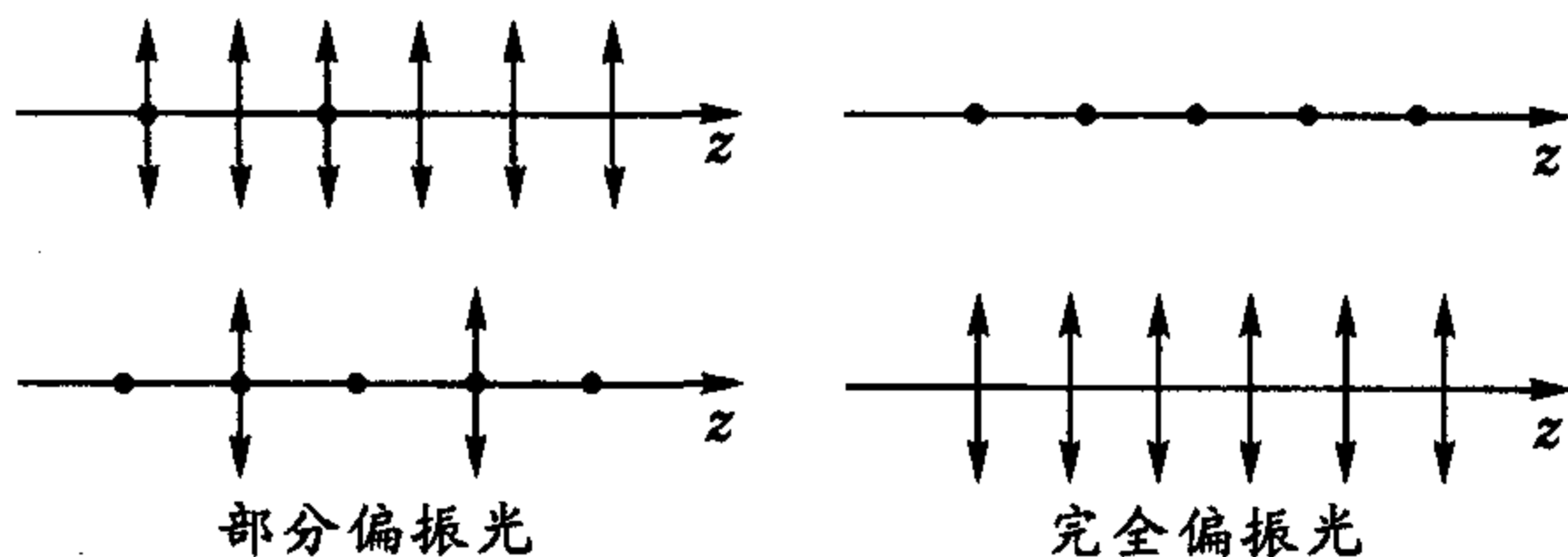


图 25-13

自然光在两种介质的界面上反射与折射时, 反射光与折射光都将成为偏振光, 在特定条件下, 反射光有可能成为完全偏振光. 如图 25-14 所示, SO 为自然光入射线, 在两种介质的界面 MM' 上 O 点反射与折射, 反射线为 OA , 折射线为 OB , 反射光与折射光均为部分偏振光, 反射光中垂直于入射面的振动多于平行于入射面的振动, 而折射光情况相反. 当我们改变入射角 i , 反射光的偏振化程度也随之改变, 当反射光与折射光互相垂直时, 在反射光中只有垂直于入射面的振动, 而平行于入射面的振动变为零, 即反射光成为完全偏振光, 这时的人射角叫全偏振角, 若以 i_0 示之, 由 $i_0 + r = 90^\circ$ 以及折射定律 $\frac{\sin i_0}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$, 得

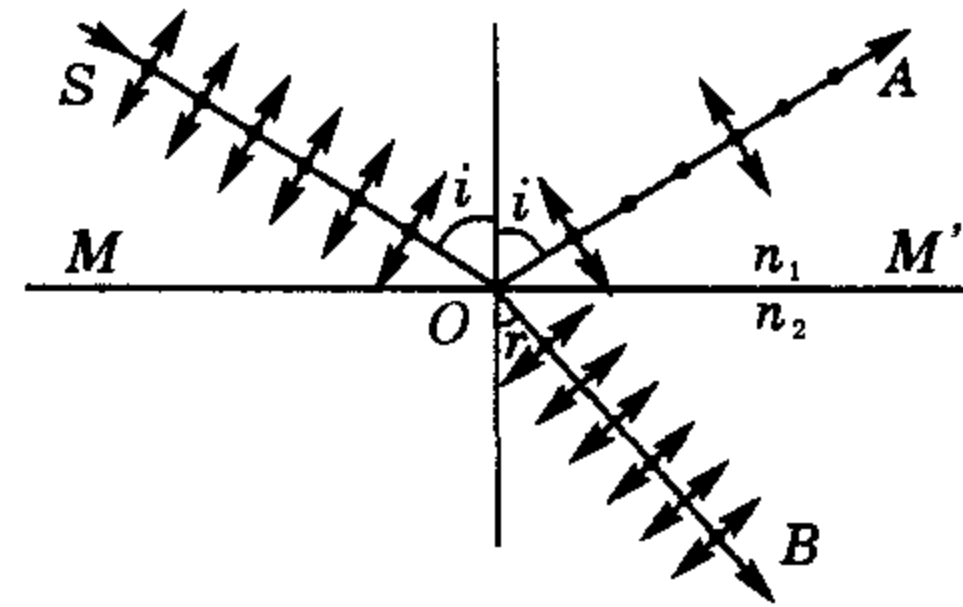


图 25-14

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1},$$

这个规律被称为布儒斯特定律, 全偏振角亦称布儒斯特角. 反射光成为全偏振光的布儒斯特角与两种介质的相对折射率有关.

例 4 如图 25-15 所示, 一块折射率为 $n_3 = 1.50$ 的平行玻璃板浸在水中, 一束自然光入射到水面上时, 反射光是完全偏振光. 现要使玻璃表面的反射光也是完全偏振光, 试问玻璃表面与水平面的夹角 θ 应为多大? 水的折射率 $n_2 = 1.33$.

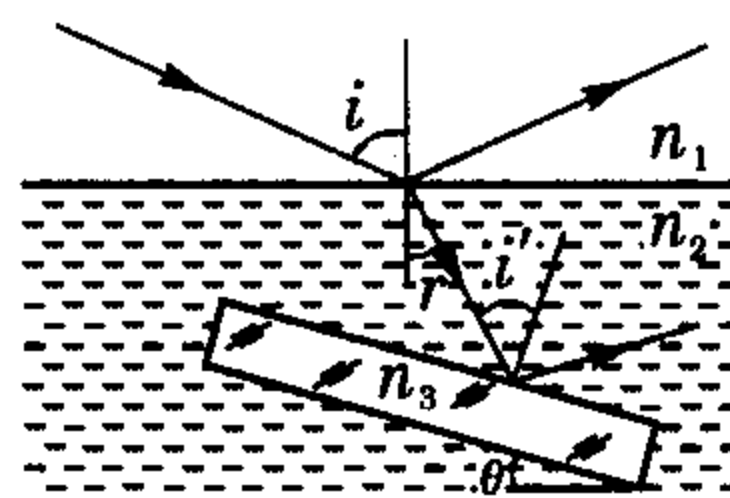
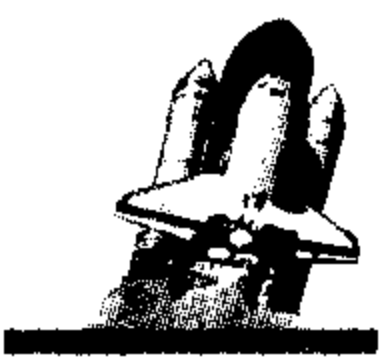


图 25-15

分析与解 由题给条件知, 自然光对水面的人射角 i 为全偏振角, 即 $\tan i = \frac{n_2}{n_1}$, 且 $i + r = 90^\circ$, 自然光经水面折射后折射角 r 由折射定律 $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$, 可得



$\frac{\sin(90^\circ - r)}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow r = \text{arccot } 1.33 = 36^\circ 56'$; 进入水中的折射光到达玻璃板表面, 对玻璃板而言, 为一部分偏振的人射光, 要使其经玻璃表面反射后成完全偏振光, 其对玻璃的入射角 i' 需满足 $\tan i' = \frac{n_3}{n_2}$, 可得

$$i' = \arctan \frac{1.50}{1.33} = 48^\circ 38'$$

由几何关系易得, 玻璃表面与水平面的夹角

$$\theta = i' - r = 48^\circ 38' - 36^\circ 56' = 11^\circ 42'$$

量子理论创生于上世纪初, 是对辐射与实物的行为、特别是微观层次上的行为最精确与完备的描述, 它的实际影响遍及每一种基于微观世界的细节的器件或观念: 诸如晶体管、硅片和集成电路——因而全部信息和通信技术如计算机、电视机、大部分现代化学与生物学、激光器、对从超导到中子星的不同实物的理解、原子核物理学、核能和核武器……整个高技术领域的中心就是一个高度量子化的粒子: 电子. 量子理论是科学家用来研究微观世界的一套想法, 量子物理学认为自然界的变化的方式发生的, 自然界在微观层次上由随机性支配着, 自然界——电子、质子和波同它们的环境是深深地连通着而不可分离的.

量子理论起始于对黑体辐射中“紫外灾难”问题的解释. 在专题 15 中我们曾介绍过, 黑体能在任何温度下吸收所有的电磁波辐射, 处于热平衡的黑体有最大的吸收与辐射电磁波的本领. 黑体单位面积的辐射功率 J 与其绝对温度的四次方成正比, 即: $J = \sigma T^4$, 式中斯忒藩常数 $\sigma = 5.76 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$. 经典理论还指出, 当温度升高时, 黑体最大发射本领向短波方向移动, 例如, 炽热物体在温度不很高时, 辐射能量集中在长波区, 发出的是红外线或红赭色光; 温度较高时, 辐射能量主要在短波区, 因而发出白光或紫外线. 由这一理论, 随着波长的减小, 发射本领无限增大, 这与实验结果不符. 事实是, 随着波长的减小, 辐射功率趋向于零! 经典理论在短波端遭遇的这个失败被称作“紫外灾难”. 普朗克提出的量子假说, 得出了与实验完全相符的结论, 他假设辐射黑体是由带电的谐振子(如分子、原子)所组成, 由它们的振动而辐射电磁波, 每个振子的能量只可能处于某些不连续状态, 它们是一个最小能量的整数倍, 这个最小能量就叫量子. 如果谐振子的频率为 ν , 则最小能量

$$E = h\nu,$$

h 为普朗克恒量, 其值

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

谐振子能量只可能是 $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu$, n 为正整数, 称为量子数. 这样, 被老师忠告以“年轻人, 物理学已经不会有什么发展了, 这是一条死胡同”的普朗克以全新的理念将物理学带进了后牛顿时代. 爱因斯坦推广了普朗克关于辐射的量子概念, 在对光电效应现象的研究中, 指出: 光在传播过程中, 具有波动的特性; 然而在光的发射和吸收中却有类似粒子的性质, 光本身只能一份份地发射, 一份份地吸收, 这一份能量被称为光子. 光子的能量 $\epsilon = h\nu$; 按照相对论质能关系, 光子的质量 $m_p = \frac{h\nu}{c^2}$; 光子的动量 $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$. 光子假说不再认为光能均匀地分布在波面上, 而是集中在光子上, 从能量守恒出发建立光电效

应方程 $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W_{\text{逸}}$, 不但对光电效应有了一个成功的解释, 同时也使人们认识到光不仅具有波动性, 而且具有粒子性. 自然界的波粒二象性露出端倪.

X 射线经物质散射实验进一步证实了光子说. 康普顿在研究 X 射线通过碳、石蜡等物质散射时, 发现散射波中除与原入射线相同波长的射线外, 也有波长大于原射线的, 波长的改变量与散射方向有关. 这种波长改变的散射称为康普顿效应. 从波动观点来看, 光的散射是由于电磁波通过物体时引起物体内部带电粒子的受迫振动, 从而产生散射光, 故此, 散射光的频率、波长应与入射光相同. 波长变化的康普顿效应, 纯波动说难以解释, 而要应用光子理论. 设自由电子在受光子作用前是静止的, 光子与电子做弹性碰撞, 入射光子的动量 $p = \frac{h\nu}{c}$, 散射光子动量 $p' = \frac{h\nu'}{c}$, 被碰后电子获得动量 $p_e = mv$, 光子散射角为 θ , 由如图 25-16 所示动量守恒关系

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu\nu'}{c^2} \cos \theta;$$

静止电子能量 $E = m_0c^2$, 碰撞后电子能量 $E' = mc^2$, 由能量守恒条件有

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2,$$

即 $h(\nu - \nu') + m_0c^2 = mc^2$;

根据狭义相对论, 电子质量与速度关

系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

由以上三式可得 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \theta)$. 此式给出了波长

改变与散射角的关系, 当散射角为 90° 时, $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} = 0.024\ 265 \text{ \AA}$, 与实验观察值符合.

例 5 频率为 ν 的光, 射到一平面镜上, 设单位时间内到达镜面单位面积上的入射光子数目为 n , 平面镜的反射率为 r , 光对平面镜的入射角为 θ . 试求: (1) 光对平面镜的压力; (2) 光作用在平面镜上的切向力.

分析与解 光子说认为光子具有动量 $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ 的观点, 除解释康普顿效应外, 还可以说明光压的作用, 即当光子流遇到障碍物时, 会对障碍物施加压力的作用, 如同气体分子在容器壁上碰撞形成气体对器壁的压强一样, 光压就是光子流产生的压强. 本题是光子存在动量的一个例证.

(1) 设 Δt 时间打在平面镜单位面积上的光子数为 $n\Delta t$, 动量的法向分量为 $p_1 = n\Delta t \frac{h\nu}{c} \cos \theta$, 反射的光子数为 $rn\Delta t$, 动量的法向分量为 $p_2 = nr\Delta t \frac{h\nu}{c} \cos \theta$, 方向与 p_1 相反. 由动量定理, 光对平面镜单位面积的正压力即光压 p 为

$$p = n \frac{h\nu}{c} \cos \theta + nr \frac{h\nu}{c} \cos \theta;$$

(2) 光作用在平面镜上的切向力由所吸收光子的切向冲量引起, 由动量定理

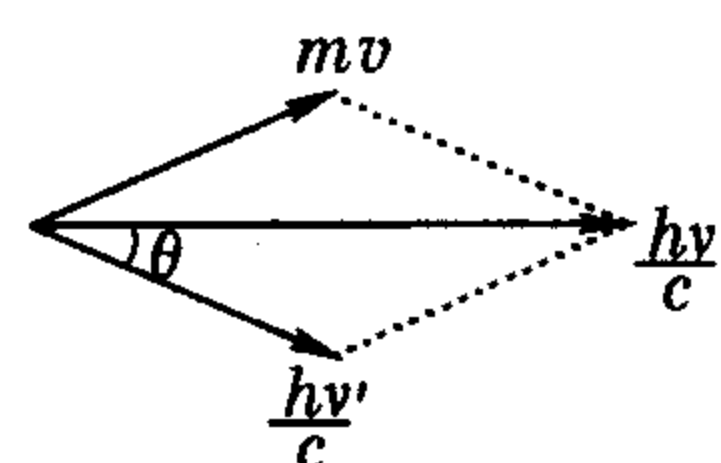


图 25-16



$$T = n(1-r) \frac{h\nu}{c} \sin \theta.$$

对辐射显示出波粒二象性作一对称思考,法国物理学家德布罗意提出了一个更大胆的假说,即将波粒二象性推广到实物粒子——如果用能量和动量来表征实物粒子的粒子性,用频率和波长来表征实物粒子的波动性,那么,与实物粒子联系着的波,其波长 $\lambda = \frac{h}{mv}$,这种波就是通常所称的物质波.德布罗意在他提交的博士学位论文中写进了这极具对称与奇异之美的想法,使博士学位评委会为之噤然,只得将论文寄给爱因斯坦.被青年学者的创见深深打动的爱因斯坦评论道:“它是照在这个最难解的物理之谜上的第一缕微弱之光”.今天,我们从电子干涉或衍射图样中可以认识实物粒子的波动性.

例6 电子显微镜的电子波长为 0.0164 nm ,试估算所需电子动能的最小值及加速电压.

分析与解 由德布罗意波波长与动量的关系,电子的动量

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.0164 \times 10^{-9}} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \approx 4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s};$$

而电子的动能 $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{(4 \times 10^{-23})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} \approx 5500 \text{ eV}$;则加速电压应为 5500 V .

玻尔在1913年分三次发表的被誉为“伟大的三部曲”的长篇论著《论原子构造和分子构造》成功地把量子观念引入到原子理论中去,制定了量子化的原子模型,成功解释了原子稳定性问题及发光行为.在玻尔的原子模型中,核外电子的轨道不是任意的,而只能是一些量子化的轨道,在这些轨道上,电子绕核运动的角动量是 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍,即

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}, n \text{ 为量子数,取 } 1, 2, 3 \dots$$

对氢原子(原子序数 $Z=1$)和类氢原子,考虑电子绕核运

动的动力学方程 $\frac{kZe^2}{r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n},$

则可能轨道半径 $r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2 Z k},$

轨道速度 $v_n = \frac{2\pi e^2 Z k}{nh}.$

电子在可能轨道上的运动是一种驻波形式的振动,这时的原子是稳定的,称为定态.处于定态的原子能量是电子动能与原子系统势能的总和

$$E_n = \frac{kZe^2}{2r_n} - \frac{kZe^2}{r_n} = -\frac{kZe^2}{2r_n} = -2\pi^2 \frac{me^4 Z^2 k^2}{n^2 h^2}.$$

可见,原子的能量状态也是量子化的,原子处于可能的能量状态称为能级.当原子从一个较高能级 E_n 跃迁到一个较低能级 E_k 时,原子才会辐射单色光,反之,原子吸收光子时,会从较低能级跃迁到一个较高能级,辐射或吸收光子的频率由能量守恒关系决定:

$$h\nu_{nk} = E_n - E_k.$$

例7 讨论一个由 μ^- 子和氦核组成的类氢离子, μ^- 子的质量为电子质量的207倍,其他性质与电子相同,对此种离子,玻尔的轨道量子化理论同样适用.若已知氢原子的玻尔半径为 $r_1 = 0.53 \text{ \AA}$,基态能量为 $E_1 = -13.6 \text{ eV}$,试求这种类氢离子

的玻尔半径 r_1' 和基态能量 E_1' . (略去氦核的运动)

分析与解 根据玻尔理论,氢原子的玻尔半径(量子数为

1) $r_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e e^2 k} = 0.53 \text{ \AA}$,类氢离子中 μ^- 子绕氦核运动的可能轨道半径

$$r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2 Z k},$$

取 $n=1, Z=2$, 则

$$r_1' = \frac{h^2}{4\pi^2 (207m_e) e^2 2k} = \frac{r_1}{414} = 0.0013 \text{ \AA};$$

类氢离子的最低能级(基态)的能量 $E_1' = \frac{k \cdot 2e^2}{2r_1'} - \frac{k \cdot 2e^2}{r_1'} = -\frac{k \cdot 2e^2}{2r_1'}$, 式中 $r_1' = \frac{r_1}{414}$, 而氢原子基态能量 $E_1 = -\frac{k \cdot e^2}{2r_1}$, 故类氢离子基态能量 $E_1' = 828E_1 = -1.13 \times 10^3 \text{ eV}$.

玻尔的原子模型是对经典理论的一次量子化改良,有其不足与局限,但正是有此基础,才有后来的量子力学,更完整准确地描述微观粒子的波粒二象性行为.

量子理论的中心思想是,一切都是由不可预言的粒子构成的,但这些粒子的统计行为则遵循一种可以预言的波动图样,微观世界具有一种内禀的、可以量化的不确定性.德国物理学家海森伯发现了这种不确定关系.不确定关系,也称测不准关系,是量子力学中的一个极其重要而又极其基本的关系.在经典力学中,运动物体具有确定的轨道,任一时刻物体的运动状态可用在该轨道上确定的位置和动量来描述,我们可以通过实验手段作出精确测定.然而对微观客体,由于具有波粒二象性,微观粒子有别于宏观物体——在某一时刻对应一确定位置,形成一条运动轨道,由运动轨道可求出每个瞬时的动量.微观粒子在各个时刻出现在什么位置是不确定的,是随机的,我们只能用几率形式来表示微观粒子的状态,我们可以描述的只是粒子在空间各点出现的几率,及其动量在某一范围内的几率.即,对于微观粒子而言,确定其位置所达到的精确度 Δx 和同时测量其动量所达到的精确度 Δp_x 是受到限制的,这个限制是

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h.$$

这就是海森伯“不确定关系”的数学表达式(更精确的不确定关系表达式为 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$),其意义是:用经典力学的物理量来描述微观粒子,只能在这样的近似程度内——粒子在某一方向上位置的不准量和在这方向上动量的不准量的乘积将大于或等于 h . 不确定原理告诉我们,任何粒子都保持它们的位置与动量的总的可能性疆域,一种不确定性的减小必使另一不确定性增大同样的程度.

下面我们对这一关系作出论证.为使所涉知识易于读者接受,某些细节会采取模糊处理.首先,我们研究较为熟悉的波的单缝衍射.如图25-17所示为单缝衍射实验装置示意图, K 为单缝,缝宽 D , 设平行光(平面波)垂直于单缝入射,根据惠更斯原理,在单缝所在处的波面 AB 上的各

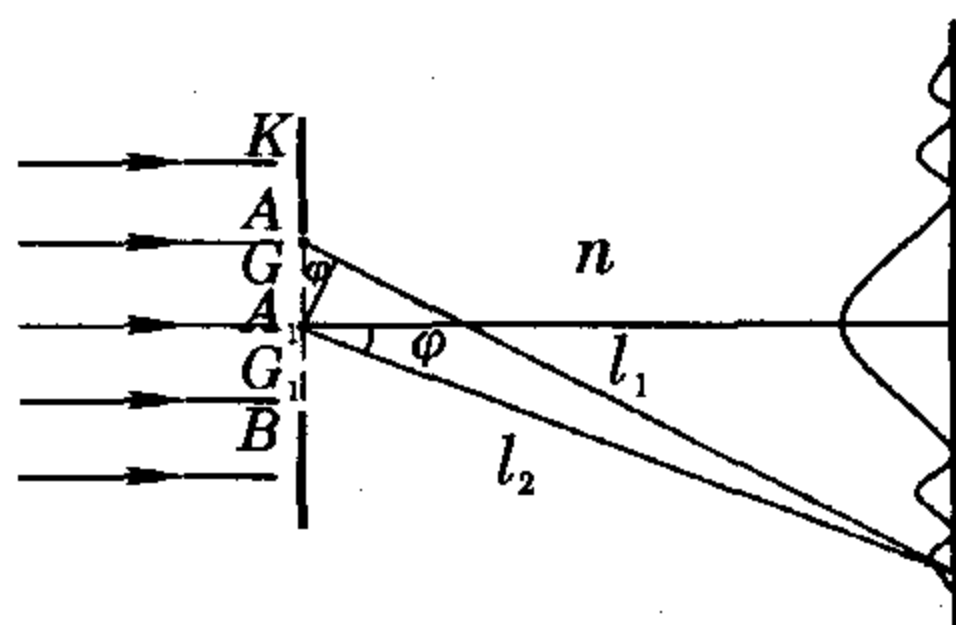


图 25-17



点波源向各个方向发射新的子波,这些波经传播而在空间叠加,并可产生干涉现象.若将波面 AB 分割成两个面积相同、宽度为 $\frac{D}{2}$ 的波带 AA_1 、 A_1B ,两波带上,任何两个对应点,如图 25-17 中 AA_1 带上的 G 点和 A_1B 带上的 G_1 点所发出的光线的光程差 $l_1 - l_2 = \frac{D}{2n} \sin \varphi$,式中角 φ 是子波波线与入射平行光所成的角度, n 是介质折射率.当 $\frac{D}{2n} \sin \varphi = \pm (2k-1) \frac{\lambda}{2}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 时,两波到达屏上时反相叠加而完全抵消,屏上依次出现第一级暗纹、第二级暗纹...;当 $\frac{D}{2n} \sin \varphi = k\lambda$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时,两波到达屏上时同相叠加而加强,屏上依次出现中央明纹及其他各级明纹.由上可知,中央明纹在两个一级暗纹之间的区域,即 φ 适合

$$\sin \varphi \leq \left| n \frac{\lambda}{D} \right|.$$

再来看看微观粒子——例如电子的单缝衍射.如图 25-18 所示,设有一束电子以速度 v 沿 OY 方向射向狭缝 AB ,在屏上可以观察到与伦琴射线衍射图样并无二致的电子衍射图样,这正是电子波动性的表现,所谓“明纹”是电子到达几率大的区域,而“暗纹”则是电子到达几率小的区域.根据上面推得结论,考

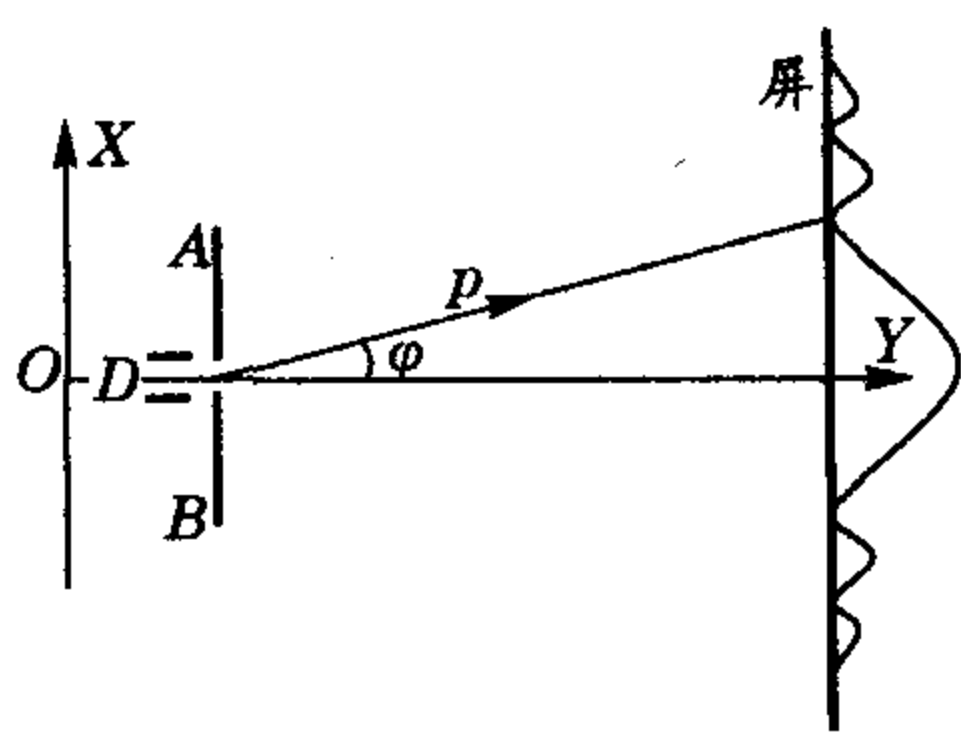


图 25-18

虑零级最大与第一级最小之间满足的条件是 $\sin \varphi = \frac{\lambda}{D}$. 这里的 λ 应是物质波波长,即 $\lambda = h/p$.

现在我们想对电子的行为作经典的描述,试图同时确定位置 x 和动量 p . 在电子通过狭缝的瞬间,电子在 OX 方向上的位置由于缝的限制而被局限于狭缝之间,它的位置的 x 坐标不可能超出缝宽 D ,或者说位置测量的不确定性不可能超出 D ,用 Δx 表示决定电子在 OX 方向上的位置的不确定量,那么

$$\Delta x = D.$$

此时,由于衍射,电子速度的方向有了变化,动量 p 的 OX 方向分量 p_x 介于 0 与 $p \sin \varphi$ 之间,即 $0 \leq p_x \leq p \sin \varphi$,所以电子在 OX 方向上的动量测量的不确定性不会超过 $p \sin \varphi$,用 Δp_x 表示电子 OX 方向动量的不确定量,有

$$\Delta p_x = p \sin \varphi.$$

上式中 $\sin \varphi = \frac{\lambda}{D}$, $\lambda = \frac{h}{p}$,得 $\Delta p_x = p \frac{h}{Dp} = \frac{h}{\Delta x}$,

于是有 $\Delta x \cdot \Delta p_x = h$.

如果把所有次级即电子所有可能到达几率考虑在内,则有

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h.$$

对上述关系推广到适合于所有坐标即有

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h, \Delta y \cdot \Delta p_y \geq h, \Delta z \cdot \Delta p_z \geq h.$$

不确定关系告诉我们,动量和位置的不确定度的乘积在数值上近似等于普朗克恒量,这与经典理论很不同.不可能同时确定微观粒子的位置与动量,也就是说,不可能在粒子位置确定 ($\Delta x = 0$) 的情况下赋予粒子确定的动量 ($\Delta p = 0$),假如有一

个波,它的波长或动量确定 ($\Delta p = 0$),则它的位置是完全不确定的 ($\Delta x = \infty$),因为粒子位于空间不同点的几率均等,如果粒子位置局域化 ($\Delta x = 0$),那么各粒子对应的是一切可能的波长或动量 ($\Delta p = \infty$).

下面我们运用不确定关系解决两个具体问题.

例 8 电子枪发射的电子束,打到荧光屏上形成一个亮点,亮点的大小和限制电子束的小孔直径有关.小孔较大,亮点自然也大,小孔很小,又会出现电子衍射现象,亮点也会变大.现设电子束的能量为 150 eV,屏与孔相距 1 m. 试近似求出使屏上光点最小的孔的直径.

分析与解 从小孔中射出的电子束,当孔的直径比电子的德布罗意波长大的多时,可认为电子束是直线前行的,这时,屏上的亮斑与小孔直径一样大.(不考虑电子间斥力造成的离散)

当小孔的直径小到与电子的波长可比拟时,通过小孔的电子将发生衍射.在屏离孔很远的情况下,可认为电子入射速度与孔平面垂直,如图 25-19 所示.根据不确定关系: $\Delta y \cdot \Delta p_y = h$,具

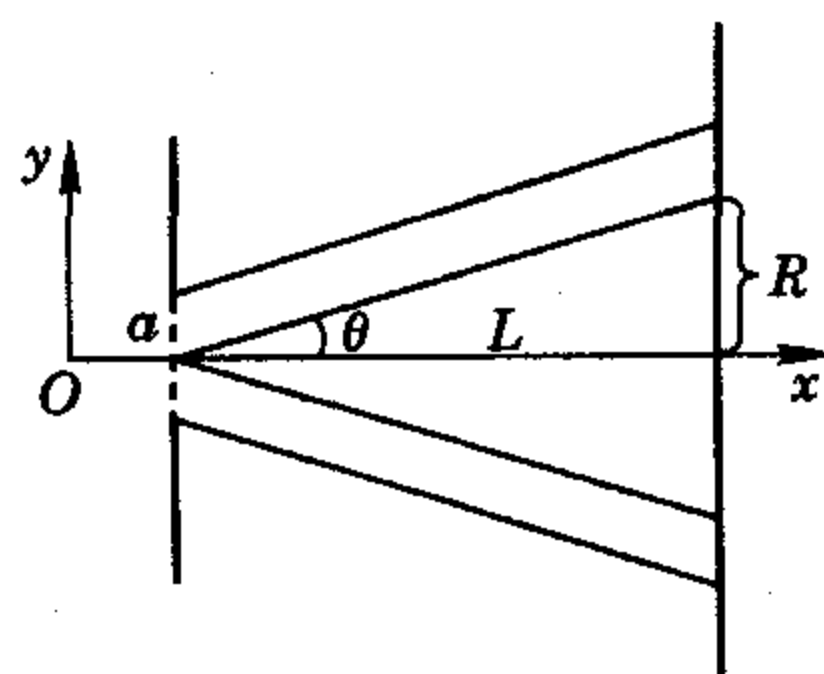


图 25-19

体到本问题, $\Delta y = a$, $\sin \theta \approx \frac{R}{L}$, θ 为电子衍射角.则 $a \cdot \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{R}{L} = h$,

$R = \frac{L\lambda}{a}$,由图 25-19 可得,亮点的直径可表示为 $D = a + 2 \frac{L\lambda}{a}$.

则当 $a = 2 \frac{L\lambda}{a}$, $a = \sqrt{2L\lambda}$ 时, D 有最大值

$$D_{\max} = 2 \sqrt{2L\lambda}.$$

对于题给 $E_k = 150$ eV 的能量,不考虑相对论效应,可得电

子波长 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$, 则

$$D_{\max} = 2 \sqrt{\frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 150 \times 1.6 \times 10^{-19}}}} \text{ m} \approx 28 \text{ } \mu\text{m}.$$

例 9 放射性同位素 ^{108}A 的衰变时间为 2.4 min, 试求它的能量的不确定性.

分析与解 海森伯的不确定关系不仅将具有波粒二象性的量子系统的位置与动量联系起来,而且也把系统的其他运动参量加以联系,其中最有用的是能量的不确定性 ΔE 与时间的不确定性 Δt 之间的联系,能量与时间的不确定关系是

$$\Delta E \cdot \Delta t = h.$$

这个关系描述了当系统在很长时间间隔内处于一种确定的状态,那么系统的能量就可以高精度地确定;假如系统只有很短的时间间隔内处于确定状态,由它的能量就成为不确定的了.考察微观粒子从一个状态跃迁到另一个状态时,通常使用这个关系式.

本题中的 ^{108}A 粒子发生衰变,半衰期即状态变化的时间为 2.4 min,那么确定这个粒子能量的最大精确度为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{h}{\tau} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2.4 \times 60} \text{ J} \\ &= 4.6 \times 10^{-36} \text{ J}. \end{aligned}$$



小试身手

1. 为了减少玻璃表面反射光的成分,在玻璃表面上涂一层薄膜,薄膜的折射率小于玻璃的折射率.当入射光包含波长 $\lambda_1=700\text{ nm}$ 和 $\lambda_2=420\text{ nm}$ 情况下,为使这两种波长的反射光最大限度地减弱,在玻璃表面涂有折射率为 $n=4/3$ 的薄膜.试求这种薄膜的最小厚度.

2. 一束白光以 $i=30^\circ$ 角射在肥皂膜上,反射光中波长为 $\lambda_0=500\text{ nm}$ 的绿光显得特别明亮,问肥皂膜的最小厚度为多少?从垂直方向观察,薄膜呈什么颜色?肥皂薄膜液体的折射率 $n=1.33$.

3. 在杨氏干涉实验中,波长为 600 nm 的单色光垂直射到两个非常靠近的狭缝.光屏离双缝的距离为 1.00 m ,在光屏上中心峰值与第 10 条亮线的距离是 300 mm .试求

(1) 狭缝的宽度;

(2) 将一厚度为 0.02 mm 的透明薄膜放到其中一个狭缝上时,光屏上的中心峰值移动了 30 mm .试求薄膜的折射率.

4. 如图 25-20 所示,一个会聚透镜的直径 $D=5\text{ cm}$,焦距 $f=50\text{ cm}$.沿其直径分成两半,再分开相距 $d=5\text{ mm}$,点光源 S 到透镜距离 $u=1\text{ m}$.作图并计算离透镜多远处可以观察到干涉条纹?(透镜两半之间空隙被遮盖)

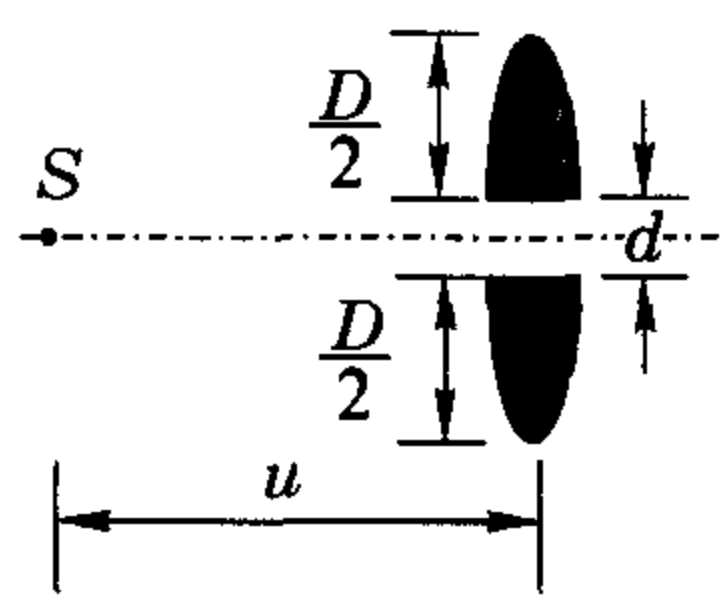


图 25-20

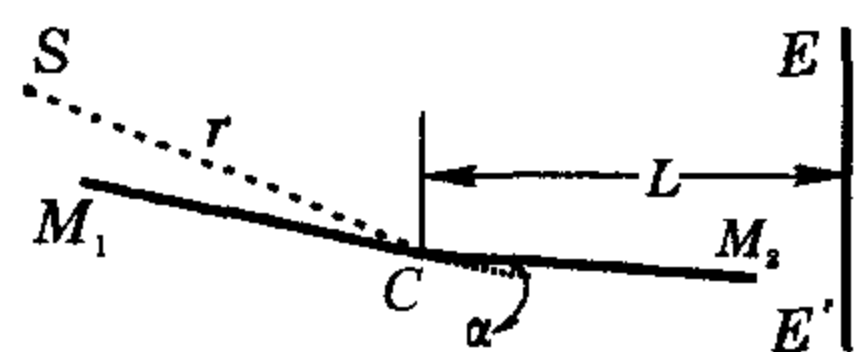


图 25-21

5. 如图 25-21 所示是双镜干涉实验的装置.设双镜的夹角 $\alpha=10^{-3}\text{ rad}$,单色光源 S 与两镜相交处 C 的距离为 $r=0.50\text{ m}$,单色光波长 $\lambda=500\text{ nm}$,从两镜相交处到屏幕 EE' 距离 $L=1.50\text{ m}$.求(1)屏幕上两相邻条纹之间的距离;(2)在屏幕上最多可看到多少条明条纹?

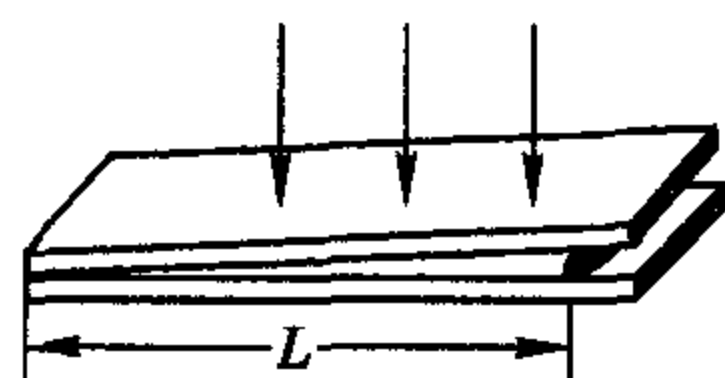


图 25-22

6. 为了测量金属丝的直径,把金属丝夹在两块平玻璃板之间,使空气层形成劈尖,如图 25-22 所示.如用单色光垂直照射,就得到等厚干涉条纹.测出干涉条纹间的距离,就可以算出金属丝的直径.某次的测量结果为:单色光波长 $\lambda=5893\text{ \AA}$,金属丝与劈尖顶点间的距离 $L=28.880\text{ mm}$,30 条明条纹间的距离为 4.295 mm ,求金属丝的直径 D .

7. 如图 25-23 所示,在一块平玻璃片 B 上,放一曲率半径为 R 的平凸透镜 A ,在 A 、 B 之间形成空气薄层,当平行光垂直射向平凸透镜时,可以观察到透镜表面出现以接触点 O 为中心的许多同心环,称为牛顿环.

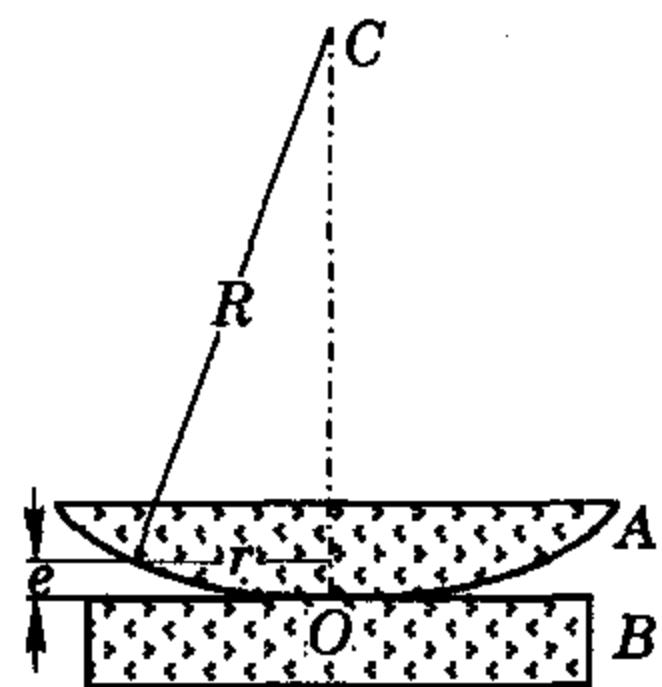


图 25-23

(1) 确定形成牛顿环的明、暗环处空气层厚度 e 适合的条件,入射光波长为 λ ;

(2) 确定明、暗环的半径 r ;

(3) 在接触处是明纹还是暗纹?

8. 如图 25-24 所示,薄膜的两个界面 OM 和 ON 构成尖劈,尖劈的夹角 θ 较小,光源 S 离劈较近.证明光源 S 发出的光经界面 OM 和 ON 反射后产生的干涉条纹是以 O 为圆心、以 r 为半径的圆.

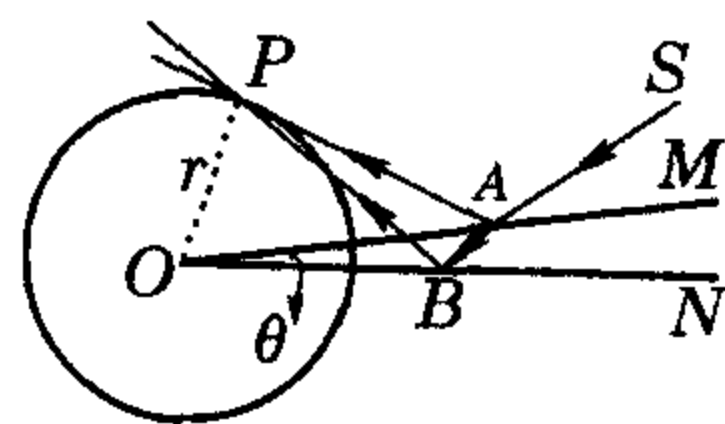


图 25-24

9. 在迎面驶来的汽车上,两盏前灯相距 120 cm ,试问汽车离人多远的地方,眼睛才可以分辨这两盏前灯?假设夜间人眼瞳孔直径为 5.0 mm ,入射光波长 $\lambda=550\text{ nm}$,并假设这个距离只取决于眼睛的圆形瞳孔处的衍射效应.

10. 如图 25-25 所示是可把入射的自然光分成两束传播方向互相垂直的偏振光的偏振分束器结构,两个等边直角玻璃棱镜斜面对斜面,之间夹一多层膜,多层膜是由高折射率的材料硫化锌与低折射率材料冰晶石交替镀制而成,设高折射率为 n_H ,低折射率为 n_L ,自然光以 45° 角入射到多层膜上.(1)为使反射光为完全偏振光,玻璃棱镜的折射率 n 应取多少?(2)为使透射光的偏振度最大,高折射率层的厚度 t_H 与低折射率层的厚度 t_L 的最小值是多少?(3)若两材料折射率依次为 $n_H=2.38$ 与 $n_L=1.25$.对于波长 $\lambda=514.5\text{ nm}$ 的激光以 45° 角入射到多层膜上,试求 t_H 、 t_L 的最小值.

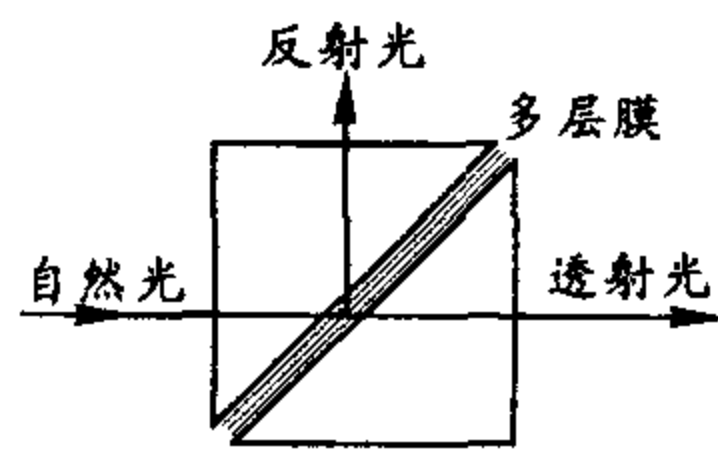


图 25-25

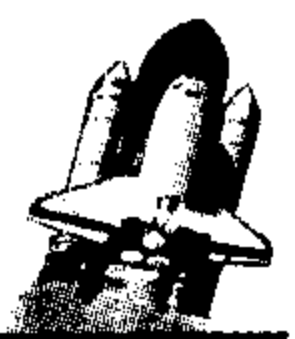
11. 光照射到物体上将产生光压,设想利用太阳的光压将物体送到太阳系以外的空间去.当然这只有当太阳对物体的光压超过了太阳对物体的引力才行.现如果用一种密度为 1 g/cm^3 的物质作成的平板,它的刚性足够大,则它将能够被太阳光的压力送出太阳系.试估算这种平板的厚度应小于多少?取大气层外太阳的能量密度为 $1.4 \times 10^3\text{ J/m}^2 \cdot \text{s}$,日地距离为 $1.5 \times 10^{11}\text{ m}$.

12. 在康普顿散射实验中,静止的电子被能量等于一个电子静止质量对应能量的光子轰击.对于散射的光子和反冲的电子有相同大小的动量的情况,确定它们之间的夹角,并求反冲电子的速度.

13. 在大气和有生命的植物中,大约每 10^{12} 个碳原子中有一个 ^{14}C ,其原子半衰期为 τ ,其余均为稳定的 ^{12}C 原子.考古中,可通过测定古生物中 ^{14}C 的含量来推算生物的年代.如在实验室中测得在 m 克的碳中,在 t 年时间内有 n 个 ^{14}C 原子发生衰变,设此古生物是在 T 年前死亡的,试列出能求出 T 的式子.

14. 用由放射源 Po 发射的 α 粒子击中铍 (^9Be) 核后,发生核反应,放出一种新的粒子和另一种生成物.这些新粒子组成的粒子流有以下特点:(1)在任意方向磁场中都不偏转;(2)让它与含氢物质中的静止氢核相碰撞,可以把氢核击出,被击出的氢核能量为 $E_H=4.7\text{ MeV}$,让它与含氮物质中的静止氮核相碰撞,也可以把氮核击出,被击出的氮核的能量 $E_N=1.2\text{ MeV}$.碰撞可视为对心完全弹性碰撞,且已知氢核与氮核的质量比为 $1:14$.试根据以上数据求出新粒子的质量与氢核质量之比,对此新粒子是什么粒子作出判断,并写出 α 粒子轰击 Be 的核反应方程式.

15. 某一星体发射出来的光谱很像氢原子的巴尔末线系,经仔细分析,确定为锂离子 Li^{++} 产生的.试求:锂离子的这个



线系的第一条谱线和极限谱线的波长。

16. Pb原子核内有82个质子,核半径为7.1 fm(1 fm = 10⁻¹⁵ m). Pb原子核与81个电子及一个μ⁻子构成的原子称为Pb的μ介子原子. 假设所有电子均在原子核外,μ⁻子的基态轨道在原子核之内,第一激发态轨道在所有电子轨道之内,但在原子核外,实验测得μ⁻子从第一激发态跃迁到基态所发出的光子能量为6.0 MeV. 试估算基态的轨道半径。

17. 如图25-26所示,将炉子中的一群原子加热到某一温度T,并让这些原子沿水平方向通过炉子侧面上一个直径为D的小孔射出(D的尺寸与原子尺度相当),从而形成一束原子束. 当这束原子行经水平长度为L的距离时,估算这束原子束的直径. 设原子的质量为M。

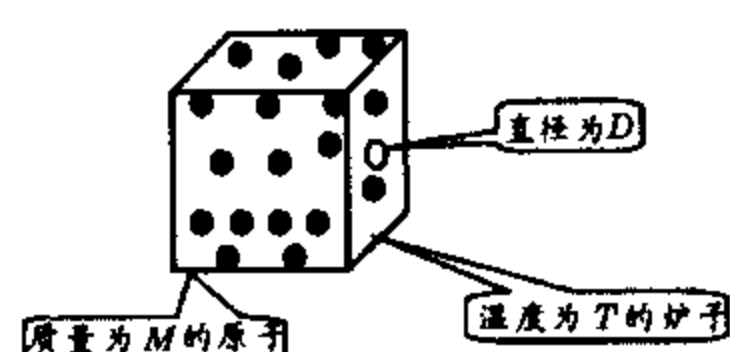


图 25-26

18. 某些基本粒子的静止质量对应的能量具有不确定性约200 MeV,试求这些粒子的寿命。

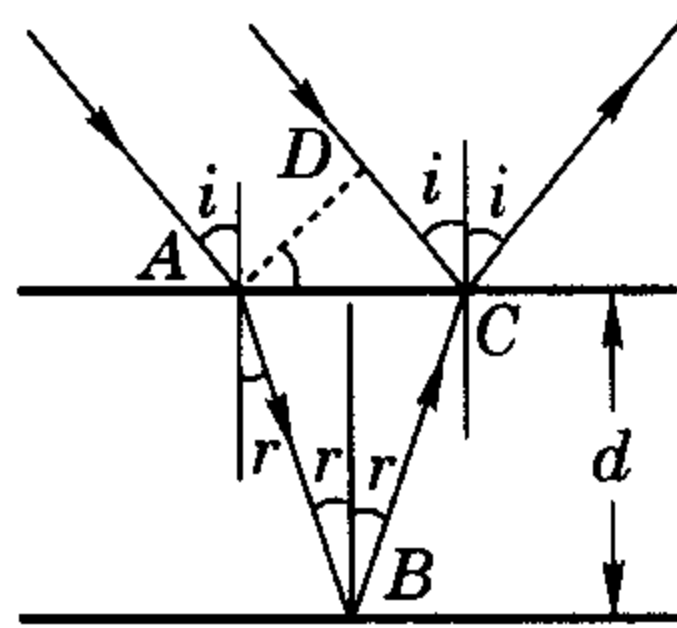
19. (1)设子弹的质量为0.01 kg,枪口的直径为0.5 cm,试求子弹射出枪口的横向速度的不确定量;(2)实验测定原子核直径数量级为10⁻¹⁴ m,估算电子若被束缚在原子核内时的动能,从而判断原子核由质子和电子组成是否可能。

20. 想象一个“经典的电子”为一个小圆球. 若它的静电能不大于总的静止能量mc²,它的最小半径为多少? 若它的角动量为h/4π,它的角速度为多少? 如果总的电子的静止能量由静电场提供,那么对应地,它的“赤道速度”要达到多少?

参考答案

1. 对波长λ₁=700 nm的光,增透膜厚度应满足 2dn · 2π/λ₁ = (2k-1)π (k=1,2,3...), 对波长λ₂=420 nm的光,增透膜厚度应满足 2dn · 2π/λ₂ = (2k'-1)π (k'=1,2,3...), 为使增透膜厚度同时满足两光,有 6k'+2=10k, 当k'取3、k取2时,薄膜厚度最小且玻璃表面反射光最大程度地减少,此时膜的厚度 d=3 × 700 / (4 × 4/3) nm = 393.75 nm.

2. 如图答25-1所示,绿光特别明亮,是因为入射到A点的光束,一部分被反射,另一部分折射入膜内,在下界面B处被反射并从上界面C点射出,光线DC也在C处反射,两光叠加加强故而观察者感觉特别明亮. 膜厚度须满足两束光的相差为2kπ. 即



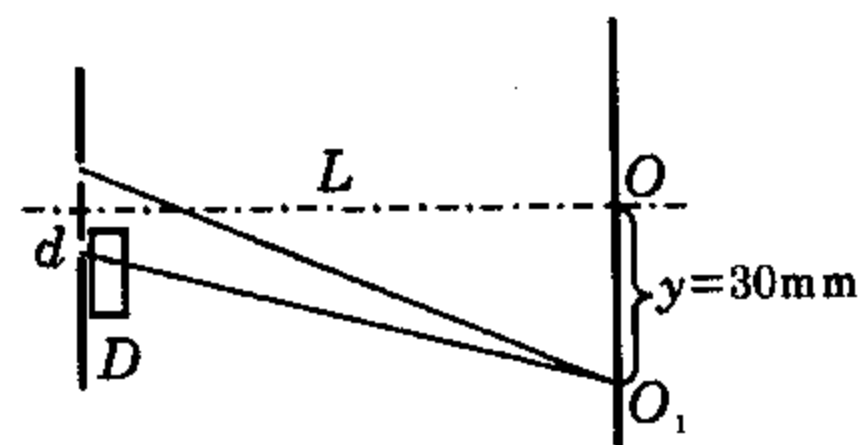
图答 25-1

2n * d / cos r * 2π / λ - 2d tan r * sin i * 2π / λ - π = 2kπ, 而 n = sin i / sin r, 则有 2n * d / sqrt(1 - (sin i / n)^2) * 2π / λ - 2d * sin i / (n * sqrt(1 - (sin i / n)^2)) * 2π / λ - π = 2kπ, d(4n - 4 * sin^2 i / n) = (2k + 1)λ * sqrt(1 - (sin i / n)^2), d = (2k + 1)λ / (4 * sqrt(n^2 - sin^2 i)), 要d为最小,k取0,故 d = λ / (4 * sqrt(n^2 - sin^2 i)) = 500 / (4 * sqrt(1.33^2 - 0.25)) nm

≈ 0.10 μm.

对垂直入射光,在k=0时,极大加强的波满足 2nd = λ'/2 ⇒ λ' = 4nd = 4 × 1.33 × 0.10 μm ≈ 540 nm, 这是黄绿色光,故膜的颜色呈黄绿色。

3. (1)狭缝的宽度设为d,由 x/10 = L/d * λ 易得 d = 10Lλ/x = (10 × 1.00 / (300 × 10^-3)) × 600 × 10^-9 mm = 0.02 mm;



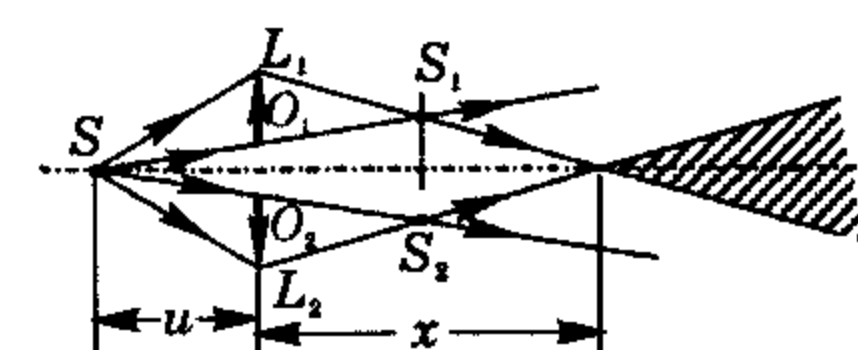
图答 25-2

(2)当将一厚度为0.02 mm的透明薄膜放到其中一个狭缝上时,如图答25-2所示,由于透明薄膜的插入,使经过它的光线光程增大,从而使中央亮纹位置移动了,中央亮纹位置是两缝光到达时相差为零的位置,即有

sqrt(L^2 + (y + d/2)^2) = sqrt(L^2 + (y - d/2)^2) - D * sqrt(L^2 + (y - d/2)^2) / L + n * sqrt(L^2 + (y - d/2)^2) / L, sqrt(L^2 + (y + d/2)^2) = sqrt(L^2 + (y - d/2)^2) * [1 + D(n-1)/L], n = [sqrt(L^2 + (y + d/2)^2) / sqrt(L^2 + (y - d/2)^2) - 1] * L / D + 1,

代入数据,得 n ≈ 1.03.

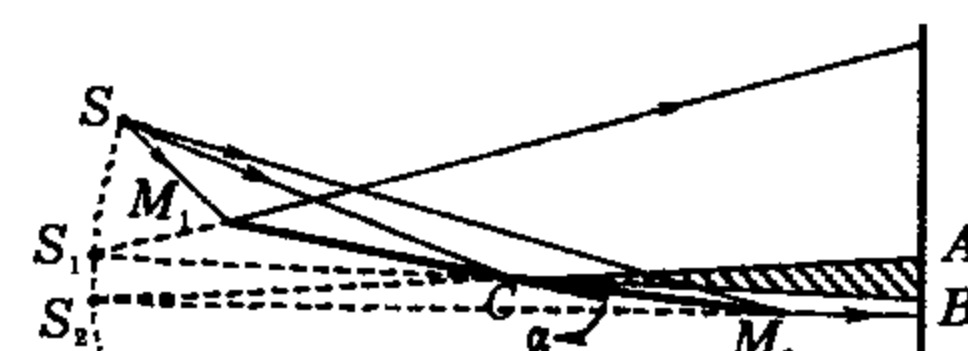
4. 如图答25-3所示,会聚透镜沿其直径分成两半,成为光心各为O₁、O₂的两面透镜,使光源S的光分别会聚于S₁、S₂,两像等光程,故成为相干光源,在图中画阴影线部分为两光叠加相干区域,设其起始点距透镜x,由透镜成像公式:



图答 25-3

1/f = 1/u + 1/v 得 S₁、S₂ 距透镜 v = u = 1 m, 则 S₁S₂ = 10 mm, 由图中所示几何关系得 (x-v)/x = S₁S₂/D+d, 得 x = 11/9 m ≈ 1.22 m.

5. (1)从光源发出的光经平面镜M₁、M₂反射后,产生明条纹的条件是 Δx = (L+r) / (2α) * λ (详见专题25), 代入数据有 Δx = (1.50 + 0.50) / (2 × 0.50 × 10^-3) × 500 × 10^-9 m ≈ 1 mm; (2)由图答25-4可知干涉区AB长度约为 L · 2α = 1.50 × 2 × 10^-3 m = 3 mm, 可知屏上AB中间有一明纹,上、下两边各有一明纹,共出现三条明纹。



图答 25-4

6. 劈尖形空气层如图答25-5所示,距劈尖x处空气层厚度为y,由几何关系得 y/x = D/L, 而出现明条纹的空气层厚度满足

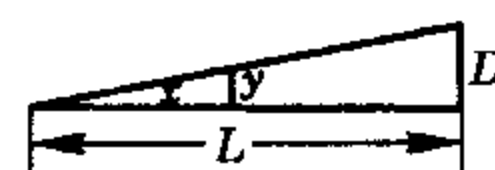
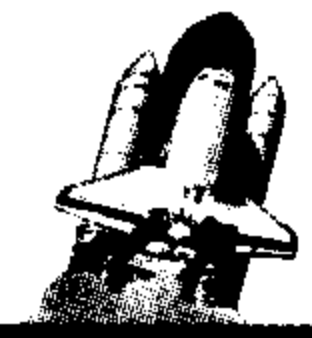


图 25-5



$2y = \frac{\lambda}{2}(2k-1)k=1,2,3\cdots$ (详见专题 25), 得相邻两明纹间距

$\Delta x = \frac{L\lambda}{2D}$, 由题给条件, $\Delta x = \frac{4.295}{29}$ mm, 故 $D = \frac{L\lambda}{2\Delta x} =$

$$\frac{28.880 \times 5.893 \times 10^{-7}}{2 \times 4.295/29} \text{ mm} \approx 57.5 \mu\text{m}.$$

7. 牛顿环的形成也是薄膜干涉, 中心对称的曲边楔形空气层在不同厚度处造成上、下两面反射光的不同相位差, 注意平面反射中的半波损失, (1) 形成牛顿环的明、暗环处, 空气层厚度 e 应满足的条件为

$$\text{明环 } 2e = (2k-1)\frac{\lambda}{2}, k=1,2,3\cdots$$

$$\text{暗环 } 2e = k\lambda, k=0,1,2\cdots$$

(2) 明、暗环的半径 r 可由图答 25-6 所示几何关系得: $e = R -$

$\sqrt{R^2 - r^2}$, 则

$$\text{明环半径 } r = \sqrt{(2k-1)R \cdot \frac{\lambda}{2}}, k=1,2,3\cdots$$

$$\text{暗环半径 } r = \sqrt{kR \cdot \lambda}, k=0,1,2\cdots$$

(3) 在接触处是暗纹。

8. 如图答 25-7 所示, 光源 S 发出的某一束光在界面 OM 上的 A 点和界面 ON 上的 B 点反射后叠加于 P 点, P 点关于界面 OM 、界面 ON 的对称点依次为 P_1 、 P_2 , 由反射定律知, P_1 、 P_2 在入射线 SAB 的延长线上, $PA = P_1A$, $PB = P_2B$, 到达 P 的两反射光之

光程差 $\Delta l = PB + AB - PA = P_2B + AB - P_1A = P_1P_2$, 由于对称, $OP = OP_1 = OP_2$, 即 P 、 P_1 、 P_2 共圆, $\angle P_1OP_2 = 2\angle P_1PP_2 = 2\theta$, 则 $\Delta l = P_1P_2 = 2r\sin\theta$, 干涉

条纹满足 $2r\sin\theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ($k=0,1,2,\cdots$) 时为明条纹, 则产生的明条纹是以 O 为圆心、以 $r = (2k+1)\frac{\lambda}{4\sin\theta}$ ($k=0,$

$1,2,\cdots$) 为半径的一系列同心圆; 同理, 产生的暗条纹是以 O 为

圆心、以 $r = \frac{k\lambda}{2\sin\theta}$ ($k=1,2,3,\cdots$) 为半径的一系列同心圆。

9. 根据瑞利准则, 人眼圆形瞳孔的分辨角 $\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{d}$, 当汽车离人 L 距离时 $\delta\varphi = \frac{D}{L}$, 则

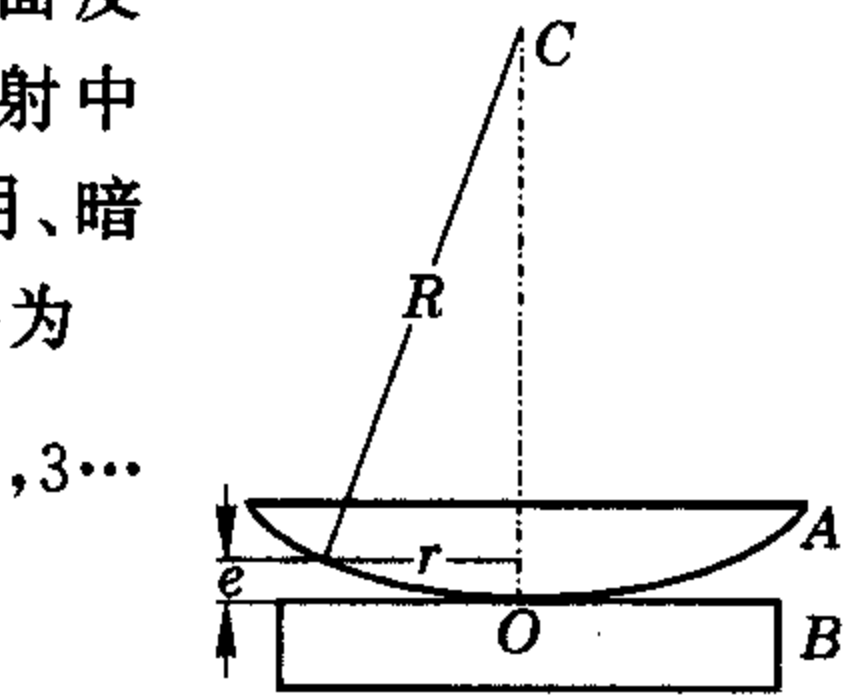
$$L = \frac{Dd}{1.22\lambda} = \frac{1.20 \times 5 \times 10^{-3}}{1.22 \times 550 \times 10^{-9}} \text{ m} = 8942 \text{ m}.$$

10. (1) 在多层膜中连续折射, 由连续折射规律, 有 $n\sin 45^\circ = n_H \sin \theta_H = n_L \sin \theta_L$, 某相邻两层的光路如图答 25-8 所示, 要使反射光为完全偏振光, 应有

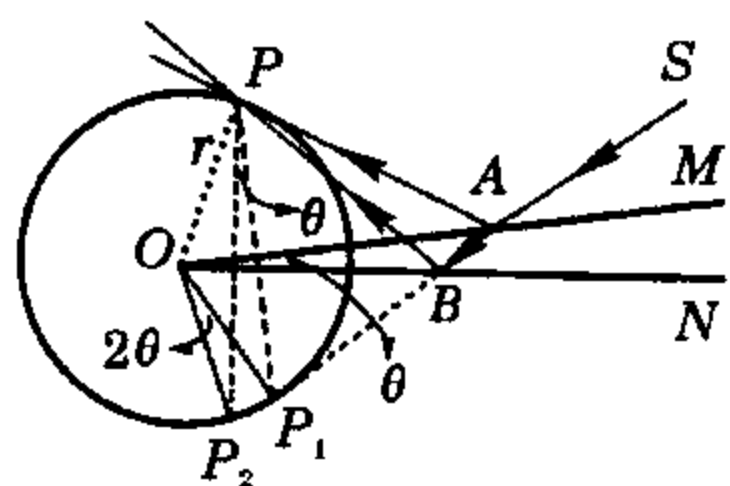
$$\tan \theta_H = \frac{n_L}{n_H},$$

$$\text{则 } n = \frac{\sqrt{2}n_L \cdot n_H}{\sqrt{n_H^2 + n_L^2}};$$

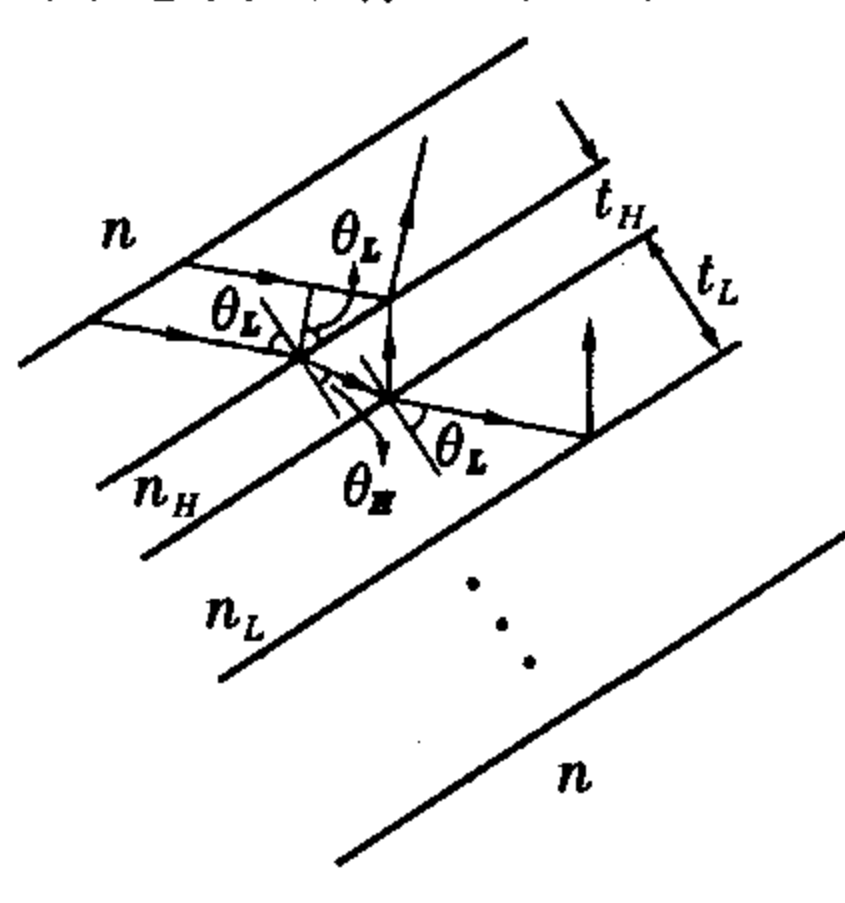
(2) 光入射到第一层介质时, 因 45° 非此界面布儒斯特角,



图答 25-6



图答 25-7



图答 25-8

故反射光是部分偏振光, 其他各界面上的反射光都是完全偏振光, 振动方向均垂直于入射面, 经多次折射后透射到另一直角玻璃棱镜的光也接近完全偏振光, 振动方向在入射面内, 为使透射光的偏振度最大, 应增加垂直方向光的反射, 即利用干涉原理, 使两相邻界面反射光叠加加强,

故应满足 $n_H \frac{2t_H}{\cos \theta_H} - n_L 2t_H \tan \theta_H \cdot \sin \theta_L - \frac{\lambda}{2} = k_1 \lambda$ (对高折射率层), 将 $n_L \sin \theta_L = n_H \sin \theta_H$ 代入此式中整理得

$$2t_H n_H \cos \theta_H - \frac{\lambda}{2} = k_1 \lambda; \text{ 同理 } 2n_L t_L \cos \theta_L + \frac{\lambda}{2} = k_2 \lambda \text{ (对低折射率层);}$$

最小厚度取 $k_1 = 0, k_2 = 1$, 则 $t_H = \frac{\lambda}{4n_H \cos \theta_H}, t_L =$

$$\frac{\lambda}{4n_L \cos \theta_L}, \text{ 由 (1) 中可得 } \cos \theta_H = \sqrt{1 - \left(\frac{n \sin 45^\circ}{n_H}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{2n_H^2}}; \cos \theta_L = \sqrt{1 - \left(\frac{n \sin 45^\circ}{n_L}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{2n_L^2}}, \text{ 于是有 } t_H =$$

$$\frac{\lambda \sqrt{2n_H^2}}{4n_H \sqrt{2n_H^2 - n^2}}, t_L = \frac{\lambda \sqrt{2n_L^2}}{4n_L \sqrt{2n_L^2 - n^2}}; \text{ (3) 代入数据得 } n =$$

$$1.57, t_H = 6.10 \times 10^{-8} \text{ m}, t_L = 2.21 \times 10^{-8} \text{ m}.$$

11. 设平板对太阳的反射系数为 ϵ , 大气层外太阳的能量密度为 E , 单位时间单位面积上入射光子数为 $\frac{E}{h\nu}$, 其中 $\frac{\epsilon E}{h\nu}$ 被反

射, 由动量定理, 光压 $p = \frac{E}{h\nu} (\epsilon + 1) \cdot \frac{h}{\lambda} = (\epsilon + 1) \frac{E}{c}$, c 为光速, 太阳对物体的引力 $F = G \frac{Mm}{R_0^2} = \frac{GM}{R_0^2} \rho S d$, 式中 $\frac{GM}{R_0^2}$ 为地球绕

日加速度 $\frac{GM}{R_0^2} = \omega^2 R_0 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} R_0$, 当太阳对物体的光压大于太阳

对物体的引力即有 $\frac{4\pi^2}{T_0^2} R_0 \rho d < (\epsilon + 1) \frac{E}{c}$ 时, $d < \frac{2ET_0^2}{4\pi^2 c \rho R_0}$, 即平

$$\text{板厚度须 } d < \frac{2 \times 1.4 \times 10^3 \times (365 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2 \cdot 1.5 \times 10^{11} \times 3 \times 10^8 \times 10^3} \text{ m} \approx 1.6 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

12. 电子静质量设为 m_0 , 由质能关系, 光子能量 $h\nu_0 =$

$m_0 c^2$, 入射光子的动量 $p_0 = \frac{h\nu_0}{c} = m_0 c$, 散射

的光子动量大小 $p = mv$, 由图答 25-9 所示

动量守恒的矢量关系得 $2mv \cos \theta = m_0 c$; 根

据能量守恒关系有 $2m_0 c^2 = h\nu + mc^2 = mv c$

$+ mc^2$, 又根据狭义相对论, 反冲电子质量与速度关系为 $m =$

$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, 由以上三式得反冲电子速度 $v = \frac{3}{5} c$, 光子和反冲

的电子之间的夹角 $2\theta = 2 \arccos \frac{2}{3} \approx 96.4^\circ$.

13. 设实验室所测 m 克碳中, ^{14}C 原总数 N , 由衰变公式 $n =$

$$N \left[1 - \frac{1}{2^{\frac{t}{\tau}}} \right], N = \frac{2^{\frac{t}{\tau}} n}{2^{\frac{t}{\tau}} - 1}; \text{ 活体的 } m \text{ 克碳中, } ^{14}\text{C} \text{ 总数 } N_0, N_0 =$$

$$\frac{m}{M} \times N_A \times 10^{-12}, \text{ 古生物死亡 } T \text{ 年内由 } N_0 \text{ 衰变为 } N, \text{ 则 } N =$$

$$\frac{N_0}{2^{\frac{T}{\tau}}}, \text{ 即 } \frac{2^{\frac{T}{\tau}} n}{2^{\frac{t}{\tau}} - 1} = \frac{\frac{m}{M} \times N_A \times 10^{-12}}{2^{\frac{T}{\tau}}}, T = \tau \log_2$$

$$\frac{\frac{m}{M} \times N_A \times 10^{-12} [2^{\frac{t}{\tau}} - 1]}{2^{\frac{t}{\tau}} n} = \tau \log_2 [1 - 2^{-\frac{t}{\tau}}] \frac{m}{2n} \times 10^{11}.$$



14. 新的粒子在任意方向磁场中都不偏转,说明是中性粒子,现设质量为 m ,在与含氢物质中的静止氢核对心弹性碰撞中,由动量守恒得 $v_H = \frac{2m}{m+m_H}v_0 = \sqrt{\frac{2E_H}{m_H}}$,在与含氮物质中的静止氮核相碰撞中亦由动量守恒得 $v_N = \frac{2m}{m+14m_H}v_0 = \sqrt{\frac{2E}{14m_H}}$,由上述两式得 $\frac{m+14m_H}{m+m_H} = \sqrt{\frac{14E_H}{E_N}}$, $m = 1.03m_H$,该中性粒子质量与质子差不多,这就是中子, α 粒子轰击 ${}^9_4\text{Be}$ 的核反应方程为 ${}^9_4\text{Be} + \frac{1}{2}{}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$.

15. 根据玻尔的原子模型与对氢光谱的解释,氢原子巴尔末线系光谱线是量子数大于2的能级向量子数为2的能级跃迁时产生的谱线系,对氢原子,可能轨道半径 $r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2 k}$,能级 $E_1 = -\frac{ke^2}{2r_1}$, $E_n = \frac{E_1}{n^2}$,巴尔末线系光谱线波长满足 $\frac{hc}{\lambda_{H\alpha}} = E_1 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \right]$, $n=3,4,5,\dots$;对类氢锂离子,基态轨道半径 $r_1' = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2 3k} = \frac{r_1}{3}$,故基态能量 $E_1' = -\frac{k3e^2}{2r_1'} = 9E_1$,则锂离子谱线波长满足 $\frac{hc}{\lambda'} = E_1' \left[\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{m^2} \right] = 9E_1 \left[\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{m^2} \right]$,当 m 取6, n' 取9,12,15,18 \dots 时,谱线波长与氢光谱巴尔末线系的 $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta, \dots$ 完全相同,故锂离子的这个线系的第一条谱线波长应由 $\frac{hc}{\lambda_1} = 9E_1 \left[\frac{1}{7^2} - \frac{1}{6^2} \right]$ 得 $\lambda_1 = \frac{hc}{9E_1 \left[\frac{1}{7^2} - \frac{1}{6^2} \right]} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.0 \times 10^8 \times 49 \times 4}{13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 13} \text{ m} \approx 1\ 378 \text{ nm}$,在红外区;线系的谱线的极限波长 $\lambda_m = \frac{4hc}{E_1} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.0 \times 10^8 \times 4}{13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} \approx 367 \text{ nm}$.

16. 类氢原子可能轨道半径公式 $r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi m e^2 Zk}$,能级公式 $E_n = -2\pi^2 \frac{m e^4 Z^2 k^2}{n^2 h^2}$ 对 Pb 的 μ 介子原子的第一激发态适用,取 $Z=82, n=2, \mu^-$ 子质量 $m_\mu = 207m_e$,氢原子基态能量 $E_{10} = -2\pi^2 \frac{m_e e^4 k^2}{h^2} = -13.6 \text{ eV}$,则 Pb 的 μ 介子原子第一激发态能量为 $E_2 = -2\pi^2 \frac{207m_e e^4 82^2 k^2}{2^2 h^2} = -13.6 \times \frac{207 \times 82^2}{2^2} \text{ eV} \approx -4.73 \text{ MeV}$;根据实验结果, μ^- 子从第一激发态跃迁到基态所发出的光子能量为 6.0 MeV ,则基态能量为 $E_1 = -(6.0 + 4.73) \text{ MeV}$,基态能量是由 μ^- 子在基态轨道上的动能与电势能构成,由于基态轨道在核内,电场强度和电势能要按均匀带电球的规律来计算:设基态轨道半径为 r_1 ,核所带正电 $Ze = 82e$ 均匀分布在半径为 r 的球体上, r 即 Pb 原子核半径,则基态轨道处场强为 $\frac{k82e}{r_1^2} \cdot \frac{r_1^3}{r^3}$,由 $\frac{k82e}{r_1^2} \cdot \frac{r_1^3}{r^3} \cdot e = m \frac{v_1^2}{r_1}$ 得 μ^- 子动能大小为 $\frac{k82e^2 r_1^2}{2r^3}$;又因 μ^- 子在球内不同半径 r_x 处所受电场力为 $\frac{k82e^2}{r^3} \cdot r_x$,则 μ^- 子在基态轨道处的电势能由功能关系可得 $\frac{k82e^2}{r^3} \cdot \frac{r+r_1}{2} \cdot (r-r_1) = -\frac{k82e^2}{r} - E_{P1}, E_{P1} = \frac{k82e^2}{2r} \left[3 - \frac{r_1^2}{r^2} \right]$,则基态

能量为

$$E_1 = -\frac{k82e^2}{2r} \left[3 - \frac{r_1^2}{r^2} \right] + \frac{k82e^2 r_1^2}{2r^3} \\ = \frac{k82e^2}{2r} \left[\frac{2r_1^2}{r^2} - 3 \right],$$

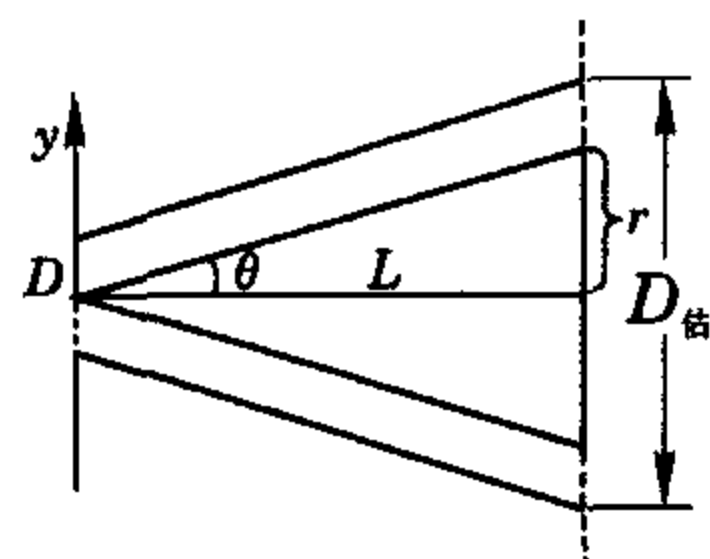
其中

$$\frac{k82e^2}{2r} = 8.32 \text{ MeV},$$

则

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[3 - \frac{10.73}{8.32} \right]} r \approx 6.6 \text{ fm}.$$

17. 原子的平均动能 $E = \frac{3}{2} kT$,动量 $p = \sqrt{2ME} = \sqrt{3kMT}$,当小孔的直径 D 与原子的波长可比拟时,通过小孔的原子将发生衍射.在离孔 L 距离处原子束直径估计为 $D_{\text{衍}}$,如图答 25-10 所示, θ 为原子衍射角, $r \approx L \sin \theta = L \frac{p_y}{p}$,根据不确定关系: $D \cdot p_y = h$,可得 $r \approx L \frac{h}{D \sqrt{3kMT}}$,那么,在离孔 L 距离处原子束直径为 $2r + D$,即 $D_{\text{衍}} = D + \frac{2h}{D \sqrt{3kMT}}$.



图答 25-10

18. 由能量与时间的不确定关系 $\Delta E \cdot \Delta t = h$, $\Delta t = \frac{h}{\Delta E} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{200 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ s} \approx 2.1 \times 10^{-23} \text{ s}$.

19. (1)子弹出枪口位置的不确定量为 $D = 0.5 \text{ cm}$,由不确定关系 $D \cdot \Delta m v_x = h$ 得 $\Delta v_x = \frac{h}{D \cdot m} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.005 \times 0.001} \text{ m/s} = 1.33 \times 10^{-28} \text{ m/s}$ (2)电子在原子核中位置的不确定量 $\Delta r = 10^{-14} \text{ m}$,由更精确的不确定关系得 $\Delta p \geq \frac{h}{4\pi \Delta r} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 10^{-14}} \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 0.53 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$,则电子动量 $p \geq 0.53 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$,故电子动能 $E_k = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{(0.53 \times 10^{-20})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 96.5 \text{ MeV}$,此动能下电子速度极大,若计入相对论效应,电子动能数量级不变,可见电子具有巨大的动能,是不可能被禁锢在原子核内的.

20. 将“经典的电子”视作球形电容,其电容 $C = \frac{r}{k}$, r 为电子半径, k 为静电力恒量,则“经典的电子”具有的静电能为 $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{C} = \frac{ke^2}{2r}$,由题意,应有 $\frac{ke^2}{2r} \leq mc^2$,即 $r \geq \frac{ke^2}{2mc^2} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (3.0 \times 10^8)^2} \text{ m} \approx 1.4 \times 10^{-15} \text{ m}$;经典电子被视作质量均匀分布的、以角速度 ω 绕一直径匀速转动的刚体,则其角动量为 $L = J\omega = \frac{2}{3} m r^2 \omega$,由题意 $\frac{2}{3} m r^2 \omega = \frac{h}{4\pi}$,而“赤道速度”即 $v = r\omega = \frac{3h}{8\pi m r} < \frac{3hc}{4\pi k e^2} \approx \frac{3 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{36\pi \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2} \text{ c} \approx 2.6c$,这已远远超过光速,说明经典电子模型是不符合实际的,必须被扬弃.



专题 27 微元法简说

沈 晨

(浙江省宁波效实中学 315010)

教你一手

更妙地解决高层物理问题时常用到的微元法,在前面各专题中,读者一定已感觉良多.在这个专题里,我们将向读者系统而简约地介绍微元法的思想核心、方法特征,展示微元法解决物理问题的范围、操作与技巧,希望通过本专题的阐述,令读者在思想方法上达到一次新的飞跃,拓展出一片新的视野.

其实,微元法最基本的思想内涵渗透在我们的日常生活与生产劳动中,用一把剪刀一小段一小段剪下去,许许多多小直线剪口连续成各种曲折圆润的轮廓;用极细的丝线绣制红花绿叶,每一次走针只是完成一小段直线,千针万线却积累出优美逼真的画面……那么,什么是我们解决物理问题所需的物理微元法呢?它既是一种深刻的思想方法,又是解决物理问题的精到的操作方法;它的载体涉及物理学的力、电、热、光、原子诸多知识领域,包纳了近似、对称、等效、隔离等多种科学方法,也需要三角、解析几何、方程、数列、极限、数学归纳等数学知识与方法作为支持,微元法内涵丰富、外延广泛,是中学物理的“高端”.在处理物理问题时,从对事物的极小部分(微元)的分析入手,达到解决事物整体问题的方法,叫做微元法.

微元法的灵魂是无限分割与逼近.用微元法解决物理问题的特点是“大处着眼、小处着手”:对某事件作整体观察后,必须取出该事件的某一小单元即微元进行分析,通过对微元构造“低细节”的物理描述,最终解决整体问题.所以微元法解决物理问题的两要诀就是取微元——无限分割与对微元作“低细节”描述——逼近.取微元即对整体对象作无限分割,分割的对象可以是各种几何体,得到“线元”“面元”“体元”“角元”等等;可以分割一段时间或过程,得到“时间元”“元过程”;也可以对各种物理量进行分割,得到诸如“元电荷”“元功”“元电流”等相应的元物理量.这些微元都是通过无限分割得到的要多么小有多么小的“无穷小量”,但解决整体问题就是要从它们入手,对微元作“低细节”描述,即通过对微元性质作合理的近似描述,在微元是无穷小量的前提下,通过求取极限,达到向精确描述的逼近.读者在本文中将会接触到下述几种逼近:

1. “直”向“曲”的逼近

例如在动摩擦因数为 μ 的水平面上质量为 M 的质点沿半径为 R 的圆运动一周,摩擦力做了多少功?我们将圆周长 $2\pi R$ 细分成 n 段小弧,如图 27-1 所示,任意一段元弧可近似地

看成一小段直线,摩擦力的元功

$$W_i = \mu Mg \cdot \frac{2\pi R}{n},$$

在无限分割,即 $n \rightarrow \infty$ 的条件下,

$$W = \mu Mg \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{2\pi R}{n} = 2\pi R \mu Mg,$$

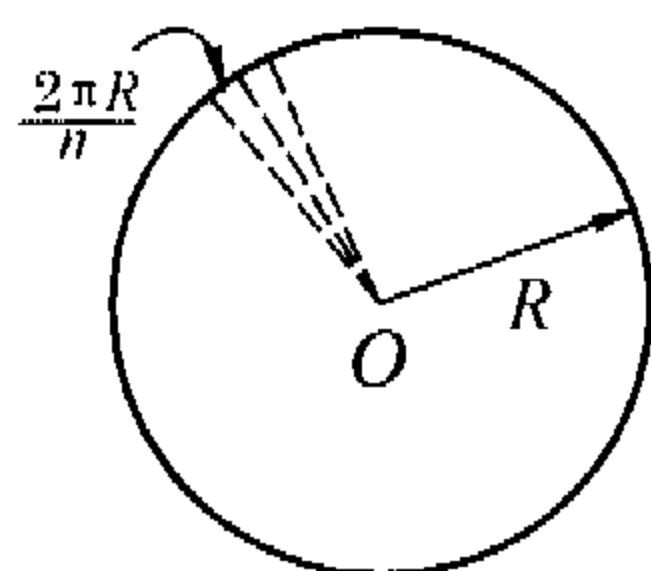
摩擦力对一段段直线的积累逼近于对圆周 $2\pi R$ 的积累.

图 27-1

2. 平均值向瞬时值的逼近

例如质量线密度.设想一线状物体,其上质量非均匀分布,某点 O 的线密度是个什么概念?如图 27-2 所示,设直线上 O 点至邻近另一点 O' 长度为 Δl ,该段线元质量为 Δm ,则该线元平均密度为 $\lambda = \frac{\Delta m}{\Delta l}$, $\Delta l \rightarrow 0$ 时,线元的平均密度逼近于 O 点的线密度.

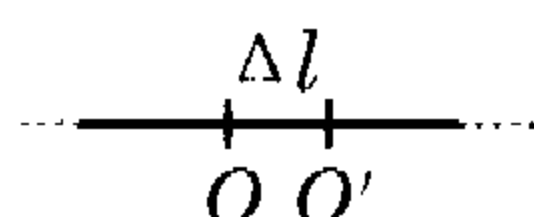


图 27-2

3. 常量向变量的逼近

例如计算变力的功.一根劲度系数为 k 的弹簧,在弹性限度内将它从自然长度慢慢拉长了 x 的过程中,拉力随伸长量变化而不断变化,我们可将伸长量 x 细分为 n 段,在 $\frac{x}{n}$ 长的元段上近似地认为拉力不变,第 i 段上的拉力为 $F_i = k \cdot i \frac{x}{n}$,拉力的功为 $W_i = k \cdot i \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n}$,在拉伸 x 过程中各段元功之和为

$$\sum W_i = \sum_{i=1}^n k \cdot i \left(\frac{x}{n}\right)^2 = k \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

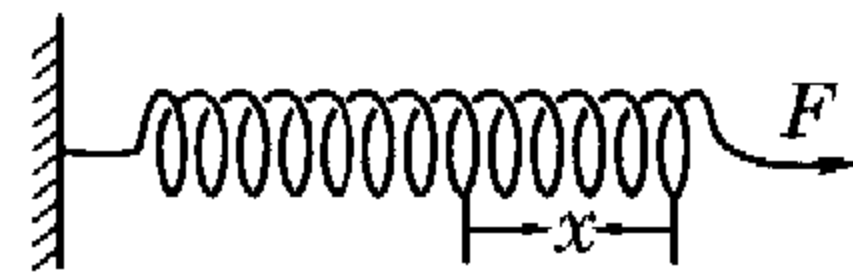
这是变力在图 27-3 所示过程所做功的一个近似,当 n 趋向于

图 27-3

无穷时,各段恒力元功的和逼近变力所做的功,即

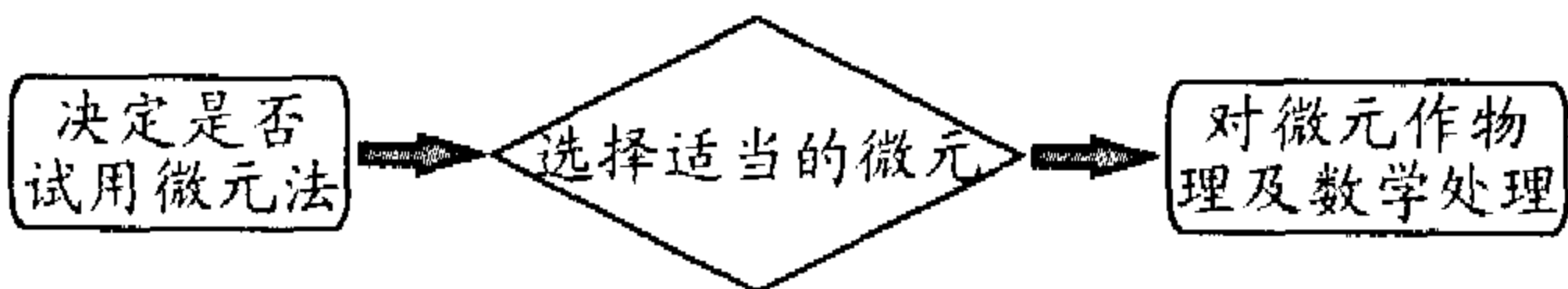
$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} k \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} kx^2.$$

无限分割与逼近是人类研究数学与物理学的一种重要思想方法.我国魏晋人刘徽首创“割圆术”,古希腊学者阿基米德依据一个圆的周长介于外切与内接正 n 边形的两个周长之间,以 n 很大时的正 n 边形周长作为圆周长,不谋而合地运用了无限分割与逼近的原理求得圆周率 π 的精确值,他们二位还不约而同地应用这一原理,研究弓形面积的求解方法.在他们之后,科学巨匠牛顿又将无限分割与逼近的思维方法引入对物理问题的研究中,在对变量无限分割和极限下逼近某一



确定值的基础上,创立了微分学及其一系列运算法则,极大地推进了数学与物理学的发展,同时将无限分割与逼近的思维方法纳入到严密的科学体系之中.微元法的灵魂——无限分割与逼近的思想方法是重要、缜密而精彩的.

微元法解决物理问题的一般思维与操作程序为:决定是否试用微元法;选择适当的微元;对微元作物理及数学处理以求结论:



在中学物理中遇到下列情景,往往可考虑用微元法试解.

(1)内禀问题,即讨论的问题属于整体内部的一种对称联系.这时,可对整体作均匀细分,取出其中任一微元作“隔离体”加以研究,这样就将整体内部关系转化为微元与其余部分的相互关系,以便应用反映事物相互联系的物理规律求解.

问题(1)-1 如图 27-4 所示,一质量均匀分布的细圆环,其半径为 R ,质量为 m ,令此环带正电,总电量为 Q ,现将此环平放在绝缘的光滑水平桌面上,并处于磁感应强度为 B 的匀强磁场中,磁场方向竖直向下.当此环绕通过其中心的竖直轴以匀角速度 ω 沿图示方向旋转时,环中的张力等于多少?

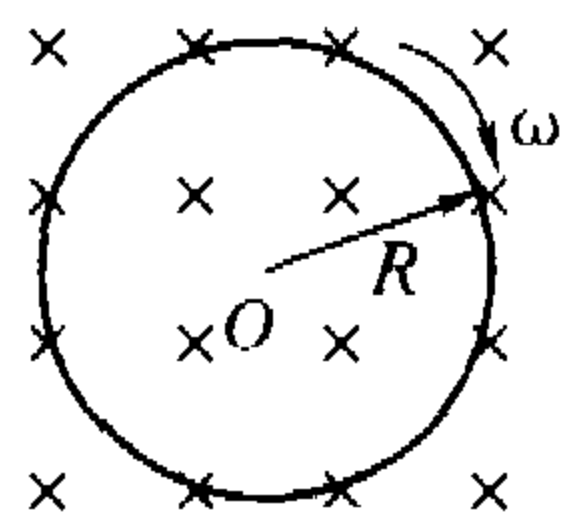


图 27-4

问题(1)-2 如图 27-5 所示,一无限长均匀带电细线弯成如图 27-5 所示的平面图形,其中 \widehat{AB} 是半径为 R 的半圆弧, AA' 平行于 BB' ,试求圆心 O 处的电场强度.

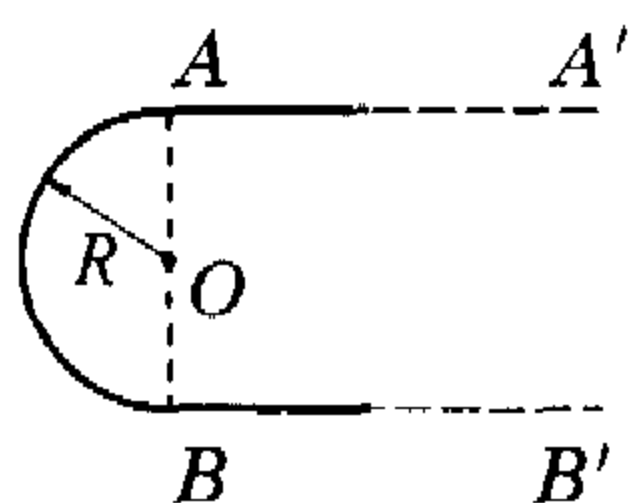


图 27-5

(2)暂态问题,即问题所述情景属事物变化全景中的某特殊场景.这时,需撷取一与该状态逼近的相邻状态,从而获得一元过程,对该微元过程运用相应的物理规律以求解答.

问题(2)-1 如图 27-6 所示,从一个容器里向外抽空气,直到压强为 p .容器上有一个小孔,用塞子塞着.现把塞子拔掉,问空气最初以多大速率冲进容器? 设外界大气压强为 p_0 .大气密度为 ρ .



图 27-6

问题(2)-2 如图 27-7 所示,一个脉冲波在细绳中传播,若绳的线密度为 ρ ,绳中张力为 T ,试求脉冲波在绳上的传播速度.

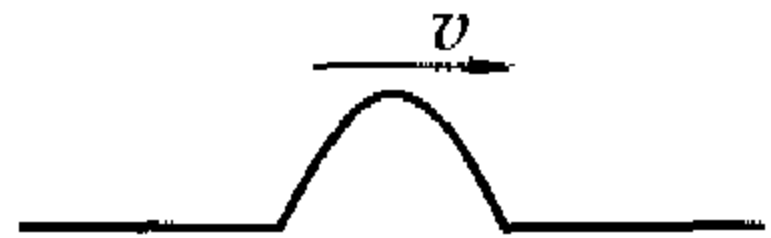


图 27-7

(3)变量问题,即问题所处物理情景涉及的物理量是变化的,诸如变力、变质量、变位置(轨迹问题)、变化的场、变化的过程等等.这类问题需要在对整体作无穷细分后,选取某特定微元作研究对象,将该微元的处理结果进一步推广到一般微元,最终得解.

问题(3)-1 如图 27-8 所示,无限长载流直导线的电流为 I ,一矩形 $CDEF$ 与直导线共面.求通过该矩形面的磁通量 Φ .

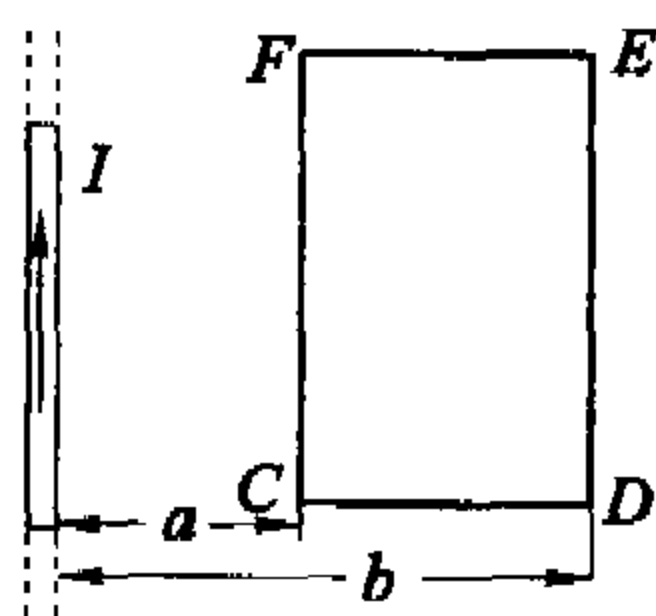


图 27-8

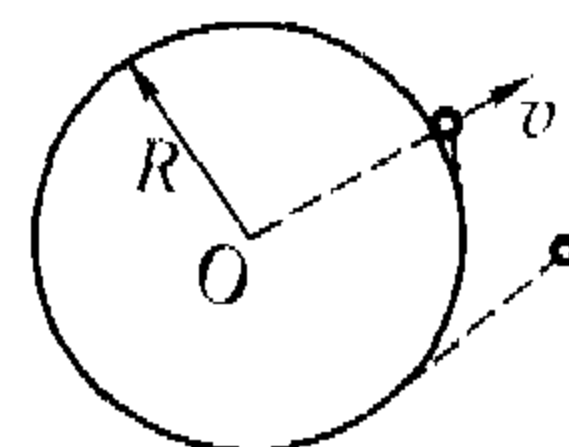


图 27-9

问题(3)-2 如图 27-9 所示,用不可伸长的轻线把小球拴在静止的半径为 r 的圆柱体上,起初这样缠线:使球与圆柱体相切,在某一时刻使球沿半径方向具有速度 v ,于是线开始松开.试求经时间 t ,松开部分线的长度 l .

在决定采用微元法之后,微元的选择是否适当将直接影响问题解决的成败与难易.因为之前说过,取微元,即对整体对象作无限分割是微元法的灵魂所在.这里,“适当”包含两层意思:其一,微元必须是无限分割的产物,当它被列为我们的研究对象时,它既保留着作为整体成员所应具备的本质特征,因而可对其运用规律,又派生了作为无穷小量所能发挥的特别功能,因而可对其作“低细节”描述;其二,被分割的整体对象是什么,应视具体问题灵活定夺,以使问题能在初等数学范畴内解决.

对于“适当”的第一层意思,我们通过对问题(1)-2 的讨论加以说明.这是一个内禀问题,宜用微元法求解.如图 27-10 所示,将半圆的圆心角均匀细分成 n 等份,每一份角元为 $\Delta\theta = \frac{\pi}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), $\Delta\theta$ 在半圆及直线部分各对应了一小段圆弧和一小段直线,从无限长均匀带电细线上我们可取得无数对两两对应的圆弧元和直线元,取其中任意一对——例如图 27-10 中元弧 \widehat{ab} 和元线段 $a'b'$ 加以考察;作为整个细线的一部分,它们的电荷分布线密度与整个细线一样,设为 λ ,对元弧 \widehat{ab} 作低细节的描述,它的长度是 $R \cdot \Delta\theta$,带电量是 $\lambda \cdot R \Delta\theta$,由于 $\Delta\theta$ 极小,可将其视作点电荷,当 $n \rightarrow \infty$ 时,其在圆心 O 处产生的电场强度逼近于确定值 $E_i = \frac{k \cdot \lambda R \Delta\theta}{R^2} = \frac{k \lambda \Delta\theta}{R}$.

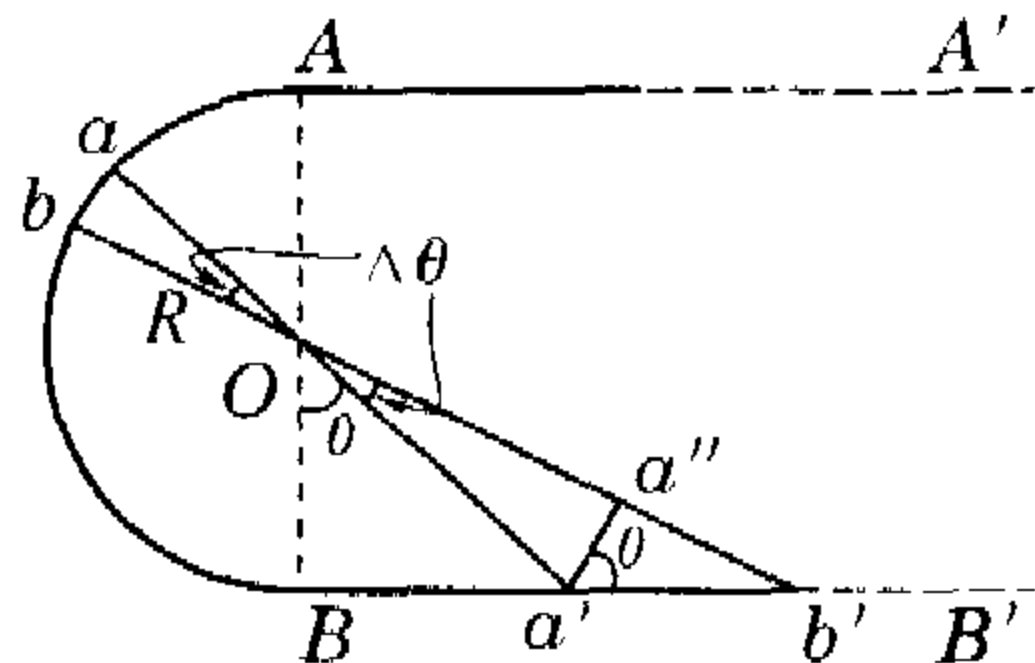


图 27-10

同样对元线段 $a'b'$ 作低细节的描述,它的长度是多少呢?如果我们认为由于 $\Delta\theta$ 极小,因而 $a'b' = Oa' \cdot \Delta\theta$,那就算改了 $a'b'$ 作为直线上的一部分的本征而与圆弧元无区别了.即要保留 $a'b'$ 微元的形态特征,又要发挥其作为无限小量的特殊功能, $a'b'$ 直线元的长度应当描述如下:作 $a'a''$ 垂直于 Ob' ,由于 $\Delta\theta$ 极小,近似地有 $Oa' = Oa''$, $a'a'' = Oa' \cdot \Delta\theta$, 则

$$a'b' = \frac{a'a''}{\cos \theta} = \frac{(Oa')^2 \Delta\theta}{R}$$

同样地,带电线元 $a'b'$ 可视作点电荷,当 $n \rightarrow \infty$ 时,它在 O 点引

起的场强的大小 $E_i' = \frac{k \cdot \lambda \frac{(Oa')^2 \Delta\theta}{R}}{(Oa')^2} = \frac{k \lambda \Delta\theta}{R}$,其方向与 E_i 相反,显然这对带电圆弧元和直线元在 O 点产生的场强之和为



零. 根据对称性可知, 无数对圆弧元和直线元电荷在 O 点的场强一一抵消, 故无限长均匀带电细线上的所有电荷在 O 点的电场强度为零.

这个问题由于正确选择与描述微元而成功获解.

关于“适当”的第二层意思, 请读者感受下面对问题(3)-1的解答. 这是一个变量问题: 在整个矩形面中, 与载流直导线距离 r 不同的各处, 磁感应强度依 $B=k \cdot \frac{I}{r}$ 规律而变化, 故欲求整个矩形面的磁通量 Φ , 需从计算某一元面上的元磁通量 Φ_i 做起, 而后遍及所有微元, 最终得解. 通常会这样取微元: 将图 27-8 所示中矩形的宽度细分成 n 等份, 得到 n 个矩形窄条面元, 面积为 $\Delta S_i = \frac{b-a}{n} \cdot l$, 认为各面元上磁感应强度不变, 考虑第 i 个窄条面元, 该处磁感应强度为

$$B_i = k \cdot \frac{I}{r_i} = k \cdot \frac{I}{i \frac{b-a}{n} + a},$$

该面元上磁通量为 $\Phi_i = B_i \cdot \Delta S_i = k \cdot \frac{I}{i \frac{b-a}{n} + a} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot l$,

n 个元磁通量之和为

$$\sum_i \Phi_i = \sum_{i=1}^n B_i \cdot \Delta S_i = kIl(b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(b-a) + na},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 所求矩形面上磁通量为

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Phi_i = kIl(b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(b-a) + na},$$

虽然思路与操作完全正确, 但通项为 $\frac{1}{i(b-a) + na}$ 的这样一个数列和的极限是很难求出的.

现在我们换一个对象进行均匀分割: 对所求的整个矩形面中的磁通量 Φ 细分成 n 等份, 元磁通量 Φ/n 将分布在宽度不同的各矩形窄条面元上, 如图 27-11 所示, 第 i 个面元所处磁场磁感应强度认为不变为 $B_i = k \cdot \frac{I}{r_i}$, 面积为 $l(r_{i+1} - r_i)$,

则元磁通量为 $k \cdot \frac{I}{r_i} \cdot l(r_{i+1} - r_i) = \frac{\Phi}{n}$, 整理后得

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = 1 + \frac{\Phi}{nkIl}.$$

由上式可知, 具有相同磁通量的各窄条宽度成等比数列, 公比 $q = 1 + \frac{\Phi}{nkIl}$, 对

该式两边取 n 次方的极限(逼近)后有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\Phi}{nkIl} \right)^n,$$

$$\frac{b}{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\Phi}{nkIl} \right)^{\frac{nkIl}{\Phi}} \cdot \frac{\Phi}{kIl} = e^{\frac{\Phi}{kIl}},$$

$$\Phi = kIl \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

这里, 我们不禁喟叹, 分割的巧拙对解决问题的难易程度影响之大!

对微元进行物理及数学处理求得结论, 是微元法操作中

最富有活力的一步. 因为我们面对的微元“是无限小, 然而却是起作用的并且是无所不能的”(恩格斯:《自然辩证法》). 本书此前各专题中用微元法处理各种问题的示例中, 我们可以感悟到, 这里需要借助于合理而必要的取舍与近似, 将微元中表征物理本质的主部取出, 使之成为近似得最好的物理模型或者说时、空、物的理想状态——如质点、点电荷、瞬时、规则运动、均匀场、理想气体等值变化, 等等. 对这样的微元, 运用相应的物理概念与规律, 借助于数学工具, 求得问题的最终解决.

对微元处理的过程一般有两种情形:

①微元隔离型 只需以某一微元为研究对象, 对其运用规律进行处理的结果就是题解. 一般地说, 内禀问题和暂态问题的微元处理过程属微元隔离型;

②微元集合型 先研究个别微元, 而后将其所具有的性质通过递推、叠加、归纳等手段遍及一般微元, 直至问题解决. 变量问题的微元处理过程属于微元集合型.

解决任何物理问题, 都需要对研究对象作物理及数学的处理以求得结论. 微元法对微元处理过程与众不同之处就在于“低细节”描述, 这正是微元法的难点之所在, 也是微元法精采之所在.

下面通过试解上列问题(1)-1 与问题(3)-2, 展示微元处理的两种类型.

问题(1)-1 试解 这个问题中待求力是带电线圆环的内力, 且力的分布具有中心对称性, 均匀细分圆环所得每个微元具有对称的物理性质, 故属内禀问题, 宜用微元法求解.

如图 27-12 所示, 将圆环细分, 其中任一线元所对的圆心角 $\Delta\theta \rightarrow 0$ (无限分割), 该微元可视作带电质点(近似处理), 其质量为

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi R} R \cdot \Delta\theta,$$

电量为 $\Delta q = \frac{Q}{2\pi R} R \cdot \Delta\theta$,

速度为 ωR , 受力如图, 两端各受圆环其余部分的张力即待求力 T , 磁场的洛伦兹力 F , 与整体一样, 微元在匀角速度地运动, 应有

$$2T \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2} - B\Delta q \cdot \omega R = \Delta m \cdot \omega^2 R \text{ (运用物理规律),}$$

当 $\Delta\theta$ 很小时 $\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta\theta}{2}$,

$$2T \frac{\Delta\theta}{2} - B \frac{Q}{2\pi R} \cdot R\Delta\theta \cdot \omega R = \frac{m}{2\pi R} R \cdot \Delta\theta \cdot \omega^2 R \text{ (数学处理).}$$

则张力大小为

$$T = \frac{\omega R}{2\pi} (BQ + m\omega) \text{ (得出结论).}$$

对微元的处理结果就是题解, 本题解法属“微元隔离法”.

问题(3)-2 试解 本题中, 一段时间 t 内松开的线的长度亦即拴球的细线与圆柱体切点移动的长度, 切点的移动是变速圆周运动, 求其长度属变量问题, 可考虑用微元集合法求解, 总体方案是: 将 t 时间内线松开的长度 l 细分 n 等份, 分析

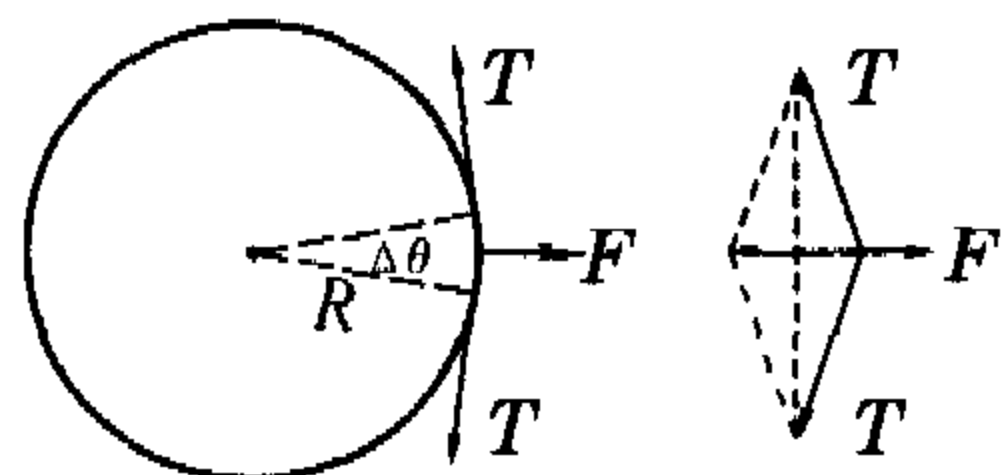


图 27-12

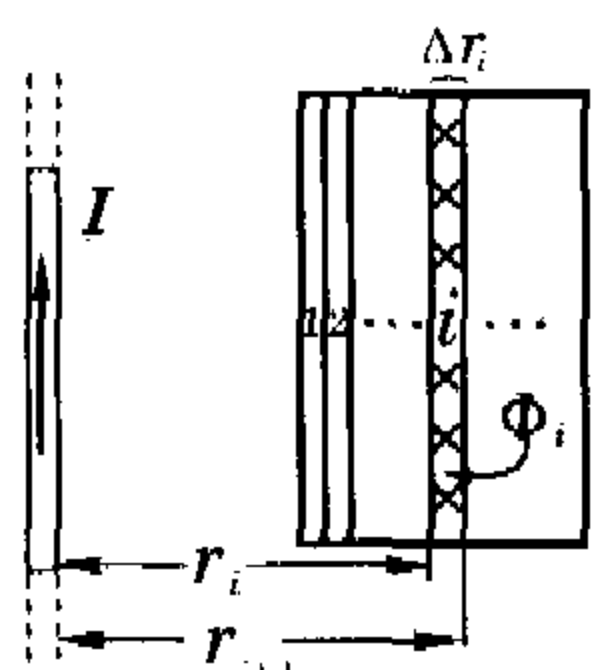


图 27-11



每一段极短时间内线松开的长度与其他题给条件间的关系, 然后遍及 t 时间内的总长度 l .

由题给条件, 由于小球初速度沿半径方向, 拴球(球可视为质点)的线与圆柱体相切, 故线对球的拉力方向垂直于球速度 v , 可知此拉力不改变球的速率. 考察线松开第 i 小段长 Δl 的一小段时间 Δt_i 内的情况(无限分割, 取微元), 如图 27-13 所示. 这时, 切点转过的角度 $\theta = \frac{\Delta l}{r}$, 而小球与切点间已松开的线长是 $i \cdot \Delta l$, 由几何关系可知, 小球也转过 θ 角, Δl 很小时可认为 $\theta = \frac{v \cdot \Delta t}{i \Delta l}$ (合理近似), 故有 $\frac{\Delta l}{r} = \frac{v \cdot \Delta t_i}{i \cdot \Delta l}$, 即 $\Delta t_i = \frac{i(\Delta l)^2}{rv}$, 将这一结果推广到所有 n 个微元, 有

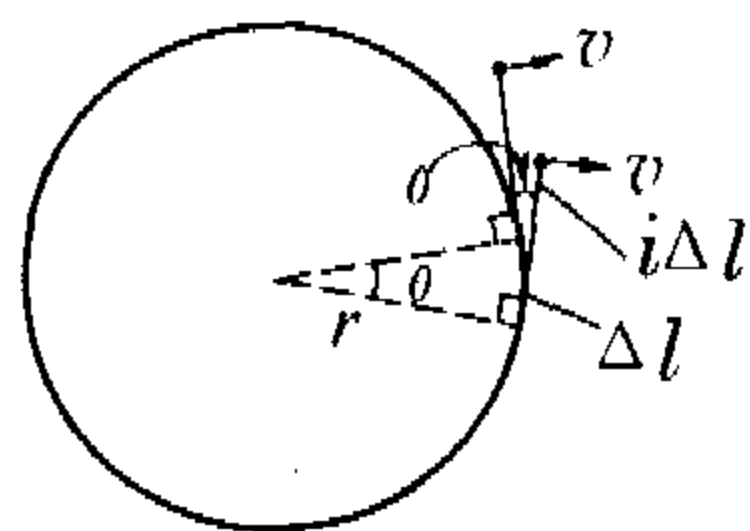


图 27-13

故 $t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i(\Delta l)^2}{rv} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{l^2}{rv} \cdot \frac{i}{n^2}$ (运用物理规律). 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$ (数学处理), 故 $t = \frac{l^2}{2rv}$, 得 $l = \sqrt{2rv}$ (得出结论).

从以上例解中我们看到, 对微元作数学处理是微元法解题中不可或缺的操作. 微元法涉及的数学包括: 各种数学知识如几何知识、三角知识、代数知识、微积分前知识(数列、极限等); 各种数学方法如近似方法、递推方法、数学归纳法以及各种数学运算公式与法则. 如四则运算法则、指数对数运算法则、三角函数的各种运算公式、解方程与方程组、数列求和公式、极限运算法则等等. 对数学功底的要求较高, 然而又可在中学数学范畴内解决, 这是微元法区别于其他物理方法的又一显著特点.

下面特别介绍微元法解题常用的一些数学规律与方法.

(1) 两个常用近似

当 x 很小时, $\begin{cases} \textcircled{1} \sin x \approx \tan x \approx x; \\ \textcircled{2} (1+x)^p \approx 1+px. \end{cases}$

(2) 两个重要的极限

$\begin{cases} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \\ \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \end{cases}$

(3) 三类数列和公式

① 自然数幂之和

$$\begin{cases} 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}; \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \\ 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{cases}$$

② 等差数列与等比数列和

$$\begin{cases} a+(a+d)+(a+2d)+\dots+[a+(n-1)d] \\ = na + \frac{1}{2}n(n-1)d; \\ a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} (q \neq 1). \end{cases}$$

③ 正弦与余弦级数和

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}; \\ \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{cases}$$

(4) 一个有用的数列求和法——裂项求和法

(5) 数学归纳法

例 1 详见问题(2)-2.

分析与解 如图 27-14 所示, 在绳波上取处于波峰的一小段绳元, 并取脉冲波为参考系, 绳元的速度大小为 v , 方向与波传播方向相反, 设该段绳元可视为曲率半径为 r 的一小段圆弧, 长度为 $r \cdot \Delta\theta$, 质量 $\Delta m = \rho \cdot r \cdot \Delta\theta$, 绳元两端受到其余部分绳的张力 T , 两张力合力为 $2 \cdot T \sin \frac{\Delta\theta}{2}$, 方向指向曲率圆中心, 则由牛顿第二定律得

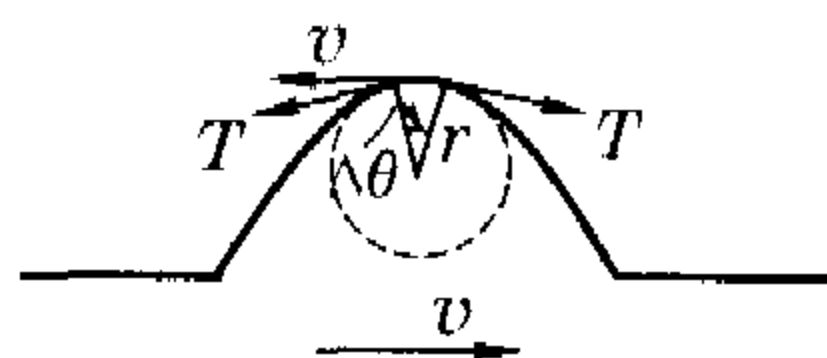


图 27-14

$2 \cdot T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \Delta m \frac{v^2}{r}$, $2 \cdot T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \rho \cdot r \cdot \Delta\theta \frac{v^2}{r}$,

$\Delta\theta$ 很小, $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$, 故求得 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. 这样, 我们利用当 x 很小时, $\sin x \approx x$ 这个近似, 以微元隔离法求出了脉冲在绳上的传播速度.

例 2 如图 27-15 所示, $abcd$ 是闭合导体回路, 总电阻为 R , ab 段的一部分绕成初始半径为 r_0 的小圆圈, 圆圈所在区域有与圆圈平面垂直的均匀磁场, 磁感应强度为 B . 回路的 b 点固定, c, d 为自由端, a 点在沿 ba 方向的恒力 F 作用下向右移动, 从而使圆圈缓慢缩小. 设在圆圈缩小的过程中, 线圈始终保持圆形, 并设导体回路是柔软的, 不计阻力, 求此圆圈从初始的半径 r_0 到完全消退所需的时间 T .

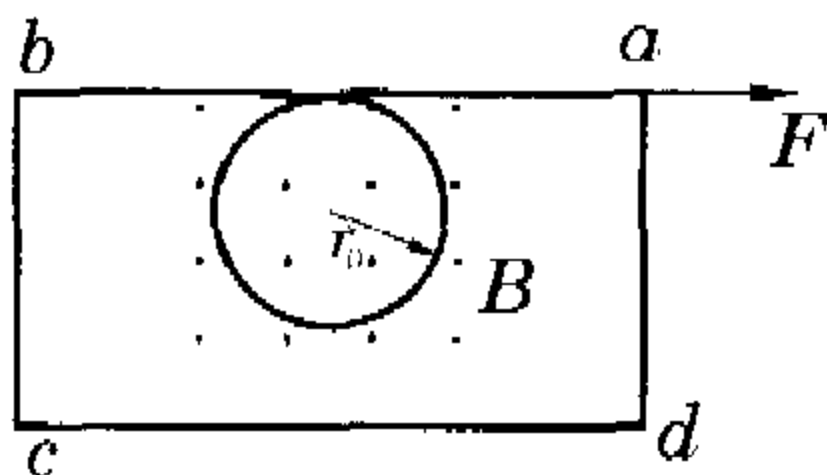


图 27-15

分析与解 在恒力作用下, 圆圈不断减小, 其中磁通量减小而引起感应电动势, 在导体回路中产生电流. 由于无阻力, 故力 F 所做功全部转变为感应电流的焦耳热, 但感应电流是随时间变化的, 所需时间可通过求一个元功所历时间元, 然后求出总和, 即用微元集合法解出.

将圆圈半径从 r_0 减为零的过程细分成 n 等份, 圆圈半径每缩小 $\Delta r = \frac{r_0}{n}$ ($n \rightarrow \infty$) 过程中, 产生的感应电流可视为不变,

$$\begin{aligned} \text{则 } F \cdot 2\pi\Delta r &= \left[\frac{B \cdot \pi(r_i^2 - r_{i+1}^2)}{\Delta t_i \cdot R} \right]^2 \cdot R \cdot \Delta t_i \\ &= \frac{B^2 \cdot \pi^2 (\Delta r)^2 (2r_i - \Delta r)^2}{\Delta t_i \cdot R}, \end{aligned}$$

将 $(2r_i - \Delta r)^2$ 展开, 略去高阶无穷小量 $(\Delta r)^2$ 后整理, 得

$$\Delta t_i = \frac{2B^2 \cdot \pi (\Delta r) (r_i^2 - r_i \Delta r)}{F \cdot R}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{2B^2 \cdot \pi \frac{r_0}{n} [(i \frac{r_0}{n})^2 - i(\frac{r_0}{n})^2]}{F \cdot R} \\ &= \frac{2B^2 \pi r_0^3}{FR} (\frac{1}{n^3})(i^2 - i), \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} T &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2B^2 \cdot \pi r_0^3}{F \cdot R} (\frac{1}{n^3})(i^2 - i) \\ &= \frac{2B^2 \cdot \pi r_0^3}{F \cdot R} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3}(i^2 - i) \\ &= \frac{2B^2 \pi r_0^3}{FR} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n)] \\ &= \frac{2B^2 \pi r_0^3}{FR} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}] \\ &= \frac{2B^2 \pi r_0^3}{3FR}. \end{aligned}$$

例3 试求匀质半圆薄板的质心位置。

分析与解 设半圆板半径为 R , 面密度为 σ , 以圆心 O 为坐标原点建立如图 27-16 所示坐标, 板平面在该坐标平面内。这样分割圆板: 将圆板分割成 n 个平行于 y 轴的细窄条, 令各窄条所含的上、下两圆弧均对应着 $\Delta\theta$

$= \frac{\pi}{2n}$ 的圆心角。那么第 i 个窄条的宽度为 $R\Delta\theta \cdot \cos(i \cdot \Delta\theta)$, 长度为 $2R\cos(i \cdot \Delta\theta)$, 质量 $\Delta m_i = \sigma 2R^2 \cdot \Delta\theta \cos^2(i \cdot \Delta\theta)$, 由对称性可知窄条的质心在 x 轴上, 距 O 为 $x_i = R \cdot \sin(i \cdot \Delta\theta)$, 根据质心定义, 若半圆板质心坐标为 x_c , 有

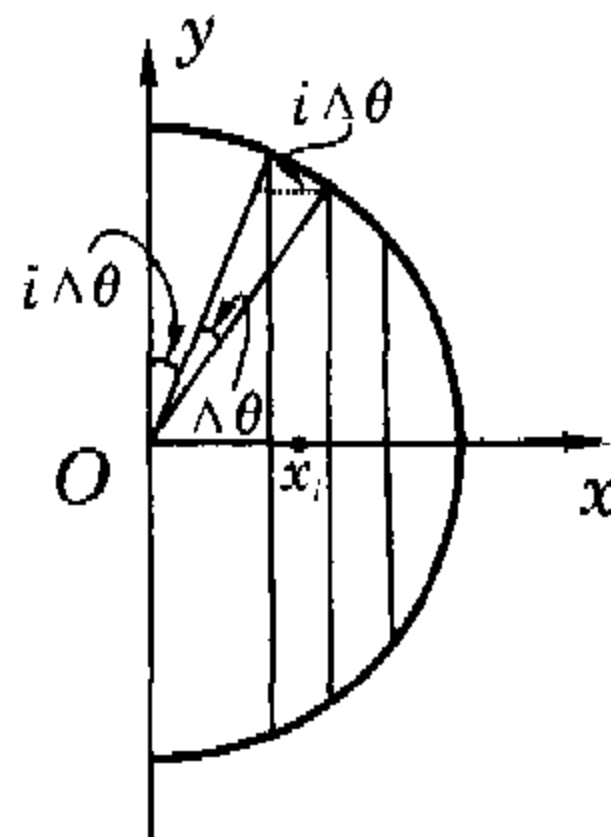


图 27-16

$$\begin{aligned} x_c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i}{\sigma \cdot \pi R^2 / 2} = \frac{4R}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\theta \cdot \cos^2(i \Delta\theta) \sin(i \cdot \Delta\theta) \\ &= \frac{R}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\theta [\sin 3(i \cdot \Delta\theta) + \sin(i \cdot \Delta\theta)]. \end{aligned}$$

其中括号里是两个正弦级数, 利用正弦级数和的公式及常用

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 有

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\theta \sin(i \cdot \Delta\theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n}) \sin(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{2n})}{\sin \frac{\pi}{4n}} \\ &= 2 \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{2n}) \sin(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{\pi}{2n})}{\lim_{\frac{\pi}{4n} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\theta \sin 3(i \cdot \Delta\theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin(\frac{n}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n}) \sin(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n})}{\sin \frac{3\pi}{4n}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{n}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n}) \sin(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2n})}{\lim_{\frac{3\pi}{4n} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3\pi}{4n}}{\frac{3\pi}{4n}}} = \frac{1}{3},$$

于是得 $x_c = \frac{4R}{3\pi}$, 即半圆均匀薄板的质心在半圆的对称轴上,

与圆心距离为 $\frac{4R}{3\pi}$.

例4 如图 27-17 所示, 一根原来不带电的长 l 的金属丝 AB , 现使它处于电量为 Q 的点电荷的电场中。点电荷位于金属丝延长线上, 与金属丝一端距离为 a 处。试计算金属丝表面感应电荷所产生的电场在此金属丝上的平均电场强度。

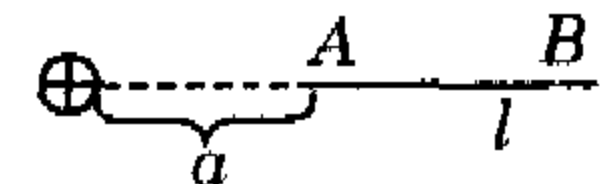


图 27-17

分析与解 根据导体在静电平衡时其内部场强为零, 金属丝表面感应电荷在金属丝长度 l 上的电场强度平均值可通过求点电荷 Q 在长度 l 上的电场强度平均值来求得。根据物理量在一个区域内的平均值的定义, 有

$$E_{\text{平均}} = \frac{\sum E_Q \cdot \Delta l}{l}$$

如图 27-18 所示, 我们设想将 l 均匀分成 n 等份, 得分点 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_i, \dots, M_n$, 它们到点电荷 Q 的距离依次为 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_n$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 相邻两个分点之间的场强可以认为不变, 那么, 点电荷 Q 在 l 长度上的电场强度平均值为

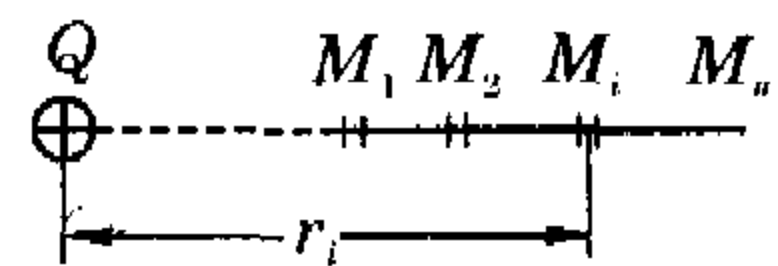


图 27-18

$$\begin{aligned} E_{\text{平均}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum E_Q \cdot \Delta l}{l} \\ &= \frac{1}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{kQ}{r_1^2} + \frac{kQ}{r_2^2} + \frac{kQ}{r_3^2} + \dots + \frac{kQ}{r_n^2}) \cdot \frac{l}{n} \\ &= \frac{kQ}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \dots + \frac{1}{r_n^2}) \cdot \frac{l}{n}. \end{aligned}$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时, 可认为 $r_i^2 = r_i \cdot r_{i-1}$, 并将 $\frac{1}{r_i \cdot r_{i-1}}$ 裂项成

$\frac{1}{r_i \cdot r_{i-1}} = (\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i}) \frac{n}{l}$, 并注意到 $r_0 = a, r_n = a + l$. 则

$$\begin{aligned} E_{\text{平均}} &= \frac{kQ}{l} (\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}) \\ &= \frac{kQ}{l} (\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}) = \frac{kQ}{a(a+l)}. \end{aligned}$$

例5 如图 27-19 所示, z 轴竖直向上, xOy 平面是一绝缘的、固定的、刚性平面。在 $A(x_0, 0, 0)$ 处放一带电量为 $-q$ ($q > 0$) 的小物块, 该物块与一细线相连, 细线的另一端 B 穿过位于坐标原点 O 的光滑小孔, 可通过它牵引小物块。现对该系统加一匀强电场, 场强方向垂直于 x 轴, 与 z 轴的夹角为 θ 。设小物块和绝缘平面间的动摩擦因数 $\mu = \tan \theta$, 且静摩擦因数和动摩擦因数相同, 不计重力。现通过细线来牵引小物块, 使之移动。在牵引过程中, 我们

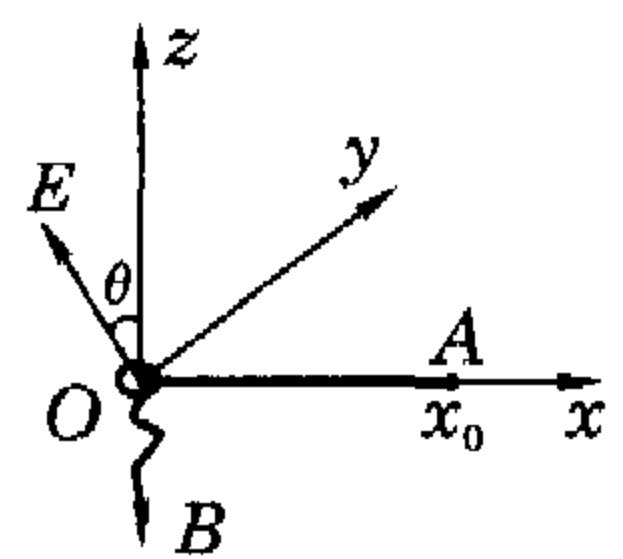


图 27-19



约定:细线的 B 端只准沿 z 轴向下缓慢移动,不得沿 z 轴向上移动;小物块的移动非常缓慢,在任何时刻,都可近似认为小物块处在力平衡状态.试求出此轨迹方程.

分析与解 微元法可以解决各种轨迹问题,本题是借助数学归纳法的处理在极坐标中求出小物块轨迹方程的一例.

如图 27-20 所示,曲线 C 表示小物块在 xOy 平面运动的轨迹,任取其上一点 M,即牵引物块的细线 OM 从 x 轴转过 φ 角时,小物块在该平面上的受力有

细线拉力 T、摩擦力 $f = \mu Eq \cos \theta$,电场力 $F = Eq \sin \theta$,由于小物块处于动态平衡状态,三力合力为零,故有图示三力平衡的矢量关系,这说明,小物块匀速移动的角速度与矢径 ρ 的角速度是相同的.

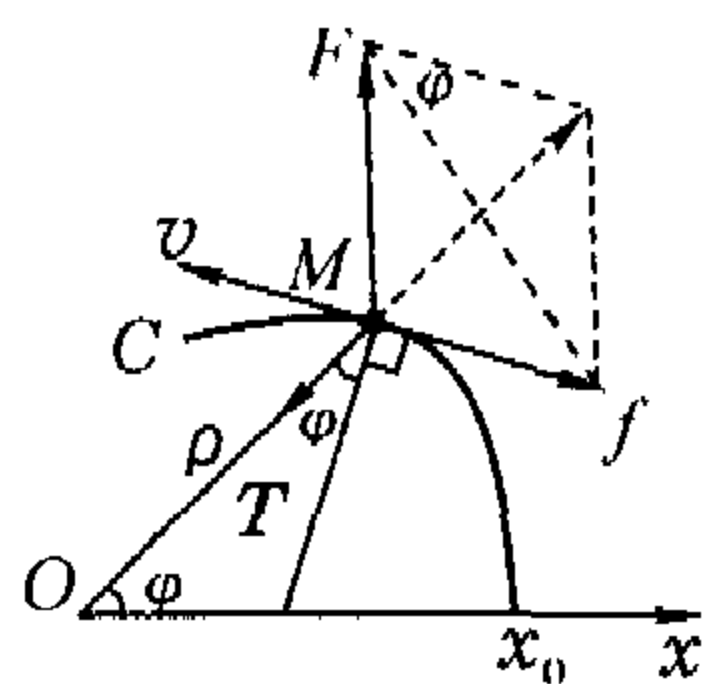


图 27-20

如图 27-21,以 O 为极点, x 轴为极轴,在 xOy 平面建立一极坐标系.在该坐标系中,小物块的轨迹为 C,由题给条件, $t=0$ 时刻,小物块的坐标为 $(x_0, 0)$,在轨迹 C 上任一点坐标为 (ρ_i, θ_i) ,现将轨迹无穷细分,得到

一系列分点及矢径 $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_i \dots \rho_n$,并使相邻两矢径间夹角均为 $\Delta\varphi$,对图 27-21 中所示两相邻曲边三角形,由余弦定理得

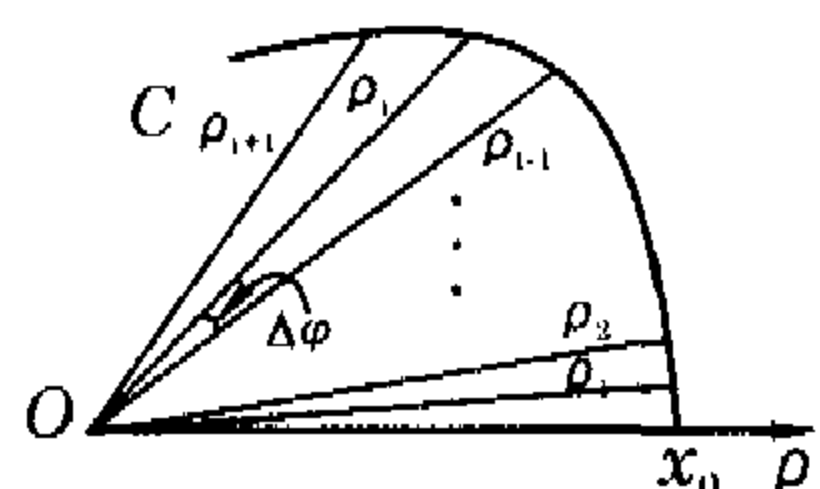


图 27-21

$$\rho_{i-1}^2 + \rho_i^2 - 2\rho_{i-1}\rho_i \cos \Delta\varphi = \rho_i^2 + \rho_{i+1}^2 - 2\rho_i\rho_{i+1} \cos \Delta\varphi.$$

整理后可得通式 $\rho_{i-1} + \rho_{i+1} = 2\rho_i \cos \Delta\varphi$.

由初始条件 $\rho_0 = x_0, \varphi_0 = 0$,又 $\Delta\varphi \rightarrow 0$,可得

$$\rho_1 = x_0 = x_0 \cos \Delta\varphi,$$

利用通式可得

$$\rho_2 = 2\rho_1 \cos \Delta\varphi - \rho_0 = x_0 (2\cos^2 \Delta\varphi - 1) = x_0 \cos 2\Delta\varphi,$$

$$\rho_3 = 2\rho_2 \cos \Delta\varphi - \rho_1 = x_0 (2\cos 2\Delta\varphi \cos \Delta\varphi - \cos \Delta\varphi)$$

$$= x_0 \cos 3\Delta\varphi,$$

若 $\rho_{N-2} = x_0 \cos (N-2)\Delta\varphi, \rho_{N-1} = x_0 \cos (N-1)\Delta\varphi$,则

$$\rho_N = 2\rho_{N-1} \cos \Delta\varphi - \rho_{N-2}$$

$$= x_0 [2\cos (N-1)\Delta\varphi \cdot \cos \Delta\varphi - \cos (N-2)\Delta\varphi]$$

$$= x_0 \cos N\Delta\varphi,$$

即 $\rho = x_0 \cos \varphi$.这是一个半径为 $\frac{x_0}{2}$,圆心坐标在 $(\frac{x_0}{2}, 0)$ 的圆,

xOy 坐标系中,轨迹方程为 $(x - \frac{x_0}{2})^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{4}$.

小球身事

1. 如图 27-22 所示,一长为 L、质量均匀为 M 的链条套在一表面光滑,顶角为 α 的圆锥上,当链条在圆锥面上静止时,链条中的张力是多少?

2. 质量为 M、长度为 L 的链子,竖直地悬挂在磅秤上方,下端恰好触及秤盘,放松链子,使其落在秤盘上.当链上

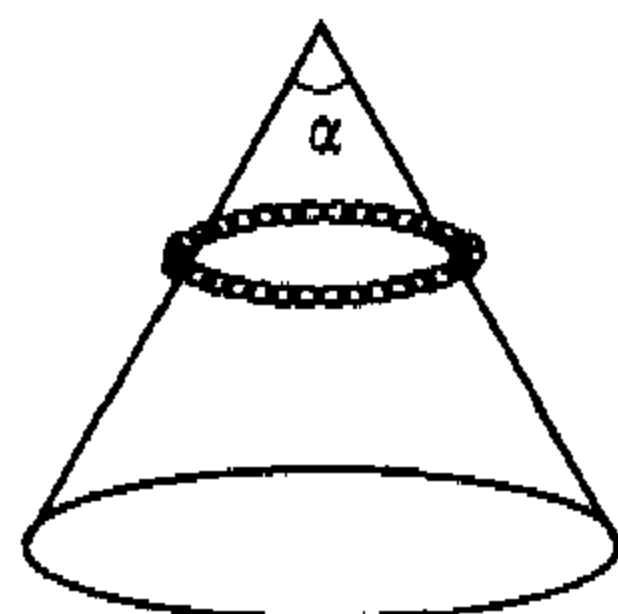


图 27-22

长 x 的一段已落下时,磅秤读数是多少?

3. 如图 27-23 所示质量均匀的圆锥体,高 H,试求其质心位置.

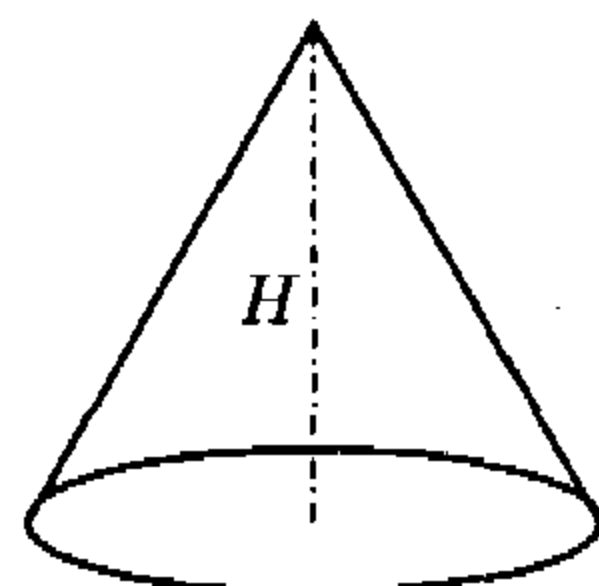


图 27-23

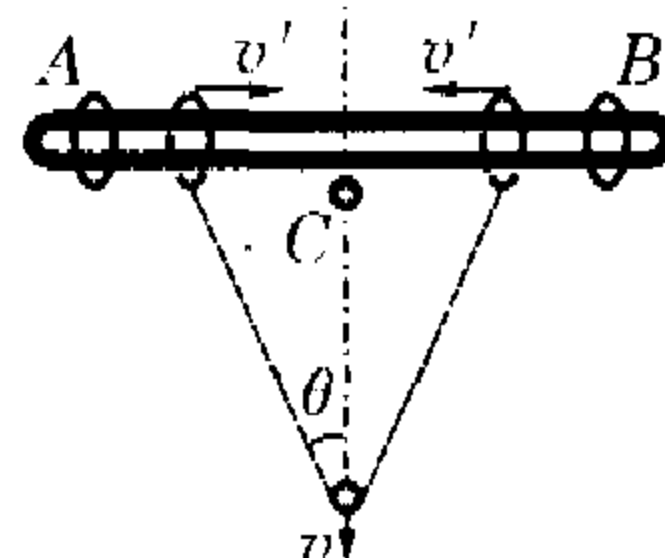


图 27-24

4. 如图 27-24,在水平的光滑杆上穿有两个相同的光滑小环 A、B,一根长为 l 不可伸长的轻质细绳穿过两个小环后连接一个小球 C.现把 A、B 两环沿杆拉开把细绳拉直,且使小球 C 位于 A、B 正中间的位置(忽略此时小球的微小下坠量),然后同时释放 A、B 两环,试用微元法确定下落过程中小球 C 的速度 v 与环 A、B 速度 v' 的大小关系.

5. 质量均匀为 m 的圆柱体,长 l,截面圆半径 r,求其对通过中心而与几何轴垂直的转轴的转动惯量.

6. 均质椭圆形薄板长半轴为 a,短半轴为 b,求其关于两轴的转动惯量.板的质量为 M.

7. 如图 27-25 所示,质量均匀为 M 的细线弯成半径为 R 的半圆,试求其对置于圆心 O 的质量为 m 的质点 A 的万有引力.

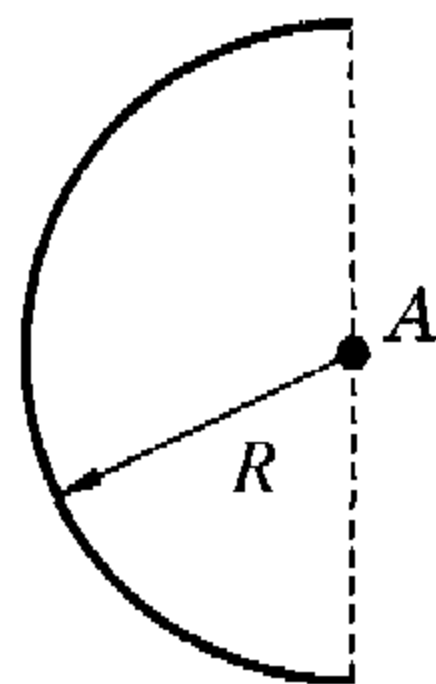


图 27-25

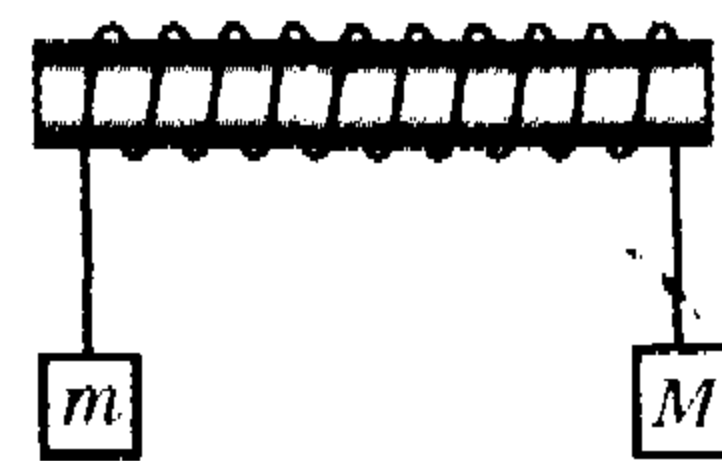


图 27-26

8. 如图 27-26 所示,在固定不动的圆柱体上绕有细长绳索.绳索两端拴大、小两只桶,其质量分别为 $M=1\ 000\text{ kg}, m=10\text{ kg}$,绳与圆柱体之间的动摩擦因数为 $\mu=0.050$,绳的质量可以忽略不计.试问:为使两桶静止不动,绳至少需绕多少圈?

9. 如图 27-27 所示,在 x 轴下方, $x>0$ 区域内是折射率随 y 变化的介质.光线在介质内部沿抛物线 $y=ax^2$ 传播,试求介质折射率 n 关于 y 的函数形式.已知 $y=0$ 时,介质折射率为 n_0 .

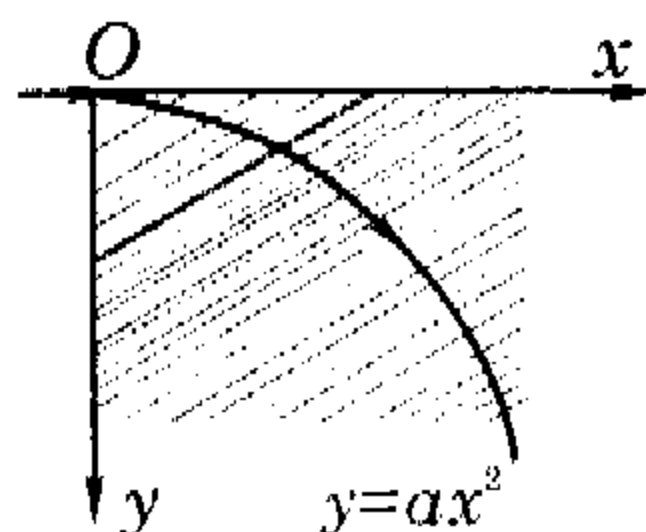


图 27-27

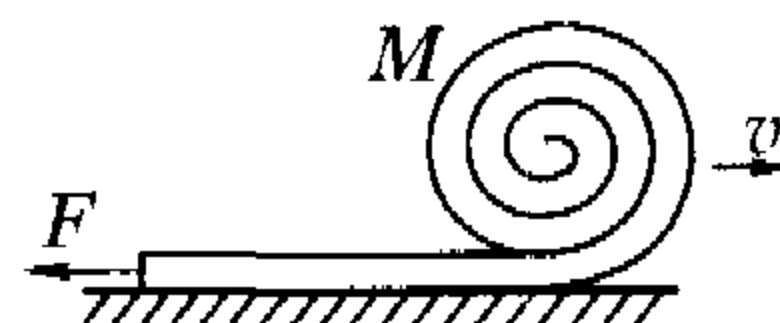


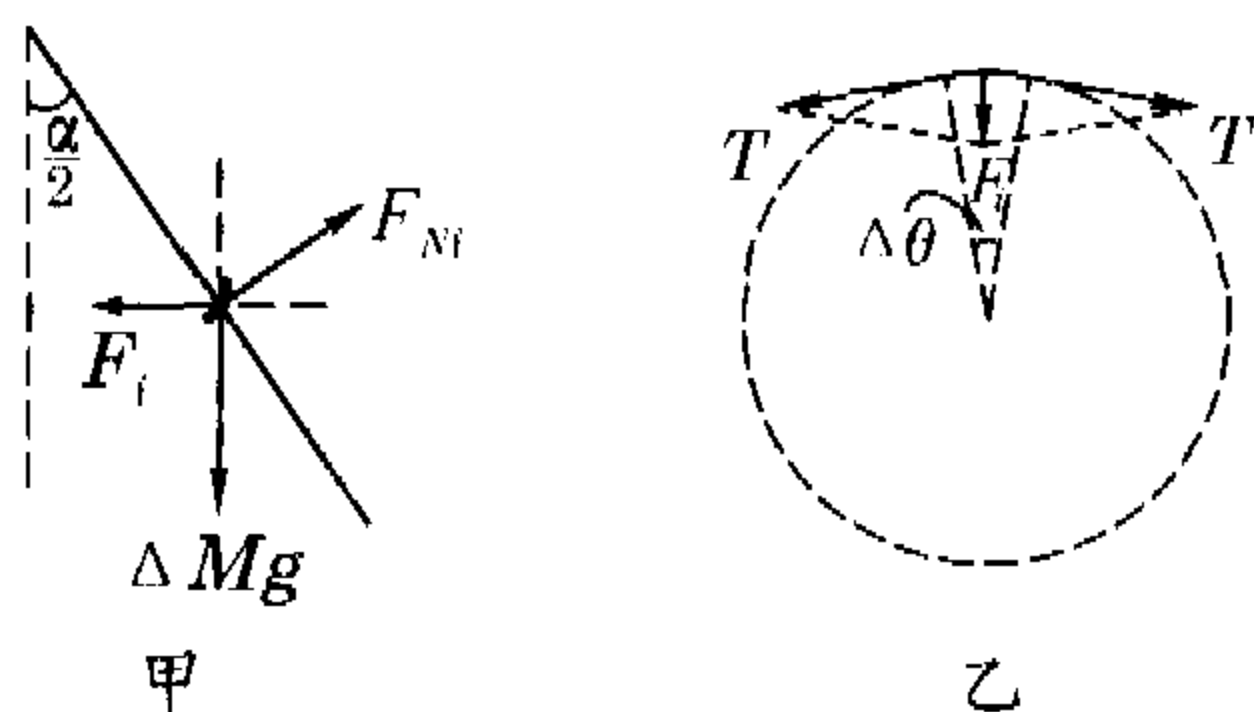
图 27-28

10. 如图 27-28 所示,一根长为 L、质量为 M 的灭火水龙头带被盘绕成半径为 R ($R \ll L$) 的一卷.水龙头沿着平坦的地面以初速度 v_0 (角速度 v_0/R) 滚动,同时,水龙头的自由端固定在地面上一点.水龙头逐渐展开成为直线,求水龙头完全展开所需要的时间.(假设整卷水龙头的初速度 $v_0 = \sqrt{gR}$,水龙头是完全柔软的,并忽略水龙头由于形变、空气阻力和滚动阻力所消耗的能量.)



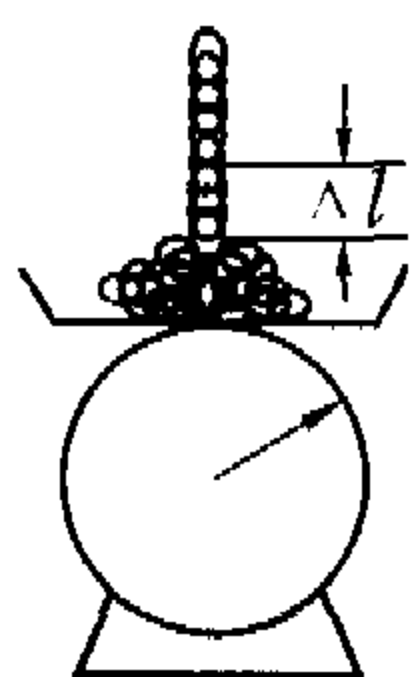
参考答案

1. 任取链条上一小微元段,其所对圆心角为 $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n}$ ($n \rightarrow \infty$),其质量 $\Delta M = \frac{M}{n}$,分析其受力如图答 27-1 甲所示:重力 ΔMg ,圆锥面支持力 F_N 及小链元两端所受链条其余部分拉力的合力 F_i ;由图答 27-1 乙可知 $F_i = 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2}$, $\Delta\theta$ 很小时, $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$, $F_i = T \frac{2\pi}{n}$,由链元平衡,得 $T \frac{2\pi}{n} = \frac{Mg}{n} \cot \frac{\alpha}{2}$,即 $T = \frac{Mg}{2\pi} \cot \frac{\alpha}{2}$.



图答 27-1

2. 台秤读数由已落在秤盘上的长 x 的链条重与紧接着正落向秤盘的一小段链元对秤盘的冲力 N 决定,前者大小是 $\frac{x}{l}Mg$,后者由动量定理求出:如图答 27-2,取正落向秤盘的一小段链元 Δl ,它是从距秤盘 x 处自由下落的,此时速度为 $\sqrt{2gx}$,设经时间 Δt 落定在盘中,则有



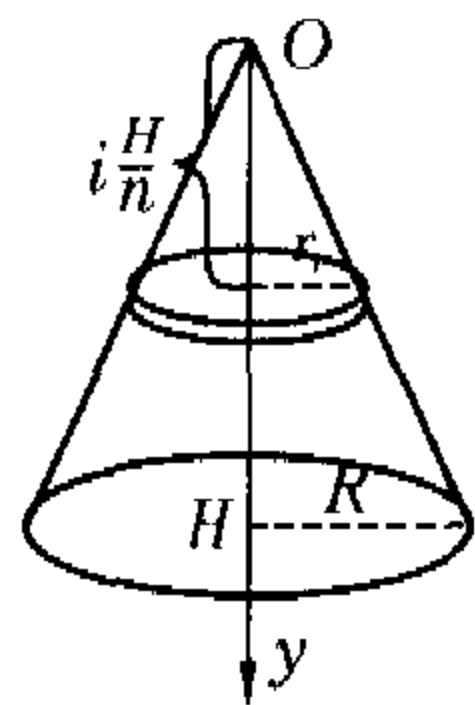
图答 27-2

$$(N' - \frac{\Delta l}{l}Mg)\Delta t = \frac{\Delta l}{l}M \cdot \sqrt{2gx},$$

N' 为盘对小链元冲力,忽略高阶无穷小量 $\frac{\Delta l}{l}Mg \cdot \Delta t$,并注意 $\frac{\Delta l}{\Delta t} = \sqrt{2gx}$,得 $N = N' = \frac{2x}{l}Mg$,则台秤读数为

$$\frac{2x}{l}Mg + \frac{x}{l}Mg = 3 \frac{x}{l}Mg.$$

3. 由对称性知,质心位置在圆锥的几何轴上,现建立如图答 27-3 所示 y 轴,沿 y 轴截分圆锥,每一质元是高为 $\Delta h = \frac{H}{n}$ 的极薄圆柱,设圆锥体密度为 ρ ,底面半径为 R ,则第 i 个质元质量 $\Delta m_i = \rho \pi r_i^2 \cdot \Delta h = \rho \pi (\frac{R}{H}i \cdot \Delta h)^2 \cdot \Delta h$,由质心定义



图答 27-3

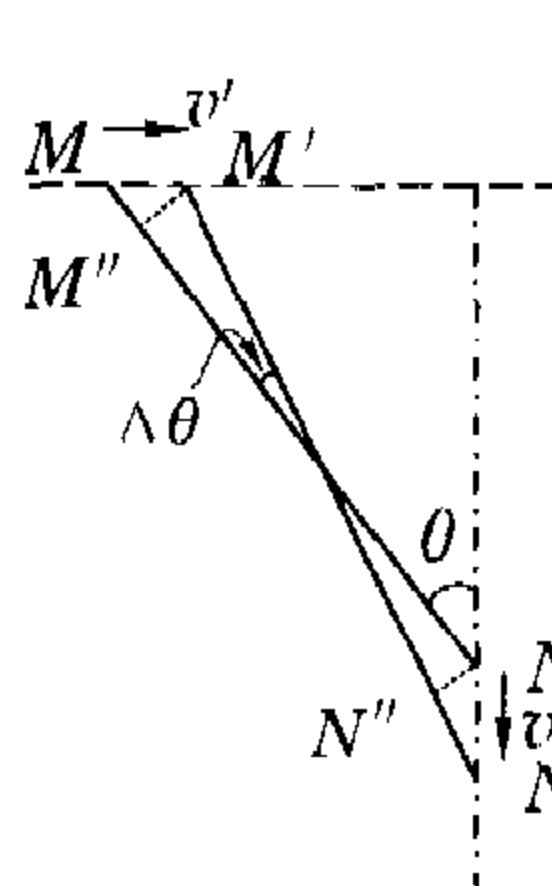
$$y_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i}{\rho \frac{\pi R^2 H}{3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \pi (\frac{R}{H}i \cdot \Delta h)^2 \cdot \Delta h \cdot i \cdot \Delta h}{\rho \frac{\pi R^2 H}{3}} = \frac{3}{H^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i^3 (\frac{H}{n})^4 = \frac{3}{4}H.$$

4. 取下落过程中当上、下环间绳从与竖直成 θ 角变为 $(\theta - \Delta\theta)$ 角的元过程,如图答 27-4 所示,在 Δt ($\Delta t \rightarrow 0$) 时间内,上环从 M 以速度 v' 移至 M' ,小球 C 以速度 v 从 N 移至 N' ,环 A 与小球 C 间绳长从 MN 变为 $M'N'$,在两段线上截取 $M'N'' = MN$,在 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 的条件下可认为 $M'M'' \perp MN, NN'' \perp M'N'$, $(\theta - \Delta\theta) \approx \theta$,则有

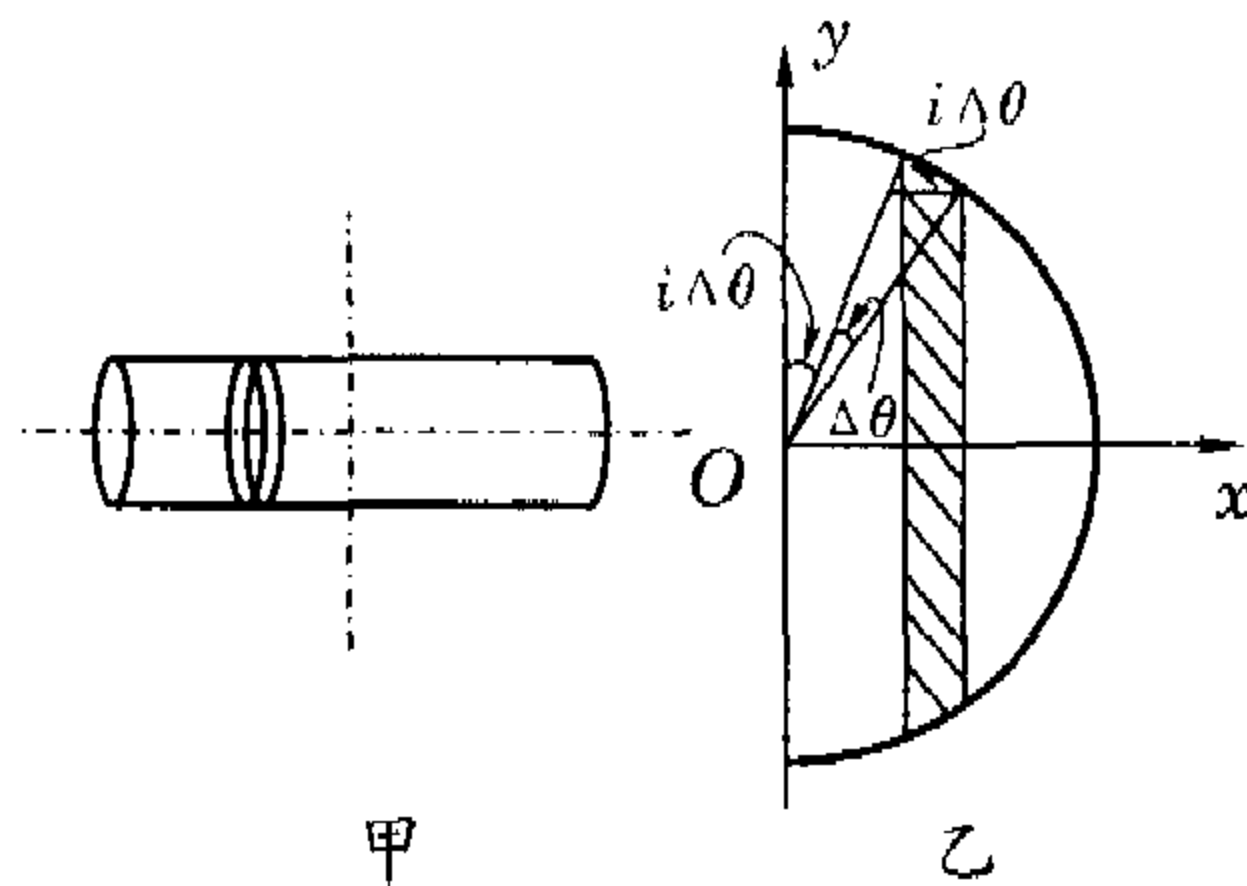
$$v' \cdot \Delta t + v' \Delta t \cdot \sin \theta = v \cdot \Delta t \cos \theta,$$

于是得

$$v' = \frac{v \cos \theta}{1 + \sin \theta}.$$



图答 27-4



图答 27-5

5. 如图答 27-5 甲将圆柱体无限分割为厚度 $\frac{l}{2n} \rightarrow 0$ 的薄圆板,先确定半径为 r 的薄圆板对其直径的转动惯量,设圆板质量为 $m_i = \frac{m}{2n}$,如图 27-5 乙所示分割圆板,其中 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}$ 则圆板对沿 y 轴的直径的转动惯量

$$J = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\frac{m_i}{\pi r^2} \cdot r \frac{\pi}{2n} \cdot \cos(i \frac{\pi}{2n}) \cdot 2r \cos(i \frac{\pi}{2n}) [r \sin(i \frac{\pi}{2n})]^2] = 2m_i r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \cos^2(i \frac{\pi}{2n}) \sin^2(i \frac{\pi}{2n}) = \frac{m_i r^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sin^2(i \frac{\pi}{n}) = \frac{m_i r^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\sin^2(\frac{\pi}{n}) + \sin^2(2 \frac{\pi}{n}) + \dots + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{n}) + \dots + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})] = \frac{m_i r^2}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{m_i r^2}{4}.$$

根据平行轴定理,圆板对通过中心而与几何轴垂直的转轴的元转动惯量为 $J_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{m}{2n} r^2 + \frac{m}{2n} (i \cdot \frac{l}{2n})^2$,整个圆柱体对通过中心而与几何轴垂直的转轴的转动惯量为

$$J = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\frac{1}{4} \cdot \frac{m}{2n} r^2 + \frac{m}{2n} (i \cdot \frac{l}{2n})^2] = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2.$$

6. 如图答 27-6 所示坐标系中,椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,取 $\Delta x = \frac{a}{n}$,则 $x_i = i \cdot \Delta x, y_i = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (i \Delta x)^2}$,图中质元对短轴的元转动惯量为

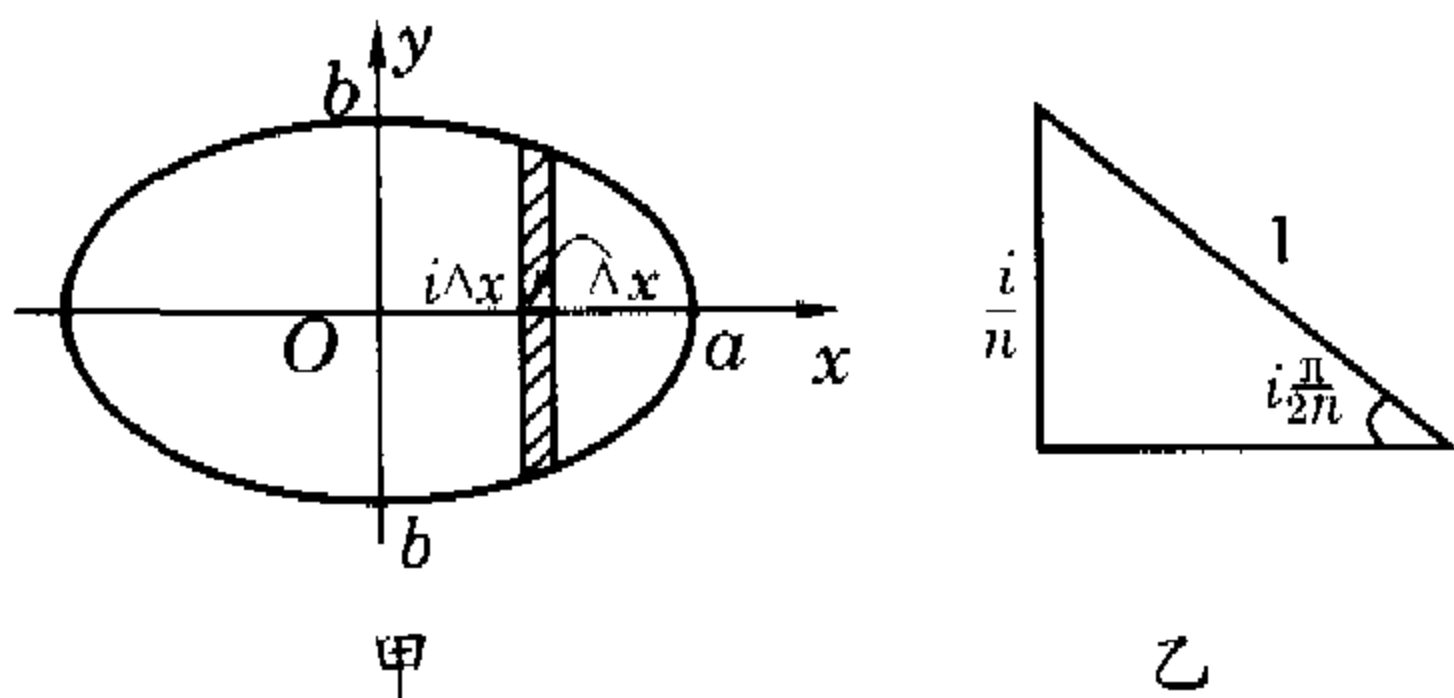
$$J_{\Delta} = \left[\frac{M}{\pi ab} \cdot \frac{a}{n} \cdot 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (i \cdot \frac{a}{n})^2} \right] \cdot (i \cdot \frac{a}{n})^2,$$

则整个均匀椭圆板对短轴的转动惯量为

$$J_b = \frac{4Ma^2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} \sqrt{1 - (\frac{i}{n})^2},$$



令 $\frac{i}{n} = \sin(i \frac{\pi}{2n})$, 有



图答 27-6

$$J_b = \frac{4Ma^2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{ \sin[(i+1) \frac{\pi}{2n}] - \sin(i \frac{\pi}{2n}) \} \cdot \sin^2(i \frac{\pi}{2n}) \sqrt{1 - \sin^2(i \frac{\pi}{2n})}$$

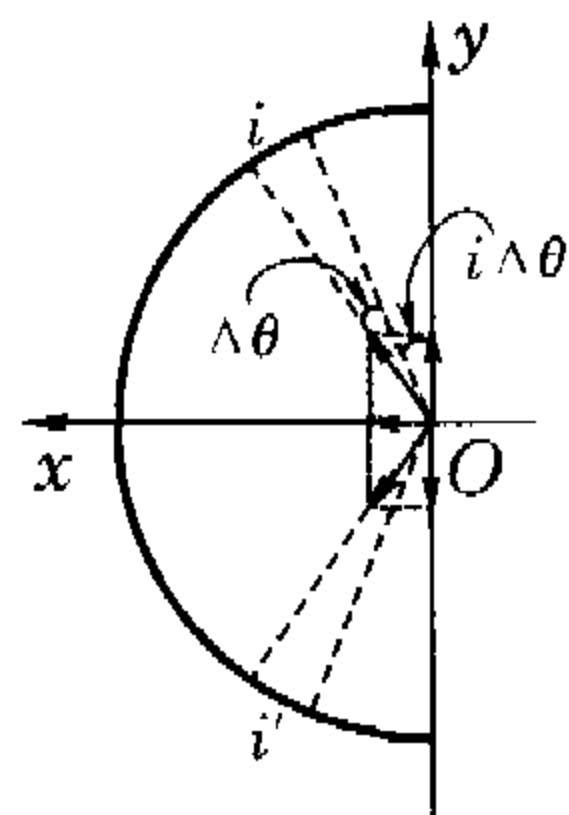
$$= \frac{4Ma^2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \cdot \sin^2(i \frac{\pi}{2n}) \cdot \cos^2(i \frac{\pi}{2n})$$

$$= \frac{Ma^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \sin^2(2i \frac{\pi}{2n}) = \frac{Ma^2}{4}$$

同理,对长轴的转动惯量为 $J_a = \frac{Mb^2}{4}$.

7. 如图答 27-7 所示,将半圆周均匀细分成 n 等份,每份

质元 $\Delta M = \frac{M}{n}$, 对应的圆心角 $\Delta\theta = \frac{\pi}{n}$, 第 i 个质元对 m 的引力大小为 $F_i = G \frac{M \cdot m}{R^2}$, 这个力沿 x 方向分量 $F_{ix} = G \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \sin(i \cdot \Delta\theta)$, 沿 y 方向的分量与关于 x 轴对称的另一质元 i' 的 y 方向分量相抵消, 整个半圆细线对 m 的引力是



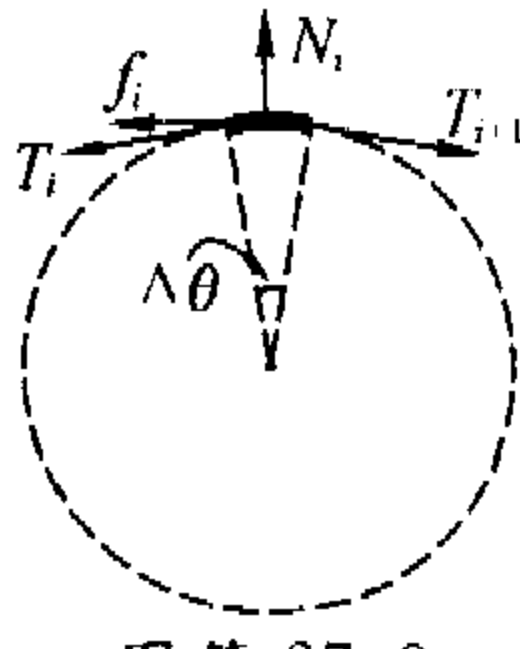
图答 27-7

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_{ix} = G \frac{Mm}{R^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \sin(i \cdot \Delta\theta)$$

$$= G \frac{Mm}{R^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(\frac{n}{2} \cdot \Delta\theta) \sin(\frac{n+1}{2} \cdot \Delta\theta)}{\sin \frac{\Delta\theta}{2}} = 2 \frac{GMm}{\pi R^2}$$

8. 从整体分析, 绳索一端的拉力 $T = Mg$, 另一端的拉力

$T_0 = mg$, 每一圈绳为一圆周, 对 N 圈绳长作无限均匀分割——使每段绳元所对圆心角为 $\Delta\theta = \frac{2\pi N}{n}$, $n \rightarrow \infty$. 取任意第 i 段绳元作受力分析: 两端其他绳的拉力 T_i 、 T_{i+1} , 静摩擦力 f_i , 圆柱的支持力 N_i , 如图答 27-8, 当绳索恰处平衡时有下列关系



图答 27-8

$$(T_{i+1} - T_i) \cos \frac{\Delta\theta}{2} = \mu N_i = \mu (T_{i+1} + T_i) \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

取 $T_{i+1} + T_i \approx 2T_i$, 上式为

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{T_i} = 2\mu \tan \frac{\Delta\theta}{2} = \mu \cdot \Delta\theta, \text{ 即 } \frac{T_{i+1}}{T_i} = 1 + \mu \frac{2\pi N}{n} \quad (1)$$

这就是说, 绳上张力是等比递增的. 现对①式两边同时取 n 次

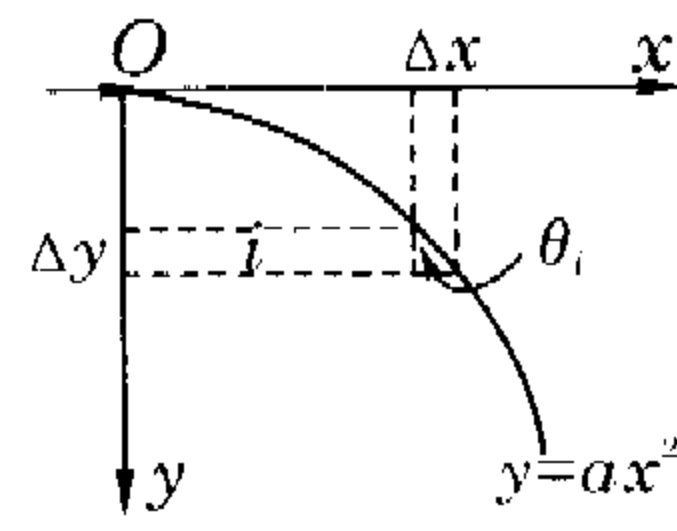
方, 有 $(\frac{T_{i+1}}{T_i})^n = (1 + \mu \frac{2\pi N}{n})^n$;

两边取极限有

$$\frac{M}{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2\pi\mu N}{n})^n \cdot e^{-2\pi\mu N} = e^{2\pi\mu N}, N = \frac{1}{2\pi\mu} \ln \frac{M}{m}$$

代入题给数据可得 $N \approx 15$ 圈.

9. 将介质分割成无数平行于 x 轴的薄层, 第 i 层的折射率为 n_i , 折射角为 θ_i , 由折射定律可得 $n_i \sin \theta_i = n_0 \sin 90^\circ$, 在每个薄层中可认为光的路径沿直线, 第 i 个薄层中, 由图答 27-9 所示几何关系可得



图答 27-9

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cot \theta_i = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sin \theta_i}, \text{ 即}$$

$$\frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1 - (\frac{n_0}{n_i})^2}}{n_0/n_i} = \frac{\sqrt{n_i^2 - n_0^2}}{n_0}$$

$$2ax = \frac{\sqrt{n_i^2 - n_0^2}}{n_0}, \quad 2a \sqrt{\frac{y}{a}} = \frac{\sqrt{n_i^2 - n_0^2}}{n_0}$$

化简整理得 $4ay = \frac{n_i^2 - n_0^2}{n_0^2}$, 即 $n(y) = n_0 \sqrt{4ay + 1}$.

10. 先确定在展开 x 长一段时运动部分水龙带卷的速度 v , 忽略由于带卷半径减小而引起的势能变化与竖直速度, 由机械能守恒得

$$\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J (\frac{v_0}{R})^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J' (\frac{v}{r})^2,$$

式中 $J = \frac{1}{2} M R^2$, 展开 x 长时, 运动部分质量 $m = \frac{L-x}{L} M$, 转动惯量则为 $J' = \frac{1}{2} \cdot \frac{L-x}{L} M \cdot r^2$, 可得 $v = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{L-x}{L}}}$, 将水龙

带长无限细分, 每展开 $\frac{L}{n}$ 长速度可认为不变, 展开第 i 元段历时为

$$t_i = \frac{L}{n v_i} = \frac{L}{n v_0} \sqrt{1 - \frac{x}{L}} = \frac{L}{n v_0} \sqrt{1 - \frac{i}{n}}$$

则全部展开的时间为

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{L}{v_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{i}{n}}$$

下面是用数学方法求通项为 $\frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{i}{n}}$ 的数列和之极限. 为此先进行等量代换

$$\because i=1, \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1, i=n, \sqrt{1 - \frac{n}{n}} = 0, \text{ 令 } \sqrt{1 - \frac{i}{n}} = y,$$

取 $\Delta y = \frac{y_1 - y_n}{N} = \frac{1}{N}$, 有

$$y_p^2 - y_{p+1}^2 = (y_p - y_{p+1})(y_p + y_{p+1}) = \Delta y \cdot 2y_p$$

$$= (1 - \frac{i}{n}) - (1 - \frac{i+1}{n}) = \frac{1}{n}$$

$$\therefore T = \frac{L}{v_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{i}{n}} = \frac{L}{v_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^N \Delta y \cdot 2y_p \cdot y_p$$

$$= \frac{2L}{v_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^N \Delta y (p \cdot \Delta y)^2 = \frac{2L}{v_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^N \frac{1}{N^3} p^2$$

$$= \frac{2L}{v_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{2L}{3v_0}$$

(连载完).