高中物理培优解题捷径

主　编　王平杰
副主编　雷自平
编　委　贺海军　王丽营　钮忠军　周红卫
陈定密　方　健　韩建新　庄来标
张学友　古杰一　马祖英　王海军

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

序　言

长期以来，我们感到传统的教辅资料过分强调知识点、覆盖面而使学生深陷题海，难以适应新课程的要求。面对大量习题，是让学生陷入茫茫“题海”之中，还是有选择地攀登“题山”；是追求做题数量，还是掌握解题规律，让学生真正做到举一反三、触类旁通？这是值得我们研究的课题。

在这种背景下，《高中物理培优解题捷径》应运而生了，它综述了高中物理中关键性的解题规律，是目前书市上从未见过的解题工具书，书中所提及的规律都是学生所渴望掌握的、一般教辅资料又少有的规律。

《高中物理培优解题捷径》一书具有如下特性：

独创性（规律新颖，经验独到）　书中的解题捷径是高层次的、高质量的，非教辅资料中一般性的知识规律，高考可用，竞赛也必不可少；书中的解题捷径大多是作者的教学研究成果和他山之玉，具有很高的创造性。

实用性（短期见效，长期受益）　书中所述的规律都是广大中学生所渴望解决和掌握的，而在一般的教辅资料中是很难找到的，大多数规律是竞赛解题规律的演绎和派生。这些规律在应用中已得到了很好的验证，对学生的同步学习、高考复习和竞赛突破都具有很大的帮助。它不但可以帮助学生在短期内掌握一些常用的解题规律，而且还能对那些貌似高深、似乎超纲（竞赛类型）的问题也能轻松、快速、准确地作出判断，抓住一点掌握一片。

工具性（有据可查，有律可循）　谁掌握了解题规律，谁就掌握了学习的关键。解题贵在快速、准确，当学生在分析一道题时，首先要有思路，即不同类型的题有不同类型的解题思路，本书称之为解题套路；其次，要有技巧、方法，本

书称之为解题捷径。当学生掌握了一定的解题套路和解题捷径时，自然就能达到快速而准确的解题境界。因此，此书不愧为学生解题的工具书。

解题是训练逻辑思维能力的“思维体操”，当学生熟练地掌握了一定数量的解题捷径之后，解题对他来说就只不过是一种有趣的智力游戏！貌似高深的题目，在他面前实为浅易；貌似繁杂的题目，在他面前实为简明；貌似无序的题目，在他面前实为有序。他能达到知一反十，触类旁通，见解即知答案的解题境界。

袁湛江

2009 年 6 月 20 日于甬城

目 录

第一章　运动学中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：自由弦的等时性：物体从静止开始，无摩擦地由竖直圆环的最高点沿不同的弦运动到圆周上或者从圆周上沿不同的弦运动到圆环的最低点，所需时间都相同，且等于沿竖直圆环的直径自由落体的时间，即 $t=\sqrt{\frac{2d}{g}}$（d 为圆环的直径）。

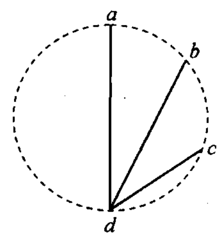
【题目】 如图一所示，ad、bd、cd 是竖直面内三根固定的光滑细杆，a、b、c、d 位于同一圆周上，a 为圆周的最高点，d 为最低点。每根杆上都套着一个小滑环（图中未标出），三个滑环分别从 a、b、c 处释放（初速度都为 0），用 t_1，t_2，t_3 依次表示各滑环到达 d 所用的时间，则（　　）

A. $t_1<t_2<t_3$

B. $t_1>t_2>t_3$

C. $t_3>t_1>t_2$

D. $t_1=t_2=t_3$

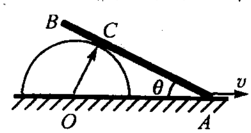


图一

【精析】 由自由弦的等时性知，D 正确。

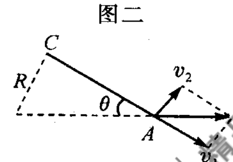
小试二：杆或绳约束物体系各点速度的相关特征是：在同一时刻必须具有相同的沿杆或绳方向的分速度。

【题目】 如图二所示，杆 AB 的 A 端以速度 v 做匀速运动，在杆运动时恒与一静止的半圆周相切，半圆周的半径为 R，当杆与水平线的交角为 θ 时，求杆的角速度 ω 及杆上与半圆相切点 C 的速度。



图二

【精析】 由于半圆静止，杆上点 C 速度的法向分量为零，故点 C 速度必沿杆的方向，以 C 点为基点，将杆上点 A 速度 v 分解成沿杆方向分量 v_1 和垂直于杆方向分量 v_2，如图三所示，则 v_1 是点 A 与点 C 相同的沿杆方向平动速度，v_2 是点 A 对点 C 的转动速度，故可求得点 C 的速度为 $v_C=v_1=v\cos\theta$。



图三

又 $v_2=v\cdot\sin\theta=\omega\cdot AC$，

由题给几何关系知，A 点对 C 点的转动半径为 $AC=R\cdot\cot\theta$，

代入上式中即可解得 $\omega=\dfrac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta}$。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

若质点做初速度为零的匀加速直线运动，则在时间第 $1T$ 内，第 $2T$ 内，第 $3T$ 内，…，第 nT 内质点的位移之比是 $1:3:5:\cdots:(2n-1)$。

解题捷径 2

若质点做初速度为零的匀加速直线运动，则位移在第 1 秒内，第 2 秒内，第 3 秒内，…，第 n 秒内所用时间之比是 $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2}):\cdots:(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$。

解题捷径 3

若质点做匀变速直线运动，则它在某段时间内中间时刻的瞬时速度等于该段时间内的平均速度，且 $v_{\frac{t}{2}}=\dfrac{v_0+v_t}{2}$；该段位移中点的速度 $v_{\frac{s}{2}}=\sqrt{\dfrac{v_0^2+v_t^2}{2}}$，且无论加速、减速总有位移中点的速度大于时间中点的速度，即 $v_{\frac{s}{2}}>v_{\frac{t}{2}}$。

解题捷径 4

在加速度为 a 的匀变速运动中，任意两相邻的相等时间间隔 T 内位移之差都相等，且 $\Delta s=aT^2$。

解题捷径 5

在匀变速直线运动速度图象中，图象上各点的切线的斜率表示加速度；某段图线下的“面积”数值上与该段的位移相等。利用 $v—t$ 图象可将复杂问题简单化。

解题捷径 6

当物体的运动时间无法完全由运动学公式求解时，借助 $v—t$ 图象的特点来判断运动时间的长短，形象易懂。

解题捷径 7

若选一个运动的物体为新参考系，那么所有的物理量（速度、位移、加速度）都必须转

换为相对于新参考系的量，由运动学公式解出的量也都是相对于新参考系的相对物理量。

解题捷径 8

物体在做加速度随时间不断减小的变速直线运动时，当加速度减小到零时，其运动速度最终会达到一个稳定值，即所谓收尾速度。当加速度方向与速度方向相同时，收尾速度最大；当加速度方向与速度方向相反时，收尾速度最小。

解题捷径 9

在离地面高为 h 处，物体以初速度 v_0 竖直上抛，落到地面的过程中，全程满足 $-h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$。

解题捷径 10

船渡河时，船头总是垂直对岸所用的时间最短；当船在静水中的速度 $v_{船}>v_{水}$，船头斜指向上游，与河岸成 θ 角，且 $\cos\theta=\frac{v_{水}}{v_{船}}$ 时，位移最小。

解题捷径 11

当船在静水中的速度 $v_{船}<v_{水}$，船头斜指向下游，且与河岸成 θ 角，$\cos\theta=\frac{v_{船}}{v_{水}}$ 时，被冲至下游的距离最小，位移也最小。

解题捷径 12

当沿倾角 θ 的航线渡河时，船对水的最小速度 $v_{\min}$ 等于 $v_{水}$ 垂直于航线的分量且船头垂直于船向，即 $v_{\min}=v_{水}\sin\theta$。

解题捷径 13

末速度为零的匀减速直线运动可等效为初速度为零的逆向匀加速直线运动。初速度为零的匀加速直线运动规律在末速度为零的匀减速直线运动中都适用。

解题捷径 14

在追及过程中，若两运动物体的相对速度为零——即两物体的速度相等时，则两运动物体间距达到极值——最大或最小。

解题捷径 15

物体相遇的条件是物体同时运动到同一点；而物体间不发生相撞的条件是物体运动到同一点时，后一物体的速度小于等于前一物体的速度。

解题捷径 16

多普勒效应：波源不动，接收者以 v_1 向着（或远离）波源运动，则接收者感觉到的频率

为 $f=\left(\frac{v\pm v_1}{v}\right)f_0$；接收者不动，波源以速度 v_2 向着（或远离）接收者运动，则 $f=\left(\frac{v}{v\mp v_2}\right)f_0$。

解题捷径 17

把物体相对静止参考系的运动称为绝对运动，相对运动参考系的运动称为相对运动，而运动参考系相对静止参考系的运动称为牵连运动。三者的运动速度关系是：绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和。

解题捷径 18

在相互关联的几个物体中，其中一个物体（研究对象）的实际运动为合运动，对应速度为合速度。对其分解，根据运动的实际效果确定分解方向，再根据平行四边形定则分解。

解题捷径 19

杆或绳约束物体系各点速度的相关特征是：在同一时刻必须具有相同的沿杆或绳方向的分速度。

解题捷径 20

相互接触的物体系接触点速度的相关特征是：沿接触面法向的分速度必定相同，沿接触面切向的分速度在无相对滑动时相同。

解题捷径 21

线状相交物体系交叉点的速度是相交双方沿对方运动分速度的矢量和。

解题捷径 22

自由弦的等时性：物体从静止开始，无摩擦地由竖直圆环的最高点沿不同的弦运动到圆周上或者从圆周上沿不同的弦运动到圆环的最低点，所需时间都相同，且等于沿竖直圆环的直径自由落体的时间，即 $t=\sqrt{\frac{2d}{g}}$（d 为圆环的直径）。

解题捷径 23

当两物体从同地同时同向做直线运动时，相遇时间是速度相等时间的 2 倍，且速度相等时两物体相距最远。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

若质点做初速度为零的匀加速直线运动，则在时间第 $1T$ 内，第 $2T$ 内，第 $3T$ 内，…，第 nT 内质点的位移之比是 $1:3:5:\cdots:(2n-1)$。

【范例】 做自由落体运动的物体第 n 秒通过的位移比第 1 秒内通过的位移多__________m。($g=10\text{m/s}^2$)

【精析】 第 1 秒通过的位移为 $s=\frac{1}{2}gt^2=5\text{m}$，根据初速度为零的匀加速直线运动，则在时间第 $1T$ 内，第 $2T$ 内，第 $3T$ 内，…，第 nT 内质点的位移之比是 $1:3:5:\cdots:(2n-1)$。知 $s_n=(2n-1)\times5\text{m}=(10n-5)\text{m}$，所以第 n 秒通过的位移比第 1 秒内通过的位移多 $10(n-1)\text{m}$。

【同类精练】 如图 1-1-1 所示，物体以一定的初速度冲上固定光滑的斜面，到达斜面最高点时速度恰为零。已知物体运动到离斜面 $\frac{3}{4}$ 处的 B 点时，所用的时间为 t，求物体从 B 滑到 C 所用的时间。

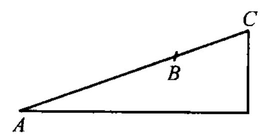


图 1-1-1

解题捷径 2

若质点做初速度为零的匀加速直线运动，则位移在第 1 秒内，第 2 秒内，第 3 秒内，…，第 n 秒内所用时间之比是 $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2}):\cdots:(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$。

【范例】 一列火车从静止开始做匀加速直线运动，有一人站在月台上从第一节车厢的前端观察，第一节车厢通过他历时 2s，全部车厢通过他历时 6s，设各车厢长度相等，不计车厢连接处间隙，试问：

(1)最后 2s 内有几节车厢通过他？

(2)最后一节车厢通过他需要多长时间？

【精析】 (1)把 6s 分成三个 2s，第一个 2s 通过 1 节车厢，可见第二个 2s 内通过 3 节车厢，最后通过 5 节车厢。

(2)由题意知最后一节车厢为第 9 节车厢，$t_1 : t_9 = 1 : (\sqrt{9}-\sqrt{8})$，

所以，通过的时间为 $t_9 = 2(\sqrt{9}-\sqrt{8})\text{s} = 0.34\text{s}$。

【同类精练】 子弹以水平速度 v_0 击中固定在水平地面上的四块完全相同的木块，刚好击穿，若假定子弹在木块中做匀减速运动，打穿第一块木块所用的时间为 t，问：打穿第三块木块所用的时间为多少？

解题捷径 3

若质点做匀变速直线运动，则它在某段时间内中间时刻的瞬时速度等于该段时间内的平均速度，且 $v_{\frac{t}{2}} = \frac{v_0+v_t}{2}$；该段位移中点的速度 $v_{\frac{s}{2}} = \sqrt{\frac{v_0^2+v_t^2}{2}}$，且无论加速、减速总有位移中点的速度大于时间中点的速度，即 $v_{\frac{s}{2}} > v_{\frac{t}{2}}$。

【范例】 汽车从静止开始出发，在水平路面上做匀加速直线运动，通过相距为 38.4m 的甲、乙两地需要 8s，经过乙地速度是经过甲地速度到 2 倍，求汽车的加速度和甲地离汽车出发点的距离。

【精析】 设甲、乙两地间距离为 s，令 $t=8\text{s}$，由平均速度公式可知

$$\frac{s}{t} = \frac{v_{甲}+y_{乙}}{2}$$

又由 $v_{乙} = 2v_{甲}$，可得

$$v_{甲} = \frac{2s}{3t} = 3.2\text{m/s}$$

$$v_{乙} = 2v_{甲} = 6.4\text{m/s}$$

$$a = \frac{v_{乙}-v_{甲}}{t} = 0.4\text{m/s}^2$$

设甲地离汽车出发点的距离为 $s_{甲}$，则 $v_{甲}^2 = 2as_{甲}$，

所以，$s_{甲} = \frac{v_{甲}^2}{2a} = 12.8\text{m}$。

【同类精练】 一质点做匀变速直线运动，如图 1-3-1 所示，途中依次通过 a、b、c、d、e 各点，已知 $ab=de$，$bc=cd$，若 ae 段的平均速度为 v_1，bd 段的平均速度为 v_2，则(　　)

A. $v_1 > v_2$

B. $v_1 = v_2$

C. $v_1 < v_2$

D. 条件不足，无法确定

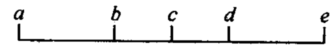


图 1-3-1

解题捷径 4

在加速度为 a 的匀变速运动中，任意两相邻的相等时间间隔 T 内位移之差都相等，且 $\Delta s = aT^2$。

【范例】 有一做匀变速直线运动的质点，它在连续相等的时间间隔内，所通过的位移分别是 24m 和 4m，每一时间间隔为 4s，求质点的初速度与加速度。

【精析】 根据匀变速直线运动中，相邻的连续相等的时间内位移差是恒量，即

$$\Delta s = s_2 - s_1 = at^2$$

则质点的加速度为

$$a = \frac{\Delta s}{t^2} = \frac{64 - 24}{16} = 2.5\text{m/s}^2$$

又由 $s_1 = vt + \frac{1}{2}at^2$，得

$$v = \frac{s_1}{t} - \frac{1}{2}at = 1\text{m/s}$$

【同类精练】 在研究平抛运动的实验中，用一张印有小方格的纸记录轨迹。小方格的边长 $l = 1.25$cm。若小球在平抛运动中的几个点如图 1-4-1 中 a、b、c、d 所示，求小球的初速度。（$g = 10\text{m/s}^2$）

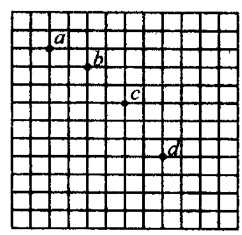


图 1-4-1

解题捷径 5

在匀变速直线运动速度图象中，图象上各点的切线的斜率表示加速度；某段图线下的“面积”数值上与该段的位移相等。利用 v—t 图象可将复杂问题简单化。

【范例】 一辆汽车由静止出发从 A 地沿一条直线驶向 B 地，并正好停在 B 地。已知

A、B 两地相距为 s，汽车做匀加速行驶的加速度为 a_1，做匀减速行驶的加速度的绝对值为 a_2。试求汽车从 A 地驶向 B 地所需的最短时间。

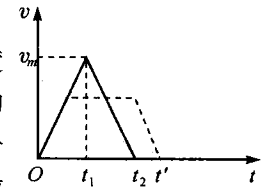


图 1-5-1

【精析】 先用速度图象分析所需最短时间的方案。由于速度图象与时间轴所围的几何图形的面积值等于汽车在这段时间里的位移，从图 1-5-1 可看出，在位移（即面积）一定的情况下，开始应一直加速，接着马上减速行驶，使之刚好在 B 点停止，对应的时间为最小。设加速的位移为 s_1，减速的位移为 s_2，最大速度为 v_m，则有

$$s=s_1+s_2=\frac{v_m^2}{2a_1}+\frac{v_m^2}{2a_2} \tag{1}$$

又因为

$$s=s_1+s_2=\frac{v_m t_1}{2}+\frac{v_m t_2}{2}=\frac{v_m t}{2} \tag{2}$$

由(2)可得 $v_m=\dfrac{2s}{t_{\min}}$，

代入(1)可得 A 到 B 的最短时间为

$$t_{\min}=\sqrt{\frac{2s(a_1+a_2)}{a_1 a_2}}$$

【同类精练】 一列客车以 v_1 的速度前进，司机突然发现前面同一直线上有一列货车正以 v_2 的速度匀速前进，且 $v_2<v_1$，这时货车尾部与客车头部距离为 s。客车立即开始刹车，做匀减速运动，而货车仍保持原速不变。求客车的加速度满足什么条件，两车才不致相撞？

解题捷径 6

当物体的运动时间无法完全由运动学公式求解时，借助 v—t 图象的特点来判断运动时间的长短，形象易懂。

【范例】 甲、乙两光滑斜面高度和长度都相同，但其结构不同，如图 1-6-1 所示。现将两个相同的小球从两斜面的顶端同时释放，不计拐角处的能量损失，问哪个先到达底端？

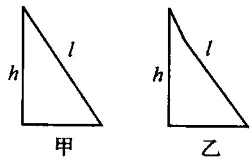


图 1-6-1

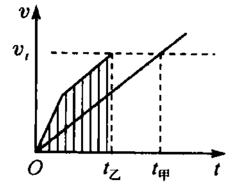


图 1-6-2

【精析】 小球沿甲斜面下滑是匀加速运动，设加速度为 a_1。小球沿乙斜面下滑，上、下两段加速度不同，设上段加速度为 a_2，下段为 a_3。

显然 $a_3 < a_1 < a_2$，又由题设条件可知，小球滑到斜面底端时速率相等，设为 v_t，它们所走过的路程也相等，即图 1-6-2 中与横轴所围面积相等，作出图示 v—t 图象很快可判断 $t_甲 > t_乙$。

【同类精练】 如图 1-6-3 所示，已知两物体的质量 $m_A > m_B$，如果同时从固定的光滑斜面的顶点由静止开始滑下。已知斜面倾角 $\alpha < \beta$，那么它们滑到底端所用的时间应为(　　)

A. A 比 B 长

B. B 比 A 长

C. A、B 相等

D. 不能确定

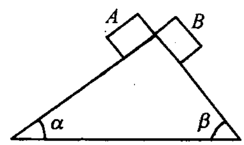


图 1-6-3

解题捷径 7

若选一个运动的物体为新参考系，那么所有的物理量(速度、位移、加速度)都必须转换为相对于新参考系的量，由运动学公式解出的量也都是相对于新参考系的相对物理量。

【范例】 如图 1-7-1 所示，ab、cd 两杆长度均为 L，b 端和 c 端相距 s，当悬挂 ab 杆的细线烧断的同时，cd 杆以初速度 v_0 竖直上抛，求：

(1)从开始运动到两杆相遇所用的时间；

(2)从相遇到分开所用的时间。

【精析】 若选地面为参考系时，则 ab 做自由落体运动，cd 做竖直上抛运动，求解较复杂。

若选 ab 杆为参考系，则 cd 杆相对 ab 杆做匀速直线运动。

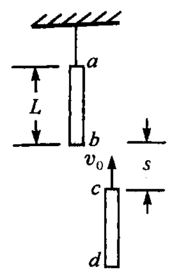


图 1-7-1

(1)从开始运动到相遇时，相对走过距离 s，由匀速运动公式可知，运动时间为 $t_1 = \frac{s}{v_0}$。

(2)从相遇到分开，相对走过距离为 $2L$，同理可得运动时间为 $t_2 = \frac{2L}{v_0}$。

【同类精练】 高为 h 的电梯正以加速度 a 匀加速上升，某时刻突然有一个螺丝从电梯天花板上掉落下来，问经过多长时间螺丝能落到电梯的地板上？

解题捷径 8

物体在做加速度随时间不断减小的变速直线运动时，当加速度减小到零时，其运动速度最终会达到一个稳定值，即所谓收尾速度。当加速度方向与速度方向相同时，收尾速度最大；当加速度方向与速度方向相反时，收尾速度最小。

【范例】 “神舟六号”飞船完成了预定空间科学和技术试验任务后，返回舱开始从太空向地球表面按预定轨道返回。返回舱开始时通过自身制动发动机进行调控变速下降，穿越大气层后，在一定的高度打开阻力降落伞进一步减速下降，这一过程中若返回舱所受空气阻力与速度的平方成正比，比例系数（空气阻力系数）为 k，所受空气浮力恒定不变，且认为竖直降落，从某时刻开始计时，返回舱的运动 $v—t$ 图象如图 1-8-1 中的 AD 曲线所示，图中 AB 是曲线 AD 在 A 点的切线，切线交于横轴一点 B，其坐标为 $(8,0)$，CD 是曲线 AD 的渐近线。假如返回舱总质量 $M=400\text{kg}$，g 取 10m/s^2。试问：

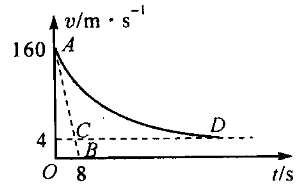


图 1-8-1

(1)返回舱在这一阶段是怎样运动的？

(2)在初始时刻 $v=160\text{m/s}$，此时它的加速度多大？

(3)推证空气阻力系数 k 的表达式并计算其值。

【精析】 (1)根据速度图象性质可以得出，该曲线的切线斜率逐渐减小，表明这一阶段返回舱开始做加速度逐渐减小的减速运动，最后是匀速运动（收尾速度）。

(2)在初始速度 $v=160\text{m/s}$ 时，过 A 点切线的斜率即为此时的加速度大小：

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{160-0}{8}\text{m/s}^2=20\text{m/s}^2$$

(3)设返回舱所受空气浮力为 f，在 $t=0$ 时，根据牛顿第二定律有：$kv^2+f-Mg=Ma$。

由图线知返回舱最终速度为 $v_m=4\text{m/s}$ 时，返回舱受力平衡，即有：$kv_m^2+f-Mg=0$，

由上述两式解得：$k=\frac{Ma}{v^2-v_m^2}=0.313$。

【同类精练】 质量为40kg的雪橇在倾角$\theta=37°$的斜面上向下滑动（如图1-8-2甲所示），所受的空气阻力与速度成正比。今测得雪橇运动的v—t图象如图乙所示，且AB是曲线的切线，B点坐标为(4,15)，CD是曲线的渐近线。试求空气的阻力系数k和雪橇与斜坡间的动摩擦因数μ。

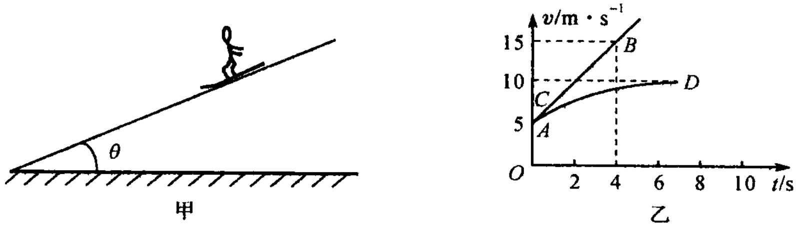


图1-8-2

解题捷径9

在离地面高为h处，物体以初速度v_0竖直上抛，落到地面的过程中，全程满足$-h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$。

【范例】 气球以4m/s的速度匀减速上升，它上升到217m高处时，一重物由气球里掉落，则重物要经过多长时间才能落到地面？到达地面时的速度是多少？($g=10m/s^2$)

【精析】 物体由掉落至落地全过程为匀减速运动，以向上为正方向，则g为负，抛出点以下位移为负值，由$-h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$得

$$-217=4t-5t^2$$

解得$t_1=7s$，$t_2=-6.2s$（舍去），

落至地面的速度为

$$v=v_0-gt=4-10\times7=-66m/s$$

负号说明末速度方向与规定的正方向相反，即竖直向下。

【同类精练】 一气球由地面释放以 $4m/s^2$ 的加速度竖直上升，第 10s 末从气球底端外部脱落一物体，则此物体经________s 落到地面。（$g=10m/s^2$）

解题捷径 10

船渡河时，船头总是垂直对岸所用的时间最短；当船在静水中的速度 $v_{船}>v_{水}$，船头斜指向上游，与河岸成 θ 角，且 $\cos\theta=\frac{v_{水}}{v_{船}}$时，位移最小。

【范例】 河宽为 s，船在静水中速度为 v_1，水速为 v_2，$v_1>v_2$。问：(1)怎样划行，所走的位移最小？(2)怎样划行，过河时间最短？这时所用时间多长？

【精析】 (1)当船斜向上游划行，使船对岸的方向与河岸垂直时，船过河位移最小，如图 1-10-1 所示，则 $\cos\theta=\frac{v_2}{v_1}$，$\theta=\arccos\frac{v_2}{v_1}$，最小位移等于河宽 s。

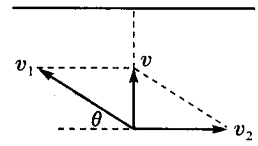


图 1-10-1

(2)当船的划行方向垂直河岸时，过河时间最短，所用时间为$t=\frac{s}{v_1}$。

【同类精练】 一条大河宽 $d=300m$，水的流速 $v_{水}=1.0m/s$。船在静水中的速度 $v_{船}=3.0m/s$。试分析在下列情况下应怎样渡河？渡河时间是多少？

(1)以最短时间渡河；

(2)以最小位移渡河。

解题捷径 11

当船在静水中的速度 $v_{船}<v_{水}$，船头斜指向下游，且与河岸成 θ 角，$\cos\theta=\frac{v_{船}}{v_{水}}$时，被冲至下游的距离最小，位移也最小。

【范例】 一只小船要渡过水流速度为 $v_{水}$ 的小河，已知小船在静水中划行时的速度为 $v_{划}$，且 $v_{划}<v_{水}$，问：船头应指向哪个方向划行时，渡河的航线最短？

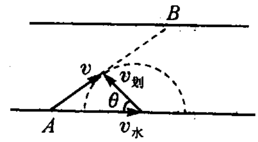


图 1-11-1

【精析】 以 $v_{水}$ 的矢尖为圆心，以 $v_{划}$ 为半径作圆，如图 1-11-1 所示。$v_{水}$、$v_{划}$ 的合速度即为 v，也就是渡河的实际航线方向。随着 $v_{划}$ 方向的不同，v 矢量末端的可能位置应在图中的圆周上。由图可见，要使航线 AB 最短，v 的方向线应与上述半圆相切，即 $v \perp v_{划}$。所以，小船划行的方向应偏向下游，且与河岸的夹角 $\theta=\arccos\frac{v_{划}}{v_{水}}$。

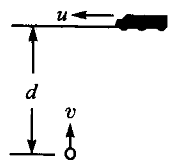


图 1-11-2

【同类精练】 一人骑马以速度 v 奔向公路。当他距公路为 d 时，发现右侧有一辆汽车正以速度 $u(u>v)$ 沿公路驶来（如图 1-11-2 所示）。为了能在离汽车尽可能远的地方安全穿越公路，试分析骑马人应沿什么方向前进？

解题捷径 12

当沿倾角 θ 的航线渡河时，船对水的最小速度 $v_{\min}$ 等于 $v_{水}$ 垂直于航线的分量且船头垂直于船向，即 $v_{\min}=v_{水}\sin\theta$。

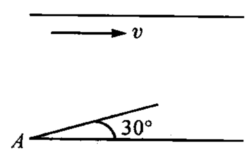


图 1-12-1

【范例】 如图 1-12-1 所示，河水的流速为 4m/s，船要从河的南岸 A 点沿与河岸成 30°角的直线航行到北岸时，则船相对水的速度的最小值为（　　）

A. 5m/s　　B. 4m/s

C. 3m/s　　D. 2m/s

【精析】 当沿倾角 θ 的航线渡河时，船对水的最小速度 $v_{\min}$ 等于 $v_{水}$ 垂直于航线的分量且船头垂直于船向，即 $v_{\min}=v_{水}\sin\theta$。

所以，$v_{\min}=v_{水}\sin\theta=2$m/s。故 D 选项正确。

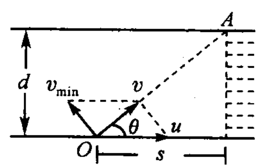


图 1-12-2

【同类精练】 如图 1-12-2 所示，一条河的宽度为 $d=300$m，水的流速为 $u=50$m/s，并在下游形成瀑布。一艘船从距瀑布 $s=400$m 的上游渡河。为了不致被冲进瀑布中，试分析船头应沿什么方向航行？船对水的最小速度是多少？

解题捷径 13

末速度为零的匀减速直线运动可等效为初速度为零的逆向匀加速直线运动。初速度为零的匀加速直线运动规律在末速度为零的匀减速直线运动中都适用。

【范例】 一个小球做竖直上抛运动，到达最高点的最后 1s 内上升的高度为小球上升最大高度的$\frac{1}{6}$。求小球上升的最大高度(取 $g=10\text{m/s}^2$)。

【精析】 根据竖直上抛运动的逆运动，就是从上抛最高点开始的自由落体运动，则竖直上抛最后 1s 内上升的高度等于自由落体最初 1s 内下落的高度。所以小球上升的最大高度为

$$H_m=6\times\frac{1}{2}gt^2=30\text{m}$$

【同类精练】 一物体以某一初速度在粗糙的平面上做匀减速直线运动，最后静止。若此物体在最初 5s 内通过的路程与最后 5s 内通过的路程之比为 11∶5，求此物体一共运动了多少时间？

解题捷径 14

在追及过程中，若两运动物体的相对速度为零——即两物体的速度相等时，则两运动物体间距达到极值——最大或最小。

【范例】 车从静止开始以 1m/s^2 的加速度前进，车后相距 $s_0=25\text{m}$ 处，某人同时开始以 6m/s 的速度匀速追车，能否追上？若追不上，求人、车之间的最小距离为多少？

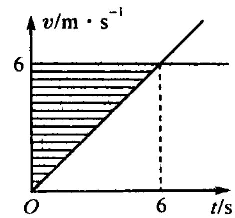


图 1-14-1

【精析】 作出人与车的 v—t 图象。从图 1-14-1 中可以看出人追车的最大距离就是图中有阴影部分三角形的面积，该面积所对应的位移为 $s=\frac{6\times6}{2}=18\text{m}<25\text{m}$，说明人追不上车。人追车的过程中人与车的运动距离之差最大时，人、车之间的距离最小，其最小值为 $s_{\min}=s_0-s=25\text{m}-18\text{m}=7\text{m}$。

【同类精练】 甲、乙两汽车沿同一平直公路同向匀速行驶，甲车在前，乙车在后，它们

行驶的速度均为 16m/s，已知甲车紧急刹车时加速度 $a_1=3\text{m/s}^2$，乙车紧急刹车时加速度 $a_2=4\text{m/s}^2$，乙车司机的反应时间为 0.5s。求为保证两车在紧急刹车过程中不相撞，甲、乙两车行驶过程中至少应保持多大距离？

解题捷径 15

物体相遇的条件是物体同时运动到同一点；而物体间不发生相撞的条件是物体运动到同一点时，后一物体的速度小于等于前一物体的速度。

【范例】 甲以速度 15m/s 骑车时，突然发现前方 50m 处乙也在骑车向同一方向匀速行驶。甲立刻停止蹬车任车自由匀减速滑行。10s 后甲恰好追上乙而不致相撞。求乙的行车速度。

【精析】 “恰好追上乙而不致相撞”的意思是甲追上乙时速度恰好与乙的车速相等。以乙为参考物，则相对距离为 50m，相对初速度为 $v_{0相}=15-v_乙$，

由平均速度的定义知 $\bar{v}_{相}=\frac{50}{10}=5\text{m/s}$，

而在匀变速运动中 $\bar{v}_{相}=\frac{1}{2}(v_{0相}+v'_{相})=\frac{1}{2}(v_{0相}+0)$，

故 $v_{0相}=10\text{m/s}$，

$v_乙=5\text{m/s}$。

【同类精练】 在一条平直的公路上，甲、乙两车同向行驶，乙车以 10m/s 的速度匀速行驶，甲车在乙车的后面做加速度为 a 的匀减速行驶，甲车的初速度为 15m/s，试讨论，在甲车开始减速时，两车间的距离 L 满足什么条件可以使：

(1)两车不相遇；(2)两车只能相遇一次；(3)两车能两次相遇。

解题捷径 16

多普勒效应：波源不动，接收者以 v_1 向着(或远离)波源运动，则接收者感觉到的频率为 $f=\left(\dfrac{v\pm v_1}{v}\right)f_0$；接收者不动，波源以速度 v_2 向着(或远离)接收者运动，则 $f=\left(\dfrac{v}{v\mp v_2}\right)f_0$。

【范例】 正在报警的警钟，每隔 0.5s 响一声，一声接一声地响着，有一个人在以 60km/h 的速度向警钟方向行驶的火车中，问这个人在 5min 内听到几声警钟响(取空气声速为 340m/s)？

【精析】 这个问题关键是要求出观察者接收到的频率，因为是观察者向着声波运动，所以可用 $f=\dfrac{(v+v_1)}{v}f_0$ 来求解。

设 f_0 为警钟的频率，依题意有 $f_0=\dfrac{1}{0.5}=2\text{Hz}$，

又车速 $v_1=60\text{km/h}=16.7\text{m/s}$，声速 $v=340\text{m/s}$，所以在 5min 内听到响声次数为 $n=ft=\dfrac{(v+v_1)}{v}f_0t=629$(次)。

【同类精练】 设在某均匀介质(如空气)中，一发声体 P 正在发射某一恒定频率的声波。在离 P 距离为 s 的地方有一观察者 Q 听到 P 发出的声波音调一定，那么下列说法中正确的是(　　)

A. 当 P 不动，Q 以一定速度远离 P 时，Q 听到的音调变高

B. 当 Q 不动，P 以一定速度远离 Q 时，Q 听到的音调变高

C. 当 P、Q 均以一定速度相互接近时，Q 听到的音调变低

D. 当 P、Q 均以一定速度相互远离时，Q 听到的音调变低

解题捷径 17

把物体相对静止参考系的运动称为绝对运动，相对运动参考系的运动称为相对运动，而运动参考系相对静止参考系的运动称为牵连运动。三者的运动速度关系是：绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和。

【范例】 一人骑自行车以 4m/s 的速度向正东行驶时，感到风从正南方吹来；当他将骑行速度增加到 6m/s 时，感到风从东南方吹来。求风速的大小和方向。

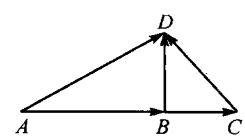


图 1-17-1

【精析】 根据相对运动的规律，列出方程

增速前，$\vec{v}'_{风地}=\vec{v}'_{风人}+\vec{v}'_{人地}$

增速后，$\vec{v}'_{风地}=\vec{v}'_{风人}+\vec{v}'_{人地}$

作出矢量图（两个矢量作在一起），图 1-17-1 中，AB 为 $\vec{v}_{人地}$，AC 为 $\vec{v}'_{人地}$，BD 为 $\vec{v}_{风人}$，CD 为 $\vec{v}'_{风人}$，AD 为 $\vec{v}_{风地}$。在图中，因为 $\angle DCB=45°$，所以 $\overline{BD}=\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=(6-4)=2\text{m/s}$，

在 $\triangle ABD$ 中，$v_{风地}=\overline{AD}=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}\text{m/s}$，

$\alpha=\arctan\dfrac{1}{2}=26.5°$，因此风速大小为 $2\sqrt{5}\text{m/s}$，方向是东偏北 26.5°。

【同类精练】 如图 1-17-2 所示，B 是质量为 m_B、半径为 R 的光滑半球形碗，放在光滑的水平桌面上，A 是质量为 m_A 的细长直杆，被固定的光滑套管 C 约束在竖直方向，A 可自由上下运动。碗和杆的质量关系为：$m_B=2m_A$。初始时，A 杆被握住，使其下端正好与碗的半球面的上边缘接触（见图示），然后从静止开始释放 A，A、B 便开始运动。

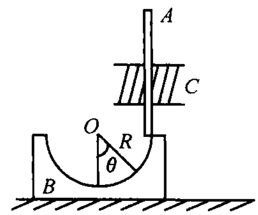


图 1-17-2

设 A 杆的位置用 θ 表示，θ 为碗面的球心 O 至 A 杆下端与球面接触点的连线方向和竖直方向之间的夹角。求 A 与 B 速度的大小（结果表示成 θ 的函数）。

解题捷径 18

在相互关联的几个物体中，其中一个物体（研究对象）的实际运动为合运动，对应速度为合速度。对其分解，根据运动的实际效果确定分解方向，再根据平行四边形定则分解。

【范例】 均匀光滑细棒 AB 长 L，A、B 两端分别靠在光滑墙和地板上，如图 1-18-1 所示，由于光滑，棒将开始滑动，当 A 端滑动到离 O 点距离为 y 时，A 端速度为 v，问此时 B 端速度多大？

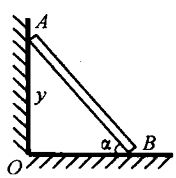


图 1-18-1

【精析】 将 A、B 两处速度均分解为沿杆方向和垂直于杆方向两个分速度，根据两处沿杆方向的分速度相等得

$$v_B\cos\alpha=v_A\sin\alpha,$$

即
$$v_B=v\tan\alpha=\frac{yv}{\sqrt{L^2-y^2}}$$

【同类精练】 如图 1-18-2 所示，在光滑水平面上放一质量为 M、边长为 l 的正方体木块，木块上有一长为 L 的轻质光滑棒，棒的一端用光滑铰链连接于地面上 O 点，棒可绕 O 点在竖直平面内自由转动，另一端固定一质量为 m 的均质金属小球。开始时，棒与木块均静止，棒与水平面夹角为 α。当棒绕 O 点向垂直于木块接触边方向转动到棒与水平面间夹角为 β 的瞬时，求木块速度的大小。

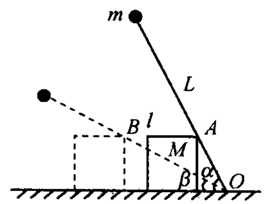


图 1-18-2

解题捷径 19

杆或绳约束物体系各点速度的相关特征是：在同一时刻必须具有相同的沿杆或绳方向的分速度。

【范例】 如图 1-19-1 所示，杆 AB 的 A 端以速度 v 做匀速运动，在杆运动时恒与一静止的半圆周相切，半圆周的半径为 R，当杆与水平线的交角为 θ 时，求杆的角速度 ω 及杆上与半圆相切点 C 的速度。

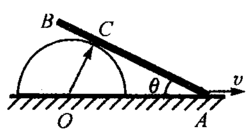


图 1-19-1

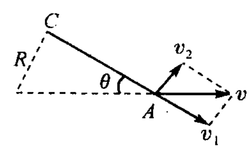


图 1-19-2

【精析】 由于半圆静止，杆上点 C 速度的法向分量为零，故点 C 速度必沿杆的方向，以 C 点为基点，将杆上点 A 速度 v 分解成沿杆方向分量 v_1 和垂直于杆方向分量 v_2，如图 1-19-2 所示，则 v_1 是点 A 与点 C 相同的沿杆方向平动速度，v_2 是点 A 对点 C 的转动速度，故可求得点 C 的速度为 $v_C=v_1=v\cos\theta$，

又 $$v_2=v\cdot\sin\theta=\omega\cdot AC$$

由题给几何关系知，A 点对 C 点的转动半径为 $AC=R\cdot\cot\theta$，

代入前式中即可解得 $\omega=\dfrac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta}$。

【同类精练】 如图 1-19-3 所示，物体 A 置于水平面上，物体 A 上固定有动滑轮 B，D 为定滑轮，一根轻绳绕过滑轮 D、B 后固定在 C 点，BC 段水平。当以速度 v 拉绳头时，物体 A 沿水平面运动，若绳与水平面夹角为 α，则物体 A 运动的速度是多大？

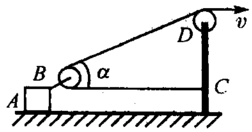


图 1-19-3

解题捷径 20

相互接触的物体系接触点速度的相关特征是：沿接触面法向的分速度必定相同，沿接触面切向的分速度在无相对滑动时相同。

【范例】 如图 1-20-1 所示，半径为 R 的半圆凸轮以等速 v_0 水平向右运动，带动从动杆 AB 沿竖直方向上升，O 为凸轮圆心，P 为顶点。求当 $\angle AOP=\alpha$ 时，AB 杆的速度。

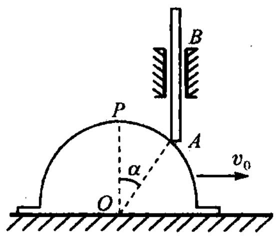


图 1-20-1

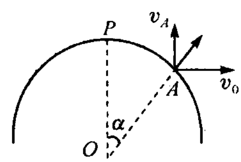


图 1-20-2

【精析】 由题可知，杆与凸轮在 A 点接触，杆上 A 点速度 v_A 是竖直向上的，轮上 A 点的速度 v_0 是水平向右的，根据接触物体系触点速度相关特征，两者沿接触面法向的分速度相同，如图 1-20-2 所示，即 $v_A\cos\alpha=v_0\sin\alpha$，则 $v_A=v_0\tan\alpha$，所以 AB 杆的速度为 $v_0\tan\alpha$。

【同类精练】 如图 1-20-3 所示，缠在线轴上的绳子一头搭接在墙上的光滑钉子 A 上，以恒定的速度 v 拉绳，当绳与竖直方向成 α 角时，求线轴中心速度 v_0。设线轴的外径为 R，内径为 r，线轴沿水平面做无滑动的滚动。

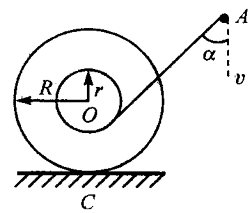


图 1-20-3

解题捷径 21

线状相交物体系交叉点的速度是相交双方沿对方运动分速度的矢量和。

【范例】 如图 1-21-1 所示，A、B 两直杆交角为 θ，交点为 M，若两杆各以垂直于自身的速度 v_1、v_2 沿着纸面运动，则交点 M 的速度为多大？

【精析】 如图 1-21-1 所示，若 B 杆不动，A 杆以 v_1 速度运动，交点将沿 B 杆移动，速度为 v'_1，$v'_1=v_1/\sin\theta$。若 A 杆不动，B 杆移动时，交点 M 将沿 A 杆移动，速度为 v'_2，$v'_2=v_2/\sin\theta$。两杆一起移动时，交点 M 的速度 v_M 可看成两个分速度 v'_1 和 v'_2 的合速度，故 v_M 的大小为 $v_M=\sqrt{v'^2_1+v'^2_2-2v'_1v'_2\cos(180^\circ-\theta)}=\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}/\sin\theta$。

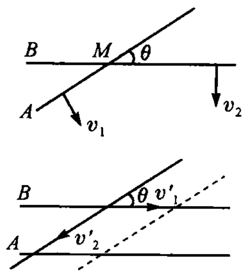


图 1-21-1

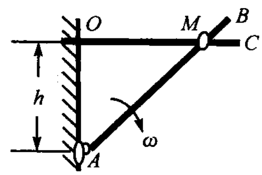


图 1-21-2

【同类精练】 如图 1-21-2 所示，AB 杆以角速度 ω 绕 A 点转动，并带动套在水平杆 OC 上的小环 M 运动。运动时，AB 杆在竖直位置，设 $OA=h$。求：

(1) t 时刻小环 M 沿 OC 杆滑动的速度；

(2) t 时刻小环 M 相对于 AB 杆运动的速度。

解题捷径 22

自由弦的等时性：物体从静止开始，无摩擦地由竖直圆环的最高点沿不同的弦运动到圆周上或者从圆周上沿不同的弦运动到圆环的最低点，所需时间都相同，且等于沿竖直圆环的直径自由落体的时间，即 $t=\sqrt{\dfrac{2d}{g}}$（d 为圆环的直径）。

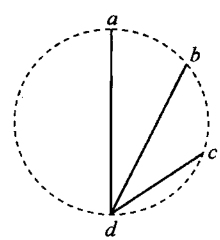


图 1-22-1

【范例】 如图 1-22-1 所示，ad、bd、cd 是竖直面内三根固定的光滑细杆，a、b、c、d 位于同一圆周上，a 为圆周的最高点，d 为最低点。每根杆上都套着一个小滑环（图中未标出），三个滑环分别从 a、b、c 处释

放(初速度都为 0),用 t_1,t_2,t_3 依次表示各滑环到达 d 所用的时间,则(　　)

A. $t_1<t_2<t_3$　　B. $t_1>t_2>t_3$　　C. $t_3>t_1>t_2$　　D. $t_1=t_2=t_3$

【精析】 由自由弦的等时性知,D 选项正确。

【同类精练】 如图 1-22-2 所示,小球(图中未标出)从 A 处释放自由落体到达 D 所用时间为 t_1,从 B 处释放沿光滑细杆运动到达 D 所用时间为 t_2,从 C 处释放沿极小的光滑圆弧到达 D 所用时间为 t_3,则(　　)

A. $t_1<t_2<t_3$

B. $t_3<t_1=t_2$

C. $t_3>t_2=t_1$

D. $t_1=t_2=t_3$

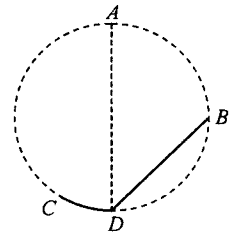


图 1-22-2

解题捷径 23

当两物体从同地同时同向做直线运动时,相遇时间是速度相等时间的 2 倍,且速度相等时两物体相距最远。

【范例】 如图 1-23-1 所示是甲、乙两物体从同一地点同时沿同一方向运动的速度图象,其中 $t_2=2t_1$,则(　　)

A. 在 t_1 时刻,乙物体在前,甲物体在后

B. 在 t_1 时刻,甲、乙两物体相遇

C. 在 t_1 时刻,甲、乙两物体速度相等,且两物体相距最远

D. 在 t_2 时刻,甲、乙两物体相遇

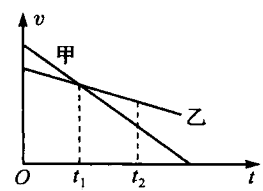


图 1-23-1

【精析】 由题意 $t_2=2t_1$ 知,在 t_2 时刻两物体相遇,在 t_1 时刻两物体速度相等,由规律可知在 t_1 时刻,两物体相距最远。所以 C、D 正确。

【同类精练】 A、B 两物体从同地同时同向做匀加速直线运动,A 的初速度为零,B 的初速度为 v_0,经过时间 t,两物体相遇,相遇前两物体的最大距离为________。

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 物体向上匀减速运动,相当于向下匀加速下滑。对于初速度为零的匀加速直线运动,在连续相等的时间中通过的位移之比为 $1:3:5:\cdots:(2n-1)$。

在本题中 $s_{CB}:s_{BA}=1:3$,所以有 $t_{BC}=t_{AB}=t$,

即物体从 B 到 C 所用的时间为 t。

解题捷径 2

【精析】 采用逆向思维求解。子弹穿过木块做匀减速运动至零，可看作子弹以初速度为零的反向匀加速直线运动。而以初速度为零的匀加速直线运动的物体，在通过连续相等的位移所用的时间比为 $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{4}-\sqrt{3})$，

在本题中应有

$$\frac{t_3}{t_1}=\frac{t_3}{t}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$$

$$t_3=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}t=1.53t$$

解题捷径 3

【精析】 ae 段的平均速度 v_1 是整个过程的平均速度，它等于 ae 段时间中点的速度，而 bd 段的平均速度 v_2 恰好正是整个过程位移中点的速度。由位移中点的速度大于时间中点的速度知 $v_1<v_2$。所以答案 C 正确。

解题捷径 4

【精析】 用公式 $\Delta s=aT^2$ 求解。因相邻两点的水平距离相等，因此在相邻两点间运动所用的时间相等，设为 t，有

$$t=\frac{2l}{v_0} \quad (1)$$

小球在竖直方向做自由落体运动，已知在竖直方向相邻的两点位移之差为 l，由 $\Delta s=aT^2$ 可得

$$l=gt^2 \quad (2)$$

由(1)(2)两式可解出

$$v_0=2\sqrt{gl}=0.70\text{m/s}$$

解题捷径 5

【精析】 作出 $v-t$ 图象(见图 1-1)，图中画竖直线部分的面积表示当客车速度与货车速度相等时，客车比货车多走的位移 s，设此过程经历时间 t，则有

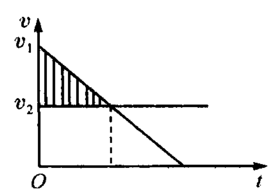
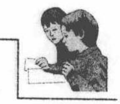


图 1-1

$$s=\frac{1}{2}(v_1-v_2)t \quad (1)$$

又因为

$$a=\frac{v_1-v_2}{t} \quad (2)$$



从(1)(2)式可解得两车刚相遇而不相撞的临界加速度值为 $a=\frac{(v_1-v_2)^2}{2s}$，

于是所求条件应为 $a\geq\frac{(v_1-v_2)^2}{2s}$。

解题捷径 6

【精析】 应用 v—t 图象求解。由题意分析可知 $a_A<a_B$，又由机械能守恒可知两物体滑到斜面底端的速度大小相等，即 $v_A=v_B=v_t$，它们的 v—t 图象如图 1-2 所示。

由图可知 $t_A>t_B$，即 A 比 B 长，

所以应选 A。

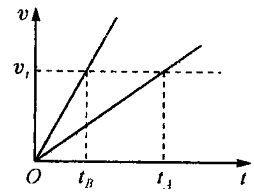


图 1-2

解题捷径 7

【精析】 选电梯为参考系，螺丝相对电梯的初速度为 0，相对位移为 h，则 $v_{0相}=0$，$s_{相}=h$，$a_{相}=a+g$，由 $s_{相}=v_{0相}t+\frac{1}{2}a_{相}t^2$ 知，$t=\sqrt{\frac{2h}{a+g}}$。

解题捷径 8

【精析】 由牛顿运动定律得：$mg\sin\theta-\mu N-kv=ma$，

由平衡条件得：$N=mg\cos\theta$，

由图象得：A 点，$v_A=5\text{m/s}$，加速度 $a_A=2.5\text{m/s}^2$，

最终雪橇匀速运动时最大速度(收尾速度)$v_m=10\text{m/s}$，$a=0$，

代入数据解得：$\mu=0.125$，$k=20\text{N}\cdot\text{s/m}$。

解题捷径 9

【精析】 10s 末物体上升的高度为 $h=\frac{1}{2}at^2=200\text{m}$，速度为 $v_{10}=at=40\text{m/s}$。

由全过程的竖直上抛运动知 $-h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，

得 $-200=40t-5t^2$，

解得 $t=11.5\text{s}$。

所以此物体经 11.5s 落到地面。

解题捷径 10

【精析】 (1)如图 1-3(a)所示，为了以最短时间渡河，船头应垂直于河岸，且最短时间为 $t_{\min}=\frac{d}{v_{船}}=100\text{s}$。

(2)如图(b)所示，为了渡河位移最小，合速度 v 的方向应与河岸垂直，且渡河时间为 $t=\frac{d}{v}=75\sqrt{2}$s。

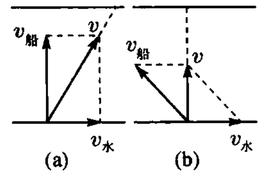


图 1-3

解题捷径 11

【精析】 以汽车为参照物，则人对车的速度为

$$\vec{V}=\vec{v}_{人地}+\vec{u}_{地车}=\vec{v}+(-\vec{u})$$

从矢量三角形可以看出：V 与 u 的夹角 α 越大，人穿越公路的位置 B 到 A 的距离越短，到汽车的距离就越远。那么，在什么条件下 α 角最大呢？如图 1-4 所示，以 u 的矢尖为圆心，以 v 为半径画圆，当 V 与圆相切时，α 角最大。设这时 v 与水平方向的夹角为 θ。根据三角函数关系，有 $\cos\theta=\frac{v}{u}$，所以人穿越公路的方位角为 $\theta=\arccos\frac{v}{u}$。

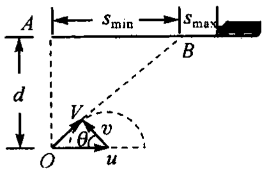


图 1-4

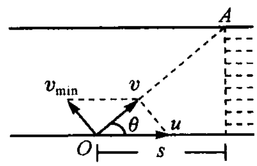


图 1-5

解题捷径 12

【精析】 如图 1-5 所示，船的合速度应沿 OA 方向，且船头与 OA 垂直。根据三角函数关系，最小速度为

$$v_{min}=u\sin\theta=\frac{3}{5}u=30\text{m/s}$$

解题捷径 13

【精析】 将物体视为反方向的初速度为零的匀加速运动，则

$$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{25}{2}a$$

$$s'=\frac{1}{2}a[t^2-(t-5)^2]=\frac{1}{2}a(10t-25)$$

由题设 $s':s=11:5$，

得
$$\frac{25}{2}a:\frac{1}{2}a(10t-25)=11:5$$

解得 $t=8$s。

解题捷径 14

【精析】 在甲刹车、乙未刹车的 0.5s 内，甲车位移 s_1 和乙车位移 s_2 分别为

$$s_1=v_0t-\frac{1}{2}a_1t^2, s_2=v_0t$$

这段时间内甲、乙两车之间距离减小，即

$$\Delta s_1=s_2-s_1=\frac{1}{2}a_1t^2=0.35\mathrm{m}$$

乙车开始刹车时，甲、乙两车的速度分别为

$$v_1=v_0-a_1t=16-3\times0.5=14.5\mathrm{m/s}$$

$$v_2=v_0=16\mathrm{m/s}$$

设乙车刹车后经过 Δt 时间，甲、乙两车的速度相同，有

$$v_1-a_1\Delta t=v_2-a_2\Delta t$$

则

$$\Delta t=\frac{v_2-v_1}{a_2-a_1}=\frac{16-14.5}{4-3}=1.5\mathrm{s}$$

在乙车开始刹车后 1.5s 时间内，甲、乙两车的位移分别为

$$s'_1=v_1\Delta t-\frac{1}{2}a_1\Delta t^2=18.375\mathrm{m}$$

$$s'_2=v_2\Delta t-\frac{1}{2}a_2\Delta t^2=19.5\mathrm{m}$$

在此过程中，两车之间的距离继续减小

$$\Delta s_2=s'_2-s'_1=1.125\mathrm{m}$$

从甲车开始刹车到乙车刹车后两车速度相同，乙车向甲车靠近的距离为

$$\Delta s=\Delta s_1+\Delta s_2=0.375+1.125=1.5\mathrm{m}$$

为保证两车不相撞，行驶时两车前后间距至少为 1.5m。

解题捷径 15

【精析】 由题意可知，两车相遇的条件是物体同时运动到同一点，两车速度相等。

对于甲车做匀减速运动：当 $v_t=v_{乙}$ 时，由 $v_t=v_0+at$ 得 $t=\frac{v_t-v_0}{a}=\frac{10-15}{-a}=\frac{5}{a}$，

$$s_{甲}=\frac{v_t^2-v_0^2}{2\times(-a)}=\frac{125}{2a};$$

对于乙车做匀速直线运动：$s_{乙}=v_{乙}\ t=10\times\frac{5}{a}=\frac{50}{a}$，

两车间的位移差 $\Delta s=s_{甲}-s_{乙}=\frac{25}{2a}$。

(1)两车不相遇，则 $L>\Delta s$，即$\frac{25}{2a}<L$。

(2)两车只能相遇一次，则 $L=\Delta s$，即$\frac{25}{2a}=L$。

(3)两车能两次相遇，则 $L<\Delta s$，即$\frac{25}{2a}>L$。

解题捷径 16

【精析】 由多普勒效应知：当波源和接收者相互接近时，接收者接收到的频率变大，音调变高；当波源和接收者相互远离时，接收者接收到的频率变小，音调变低。选 D。

解题捷径 17

【精析】 由题设条件知，若从地面参考系观测，则任何时刻 A 沿竖直方向运动，设其速度为 v_A，B 沿水平方向运动，设其速度为 v_B。若以 B 为参考系，从 B 观测，则 A 杆保持在竖直方向，它与碗的接触点在碗面内做半径为 R 的圆周运动，速度的方向与圆周相切，设其速度为 V_A。杆相对地面的速度是杆相对碗的速度与碗相对地面的速度的合速度，速度合成的矢量图如图 1-6 中的平行四边形所示。由图可得

$$V_A\sin\theta=v_A \tag{1}$$

$$V_A\cos\theta=v_B \tag{2}$$

因而

$$v_B=v_A\cot\theta \tag{3}$$

由能量守恒

$$m_AgR\cos\theta=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2 \tag{4}$$

由(3)、(4)两式及 $m_B=2m_A$ 得

$$v_A=\sin\sqrt{\frac{2gR\cos\theta}{1+\cos^2\theta}}$$

$$v_B=\cos\theta\sqrt{\frac{2gR\cos\theta}{1+\cos^2\theta}}$$

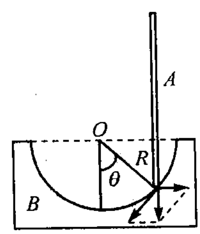


图 1-6

解题捷径 18

【精析】 设杆和水平面成 β 角时，木块速度为 v，小球速度为 v_m，与木块接触的杆上点 B 的速度为 v_B，因 B 点和小球 m 在同一杆上以相同角速度绕 O 点转动，所以有

$$\frac{v_m}{v_B}=\frac{\omega L}{\omega\,\overline{OB}}=\frac{L}{l/\sin\beta}=\frac{L}{l}\sin\beta$$

木块在此瞬间的速度水平向左，此速度可看作是两个速度的合成，即木块绕 O 点转动速度 $v_\perp=v_B$ 及木块沿杆方向小球 m 滑动的速度 $v_{/\!/}$，所以 $v_B=v\sin\beta$，故

$$v_m = v_B \frac{L}{l}\sin\beta = \frac{L}{l}v\sin^2\beta$$

因为从初位置到末位置的过程中只有小球重力对小球、轻杆、木块组成的系统做功，所以在上述过程中机械能守恒，则

$$mgL(\sin\alpha - \sin\beta) = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

综上所述得

$$v = l\sqrt{\frac{2mgL(\sin\alpha - \sin\beta)}{Ml^2 + mL^2\sin^4\beta}}$$

解题捷径 19

【精析】 任何时刻绳 BD 段上各点有与绳端 D 相同的沿绳 BD 段方向的分速度 v，再看绳的这个速度与物体 A 移动速度的关系：设物体 A 右移动速度为 v_x，则相对于物体 A(或动滑轮 B 的轴心)，绳上 B 点的速度为 v_x，即 $v_{BA}=v_x$，方向沿 BD 方向；而根据运动合成法则，在沿绳 BD 方向上，绳上 B 点速度是相对于参考系 A(滑轮 B 的轴心)的速度 v_x 与参考系 A 对静止参考系速度 $v_x\cos\alpha$ 的合成，即

$$v = v_{BA} + v_x\cos\alpha$$

由上述两方面可得 $v_x = \dfrac{v}{1+\cos\alpha}$。

解题捷径 20

【精析】 当线轴以恒定的速度 v 拉绳时，线轴沿顺时 l 针方向运动。

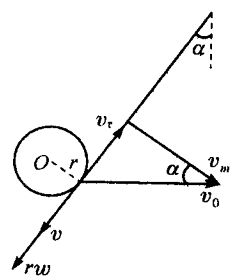


图 1-7

从绳端速度 v 到轴心速度 v_0，是通过绳、轴相切接触相关的。考察切点 B 的速度：绳与线轴间无滑动，故绳上 B 点与轴上 B 点速度完全相同，即无论沿切点切向或法向，两者均有相同的分速度。图 1-7 是轴上 B 点与绳上 B 点速度矢量图：轴上 B 点具有与轴心相同的平动速度 v_0 及对轴心的转动速度 $r\omega$(ω 为轴的角速度)，那么沿切向轴上 B 点的速度为 $r\omega - v_0\sin\alpha$；而绳上 B 点速度的切向分量正是沿绳方向，大小为速度 v，于是有关系式，即

$$r\omega - v_0\sin\alpha = v \tag{1}$$

又由于线轴沿水平地面做纯滚动，故与水平地面相切点 C 的速度为零，则轴心速度为

$$v_0 = R\omega \tag{2}$$

由(1)、(2)两式可解得

$$v_0=\frac{Rv}{r-R\sin\alpha}$$

解题捷径 21

【精析】 (1)经时间 t,杆转过 ωt 角,杆 AB 上 M 点速度为 $v=\omega\cdot\frac{h}{\cos\omega t}$,

小环速度即两交叉点速度为速度 v 沿 OC 方向的分量,即 $v_M=\frac{v}{\cos\omega t}=\frac{\omega h}{\cos^2\omega t}$,方向向右。

(2)小环相对于 AB 杆的速度大小等于速度 v 沿 AB 杆方向的分量,即 $v'=v\tan\omega t=\frac{\omega h\sin\omega t}{\cos^2\omega t}$,方向沿 AB。

解题捷径 22

【精析】 由自由弦的等时性知,$t_1=t_2=\sqrt{\frac{2\times 2R}{g}}=2\sqrt{\frac{R}{g}}$,小滑环沿 CD 圆弧可利用"类单摆"的规律求出,则 $t_3=\frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=\frac{3.14}{2}\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}$,很明显,$t_3<t_1=t_2$。

所以 B 正确。

解题捷径 23

【精析】 设两物体的加速度分别为 a_1 和 a_2,那么,由两物体相遇知

$$s_1=\frac{1}{2}a_1t^2 \tag{1}$$

$$s_2=v_0t+\frac{1}{2}a_2t^2 \tag{2}$$

由(1)(2)知:$a_1-a_2=\frac{2v_0}{t}$,

速度相等时两物体相距最远,而速度相等的时间等于 $\frac{t}{2}$,则

$$\Delta s_m=v_0\cdot\frac{t}{2}+\frac{1}{2}a_2\left(\frac{t}{2}\right)^2-\frac{1}{2}a_1\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{v_0t}{4}$$

第二章　静力学中的解题捷径

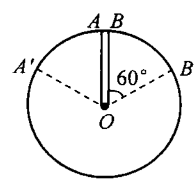
一、牛刀小试

小试一:120°角规律:两个相等的力,当它们的夹角为120°时,合力等于每一个分力。这是一个临界点。若$\theta>120°$,则合力小于每一个分力;若$\theta<120°$,则合力大于每一个分力。

【题目】 如图一所示,两根相同的橡皮绳OA、OB,开始夹角为0°,在O点处打结吊一重$G=50\text{N}$的物体后,结点O刚好位于圆心。

(1)将A、B分别沿圆周向两边移至A'、B',使$\angle AOA'=\angle BOB'=60°$。欲使结点仍在圆心处,则此时结点处应挂多重的物体?

(2)若将橡皮绳换成无明显弹性的轻绳,结点仍在圆心O,在结点处仍挂重$G=50\text{N}$的重物,并保持左侧轻绳在OA'不动,缓慢将右侧轻绳从OB'沿圆周移动,当右侧轻绳移动到什么位置时右侧轻绳中的拉力最小?最小值是多少?



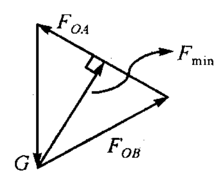
图一

【精析】 (1)设OA、OB并排吊起重物时,橡皮条产生的弹力均为F,则它们的合力为$2F$,与G平衡,所以

$$2F=G,F=\frac{G}{2}=25\text{N}$$

当$A'O$、$B'O$夹角为120°时,橡皮条伸长不变,故F仍为25N,它们互成120°角,合力的大小等于F,即应挂$G'=25\text{N}$的重物。

(2)以结点O为对象,受三个力作用,重物对结点向下的拉力G,大小和方向都不变;左侧轻绳OA'的拉力F_{OA},其方向保持不变;右侧轻绳OB'的拉力F_{OB}。



图二

缓慢移动时三力平衡。由矢量三角形可知,当右侧轻绳移动到与左侧轻绳垂直时,右侧轻绳中的拉力最小,如图二所示。

此时右侧轻绳与水平方向的夹角$\theta=60°$。

由矢量直角三角形可知,拉力的最小值为

$$F_{\min}=G\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}G=25\sqrt{3}\mathrm{N}$$

小试二: 相似三角形法:在动态平衡中,可认为物体每时每刻都处于平衡状态,求未知力可通过力三角形和对应几何三角形相似求解。

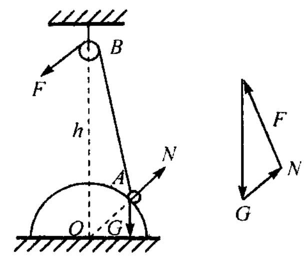
【题目】 如图三所示,在拉力作用下,小球 A 沿光滑大球表面缓慢向上移动。在此过程中,小球受到的拉力 F 和支持力 N 的大小关系是(　　)

A. F 和 N 都增大

B. F 和 N 都减小

C. F 增大,N 减小

D. F 减小,N 不变



图三

【精析】 设球半径为 R,定滑轮到球心高度为 h,$AB=L$。在沿球面缓慢向上移动的过程中,小球在三个共点力作用下处于平衡状态。因为三力构成的矢量三角形 GNF 与几何三角形 AOB 相似,对应边成比例,从而有

$$\frac{F}{G}=\frac{L}{h}$$

$$\frac{N}{G}=\frac{R}{h}$$

从而有
$$\begin{cases}F=\dfrac{G}{h}L\propto L\\[2ex] N=\dfrac{R}{h}G=\text{常量}\end{cases}$$

所以应选 D。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

等效力法就是通过力的合成或力的分解,用假设的合力或分力,甚至矢量和为零的合力——平衡力系,来代替和变换物体实际受到的力。

解题捷径 2

当物体在多个力作用下而平衡时,其中任何一个力与其余力的合力等值反向。

解题捷径 3

当物体在三个力作用下而平衡时,把其中一个已知力沿另外两个力的反方向进行分

解，然后结合平行四边形定则构建力的三角形，由三角函数可解得另两个分力的大小。

解题捷径 4

极端假设分析法：在物理解题时，采用极端假设分析法，选择适当的极限值——最大值、最小值、零值、无限大值以及临界值等代入备选答案，会使解题收到意想不到的简化效果。

解题捷径 5

跨过定滑轮或光滑挂钩两侧的绳子拉力大小相等，两侧绳子与竖直方向的夹角相等。通过几何关系确定夹角，进而求解有关待求量。

解题捷径 6

120°角规律：两个相等的力，当它们的夹角为 120°时，合力等于每一个分力，这是一个临界点。若 $\theta>120^\circ$，则合力小于每一个分力；若 $\theta<120^\circ$，则合力大于每一个分力。

解题捷径 7

平衡物体的临界状态是指物体所处的平衡状态将要变化的状态。解决这类问题的关键是要注意“恰好出现”的条件。

解题捷径 8

三力汇交原理：三个不平行的力平衡时，其力的作用线（或延长线）必相交于一点，且三力共面。

解题捷径 9

拉密定理：三个共点力平衡时，每一个力与其所对角的正弦成正比，即$\dfrac{F_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{F_2}{\sin\theta_2}=\dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$。

解题捷径 10

三个共点力平衡时，任意两个力的大小之和必大于或等于第三个力，而任意两个力的大小之差必小于或等于第三个力。如果任意两个力的大小大于或等于第三个力，那么这三个力合力的最小值为零，这三个力能使物体处于平衡状态。

解题捷径 11

当一个物体在一个恒力 F、一个方向不变力 F_1 和一个方向变化力 F_2 的作用下而静止，那么，方向不变力 F_1 的大小随两变力夹角 α 的增大而增大（或减小而减小），方向变化力 F_2 的大小随两变力夹角 α，从锐角到钝角或从钝角到锐角的变化，先减小后增大，且当 $F_2\perp F_1$ 时，F_2 最小。

解题捷径 12

当物体静止时，静摩擦力随沿运动趋势方向的外力的改变而改变，且等于沿运动趋势方向的外力；当物体加速运动时，静摩擦力通常可以通过 $f=ma$ 间接求出。

解题捷径 13

串联弹簧组的特点：(1)在串联弹簧组中，各弹簧的弹力相等，且等于弹簧组的弹力；(2)串联弹簧组的总形变量等于各弹簧的形变量之和；(3)串联弹簧组劲度系数的倒数等于各弹簧劲度系数的倒数之和。

并联弹簧组的特点：(1)并联弹簧组的弹力等于各弹簧弹力之和；(2)在并联弹簧组中，各弹簧的形变量相等，且等于弹簧组的形变量；(3)并联弹簧组的劲度系数等于各弹簧的劲度系数之和。

解题捷径 14

在受力分析时，研究对象可以是实物，或是物体系，也可以是一个点。这个点通常是绳子的结点或绳子上某一点，该点质量忽略不计。

解题捷径 15

状态分析法：当物体处于平衡状态时，其合力一定为零，物体在某一方向的合力也为零。

解题捷径 16

一个物体对另一个物体的作用是指它们之间所有作用力的合力，而非某一个力。

解题捷径 17

轻杆模型的规律：轻杆各处受力相等，其力的方向不一定沿着杆的方向；轻杆不能伸长或压缩；轻杆的弹力的方式有拉力、压力和支持力。

解题捷径 18

轻绳模型的规律：轻绳各处受力相等，且拉力方向沿着绳子；轻绳不能伸长；用轻绳连接的系统通过轻绳的碰撞、撞击时，系统的机械能有损失；轻绳的弹力会发生突变。

解题捷径 19

轻弹簧的规律：轻弹簧各处受力相等，其方向与弹簧形变的方向相反；弹力的大小为 $F=kx$，其中 k 为弹簧的劲度系数，x 为弹簧的伸长量或缩短量；弹簧的弹力不会发生突变。

解题捷径 20

相似三角形法：在动态平衡中，可认为物体每时每刻都处于平衡状态，求未知力可通过力三角形和对应几何三角形相似求解。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

等效力法就是通过力的合成或力的分解，用假设的合力或分力，甚至矢量和为零的合力——平衡力系，来代替和变换物体实际受到的力。

【范例】 如图 2-1-1 所示，有 20N、30N 和 40N 三个力作用在物体的同一点，且彼此夹角均为 120°。求合力的大小和方向。

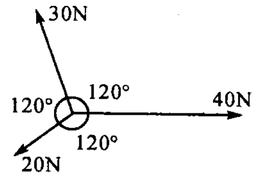


图 2-1-1

【精析】 从原力系中减去一个由三个共点力组成的平衡力系——每个力大小为 20N，而且互成 120°。这样，不仅将三个力的合成问题变成两个力的合成问题——一个 10N，一个 20N，夹角为 120°（见图 2-1-2），由于 $F_1:F_2=2:1$，且平行四边形中的锐角为 60°，故合力 F 与 F_2 的夹角为 90°或者与 F_1 的夹角为 30°，大小为

$$F=F_1\sin60°=10\sqrt{3}\text{N}$$

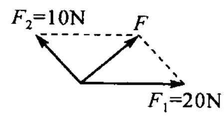


图 2-1-2

【同类精练】 如图 2-1-3 所示，装满土豆的箱子以一定的初速度在动摩擦因数为 μ 的水平地面上做匀减速运动（不计其他外力和空气阻力），则其中一质量为 m 的土豆受到其他土豆的总作用力大小应是（　　）

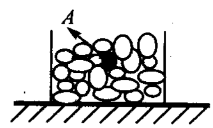


图 2-1-3

A. mg　　　　B. μmg

C. $mg\sqrt{1+\mu^2}$　　　　D. $mg\sqrt{1-\mu^2}$

解题捷径 2

当物体在多个力作用下而平衡时，其中任何一个力与其余力的合力等值反向。

【范例】 如图 2-2-1 所示，一块放在光滑水平桌面上，在水平方向共受到四个力的作用，木块处于静止状态。其中 $F_1=10\text{N}$，$F_2=2\text{N}$，$F_3=9\text{N}$，$F_4=3\text{N}$。

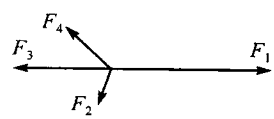


图 2-2-1

若撤去力 F_1，则木块在水平方向受到的合外力为（　　）

A. 10N，方向向左

B. 6N，方向向右

C. 2N，方向向左

D. 0

【精析】 因为木块在水平方向受到四个力的作用而静止，那么当去掉其中的任何一个则留下的三个外力的合力必与去掉的这个力等值反向，故选项 A 对。

【同类精练】 如图 2-2-2 所示，一块木块放在光滑水平桌面上，在水平方向共受到四个力的作用，木块处于静止状态。其中 $F_1=10N$，$F_2=2N$，$F_3=9N$，$F_4=3N$。若把力 F_1 顺时针旋转 90°，则木块受到的合外力大小为（　　）

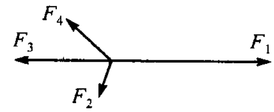


图 2-2-2

A. 10N　　B. 6N

C. $10\sqrt{2}$N　　D. 0

解题捷径 3

当物体在三个力作用下而平衡时，把其中一个已知力沿另外两个力的反方向进行分解，然后结合平行四边形定则构建力的三角形，由三角函数可解得另两个分力的大小。

【范例】 如图 2-3-1 所示，重物的质量为 m，轻细线 AO 和 BO 的 A、B 端是固定的，平衡时 AO 是水平的，BO 与水平面的夹角为 θ，AO 的拉力 F_1 和 BO 的拉力 F_2 的大小是（　　）

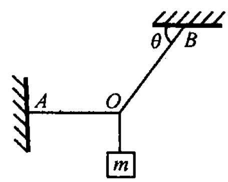


图 2-3-1

A. $F_1=mg\cos\theta$　　B. $F_1=mg\cot\theta$

C. $F_2=mg\sin\theta$　　D. $F_2=\dfrac{mg}{\sin\theta}$

【精析】 把 mg 沿另外两个力的反方向进行分解（见图 2-3-2），然后结合平行四边形定则构建力的三角形，由三角函数可解得另两个分力的大小。

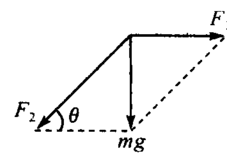


图 2-3-2

$$\begin{cases} F_1=mg\cot\theta \\ F_2=\dfrac{mg}{\sin\theta} \end{cases}$$，故 B、D 正确。

【同类精练】 如图 2-3-3 所示，质量为 m 的物体用一轻绳悬挂在水平轻杆 BC 的端点 C 上，C 点由轻绳 AC 系住。已知 AC 与 BC 的夹角为 θ，则轻绳 AC 上的张力大小为________，轻杆 BC 上压力大小为________。

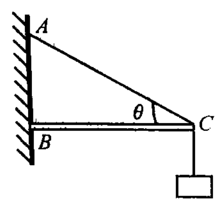


图 2-3-3

解题捷径 4

极端假设分析法：在物理解题时，采用极端假设分析法，选择适当的极限值——最大值、最小值、零值、无限大值以及临界值等代入备选答案，会使解题收到意想不到的简化效果。

【范例】 如图 2-4-1 所示，一根轻质弹簧上端固定，下端悬挂质量为 m_0 的盘，其中放着质量为 m 的物体。当盘静止时，弹簧比其自然长度长 l；当向下拉盘使弹簧再伸长 Δl 后停止（弹簧仍处于弹性限度内），然后松开手，则刚松开时盘对物体的支持力等

于(　　)

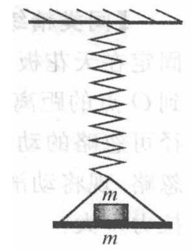


图 2-4-1

A. $\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)mg$

B. $\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)(m+m_0)g$

C. $\frac{\Delta l}{l}mg$

D. $\frac{\Delta l}{l}(m+m_0)g$

【精析】 如果不再向下拉盘($\Delta l=0$),盘仍处于静止状态。这时,盘对物体的支持力 N 的大小,就应等于物重,即当 $\Delta l=0$ 时,$N=mg$。

所以,应选 A。

【同类精练】 分别以 m 和 h 表示通讯卫星的质量和距地面的高度,以 R、ω、g 表示地球半径、自转角速度和地球表面处的重力加速度,则通讯卫星受到的地球引力 F 为(　　)

A. $F=0$　　B. $F=m\frac{R^2g}{(R+h)^2}$

C. $F=m\sqrt[3]{R^2g\omega^4}$　　D. 以上结果都不正确

解题捷径 5

跨过定滑轮或光滑挂钩两侧的绳子拉力大小相等,两侧绳子与竖直方向的夹角相等。通过几何关系确定夹角,进而求解有关待求量。

【范例】 如图 2-5-1 所示,长为 5m 的细绳的两端分别系于竖立在地面上相距为 4m 的两杆的顶端 A、B。绳上挂一个光滑的轻质挂钩,其下连着一个重为 12N 的物体。平衡时,绳中的张力 $T=$________。

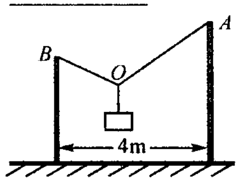


图 2-5-1

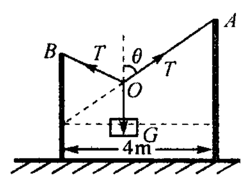


图 2-5-2

【精析】 由规律知 BO 与 AO 的张力与竖直方向的夹角相等,如图 2-5-2 所示,由几何关系知,$\cos\theta=\frac{3}{5}$,$2T\cos\theta=mg$,

所以,绳中的张力 $T=\frac{mg}{2\cos\theta}=10\text{N}$。

【同类精练】 如图 2-5-3(a)所示，将一条轻而柔软的细绳一端固定在天花板上的 A 点，另一端固定在竖直墙上的 B 点，A 和 B 点到 O 点的距离相等，绳的长度为 OA 的两倍。图(b)为一质量和半径可忽略的动滑轮 K，滑轮下悬挂一质量为 m 的重物。设摩擦力可忽略，现将动滑轮和重物一起挂到细绳上，则达到平衡时，绳受到的拉力多大？

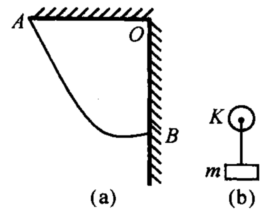


图 2-5-3

解题捷径 6

120°角规律：两个相等的力，当它们的夹角为 120°时，合力等于每一个分力，这是一个临界点。若 $\theta>120°$，则合力小于每一个分力；若 $\theta<120°$，则合力大于每一个分力。

【范例】 如图 2-6-1 所示，两根相同的橡皮绳 OA、OB，开始夹角为 0°，在 O 点处打结吊一重 $G=50\text{N}$ 的物体后，结点 O 刚好位于圆心。

(1)将 A、B 分别沿圆周向两边移至 A'、B'，使 $\angle AOA'=\angle BOB'=60°$。欲使结点仍在圆心处，则此时结点处应挂多重的物体？

(2)若将橡皮绳换成无明显弹性的轻绳，结点仍在圆心 O，在结点处仍挂重 $G=50\text{N}$ 的重物，并保持左侧轻绳在 OA'不动，缓慢将右侧轻绳从 OB'沿圆周移动，当右侧轻绳移动到什么位置时右侧轻绳中的拉力最小？最小值是多少？

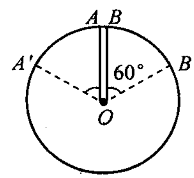


图 2-6-1

【精析】 (1)设 OA、OB 并排吊起重物时，橡皮条产生的弹力均为 F，则它们的合力为 $2F$，与 G 平衡，所以 $2F=G$，$F=\frac{G}{2}=25\text{N}$。

当 $A'O$、$B'O$ 夹角为 120°时，橡皮条伸长不变，故 F 仍为 25 N，它们互成 120°角，合力的大小等于 F，即应挂 $G'=25\text{N}$ 的重物。

(2)以结点 O 为对象，受三个力作用，重物对结点向下的拉力 G，大小和方向都不变；左侧轻绳 OA'的拉力 F_{OA}，其方向保持不变；右侧轻绳 OB'的拉力 F_{OB}。

缓慢移动时三力平衡。由矢量三角形可知，当右侧轻绳移动到与左侧轻绳垂直时，右侧轻绳中的拉力最小，如图 2-6-2 所示。

此时右侧轻绳与水平方向的夹角 $\theta=60°$。

由矢量直角三角形可知，拉力的最小值为：

$$F_{\min}=G\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}G=25\sqrt{3}\text{N}。$$

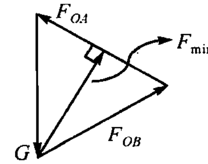


图 2-6-2

【同类精练】 如图 2-6-3 所示，AO、BO、CO 是三条完全相同的细绳，若钢梁足够重，钢梁还未水平吊起，发现 AO 先断了，则 θ __________(填“大于”、“小于”或“等于”)120°。

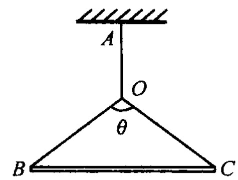


图 2-6-3

解题捷径 7

平衡物体的临界状态是指物体所处的平衡状态将要变化的状态。解决这类问题的关键是要注意“恰好出现”的条件。

【范例】 如图 2-7-1 所示，物体的质量为 2kg，两根轻细绳 AB 和 AC 的一端连接于竖直墙上，另一端系于物体上，在物体上另施加一个方向与水平线成 60°的拉力 F，若要使绳都能伸直，求拉力 F 的大小范围。

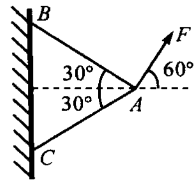


图 2-7-1

【精析】 设 AB 的张力为 F_1，AC 的张力为 F_2，对 A 受力分析如图 2-7-2 所示。根据力的平衡条件得

$$F\sin60°+F_1\sin30°=mg+F_2\sin30° \quad (1)$$

$$F\cos60°=F_1\cos30°+F_2\cos30° \quad (2)$$

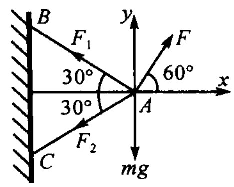


图 2-7-2

当 F 较小时，绳 AC 中张力

$$F_2=0 \quad (3)$$

F 和 F_1 的合力与重力 mg 平衡。

联立(1)(2)(3)解得

$$F=10\sqrt{3}\text{N}$$

当 F 较大时，绳 AB 中张力

$$F_1=0 \quad (4)$$

F 和 F_2 的合力与重力 mg 平衡。

联立(1)(2)(3)解得

$$F=20\sqrt{3}\text{N}$$

故拉力 F 的范围为 $10\sqrt{3}\text{N}\leqslant F\leqslant 20\sqrt{3}\text{N}$

【同类精练】 如图 2-7-3 所示，物体的质量为 2kg，两根轻绳 AB 和 AC 的一端连接于竖直墙上，另一端系于物体上，在物体上另施加一个方向与水平线成 $\theta=60°$的拉力 F，若要使绳都能伸直，求拉力 F 的大小范围。

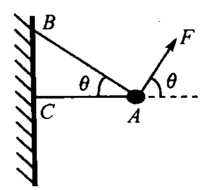


图 2-7-3

解题捷径 8

三力汇交原理：三个不平行的力平衡时，其力的作用线（或延长线）必相交于一点，且三力共面。

【范例】 如图 2-8-1 所示，均匀细杆的质量为 m，一端由细绳悬挂，另一端顶在竖直墙壁上，细杆处于平衡状态，而悬线与墙壁的夹角为 θ。求绳的拉力和墙壁对细杆的作用力的大小和方向。

【精析】 墙壁对细杆的作用力 F，由竖直向上的静摩擦力 F_f 和水平向右的弹力 F_N 组成，根据特性一，F_f 和 F_N 的合力作用线必定通过重力 mg 和拉力 F_T 的作用线交点 O，由 F 与 F_T 对称性可以看出，两力大小相等，根据拉密定理有

$$\frac{F}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{mg}{\sin(180^\circ-2\theta)}$$

所以，两力大小为 $F=F_T=\dfrac{mg}{2\sin\theta}$，

且与竖直方向的夹角均为 θ。

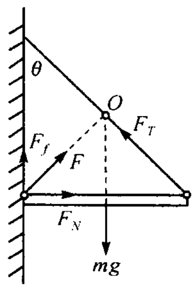


图 2-8-1

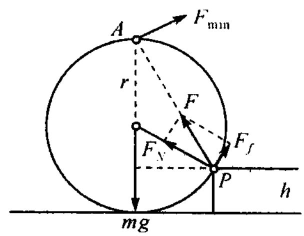


图 2-8-2

【同类精练】 如图 2-8-2 所示，一个质量为 $M=50\text{kg}$ 的均匀圆柱体，靠在台阶旁边，台阶高度 h 为圆柱体半径 r 的一半。为了在圆柱体最上方 A 处施一最小的力，使其刚能绕粗糙接触点 P 向上滚动。求：(1)所加力的大小；(2)台阶对圆柱体的作用力的大小。

解题捷径 9

拉密定理：三个共点力平衡时，每一个力与其所对角的正弦成正比，即 $\dfrac{F_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{F_2}{\sin\theta_2}=\dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$。

【范例】 如图 2-9-1 所示，一个半球形的碗放在桌面上，碗口水平，O 点为其球心，碗的内表面及碗口是光滑的。一根细线跨在碗口上，线的两端分别系有质量为 m_1 和 m_2 的小球，当它们处于平衡状态时，质量为 m_1 的小球与 O 点的连线与水平线的夹角为 $\alpha=60°$。则两小球的质量比 $\dfrac{m_2}{m_1}$ 为(　　)

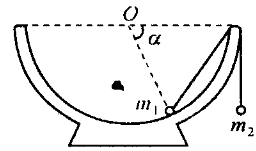


图 2-9-1

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【精析】 m_1 小球的受力如图 2-9-2 所示，由拉密定理得

$$\frac{m_2 g}{\sin 150°}=\frac{m_1 g}{\sin 60°},$$

则 $\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以，应选 A。

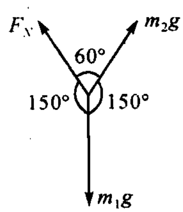


图 2-9-2

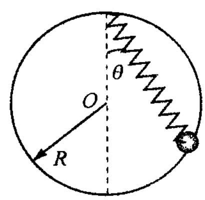


图 2-9-3

【同类精练】 如图 2-9-3 所示，小圆环重为 G，固定的大环半径为 R，轻弹簧原长为 $l(l<2R)$，其劲度系数为 k，接触处光滑，求小环静止时弹簧与竖直方向的夹角。

解题捷径 10

三个共点力平衡时，任意两个力的大小之和必大于或等于第三个力，而任意两个力的大小之差必小于或等于第三个力。如果任意两个力的大小大于或等于第三个力，那么这三个力合力的最小值为零，这三个力能使物体处于平衡状态。

【范例】 大小为 4N、7N、9N 的三个共点力，它们的最大合力是多少？最小合力是多少？

【精析】 当三个力在同一直线上且方向相同时，合力最大，合力最大值为

$$F_{max}=F_1+F_2+F_3=4+7+9=20N$$

由于这三个力中任意两个力的合力都大于第三个力，所以这三个力的合力的最小值为零。

【同类精练】 作用在同一物体上的下列几组力中，不能使物体做匀速运动的有(　　)

A. 3N、4N、5N　　B. 2N、3N、6N

C. 4N、6N、9N　　D. 5N、6N、11N

解题捷径 11

当一个物体在一个恒力 F、一个方向不变力 F_1 和一个方向变化力 F_2 的作用下而静止，那么，方向不变力 F_1 的大小随两变力夹角 α 的增大而增大(或减小而减小)，方向变化力 F_2 的大小随两变力夹角 α，从锐角到钝角或从钝角到锐角的变化，先减小后增大，且当 $F_2 \perp F_1$ 时，F_2 最小。

【范例】 如图 2-11-1 所示，电灯用细绳 OA 悬挂在两墙之间，只更换 OA 绳使连接点 A 上移，保持 O 点位置不变，则在 A 点上移过程中(　　)

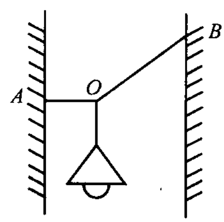


图 2-11-1

A. OA 绳受的拉力逐渐减小

B. OB 绳受的拉力逐渐减小

C. OA 绳受的拉力先增大后减小

D. OA 绳受的拉力先减小后增大，AO 垂直于 OB 时拉力最小

【精析】 OB 绳的拉力方向不变，随两变力的夹角的减小而减小，OA 绳的拉力方向变化，OA 绳的拉力随两变力的夹角的变化，先减小，至夹角等于 90°时最小，然后增大。

所以，应选 B、D。

【同类精练】 如图 2-11-2 所示，物体 M 用 OA 和 OB 两根等长的绳子悬挂在半圆弧的架子上。B 点固定不动，A 端由顶点 C 沿圆弧向 D 移动。在此过程中，绳子 OA 的张力将(　　)

A. 由大变小

B. 由小变大

C. 先减小后增大

D. 先增大后减小

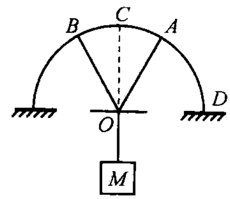


图 2-11-2

解题捷径 12

当物体静止时，静摩擦力随沿运动趋势方向的外力的改变而改变，且等于沿运动趋势方向的外力；当物体加速运动时，静摩擦力通常可以通过 f=ma 间接求出。

【范例】 如图 2-12-1 所示，位于斜面上的物块 M 在沿斜面向上的力 F 作用下，处于静止状态，则斜面作用于物块的静摩擦力(　　)

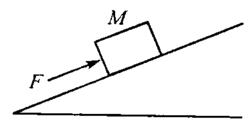


图 2-12-1

A. 方向可能沿斜面向上

B. 方向可能沿斜面向下

C. 大小可能等于零

D. 大小可能等于 Mg

【精析】 物体静止在斜面上，有可能有斜向下(或斜向上)的运动趋势，摩擦力方向斜向上(或斜向下)，大小等于沿运动趋势方向的合外力，也有可能 F 恰好等于重力的分力，摩擦力等于零，分析知摩擦力不可能等于 Mg。

所以，应选 A、B、C。

【同类精练】 如图 2-12-2 所示，质量分别为 m 和 M 的两物体叠放在光滑水平地面上，物体 M 在力 F 的作用下向右做加速运动，在运动过程中两物体始终保持相对静止。求物体 m 受到的静摩擦力的大小。

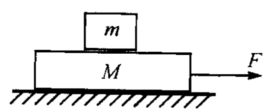


图 2-12-2

解题捷径 13

串联弹簧组的特点：(1)在串联弹簧组中，各弹簧的弹力相等，且等于弹簧组的弹力；(2)串联弹簧组的总形变量等于各弹簧的形变量之和；(3)串联弹簧组劲度系数的倒数等于各弹簧劲度系数的倒数之和。

并联弹簧组的特点：(1)并联弹簧组的弹力等于各弹簧弹力之和；(2)在并联弹簧组

中，各弹簧的形变量相等，且等于弹簧组的形变量；(3)并联弹簧组的劲度系数等于各弹簧的劲度系数之和。

【范例】 如图 2-13-1 所示，一根轻质弹簧竖直放在桌面上，下端固定，上端放一重物 m，稳定后弹簧长为 L。现将弹簧截成等长的两段，将重物等分成两块，如图连接后，稳定时两段弹簧的总长度为 L'，则(　　)

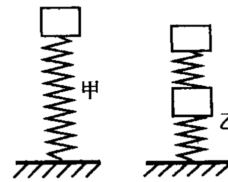


图 2-13-1

A. $L'=L$　　　　B. $L'<L$

C. $L'>L$　　　　D. 以上答案均不对

【精析】 设弹簧的原长为 L_0，甲图中 $L=L_0-\dfrac{mg}{K}$，

乙图中，$L'=L'_1+L'_2=\dfrac{L_0}{2}-\dfrac{\frac{mg}{2}}{2K}+\dfrac{L_0}{2}-\dfrac{mg}{2K}=L_0-\dfrac{3mg}{4K}$，

所以，$L'>L$，C 正确。

【同类精练】 一根大弹簧内套小弹簧，大弹簧比小弹簧长 0.2m，它们下端都固定于地面，另一端自由，当压缩此组合弹簧时，测得力与压缩距离之间的关系如图 2-13-2 所示。求这两根弹簧的劲度系数。

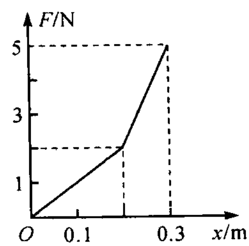


图 2-13-2

解题捷径 14

在受力分析时，研究对象可以是实物，或是物体系，也可以是一个点。这个点通常是绳子的结点或绳子上某一点，该点质量忽略不计。

【范例】 AB、AC 两绳相交于 A 点，绳与绳、绳与天花板间夹角大小如图 2-14-1 所示，现用一力 F 作用于交点 A，与右绳夹角为 α，保持力大小不变，改变角大小，忽略绳本身重力，则在下述哪种情况下，两绳所受张力大小相等(　　)

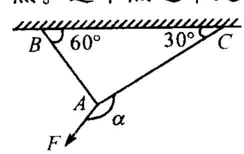


图 2-14-1

A. $\alpha=150°$　　　　B. $\alpha=135°$

C. $\alpha=120°$　　　　D. $\alpha=90°$

【精析】 考查绳的结点受力平衡问题。由对称性可得，力 F 的反向延长线为 $\angle BAC$ 的平分线时，两绳受张力大小相等，故 $\alpha=135^{\circ}$，所以正确选项是 B。

【同类精练】 如图 2-14-2 所示，一根柔软的轻绳两端分别固定在两竖直的直杆上，绳上用一光滑的挂钩悬一重物，AO 段张力大小为 T_1，BO 段张力大小为 T_2，现将右杆绳的固定端由 B 点缓慢移到 B' 点的过程中，关于两绳中张力大小的变化情况为(　　)

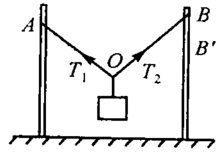


图 2-14-2

A. T_1 变大，T_2 减小

B. T_1 减小，T_2 变大

C. T_1、T_2 均变大

D. T_1、T_2 均不变

解题捷径 15

状态分析法：当物体处于平衡状态时，其合力一定为零，物体在某一方向的合力也为零。

【范例】 物体 B 放在物体 A 上，A、B 的上、下表面均与斜面平行，如图 2-15-1 所示。两物体恰能沿固定斜面向下做匀速运动(　　)

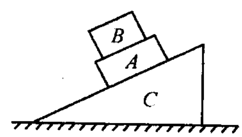


图 2-15-1

A. A 受到 B 的摩擦力沿斜面方向向上

B. A 受到 B 的摩擦力沿斜面方向向下

C. A、B 之间的摩擦力为零

D. A、B 之间是否存在摩擦力取决于 A、B 表面的性质

【精析】 因 A、B 沿固定斜面向下做匀速运动，故 B 受到 A 的摩擦力平行斜面向上，A 受到 B 的摩擦力平行斜面向下，故 B 正确。

【同类精练】 如图 2-15-2 所示，物体 A、B、C 叠放在水平桌面上，水平力 F 作用于物体 C，使 A、B、C 以共同速度向右匀速运动，且三者相对静止，那么关于摩擦力的说法中，正确的是(　　)

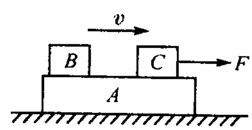


图 2-15-2

A. C 不受摩擦力作用

B. B 不受摩擦力作用

C. A 受摩擦力的合力为零

D. 以 A、B、C 为整体，整体受到的摩擦力为零

解题捷径 16

一个物体对另一个物体的作用是指它们之间所有作用力的合力，而非某一个力。

【范例】 如图 2-16-1 所示，质量为 m 的木块 A 放在斜面体 B 上，若 A 和 B 沿水平

方向以相同的速度 v_0 一起向左做匀速直线运动，则 A 和 B 之间的相互作用力大小为(　　)

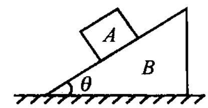


图 2-16-1

A. mg　　　　B. $mg\sin\theta$

C. $mg\cos\theta$　　　　D. 0

【精析】 由解题捷径知：答案 A 正确。

【同类精练】 如图 2-16-2 所示，棒 AB 的 B 端支在地上，另一端 A 受水平力 F 作用，棒平衡，则地面对棒 B 端作用力的方向为(　　)

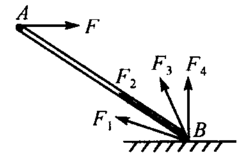


图 2-16-2

A. 总是偏向棒的左边，如 F_1

B. 总是偏向棒的右边，如 F_3

C. 总是沿棒的方向，如 F_2

D. 总是垂直于地面向上，如 F_4

解题捷径 17

轻杆模型的规律：轻杆各处受力相等，其力的方向不一定沿着杆的方向；轻杆不能伸长或压缩；轻杆的弹力的方式有拉力、压力和支持力。

【范例】 如图 2-17-1 所示，小车上固定一弯折硬杆 ABC，C 端固定质量为 m 的小球，已知 $\alpha=30°$恒定。当小车水平向左以 $v=0.5\text{m/s}$ 的速度匀速运动时，BC 杆对小球的作用力的大小是__________，方向是__________；当小车水平向左以 $a=g$ 的加速度做匀加速运动时，BC 杆对小球的作用力的大小是__________，方向是__________。

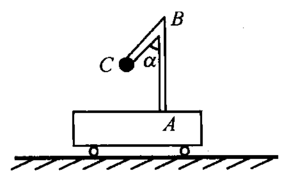


图 2-17-1

【精析】 对细杆来说，是坚硬的物体，可以产生与杆垂直的横向的力，也可以产生与杆任何夹角的弹力。

(1)当小车水平向左以 $v=0.5\text{m/s}$ 的速度匀速运动时，由平衡条件，细杆对小球的力必定与重力相等、反向，如图 2-17-2 所示。

(2)当小车水平向左以 $a=g$ 的加速度做匀加速运动时，小球所受合力 $F_{合}=mg$ 沿水平方向，则小球受细杆的弹力 $N=\sqrt{2}mg$，与水平方向夹角为 45°，如图 2-17-3 所示。

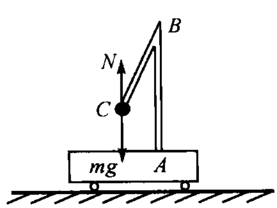


图 2-17-2

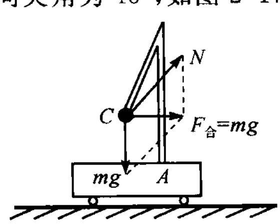


图 2-17-3

【同类精练】 如图 2-17-4 所示，小车上有一弯折轻杆，杆下端固定一质量为 m 的小球。当小车处于静止或匀速直线运动状态时，求杆对球的作用力的大小和方向。

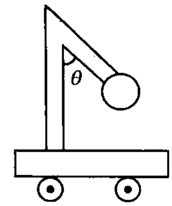


图 2-17-4

解题捷径 18

轻绳模型的规律：轻绳各处受力相等，且拉力方向沿着绳子；轻绳不能伸长；用轻绳连接的系统通过轻绳的碰撞、撞击时，系统的机械能有损失；轻绳的弹力会发生突变。

【范例】 如图 2-18-1 所示，一质量为 m 的物体系于长度分别为 L_1、L_2 的两根细绳 OA、OB 上，OB 一端悬挂在天花板上，与竖直方向夹角为 θ，OA 水平拉直，物体处于平衡状态，现在将 OA 剪断，求剪断瞬间物体的加速度？

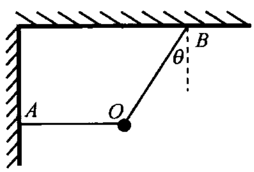


图 2-18-1

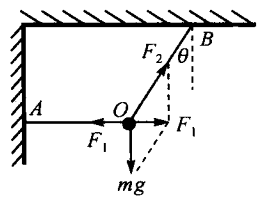


图 2-18-2

【精析】 为研究方便，我们分两种情况对比分析。

(1)剪断前，小球受力一样，如图 2-18-2 所示，利用平衡条件，则 mg 与 F_2 的合力与 F_1 大小相等，方向相反，可以解得 $F_1=mg\tan\theta$。

(2)剪断后瞬间，绳 OA 产生的拉力 F_1 消失，对绳来说，其伸长量很微小，可以忽略不计，不需要形变恢复时间，因此绳子中的张力也立即发生变化，这时 F_2 将发生瞬时变化，mg 与 F_2 的合力将不再沿水平方向，由于小球下一时刻做单摆运动而沿圆弧的切线方向，与绳垂直，如图 2-18-3 所示，$F_{合}=mg\sin\theta$，所以 $a=g\sin\theta$。

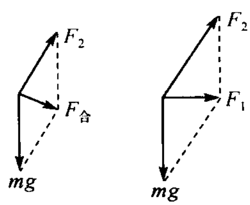


图 2-18-3

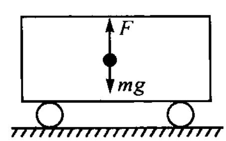


图 2-18-4

【同类精练】 如图 2-18-4 所示，有一质量为 m 的小球用轻绳悬挂于小车顶部，小车静止或匀速直线运动时，求绳子对小球作用力的大小和方向。

解题捷径 19

轻弹簧的规律：轻弹簧各处受力相等，其方向与弹簧形变的方向相反；弹力的大小为 $F=kx$，其中 k 为弹簧的劲度系数，x 为弹簧的伸长量或缩短量；弹簧的弹力不会发生突变。

【范例】 如图 2-19-1 所示，一轻质弹簧和一根细线共同拉住一个质量为 m 的小球，平衡时细线是水平的，弹簧与竖直方向的夹角是 θ，若突然剪断细线，则在剪断的瞬间，弹簧拉力的大小是__________，小球加速度与竖直方向夹角等于__________。

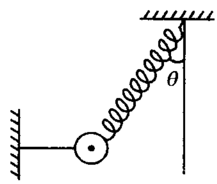


图 2-19-1

【精析】 如图 2-19-2 所示，在细线未剪断前，由平衡条件可得水平细线的拉力

$$F_T=mg\tan\theta$$

弹簧的拉力

$$F=\frac{mg}{\cos\theta}$$

当剪断细线的瞬间，$F_T=0$，而弹簧形变不能马上改变，故弹簧弹力 F 保持原值。在图示中，$F=\frac{mg}{\cos\theta}$。所以在剪断细线的瞬间 F 和 mg 的合力仍等于原 F_T 的大小，方向水平向右。则可知小球的加速度方向沿水平向右，即与竖直成 90°角，其大小为$a=g\tan\theta$。

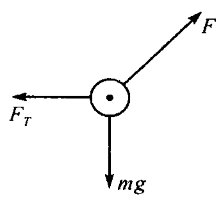


图 2-19-2

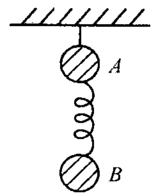


图 2-19-3

【同类精练】 如图 2-19-3 所示，质量相同的 A、B 两球用细线悬挂于天花板上且静止不动，两球间是一个轻质弹簧，如果突然剪断悬线，则在剪断悬线瞬间 B 球的加速度为

__________；A 球的加速度为__________。

解题捷径 20

相似三角形法：在动态平衡中，可认为物体每时每刻都处于平衡状态，求未知力可通过力三角形和对应几何三角形相似求解。

【范例】 如图 2-20-1 所示，在拉力作用下，小球 A 沿光滑大球表面缓慢向上移动。在此过程中，小球受到的拉力 F 和支持力 N 的大小关系是(　　)

A. F 和 N 都增大　　　　B. F 和 N 都减小

C. F 增大，N 减小　　　　D. F 减小，N 不变

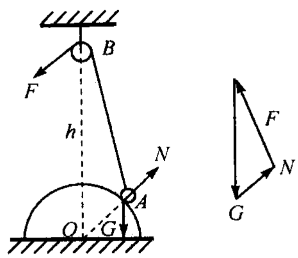


图 2-20-1

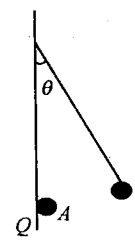


图 2-20-2

【精析】 设球半径为 R，定滑轮到球心高度为 h，$AB=L$。在沿球面缓慢向上移动的过程中，小球在三个共点力作用下处于平衡状态。因为三力构成的矢量三角形 GNF 与几何三角形 AOB 相似，对应边成比例，从而有

$$\frac{F}{G}=\frac{L}{h}$$

$$\frac{N}{G}=\frac{R}{h}$$

从而有 $\begin{cases} F=\dfrac{G}{h}L\propto L \\ N=\dfrac{R}{h}G=\text{常量} \end{cases}$，所以，应选 D。

【同类精练】 如图 2-20-2 所示，竖直绝缘墙壁上的 Q 处有一固定的质点 A，在 Q 的正上方的 P 点用丝线悬挂另一质点 B，A、B 两质点因为带电而相互排斥，致使悬线与竖直方向成 θ 角，由于缓慢漏电使 A、B 两质点的带电量逐渐减小。则在电荷漏完之前悬线对悬点 P 的拉力大小(　　)

A. 保持不变　　B. 先变大后变小　　C. 逐渐减小　　D. 逐渐增大

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

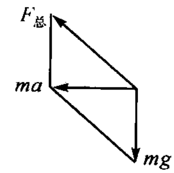


图 2-1

【精析】 装满土豆的箱子整体的加速度为 $a=\mu g$，方向向左，由等效力法可知，A 土豆受到周围土豆的总作用力如图 2-1 所示，所以 $F_总=mg\sqrt{1+\mu^2}$。

解题捷径 2

【精析】 因为木块在水平方向受到四个力的作用而静止，那么当去掉其中的任何一个力与另外三个力的合力必等值反向，若把力 F_1 顺时针旋转 90°，则 F_2、F_3、F_4 的合力大小也为 F_1，由勾股定理得，故选项 C 对。

解题捷径 3

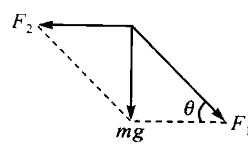


图 2-2

【精析】 把 mg 沿另外两个力的反方向进行分解(见图 2-2)，然后结合平行四边形定则构建力的三角形，由三角函数可解得另两个分力的大小。

$F_{AC}=\dfrac{mg}{\sin\theta}$，$F_{BC}=\dfrac{mg}{\tan\theta}$。

解题捷径 4

【精析】 如果卫星沿地球表面($h=0$)运行，或者以与第一宇宙速度 $v_1=\sqrt{Rg}$ 相应的角速度 $\omega_1=\dfrac{v_1}{R}=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$ 运行，地球对卫星的引力均等于卫星的重力，即当 $h=0$ 或 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$ 时，$F=mg$。

所以，应选 B 和 C。

解题捷径 5

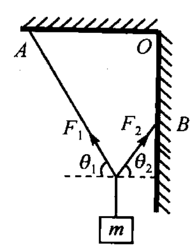


图 2-3

【精析】 平衡时，因为绳与滑轮之间的接触是光滑无摩擦，由此可知，$F_1=F_2=F$，

由水平方向的平衡可知 $\theta_1=\theta_2=\theta$。由题意知 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=60°$。

由竖直方向力的平衡可知 $2F\sin\theta=mg$，$F=\dfrac{mg}{2\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}mg$。

解题捷径 6

【精析】 细绳 AO 先断了，说明它承受的拉力最大，即合力大于每一个分力，则 $\theta<120°$。

解题捷径 7

【精析】 设 AB 的张力为 F_1，AC 的张力为 F_2，对 A 受力分析，根据力的平衡条件得

$$F\sin\theta+F_1\sin\theta=mg \tag{1}$$

$$F\cos\theta=F_1\cos\theta+F_2 \tag{2}$$

当 F 较大时，绳 AC 中张力

$$F_2=0 \tag{3}$$

联立(1)(2)(3)解得

$$F=\frac{40\sqrt{3}}{3}\text{N}$$

当 F 较小时，绳 AB 中张力

$$F_1=0 \tag{4}$$

联立(1)(2)(4)解得

$$F=\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{N}$$

故拉力 F 的范围为 $\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{N}\leqslant F\leqslant\frac{40\sqrt{3}}{3}\text{N}$。

解题捷径 8

【精析】 当刚向上滚动时，地面支持力为 0。圆柱体受到四个力的作用：拉力 $F_{\min}$ 应垂直于 AP，以保证在力矩一定的条件下，对 P 的力臂最大，而所施的力最小；P 点对圆柱体的静摩擦力 F_f 与弹力 F_N 的合力 F，必定通过重力 mg 与拉力 $F_{\min}$ 的作用线的交点 A，将四个力作用下的一般力系的平衡问题，转化为三个共点力的平衡问题。三力汇交，且三个力自成封闭三角形，如图 2-4 所示，

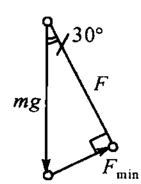


图 2-4

$$F_{\min}=mg\sin30°=2.5\times10^2\text{N}$$

$$F=mg\cos30°=4.3\times10^2\text{N}$$

解题捷径 9

【精析】 如图 2-5 所示，小环受三个作用力而平衡，由几何关系可以看出 G 与 F_N 的夹角为 2θ，F 与 F_N 夹角为 $180°-\theta$，根据拉密定理，有

$$\frac{F}{\sin 2\theta}=\frac{G}{\sin(180^\circ-\theta)} \quad (1)$$

由胡克定律有

$$F=k(2R\cos\theta-l) \quad (2)$$

由(1)(2)解得 $\theta=\arccos\dfrac{kl}{2(kR-G)}$。

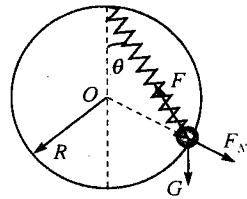


图 2-5

解题捷径 10

【精析】 如果任意两个力的大小大于或等于第三个力，那么这三个力合力的最小值为零，这三个力能使物体处于平衡状态。B 不满足。所以，应选 B。

解题捷径 11

【精析】 OB 绳的拉力方向不变，随两变力的夹角的增大而增大，OA 绳的拉力随两变力的夹角的变化，先减小，到夹角等于 90°时最小，然后增大。所以，应选 C。

解题捷径 12

【精析】 把两物体看作一个整体，由牛顿第二定律求整体的加速度，则

$$F=(M+m)a,a=\frac{F}{M+m},$$

把物体 m 隔离进行受力分析知 $f_{静}=ma=\dfrac{m}{m+M}F$。

解题捷径 13

【精析】 由图 2-6 可知，大弹簧的劲度系数为 $K_1=\dfrac{2\text{N}}{0.2\text{m}}=20\text{N/m}$。

当压缩组合弹簧并接时，

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}=\frac{0.3-0.2}{5-3}=\frac{1}{30}$$

所以，$K_2=10\text{N/m}$。

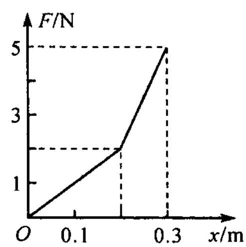


图 2-6

解题捷径 14

【精析】 以与挂钩接触的绳上一点 O 为研究对象。O 点受力如图 2-7 所示。

由规律知 BO 与 AO 的张力与竖直方向的夹角相等，由几何关系知，夹角 θ 一定。

所以，绳中的张力 $T=\dfrac{mg}{2\cos\theta}$不变。答案选 D。

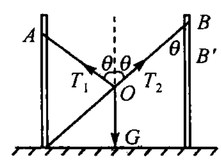


图 2-7

解题捷径 15

【精析】 由本题解题捷径知：答案 B、C 正确。

解题捷径 16

【精析】 由本题解题捷径结合三力汇交原理知：答案 B 正确。

解题捷径 17

【精析】 以小球为研究对象，可知小球受到杆对它一个弹力和自身重力的作用，由平衡条件可知小球受力如图 2-8 所示。则可知杆对小球的弹力为 $F=mg$，方向与重力的方向相反即竖直向上。

（注意：在这里杆对小球的作用力方向不是沿着杆的方向。）

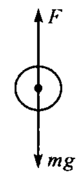


图 2-8

解题捷径 18

【精析】 小车静止或匀速直线运动时，小球也处于静止或匀速直线运动状态。由平衡条件可知，绳子对小球的弹力为 $F=mg$，方向是沿着绳子向上。

解题捷径 19

【精析】 由本题解题捷径知：A 球的加速度为 $2g$，方向向下；B 球的加速度为 0。

解题捷径 20

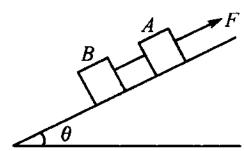
【精析】 由本题解题捷径知：对 B 球进行受力分析，由相似三角形法，可知 A 正确。

第三章　动力学中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：牵引力分配规律：若系统只受到一个牵引力(或推力)，系统各部分的加速度都相同，系统各部分的阻质比都相等，则牵引力的分配与所牵引的质量成正比。该规律适用于光滑或粗糙平面，光滑或粗糙斜面，竖直平面。

【题目】 如图一所示，质量分别为 m_A、m_B 的 A、B 两物块用轻线连接放在倾角为 θ 的斜面上，用始终平行于斜面向上的拉力 F 拉 A，使它们沿斜面匀加速上升，A、B 与斜面的动摩擦因数均为 μ，为了增加轻线上的张力，可行的办法是(　　)



图一

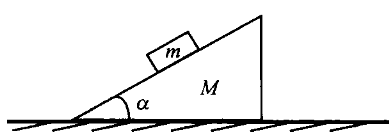
A. 减小 A 物块的质量　　　　B. 增大 B 物块的质量

C. 增大倾角 θ　　　　D. 增大动摩擦因数 μ

【精析】 由本题解题捷径知：选项 A、B 正确。

小试二：质点系牛顿第二定律：质点系所受到的合外力，等于各质点的质量与加速度乘积的矢量和，即 $\sum F_x = m_1a_{1x} + m_2a_{2x} + \cdots + m_na_{nx}$，$\sum F_y = m_1a_{1y} + m_2a_{2y} + \cdots + m_na_{ny}$。

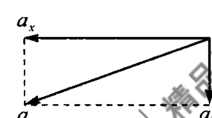
【题目】 如图二所示，倾角为 α、质量为 M 的斜面，在粗糙水平地面上始终保持静止；质量为 m 的木块沿斜面滑下。求下列情况下，地面对斜面的支持力和摩擦力为：



图二

(1)木块匀速下滑；(2)木块以加速度 a 加速下滑；(3)木块以加速度 a 减速下滑。

【精析】 以木块、斜面系统为研究对象。(1)当木块匀速下滑时，系统的加速度为零，所以，$f=0$，$N=(M+m)g$。



图三

(2)当加速下滑时，

$f=ma_x=ma\cos\alpha$，方向向左，

$(M+m)g-N=ma_y$，

$N=(M+m)g-ma\sin\alpha$。

(3)当减速下滑时，

$f=ma_x=ma\cos\alpha$，方向向右，

$N-(M+m)g=ma_y$，

$N=(M+m)g+ma\cos\alpha$。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

当物体受到的合外力变化 ΔF 时，加速度也将相应地变化 Δa，即加速度增量与合外力增量成正比，而与物体原来的受力情况和运动状态无关，即 $\Delta F=m\Delta a$。

解题捷径 2

质点系牛顿第二定律：质点系所受到的合外力，等于各质点的质量与加速度乘积的矢量和，即 $\sum F_x=m_1a_{1x}+m_2a_{2x}+\cdots+m_na_{nx}$，$\sum F_y=m_1a_{1y}+m_2a_{2y}+\cdots+m_na_{ny}$。

解题捷径 3

轻绳：质量不计，形变不计，内部张力处处相等，且可以突变；轻杆：质量不计，形变不计，内部弹力处处相等，且可以突变；轻弹簧：质量不计，弹簧有形变，由形变产生的弹力不会突变。

解题捷径 4

物体在倾角为 θ 的粗糙斜面上，若 $\mu=\tan\theta$，则物体可以在斜面上匀速下滑；若 $\mu>\tan\theta$，则物体可以静止在斜面上；若 $\mu<\tan\theta$，则物体不能静止在斜面上，必加速下滑。

解题捷径 5

牵引力分配规律：若系统只受到一个牵引力(或推力)，系统各部分的加速度都相同，系统各部分的阻质比都相等，则牵引力的分配与所牵引的质量成正比。该规律适用于光滑或粗糙平面，光滑或粗糙斜面，竖直平面。

解题捷径 6

合外力分配规律：若系统各部分加速度相同，则系统的合外力、各个物体合外力均与其质量成正比。

解题捷径 7

非平衡物体的合力等于 ma，如果在合力的反方向引入惯性力 F，使其大小等于 ma，

那么复杂的非平衡问题，可以转化为平衡问题来处理。

解题捷径 8

ma 法：由整体法分析叠放物体的加速度，再由悬空隔离法分析上面的物体合力的来源，然后确定上面物体受力的可能情况，这种方法称为 ma 法。

解题捷径 9

做直线运动的物体，在经过平衡位置时，合力为零，加速度为零，而物体的运动速度最大。

解题捷径 10

处于超重或失重状态，地球作用于物体的重力并不发生变化；超重和失重现象与物体的速度 v 无关，只取决于物体的加速度 a，a 向上超出 ma，a 向下失去 ma；失重的状态下，由重力产生的效果完全反映在沿重力方向的运动状态的改变上，而其他物理现象都会完全消失。如：单摆停摆、浮力消失……

解题捷径 11

连接体分离的特点是：两物体之间无弹力，两物体的速度相等，加速度也相等，分离以后两物体的运动情况不再相同。

解题捷径 12

物体系的超重与失重：系统中物体只有部分物体超重与失重，则 $F_N(F_T)=(M+m)g\pm ma_y$。

解题捷径 13

一起做变速运动的两个物体之间可能存在着相互作用力，当两个物体一起运动的加速度达到某一个值的时候，两物体之间的相互作用力会发生质的变化：弹力消失或静摩擦力突然变为滑动摩擦力。

解题捷径 14

明显的临界问题：这类物理问题中常有“刚好”、“恰好”、“最大(小)值”等词语，这样研究对象的临界点比较明显。

解题捷径 15

不明显的临界问题：有些习题中一般是给出一定的条件(或范围)，求研究对象状态变化中有关的量，隐去了研究对象状态变化的现象，或者表面上给出状态变化的现象，但还有一部分现象被掩盖了。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

当物体受到的合外力变化 ΔF 时，加速度也将相应地变化 Δa，即加速度增量与合外力增量成正比，而与物体原来的受力情况和运动状态无关，即 $\Delta F=m\Delta a$。

【范例】 如图 3-1-1 所示，质量为 $m=2\text{kg}$ 的小车停放在水平面上。当施以 $F_1=10\text{N}$ 的水平拉力时，加速度 $a_1=4\text{m/s}^2$；当施以 $F_2=20\text{N}$ 的水平拉力时，加速度为(　　)

图 3-1-1

A. 10m/s^2　　B. 9m/s^2

C. 8m/s^2　　D. 不能确定

【精析】 小车在水平方向受到的合外力增量为 $\Delta F=F_2-F_1$，则加速度增量为

$$\Delta a=\frac{\Delta F}{m}=\frac{F_2-F_1}{m}=5\text{m/s}^2$$

所以，在 F_2 的作用下加速度为

$$a=a_1+\Delta a=9\text{m/s}^2$$

B 正确。

【同类精练】 如图 3-1-2 所示，倾角为 α 的光滑斜面小车上，有一个质量为 m 的球。小车以加速度 a 向右运动。以 F_A 和 F_B 分别表示小球对车壁和斜面的压力，则(　　)

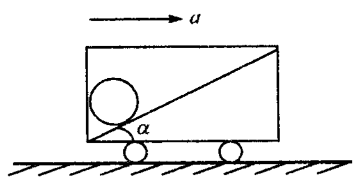


图 3-1-2

A. $F_A=ma$

B. $F_B=mg\cos\alpha$

C. $F_A=m(a+g\tan\alpha)$

D. $F_B=\dfrac{mg}{\cos\alpha}$

解题捷径 2

质点系牛顿第二定律：质点系所受到的合外力，等于各质点的质量与加速度乘积的矢量和，即 $\sum F_x=m_1a_{1x}+m_2a_{2x}+\cdots+m_na_{nx}$，$\sum F_y=m_1a_{1y}+m_2a_{2y}+\cdots+m_na_{ny}$。

【范例】 如图 3-2-1 所示，倾角为 α、质量为 M 的斜面，在粗糙水平地面上始终保持静止；质量为 m 的木块沿斜面滑下。求下列情况下，地面对斜面的支持力和摩擦力为：

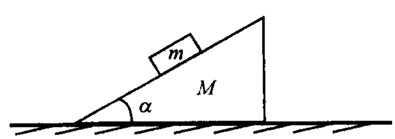


图 3-2-1

(1)木块匀速下滑;(2)木块以加速度 a 加速下滑;(3)木块以加速度 a 减速下滑。

【精析】 以木块、斜面系统为研究对象。(1)当木块匀速下滑时,系统的加速度为零,所以,$f=0$,$N=(M+m)g$。

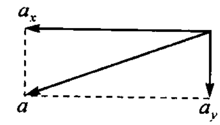


图 3-2-2

(2)当加速下滑时,

$f=ma_x=ma\cos\alpha$ 方向向左,

$(M+m)g-N=ma_y$,

$N=(M+m)g-ma\sin\alpha$。

(3)当减速下滑时,

$f=ma_x=ma\cos\alpha$ 方向向右,

$N-(M+m)g=ma_y$,

$N=(M+m)g+ma\cos\alpha$。

【同类精练】 如图 3-2-3 所示,在光滑的绝缘水平面上,有三个同样质量的带电小球 A、B 和 C,固定在同一直线上:若仅释放 A,释放瞬间 A 的加速度为 $a_A=1\text{m/s}^2$,方向向左;若仅释放 C,释放瞬间 C 的加速度为 $a_C=2\text{m/s}^2$,方向向右。若同时释放三个小球,求释放瞬间,B 球的加速度是多少?

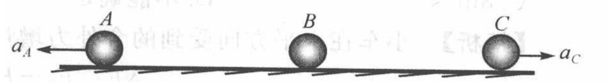


图 3-2-3

解题捷径 3

轻绳:质量不计,形变不计,内部张力处处相等,且可以突变;轻杆:质量不计,形变不计,内部弹力处处相等,且可以突变;轻弹簧:质量不计,弹簧有形变,由形变产生的弹力不会突变。

【范例】 如图 3-3-1 所示,物体 A、B、C 的质量分别为 m,$2m$,$3m$,A 与天花板间、B 与 C 之间用轻弹簧相连,当系统平衡后,突然将 A、B 间细绳烧断瞬间,A、B、C 的加速度(向下为正)分别为(　　)

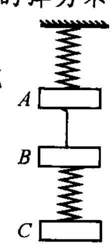


图 3-3-1

A. g,g,g　　B. $-5g$,$2.5g$,0

C. $-5g$,$2g$,0　　D. $-g$,$2g$,$3g$

【精析】 由于弹簧弹力不会突变，细绳烧断瞬间，物体 A、B 受到合外力均突变为 $5mg$，故有 $a_A=5g$，$a_B=2.5g$，而 C 所受合外力仍为零，所以，B 答案正确。

【同类精练】 如图 3-3-2 所示，一根弹簧和一根细绳共同拉着质量为 m 的小球，弹簧与竖直方向的夹角为 θ，细绳 OA 的方向水平，突然剪断 OA，则剪断瞬间小球的加速度的大小为________，方向为________。

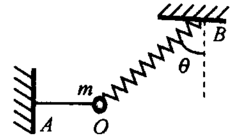


图 3-3-2

如果将弹簧换成细绳，剪断 OA 瞬间，小球的加速度为________，方向与竖直方向的夹角为________。

解题捷径 4

物体在倾角为 θ 的粗糙斜面上，若 $\mu=\tan\theta$，则物体可以在斜面上匀速下滑；若 $\mu>\tan\theta$，则物体可以静止在斜面上；若 $\mu<\tan\theta$，则物体不能静止在斜面上，必加速下滑。

【范例】 如图 3-4-1 所示，传送带与地面倾角 $\theta=37°$，AB 长为 16 米，传送带以 10 米/秒的速度匀速运动。在传送带上端 A 无初速地释放一个质量为 0.5 千克的物体，它与传送带之间的动摩擦系数为 $\mu=0.5$，求物体从 A 运动到 B 所需的时间。($g=10$ 米/秒^2)

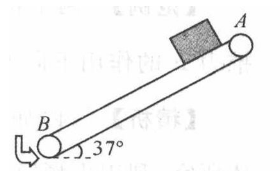


图 3-4-1

【精析】 由题给条件知 $0.5<\tan37°=0.75$，即 $\mu<\tan\theta$，则物体不能静止在斜面上，必加速下滑。

当物体下滑速度小于传送带时，物体的加速度为 a_1（此时滑动摩擦力沿斜面向下），则

$$a_1=\frac{mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta}{m}=10\text{m/s}^2,\ t_1=\frac{v}{a_1}=1\text{s},\ s_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2=5\text{m}$$

当物体下滑速度大于传送带 $v=10\text{m/s}$ 时，物体的加速度为 a_2（此时 f 沿斜面向上），则

$$a_2=\frac{mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta}{m}=2\text{m/s}^2,\ s_2=vt_2+\frac{1}{2}a_2t_2^2=10t_2+t_2^2=16-5=11$$

即：$10t_2+t_2^2=11$，解得：$t_2=1\text{s}$，$t_2=-11\text{s}$（舍去），

所以，$t=t_1+t_2=2\text{s}$。

【同类精练】 如图 3-4-2 所示，足够长的传送带与水平间夹角为 θ，以速度 v_0 逆时针匀速转动。在传送带的上端轻轻放置一个质量为 m 的小木块，若小木块与传送带间的动摩擦因数 $\mu<\tan\theta$，则下图中能客观地反映小木块的速度随时间变化关系的是________；若小木块与传送带间的动摩擦因数 $\mu>\tan\theta$，则下图中能客观地反映小木块的速度随时间变化关系的是________。

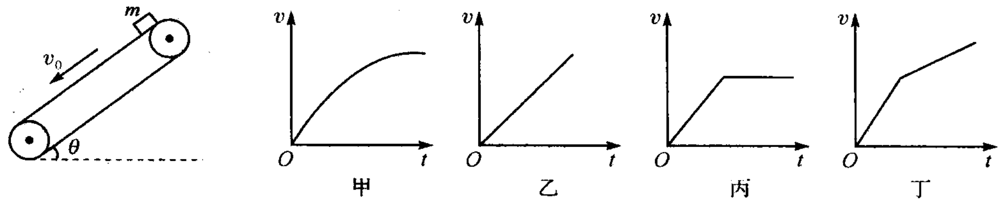


图 3-4-2

解题捷径 5

牵引力分配规律：若系统只受到一个牵引力(或推力)，系统各部分的加速度都相同，系统各部分的阻质比都相等，则牵引力的分配与所牵引的质量成正比。该规律适用于光滑或粗糙平面，光滑或粗糙斜面，竖直平面。

【范例】 两个材料相同、相互接触的物体 m_1 和 m_2，放在水平面上或斜面上，在水平推力 F 的作用下向上做匀加速运动，那么两物体之间的作用力为 $F_N=\frac{m_2}{m_1+m_2}F$。

【精析】 (1)如图 3-5-1 所示，若水平面光滑，先取整体研究，利用牛顿第二定律，求共同的加速度 $a=\frac{F}{m_1+m_2}$，再取 m_2 研究，由牛顿第二定律得 $F_n=\frac{m_2}{m_{1+}m_2}F$，若水平面粗糙，设动摩擦因数为 μ，同理，$a=\frac{F-\mu(m_1+m_2)g}{m_{1-}m_2}=\frac{F}{m_1+m_2}-\mu g$，$F_N-\mu m_2g=m_2a$，

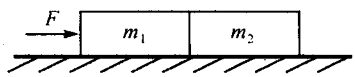


图 3-5-1

所以 $F_N=\frac{m_2}{m_1+m_2}F$。

(2)如图 3-5-2 所示，若斜面光滑，先整体分析，由牛顿第二定律知 $a=\frac{F-(m_1+m_2)g\sin\theta}{m_1+m_2}=\frac{F}{m_1+m_2}-g\sin\theta$。再取 m_2 分析，由牛顿第二定律得 $F_N-m_2g\sin\theta=m_2a$，$F_N=\frac{m_2}{m_2+m_2}F$。若斜面粗糙，设动摩擦因数为 μ，同理，$a=\frac{F-(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu(m_1+m_2)g\cos\theta}{m_1+m_2}$，

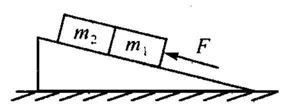


图 3-5-2

所以 $F_N=\frac{m_2}{m_1+m_2}F$。

【同类精练】 如图 3-5-3 所示，质量分别为 m_A、m_B 的 A、B 两物块用轻线连接放在倾角为 θ 的斜面上，用始终平行于斜面向上的拉力 F 拉 A，使它们沿斜面匀加速上升，A、B 与斜面的动摩擦因数均为 μ，为了增加轻线上的张力，可行的办法是(　　)

A. 减小 A 物块的质量

B. 增大 B 物块的质量

C. 增大倾角 θ

D. 增大动摩擦因数 μ

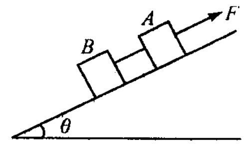


图 3-5-3

解题捷径 6

合外力分配规律：若系统各部分加速度相同，则系统的合外力、各个物体合外力均与其质量成正比。

【范例】 如图 3-6-1 所示，在光滑水平面上，有质量 $M=3\text{kg}$，$m=2\text{kg}$ 的两个物体，由水平轻杆连接在一起，并在 $F_1=15\text{N}$ 和 $F_2=4\text{N}$ 的反方向水平拉力作用下运动。求轻杆的张力是多大？

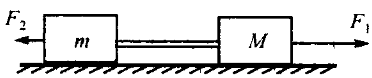


图 3-6-1

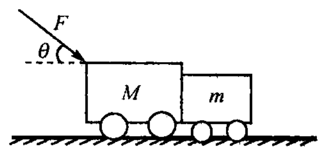


图 3-6-2

【精析】 设轻杆的张力为 F，以系统和 m 为研究对象。根据合力分配规律，有

$$\frac{F_1-F_2}{F-F_2}=\frac{M+m}{m}$$

所以，杆的张力为

$$F=\frac{m}{M+m}(F_1-F_2)+F_2=8.4\text{N}$$

【同类精练】 如图 3-6-2 所示，两车质量分别为 M 和 m，在与水平方向成 θ 的推力作用下，一起沿摩擦因数为 μ 的水平面匀加速运动。求两车之间的相互作用力是多大？

解题捷径 7

非平衡物体的合力等于 ma，如果在合力的反方向引入惯性力 F，使其大小等于 ma，那么复杂的非平衡问题，可以转化为平衡问题来处理。

【范例】 一个物体放在倾角为 θ 的斜面上，斜面固定在加速上升的电梯中，加速度为 a，如图 3-7-1 所示，在物体始终相对于斜面静止的条件下，下列说法中正确的是（　　）

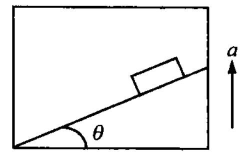


图 3-7-1

A. 当 θ 一定时，a 越大，斜面对物体的正压力越小

B. 当 θ 一定时，a 越大，斜面对物体的摩擦力越大

C. 当 a 一定时，θ 越大，斜面对物体的正压力越小

D. 当 a 一定时，θ 越大，斜面对物体的摩擦力越小

【精析】 对物体进行受力分析，引入惯性力，方向竖直向下，大小为 ma，把非平衡问题转化为平衡问题，把向下的力 $(mg+ma)$ 沿下滑方向和紧压斜面方向正交分解，则 $F_x=(mg+ma)\sin\theta$，$F_y=(mg+ma)\cos\theta$，由“平衡条件”知：$F_N=(mg+ma)\cos\theta$，$f=(mg+ma)\sin\theta$，所以 B、C 正确。

【同类精练】 如图 3-7-2 所示，小车以加速度 a 沿水平方向运动，小车的木架上悬挂一小球，小球相对于木架静止，且悬线与竖直方向夹角为 θ。求小车的加速度。

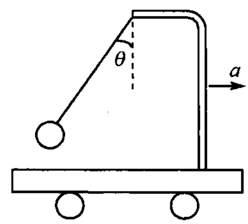


图 3-7-2

解题捷径 8

ma 法：由整体法分析叠放物体的加速度，再由悬空隔离法分析上面的物体合力的来源，然后确定上面物体受力的可能情况，这种方法称为 ma 法。

【范例】 固定的光滑斜面上，有一物体 P 放在物体 Q 上，两者一道以某一初速度沿斜面向上滑行，然后滑下，如图 3-8-1 所示。下列说法中正确的是（　　）

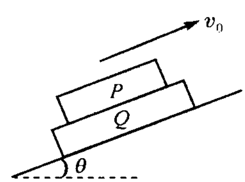


图 3-8-1

A. 上升过程中 P 受 Q 的摩擦力方向向上

B. 下滑过程中 P 受 Q 的摩擦力方向向上

C. 上升过程中 P 不受 Q 的摩擦力

D. 下滑过程中 P 不受 Q 的摩擦力

【精析】 由整体法受力分析知：无论系统上滑或者下滑，系统的加速度 $a=g\sin\theta$，把 P 悬空隔离知，P 受到的合力为 $ma=mg\sin\theta$，此表达式恰是重力的一个分力，在沿斜面方向上不可能再受其他力。所以，C、D 正确。

【同类精练】 一个单摆悬挂在小车上，随小车沿着斜面滑下，如图 3-8-2 所示，图中的虚线①与斜面垂直，虚线②沿斜面方向，则可判断出（　　）

A. 如果斜面光滑，摆线与②重合

B. 如果斜面光滑，摆线与①重合

C. 如果斜面粗糙但摩擦力等于下滑力，摆线位于③重合

D. 如果斜面粗糙但摩擦力小于下滑力，摆线位于②与③之间

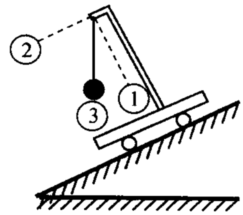


图 3-8-2

解题捷径 9

做直线运动的物体，在经过平衡位置时，合力为零，加速度为零，而物体的运动速度最大。

【范例】 设雨点下落过程中受到的空气阻力与雨点的横截面积 S 成正比，与雨点下落的速度 v 的平方成正比，即 $f=kSv^2$（其中 k 为比例系数），雨点接近地面时近似看做匀速直线运动，重力加速度为 g。若把雨点看做球形，其半径为 r，球的体积为 $4\pi r^3/3$，设雨点的密度为 ρ，求：

(1)每个雨点最终的运动速度 v_m（用 ρ、r、g、k 表示）；

(2)当雨点的速度达到 $v_m/2$ 时，雨点的加速度 a 为多大？

【精析】 (1)当 $f=mg$ 时，雨点达到最终速度 v_m，

$kSv_m^2=mg$，

$k\pi r^2 v_m^2=\rho\dfrac{4}{3}\pi r^3 g$，

得 $v_m=\sqrt{\dfrac{4\rho rg}{3k}}$。

(2)由牛顿第二定律得 $mg-f=ma$，则 $mg-kS\left(\dfrac{v_m}{2}\right)^2=ma$，

解得 $a=\dfrac{3}{4}g$。

【同类精练】 如图 3-9-1 所示，质量为 m 的物块套在光滑竖直杆上，不可伸长的轻绳跨过固定的光滑小滑轮 O（大小不计），小滑轮到杆的水平距离 $OB=0.3\text{m}$。绳的另一端挂一质量为 $M=2m$ 的物块，当细绳与竖直杆间的夹角为 60°时，系统恰可保持静止状

态。不计轻绳的重力和一切阻力(g 取 10m/s^2)，当将 m 由 B 点起从静止开始释放后，m 将在 BC 间做往复运动，求 BC 间的距离及 m 的最大速度。

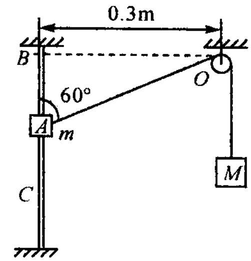


图 3-9-1

解题捷径 10

处于超重或失重状态，地球作用于物体的重力并不发生变化；超重和失重现象与物体的速度 v 无关，只取决于物体的加速度 a，a 向上超出 ma，a 向下失去 ma；失重的状态下，由重力产生的效果完全反映在沿重力方向的运动状态的改变上，而其他物理现象都会完全消失。如：单摆停摆、浮力消失……

【范例】 以加速度 a 匀加速上升的电梯里，有一个质量为 m 的人，下述说法中正确的是(　　)

A. 此人对地球的吸引力为 $m(g+a)$　　B. 此人对电梯的压力为 $m(g+a)$

C. 此人受到的重力为 $m(g+a)$　　D. 此人的体重为 $m(g+a)$

【精析】 由本题解题捷径知：B、D 正确。

【同类精练】 小球的密度小于烧杯中水的密度，如图 3-10-1 所示，球拴在弹簧上，弹簧的下端固定在杯底，当装置静止时，弹簧伸长 Δx，当装置自由下落的过程中，弹簧的伸长将(　　)

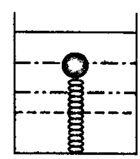


图 3-10-1

A. 仍为 Δx

B. 大于 Δx

C. 小于 Δx，大于零

D. 等于零

解题捷径 11

连接体分离的特点是：两物体之间无弹力，两物体的速度相等，加速度也相等，分离以后两物体的运动情况不再相同。

【范例】 一弹簧秤的秤盘质量 $m_1=1.5\text{kg}$，盘内放一质量为 $m_2=10.5\text{kg}$ 的物体 P，

弹簧质量不计，其劲度系数为 $k=800\text{N/m}$，系统处于静止状态，如图 3-11-1 所示。现给 P 施加一个竖直向上的力 F，使 P 从静止开始向上做匀加速直线运动，已知在最初 0.2s 内 F 是变化的，在 0.2s 后是恒定的，求 F 的最大值和最小值各是多少？（$g=10\text{m/s}^2$）

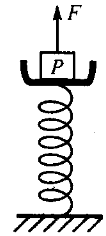


图 3-11-1

【精析】 因为在 $t=0.2\text{s}$ 内 F 是变力，在 $t=0.2\text{s}$ 以后 F 是恒力，所以在 $t=0.2\text{s}$时，P 离开秤盘，此时 P 受到盘的支持力为零，盘和物体的速度和加速度都相同。

由于盘的质量 $m_1=1.5\text{kg}$，所以此时弹簧不能处于原长。设在 0～0.2s 这段时间内 P 向上运动的距离为 x，对物体 P 据牛顿第二定律可得：$F+N-m_2g=m_2a$

对于盘和物体 P 整体应用牛顿第二定律可得：

$$F+k\left[\frac{(m_1+m_2)g}{k}-x\right]-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a$$

令 $N=0$，并由上述二式求得 $x=\dfrac{m_2g-m_1a}{k}$，而 $x=\dfrac{1}{2}at^2$，所以求得 $a=6\text{m/s}^2$。

当 P 开始运动时拉力最小，此时对盘和物体 P 整体有 $F_{\min}=(m_1+m_2)a=72\text{N}$。

当 P 与盘分离时拉力 F 最大，$F_{\max}=m_2(a+g)=168\text{N}$。

【同类精练】 如图 3-11-2 所示，一个弹簧台秤的秤盘质量和弹簧质量都不计，盘内放一个物体 P 处于静止，P 的质量 $m=12\text{kg}$，弹簧的劲度系数 $k=300\text{N/m}$。现在给 P 施加一个竖直向上的力 F，使 P 从静止开始向上做匀加速直线运动，已知在 $t=0.2\text{s}$ 内 F 是变力，在 0.2s 以后 F 是恒力，$g=10\text{m/s}^2$，则 F 的最小值是________，F 的最大值是________。

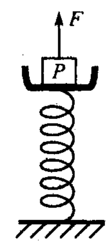


图 3-11-2

解题捷径 12

物体系的超重与失重：系统中物体只有部分物体超重与失重，则 $F_N(F_T)=(M+m)g\pm ma_y$。

【范例】 如图 3-12-1 所示，A 为电磁铁，C 为胶木秤盘，A 和 C（包括支架）的总质量为 M，整个装置用轻绳悬于 O 点，当电磁铁 A 通电时，铁片在被吸引上升的过程中，绳上拉力 F 的大小为（　　）

A. $F=Mg$

B. $F=(M+m)g$

C. $mg<F<(m+M)g$

D. $F>(M+m)g$

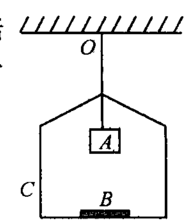


图 3-12-1

【精析】 绳上的拉力本应该等于系统的总重力，但由于铁片在加速上升的过程中，处于超重状态，超出了 ma，所以 $F>(M+m)g$，D 正确。

【同类精练】 如图 3-12-2 所示，质量为 M 的斜面静止在水平地面上。几个质量都是 m 的不同物块，先后在斜面上以不同的加速度向下滑动。下列关于水平地面对斜面底部的支持力的说法中正确的是(　　)

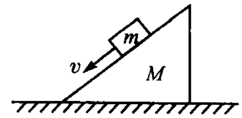


图 3-12-2

A. 匀速下滑时，支持力 $N=(m+M)g$

B. 匀加速下滑时，支持力 $N<(m+M)g$

C. 匀减速下滑时，支持力 $N>(m+M)g$

D. 无论怎样下滑，总是 $N=(m+M)g$

解题捷径 13

一起做变速运动的两个物体之间可能存在着相互作用力，当两个物体一起运动的加速度达到某一个值的时候，两物体之间的相互作用力会发生质的变化：弹力消失或静摩擦力突然变为滑动摩擦力。

【范例】 一个质量为 0.2kg 的小球用细线吊在倾角 $\theta=53°$ 的斜面顶端，如图 3-13-1，斜面静止时，球紧靠在斜面上，绳与斜面平行，不计摩擦，当斜面以 10m/s^2 的加速度向右做加速运动时，求绳的拉力及斜面对小球的弹力。

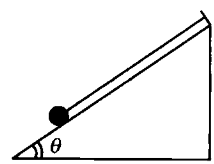


图 3-13-1

【精析】 当加速度 a 较小时，小球与斜面体一起运动，此时小球受重力、绳拉力和斜面的支持力作用，绳平行于斜面，当加速度 a 足够大时，小球将“飞离”斜面，此时小球受重力和绳的拉力作用，绳与水平方向的夹角未知，范例中要求 $a=10\text{m/s}^2$ 时绳的拉力及斜面的支持力，必须先求出小球离开斜面的临界加速度 a_0（此时，小球所受斜面支持力恰好为零），

由 $mg\cot\theta=ma_0$，

所以 $a_0=g\cot\theta=7.5\text{m/s}^2$，

因为 $a=10\text{m/s}^2>a_0$，

所以小球离开斜面 $N=0$，小球受力情况如图 3-13-2 所示，则 $T\cos\alpha=ma$，$T\sin\alpha=mg$，

所以 $T=\sqrt{(ma)^2+(mg)^2}=2.83\text{N}$，$N=0$。

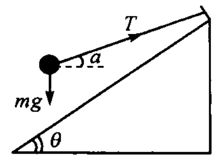
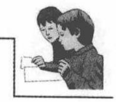


图 3-13-2



【同类精练】 质量为 0.2kg 的小球用细绳吊在倾角 $\theta=60^\circ$ 的斜面体的顶端，斜面体静止时，小球紧靠在斜面上，线与斜面平行，如图 3-13-3所示，不计摩擦，求当斜面体分别以 $2\sqrt{3}\text{m/s}^2$，$4\sqrt{3}\text{m/s}^2$ 的加速度向右加速时，线对小球的拉力。

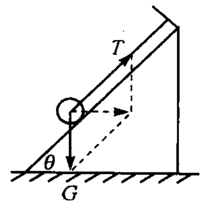


图 3-13-3

解题捷径 14

明显的临界问题：这类物理问题中常有“刚好”、“恰好”、“最大（小）值”等词语，这样研究对象的临界点比较明显。

【范例】 一质量为 m 的物体放在一倾角为 θ 的斜面上，如图 3-14-1所示，向下轻轻一推，它刚好匀速下滑，若此物体以一个沿斜面向上的初速度 v_0 沿斜面向上运动，则它能向上滑的最大位移是多少？

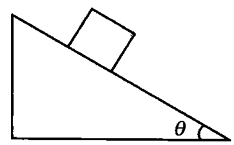


图 3-14-1

【精析】 设最大位移为 s，动摩擦因数为 μ，而题中“刚好匀速下滑”中的“刚好”就是临界点，其物理意义即 $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$，所以 $\mu=\tan\theta$。

当物体向上滑动时所受的合外力 $F_{合}=mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta=2mg\sin\theta$，由牛顿第二定律可得 $F_{合}=ma$，所以物体向上运动的加速度的大小 $a=2g\sin\theta$，物体向上做的是减速运动，由运动学公式可得 $-2as=0^2-v_0^2$，所以 $s=\dfrac{v_0^2}{4g\sin\theta}$。

点评：解这类问题的关键在于找出临界点，具体分析研究对象在临界点前后两种不同状态所具有的特征，进行求解。

【同类精练】 不可伸长的轻绳跨过质量不计的滑轮，绳子的一端系一质量 $M=15\text{kg}$ 的重物，重物静止于地面上，有一质量 $m=10\text{kg}$ 的猴子从绳的另一端沿绳上爬，如图 3-14-2 所示，不计滑轮摩擦，在重物不离开地面的条件下，猴子向上爬的最大加速度为(　　)

A. 20m/s^2　　B. 5m/s^2

C. 10m/s^2　　D. 15m/s^2

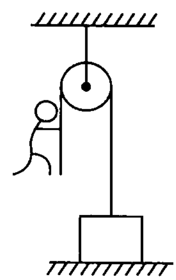


图 3-14-2

解题捷径 15

不明显的临界问题：有些习题中一般是给出一定的条件（或范围），求研究对象状态变化中有关的量，隐去了研究对象状态变化的现象，或者表面上给出状态变化的现象，但还有一部分现象被掩盖了。

【范例】 如图 3-15-1 所示，位于斜面上的物块 M 在沿斜面向上的力 F 作用下，处于静止状态。当力 F 增大时，物块所受的静摩擦力（　　）

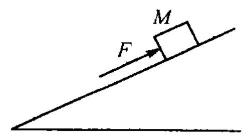


图 3-15-1

A. 可能增大　　B. 可能减小

C. 可能不变　　D. 以上都有可能

【精析】 对 M 进行受力分析，将重力分解为沿斜面的力 F_1 和垂直于斜面的力 F_2，设摩擦力的方向沿斜面向下，如图 3-15-2 所示。当 $F=F_1$ 时，$F_f=0$。当 $F>F_1$ 时，$F_f=F-F_1$，方向沿斜面向下，增大 F 时，F_f 也增大。当 $F<F_1$ 时，$F_f=F_1-F$，方向沿斜面向上，增大 F 时，F_f 就减小。综上所述，答案为 A、B。

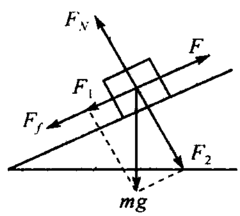


图 3-15-2

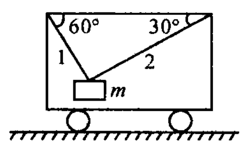


图 3-15-3

点评：$F=F_1$ 是此题的临界状态，抓住了这个临界条件，此题就迎刃而解。

【同类精练】 如图 3-15-3 所示，两细绳与水平的车顶面的夹角为 60°和 30°，物体的质量为 m。当小车以大小为 $2g$ 的加速度向右匀加速运动时，绳 1 和绳 2 的张力大小分别为多少？

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 当小车处于平衡状态，即 $a=0$ 时，$F_{A0}=mg\tan\alpha$；当以 a 加速运动时，$\Delta F_A=ma$，

所以，$F_A=F_{A0}+\Delta F_A=m(a+g\tan\alpha)$，

小球对斜面的压力始终不变，且为 $F_B=\dfrac{mg}{\cos\alpha}$，

所以，C、D 正确。

解题捷径 2

【精析】 以三球为系统，并设小球的质量为 m，且水平向右为正，根据质点系牛顿第二定律

$$\sum F=m(a_A+a_B+a_C)=0$$

所以，B 球的瞬时加速度为

$a_B=-(a_A+a_C)=-(-1+2)=-1\text{m/s}^2$，方向向左。

解题捷径 3

【精析】 剪断细绳前，小球共受到三个力作用，即小球的重力、细绳的拉力、弹簧的拉力，且处于平衡状态。重力与弹簧拉力的合力水平向右，大小为 $mg\tan\theta$、弹簧的拉力为 $\dfrac{mg}{\cos\theta}$。细绳剪断后，弹簧的拉力不能立即改变，仍为 $\dfrac{mg}{\cos\theta}$，重力也不变。其合力仍为水平向右，大小不变，由牛顿定律得 $a=g\tan\theta$，水平向右。

若将弹簧换成细绳，细绳形变量很小，剪断水平绳的瞬间弹力立即发生变化，此时小球将要做圆周运动，速度为 0，沿斜绳方向的合力为 0，斜绳的拉力为 $mg\cos\theta$，小球的加速度方向为垂直于斜绳方向，大小为 $g\sin\theta$，与竖直方向夹角为 $90°-\theta$。剪断水平绳前后，斜绳中拉力之比为 $1:\cos^2\theta$。

解题捷径 4

【精析】 若小木块与传送带间的动摩擦因数 $\mu<\tan\theta$，则小木块不可能与传送带保持相对静止，小木块一直处于加速状态，只是开始小木块受到的滑动摩擦力沿斜面向下，合力大加速度大，图线的倾斜程度大，小木块加速到和传送带的速度相等之后小木块继续加速，后来小木块受到的滑动摩擦力沿斜面向上，合力变小，加速度变小，图线的倾斜程度变小，选丁图。

若小木块与传送带间的动摩擦因数 $\mu > \tan\theta$，则小木块可与传送带保持相对静止，小木块先加速后匀速，选丙图。

解题捷径 5

由本题捷径可知：$T=\frac{m_B}{m_A+m_B}\cdot F$，欲使 T 增大，增大 m_B 或减小 m_A。应选 A、B。

解题捷径 6

【精析】 分别以系统和 m 为研究对象，根据合力分配规律，有

$$\frac{F\cos\theta-\mu(Mg+F\sin\theta)-\mu mg}{N-\mu mg}=\frac{M+m}{m}$$

所以，两车的相互作用力为

$$N=\frac{m}{M+m}\cdot F(\cos\theta+\mu\sin\theta)$$

解题捷径 7

【精析】 选小车为参考系，小球受重力 mg，悬线拉力为 F 和惯性力 $F'=ma$，在非惯性系中小球是静止的，根据牛顿第二定律得：

$$ma-F\cdot\sin\theta=0 \qquad (1)$$

$$F\cos\theta-mg=0 \qquad (2)$$

由(1)(2)两式可得：$a=g\tan\theta$

解题捷径 8

【精析】 由本题解题捷径知：斜面光滑时 $a=g\sin\theta$，小球沿斜面方向不需要任何力，摆线垂直于斜面，A 错误，B 正确。如果斜面粗糙但摩擦力等于下滑力，系统匀速下滑，摆线位于③重合，C 正确。若摩擦力小于下滑力，则 $a<g\sin\theta$，小球需要一个沿斜面的分力存在，所以，摆线位于②与③之间，D 正确。

解题捷径 9

【精析】 由题意知，m 在 A 位置能处于平衡状态，当 m 从 B 点静止释放后，经过 A 位置时合力为零，加速度为零，物块的速度最大。

取 m、M 系统，$mgh=Mg(\sqrt{h^2+d^2}-d)$，

将 $d=0.3\text{m}$ 及 $M=2m$，

代入得 $h=0.4\text{m}$，

$$mg\times\frac{1}{10}\sqrt{3}=Mg\left(\frac{1}{5}\sqrt{3}-0.3\right)+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2}\right)^2$$

$$v=\sqrt{8-4\sqrt{3}}\text{m/s}$$

解题捷径 10

【精析】 装置自由下落的过程中，系统处于完全失重状态，物体之间没有弹力，所以水对小球的浮力和弹簧对小球的弹力均消失，弹簧恢复到原长。所以 D 正确。

解题捷径 11

【精析】 因为在 $t=0.2\text{s}$ 内 F 是变力，在 $t=0.2\text{s}$ 以后 F 是恒力，所以在 $t=0.2\text{s}$ 时，P 离开秤盘。此时 P 受到盘的支持力为零，盘和物体的速度和加速度都相同。

由于盘和弹簧的质量都不计，所以此时弹簧处于原长。在 0～0.2s 这段时间内 P 向上运动的距离：

$$x=mg/k=0.4\text{m}$$

因为 $x=\dfrac{1}{2}at^2$，所以 P 在这段时间内的加速度 $a=\dfrac{2x}{t^2}=20\text{m/s}^2$，

当 P 开始运动时拉力最小，此时对物体 P 有 $N-mg+F_{\min}=ma$，

又因此时 $N=mg$，所以有 $F_{\min}=ma=240\text{N}$。

当 P 与盘分离时拉力 F 最大，$F_{\max}=m(a+g)=360\text{N}$。

解题捷径 12

【精析】由本题解题捷径知：选项 A、B、C 正确。

解题捷径 13

【精析】 如果我们仔细审题就会发现范例设问的着眼点是加速度。当小球向右加速运动时，如果加速度 a 很小，小球压紧斜面，受力分析如图 3-1 所示；如果加速度 a 很大，小球将离开斜面，受力分析如图 3-2 所示。

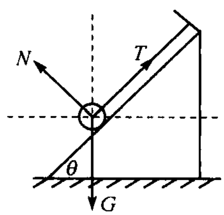


图 3-1

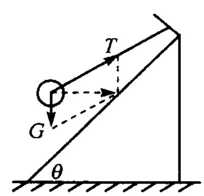


图 3-2

设小球对斜面的压力为零时，斜面体的加速度为 a_0（即临界加速度），受力分析得：$a_0=g\cot\theta=10\sqrt{3}/3\text{m/s}^2$。

(1)因为 $a=2\sqrt{3}\text{m/s}^2<a_0$，因此小球仍压紧斜面，由牛顿第二定律和平衡条件列方程有：

$$T\cos\theta-N\sin\theta=ma,\ T\sin\theta+N\cos\theta=mg$$

代入数据解得：

$$T=m(g\sin\theta+a\cos\theta)=1.2\sqrt{3}\text{N}$$

(2)因为 $a=4\sqrt{3}\text{m/s}^2>a_0$，因此小球已"飘"离斜面，$T=m\sqrt{g^2+a^2}=0.4\sqrt{37}\text{N}$（此处也可按(1)的列式方法求解）。

解题捷径 14

【精析】 当绳子的拉力为 $F=Mg=150\text{N}$ 时，猴子的加速度最大，对猴子受力分析可知，猴子的加速度为 $a=\frac{F-mg}{m}=\frac{Mg-mg}{m}=5\text{m/s}^2$，所以 B 正确。

解题捷径 15

【精析】 本题的关键在于绳 1 的张力不是总存在的，它的有无和大小与车运动的加速度大小有关。当车的加速度大到一定值时，物块会"飘"起来而导致绳 1 松弛，没有张力。假设绳 1 的张力刚好为零时，有

$$F_{T_2}\cos30^\circ=ma_0$$
$$F_{T_2}\sin30=mg$$

所以 $a_0=\sqrt{3}g$，

因为车的加速度 $2g>a_0$，所以物块已"飘"起来，则绳 1 和绳 2 的张力大小分别为

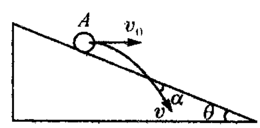
$$F_{T_1}=0$$
$$F_{T_2}=\sqrt{(ma)^2+(mg)^2}=\sqrt{5}mg$$

第四章　曲线运动中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：平抛运动任意时刻的瞬时速度 v 的反向延长线，一定通过此时水平总位移 x 的中点；平抛运动任意时刻的速度偏角 φ 的正切函数值 $\tan\varphi$ 等于速度的竖直分量 v_y 与水平分量 v_0 之比，也等于位移的竖直分量 y 与水平分量的一半 $\frac{1}{2}x$ 之比；平抛运动任意时刻的速度偏角的正切函数值 $\tan\varphi$ 等于位移偏角（s 与 x 的夹角）的正切函数值 $\tan\theta$ 的 2 倍，即 $\tan\varphi=2\tan\theta$。

【题目】 如图一所示，从倾角为 θ 的足够长的斜面上 A 点，先后将同一小球以不同的初速度水平向右抛出，第一次初速度为 v_1，球落到斜面上前一瞬间的速度方向与斜面夹角为 α_1，第二次初速度为 v_2，球落到斜面上前一瞬间的速度方向与斜面的夹角为 α_2，若 $v_1>v_2$，则（　　）



图一

A. $\alpha_1>\alpha_2$　　　　B. $\alpha_1=\alpha_2$

C. $\alpha_1<\alpha_2$　　　　D. 无法确定

【精析】 末速度与水平初速度的夹角为 $\alpha+\theta$，位移与水平初速度的夹角为 θ。由规律知：

$$2\tan\theta=\tan(\alpha+\theta)$$

由上式可知 α 的大小与抛出速度大小无关。故选 B。

小试二：在均质球层的空腔内任意位置处，质点受到地壳万有引力的合力为零，即 $\sum F=0$。

【题目】 一质点在匀质球壳空腔内任一点受到球壳的万有引力为零。

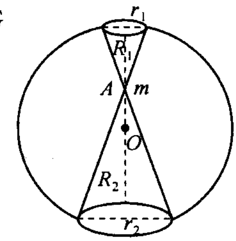
【精析】 如图二所示，在球壳上分别取对称的微小部分，这两部分可视为圆周，设半径分别为 r_1、r_2，到 A 点的距离为 R_1、R_2，令球壳的面密度为 ρ，则两圆周的质量分别为：

$m_1=\rho\pi r_1^2$，$m_2=\rho\pi r_2^2$。对 A 点质量为 m 的物体的万有引力为：$F_1=G\dfrac{mm_1}{R_1^2}=G\dfrac{\rho\pi r_1^2 m}{R_1^2}$，$F_2=G\dfrac{mm_2}{R_2^2}=G\dfrac{\rho\pi r_2^2}{R_2^2}$。

由几何关系又有：$\dfrac{R_1}{r_1}=\dfrac{R_2}{r_2}$，

所以：$F_1=F_2$，物体 m 受到两圆周万有引力的合力为零。

由上述可知，球壳上任一对称部分对 A 点的物体的万有引力均为零，即球壳对其内部 A 点的物体万有引力为零。



图二

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

传动轮转动时，与传送带接触的传动轮上各点线速度相等且都等于带速；两轮接触的各点的线速度相同；同轴转动时，轮上各点角速度相同。

解题捷径 2

斜交坐标系：在研究物理问题时，恰当地选取坐标系（包括坐标方向和坐标原点），可使解决问题的思路和步骤变得清晰和简捷。

解题捷径 3

做曲线运动的物体，在运动过程中只要与圆周运动沾上一点边，那么在该点就满足圆周运动的规律，即 $F_n=\dfrac{mv^2}{r}$。

解题捷径 4

物体做曲线运动时，物体所受合力的方向必指向"凹侧"。轨迹夹在加速度和速度之间。在解物理题时往往根据曲线的弯向来确定力的方向，有时也根据力的方向来确定曲线的弯向。

解题捷径 5

斜上抛运动或类似斜上抛运动，从抛出点到最高点的运动可看作平抛运动或类平抛运动。

解题捷径 6

平抛运动任意时刻的瞬时速度 v 的反向延长线，一定通过此时水平总位移 x 的中点；平抛运动任意时刻的速度偏角 φ 的正切函数值 $\tan\varphi$ 等于速度的竖直分量 v_y 与水平分量

v_0 之比，也等于位移的竖直分量 y 与水平分量的一半 $\frac{1}{2}x$ 之比；平抛运动任意时刻的速度偏角的正切函数值 $\tan\varphi$ 等于位移偏角（s 与 x 的夹角）的正切函数值 $\tan\theta$。

解题捷径 7

没有支撑物的小球，在竖直平面内做圆周运动，刚好通过最高点的条件是：小球达到最高点时绳子的拉力（或轨道的弹力）刚好等于零，小球的重力提供其做圆周运动的向心力，即 $mg=m\frac{v_C^2}{l}$。

解题捷径 8

没有支撑物的小球（或带电），在类竖直平面内的圆周运动，刚好通过最高点的条件是：小球达到最高点时绳子的拉力（或轨道的弹力）刚好等于零，小球的等效重力提供其做圆周运动的向心力，即 $mg_{效}=\frac{mv_C^2}{l}$，类机械能守恒，即 $mg_{效}\ 2l+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}mv_0^2$。

解题捷径 9

对人造地球卫星而言，a,v,T,ω 各自由唯一的共同变量 r 确定，因此它们之间也通过 r 互相关联。这就是所谓的“r 定都定，r 变都变”。

解题捷径 10

一般情况下，运行的卫星其所受到的万有引力不刚好等于所需向心力，卫星的运行速度和轨道半径就要发生变化。当万有引力小于所需的向心力时卫星将做“离心”运动；当万有引力大于所需的向心力时卫星将做“近心”运动。

解题捷径 11

同步卫星必位于赤道上方一定高度处 $h=3.6\times10^7\,\text{m}$，约为地球半径的 6 倍；一颗同步卫星只能覆盖赤道周长的 45.2%，所以，至少三颗同步卫星才能覆盖整个赤道；一颗同步卫星覆盖地球的面积约为 42.5%，无论发射多少颗同步卫星都不能覆盖整个地球表面。

解题捷径 12

用长为 l 的绳拴一质点做圆锥摆运动时，则其周期 T 与绳长 l、摆角 θ、当地重力加速度 g 之间存在 $T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$。

解题捷径 13

地面附近的物体重力近似等于万有引力，即 $G\frac{Mm}{R^2}=mg$，常用 $GM=gR^2$（黄金代

换）。高度为 h 处的重力加速度为 g'，则 $G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}=mg'$。

解题捷径 14

太空中两个靠近的天体叫“双星”，它们由于两者的万有引力而绕连线上某一点做圆周运动，它们的角速度相同，其轨道半径与质量成反比，环绕线速度与质量成反比。

解题捷径 15

在均质球层的空腔内任意位置处，质点受到地壳万有引力的合力为零，即 $\sum F=0$。

解题捷径 16

在均质球体内部距离球心 r 处，质点受到的万有引力就等于半径为 r 的球体的引力，即 $F=G\dfrac{M'm}{r^2}$。

解题捷径 17

天体的第二宇宙速度大小等于第一宇宙速度的 $\sqrt{2}$ 倍，即 $v=\sqrt{2gR}$。

解题捷径 18

正比符号法：在解题过程中通常会遇到同类物理量的比值关系，运用正比符号法可以把运算过程中所有相同的物理量消去，简化运算过程，提高解题速度。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

传动轮转动时，与传送带接触的传动轮上各点线速度相等且都等于带速；两轮接触的各点的线速度相同；同轴转动时，轮上各点角速度相同。

【范例】 如图 4-1-1 所示为一皮带传动装置，右轮的半径为 r，a 是它边缘上的一点。左侧是一轮轴，大轮的半径是 $4r$，小轮的半径是 $2r$，b 点在小轮上，到小轮中心的距离为 r，c 点和 d 点分别位于小轮和大轮的边缘上，若在传动过程中，皮带不打滑，则（　　）

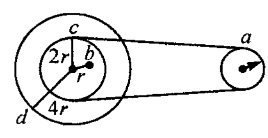


图 4-1-1

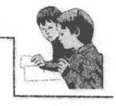
A. a 与 b 点的线速度大小相等

B. a 与 b 点的角速度大小相等

C. a 与 c 点的线速度大小相等

D. a 与 d 点的向心加速度大小相等

【精析】 由图可知，a 点和 c 点的线速度大小相等，即 $v_a=v_c$，故选项 C 正确。



$\because \omega_b=\omega_c, r_c=2r$,

由 $v=\omega r$ 得：$v_c=2v_b$，

$\because v_a=v_c$，$\therefore v_a\neq v_b$，故选项 A 错误；

$\because v_a=v_c, r_c=2r_a$，

由 $\omega=\dfrac{v}{r}$ 得：$\omega_a=2\omega_c$，

而 $\omega_b=\omega_c$，则 $\omega_a\neq\omega_b$，故选项 B 错误；

$a_a=\dfrac{v_a^2}{r}=\omega_a^2\cdot r$，

$a_d=\omega_d^2\cdot R=\omega_d^2\cdot 4r=\left(\dfrac{\omega_a}{2}\right)^2\cdot 4r=\omega_a^2\cdot r$，

$\therefore a_a=a_d$，故选项 D 正确。

本题正确答案为 C、D。

【同类精练】　如图 4-1-2 所示，A 为主轮，B、C 两轮共轴，D 轮靠摩擦由 C 轮带动，$r_D:r_B:r_A:r_C=3:2:1:1$；皮带与 A、B 轮间无滑动，各轮转动时有(　　)

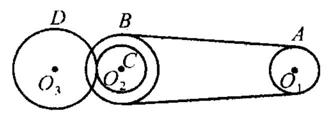


图 4-1-2

A. D 轮转向与 A 轮转向相反

B. 各轮边缘线速度之比 $v_A:v_B:v_C:v_D=2:2:1:1$

C. 各轮角速度之比 $\omega_A:\omega_B:\omega_C:\omega_D=6:3:3:1$

D. A 轮边缘各点向心加速度最大

解题捷径 2

斜交坐标系：在研究物理问题时，恰当地选取坐标系(包括坐标方向和坐标原点)，可使解决问题的思路和步骤变得清晰和简捷。

【范例】　如图 4-2-1 所示，从山脚向倾角 α 的山坡开炮。已知炮弹出口速率为 v_0，方向与山坡平面的夹角为 β，求炮弹落点到山脚的距离和在空中飞行的时间。

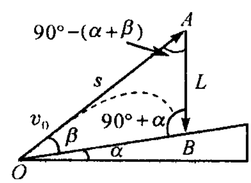


图 4-2-1

【精析】　将炮弹的斜上抛运动视为 v_0 方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动，采用斜交坐标。设炮弹在山脚的落点为 B，运动时间为 t，则在△OAB 中

$s=v_0t$，

$H=\dfrac{1}{2}gt^2$，

$L=OB$，

根据正弦定律得：

$$\frac{v_0 t}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\sin\beta}=\frac{L}{\sin[90^\circ-(\alpha+\beta)]}$$

所以，炮弹在空中飞行时间为 $t=\dfrac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$，

落点到山脚的距离为

$$L=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}v_0 t=\frac{2v_0^2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\alpha}$$

【同类精练】 一个人站在地面上，用枪瞄准树上的猴子。当子弹从枪口射出时，猴子闻声立即从树上竖直落下（初速度为零）。试分析子弹能否击中猴子。

解题捷径 3

做曲线运动的物体，在运动过程中只要与圆周运动沾上一点边，那么在该点就满足圆周运动的规律，即 $F_n=\dfrac{mv^2}{r}$。

【范例】 如图 4-3-1 所示，位于竖直平面上有 1/4 圆弧的光滑轨道，半径为 R，OB 沿竖直方向，圆弧轨道上端 A 点距地面高度为 H。当把质量为 m 的钢球从 A 点静止释放，最后落在了水平地面的 C 点处。若本地的重力加速度为 g，且不计空气阻力。请导出：

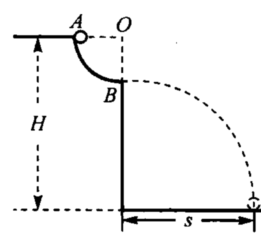


图 4-3-1

(1)钢球运动到 B 点的瞬间受到的支持力多大？

(2)钢球落地点 C 距 B 点的水平距离 s 为多少？

(3)比值 R/H 为多少时，小球落地点 C 距 B 点的水平距离 s 最大？这个最大值是多少？

【精析】 (1)小球从 A 到 B 过程中机械能守恒，有

$$mgR=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

小球沿圆弧做圆周运动，在 B 点由牛顿第二定律，有

$$N_B-mg=\frac{mv^2}{R} \tag{2}$$

解(1)、(2)式得　$N_B=3mg$

(2)小球离开 B 点后做平抛运动，抛出点高度为 $H-R$，有

$$H-R=\frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

$$s=vt \tag{4}$$

解(1)、(3)、(4)式得　$s=\sqrt{4HR-4R^2}$

(3)由 $s=\sqrt{4HR-4R^2}=\sqrt{H^2-(2R-H)^2}$ 可知

当 $R/H=\frac{1}{2}$ 时，s 有最大值 $s_{\max}$，且 $s_{\max}=H$(或 $s_{\max}=2R$)。

【同类精练】　一质量 $m=2\text{kg}$ 的小球从光滑斜面上高 $h=3.5\text{m}$ 处由静止滑下，斜面底端紧接着一个半径 $R=1\text{m}$ 的光滑圆环，如图 4-3-2 所示，试求：

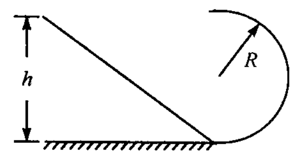


图 4-3-2

(1)小球滑至圆环顶点时对环的压力。

(2)小球至少应从多高处由静止滑下才能越过圆环最高点？

(3)小球从 $h'=2\text{m}$ 处由静止滑下时将在何处脱离圆环？($g=10\text{m/s}^2$)

解题捷径 4

物体做曲线运动时，物体所受合力的方向必指向“凹侧”。轨迹夹在加速度和速度之间。在解物理题时往往根据曲线的弯向来确定力的方向，有时也根据力的方向来确定曲线的弯向。

【范例】　如图 4-4-1 所示，物体在恒力 F 的作用下沿曲线从 A 运动到 B，这时突然使它所受到的力反向而大小不变(即由 F 变为 $-F$)，在此力作用下，物体以后的运动情况，下列说法中正确的是(　　)

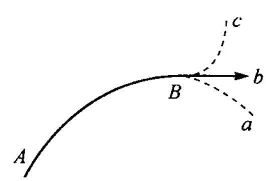


图 4-4-1

A. 物体可能沿曲线 Ba 运动

B. 物体可能沿曲线 Bb 运动

C. 物体可能沿曲线 Bc 运动

D. 物体可能沿原曲线由 B 返回 A

【精析】 由 AB 弧的弯向知，力 F 的方向大致向下，当在 B 点突然改变力的方向，既大致向上，物体在 B 以后的运动轨迹的弯向指向力的方向，即向上弯曲。所以应选 C 答案。

【同类精练】 如图 4-4-2 所示的塔吊臂上有一可以沿水平方向运动的小车 A，小车下装有吊着物体 B 的吊钩，在小车 A 与物体 B 以相同的水平速度沿吊臂方向匀速运动的同时，吊钩将物体 B 向上吊起，A、B 之间的距离以 $d=H-2t^2$(SI)(SI 表示国际单位制，式中 H 为吊臂离地面的高度)规律变化，则物体(　　)

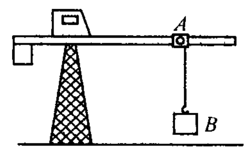


图 4-4-2

A. 做速度大小不变的曲线运动

B. 运动轨迹的凹侧向上

C. 做加速度大小方向均不变的曲线运动

D. 做加速度大小方向均变化的曲线运动

解题捷径 5

斜上抛运动或类似斜上抛运动，从抛出点到最高点的运动可看作平抛运动或类平抛运动。

【范例】 碉堡的射击孔距离地面高 $h=20\text{m}$，一个战士在距碉堡 $s=30\text{m}$ 的水平地面投掷手榴弹。求应以多大的速度 v_0 和仰角 α 投掷，才能使手榴弹恰好水平地从射击孔飞入。

【精析】 根据从抛出点到最高点的斜上抛运动与从最高点返回抛出点的平抛运动具有可逆性，即从最高点以 $v_0\cos\alpha$ 平抛出的物体，落至抛出点时的末速度 v_t 与 v_0 等值反向。又根据斜上抛运动具有对称性，即可视为两个对称于射高的平抛运动组成，如图 4-5-1 所示：

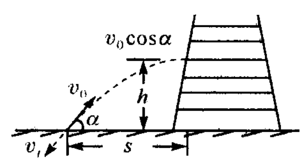


图 4-5-1

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \tag{1}$$

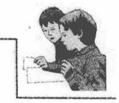
$$s=\frac{1}{2}\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \tag{2}$$

由(1)和(2)得

$$\tan\alpha=\frac{2h}{s}=\frac{4}{3}$$

所以，仰角 $\alpha=53°$，

初速度大小为



$$v_0=\frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}=25\text{m/s}$$

【同类精练】 如图 4-5-2 所示，有两板 M 和 N 竖立。从 N 板下端 A 点斜向上抛出一个小球，与两板的 B、C 两点相碰后，从 M 板上端 D 水平飞出。不计空气阻力、碰撞损失和碰撞时间，则 B、C、D 三点的高度之比为(　　)

A. 1∶3∶5　　B. 5∶8∶9

C. 1∶4∶9　　D. 1∶2∶3

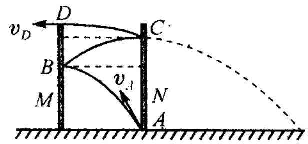


图 4-5-2

解题捷径 6

平抛运动任意时刻的瞬时速度 v 的反向延长线，一定通过此时水平总位移 x 的中点；平抛运动任意时刻的速度偏角 φ 的正切函数值 $\tan\varphi$ 等于速度的竖直分量 v_y 与水平分量 v_0 之比，也等于位移的竖直分量 y 与水平分量的一半 $\frac{1}{2}x$ 之比；平抛运动任意时刻的速度偏角的正切函数值 $\tan\varphi$ 等于位移偏角（s 与 x 的夹角）的正切函数值 $\tan\theta$ 的 2 倍，即 $\tan\varphi=2\tan\theta$。

【范例】 如图 4-6-1 所示，从倾角为 θ 的足够长的斜面上 A 点，先后将同一小球以不同的初速度水平向右抛出，第一次初速度为 v_1，球落到斜面上前一瞬间的速度方向与斜面夹角为 α_1，第二次初速度为 v_2，球落到斜面上前一瞬间的速度方向与斜面的夹角为 α_2，若 $v_1>v_2$，则(　　)

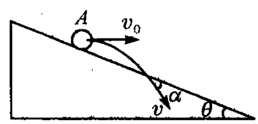


图 4-6-1

A. $\alpha_1>\alpha_2$　　B. $\alpha_1=\alpha_2$

C. $\alpha_1<\alpha_2$　　D. 无法确定

【精析】 末速度与水平初速度的夹角为 $\alpha+\theta$，位移与水平初速度的夹角为 θ。由规律知：

$$2\tan\theta=\tan(\alpha+\theta)$$

由上式可知 α 的大小与抛出速度大小无关。故选 B。

【同类精练】 如图 4-6-2 所示，从倾角为 θ 的足够长的斜面顶端 P 以速度 v 抛出一个小球，落在斜面上某处 Q 点，小球落在斜面上的速度与斜面的夹角为 α，若把初速度变为 $2v$，则(　　)

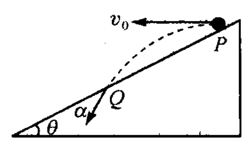


图 4-6-2

A. 空中的运动时间变为原来的 2 倍

B. 夹角 α 将变大

C. 夹角 α 与初速度大小无关

D. 无法确定

解题捷径 7

没有支撑物的小球，在竖直平面内做圆周运动，刚好通过最高点的条件是：小球达到最高点时绳子的拉力（或轨道的弹力）刚好等于零，小球的重力提供其做圆周运动的向心力，即 $mg=m\frac{v_C^2}{l}$。

【范例】 杂技演员表演“水流星”，在长为 1.6m 的细绳的一端，系一个总质量为 $m=0.5\text{kg}$ 的很小（可看作质点）的盛水容器，以绳的一端为圆心，在竖直平面内做圆周运动，如图 4-7-1 所示，若“水流星”通过最高点的速度为 $v=4\text{m/s}$，则下列说法中正确的是（$g=10\text{m/s}^2$）（　　）

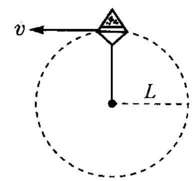


图 4-7-1

A.“水流星”通过最高点时，有水从容器中流出

B.“水流星”通过最高点时，绳的张力及容器底受到的压力均为零

C.“水流星”通过最高点时，处于完全失重状态，不受力的作用

D.“水流星”通过最高点时，绳子的拉力大小为 5N

【精析】 由本题的解题捷径知：“水流星”通过最高点的速度为 $v=4\text{m/s}$，此时水的重力提供其做圆周运动的向心力，绳的张力及容器底受到的压力均为零，所以，B 正确。

【同类精练】 如图 4-7-2①所示，在同一竖直平面内有两正对着的相同半圆光滑轨道，相隔一定的距离，虚线沿竖直方向，一小球能在其间运动，今在最高点与最低点各放一个压力传感器，测试小球对轨道的压力，并通过计算机显示出来，当轨道距离变化时，测得两点压力差与距离 x 的图象如图②所示，g 取 10m/s^2，不计空气阻力，求：

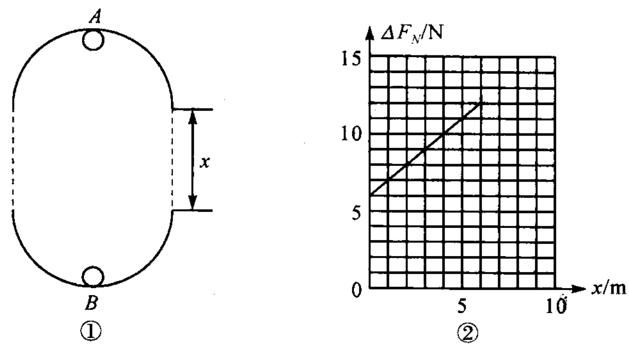


图 4-7-2

(1)小球的质量为多少？

(2)若小球在最低点 B 的速度为 20m/s，为使小球能沿轨道运动，x 的最大值为多少？

解题捷径 8

没有支撑物的小球(或带电),在类竖直平面内的圆周运动,刚好通过最高点的条件是:小球达到最高点时绳子的拉力(或轨道的弹力)刚好等于零,小球的等效重力提供其做圆周运动的向心力,即 $mg_{效}=\frac{mv_C^2}{l}$,类机械能守恒,即 $mg_{效}\,2l+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}mv_0^2$。

【范例】 光滑斜面的倾角为 θ,长为 l,上端小球沿斜面水平方向以速度 v_0 抛出,如图 4-8-1 所示,问小球的初速度 v_0 为多大时,小球刚好能沿斜面做圆周运动?

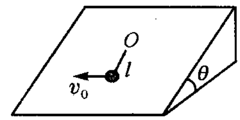


图 4-8-1

【精析】 小球沿斜面的等效重力加速度为 $g_{效}=g\sin\theta$,在小球运动到斜面最高点的速度为 $v_C=\sqrt{g_{效}\,l}$,由类机械能守恒知,$mg_{效}\,2l+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}mv_0^2$,所以,$v_0=\sqrt{4gl\sin\theta+gl\sin\theta}$。

【同类精练】 如图 4-8-2 所示,有一匀强电场,场强为 $E=10^4\text{N/C}$,方向水平向右。一个带正电的小球,质量为 $m=0.04\text{kg}$,电量为 $q=3\times10^{-5}\text{C}$,用长为 $l=0.4\text{m}$ 的细线系在 O 点。为了使小球恰好能在竖直平面内做圆周运动,求应以多大的速度将小球从平衡位置释放?

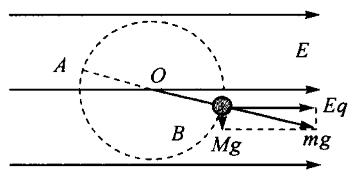


图 4-8-2

解题捷径 9

对人造地球卫星而言,a,v,T,ω 各自由唯一的共同变量 r 确定,因此它们之间也通过 r 互相关联。这就是所谓的"r 定都定,r 变都变"。

【范例】 某人造地球卫星因受高空稀薄空气的阻力作用,绕地球运转的轨道会慢慢改变。每次测量中卫星的运动可近似看作圆周运动,某次测量卫星的轨道半径为 r_1,后来变为 r_2,$r_1>r_2$。以 E_{K_1},E_{K_2} 表示恒星在这两个轨道上的动能,T_1,T_2 表示卫星在这两个轨道上绕地运动的周期,如图 4-9-1 所示,则(　　)

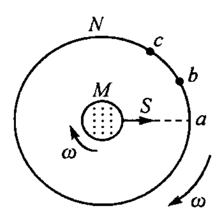


图 4-9-1

A. $E_{K_1}>E_{K_2}$,$T_1>T_2$　　B. $E_{K_1}>E_{K_2}$,$T_2>T_1$

C. $E_{K_1}<E_{K_2}$,$T_1>T_2$　　D. $E_{K_2}>E_{K_1}$,$T_2>T_1$

【精析】 由于稀薄空气的阻力作用，卫星的机械能将减小，轨道半径将减小。"一定都定，一变都变"，所以卫星的动能、周期都将变化，且动能变大，周期变小。C 正确。

【同类精练】 在研究宇宙发展演变的理论中，有一种学说叫"宇宙膨胀说"，这种说法认为万有引力常量 G 在缓慢地减小。根据这一理论，在很久以前，太阳系中地球公转情况与现在相比，下列说法中正确的是(　　)

A. 公转半径 R 较大　　B. 公转周期 T 较小

C. 公转速度 v 较小　　D. 公转角速度 ω 较小

解题捷径 10

一般情况下，运行的卫星其所受到的万有引力不刚好等于所需向心力，卫星的运行速度和轨道半径就要发生变化。当万有引力小于所需的向心力时卫星将做"离心"运动；当万有引力大于所需的向心力时卫星将做"近心"运动。

【范例】 在半径为 r 的轨道上做匀速圆周运动的卫星，它所具有的机械能为 E、动能为 E_K。由于某种原因使它的速度突然增大，则当它重新稳定下来做匀速圆周运动时，它的(　　)

A. r 增大，E 增大，E_K 增大　　B. r 增大，E 增大，E_K 减小

C. r 减小，E 增大，E_K 减小　　D. r 减小，E 减小，E_K 增大

【精析】 在轨道上稳定运行的卫星速度突然增大时，显然是外界对其做了正功，故它的机械能 E 将增大(此时的动能突然增大)。

当卫星的速度突然增大后，此处卫星所受的万有引力不足以提供向心力，所以卫星将做"离心"运动，轨道半径增大，万有引力做负功，动能减小，势能增加。

当卫星的运动重新稳定下来时，$G\dfrac{M\cdot m}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}$成立，由于 r 增大，所以对应新轨道的动能 E_K 应减小。B 正确。

【同类精练】 2007 年 10 月 25 日 17 时 55 分，北京航天飞行控制中心对"嫦娥一号"卫星实施首次变轨控制并获得成功。这次变轨是在卫星运行到远地点时实施的，而此后将要进行的 3 次变轨均在近地点实施。"嫦娥一号"卫星的首次变轨之所以选择在远地点实施，是为了抬高卫星近地点的轨道高度。同样的道理，要抬高远地点的高度就需要在近地点实施变轨。

图 4-10-1 为"嫦娥一号"某次在近地点 A 由轨道 1 变轨为轨道 2 的两个轨道的示意图，其中 B、C 分别为两个轨道的远地点。则关于上述变轨过程及"嫦娥一号"在两个轨道上运动的情况，下列说法中正确的是(　　)

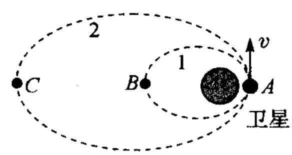
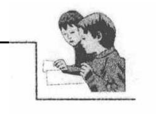


图 4-10-1



A.“嫦娥一号”在轨道 1 的 A 点处应点火加速

B.“嫦娥一号”在轨道 2 的 A 点处的速度比在轨道 1 的 A 点处的速度大

C.“嫦娥一号”在轨道 1 的 B 点处的加速度比在轨道 2 的 C 点处的加速度大

D.“嫦娥一号”在轨道 1 的 B 点处的机械能比在轨道 2 的 C 点处的机械能大

解题捷径 11

同步卫星必位于赤道上方一定高度处 $h=3.6\times10^7\,\mathrm{m}$，约为地球半径的 6 倍；一颗同步卫星只能覆盖赤道周长的 45.2%，所以，至少三颗同步卫星才能覆盖整个赤道；一颗同步卫星覆盖地球的面积约为 42.5%，无论发射多少颗同步卫星都不能覆盖整个地球表面。

【范例】 如图 4-11-1 所示，地球上空有人造地球同步通信卫星向地球发射微波。但无论同步卫星数目增到多少个，地球表面上总有一部分面积不能直接接受到它们发射来的信号，问这个面积与地球表面之比至少有多大？（结果要求保留两位有效数字。已知地球半径 $R=6.4\times10^6\,\mathrm{m}$，高为 d 的球缺的表面积为 $S_1=2\pi Rd$）

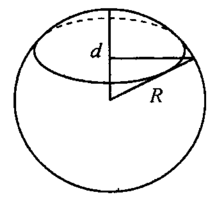


图 4-11-1

【精析】 如图 4-11-2 所示，由同步卫星所在处 P 向地球赤道平面的表面作一条切线 PA，设切点 A 与极点 N 对地心 O 所张的角为 α，则在两极周围以纬度大小为 α 的区域内就收不到信号。此区域在地球上表面积是以 d 为高的球缺表面积 $S_1=2\pi Rd$ 的 2 倍，其中 $d=R(1-\cos\alpha)$，而 $\alpha=90°-\theta$，其中 $\theta=81.4°$，

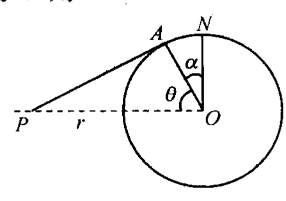


图 4-11-2

故 $S_1=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi R^2(1-\sin\theta)$，

因此所求的面积比为

$$\frac{2S_1}{S_0}=\frac{4\pi R^2(1-\sin\theta)}{4\pi R^2}=1-\sin\theta=0.011$$

【同类精练】 “亚洲一号”是我国自行发射的同步通讯卫星，设地球的自转角速度恒定，则“亚洲一号”(　　)

A. 如果需要，它可以定点在北京的上空

B. 它可以覆盖半个赤道

C. 这样的同步卫星三颗就可以覆盖整个地球表面

D. 它的运行轨道半径是一确定的值

解题捷径 12

用长为 l 的绳拴一质点做圆锥摆运动时，则其周期 T 与绳长 l、摆角 θ、当地重力加速

度 g 之间存在 $T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$。

【范例】 如图 4-12-1 所示，长为 l 的绳拴一小球，让小球做圆锥摆运动，摆角为 θ，当地重力加速度为 g，则该圆锥摆的周期为多少？

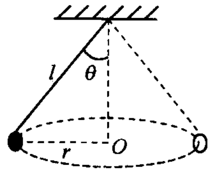


图 4-12-1

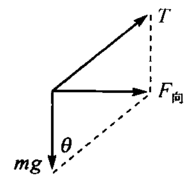


图 4-12-2

【精析】 如图 4-12-2 所示，$r=l\sin\theta$，$F_{向}=mg\tan\theta$，

由 $F_{向}=\frac{mv^2}{r}$ 知，$mg\tan\theta=m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\cdot\frac{1}{r}$，

解得 $T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$。

【同类精练】 用单摆测定重力加速度时，某同学测得的数值大于当地重力加速度的真实值，则引起这一误差的可能原因是（　　）

A. 摆球在水平面内做圆周运动

B. 测摆长时，漏测摆球直径

C. 单摆的最大摆角远大于 5°

D. 测量周期时，摆球通过平衡位置的次数多数了一次

解题捷径 13

地面附近的物体重力近似等于万有引力，即 $G\frac{Mm}{R^2}=mg$，常用 $GM=gR^2$（黄金代换）。高度为 h 处的重力加速度为 g'，则 $G\frac{Mm}{(R+h)^2}=mg'$。

【范例】 地球同步卫星到地心的距离为 r，由 $r^3=a^2b^2c/4\pi^2$ 求出，已知式中 a 的单位是 m，b 的单位是 s，c 的单位是 m/s^2，则（　　）

A. a 是地球半径，b 是地球自转的周期，c 是地球表面处的重力加速度

B. a 是地球半径，b 是同步卫星绕地球运动的周期，c 是同步卫星的加速度

C. a 是赤道周长，b 是地球自转的周期，c 是同步卫星的加速度

D. a 是地球半径，b 是同步卫星绕地心运动的周期，c 是地球表面处的重力加速度

【精析】 由公式 $G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r$ 得

$$r^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2} \tag{1}$$

又在地球表面附近，$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$知

$$gR^2=GM \tag{2}$$

由(1)、(2)得

$$r^3=R^2T^2g/4\pi^2$$

所以，a 是地球半径，b 是地球自转的周期，c 是地球表面处的重力加速度，应选答案A、D。

【同类精练】 设地球表面的重力加速度为 g，物体在距地心 $4R$(R 是地球半径)处。由于地球的作用而产生的加速度为 g，则 g'/g 等于(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{16}$

解题捷径 14

太空中两个靠近的天体叫"双星"，它们由于两者的万有引力而绕连线上某一点做圆周运动，它们的角速度相同，其轨道半径与质量成反比，环绕线速度与质量成反比。

【范例】 在太空中有一种叫"双星"的天体，它实际上是由两颗星组成的，这两颗星的质量并不完全相等，但悬殊不像地球和太阳那么大，因而两者在其相互作用的万有引力作用下，以相同的角速度绕其连线上的某一点做圆周运动。在运动过程中，下列说法中正确的是(　　)

①每颗星的动量都在变化　　②环绕线速度与质量成反比

③每颗星的动能都不变化　　④向心加速度之比与两颗星的质量无关

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ②③④

【精析】 由于双星做匀速圆周运动，其速度大小不变，方向在时刻发生变化，所以动量在变化，动能不变，有规律知：环绕线速度与质量成反比。所以，A 正确。

【同类精练】 两颗靠得很近的恒星称为双星，这两颗星必须各以一定速率绕它们的连线上某点转动，才不致由于万有引力的作用而吸引在一起。已知这两颗星的质量分别为 m_1 和 m_2，两者相距为 L，则这两颗星的转动周期为________。

解题捷径 15

在均质球层的空腔内任意位置处，质点受到地壳万有引力的合力为零，即 $\sum F=0$。

【范例】 证明：一质点在匀质球壳空腔内任一点受到球壳的万有引力为零。

【精析】 如图 4-15-1 所示，在球壳上分别取对称的微小部分，这两部分可视为圆周，设半径分别为 r_1、r_2，到 A 点的距离为 R_1、R_2，令球壳的面密度为 ρ，则两圆周的质量分别

为：$m_1=\rho\pi$ ，$m_2=\rho\pi$。对 A 点质量为 m 物体的万有引力为：$F_1=G\frac{mm_1}{R_1^2}=G\frac{\rho\pi r_1^2 m}{R_1^2}$，$F_2=G\frac{mm_2}{R_2^2}=G\frac{\rho\pi r_2^2}{R_2^2}$。

由几何关系又有：$\frac{R_1}{r_1}=\frac{R_2}{r_2}$

所以：$F_1=F_2$，物体 m 受到两圆周万有引力的合力为零。

由上述可知，球壳上任一对称部分对 A 点的物体的万有引力均为零，即球壳对其内部 A 点的物体万有引力为零。

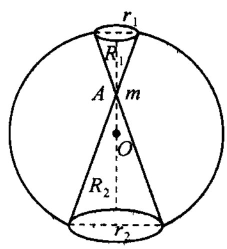


图 4-15-1

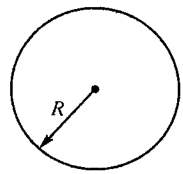


图 4-15-2

【同类精练】 如图 4-15-2 所示，质量为 M、半径为 R 的均匀球壳内，离球心$\frac{R}{2}$处放置一个质量为 m 的质点，均匀球壳和质点之间的万有引力的大小是__________。

解题捷径 16

在均质球体内部距离球心 r 处，质点受到的万有引力就等于半径为 r 的球体的引力，即 $F=G\frac{M'm}{r^2}$。

【范例】 证明：在均质球体内部距离球心 r 处，质点受到的万有引力就等于半径为 r 的球体的引力，即 $F=G\frac{M'm}{r^2}$。

【精析】 把球体分成半径为 r 的小球体与厚为$(R-r)$的球层两部分。球层对物体的万有引力为零。而小球体对物体的万有引力为：$F=G\frac{M'm}{r^2}$，M'为半径为 r 的小球体的质量。

【同类精练】 证明：处于球体内距球心为 x 的物体 m 受球体（质量为 M）的万有引力为：$F=G\frac{Mmx}{R^3}$。

解题捷径 17

天体的第二宇宙速度大小等于第一宇宙速度的$\sqrt{2}$倍，即 $v=\sqrt{2gR}$。

【范例】 如果地球表面的重力加速度为 g，地球半径为 R，试推导第一宇宙速度、第二宇宙速度的表达式并求出其大小。（已知 $g=9.8\text{m/s}^2$，$R=6400\text{km}$）

【精析】 设地球质量为 M，绕地球做匀速圆周运动的卫星的质量为 m，卫星的速度为 v，轨道半径为 r，由牛顿第二定律得：

$$F_{引}=F_{向},F_{引}=G\frac{Mm}{r^2},F_{向}=m\frac{v^2}{r}$$

所以

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^3}{r},v=\sqrt{\frac{Gm}{r}} \tag{1}$$

若有质量为 m_0 的物体静止于地面，且忽略地球自转所需向心力，
有

$$G\frac{Mm_0}{R^2}=m_0g,GM=gR^2 \tag{2}$$

当卫星贴近地面飞行时，$r\approx R$　　(3)

由(1)、(2)、(3)式得 $v_1=\sqrt{gR}=7.9\text{km/s}$，这就是卫星在地面附近绕地球做匀速圆周运动的速度，叫第一宇宙速度。

设卫星在地面发射速度为 v_2，则它的动能 $E_k=\frac{1}{2}mv_2^2$，引力势能 $E_P=-G\frac{Mm}{R}$，要使卫星克服地球引力的束缚，最终离开地球，其末速为 0，动能为 0，引力势能也为 0，由机械能守恒定律得：

$$E_k+E_p=0,\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{R}=0,v_2=\sqrt{2gR}=\sqrt{2}v_1=11.2\text{km/s}$$

这就是卫星脱离地球引力束缚的速度，叫第二宇宙速度。

【同类精练】 星球上的物体脱离星球引力所需的最小速度称为第二宇宙速度。已知某星球的半径为 r，它表面的重力加速度为地球表面重力加速度 g 的 $\frac{1}{6}$，不计其他星球的影响，则该星球的第二宇宙速度为(　　)

A. $\sqrt{gr}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{6}gr}$　　C. $\sqrt{\frac{1}{3}gr}$　　D. $\frac{1}{3}gr$

解题捷径 18

正比符号法：在解题过程中通常会遇到同类物理量的比值关系，运用正比符号法可以

把运算过程中所有相同的物理量消去，简化运算过程，提高解题速度。

【范例】 两个人造地球卫星，其轨道半径之比 $r_1:r_2=2:1$，求两卫星的：

(1)$a_1:a_2$。

(2)$v_1:v_2$。

(3)$\omega_1:\omega_2$。

(4)$T_1:T_2$。

【精析】 在人造卫星的运动中，万有引力提供了所需的向心力，由此根据牛顿定律列出方程，再根据题意找出有关比例即可。

由 $G\dfrac{Mm}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}=mr\omega^2=mr(\dfrac{2\pi}{T})^2=Mma_n$ 知：

$$a_n\propto\frac{1}{r^2},v\propto\sqrt{\frac{1}{r}},\omega\propto\frac{1}{\sqrt{r^3}},T\propto\sqrt{r^3}$$

则(1)$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{4}$；(2)$\dfrac{v_1}{v_2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$；(3)$\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$；(4)$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{\sqrt{8}}{1}$

【同类精练】 地球半径为 R，地球表面的重力加速度为 g，若高空中某处的重力加速度为 $g/2$，则该处距地球表面的高度为(　　)

A. $(\sqrt{2}-1)R$　　B. R　　C. $\sqrt{2}R$　　D. $2R$

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 由题意知，D 轮与 C 轮转向相反，而 C 轮与 A 轮转向相同，所以 D 轮、A 轮相反，v_A 与 v_B 的线速度相同，v_C 与 v_D 的线速度相同，而 $v_B=2v_C$，所以，$v_A:v_B:v_C:v_D=2:2:1:1$。同轴 $\omega_B=\omega_C$，$\dfrac{\omega_D}{\omega_C}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\omega_B}{\omega_A}=\dfrac{1}{2}$，所以，$\omega_A:\omega_B:\omega_C:\omega_D=6:3:3:1$，由 $a=r\omega^2$ 知，$a_A=r_A\omega_A^2$ 最大。

所以，应选 A、B、C、D。

解题捷径 2

【精析】 建立如图 4-1 所示的斜坐标系，

因为子弹射中猴子必须通过距离 $OA=\dfrac{H}{\sin\theta}$，

所需时间为

$$T=\frac{OA}{v_0}=\frac{H}{v_0\sin\theta} \tag{1}$$

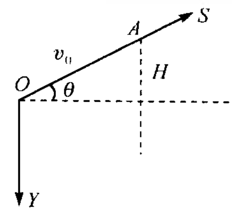


图 4-1

经过时间 T 后，子弹自由下落高度为

$$h=\frac{1}{2}gT^2 \tag{2}$$

而猴子下落高度也为

$$h'=\frac{1}{2}gT^2 \tag{3}$$

所以，$h=h'$，

即只要瞄准猴子，且运动不受地面限制，在上述条件下，一定能命中猴子。

解题捷径 3

【精析】 (1)设小球滑至圆环顶时速度为 v_1，所受环的压力为 N，选顶点为零势点，小球运动过程中机械能守恒，由机械能守恒定律知

$$mg(h-2R)=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

则球在 B 点满足圆周运动的规律

$$mg+F_N=m\frac{v^2}{R} \tag{2}$$

(1)、(2)式方程联立得

$$F_N=m\frac{v^2}{R}-mg=\frac{2mg(h-2R)}{R}-mg=\frac{2mgh}{R}-5mg=mg\left(\frac{2h}{R}-5\right)$$

$$=2\times10\left(\frac{2\times3.5}{1}-5\right)=40\text{N}$$

(2)当圆环对小球的压力为零时，仅由重力充当向心力，对应的速度 v_2 为越过圆环最高点的最小速度，对应的高度 h_1 为最低高度，由机械能守恒定律及圆周运动知识有

$$mg(h_1-2R)=\frac{1}{2}mv_2^2 \tag{3}$$

$$mg=m\frac{v_2^2}{R} \tag{4}$$

(3)、(4)式联立得

$$mg(h_1-2R)=\frac{1}{2}mgR$$

$$h_1=\frac{1}{2}R+2R=\frac{5}{2}R=2.5\text{m}$$

(3)由于 $h'<h_1$，故球在还没有到达顶前即与环脱离，设脱离时圆环的位置半径与竖

直方向的夹角为 θ,选轨道最低点为零势点,由机械能守恒定律及圆周运动知识有

$$mgh'=\frac{1}{2}mv^2+mg(R+R\cos\theta) \tag{5}$$

$$mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R} \tag{6}$$

(5)、(6)式联立得:$\cos\theta=\frac{2(h'-R)}{3R}$,所以 $\cos\theta=\frac{2}{3}$,

即在 $\theta=\arccos\frac{2}{3}$处小球与圆环脱离。

解题捷径 4

【精析】 物体在竖直方向上做匀加速直线运动,在水平方向上做匀速直线运动,合力竖直向上。由捷径知:BC 正确。

解题捷径 5

【精析】 根据运动的可逆性,小球从 A 点斜上抛与从 D 点向右平抛的过程等效。因为小球在竖直方向只受到重力作用,而弹力只改变水平速度的方向,所以全过程可视为一个平抛运动。根据平抛运动在竖直方向的自由落体规律,有

$DC:CB:BA=1:3:5$,

所以 $H_B:H_C:H_D=5:8:9$,

所以,B 正确。

解题捷径 6

【精析】 由本题解题捷径知:该题的位移偏角 θ 不变,所以速度偏角 φ 也不变,B 错,C 正确。由 $\tan\varphi=\frac{gt}{v}$知,速度变为原来的 2 倍,时间也增大到原来的 2 倍,A 正确。

解题捷径 7

【精析】 (1)设轨道半径为 R,由机械能守恒定律:

$$\frac{1}{2}mv_B^2=mg(2R+x)+\frac{1}{2}mv_A^2 \tag{1}$$

对 B 点:

$$F_{N_1}-mg=m\frac{v_B^2}{R} \tag{2}$$

对 A 点:

$$F_{N_2}+mg=m\frac{v_A^2}{R} \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)式得:两点的压力差:

$$\Delta F_N = F_{N_1} - F_{N_2} = 6mg + \frac{2mgx}{R} \quad (4)$$

由图象得：截距 $6mg=6$，得

$$m=0.1\text{kg} \quad (5)$$

(2)因为图象的斜率 $k=\frac{2mg}{R}=1$，所以

$$R=2\text{m} \quad (6)$$

在 A 点不脱离的条件为：重力完全提供向心力

$$mg=\frac{mv_A^2}{R} \quad (7)$$

由(1)、(6)、(7)式得：$x=15\text{m}$。

解题捷径 8

【精析】 将电场和重力场的叠加场视为一个重力加速度为 g' 的等效重力场。根据小球在平衡位置的平衡条件

$$mg'=\sqrt{(mg)^2+(Eq)^2}$$

则等效重力加速度为

$$g'=\sqrt{(mg)^2+(Eq)^2}/m=1.25\text{m/s}^2$$

小球在等效场中最高点 A 的临界速度为 $v_A=\sqrt{g'l}$。

根据等效场中类似机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_B^2=2mg'l+\frac{1}{2}mv_A^2$$

所以，小球在平衡位置的速度应为

$$v_B=\sqrt{v_A^2+4g'l}=\sqrt{5g'l}=5\text{m/s}$$

解题捷径 9

【精析】 由题意知：宇宙膨胀意味着半径 R 变大，“一定都定，一变都变”。

由 $\frac{GM\cdot m}{R^2}=m\frac{v^2}{R}$，$\frac{GM\cdot m}{R^2}=mR\omega^2=mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ 知：R 较小，T 较小，v 较大，ω 较大，B 正确。

解题捷径 10

【精析】 “嫦娥一号”在轨道 1 上运行时经过 A 位置点火瞬时速率增大，“嫦娥一号”做“离心”运动。进入轨道 2，在轨道 2 的 B 点时万有引力大于所需的向心力时卫星将做“近心”椭圆运动。B、C 位置的加速度是由地球引力产生的，B 位置的加速度大于 C 位置

的加速度。所以，A、B、C 正确。

解题捷径 11

【精析】 由本题解题捷径知：只有 D 是正确的。

解题捷径 12

【精析】 由单摆的周期规律知，$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$，$T=\frac{t}{n}$，测量值大于真实值的原因可能是摆球通过平衡位置的次数多数了一次，导致周期偏小，g 值偏大，故 D 可选。由圆锥摆的周期知 $T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$，它小于单摆的周期，用圆锥摆计算出的 g 偏大，故 A 可选。

解题捷径 13

【精析】 地面附近的物体重力近似等于万有引力 $G\frac{Mm}{R^2}=mg$，知 $gR^2=GM$，

所以，$G\frac{Mm}{r^2}=\frac{gR^2 m}{(4R)^2}=mg'$，

所以，$g'/g=\frac{1}{16}$，D 正确。

解题捷径 14

【精析】 它们由于两者的万有引力而绕连线上某一点做圆周运动，它们的角速度相同。设 m_1 的轨道半径为 r，则

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2}=m_1 r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{1}$$

$$G\frac{m_1 m_2}{(L-r)^2}=m_2(L-r)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{2}$$

由(1)(2)两式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{G(m_1+m_2)}}$$

解题捷径 15

【精析】 由本解题捷径知：均匀球壳和质点之间的万有引力的大小是零。

解题捷径 16

【精析】 把球体分成半径为 x 的小球体与厚为$(R-x)$的球层两部分。球层对物体的万有引力为零。而小球体对物体的万有引力为：$F=G\frac{M'm}{x^2}$，M'为小球体的质量，设整

个球体的质量为 M，则 $M'=\frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$，所以 $F=G\frac{M'm}{x^2}=G\frac{Mmx}{R^3}$。

解题捷径 17

【精析】 由本题解题捷径知：C 选项正确。

解题捷径 18

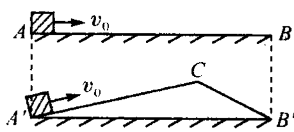
【精析】 由本题解题捷径知：A 选项正确。

第五章　能量与动量中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：物体沿斜面从一处运动到另一处与在对应长度的水平面上运动时克服摩擦力做功相等。

【题目】 如图一所示，质量为 m 的物体沿动摩擦因数为 μ 的水平面以初速度 v_0 从 A 点出发到 B 点时速度变为 v，设同一物体以初速度 v_0 从 A' 点先经斜面 $A'C$，后经斜面 CB' 到 B' 点时速度变为 v'，两斜面在水平面上投影长度之和等于 AB 的长度，则有（　　）



图一

A. $v'>v$

B. $v'=v$

C. $v'<v$

D. 不能确定

【精析】 在水平面上，由动能定理有

$$-\mu mg\cdot s=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

在斜面上，设左、右斜面倾角分别为 α、β，左、右斜面长度分别为 L_1、L_2，由动能定理有

$$-\mu mg\cos\alpha\cdot L_1-\mu mg\cos\beta\cdot L_2=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu mg(L_1\cos\alpha+L_2\cos\beta)=-\mu mg\cdot s=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

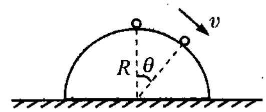
所以 $v'=v$。

【答案】 B（也可由解题捷径直接得结论）

小试二：两个相互接触的物体，在水平方向上如果没有其他力作用时，只有两物体间的相互作用力的水平分力作用，则物体水平动量的变化完全由物体间的相互作用力的水

平分量决定，当两物体分离时，物体的水平动量就达到了最大值或最小值。因而可以应用动量最值来确定分离点。

【题目】 如图二所示，一个质量为 m 的小球，在另一个半径为 R 的光滑固定半球的顶点无初速度滑下，则小球运动到什么位置与固定半球面分离？（小球的半径远小于半球的半径）



图二

【精析】 设小球运动到与球心的连线与竖直线成 θ 角时，小球的速度为 v，由机械能守恒定律可知

$$mgR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2,v=\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

则
$$p=mv=m\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

$$p_x=p\cdot\cos\theta=m\sqrt{2gR(1-\cos\theta)\cos^2\theta}=m\sqrt{gR(2-2\cos\theta)\cos\theta\cdot\cos\theta}$$

则由特殊不等式 $abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ 得

当 $\cos\theta=2-2\cos\theta$，即 $\cos\theta=\frac{2}{3}$ 时，达到最大值，小球与半球面分离。

从上面的分析可知，用动量最值方法，只要借助于机械能守恒定律和数学中的特殊不等式，就能避开对物体运动状态的精确分析，使解题过程简化。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

相互作用的一对静摩擦力，若其中一个力做正功，则另一个力做负功，且总功代数和为零；若相互作用力是一对滑动摩擦力，也可以对其中一个物体做正功，则另一个力做负功，但总功代数和一定小于零，且 $W_{总}=-F_f s_{相}$。

解题捷径 2

物体由斜面上高度为 h 的位置滑下来，滑到平面上另一点停下来，若 l 是释放点到停止点的水平距离，则物体与滑动面之间的动摩擦因数 μ 与 l，h 之间存在关系：$\mu=\frac{h}{l}$。

解题捷径 3

物体沿斜面从一处运动到另一处与在对应长度的水平面上运动时克服摩擦力做功相等。

解题捷径 4

在一个孤立的能量转化系统中，一种形式的能量转化成另一种形式的能量时，它们的

改变量之间存在着数量相当的关系(能量守恒和转化)。

解题捷径 5

做功可以改变物体的能量。若直接由功的定义求某个功不方便,则可以根据由它引起的物体能量的改变量求出这个功,即功能关系。

解题捷径 6

重力做功引起物体重力势能的变化;合力做功引起物体动能的变化;非重力(弹簧的弹力除外)做功引起物体机械能的变化。

解题捷径 7

物体沿某一固定斜面运动,摩擦力做的功与重力做的功之比是个恒值,即$\frac{W_f}{W_G}=C$。利用这个比值关系可以简化问题的运算过程。

解题捷径 8

功能关系法:当两个相互关联的物体间的相互作用力是非耗散力时,这一对作用力和反作用力做功的瞬时功率的代数和为零。

解题捷径 9

设某种密度为ρ的液体(或气体)以v的速率在横截面积为S的管道中流动,这种液体在管道各处具有相同的受力情况或运动情况。那么,取在极短的一小段时间Δt内,流过某一横截面S的流量为长$v\Delta t$,底面积S的“管道的体积”,对应的质量$\Delta m=\rho v\Delta tS$。

解题捷径 10

当绳子绷紧的瞬间,沿绳子绷紧的方向速度发生突变,沿绳子方向的速度突然消失,即绳子绷紧的瞬间有机械能损失。

解题捷径 11

机械功率:作用在物体上的力与物体沿力的方向的速度的乘积就是力对物体的功率,称为机械功率,即$P=F\cdot v$。在解题中应用$P=F\cdot v$规律,可以较灵活地分析物体的受力情况。

解题捷径 12

物体系的动能定理:当研究对象为系统时,组成系统的物体的总动能的变化量(系统内各物体的动能变化量之和)等于相应时间内的所有力(包括内力和外力)对物体系统所做的功。

解题捷径 13

“人船模型”：$m_1 s_1 = m_2 s_2$，$s_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} s_{相}$，$s_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} s_{相}$。

解题捷径 14

两个小球发生弹性正碰后速度的简便求法。将整个碰撞过程分为两个过程：第一个过程，从开始碰撞到两球等速（此时形变量最大，两球质心最近）；第二个过程，从两球等速到碰撞结束。每个小球在前后两个过程中受到的冲量相等，在前后两个过程中的动量改变量也相等，先用动量守恒定律求出等速时的共同速度，得出每个小球在第一个过程中动量的改变量，进而得到每个小球在整个过程中的动量改变量，是第一个过程中改变量的两倍。最后求出每个小球碰撞后的速度。

解题捷径 15

弹簧连接体问题：对两个物体与弹簧组成的孤立系统在相互作用过程中，动量守恒、弹性势能与动能相互转化、弹簧伸长或压缩到最大程度时系统内各物体速度相同，弹性势能最大。当弹簧为自然长度时，系统内将出现某个物体速度最大。

解题捷径 16

一个运动的物体 m_1 以 v_1 的速度与一个静止的物体 m_2 发生弹性碰撞，碰后速度：$v'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$，$v'_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$。碰前的接近速度等于碰后的分离速度 $v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1$。当 $m_1 = m_2$ 时，两物体交换速度。

解题捷径 17

两物体 m_1，m_2 碰撞之后，总动量必须和碰前大小、方向都相同，总动能小于或等于碰前总动能，碰后在没有其他物体的情况下，保证不再发生碰撞。

解题捷径 18

质量为 m 的物体的动量 p 和动能之间存在下列关系：$p = \sqrt{2mE_K}$，或者 $E_K = \dfrac{p^2}{2m}$。

解题捷径 19

两个相互接触的物体，在水平方向上如果没有其他力作用时，只有两物体间的相互作用力的水平分力作用，则物体的水平动量的变化完全由物体间的相互作用力的水平分量决定，当两物体分离时，物体的水平动量就达到了最大值或最小值。因而可以应用动量最值来确定分离点。

解题捷径 20

动量定理推论：物体在两次不同运动中所受合外力的冲量之差等于其两次动量的变化之差，即 $I_2-I_1=\Delta p_2-\Delta p_1$；动能定理推论：在两次不同的运动中合外力对物体所做的总功之差等于这两次物体动能的变化之差，即 $W_2-W_1=\Delta E_{K_2}-\Delta E_{K_1}$。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

相互作用的一对静摩擦力，若其中一个力做正功，则另一个力做负功，且总功代数和为零；若相互作用力是一对滑动摩擦力，也可以对其中一个物体做正功，则另一个力做负功，但总功代数和一定小于零，且 $W_{总}=-F_f s_{相}$。

【范例】 水平传送带匀速运动，速度大小为 v，现将一小工件放到传送带上。设工件初速度为零，当它在传送带上滑动一段距离后速度达到 v 且与传送带保持相对静止。设工件质量为 m，它与传送带间的滑动摩擦因数为 μ，则在工件相对传送带滑动的过程中错误的是（　　）

A. 滑动摩擦力对工件做的功为$\frac{1}{2}mv^2$

B. 工件的机械能增量为$\frac{1}{2}mv^2$

C. 工件相对于传送带滑动的路程大小为$\frac{v^2}{2\mu g}$

D. 传送带克服摩擦力做的功为$\frac{1}{2}mv^2$

【精析】 由动能定理知 A 正确，由功能关系知 B 正确，相对路程为 $s_{相}=vt-\frac{1}{2}at^2=v\cdot\frac{v}{\mu g}-\frac{1}{2}\cdot\mu g\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2=\frac{v^2}{2\mu g}$，C 正确，传送带克服摩擦力做的功为 $W=\mu mg\cdot vt=\mu mg\cdot v\frac{v}{\mu g}=mv^2$（传送带克服摩擦力做的功与滑动摩擦力做的负功的大小相等），所以 D 错误。

传送带的滑动摩擦力对工件做正功，大小为$\frac{1}{2}mv^2$，工件的滑动摩擦力对传送带做负功，大小为$-mv^2$，所以滑动摩擦力做功的代数和小于零。

【同类精练】 重物 A 放在倾斜的皮带传送机上，它和皮带一直相对静止没有打滑，如图 5-1-1 所示。则传送带工作时，下列说法中正确的是（　　）

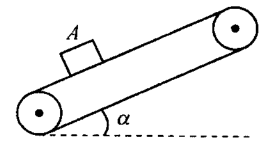


图 5-1-1

A. 传送带对重物的静摩擦力做的正功转变为重物的动能和重物的势能

B. 重物斜向上加速运动时，加速度越大，摩擦力一定越大

C. 传送带对重物的摩擦力做的正功与重物对传送带的摩擦力做的负功之和为零

D. 重物斜向上匀速运动时速度越大，摩擦力一定越大

解题捷径 2

物体由斜面上高度为 h 的位置滑下来，滑到平面上另一点停下来，若 l 是释放点到停止点的水平距离，则物体与滑动面之间的动摩擦因数 μ 与 l,h 之间存在关系：$\mu=\frac{h}{l}$。

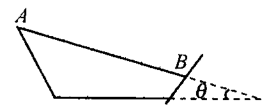


图 5-2-1

【范例】 如图 5-2-1 所示，一物体从斜面上 A 处滑下进入水平面后又滑上右边的斜面，到 B 处恰停止运动，若物体在拐角处无能量损失，AB 连线与水平面夹角为 θ，物体与接触面的摩擦系数均为 μ，试证明：$\mu=\tan\theta$。

【精析】 设 AB 间高度差为 h，水平距离为 L，对物体从 A—B 过程，由动能定理有 $mgh-W=0$，其中 W 为整个过程克服摩擦力做功。由功能关系知：$mgh=\mu mgL$，所以$\mu=\frac{h}{L}=\tan\theta$。

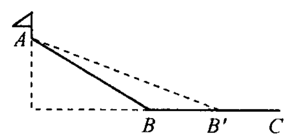


图 5-2-2

【同类精练】 如图 5-2-2 所示，在北戴河旅游景点之一的南戴河滑沙场有两个坡度不同的滑道 AB 和 AB'（都可看作斜面）。甲、乙两名旅游者分乘两个滑沙橇从插有红旗的 A 点由静止出发同时沿 AB 和 AB'滑下，最后都停在水平沙面 BC 上。设滑沙橇和沙面间的动摩擦因数处处相同，滑沙者保持一定姿势坐在滑沙橇上不动。下列说法中正确的是（　　）

A. 甲在 B 点的速率等于乙在 B'点的速率

B. 甲的滑行总路程比乙短

C. 甲全部滑行过程的水平位移一定比乙全部滑行过程的水平位移大

D. 甲、乙停止滑行后回头看 A 处的红旗时视线的仰角一定相同

解题捷径 3

物体沿斜面从一处运动到另一处与在对应长度的水平面上运动时克服摩擦力做功相等。

【范例】 如图 5-3-1 所示，质量为 m 的物体沿动摩擦因数为 μ 的水平面以初速度 v_0 从 A 点出发到 B 点时速度变为 v，设同一物体以初速度 v_0 从 A'点先经斜面 $A'C$，后经斜

面 CB' 到 B' 点时速度变为 v'，两斜面在水平面上投影长度之和等于 AB 的长度，则有（　　）

A. $v'>v$　　　　B. $v'=v$

C. $v'<v$　　　　D. 不能确定

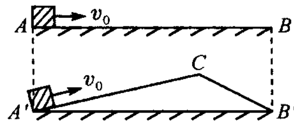


图 5-3-1

【精析】 在水平面上，由动能定理有

$$-\mu mg\cdot s=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

在斜面上，设左、右斜面倾角分别为 α、β，左、右斜面长度分别为 L_1、L_2，由动能定理有

$$-\mu mg\cos\alpha\cdot L_1-\mu mg\cos\beta\cdot L_2=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu mg(L_1\cos\alpha+L_2\cos\beta)=-\mu mg\cdot s=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

所以 $v'=v$。

【答案】 B(也可由解题捷径直接得结论)

【同类精练】 如图 5-3-2 所示，质量相同的物体分别自斜面 AC 和 BC 的顶端由静止开始下滑，物体与斜面间的动摩擦因数相同，物体滑至斜面底部 C 点时的动能分别为 E_1 和 E_2，下滑过程中克服摩擦力所做功分别为 W_1 和 W_2，则（　　）

A. $E_1>E_2$，$W_1<W_2$

B. $E_1=E_2$，$W_1>W_2$

C. $E_1<E_2$，$W_1>W_2$

D. $E_1>E_2$，$W_1=W_2$

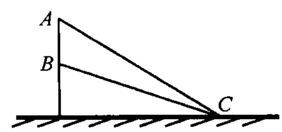


图 5-3-2

解题捷径 4

在一个孤立的能量转化系统中，一种形式的能量转化成另一种形式的能量时，它们的改变量之间存在着数量相当的关系（能量守恒和转化）。

【范例】 如图 5-4-1 所示，电动传送带以恒定速度 $v_0=1.2\text{m/s}$ 运行，传送带与水平面的夹角 $\alpha=37°$，现将质量 $m=20\text{kg}$ 的物品箱轻放到传送带底端，经过一段时间后，物品箱被送到 $h=1.8\text{m}$ 的平台上，已知物品箱与传送带间的动摩擦因数 $\mu=0.85$，不计其他损耗，则每件物品箱从传送带底端送到平台上，需要多少时间？每输送一个物品箱，电动机需增加消耗的电能是多少焦耳？($g=10\text{m/s}^2$，$\sin37°=0.6$)

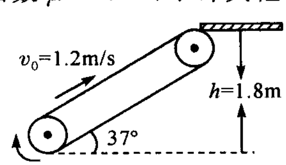


图 5-4-1

【精析】 (1)对物品箱，设其在传送带上加速度为 a，则由牛顿第二定律有

$$\mu mg\cos\theta - mg\sin\theta = ma$$

解得：$a=0.8\text{m/s}^2$。

设物品箱在传送带上加速运动的位移为 s_1，时间为 t_1，则由运动学公式有

$$t=\frac{v_0}{a}=1.5\text{s}$$

$$s_1=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}\times 0.8\times 1.5^2=0.9\text{m}$$

设其匀速运动阶段的位移为 s_2，时间为 t_2，则有

$$s_2=\frac{h}{\sin 37^\circ}-s_1=2.1\text{m}$$

$$t_2=\frac{s_2}{v_0}=\frac{2.1}{1.2}=1.75\text{s}$$

$$t=t_1+t_2=3.25\text{s}$$

(2)每输送一个物品箱，电动机需增加消耗的电能为 ΔE，则由能量守恒关系可得：

$$\begin{aligned}\Delta E &= mgh+\frac{1}{2}mv_0^2+\mu mg\cos 37^\circ \Delta s\\ &=20\left[10\times 1.8+\frac{1}{2}\times 1.2^2+0.85\times 10\times 0.8(1.5\times 1.2-0.9)\right]\\ &=496.8\text{J}\end{aligned}$$

【同类精练】 质量为 m 的子弹以水平速度 v_1 射入以速度 v_2 沿同一方向运动的木块中，木块质量为 M。如图 5-4-2 所示，当子弹进入木块中深度为 d 时，子弹和木块的速度分别为 v'_1 和 v'_2。若木块和子弹的相互作用力为 F，木块与水平面间的摩擦不计，试求这一过程中子弹和木块组成的系统动能的损失。(用 F 和 d 表示)

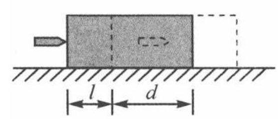


图 5-4-2

解题捷径 5

做功可以改变物体的能量。若直接由功的定义求某个功不方便，则可以根据由它引起的物体能量的改变量求出这个功，即功能关系。

【范例】 如图 5-5-1 所示，一辆车通过一根跨过定滑轮的绳 PQ 提升井中质量为 m 的物体。绳的 P 端拴在车后的挂钩上，Q 端拴在物体上。设绳的总长不变，绳的质量、定滑轮的质量和尺寸、滑轮上的摩擦均不计。开始时，车在 A 点，左右两侧绳都已绷紧并且是竖直的，左侧绳长为 H。提升时车加速向左运动，沿水平方向从 A 经过 B 驶向 C。设 A 到 B 的距离也是 H，车过 B 点时的速度为 v_B。求在车由 A 移到 B 的过程中，绳 Q 端的拉力对物体做的功。

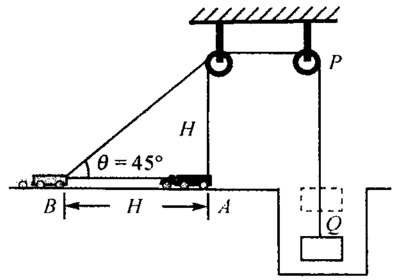


图 5-5-1

【精析】 在这一过程中重物被提升的运动不是匀加速运动，绳对重物的拉力不是恒力，而且力的大小的变化规律未知，不能用功的定义求，只能从功能关系求。

重物从静止开始被提升，当车运动到 B 点时，车牵动绳子拉重物向上运动的速度大小等于 v_B 沿绳方向的分量，即

$$v=v_B\cdot\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}v_B$$

$$h=\frac{H}{\sin45°}-H=(\sqrt{2}-1)H$$

重物上升的高度在这一过程中，重物受重力 G、拉力 T，由动有功能关系，有

$$W_T+W_G=\frac{1}{2}mv^2$$

而

$$W_G=-mgh=-mg(\sqrt{2}-1)H$$

所以绳的 Q 端的拉力对物体做的功为

$$W_T=\frac{1}{2}mv^2-W_G=\frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_B\right)^2+mg(\sqrt{2}-1)H$$

$$=\frac{1}{4}mv_B^2+(\sqrt{2}-1)mgH$$

【同类精练】 如图 5-5-2 所示，AB 是倾角为 θ 的粗糙直轨道，BCD 是光滑的圆弧轨道，AB 恰好在 B 点与圆弧相切，圆弧的半径为 R，一个质量为 m 的物体（可以看作质点）从直轨道上的 P 点由静止释放，结果它能在两轨道间做往返运动，已知 P 点与圆弧的圆

心 O 等高，物体与轨道 AB 间的动摩擦因数为 μ，求：

(1)物体做往返运动的整个过程中，在 AB 轨道上通过的总路程；

(2)最终当物体通过圆弧轨道最低点 E 时，对圆弧轨道的压力。

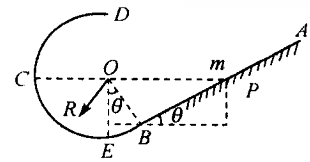


图 5-5-2

解题捷径 6

重力做功引起物体重力势能的变化；合力做功引起物体动能的变化；非重力(弹簧的弹力除外)做功引起物体机械能的变化。

【范例】 一个人稳站在自动扶梯的水平踏板上，随扶梯向上加速，则(　　)

A. 踏板对人做的功等于人的机械能的增加量

B. 踏板对人的支持力做的功等于人的机械能的增加量

C. 克服人的重力做的功等于人的机械能的增加量

D. 对人做功的只有重力和踏板对人的支持力

【精析】 踏板对人的作用力是人受到的非重力，所以非重力做的功等于人的机械能的增量。A 正确，B 错误。克服人的重力做的功等于人的重力势能增加量，所以 C 错误；对人做功的不但有重力、踏板对人的支持力，还有踏板对人的摩擦力，所以，D 错误。

【同类精练】 质量为 m 的跳水运动员进入水中后受到水的阻力而做减速运动。设水对他的阻力大小恒为 f，他在水中减速下降 h 的过程中，下列说法中正确的是(　　)

A. 他的动能减少了 fh　　　　B. 他的重力势能增加了 mgh

C. 他的机械能减少了 $(f-mg)h$　　　　D. 他的机械能减少了 fh

解题捷径 7

物体沿某一固定斜面运动，摩擦力做的功与重力做的功之比是个恒值，即 $\frac{W_f}{W_G}=C$。利用这个比值关系可以简化问题的运算过程。

【范例】 一小物块从斜面底端冲上足够长的斜面后又返回到斜面底端。已知小物块的初动能为 E，它返回到斜面底端的速度为 v，克服摩擦力做功为 $\frac{E}{2}$，若小物块以 $2E$ 的初

动能冲上斜面，则它返回到斜面底端的动能为________；它返回到斜面底端的速度为________。

【精析】 若小物块以 E 的初动能冲上斜面，则 $W_G=E-W_f=E-\frac{1}{4}E=\frac{3}{4}E$，

而$\frac{W_f}{W_G}=C$，所以$\frac{W_f}{W_G}=\frac{\frac{1}{4}E}{\frac{3}{4}E}=\frac{1}{3}$，

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{3}{4}E-\frac{1}{4}E=\frac{1}{2}E$$

当小物块以 $2E$ 的初动能冲上斜面，则

$$W'_G=2E-W_f=2E-\frac{1}{3}W'_G$$

所以 $W'_G=\frac{3}{2}E$（即小物块冲上斜面最高点的重力势能），$W'_f=\frac{1}{3}W'_G=\frac{1}{2}E$，

到达底端的动能为 $E'_K=\frac{3}{2}E-\frac{1}{2}E=E$，

所以 $v'=\sqrt{2}v$。

答案：E，$\sqrt{2}v$

【同类精练】 如图 5-7-1 所示，一块沿倾角为 θ 的足够长的固定斜面从某位置以 v_0 的初速度向上运动。

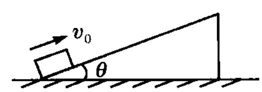


图 5-7-1

已知木块与斜面之间的动摩擦因数为 μ（$\mu>\tan\theta$），规定木块初始位置处的重力势能为零。试求木块滑到最高点时摩擦力做功和重力做功之比。

解题捷径 8

功能关系法：当两个相互关联的物体间的相互作用力是非耗散力时，这一对作用力和反作用力做功的瞬时功率的代数和为零。

【范例】 如图 5-8-1 所示，B 是质量为 m_B、半径为 R 的光滑半球形碗，放在光滑的水平桌面上，A 是质量为 m_A 的细长直杆，被固定的光滑套管 C 约束在竖直方向，A 可自由上下运动。碗和杆的质量关系为：$m_B=2m_A$。初始时，A 杆被握住，使其下端正好与碗的半球面的上边缘接触。然后从静止开始释放 A，A、B 便开始运动。设 A 杆的位置用 θ

表示，θ 为碗面的球心 O 至 A 杆下端与球面接触点的连线方向和竖直方向之间的夹角。求 A 与 B 速度的大小（表示成 θ 的函数）。

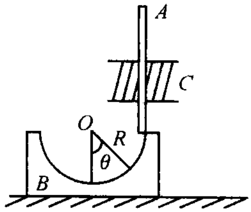


图 5-8-1

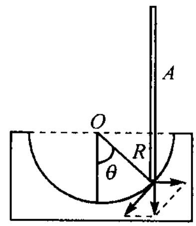


图 5-8-2

【精析】 如图 5-8-2 所示，设碗 B 与 A 杆间相互的弹力大小为 N，杆 A 的速度为 v_A。杆 A 对碗 B 的弹力做功瞬时功率为

$$P=Nv_B\sin\theta \tag{1}$$

碗 B 对物体 A 的弹力做功瞬时功率为

$$P'=-Nv_A\cos\theta \tag{2}$$

因 $P+P'=0$，所以有

$$Nv_B\sin\theta-Nv_A\cos\theta=0$$

则碗的速度为

$$v_B=v_A\cot\theta \tag{3}$$

由能量守恒有

$$m_AgR\cos\theta=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2 \tag{4}$$

由(3)，(4)两式及 $m_B=2m_A$ 得

$$v_A=\sin\theta\sqrt{\frac{2gR\cos\theta}{1+\cos^2\theta}},\ v_B=\cos\theta\sqrt{\frac{2gR\cos\theta}{1+\cos^2\theta}}$$

【同类精练】 如图 5-8-3 所示，高为 h，底边长为 L，质量为 M 的三角劈，置于光滑的水平面上。一 T 形的直杆质量为 m，其下端为光滑的球体，开始时位于三角形的顶端，杆受光滑套筒 D 的约束，仅能在竖直方向上运动，使杆从静止开始运动。求三角劈从杆的下端全部滑出时速度的大小。

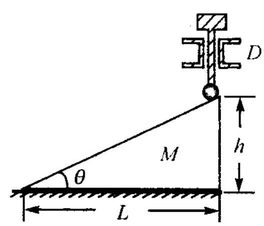


图 5-8-3

解题捷径 9

设某种密度为 ρ 的液体(或气体)以 v 的速率在横截面积为 S 的管道中流动,这种液体在管道各处具有相同的受力情况或运动情况。那么,取在极短的一小段时间 Δt 内,流过某一横截面 S 的流量为长 $v\Delta t$,底面积 S 的"管道的体积",对应的质量 $\Delta m=\rho v\Delta tS$。

【范例】 由高压水枪竖直向上喷出的水柱,将一个质量为 M 的小铁盒开口向下倒顶在空中,如图 5-9-1 所示。已知水以恒定速率 v_0 从横截面为 S 的水枪中持续喷出,向上运动并冲击铁盒后,以不变的速率竖直返回,求:稳定状态下铁盒距水枪口的高度 h。

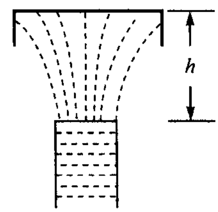


图 5-9-1

【精析】 铁盒能够稳定在距水枪口 h 高处,是由于受到水柱的持续冲击力作用。所以此范例应从分析水柱的运动及受力情况入手。显然,水柱是质量连续分布的连续体。可以用"管道模型"把连续体问题转化为"单一"对象问题。选在与铁盒相碰的极短时间 Δt 内喷出的水为研究对象,则其质量为 $\Delta m=\rho Sv_0\Delta t$,$\Delta m$ 以初速度 v_0 由水枪口喷出,然后做竖直上抛运动,到达 h 高的铁盒处。

所以 Δm 与铁盒相碰前的瞬时速度为　$v=\sqrt{v_0^2-2gh}$,

因为 Δm 的水与铁盒相碰的时间极短,而且冲击力远大于水的重力,所以可忽略相互作用过程中 Δm 的重力影响。

取向上为正方向,根据动量定律有 $F\Delta t=-2\Delta mv$,

式中 F 为铁盒对 Δm 的作用力,代入 $\Delta m=\rho Sv_0\Delta t$ 得

$$F\Delta t=-2\rho Sv_0\Delta t\cdot v$$

消去 Δt 得

$$F=-2\rho Sv_0v$$

铁盒所受到 Δm 的冲击力 F' 与 Δm 受到铁盒的作用力 F 是一对作用力与反作用力,所以 $F'=-F=2\rho Sv_0v$,又因为铁盒处于稳定状态,所以其所受合力为零,则有

$$2\rho Sv_0v=Mg$$

代入 v 得

$$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2}\left(\frac{M}{2\rho v_0S}\right)^2$$

【同类精练】 新疆达坂城风口的风速约为 $v=20\text{m/s}$,设该地空气的密度为 $\rho=1.4\text{kg/m}^3$,若把通过横截面积 $S=20\text{m}^2$ 的风的电能的 50%转化为电能,试利用上述已知量推导计算电功率的公式,并求出发电机电功率的大小。

解题捷径 10

当绳子绷紧的瞬间，沿绳子绷紧的方向速度发生突变，沿绳子方向的速度突然消失，即绳子绷紧的瞬间有机械能损失。

【范例】 如图 5-10-1 所示，用长为 L 的细绳悬挂一个质量为 m 的小球，悬点为 O 点，把小球拉至 A 点，使悬线与水平方向成 30°角，然后松手，问：小球运动到悬点的正下方 B 时，悬线中张力多大？

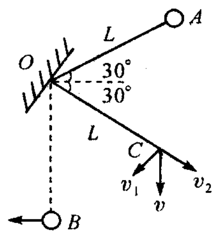


图 5-10-1

【精析】 在 A 点松手后，绳子将为松弛状态，所以小球在重力作用下做自由落体运动，将小球落到 A 点的正下方 C 点时，且 $OC=L$ 时绳又被拉紧，此时由于绳子的冲量作用，使小球沿绳方向的速度分量 v_2 减为零，小球将以 L 为半径、以 v_1 为初速度从 C 开始做圆周运动，如图 5-10-1 所示。因此，从 A 到 B 过程有机械能损失，机械能不守恒。本题应先求出球至 C 点时的切向速度 v_1，再对 CB 段运动分析，由机械能守恒求出 v_B，最后求出绳中张力 T。

小球从 A 到 C 自由下落高度为 L，则 $v_C=\sqrt{2gL}$，其切向分量为

$$v_1=v\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2gL}$$

小球由 C 运动到 B，由机械能守恒定律有

$$mgL(1-\cos60°)=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

将 v_1 代入解得 $v_B^2=\frac{5}{2}gL$，

对 B 点由向心力公式有

$$T-mg=m\frac{v_B^2}{L}，即\ T=mg+m\frac{v_B^2}{L}=\frac{7}{2}mg$$

【同类精练】 如图 5-10-2 所示，在光滑水平面上有一质量为 $m_1=20\text{kg}$ 的小车通过一根几乎不可伸长的轻绳与一质量为 $m_2=25\text{kg}$ 的拖车相连接。开始时，拖车静止，绳未拉紧，小车以 $v_0=3\text{m/s}$ 的速度向前运动。求绳绷紧时损失的机械能。

图 5-10-2

解题捷径 11

机械功率：作用在物体上的力与物体沿力的方向的速度的乘积就是力对物体的功率，称为机械功率，即 $P=F\cdot v$ 。在解题中应用 $P=F\cdot v$ 规律，可以较灵活地分析物体的受力情况。

【范例】 一辆汽车沿一略微倾斜的坡路运动，若保持发动机的功率不变，它能以 v_1 的速度匀速上坡，能以 v_2 的速度匀速下坡，则它在相同粗糙程度的水平路面上匀速运动的最大速度为（　　）

A. $\sqrt{v_1 v_2}$　　B. $\frac{(v_1+v_2)}{2}$　　C. $\frac{2v_1 v_2}{(v_1+v_2)}$　　D. $v_1 v_2/(v_1-v_2)$

【精析】 因为坡路略微倾斜，即倾角极小，$\mu mg\cos\theta\approx\mu mg$，所以有

$$P=\mu mgv_1=\mu mgv_2$$

则

$$\frac{P}{v_1}+\frac{P}{v_2}=2\mu mg \tag{1}$$

在水平路面上运动时，

$$\mu mg=\frac{P}{v} \tag{2}$$

由(1)(2)得

$$v=\frac{2v_1 v_2}{(v_1+v_2)}$$

所以应选答案 C。

【同类精练】 汽车发动机的功率为 60kW，汽车的质量为 m。当汽车在足够水平路面从静止以 $0.6\mathrm{m/s^2}$ 的加速度做匀加速直线运动时，求：

(1)汽车在水平路面能达到的最大速度 v_{m_1}。

(2)汽车在水平路面做匀加速运动能维持多长时间？

(3)在 10s 末汽车的瞬时功率多大？ 20s 末汽车的瞬时功率又是多少呢？

(4)若汽车以 v_{m_1} 速度驶上一倾角为 θ 的足够长的斜面。简要描述汽车做何运动，并求出在此斜面上的最终速度 v_{m_2}（已知汽车在行驶中所受路面阻力恒定为重力的 0.1 倍，g 取$10\mathrm{m/s^2}$）。

解题捷径 12

物体系的动能定理：当研究对象为系统时，组成系统的物体的总动能的变化量（系统内各物体的动能变化量之和）等于相应时间内的所有力（包括内力和外力）对物体系统所做的功。

【范例】 A、B 两个小物块用轻绳连接，绳跨过位于倾角为 30°的光滑斜面顶端的轻滑轮，滑轮与转轴之间的摩擦不计。斜面固定在水平桌面上，如图 5-12-1 甲所示。第一次 A 悬空，B 放在斜面上，用 t 表示 B 自斜面底端由静止开始运动至斜面顶端所需的时间；第二次，将 A 和 B 位置互换，使 B 悬空，A 放在斜面上，发现 A 自斜面底端由静止开始运动至斜面顶端所需的时间为 $t/2$（重力加速度 g 已知）。

（1）求 A 与 B 两小物块的质量之比。

（2）若将光滑斜面换成一个半径为 R 的半圆形光滑轨道，固定在水平桌面上，将这两个小物块用轻绳连接后，如图 5-12-1 乙所示放置。将 B 球从轨道边缘由静止释放。若不计一切摩擦，求 B 沿半圆形光滑轨道滑到底端时，A、B 的速度大小。

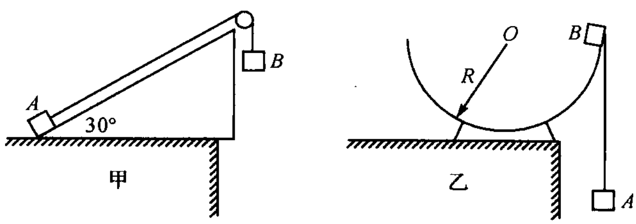


图 5-12-1

【精析】 （1）第一次，$m_1 g - m_2 g\sin\alpha = (m_1 + m_2)a_1$，$L = \frac{1}{2}a_1 t^2$；

第二次，$m_2 g - m_1 g\sin\alpha = (m_1 + m_2)a_2$，$L = \frac{1}{2}a_2\left(\frac{t}{2}\right)^2$，得$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$。

（2）设 B 球到达轨道底端时速度为 v_2，此时 A 的速度为 v_1，对系统运用动能定理有

$$m_2 gR - m_1 g\sqrt{2}R = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

而 $v_2 = \sqrt{2}v_1$，如图 5-12-2 所示，

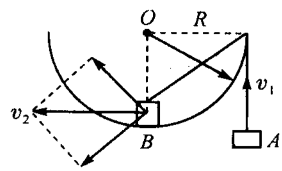


图 5-12-2

解得：$v_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\sqrt{gR}$，$v_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\sqrt{gR}$。

【同类精练】 如图 5-12-3 所示，一轻绳绕过无摩擦的两个轻质小定滑轮 O_1、O_2 和质量 $m_B=m$ 的小球连接，另一端与套在光滑直杆上质量 $m_A=m$ 的小物块连接，已知直杆两端固定，与两定滑轮在同一竖直平面内，与水平面的夹角 $\theta=60°$，直杆上 C 点与两定滑轮均在同一高度，C 点到定滑轮 O_1 的距离为 L，重力加速度为 g，设直杆足够长，小球运动过程中不会与其他物体相碰。现将小物块从 C 点由静止释放，试求：

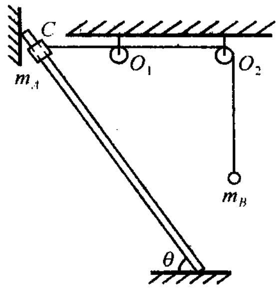


图 5-12-3

(1)小物块能下滑的最大距离；

(2)小物块在下滑距离为 L 时的速度大小。

解题捷径 13

“人船模型”：$m_1s_1=m_2s_2$，$s_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}s_{相}$，$s_2=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}s_{相}$。

【范例】 某人在一只静止于水平面的小船上练习射击。船、人连枪（不包括子弹）及靶的总质量为 M，枪内装有 n 颗子弹，每颗子弹质量为 m。枪口到靶的距离为 l，子弹射出枪口时相对于地面的速度为 v，在发射后一颗子弹时，前一颗子弹已陷入靶中，则在发射完 n 颗子弹后小船后退的距离为多少？

【精析】 由人船模型来处理，相当于质量为 nm 的人由船的一端走到另一端，求船后退的距离。发射完 n 颗子弹，小船后退的总距离为 $s=ns_1=\dfrac{nml}{M+nm}$。

【同类精练】 长 $l=5$m，质量 $M=150$kg 的平板车，停在光滑水平地面上，站在车尾上的人质量 $m=50$kg。此人由车尾走到车头时，求车移动的距离。

解题捷径 14

两个小球发生弹性正碰后速度的简便求法。将整个碰撞过程分为两个过程：第一个过程，从开始碰撞到两球等速(此时形变量最大，两球质心最近)；第二个过程，从两球等速到碰撞结束。每个小球在前后两个过程中受到的冲量相等，在前后两个过程中的动量改变量也相等，先用动量守恒定律求出等速时的共同速度，得出每个小球在第一个过程中动量的改变量，进而得到每个小球在整个过程中的动量改变量，是第一个过程中改变量的两倍。最后求出每个小球碰撞后的速度。

【范例】 光滑水平面上，质量为 $M_1=2\text{kg}$、速度为 $v_0=5\text{m/s}$ 的 A 球与质量为 $M_2=1\text{kg}$ 的 B 球发生正碰，求碰后两球的速度 v_1、v_2。已知碰撞过程中无机械能损失。

【精析】 从两球接触到速度相等的过程中系统动量守恒，设两球等速时的速度是 v，取 v_0 方向为正，则有

$$M_1v_0=(M_1+M_2)v$$

得

$$v=\frac{M_1v_0}{M_1+M_2}=\frac{2\times5}{1+2}=\frac{10}{3}\text{m/s}$$

从开始到等速的动量改变量为

$$\Delta P=2\left(\frac{10}{3}-5\right)=-\frac{10}{3}\text{kg}\cdot(\text{m/s})$$

在整个过程中 A 球的动量改变量是

$$2\Delta P=-\frac{20}{3}\text{kg}\cdot(\text{m/s})$$

即

$$M_1(v_1-v_0)=-\frac{20}{3}\text{kg}\cdot(\text{m/s})$$

得

$$v_1=\frac{5}{3}\text{m/s}$$

在两球碰撞过程中动量守恒

$$M_1v_0=M_1v_1+M_2v_2$$

$$v_2=M_1(v_0-v_1)/M_2=\frac{20}{3}\text{m/s}$$

即碰后 M_1、M_2 的速度大小分别为 $\frac{5}{3}\text{m/s}$，$\frac{20}{3}\text{m/s}$，方向与 v_0 相同。

【同类精练】 在光滑水平面上，质量为 $M_1=5\text{kg}$ 的小球速度大小为 $v_1=2\text{m/s}$，方向

向右；质量为 $M_2=2\text{kg}$ 的另一小球速度大小为 $v_2=4\text{m/s}$，方向向左。已知两球在同一直线上相向运动，求碰后两个小球的速度 v'_1，v'_2（碰撞过程中无机械能损失）。

解题捷径 15

弹簧连接体问题：对两个物体与弹簧组成的孤立系统在相互作用过程中，动量守恒、弹性势能与动能相互转化、弹簧伸长或压缩到最大程度时系统内各物体速度相同，弹性势能最大。当弹簧为自然长度时，系统内将出现某个物体速度最大。

【范例】 两个小球 A 和 B 用轻质弹簧相连，在光滑的水平直轨道上处于静止状态。在它们左边有一垂直于轨道的固定挡板 P，右边有一小球 C 沿轨道以速度 v_0 射向 B 球，如图 5-15-1 所示。C 与 B 发生碰撞并立即结成一个整体 D。在它们继续向左运动的过程中，当弹簧长度变到最短时，长度突然被锁定，不再改变。然后，A 球与挡板 P 生碰撞，碰后 A、D 都静止不动，A 与 P 接触而不粘连。过一段时间，突然解除锁定（锁定及解除锁定均无机械能损失）。已知 A、B、C 三球的质量均为 m。

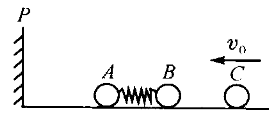


图 5-15-1

(1)求弹簧长度刚被锁定后 A 球的速度。

(2)在 A 球离开挡板 P 之后的运动过程中，弹簧的最大弹性势能。

【精析】 (1)设 C 球与 B 球粘结成 D 时，D 的速度为 v_1，由动量守恒，有

$$mv_0=(m+m)v$$

当弹簧压至最短时，D 与 A 的速度相等，设此速度为 v_2，由动量守恒，有

$$2mv_1=3mv_2$$

由①、②两式得 A 的速度为

$$v_2=\frac{1}{3}v_0$$

(2)设弹簧长度被锁定后，贮存在弹簧中的势能为 E_P，由能量守恒，有

$$\frac{1}{2}\cdot 2mv_1^2=\frac{1}{2}\cdot mv_2^2+E_P$$

撞击 P 后，A 与 D 的动能都为零，解除锁定后，当弹簧刚恢复到自然长度时，势能全部转变成 D 的动能，设 D 的速度为 v_3，则有

$$E_P=\frac{1}{2}(2m)\cdot v_3^2$$

当弹簧伸长，A 球离开挡板 P，并获得速度。当 A、D 的速度相等时，弹簧伸至最长。设此时的速度为 v_4，由动量守恒，有

$$2mv_3=3mv_4$$

当弹簧伸到最长时，其势能最大，设此势能为 E'_P，由能量守恒，有

$$\frac{1}{2}\cdot 2mv_3^2=\frac{1}{2}\cdot mv_4^2+E'_P$$

解以上各式得

$$E'_P=\frac{1}{36}mv_0^2$$

【同类精练】 如图 5-15-2 所示，物体 Q 与一质量可忽略的弹簧相连接，静止在光滑水平面上。物体 P 以速度 v 与弹簧和物体 Q 发生正碰，已知碰撞是弹性的。则在碰撞过程中，下列哪种情况弹簧刚好处于最大压缩状态（　　）

图 5-15-2

A. 当 P 的速度恰好等于零时　　B. 当 P 与 Q 的速度相等时

C. 当 Q 恰好开始运动时　　D. 当 Q 的速度等于 v 时

解题捷径 16

一个运动的物体 m_1 以 v_1 的速度与一个静止的物体 m_2 发生弹性碰撞，碰后速度：$v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$，$v'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$。碰前的接近速度等于碰后的分离速度 $v_1-v_2=v'_2-v'_1$。当 $m_1=m_2$ 时，两物体交换速度。

【范例】 如图 5-16-1 所示，质量 0.5kg、长 1.2m 的金属盒 AB 放在水平桌面上，它与桌面间 $\mu=1/8$，在盒内右端 B 放着质量也为 0.5kg、半径 0.1m 的弹性硬球，球与盒接触光滑。若在 A 端给盒以水平向右的冲量 1.5N·s，设盒在运动中与球碰撞时间极短，且无能量损失，求：

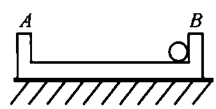


图 5-16-1

(1)盒从开始运动到完全停止所通过的路程是多少？

(2)盒从开始运动到完全停止所经过的时间是多少？

【精析】 研究对象是金属盒，盒受冲量 I 后获得速度 v，

由动量定理 $I=mv-0$，$v=\frac{I}{m}=\frac{1.5}{0.5}\text{m/s}=3\text{m/s}$，

盒以此速度向右运动，运动中受到桌面对盒的摩擦力 $f=\mu N=\mu\cdot 2mg$，

$$-\mu\cdot 2mg=ma,\ a=-2\mu g$$

盒运动了 $s_1=(1.2-0.1\times2)=1\text{m}$，后速度减少为 v'，

$$v'^2-v^2=2as_1$$

$$v'=\sqrt{v^2-2\cdot2\mu g s_1}=2\text{m/s}$$

盒左壁 A 以 v' 速度与球碰撞，因碰撞中无能量损失，球与盒交换速度，球以 $v'=2\text{m/s}$ 的速度向右做匀速直线运动，运动 1m 后又与盒的右壁相碰，盒又以 $v'=2\text{m/s}$ 的速度向右运动，直到停止。

$$-v'^2=2(-a)s_2,\ s_2=\frac{v'^2}{2a}=\frac{v'^2}{2\times2\mu g}=0.8\text{m},$$

总路程 $s=s_1+s_2=1\text{m}+0.8\text{m}=1.8\text{m}$。

(2)盒从开始运动到与球相碰所用时间为 t_1，根据动量定理有

$$-\mu\cdot2mg\cdot t_1=mv'-mv,\ t_1=\frac{v-v'}{2\mu g}=0.4\text{s},$$

小球匀速运动时间 $t_2=\frac{s}{v}=0.6\text{s}$，盒第二次与球碰撞后到停止运动的时间为 t_3，

$$0-v'=-2\mu g t_3,$$

$$t_3=\frac{v'}{2\mu g}=0.8\text{s},$$

根据动量定理总时间 $t=t_1+t_2+t_3=(0.4+0.6+0.8)\text{s}=1.8\text{s}$。

【同类精练】 如图 5-16-2 所示，滑块 A 的质量 $m=0.01\text{kg}$，与水平地面间的动摩擦因数 $\mu=0.2$，用细线悬挂的小球质量均为 $m=0.01\text{kg}$，沿 x 轴排列，A 与第 1 个小球及相邻两小球间距离均为 $s=2\text{m}$。线长分别为 L_1、L_2、L_3……(图中只画出三个小球，且小球可视为质点)，开始时，滑块以速度 $v_0=10\text{m/s}$ 沿 x 轴正方向运动，设滑块与小球碰撞时不损失机械能，碰撞后小球均恰能在竖直平面内完成完整的圆运动($g=10\text{m/s}$)。

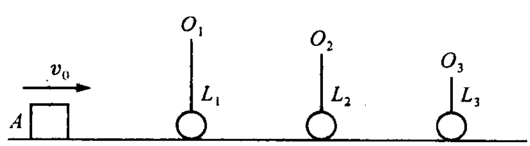


图 5-16-2

(1)滑块能与几个小球碰撞?

(2)求出碰撞中第 n 个小球悬挂长 L_n 的表达式。

解题捷径 17

两物体 m_1，m_2 碰撞之后，总动量必须和碰前大小、方向都相同，总动能小于或等于碰前总动能，碰后在没有其他物体的情况下，保证不再发生碰撞。

【范例】 质量相同的甲、乙两球在光滑水平面上沿同一方向运动，甲球的动量 $p_甲=10\text{kg}\cdot\text{m/s}$，乙球的动量 $p_乙=6\text{kg}\cdot\text{m/s}$。当甲追上乙球发生碰撞，则碰后甲、乙两球的动量可能为(　　)

A. $p'_甲=8\text{kg}\cdot\text{m/s}$，$p'_乙=8\text{kg}\cdot\text{m/s}$　　B. $p'_甲=7\text{kg}\cdot\text{m/s}$，$p'_乙=9\text{kg}\cdot\text{m/s}$

C. $p'_甲=4\text{kg}\cdot\text{m/s}$，$p'_乙=12\text{kg}\cdot\text{m/s}$　　D. $p'_甲=-2\text{kg}\cdot\text{m/s}$，$p'_乙=18\text{kg}\cdot\text{m/s}$

【精析】 (1)从动量角度判断：题中各选项均遵守动量守恒定律。

(2)从动能角度判断：设甲、乙两球质量为 m，碰后系统的最大动能为 $\frac{p_甲^2}{2m}+\frac{p_乙^2}{2m}=\frac{68}{m}$，由 $p_甲+p_乙=2mv$ 得 $v=\frac{8}{m}$，从而算出碰后系统的最小动能为 $\frac{1}{2}\times 2mv^2=\frac{64}{m}$。故碰后系统动能范围为 $\frac{64}{m}\leqslant E_K\leqslant\frac{68}{m}$。符合此条件的选项为 A、B。

(3)从物理实际判断：选项 A、B 符合物理实际。

故正确选项为 A、B。

【同类精练】 甲、乙两球在光滑的水平轨道上同向运动，已知它们的动量分别为 $p_甲=5\text{kg}\cdot\text{m/s}$，$p_乙=7\text{kg}\cdot\text{m/s}$，甲从后面追上乙并发生碰撞，碰后乙球的动量变为 $p'_乙=10\text{kg}\cdot\text{m/s}$。则两球质量 $m_甲$ 与 $m_乙$ 的关系可能是(　　)

A. $m_甲=m_乙$　　B. $m_乙=2m_甲$

C. $m_乙=3m_甲$　　D. $m_乙=5m_甲$

解题捷径 18

质量为 m 的物体的动量 p 和动能之间存在下列关系：$p=\sqrt{2mE_K}$，或者 $E_K=\frac{p^2}{2m}$。

【范例】 质量分别为 m_1、m_2 的物体，分别受到不同的恒力 F_1、F_2 的作用，由静止开始运动，则(　　)

A. 若在相同位移内它们的动量变化相同，则 $F_1/F_2=m_1/m_2$

B. 若在相同位移内它们的动量变化相同，则 $F_1/F_2=\sqrt{m_2/m_1}$

C. 若在相同时间内它们的动量变化相同，则 $F_1/F_2=m_1/m_2$

D. 若在相同时间内它们的动能变化相同，则 $F_1/F_2=\sqrt{m_1/m_2}$

【精析】 A、D 正确。物体都由静止开始运动，动量变化 $\Delta p=p$，动能变化 $\Delta E_k=E_k$，

由动能定理 $Fs=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$,

其中 s、p 相同,$F\propto\frac{1}{m}$,$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_2}{m_1}$,

由动量定理 $F_t=mv=m\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{2mE_k}$,

其中 t、E_k 相同,$F\propto\sqrt{m}$,$\frac{F_1}{F_2}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$。

【同类精练】 一外力对一物体做功,使其动能增加了 8 倍,则其动量增加的倍数是(　　)

A. 2 倍　　B. $2\sqrt{2}$倍

C. 4 倍　　D. 3 倍

解题捷径 19

两个相互接触的物体,在水平方向上如果没有其他力作用时,只有两物体间的相互作用力的水平分力作用,则物体的水平动量的变化完全由物体间的相互作用力的水平分量决定,当两物体分离时,物体的水平动量就达到了最大值或最小值。因而可以应用动量最值来确定分离点。

【范例】 如图 5-19-1 所示,一个质量为 m 的小球,在另一个半径为 R 的光滑固定半球的顶点无初速度滑下,则小球运动到什么位置与固定半球面分离?(小球的半径远小于半球的半径)

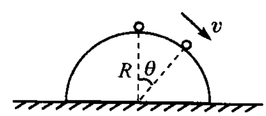


图 5-19-1

【精析】 设小球运动到与球心的连线与竖直线成 θ 角时,小球的速度为 v,由机械能守恒定律可知,

$$mgR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2,v=\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

则

$$p=mv=m\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

$$p_x=p\cdot\cos\theta=m\sqrt{2gR(1-\cos\theta)\cos^2\theta}=m\sqrt{gR(2-2\cos\theta)\cos\theta\cdot\cos\theta}$$

则由特殊不等式 $abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ 得

当 $\cos\theta=2-2\cos\theta$,即 $\cos\theta=\frac{2}{3}$时,达到最大值,小球与半球面分离。

从上面的分析可知,用动量最值方法,只要借助于机械能守恒定律和数学中的特殊不等式,就能避开对物体运动状态的精确分析,使解题过程简化。

【同类精练】 如图 5-19-2 所示的光滑圆轨道，固定于竖直平面内，圆轨道的半径为 R，在轨道的最低点有一个质量为 m，大小可忽略不计的小球以 v_0 的速度水平向右沿轨道上滑，试讨论小球在什么情况下，在什么位置与圆轨道分离？

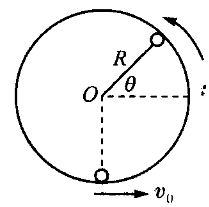


图 5-19-2

解题捷径 20

动量定理推论：物体在两次不同运动中所受合外力的冲量之差等于其两次动量的变化之差，即 $I_2-I_1=\Delta p_2-\Delta p_1$；动能定理推论：在两次不同的运动中合外力对物体所做的总功之差等于这两次物体动能的变化之差，即 $W_2-W_1=\Delta E_{K_2}-\Delta E_{K_1}$。

【范例】 如图 5-20-1 所示，一质量为 m 的滑块第一次从左边斜面上 A 点处由静止开始下滑，最终停在右边的斜面 D 点处，第二次从 A 点处以 $v_0=6\text{m/s}$ 的初速度开始下滑，问第二次比第一次多滑行了多少时间滑块才停下？停在何处？已知右边斜面倾角 $\theta=30°$，动摩擦因数为 0.80，$g=10\text{m/s}^2$，且不考虑滑块经过 B、C 两点时与水平面和斜面的碰撞。

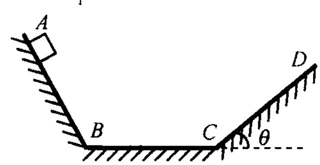


图 5-20-1

【精析】 由于第二次运动具有初速度，滑块第二次从 A 到 D 的时间比起第一次从 A 到 D 的时间要短。若第一次经 ts 后停在 D 点，则第二次比第一次多运动的 Δt 时间内，滑块一定是在右边斜面 D 点以上继续向上滑行，两次滑块所受合外力的冲量之差为 $I_2-I_1=-(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)\cdot\Delta t$。而第一次滑块动量的变化 $\Delta p_1=0$，第二次动量的变化 $\Delta p_2=0-mv_0$，即有 $\Delta p_2-\Delta p_1=-mv_0$。

于是由动量定理推论可得：$-(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)\cdot\Delta t=-mv_0$，

解得：$\Delta t=0.5\text{s}$。

设滑块第二次比第一次沿右边斜面多滑行了 Δs m 的路程后才停下，两次合外力对滑块所做的总功之差为 $W_2-W_1=-(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)\cdot\Delta s$。而第一次滑块动能的变化量 $\Delta E_{K_1}=0$，第二次动能的变化量 $\Delta E_{K_2}=0-\frac{1}{2}mv_0^2$，

于是由动能定理的推论可得：

$$-(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)\Delta s=-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

得：$\Delta s=1.5\text{m}$。

【同类精练】 质量为 M 的机车拉着质量为 m 的车厢沿平直轨道匀速行使，在中途机车与车厢突然脱钩，司机发觉时，机车已向前行驶了 t 时间和 s 的路程，于是立即除去牵引力。设运动的阻力与车重成正比，机车的牵引力是恒定的，试求：当机车和车厢都停止时，机车比车厢多行驶的时间是多少？两者之间的距离是多少？

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 由功的定义式知：传送带对重物的摩擦力与重物对传送带的摩擦力大小相等，没有发生滑动，位移相等，所以，C 正确。由能量守恒和转化知 A 正确。由受力分析及牛顿第二定律知 B 错误。由平衡条件知 D 错误。选 AC。

解题捷径 2

【精析】 由规律可知：$\mu=\dfrac{h}{L}=\tan\theta$，所以，甲、乙停止滑行后回头看 A 处的红旗时视线的仰角一定相同 。D 正确。

解题捷径 3

【精析】 设 AB、AC 水平部分长为 x，物体克服摩擦力做的功 $W=\mu mg\cos\alpha\dfrac{x}{\cos\alpha}=\mu mgx$，所以 $W_1=W_2$。

由动能定理可知 $E_1>E_2$，D 正确。（也可由解题捷径直接得出结论）

解题捷径 4

【精析】 如图 5-1 所示，设子弹进入木块深度为 d 的过程中，木块的位移为 l，则子弹的位移为 $(l+d)$。分别对木块和子弹应用动能定理，有

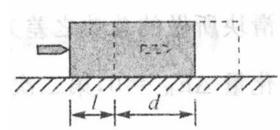


图 5-1

$$Fl=\frac{1}{2}Mv_2'^2-\frac{1}{2}Mv_2^2,-F(l+d)=\frac{1}{2}mv_1'^2-\frac{1}{2}mv_1^2。$$

由以上两式可得系统动能的损失为

$$\Delta E_k=\left(\frac{1}{2}Mv_2^2+\frac{1}{2}mv_1^2\right)-\left(\frac{1}{2}Mv_2'^2+\frac{1}{2}mv_1'^2\right)=Fd。$$

本题中，子弹和木块组成的系统损失的动能转化成了系统的内能。一般说来，作用于系统的滑动摩擦力 F 与系统内物体间相对滑动的位移 d 的乘积，在数值上等于因摩擦而转化成的内能，即“摩擦生热”$Q=Fd$。

解题捷径 5

【精析】 (1)物体由于摩擦力做负功，机械能损失，往复滑动，在轨道上的最大高度越来越小，直到在 B 点。在物体从开始运动到最高点到达 B 点的过程中，由功能关系知：

$$\sum W=\Delta E_K,$$

$$mgh-W_f=0-0,$$

$$mgR\cos\theta-\mu mg\cos\theta\cdot s=0,$$

$$s=\frac{R}{\mu}。$$

(2)在从 B 点滑至最低点的过程中

$$\sum W=\Delta E_K,$$

$$mgh=\frac{1}{2}mv_E^2,$$

$$mgR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_E^2,$$

$$mv_E^2=2mgR(1-\cos\theta),$$

在 E 点：$N-mg=\frac{mv_E^2}{R}$，

$$N=mg+\frac{mv_E^2}{R}=3mg-2mg\cos\theta。$$

解题捷径 6

【精析】 由规律知：A 错误；B 错误；C 错误；D 正确。

解题捷径 7

【精析】 由规律知：

$$\frac{\mu mg\cos\theta\cdot s}{mg\cdot h}=\frac{\mu mg\cos\theta\cdot s}{mg\cdot s\cdot\sin\theta}=\frac{\mu\cos\theta}{\sin\theta}=\mu\cot\theta。$$

解题捷径 8

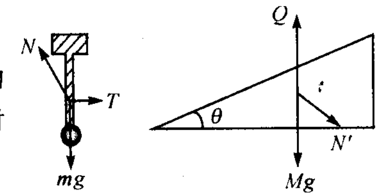


图 5-2

【精析】 如图 5-2 所示，设直杆 m 与三角劈间相互的弹力大小为 N，杆 A 的速度为 v_1，三角劈的速度为 v_2，杆对三角劈弹力做功瞬时功率为：

$$P=Nv_2\sin\theta \quad (1)$$

三角劈对杆的弹力做功瞬时功率为：

$$P'=-Nv_1\cos\theta \quad (2)$$

因 $P+P'=0$，所以有：

$$Nv_2\sin\theta=Nv_1\cos\theta \quad (3)$$

由机械能守恒定律得

$$mgh=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (4)$$

解(3)(4)得

$$v_2=\sqrt{\frac{2mgL^2h}{ML^2+mh^2}}。$$

解题捷径 9

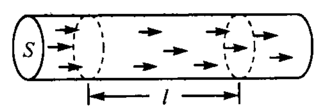


图 5-3

【精析】 首先建立风的“管道模型”，如图 5-3 所示，设经过时间 t 通过截面 S 的空气的质量为 m，则有 $m=\rho V=\rho Sl=\rho Svt$，

这部分空气的动能为

$$\Delta E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\cdot\rho Svt\cdot v^2=\frac{1}{2}\rho Sv^3t,$$

因为风的动能只有 50%转化为电能，所以其电功率的表达式为

$$P=\frac{\Delta E}{t}\times50\%=\frac{\frac{1}{2}\rho Sv^3t}{t}\times50\%=\frac{1}{4}\rho Sv^3,$$

代入数据得

$$P=\frac{1}{4}\times1.4\times20\times20^3\,\mathrm{W}=5.6\times10^4\,\mathrm{W}。$$

求解本题的关键有：在理解功和能的关系的基础上建立风能（流动空气的动能）转化为电能的关系；正确建立风的管道模型。

解题捷径 10

【精析】 小车与拖车在水平方向上动量守恒，则

$$m_1v_0=(m_1+m_2)v \tag{1}$$

损失的机械能为

$$\Delta E=\frac{1}{2}m_1v_0^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 \tag{2}$$

由(1)(2)联立得 $\Delta E=50\text{J}$。

解题捷径 11

【精析】 (1)汽车达到最大速度时，有：

$$v_{m_1}=\frac{P}{F}=\frac{P}{f}=\frac{60\times10^3}{0.1\times4\times10^3\times10}\text{m/s}=15\text{m/s}。$$

(2)经 t 时间，汽车匀加速达到额定功率时，

由牛顿第二定律有：$F-f=ma$，由运动学规律有：$v=at$，

而 $P=F\cdot v$，解得 $t=15.625\text{s}$。

(3)当 $t=10\text{s}$ 时，汽车还处于匀加速阶段，

牵引力 $F=ma+0.1mg$，瞬时速度 $v=at$，

所以此时汽车的瞬时功率 $P'=Fv=38.4\text{kW}$。

当 $t=20\text{s}$ 时，汽车已经达到额定功率，故汽车的瞬时功率 $P=60\text{kW}$。

(4)汽车保持额定功率驶上斜面，由于行驶阻力增大，汽车牵引力增大，汽车做加速度不断减小的减速运动，直至达到最终速度 v_{m_2} 匀速行驶。

行驶阻力　　$f'=0.1mg+mg\sin\theta$，

所以　　$v_{m_2}=\dfrac{P}{F}=\dfrac{P}{f'}=12.5\text{m/s}$。

解题捷径 12

【精析】 (1)设小物块能下滑的最大距离为 s_m，对系统运用动能定理得

$$m_Ags_m\sin\theta-m_Bg\Delta h_B=0,$$

$$\Delta h_B=\sqrt{(s_m-L\cos\theta)^2+(L\sin\theta)^2}-L,$$

代入解得　$s_m=4(1+\sqrt{3})L$。

(2)设小物块下滑距离为 L 时的速度大小为 v，此时小球的速度大小为 v_B，则

$$v_B=v\cos\theta,$$

$$m_AgL\sin\theta=\frac{1}{2}m_Bv_B^2+\frac{1}{2}m_Av^2,$$

解得　$v=\dfrac{\sqrt{20\sqrt{3}gL}}{5}$。

解题捷径 13

【精析】 由人船模型知，车后退的距离为

$$s_{车}=\frac{m}{m+M}l=\frac{50}{50+150}\times 5\text{m}=1.25\text{m}。$$

解题捷径 14

【精析】 从两球接触到速度相等的过程中系统动量守恒，设两球等速时速度是 v，取向右为正，则有：

$$M_1v_1+M_2v_2=(M_1+M_2)v,$$

得

$$v=(M_1v_1+M_2v_2)/(M_1+M_2)=(5\times2-2\times4)/(5+2)=\frac{2}{7}\text{m/s},$$

从开始到等速 M_1 的动量改变量为

$$\Delta P_A=5\times(\frac{2}{7}-2)=-\frac{60}{7}\text{km}\cdot\text{m/s},$$

在整个过程中 M_1 动量改变量是

$$2\Delta P_A=\frac{120}{7}\text{km}\cdot\text{m/s},$$

$$M_1\times(v'_1-v_1)=-\frac{120}{7}\text{km}\cdot\text{m/s},$$

得

$$v'_1=-\frac{10}{7}\text{m/s},$$

在两球碰撞过程中动量守恒　$M_1v_1+M_2v_2=M_1v'_1+M_2v'_2$，

$$v'_2=(M_1v_1+M_2v_2-M_1v'_1)/M_2=\left(5\times2-2\times4+5\times\frac{10}{7}\right)/2=\frac{32}{7}\text{m/s},$$

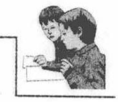
即碰后 M_1，M_2 的速度大小分别是 $\frac{10}{7}$m/s，$\frac{32}{7}$m/s，M_1 向左，M_2 向右。

解题捷径 15

【精析】 当两个物体借助于弹簧发生弹性碰撞，相对速度为零时，弹簧形变达到最大值，即 $v_P=v_Q$ 时，两物体处于相对静止状态，弹簧的压缩量达到最大值。B 正确。

解题捷径 16

【精析】 (1)因滑块与小球质量相等且碰撞中机械能守恒，滑块与小球相碰撞会互换速度，小球在竖直平面内转动，机械能守恒，设滑块滑行总距离为 s_0，



有$-\mu mgs_0=0-\frac{1}{2}mv_0$，得 $s_0=25m$，$n=\frac{s_0}{s}=12$ 个。

(2)滑块与第 n 个球碰撞，设小球运动到最高点时速度为 v'_n，由机械能守恒知：

$$\frac{1}{2}mv_n^2=\frac{1}{2}mv'^2_n+2mgl_n \tag{1}$$

由小球的重力提供向心力知：

$$mg=m\frac{v'^2_n}{l_n} \tag{2}$$

$$-\mu mgns=\frac{1}{2}mv_n^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3}$$

由以上三式得：

$$l_n=\frac{v_0^2-2\mu gsn}{5g}=\frac{50-4n}{25}。$$

解题捷径 17

【精析】 (1)由动量守恒定律，得 $p'_{甲}=2\text{kg}\cdot\text{m/s}$。

(2)从动能角度判断：碰后系统动能有最大值，即$\frac{p_{甲}^2}{2m_{甲}}+\frac{p_{乙}^2}{2m_{乙}}\geqslant\frac{p'^2_{甲}}{2m_{甲}}+\frac{p'^2_{乙}}{2m_{乙}}$，亦即 $m_{乙}\geqslant2.4m_{甲}$。碰后系统动能最小时 $v'_{甲}=v'_{乙}$，即$\frac{p'_{甲}}{m_{甲}}=\frac{p'_{乙}}{m_{乙}}$，亦即 $m_2=5m_{甲}$，故 $2.4m_{甲}\leqslant m_{乙}\leqslant5m_{甲}$。

(3)从物理实际判断：碰前 $v_{甲}>v_{乙}$，即$\frac{p_{甲}}{m_{甲}}>\frac{p_{乙}}{m_{乙}}$，亦即 $m_{乙}>1.4m_{甲}$。碰后 $v'_{甲}\leqslant v'_{乙}$，即 $m_{乙}\leqslant5m_{甲}$。

综上所述，故正确选项为 C、D。

解题捷径 18

【精析】由题意，动量是原来的 9 倍，

由 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$，$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}$，

原动量 $p=mv=m\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{2mE_k}$，

现动量 $p'=\sqrt{2m(9E_K)}=3\sqrt{2mE_k}=3p$，

所以动量增加了 2 倍。选 A。

解题捷径 19

【精析】 设小球运动到与球心的连线与过圆心的水平线成 θ 角时，小球的速度为 v，

由机械能守恒定律可知：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR(1+\sin\theta)+\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\sqrt{v_0^2-2gR(1+\sin\theta)},$$

$$p=mv=m\sqrt{v_0^2-2gR(1+\sin\theta)},$$

$$p_x=mv\cdot\sin\theta=m\sqrt{(v_0^2-2gR-2gR\sin\theta)\sin^2\theta}$$

$$=m\sqrt{gR}\cdot\sqrt{\left(\frac{v_0^2-2gR}{gR}-2\sin\theta\right)\sin\theta\cdot\sin\theta},$$

当 $\sin\theta=\frac{v_0^2-2gR}{3gR}$ 时，p_x 达到最大值，小球与轨道分离。

解题捷径 20

【精析】 设想如果在刚脱钩时就除去牵引力，则由于机车和车厢的初速度相同，且所受阻力均与各自所受重力成正比，使得两者做匀减速运动的加速度也相同，故两者理应行驶相同的路程后同时停在同一点。但根据题设情形，实际上机车比车厢多行驶了 Δt 时间和 Δs 的路程，其原因就在于机车的牵引力 F 并非在刚脱钩时除去，而是在脱钩 t 后才除去的，比较上述两种情形中机车所受合外力的冲量之差为 $I_2-I_1=Ft-f\Delta t$，合外力对机车所做的总功之差为 $W_2-W_1=Fs-f\Delta s$ 。由题意可知牵引力 $F=k(M+m)g$，阻力 $f=kMg$，而两种情形中机车动量的变化相同，动能变化也相同，于是由两个推论分别可得：

$$k(M+m)gt-kMg\Delta t=0,$$

$$k(M+m)g-kMg\Delta s=0,$$

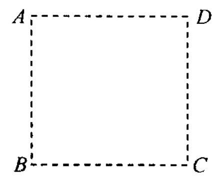
解得：$\Delta t=\frac{M+m}{M}t$，$\Delta s=\frac{M+m}{M}s$。

第六章　静电场中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：匀强电场中，平行且相等的两条线段间的电势差相等。任意一条线段中点的电势等于两端点电势之和的平均值。

【题目】 如图一所示，A、B、C、D 是匀强电场中一个正方形的四个顶点，已知 A、B、C 三点电势分别为 15V，3V，-3V，则由此可得 D 点电势 $\varphi_D=$__________。



图一

【精析】 由本题解题捷径知：

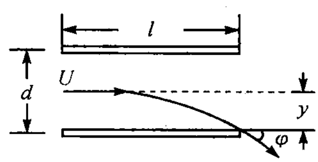
$$U_{AB}=U_{CD},U_A-U_B=U_D-U_C,$$

代入已知值得：$U_D=9$V。

考虑 AD 与 BC 也可得相同的结果。

小试二：一群电性相同，质量和电荷量不相同的带电粒子（重力不计）经过相同加速电场加速，又经过相同的偏转电场偏转，它们的运动轨迹相同，即 $y=\dfrac{Ul^2}{4dU'}$，$\tan\varphi=\dfrac{Ul}{2dU'}$。

【题目】 如图二所示，一束带电粒子（重力不计），垂直电场线方向进入偏转电场。试讨论在以下情况中，粒子应具备什么条件，才能得到相同的偏转距离 y 和偏转角 φ（U，d，l 保持不变）(　　)



图二

A. 进入偏转电场的速度相同

B. 进入偏转电场的动能相同

C. 进入偏转电场的动量相同

D. 先由同一加速电场加速后，再进入偏转电场

【精析】 带电粒子以速度 v_0，垂直于电场方向飞入匀强电场时，做类平抛运动。设粒子的电荷量为 q，质量为 m，两平行板间的电压为 U，板长为 l，板间距离为 d，则

$$y=\frac{1}{2}at^2=\frac{Uql^2}{2mdv_0^2},\ \tan\varphi=\frac{at}{v_0}=\frac{Uql}{mdv_0^2},$$

A. 因为 v_0 相同，只有当$\frac{q}{m}$相同，y，$\tan\varphi$ 才相同

B. 因为$\frac{1}{2}mv_0^2$ 相同，只有当 q 相同，y，$\tan\varphi$ 才相同

C. 因为 mv^2 相同，只有当 m、q 相同，y，$\tan\varphi$ 才相同

D. 设加速电场的电压为 U'，则 $U'q=\frac{1}{2}mv_0^2$

有 $y=\frac{Ul^2}{4dU'}$，$\tan\varphi=\frac{Ul}{2dU'}$。

可见，在 D 项条件下，不论带电粒子的质量、电荷量如何，只要经过同一加速电场加速，再垂直进入同一偏转电场，它们飞出电场的偏转距离 y 和偏转角度 φ 都是相同的。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

三个自由电荷因相互作用而平衡，它们满足："三点共线，两同夹异，两大夹小，近小远大"。

解题捷径 2

处于静电平衡状态的导体，产生的感应电荷满足："近反远同，接地或手接触中和远端电荷"。

解题捷径 3

处于静电平衡状态的导体的内部，原电场的场强与感应电荷的场强必等大、反向，即合场强为零。

解题捷径 4

两同种带电小球分别用等长细绳系住，相互作用平衡后，悬线与竖直方向的夹角 α 与带电小球的质量 m 存在 $m_1\sin\alpha_1=m_2\sin\alpha_2$ 的关系。

解题捷径 5

在匀强电场中，平行且相等的两条线段间的电势差相等。任意一条线段中点的电势等于两端点电势之和的平均值。

解题捷径 6

对于介质的介电常数为 ϵ 的平行板电容器而言，两板间场强只与极板上单位面积的

带电量(电荷的面密度)成正比。

解题捷径 7

电场强度的方向是电势降低最快的方向，在等差等势面分布图中，等势面密集的地方电场强度大。

解题捷径 8

在静电场中，若带电粒子只受电场力作用，粒子的动能和电势能相互转化，总能量保持不变。

解题捷径 9

等量异种电荷连线的中垂线是一条等势线(当无穷远处的电势为零，它就是零势线)，该线上各点的场强方向相同；相对连线对称的两点的电场强度相同。

解题捷径 10

等量同种电荷连线的中垂线，沿中点向外电势降低，中点处的场强为零，中垂线上有场强最强处。

解题捷径 11

一群电性相同，质量和电荷量不相同的带电粒子(重力不计)经过相同加速电场加速，又经过相同的偏转电场偏转，它们的运动轨迹相同，即 $y=\frac{Ul^2}{4dU'}$，$\tan\varphi=\frac{Ul}{2dU'}$。

解题捷径 12

完全相同的两带电小球，接触再分开，总电荷量平均分配，且电荷守恒。

解题捷径 13

两个带电小球放在光滑的绝缘水平地面上，同时由静止释放，则它们在某时刻满足：$m_1v_1=m_2v_2$；$m_1a_1=m_2a_2$。

解题捷径 14

多个带电小球固定在光滑的水平绝缘地面上，同时由静止释放，则它们满足：$m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n=0$。

解题捷径 15

三个自由电荷因相互作用而平衡，它们的电荷量大小满足：$\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_2q_3}=\sqrt{q_1q_3}$。

解题捷径 16

在三种典型的保守力场——重力场、浮力场和静电场所构成的叠加场中的复杂问题，通过等效和类比方法，转化为类似重力场中的简单问题。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

三个自由电荷因相互作用而平衡，它们满足："三点共线，两同夹异，两大夹小，近小远大"。

【范例】 两个电荷量分别为 Q 和 $4Q$ 的负电荷 a、b，在真空中相距为 L，如果引入另一点电荷 c，正好能使这三个电荷都处于静止状态，试确定电荷 c 的位置、电性及它的电荷量。

【精析】 由于 a、b 点电荷同为负电性，可知电荷 c 应放在 a、b 之间的连线上，而 c 受到 a、b 对它的作用力为零，即可确定它的位置。又因 a、b 电荷也都处于静止状态，即 a、b 各自所受库仑力的合力均要为零，则可推知 c 的电性并求出它们的电荷量。

依题意作出图 6-1-1，并设电荷 c 和 a 相距为 x，则 b 和 c 相距为 $L-x$，c 的电荷量为 q_c，对电荷 c，其所受的库仑力的合力为零，即 $F_{ac}=F_{bc}$，

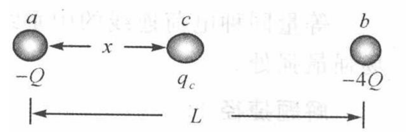


图 6-1-1

根据库仑定律有 $k\dfrac{q_cQ}{x^2}=k\dfrac{q_c4Q}{(L-x)^2}$，

解得 $x_1=\dfrac{1}{3}L$，$x_2=-L$（舍去），

三个电荷都处于静止状态，即 a、b 各自所受库仑力的合力均要为零，可判断 c 的电性必定为正。又由 $F_{ac}=F_{ba}$，

即
$$k\frac{q_cQ}{(L/3)^2}=k\frac{4QQ}{L^2},$$

得
$$q_c=\frac{4}{9}Q。$$

【同类精练】 相距为 L 的点电荷 A、B 的带电量分别为 $4Q$ 和 $-Q$，要引入第三个点电荷 C，使三个点电荷在库仑力的作用下都处于平衡状态。求 C 的电量和放置的位置。

解题捷径 2

处于静电平衡状态的导体，产生的感应电荷满足："近反远同，接地或手接触中和远端电荷"。

【范例】 如图 6-2-1 所示，带正电的小球靠近不带电的金属导体 AB 的 A 端，由于静电感应，导体 A 端出现负电荷，B 端出现正电荷，则下列关于导体 AB 感应起电的说法中正确的是(　　)

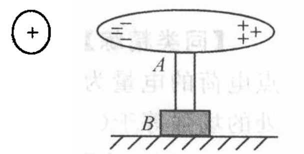


图 6-2-1

A. 用手接触一下导体的 A 端，导体将带正电荷

B. 用手接触一下导体 AB 的正中部位，导体仍不带电

C. 用手接触一下导体 AB 的任何部位，导体将带负电

D. 用手接触一下导体 AB 后，只要带正电小球不移走，AB 不可能带电

【精析】 正确答案是 C，因为无穷远和地球的电势为零，因此对于带正电荷的小球所形成电场中某一点的电势均大于零，所以导体 AB 的电势高于地球的电势（也可利用画出电荷产生电场的电场线的方向来判定电势的高低）。

由于人与地球是连在一起的，因此当人接触导体 AB 时，不管接触哪一端，都使导体 AB 的正电荷由高电势向低电势的地球移动，从而使导体 AB 带负电（也可理解为地球的负电荷由低电势向高电势的导体 AB 移动）。

【同类精练】 如图 6-2-2 所示，将不带电的导体 BC 放在带正电的金属球 A 附近，当导体 BC 达到静电平衡后，则下列说法中正确的是(　　)

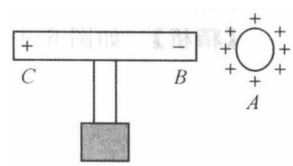


图 6-2-2

A. 用导线连接 BC 两端，导线中有瞬间电流通过

B. 用手摸一下导体 B 端可使导体带正电

C. 导体 C 端电势高于 B 端电势

D. B 和 C 端感应电荷在导体内部产生的场强沿 BC 方向逐渐减小

解题捷径 3

处于静电平衡状态的导体的内部，原电场的场强与感应电荷的场强必等大、反向，即合场强为零。

【范例】 长为 L 的导体棒原来不带电，现将一带电量为 q 的点电荷放在距棒左端 R 处，如图 6-3-1 所示，当达到静电平衡后，棒上感应电荷在棒内中点处产生的场强的大小等于__________。

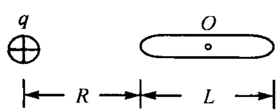


图 6-3-1

【精析】 导体棒达到静电平衡时，导体棒内合场强为零，电荷量为 q 的点电荷在棒中点处的场强大小为：$E=k\cdot\frac{q}{(R+L/2)^2}$，

棒上感应电荷在棒中点处的场强 E' 与 E 大小相等方向相反，中点的合场强为零，所以

$$E'=E=k\cdot\frac{q}{(R+L/2)^2}。$$

【同类精练】 如图 6-3-2 所示，接地的金属球 A 半径为 R，球外点电荷的电量为 Q，到球中心的距离为 r，则该点电荷的电场在球心处的场强等于（　　）

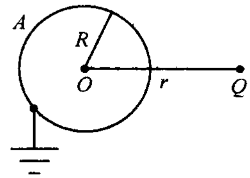


图 6-3-2

A. $\frac{kQ}{r^2}-\frac{kQ}{R^2}$　　　　B. 0

C. $\frac{kQ}{r^2}+\frac{kQ}{R^2}$　　　　D. $\frac{kQ}{r^2}$

解题捷径 4

两同种带电小球分别用等长细绳系住，相互作用平衡后，悬线与竖直方向的夹角 α 与带电小球的质量 m 存在 $m_1\sin\alpha_1=m_2\sin\alpha_2$ 的关系。

【范例】 用等长的绝缘线，悬挂两个质量不等、带同种电荷的小球，两球处于如图 6-4-1 所示状态。

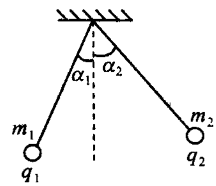


图 6-4-1

试证明：$m_1\sin\alpha_1=m_2\sin\alpha_2$。

【精析】 如图 6-4-2 所示，根据正弦定理得

$$\frac{\sin\alpha_1}{F}=\frac{\sin\beta_1}{m_1g},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{F}=\frac{\sin\beta_2}{m_2g},$$

因为丝线等长，所以 $\beta_1=\beta_2$，

所以 $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2=m_2/m_1$。

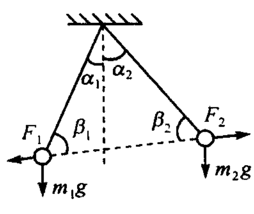


图 6-4-2

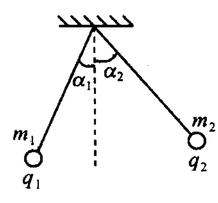
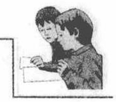


图 6-4-3

【同类精练】 两个大小相同的小球带有同种电荷，质量分别是 m_1 和 m_2，带电量分别是 q_1 和 q_2，用细绝缘线悬挂后，因静电力而使两悬线张开，分别与铅垂线方向成夹角 α_1 和 α_2，且两球同处一水平线上，如图 6-4-3 所示，若 $\alpha_1=\alpha_2$，则下述结论中正确的是（　　）



A. q_1 一定等于 q_2　　B. 一定满足 $q_1/m_1=q_2/m_2$

C. m_1 一定等于 m_2　　D. 必须同时满足 $q_1=q_2$，$m_1=m_2$

解题捷径 5

在匀强电场中，平行且相等的两条线段间的电势差相等。任意一条线段中点的电势等于两端点电势之和的平均值。

【范例】 如图 6-5-1 中 A、B、C、D 是匀强电场中一个正方形的四个顶点，已知 A、B、C 三点电势分别为 15V，3V，−3V，则由此可得 D 点电势 $\varphi_D=$__________。

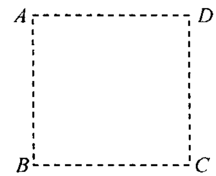


图 6-5-1

【精析】 由本题解题捷径知：

$$U_{AB}=U_{CD},U_A-U_B=U_D-U_C$$

代入已知值得：$U_D=9\text{V}$，

考虑 AD 与 BC 也可得相同的结果。

【同类精练】 如图 6-5-2 所示，匀强电场中有 A、B、C 三点，在以它们为顶点的三角形中，$\angle A=30°$，$\angle C=90°$，电场方向与三角形所在平面平行。已知 A、B 和 C 点的电势分别为 $(2-\sqrt{3})$V、$(2+\sqrt{3})$V 和 2V，则该三角形的外接圆上最低、最高电势分别为（　　）

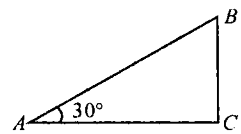


图 6-5-2

A. $(2-\sqrt{3})$V、$(2+\sqrt{3})$V

B. 0、4V

C. $\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$V、$\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$V

D. 0、$\sqrt{3}$V

解题捷径 6

对于介质的介电常数为 ε 的平行板电容器而言，两板间场强只与极板上单位面积的带电量（电荷的面密度）成正比。

【范例】 一平行板电容器的电容量为 C，充电后与电源断开，此时板上带电量为 Q，两板间电势差为 U，板间场强为 E。现保持间距不变使两板错开一半（见图 6-6-1），则下列各量的变化是：电容量 $C'=$__________，带电量 $Q'=$__________，电势差 $U'=$__________，板间场强 E'__________。

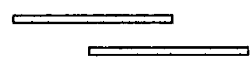


图 6-6-1

【精析】 电容器的电容量由板间介质特性及几何尺寸决定，介质与间距不变，正对面积减为原来的一半，电容量也减为原来的一半，即 $C'=\frac{1}{2}C$，

切断电源后，板上电量不变，$Q'=Q$。

由电容定义得两板间电势差

$$U'=\frac{Q'}{C'}=\frac{Q}{\frac{1}{2}C}=2U,$$

根据电势差与场强的关系，得板间场强 $E'=2E$。

【同类精练】 一平行板电容器充电后与电源断开，负极板接地，在两极板间有一正电荷(电量很小)，固定在 P 点，如图 6-6-2 所示，以 E 表示两极板间的场强，U 表示电容器的电压，E_P 表示正电荷在 P 点的电势能，若保持负极板不动，将正极板移到图 6-6-2 中虚线所示的位置，则(　　)

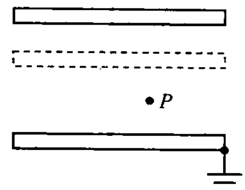


图 6-6-2

A. U 变小，E 不变　　B. E 不变，E_P 变大

C. P 变大　　D. U 不变，E_P 不变

解题捷径 7

电场强度的方向是电势降低最快的方向，在等差等势面分布图中，等势面密集的地方电场强度大。

【范例】 如图 6-7-1 所示的同心圆(虚线)是电场中的一组等势线，一个电子只在电场力作用下沿着直线由 A 向 C 运动时的速度越来越小，B 为线段 AC 的中点，则有(　　)

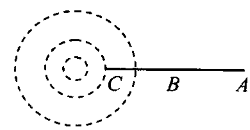


图 6-7-1

A. 电子沿 AC 运动时受到的电场力越来越小

B. 电子沿 AC 运动时它具有的电势能越来越小

C. 电势 $\varphi_A>\varphi_B>\varphi_C$

D. 电势差 $U_{AB}=U_{AC}$

【精析】 电子由 A 向 C 运动时的速度越来越小，动能越来越小，则电势能越来越大，则该电场为一负的点电荷形成的电场，电子向 C 运动过程中受到的电场力越来越大，所以，A、B 均错，C 正确。由于从 A 到 C 电场强度越来越大，由 $U=Ed$ 知，$U_{AB}<U_{BC}$，D 选项错。选 C。

【同类精练】 如图 6-7-2 所示，实线是某电场中的一条电场线，虚线是该电场中的两条等势线，由此可以得出的正确结论是(　　)

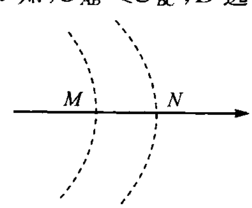


图 6-7-2

A. M 点的电势一定高于 N 点的电势

B. M 点的场强一定大于 N 点的场强

C. M 点的电势一定低于 N 点的电势

D. M 点的场强一定小于 N 点的场强

解题捷径 8

在静电场中，若带电粒子只受电场力作用，粒子的动能和电势能相互转化，总能量保持不变。

【范例】 如图 6-8-1 所示，实线为电线场，虚线为等势线，且相邻两等势线间电势差相等，一正电荷在等势线 φ_3 上时，具有动能 20J，它在运动到等势线 φ_1 上时，速度为零，设 $\varphi_2=0$，那么该电荷的电势能为 4J 时，其动能为__________J。

【精析】 正电荷从等势面 φ_3 运动到等势面 φ_1，克服电场力做功为 20J，则该正电荷从等势面 φ_3 运动到等势面 φ_2，克服电场力做功为 10J，则在等势面 φ_2 上时，正电荷具有的动能为 10J，由于 $\varphi_2=0$，它的电势能为零。即该正电荷动能和电势能的总和为 10J，在只有电场力做功的情况下，动能和电势能的总和保持 10J 不变，则电势能为 4J 时，动能为 6J。

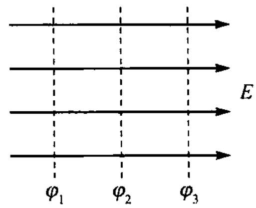


图 6-8-1

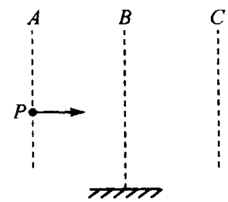


图 6-8-2

【同类精练】 如图 6-8-2 所示，在匀强电场中，有相互平行间隔相等的三个等势面 A、B、C。其中等势面 B 的电势为零。一点电荷在不受其他外力作用的情况下，以垂直于等势面 A 的初速度自 P 点射入，且初动能为 20J，到达等势面 C 时，动能为零，则该电荷在电势能为 5J 处的动能是(　　)

A. 20J　　　　B. 15J　　　　C. 10J　　　　D. 5J

解题捷径 9

等量异种电荷连线的中垂线是一条等势线(当无穷远处的电势为零，它就是零势线)，该线上各点的场强方向相同；相对连线对称的两点的电场强度相同。

【范例】 两个固定的异号点电荷，电量相等，用 E_1 和 E_2 分别表示电场中两点的电场强度的大小，则在通过两点电荷的连线的中垂线上，$E_1=E_2$ 的点(　　)

A. 有三个，其中两处合场强为零　　　　B. 有一个，其中一处合场强为零

C. 可能有两个，其中一处合场强为零　　D. 可能有两个，合场强都不为零

【精析】 两个等量异种点电荷在空间中形成电场，某一点的场强大小是这两个点电荷所产生的电场的叠加，其合场强垂直于中垂线且指向负电荷方向，并且从中间向两侧逐渐减小。

【同类精练】 如图 6-9-1 所示，两个等量异种点电荷电场，AB 为中垂线，且 $AO=BO$，则（　　）

A. A、B 两点场强相等

B. 正电荷从 A 运动到 B，电势能增加

C. 负电荷从 A 运动到 B，电势能增加

D. A、B 两点电势差为零

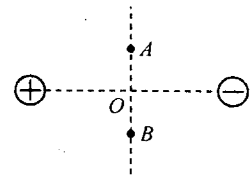


图 6-9-1

解题捷径 10

等量同种电荷连线的中垂线，沿中点向外电势降低，中点处的场强为零，中垂线上有场强最强处。

【范例】 如图 6-10-1 所示，在真空中有两个带相等电量的正电荷 q_1 和 q_2，它们分别固定在 A、B 两点，DC 为 AB 连线的中垂线。现将正电荷 q_3 由 C 沿 CD 移至无穷远处，在此过程中（　　）

A. q_3 的电势能逐渐增大

B. q_3 的电势能先逐渐增大，后逐渐减小

C. q_3 受到的电场力逐渐减小

D. q_3 受到的电场力先逐渐增大，后逐渐减小

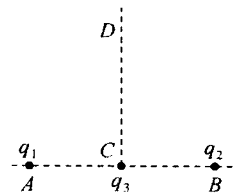


图 6-10-1

【精析】 两正电荷的中垂线上电场由 C 向无限远移动的过程中，E 先增大后减小，电场力 $F=Eq$，先增大后减小，故 D 正确。由于 CD 上各点合电场的场强方向都是从 C 指向 D，所以正电荷 q_3 沿 CD 移动时，电场力总是做正功，电荷的电势能一直减小。

【同类精练】 如图 6-10-2 所示，M、N 为两个等量同种电荷，在其连线的中垂线上的 P 点放一个静止的点电荷 q（负电荷），不计重力，下列说法中正确的是（　　）

A. 点电荷在从 P 到 O 的过程中，加速度越来越大，速度也越来越大

B. 点电荷在从 P 到 O 的过程中，加速度越来越小，速度也越来越大

C. 点电荷运动到 O 点时加速度为零，速度达最大值

D. 点电荷越过 O 点后，速度越来越小，加速度越来越大，直到粒子速度为零

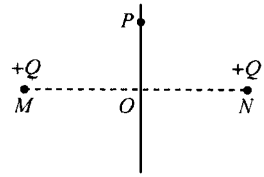


图 6-10-2

解题捷径 11

一群电性相同，质量和电荷量不相同的带电粒子（重力不计）经过相同加速电场加速，又经过相同的偏转电场偏转，它们的运动轨迹相同，即 $y=\dfrac{Ul^2}{4dU'}$，$\tan\varphi=\dfrac{Ul}{2dU'}$。

【范例】 如图 6-11-1 所示，一束带电粒子（重力不计），垂直电场线方向进入偏转电场。试讨论在以下情况中，粒子应具备什么条件，才能得到相同的偏转距离 y 和偏转角 φ（U,d,l 保持不变）（　　）

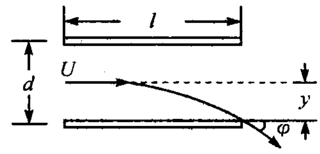


图 6-11-1

A. 进入偏转电场的速度相同

B. 进入偏转电场的动能相同

C. 进入偏转电场的动量相同

D. 先由同一加速电场加速后，再进入偏转电场

【精析】 带电粒子以速度 v_0，垂直于电场方向飞入匀强电场时，做类平抛运动。设粒子的电荷量为 q，质量为 m，两平行板间的电压为 U，板长为 l，板间距离为 d ，则

$$y=\frac{1}{2}at^2=\frac{Uql^2}{2mdv_0^2},\ \tan\varphi=\frac{at}{v_0}=\frac{Uql}{mdv_0^2}$$

A. 因为 v_0 相同，只有当$\frac{q}{m}$相同，$y,\tan\varphi$ 才相同；

B. 因为$\frac{1}{2}mv_0^2$ 相同，只有当 q 相同，$y,\tan\varphi$ 才相同；

C.　因为 mv_0^2 相同，只有当 v_0、q 相同，$y,\tan\varphi$ 才相同；

D. 设加速电场的电压为 U'，则 $U'q=\frac{1}{2}mv_0^2$，

有 $y=\frac{Ul^2}{4\mathrm{d}U'},\tan\varphi=\frac{Ul}{2\mathrm{d}U'}$。

可见，在 D 项条件下，不论带电粒子的质量、电荷量如何，只要经过同一加速电场加速，再垂直进入同一偏转电场，它们飞出电场的偏转距离 y 和偏转角度 φ 都是相同的。

【同类精练】 图 6-11-2 是用来使正粒子加速和偏转的装置，我们将一价氢离子、一价氦离子和二价氦离子的混合物经过同一电场加速后，在同一电场中偏转，它们是否会分为三股，从而到达荧光屏后产生三个亮点？

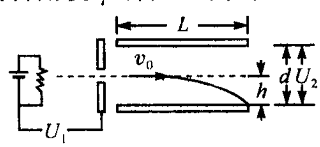


图 6-11-2

解题捷径 12

完全相同的两带电小球，接触再分开，总电荷量平均分配，且电荷守恒。

【范例】 三个完全相同的金属小球 A、B 和 C，A、B 带电后位于相距为 r 的两处，A、B 之间有吸引力，大小为 F。若将 A 球先跟很远处的不带电的 C 球相接触后，再放回原处，然后使 B 球与很远处的 C 球接触后，再放回原处，这时两球的作用力的大小变为$F/2$。由此可知 A、B 原来所带电荷是__________（填“同种”或“异种”）电荷；A、B 所带电量的大小之比是__________。

【精析】 由于 A、B 两球相互吸引，所以，它们原来带同种电荷。设原来的电量（绝对值）分别为 q_A、q_B，则

$$F=k\frac{q_Aq_B}{r^2},$$

A 与 C 接触后，剩余电荷为 $\frac{1}{2}q_A$，B 再与 C 接触后，若 $q_B>\frac{1}{2}q_A$，则剩余电荷为 $\left(\frac{1}{2}q_B-\frac{1}{4}q_A\right)$，$A$、$B$ 间仍为吸引力；若 $q_B<\frac{1}{2}q_A$，则剩余电荷为 $\left(\frac{1}{4}q_A-\frac{1}{2}q_B\right)$，$A$、$B$ 间为斥力。

【同类精练】 两个大小相同、带等量异种电荷的导体小球 A 和 B，彼此间的引力为 F。另一个不带电的与 A、B 大小相同的导体小球 C，先与 A 接触，再与 B 接触，然后移开，这时 A 和 B 之间的作用力为 F'，则 F 与 F'之比为（　　）

A. 8∶3　　B. 8∶1　　C. 1∶8　　D. 4∶1

解题捷径 13

两个带电小球放在光滑的绝缘水平地面上，同时由静止释放，则它们在某时刻满足：$m_1v_1=m_2v_2$；$m_1a_1=m_2a_2$。

【范例】 A、B 两个带正电小球，放在光滑的绝缘水平地面上，A 的质量为 m，B 的质量为 $2m$，它们相距为 d，同时由静止释放，在它们距离为 $2d$ 时，A 的加速度为 a，速度为 v，则（　　）

①此时 B 的速度为 $v/2$　　②此时 B 的速度为 $v/4$

③此时 B 的加速度为 $a/2$　　④此时 B 的加速度为 $a/4$

A. ①④　　B. ②③　　C. ①③　　D. ②④

【精析】 A、B 两球的相互作用力是内力，组成的系统动量守恒，即

$$m_Av_A=m_Bv_B,$$

当 A 的速度为 v 时，B 的速度则为 $v/2$，由牛顿第二定律可知：

$$a=\frac{F}{m}，且\ F_A=F_B,$$

故当 A 的加速度为 a 时，B 的加速度为 $a/2$。

【答案】 C

【同类精练】 A、B 两个带电小球，放在光滑的绝缘水平地面上，A 的质量为 $2m$，B 的质量为 m，它们相距为 d，同时由静止释放，B 的加速度为 a，经过一段时间后，B 的加速度变为 $\frac{a}{4}$，则此时 A、B 间的距离为________；已知此时 B 的速度为 v，则 A 的速度为________。

解题捷径 14

多个带电小球固定在光滑的水平绝缘地面上，同时由静止释放，则它们满足：$m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n=0$。

【范例】 如图 6-14-1 所示，在光滑绝缘的水平地面上固定着质量相等的三个带电小球 a、b、c，三球在一条直线上，若释放 a 球，a 球的初始加速度为 -1m/s^2（向右为正）；若释放 c 球，c 球的初始加速度为 -3m/s^2，若释放 b 球，b 球的初始加速度是（　　）

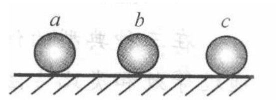


图 6-14-1

A. 4m/s^2　　B. -1m/s^2

C. -4m/s^2　　D. 1m/s^2

【精析】 整体法，三个带电小球所受合力为零，即 $ma_a+ma_b+ma_c=0$，所以 $a_b=4\text{m/s}^2$，方向向右。

【答案】 A

【同类精练】 在一条直线上，从左向右依次固定 A、B、C 三个质量之比为 $m_A:m_B:m_C=1:2:3$ 的带电小球，小球所在的光滑平面是绝缘的。当只将 A 球释放的瞬间，它获得向左的加速度，大小为 5m/s^2；当只将 B 球释放的瞬间，它获得向右的加速度，大小为4m/s^2；那么，当只将 C 球释放的瞬间，它获得向________的加速度，大小为________m/s^2。

解题捷径 15

三个自由电荷因相互作用而平衡，它们的电荷量大小满足：$\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_2q_3}=\sqrt{q_1q_3}$。

【范例】 如图 6-15-1 所示，三个自由电荷仅在静电力作用下平衡，试证明三个电荷的电量关系为：$\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_2q_3}=\sqrt{q_1q_3}$。

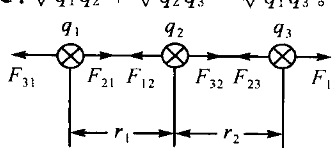


图 6-15-1

【精析】 每个点电荷在两个静电力作用下处于平衡状态，以 q_1q_2 为研究对象，据平衡条件 $F_{31}=F_{21}=F_{32}$ 有

$$k\frac{q_1q_2}{(r_1+r_2)^2}=k\frac{q_1q_2}{r_1^2}=k\frac{q_2q_3}{r_2^2}=C(\text{恒量}),$$

可得 $\sqrt{q_1q_3}=\sqrt{\frac{C}{k}}(r_1+r_2)$；$\sqrt{q_1q_2}=\sqrt{\frac{C}{k}}r_1$；$\sqrt{q_2q_3}=\sqrt{\frac{C}{k}}r_2$，

所以三个电荷的电量关系为：$\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_2q_3}=\sqrt{q_1q_3}$。

【同类精练】 如图 6-15-2 所示，q_1、q_2、q_3 分别表示在一条直线上的三个点电荷，已知 q_1 与 q_2 之间的距离为 L_1，q_2 与 q_3 之间的距离为 L_2，且每个电荷都处于平衡状态。

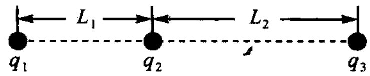


图 6-15-2

(1)若 q_2 为正电荷，则 q_1 为________电荷，q_2 为________电荷。

(2)q_1、q_2、q_3 三者电量大小之比是________：________：________。

解题捷径 16

在三种典型的保守力场——重力场、浮力场和静电场所构成的叠加场中的复杂问题，通过等效和类比方法，转化为类似重力场中的简单问题。

【范例】 如图 6-16-1 所示，在与水平面成 $\alpha=30°$、长为 $l=10\text{m}$ 的光滑木版的顶端，有一个密度为 $\rho=0.4\text{g/cm}^3$ 的小球，从静止开始滑下，然后进入静水中。不计水的粘滞力，求小球在水中能下沉的深度和小球在水中运动的水平距离？

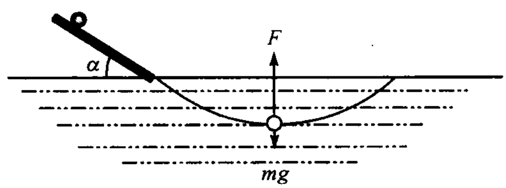


图 6-16-1

【精析】 小球在水中同时受到重力和浮力的作用。将重力和浮力的叠加场等效为一个场，其等效加速度方向竖直向上，大小为

$$g'=\frac{\rho_0Vg-\rho Vg}{\rho V}=1.5g,$$

小球在等效场中做类似斜上抛运动，入水速度即抛射初速度为

$$v_0=\sqrt{2al}=\sqrt{2g\sin\alpha l}=10\text{m/s},$$

下沉深度，即射高为

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g'}=\frac{5}{6}\text{m},$$

小球在水中运动的水平距离，即射程为

$$s=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g'}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{m}。$$

【同类精练】 如图 6-16-2 所示，有一匀强电场，场强为 $E=10^4\text{N/C}$，方向水平向右。一个带正电的小球，质量为 $m=0.04\text{kg}$，电量为 $q=3\times10^{-5}\text{C}$，用长为 $l=0.4\text{m}$ 的细线系在 O 点。为了使小球恰好能在竖直平面内做圆周运动，求应以多大的速度将小球从平衡位置释放？

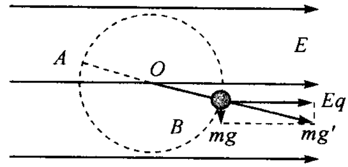


图 6-16-2

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 (1)使放入的 C 点电荷平衡，设 C 点电荷的电量为 q_C，位置离 B 点电荷 x 处，对 q_C 进行受力分析得

$$k\cdot 4Qq/(L+x)^2=kQq/x^2,$$

解得 $x=L$。

(2)要使 B 点电荷平衡，则 C 点电荷一定带正电，对 B 点电荷受力分析得

$$K\cdot 4Q^2/L^2=K\cdot Qq_C/L^2,$$

解得 $q_C=4Q$。

解题捷径 2

【精析】 由本题解题捷径知：D 正确。

解题捷径 3

【精析】 由本题解题捷径知：D 正确。

解题捷径 4

【精析】 因为小球所处的状态是静止的，所以用平衡条件去分析。

小球 m_1 受三个力 T、F、mg 作用，以水平和竖直方向建立坐标，由平衡条件 $\begin{cases}F-T\sin\alpha_1=0,\\ T\cos\alpha_1-m_1g=0,\end{cases}$

$$\tan\alpha_1=\frac{F}{m_1g}=\frac{kq_1q_2}{m_1gr^2}, \quad (1)$$

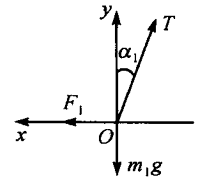


图 6-1

同理，对 m_2 分析得：

$$\tan\alpha_2=\frac{F}{m_2g}=\frac{kq_1q_2}{m_2gr^2}, \quad (2)$$

$\because \alpha_1=\alpha_2$，$\therefore \tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，$\therefore m_1=m_2$，

可见，只要 $m_1=m_2$，不管 q_1、q_2 如何，α_1 都等于 α_2，$\therefore$ 选 C。

讨论：如果 $m_1>m_2$，α_1 和 α_2 的关系怎样？

由(1)和(2)，不管 q_1、q_2 如何，两式中的 F，g 是相等的，$\therefore m_1>m_2$ 时，$\alpha_1<\alpha_2$；反之，$m_1<m_2$ 时，$\alpha_1>\alpha_2$。

解题捷径 5

【精析】 如图 6-2 所示，根据匀强电场的电场线与等势面是平行等间距排列，且电场线与等势面处处垂直，沿着电场线方向电势均匀降低，取 AB 的中点 O，即为三角形的外接圆的圆心，且该点电势为 2V，故 OC 为等势面，MN 为电场线，方向为 $M\rightarrow N$ 方向，$U_{OP}=U_{OA}=\sqrt{3}$V，$=2:\sqrt{3}$，故 $U_{ON}=2$V，N 点电势为零，为最小电势点，同理 M 点电势为 4V，为最大电势点。选 B。

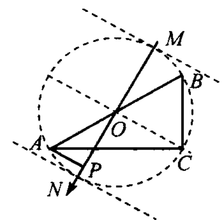


图 6-2

解题捷径 6

【精析】 对于平行板电容器与电源断开，则 Q 不变，d 减小，则 C 增大，由 $C=\frac{Q}{U}$，所以 U 减小。

由 $E=\frac{U}{d}=\frac{4\pi kQ}{\varepsilon S}$，判断 E 不变。

而电势能 $E_P=\varphi_P\cdot q=E\cdot d'q$ 不变化。

解题捷径 7

【精析】 AB 提示：沿电场线的方向电势降低，故 $\varphi_M>\varphi_N$；作等势面的垂线即为电场线，由电场线的疏密知：$E_M>E_N$。

解题捷径 8

【精析】 D 提示：由题意知，电荷在 B 等势面的动能为 10J，故动能和电势能的总和保持 10J；当电荷的电势能为 5J 时，动能为 5J。

解题捷径 9

【精析】 A、B 点关于 O 点对称，电场强度相同，故 A 正确；AB 所在线为等势线，A、

B 两点电势差为零，故 D 正确。

解题捷径 10

【精析】 由规律知：点电荷从 P 到 O 的过程，加速度如何变化不能确定，故 A、B、D 均错。但电荷从 P 到 O 的过程中，电场力做正功，到 O 点的加速度为零，所以速度达最大，故 C 正确。

解题捷径 11

【精析】 对于离子的加速过程有：

$$U_1 q=\frac{1}{2}mv_0^2,$$

对于电子的偏转过程中有：

水平方向：$L=v_0 t$，

竖直方向：$h=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{qU_2}{md}t^2$，

得

$$h=\frac{qU_2L^2}{2dmv_0^2}=\frac{U_2L^2}{4dU_1},$$

偏转角度：$\tan\theta=\frac{v_y}{v_0}=\frac{at}{v_0}=\frac{U_1qL}{dmv_0^2}=\frac{U_1L}{2U_2d}$

由此可见，偏转位移、偏转角度与带电离子的质量和电量无关，即它们不会分为三股，荧光屏只有一个亮点。

解题捷径 12

【精析】 由规律知：接触分开后两球所带电量分别为 $q_1=\frac{q_0}{2}$，$q_2=\frac{q_0}{4}$，距离不变，所以 $\frac{F}{F'}=\frac{8}{1}$，故 B 答案正确。

解题捷径 13

【精析】 由库仑定律知，当 B 的加速度为 a 时，距离为 d，当 B 的加速度为 $\frac{a}{4}$ 时，距离应为 $2d$；由 $m_1v_1=m_2v_2$ 知：当 B 的速度为 v 时，A 的速度为 $\frac{v}{2}$。

解题捷径 14

【精析】 由规律知：$m_Aa_A+m_Ba_B+m_Ca_C=0$，所以，$a_C=-1\text{m/s}^2$。故方向向左，大小为 1m/s^2。

解题捷径 15

【精析】 (1)若 q_2 为正电荷,且每个电荷都处于平衡状态,q_1、q_2 均要带负电荷才能满足要求。

(2)由于三个点电荷都处于平衡状态,因此三个点电荷所在处的合场强均为零,即有

$$k\frac{q_2}{L_1^2}=k\frac{q_3}{(L_1+L_2)^2},k\frac{q_1}{L_1^2}=k\frac{q_3}{L_2^2},k\frac{q_1}{(L_1+L_2)^2}=k\frac{q_2}{L_2^2},$$

以上三式联立整理得

$$q_1:q_2:q_3=\left(\frac{L_1+L_2}{L_2}\right)^2:1:\left(\frac{L_1+L_2}{L_1}\right)^2。$$

解题捷径 16

【精析】 将电场和重力场的叠加场视为一个重力加速度为 g' 的等效重力场。根据小球在平衡位置的平衡条件,则

$$mg'=\sqrt{(mg)^2+(Eq)^2},$$

则等效重力加速度为

$$g'=\sqrt{(mg)^2+(Eq)^2}/m=1.25\text{m/s}^2,$$

小球在等效场中最高点 A 的临界速度为

$$v_A=\sqrt{g'l},$$

根据等效场中类似机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv_B^2=2mg'l+\frac{1}{2}mv_A^2,$$

所以,小球在平衡位置的速度应为

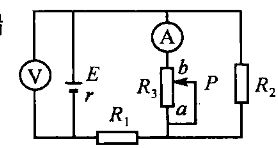
$$v_B=\sqrt{v_A^2+4g'l}=\sqrt{5g'l}=5\text{m/s}。$$

第七章　恒定电流中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：动态直流电路分析：在一个纯电阻直流电路中，如果只有一个电阻阻值发生变化时，与之广义串联（直接串联或间接串联）的其他电阻的电压、电流、功率的变化与这个变化电阻的阻值变化规律相反；与之广义并联（直接并联或间接并联）的其他电阻的电压、电流、功率的变化与这个变化电阻的阻值变化规律相同，即“串反并同”。

【题目】 如图一所示电路中，当变阻器 R_3 的滑动头 P 向 b 端移动时，则（　　）



图一

A. 电压表示数变大，电流表示数变小

B. 电压表示数变小，电流表示数变大

C. 电压表示数变大，电流表示数变大

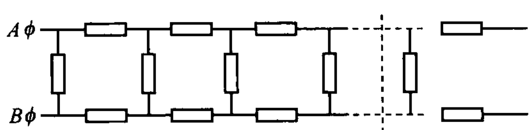
D. 电压表示数变小，电流表示数变小

【精析】 由“串反并同”知：当变阻器 R_3 的滑动头 P 向 b 端移动时，R_3 的电阻值变小，与之串联的电流表的示数变大，与之并联的电压表的示数变小。

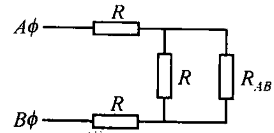
所以，B 正确。

小试二：无限网络割补法求电阻：因为 $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}\,(a>0)$，可等效为 $x=\sqrt{a+x}$，从而可得 $x^2-x-a=0$，所以 $x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$。

【题目】 如图二所示为由相同电阻 R 组成的无限网络，求等效电阻 R_{AB}。



图二



图三

【精析】 根据去掉最左端一个网络，不影响无限网络的等效阻值，可得如图三所示的等效电路

根据电路连接有

$$R_{AB}=2R+\frac{R_{AB}\cdot R}{R_{AB}+R},$$

$$R_{AB}{}^2-2RR_{AB}-2R^2=0,$$

所以，$R_{AB}=(1+\sqrt{3})R$。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

在闭合电路中，当外电路任何一个电阻的增大(或减小)都会引起电路总电阻的增大(或减小)。若电键的通断使串联的用电器增多时，总电阻增大；若电键的通断使并联的支路增多时，总电阻减小。

解题捷径 2

动态直流电路分析：在一个纯电阻直流电路中，如果只有一个电阻阻值发生变化时，与之广义串联(直接串联或间接串联)的其他电阻的电压、电流、功率的变化与这个变化电阻的阻值变化规律相反；与之广义并联(直接并联或间接并联)的其他电阻的电压、电流、功率的变化与这个变化电阻的阻值变化规律相同，即“串反并同”。

解题捷径 3

在直流电路中，当电容器充、放电时，电路中有充放电电流。一旦电路达到稳定状态，电容器在电路中就相当于一个阻值无限大的元件，在电容器处电路可看作是断路，简化时可去掉它。简化后若要求电容器所带电量时，可接在相应的位置上。

解题捷径 4

无限网络割补法求电阻：因为 $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ $(a>0)$，可等效为 $x=\sqrt{a+x}$，从而可得 $x^2-x-a=0$，所以 $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$。

解题捷径 5

在电路中，凡是连接在等电势节点之间的任何电阻或导线，由于其中无电流通过，都可以去掉。在并联支路的等比分点处的电势相等。

解题捷径 6

任何一个混联电路，都是由若干元件跨接在节点上组成，所以只要确定电路中不等电势点的数目、顺序以及各元件所跨接的位置，就可以迅速而正确地作出等效电路。

解题捷径 7

在支直流电路动态分析中，其中支路变化的参量总是大于干路变化的参量，即 $\Delta I_{支}>\Delta I_{干}$；$\Delta U_{支}>\Delta U_{干}$。

解题捷径 8

在闭合电路中，若外电阻不等而输出功率相等，则满足 $r=\sqrt{R_1R_2}$。在电源内阻不变时，若外电阻等于电源内阻时，电源输出功率最大，且 $P_m=\dfrac{E^2}{4r}$。

解题捷径 9

电路故障分析：用电压表与电源并联，若有电压时，再逐段与电路并联，若电压表指针偏转，则该电路中有断点；用电压表与电源并联，若有电压时，再逐段与电路并联，若电压表示数为零时，该电路被短路。

解题捷径 10

在实际使用中，电压表内阻很大，但不是无穷大，电流表内阻很小，但不是零。解题时应把它们看作能显示出本身电压或电流的电阻器，电流表的读数表示通过电流表的电流，电压表的读数表示加在电压表两端的电压，故可用欧姆定律进行分析和计算。

解题捷径 11

滑动变阻器分压和限流接法的选择：(1)一般情况或没有特别说明的情况下，由于限流电路能耗较小，结构连接简单，应优先考虑限流连接方式；(2)$R_{变}>R_x$ 或 $R_{变}\approx R_x$，考虑选用限流连接方式；(3)若采用限流电路，电路中的最小电流仍超过用电器的额定电流时，必须选用分压电路；(4)当用电器电阻远大于滑动变阻器全电阻值，且实验要求的电压变化范围较大(或要求测量多组实验数据)时，必须选用分压电路；(5)要求某部分电路的电压从零开始可连续变化时，必须选用分压电路。

解题捷径 12

校对改装电流表时，改装表应与量程接近的标准电流表串联；校对改装电压表时，改装表应与量程接近的标准电压表并联。电路中的电流最小值不能大于校对的起始最小值，电路中的电流最大值不能小于改装表的最大量程，电压表相同。

解题捷径 13

电流表内外接的选择：(1)内大，即电流表内接，适于测大电阻，即 $R_x\gg R_A$，$R_{测}>R_{真}$，

$R_x>\sqrt{R_AR_V}$；(2)外小，即电流表外接，适于测小电阻，即 $R_x \ll R_V$，$R_{测}<R_{真}$，$R_x<\sqrt{R_AR_V}$；(3)待测电阻范围未知时，可用试探法测量，即电压表明显变化时，用电流表外接法误差小；电流表读数明显变化时，用电流表内接法误差小。

解题捷径 14

仪表的读数方法：(1)最小分度是"1"的仪器，测量误差出现在下一位，下一位按十分之一估读；(2)最小分度是"2"、"5"的仪器，测量误差出现在同一位上，同一位分别按二分之一或五分之一估读；(3)欧姆表、待测电阻的阻值分别为表盘读数乘上倍数，为减小误差，指针应指表盘中央位置附近。

解题捷径 15

连接在电路中的用电器，若满足用电器的额定电压，则它的额定电流、额定功率也同时满足，即三额定同时满足。

解题捷径 16

在闭合电路中，电源的伏安特性曲线和外电阻的伏安特性曲线的交点叫外电阻的工作点。工作点对应的电压和电流就是外电阻在此状态下的工作电压和电流。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

在闭合电路中，当外电路任何一个电阻的增大(或减小)都会引起电路总电阻的增大(或减小)。若电键的通断使串联的用电器增多时，总电阻增大；若电键的通断使并联的支路增多时，总电阻减小。

【范例】 在如图 7-1-1 所示的电路中，在滑动变阻器 R_2 的滑动触头向左移动的过程中，电压表和电流表的示数如何变化？

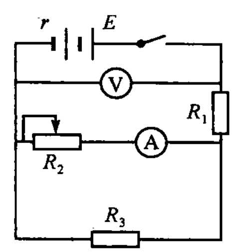


图 7-1-1

【精析】 滑动变阻器 R_2 的滑动触头向左移动时，有效电阻增大，电路总电阻增大，总电流减小，$U=E-Ir$，所以电压表的示数变大，$U_3=U-IR_1$ 增大，I_3 增大，所以 $I_2=I_1-I_3$ 减小，所以电流表的示数变小。

【同类精练】 如图 7-1-2 所示，直流电源电动势为 E，内阻为 r，与滑动变阻器 R 串联，给一组并联电灯供电，下列说法中正确的是(　　)

A. 当电灯闭合盏数增多时，R 保持不变，电源内发热功率变小

B. 当电灯闭合盏数减少时，R 保持不变，每盏灯变亮

C. 当电灯闭合盏数增多时，要保持灯亮度不变，变阻器滑片要向右移动

D. 当电灯闭合盏数减少时，要保持灯亮度不变，变阻器滑片要向左移动

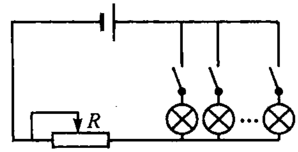


图 7-1-2

解题捷径 2

动态直流电路分析：在一个纯电阻直流电路中，如果只有一个电阻阻值发生变化时，与之广义串联（直接串联或间接串联）的其他电阻的电压、电流、功率的变化与这个变化电阻的阻值变化规律相反；与之广义并联（直接并联或间接并联）的其他电阻的电压、电流、功率的变化与这个变化电阻的阻值变化规律相同，即“串反并同”。

【范例】 如图 7-2-1 所示电路中，当变阻器 R_3 的滑动头 P 向 b 端移动时，则（　　）

A. 电压表示数变大，电流表示数变小

B. 电压表示数变小，电流表示数变大

C. 电压表示数变大，电流表示数变大

D. 电压表示数变小，电流表示数变小

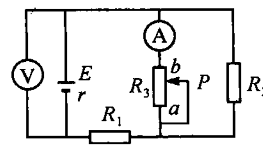


图 7-2-1

【精析】 由“串反并同”知：当变阻器 R_3 的滑动头 P 向 b 端移动时，R_3 的电阻变小，与之串联的电流表的示数变大，与之并联的电压表的示数变小。

所以，答案 B 正确。

【同类精练】 如图 7-2-2 所示电路中，当变阻器 R 的滑动头 P 从 a 向 b 端移动时，则（　　）

A. 电压表 V_1 的示数变小，电压表 V_2 的示数变小

B. 电压表 V_1 的示数变小，电压表 V_3 的示数变小

C. 电压表 V_2 的示数变小，电压表 V_3 的示数变小

D. 电压表 V_2 的示数变小，电压表 V_3 的示数变大

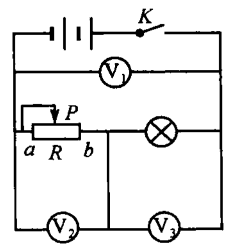


图 7-2-2

解题捷径 3

在直流电路中，当电容器充、放电时，电路中有充放电电流。一旦电路达到稳定状态，电容器在电路中就相当于一个阻值无限大的元件，在电容器处电路可看作是断路，简化时可去掉它。简化后若要求电容器所带电量时，可接在相应的位置上。

【范例】 在如图 7-3-1 所示的电路中，电源的电动势 $E=3.0\text{V}$，内阻 $r=1.0\Omega$；电阻 $R_1=10\Omega$，$R_2=10\Omega$，$R_3=30\Omega$，$R_4=35\Omega$；电容器的电容 $C=100\mu\text{F}$，电容器原来不带电，求

接通开关 S 后流过 R_4 的总电量。

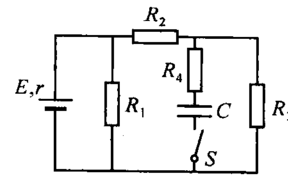


图 7-3-1

【精析】 由电阻的串并联得，闭合电路的总电阻为

$$R=R_1(R_2+R_3)/(R_1+R_2+R_3)+r,$$

由欧姆定律得，通过电源的电流 $I=E/R$，

电源的端电压 $U=E-Ir$，

电阻 R_3 两端的电压 $U'=R_3U/(R_2+R_3)$，

通过 R_4 的总电量就是通过电容器的电量 $Q=CU'$，

代入数据解得，$Q=2.0\times10^{-4}\text{C}$。

【同类精练】 如图 7-3-2 所示，$E=10\text{V}$，$R_1=4\Omega$，$R_2=6\Omega$，$C=30\mu\text{F}$，电池内阻可忽略。

(1)闭合开关 K，求稳定后通过 R_1 的电流。

(2)然后将开关 K 断开，求在这之后流过 R_1 的总电量。

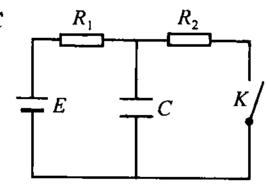


图 7-3-2

解题捷径 4

无限网络割补法求电阻：因为 $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}\,(a>0)$，可等效为 $x=\sqrt{a+x}$，从而可得 $x^2-x-a=0$，所以 $x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$。

【范例】 如图 7-4-1 所示为由相同电阻 R 组成的无限网络，求等效电阻 R_{AB}。

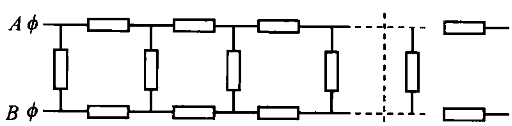


图 7-4-1

【精析】 根据去掉最左端一个网络，不影响无限网络的等效阻值，可得图 7-4-2 所示的等效电路，

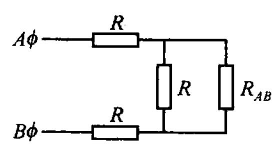


图 7-4-2

根据电路连接有

$$R_{AB}=2R+\frac{R_{AB}\cdot R}{R_{AB}+R}$$

$$R_{AB}{}^2-2RR_{AB}-2R^2=0$$

所以，$R_{AB}=(1+\sqrt{3})R$。

【同类精练】 如图 7-4-3 所示为一个由相同电阻组成的无限网络。求在 CD 间接入一个多大电阻 R_x 才能使总电阻 R_{AB} 的大小与网络无关？

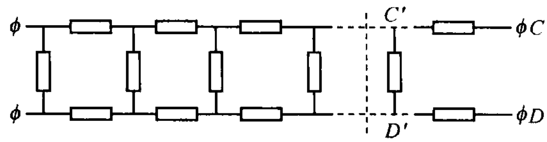


图 7-4-3

解题捷径 5

在电路中，凡是连接在等电势节点之间的任何电阻或导线，由于其中无电流通过，都可以去掉。在并联支路的等比分点处的电势相等。

【范例】 如图 7-5-1 所示，当并联支路上分点 a、b 两侧的电阻之比相等，即$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$，试证明 $U_a=U_b$。

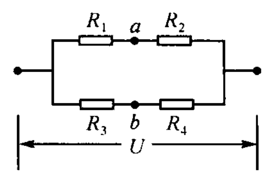


图 7-5-1

【精析】 由$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$知$\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{R_3}{R_3+R_4}$，

根据串联分压原理有 $\frac{U_1}{U}=\frac{U_3}{U}$，

所以，电压 $U_1=U_3$，则 $U_a=U-U_1$，$U_b=U-U_3$，$U_a=U_b$。

【同类精练】 如图 7-5-2 甲所示，为在温度为 10℃左右的环境中工作的某自动恒温箱的原理简图，箱内的电阻 $R_1=20\text{k}\Omega$；$R_2=10\text{k}\Omega$；$R_3=40\text{k}\Omega$；R_t 为热敏电阻。它的电阻随温度变化的图线如图所示。当 a、b 端电压 $U_{ab}<0$ 时，电压鉴别器会令开关 S 接通，恒温箱内的电热丝发热，使箱内温度升高；当 $U_{ab}>0$ 时，电压鉴别器使 S 断开，停止加热，恒温箱内的温度恒定在________℃。

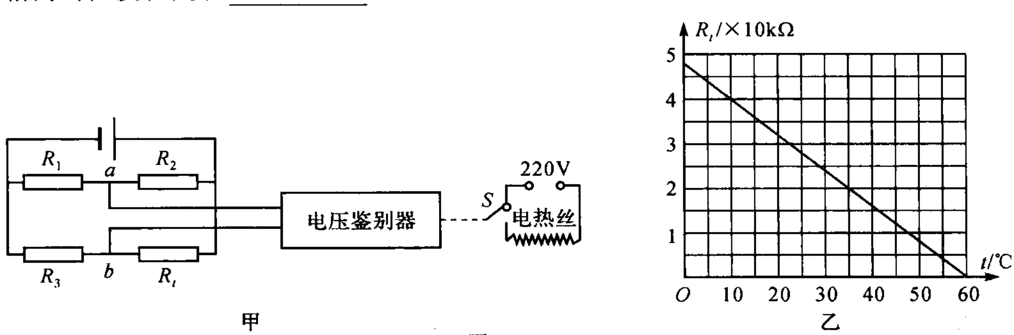


图 7-5-2

解题捷径 6

任何一个混联电路，都是由若干元件跨接在节点上组成，所以只要确定电路中不等电势点的数目、顺序以及各元件所跨接的位置，就可以迅速而正确地作出等效电路。

【范例】 如图 7-6-1 所示，12 只阻值均为 R 的电阻构成一个有限网络，求 ab 间的电阻。

【精析】 相对 a 与 b、c 与 d、e 与 f、h 与 i 为对称轴，所以轴上每个点如 h、o、i 的电势相等，即 $U_h=U_o=U_i$。因此，可以将连接在三点之间的两个电阻去掉，得到有直观串、并联关系的等效电路，如图 7-6-2 所示，

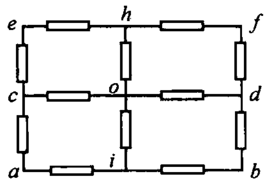


图 7-6-1

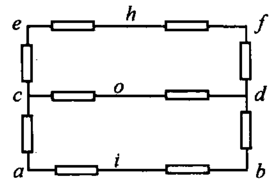


图 7-6-2

$$R_{cd}=\frac{4R\times 2R}{4R+2R}=\frac{4}{3}R,$$

而 R 是由($R_{cd}+2R$)与 $2R$ 的电阻并联而成，所以

$$R_{ab}=\frac{(R_{cd}+2R)\times 2R}{R_{cd}+2R+2R}=\frac{5}{4}R。$$

【同类精练】 如图 7-6-3 所示，由六段条体组成三棱锥框架，每段条体的电阻均为 $r=10\Omega$，求 A、B 两点之间的电阻 R 是多少？

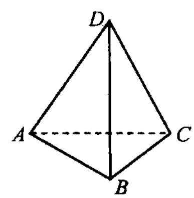


图 7-6-3

解题捷径 7

在支直流电路动态分析中，其中支路变化的参量总是大于干路变化的参量，即 $\Delta I_{支}>\Delta I_{干}$；$\Delta U_{支}>\Delta U_{干}$。

【范例】 如图 7-7-1 所示的电路中，滑动变阻器的滑片 P 从 a 滑向 b 的过程中，三只理想电压表的示数变化的绝对值分别为 ΔU_1、ΔU_2、ΔU_3，下列各值可能出现的是(　　)

A.$\Delta U_1=3V,\Delta U_2=2V,\Delta U_3=1V$

B. $\Delta U_1=1V,\Delta U_2=3V,\Delta U_3=2V$

C. $\Delta U_1=0.5V,\Delta U_2=1V,\Delta U_3=1.5V$

D. $\Delta U_1=0.2V,\Delta U_2=1V,\Delta U_3=0.8V$

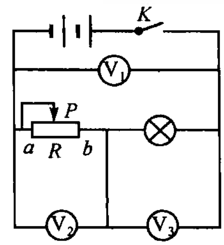


图 7-7-1

【精析】 与动态电阻直接并联的电压表Ⓥ₂的变化量最大，而接在干路中的电压表Ⓥ₁的变化量最小，且总的变化量满足一定的等量关系，则符合要求的选项应是 B、D。

【同类精练】 如图 7-7-2 所示的电路中，观察三只小灯泡亮度变化和两只电压表示数变化情况，如果滑动变阻器的触片 P 由 a 端滑至 b 端，电压表Ⓥ₁示数变化的绝对值为 ΔU_1，电压表Ⓥ₂示数变化的绝对值为 ΔU_2，则下列说法中正确的有(　　)

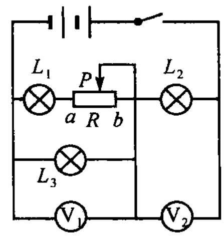


图 7-7-2

A. L_1、L_3 变暗，L_2 变亮

B. L_3 变暗，L_1、L_2 变亮

C. $\Delta U_1<\Delta U_2$

D. $\Delta U_1>\Delta U_2$

解题捷径 8

在闭合电路中，若外电阻不等而输出功率相等，则满足 $r=\sqrt{R_1R_2}$。在电源内阻不变时，若外电阻等于电源内阻时，电源输出功率最大，且 $P_m=\dfrac{E^2}{4r}$。

【范例】 将四个相同的电动势为 1.5V，内阻为 0.25Ω 的电池串联起来，对负载电阻 R 供电，负载电阻 R 上获得功率为 8W，那么 R 的电阻值可能为(　　)

A. 0.5Ω　　B. 2.1Ω　　C. 1.5Ω　　D. 2Ω

【精析】 依题意，$r_{总}=4\times0.25=1\Omega$，由 $r=\sqrt{R_1R_2}=1$ 得 $R_1R_2=1$，$\therefore R_1=0.5\Omega,R_2=2\Omega$。

所以答案应选 A、D。

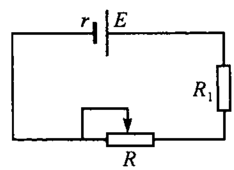


图 7-8-1

【同类精练】 在如图 7-8-1 所示的电路中，已知电源电动势 $E=3V$，内阻 $r=1\Omega$，$R_1=2\Omega$，滑动变阻器 R 的阻值可连续增大，求：滑动变阻器 R 消耗的最大功率？

解题捷径 9

电路故障分析：用电压表与电源并联，若有电压时，再逐段与电路并联，若电压表指针偏转，则该电路中有断点；用电压表与电源并联，若有电压时，再逐段与电路并联，若电压表示数为零时，该电路被短路。

【范例】 图 7-9-1 为一电路板的示意图，a、b、c、d 为接线柱，a、d 与 220V 的交流电源连接，ab 间、bc 间、cd 间分别连接一个电阻。现发现电路中没有电流，为检查电路故障，用一交流电压表分别测得 b、d 两点间以及 a、c 两点间的电压均为 220V。由此可知（　　）

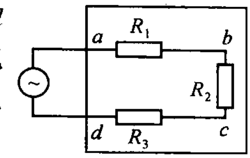


图 7-9-1

A. ab 间电路通，cd 间电路不通

B. ab 间电路不通，bc 间电路通

C. ab 间电路通，bc 间电路不通

D. bc 间电路不通，cd 间电路通

【精析】 同检查直流电路故障方法相同：(1)电路中无电流即 $I=0$ 时，任何电阻两端均无电压；(2)电压表有示数，说明电压表所测两点一定与电源接通。b、d 间电压为 220V，说明 ab 间通路，a、c 间电压为 220V，说明 cd 通路。电路中又无电流，说明一定是 bc 断路。应选 C、D。

【同类精练】 如图 7-9-2 所示的电路中，电源电动势为 6V，当开关 K 接通后，灯泡 L_1 和 L_2 都不亮，用电压表测得各部分电压是 $U_{ab}=6V$，$U_{ad}=0V$，$U_{cd}=6V$，由此可断定（　　）

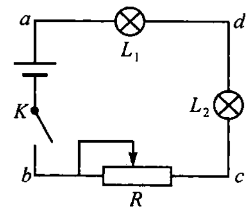


图 7-9-2

A. L_1 和 L_2 的灯丝都烧断了

B. L_1 的灯丝烧断了

C. L_2 的灯丝烧断了

D. 变阻器 R 断路

解题捷径 10

在实际使用中，电压表内阻很大，但不是无穷大，电流表内阻很小，但不是零。解题时应把它们看作能显示出本身电压或电流的电阻器，电流表的读数表示通过电流表的电流，电压表的读数表示加在电压表两端的电压，故可用欧姆定律进行分析和计算。

【范例】 某电压表的内阻在 20kΩ～50kΩ 之间，现要测量其内阻，实验室提供下列可选用的器材：(1)待测电压表Ⓥ(量程 3V)；(2)电流表A_1(量程 200μA)；(3)电流表A_2(量程 5μA)，滑动电阻器 R(最大阻值 1kΩ)；(4)电源 E(电动势 4V)；(5)电键。试问：在所提供的电流表中，应选用__________；为了尽量减少误差，要求测多组数据。试画出符合要求的实验电路图。

【精析】 要测量电压表内阻，需测量 R_1 两端的电压和通过 R_V 的电流，R_V 两端的电压可由伏特表的读数得到，为此需给 R_1 串联一个电流表。由于被测电压表的阻值远大于滑动电阻器的总电阻，范例中又要求多测几组数据，故本题只能选用分压电路。在电路选用分压电路时，则通过 R_V 的最大电流为

$$I=\frac{3\text{V}}{20\times10^{-3}\Omega}=0.15\times10^{-3}\text{A}=150\mu\text{A},$$

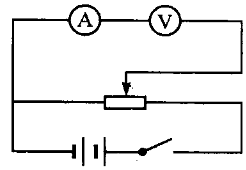


图 7-10-1

故从安全出发，电流表应选Ⓐ₁。这样，本题的电路图应如图7-10-1所示。

【同类精练】 从下列器材中选出适当的器材，设计测量电路来测量电流表A_1的内阻 r_1，要求方法简捷，有尽可能高的测量精度，并能测得多组数据。

待测电流表A_1，量程 100mA，内阻 r_1 约为 40Ω。

电流表A_2，量程 500μA，内阻 r_2 为 750Ω。

电压表Ⓥ，量程 10V，内阻 r_3 为 10kΩ。

电阻 R_1，阻值约 100Ω，作为保护电阻用。

滑动变阻器 R_2，总阻值约为 50Ω。

电源 E，电动势为 1.5V，内阻很小。

此外还有电键 K 和导线若干。

(1)画出电路图，标明所用器材代号。(2)若选测量数据中的一组来计算电流表A_1的内阻，则所用的表达式为 $r_1=$__________。式中各符号意义是__________。

解题捷径 11

滑动变阻器分压和限流接法的选择：(1)一般情况或没有特别说明的情况下，由于限流电路能耗较小，结构连接简单，应优先考虑限流连接方式；(2)$R_{变}>R_x$ 或 $R_{变}\approx R_x$，考虑选用限流连接方式；(3)若采用限流电路，电路中的最小电流仍超过用电器的额定电流时，必须选用分压电路；(4)当用电器电阻远大于滑动变阻器全电阻值，且实验要求的电压变化范围较大(或要求测量多组实验数据)时，必须选用分压电路；(5)要求某部分电路的电压从零开始可连续变化时，必须选用分压电路。

【范例】 用伏安法测量某电阻 R_x 的阻值，现有器材如下：

A. 待测电阻 R_x：范围在 5—8Ω，额定功率 1W

B. 电流表A_1：量程 0—0.6A(内阻 0.2Ω)

C. 电流表A_2：量程 0—3A(内阻 0.05Ω)

D. 电压表Ⓥ$_1$:量程 0—3V(内阻 3kΩ)

E. 电压表Ⓥ$_2$:量程 0—15V(内阻 15kΩ)

F. 滑动变阻器 R:0—100Ω

G. 蓄电池:电动势 12V

H. 导线,电键

为了较准确地测量,并保证器材安全,电流表应选__________,电压表应选_________,并画出电路图。

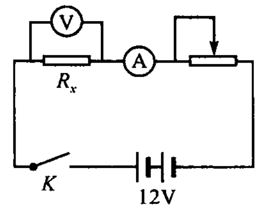


图 7-11-1

【精析】 该题既要选择线路结构,又要选择仪器。先确定测量电路,额定电压 $U_m=\sqrt{PR_x}=\sqrt{8}\text{V}\approx2.8\text{V}$,应选电压表Ⓥ$_1$。额定电流 $I_m=\sqrt{\frac{P}{R_x}}=\sqrt{\frac{1}{5}}\text{A}\approx0.45\text{A}$,应选电流表Ⓐ$_1$。由 $\sqrt{R_AR_V}=24.5\Omega>R_x$ 知,应选外接法,再确定控制电路。由 $R=100\Omega>10R_x$ 知,应选择限制方式电路,其电路图如图 7-11-1 所示。

【同类精练】 量程为 3V 的电压表,其内阻约为 3kΩ,实验室中现有器材如下:

电池 E:电动势约为 6V,内阻约为 1Ω

电流表Ⓐ$_1$:量程 1.0mA,内阻约为 400Ω

电流表Ⓐ$_2$:量程 10mA,内阻约为 40Ω

滑动变阻器 R_1:总阻值 1700Ω,额定电流 0.5A

滑动变阻器 R_2:总阻值 50Ω,额定电流 1A

开关、导线若干。

(1)要求画出电路图,并标出所用器材的代号。

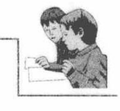
(2)实验中应测量的物理量__________。

(3)实验中测出电压表内阻的测量式为__________。

解题捷径 12

校对改装电流表时,改装表应与量程接近的标准电流表串联;校对改装电压表时,改装表应与量程接近的标准电压表并联。电路中的电流最小值不能大于校对的起始最小值,电路中的电流最大值不能小于改装表的最大量程,电压表相同。

【范例】 有一改装的电流表Ⓐ$_1$,需要与一标准电流表Ⓐ$_2$进行核对,采用如图 7-12-1 所示的电路,其中 E 为电源,R_0 为一限流电阻,R 为一可变电阻,S 为开关,限流电阻能够限制住电路中的最大电流,使之不超出电流表的量程过多,从而对电流表起保护作用。实



验中已有的器材及其规格如下：

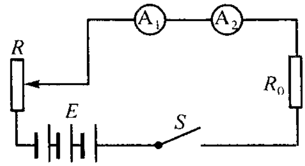


图 7-12-1

蓄电池 E（电动势 6V，内阻约为 0.3Ω），改装的电流表Ⓐ₁（量程 0～0.6A，内阻约为 0.10Ω），标准电流表Ⓐ₂（量程 0～0.6A～3A，内阻不超过 0.04Ω）

实验中备用的电阻器及其规格如下：

A. 固定电阻（阻值 8Ω，额定电流 2A）

B. 固定电阻（阻值 15Ω，额定电流 2A）

C. 滑动变阻器（阻值范围 0～20Ω，额定电流 2A）

D. 滑动变阻器（阻值范围 0～200Ω，额定电流 2A）

已知两个表的刻度盘上都将量程均分为 6 个大格，要求从 0.1A 起对每条刻线一一进行核对，为此，从备用的电阻器中，R_0 应选用__________，R 应选用__________。

【精析】 若选用阻值 15Ω 的固定电阻时，电路中的最大电流为 $I_{\max}=\frac{6}{15+0.3+0.04}$A $=0.38$A，不能保证 0.6A 的全部刻线校对，所以，固定电阻应选 8Ω；若选用阻值范围 0～20Ω的滑动变阻器，电路中的最小电流为 $I_{\min}=\frac{6}{20+0.3+0.04+8}$A $=0.21\text{A}>0.1\text{A}$，无法从 0.1A 开始校对，所以，滑动变阻器应选阻值范围 0～200Ω 的。

答案：A；D。

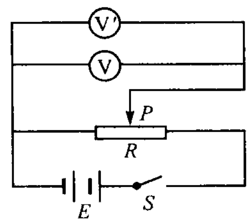


图 7-12-2

【同类精练】 如图 7-12-2 所示是校对改装后的电压的电路，要求对改装后的电表从零开始校对，那么（　　）

A. 标准电压表的量程应大于或等于改装后电压表的量程

B. 在闭合电键前，应将滑动变阻器的滑片置于最左端

C. 校对电路图可以改成两电压表串联

D. 校对电路中的滑动变阻器可以连接成限流电路

解题捷径 13

电流表内外接的选择：(1) 内大，即电流表内接，适于测大电阻，即 $R_x \gg R_A$，$R_{测}>R_{真}$，$R_x>\sqrt{R_AR_V}$；(2) 外小，即电流表外接，适于测小电阻，即 $R_x \ll R_V$，$R_{测}<R_{真}$，$R_x<\sqrt{R_AR_V}$；(3) 待测电阻范围未知时，可用试探法测量，即电压表明显变化时，用电流表外接法误差小，电流表读数明显变化时，用电流表内接法误差小。

【范例】 用伏安法测量电阻，可采用如图 7-13-1 所示甲、乙两种接法。若所用伏特表内阻为 5000Ω，安培表为 0.5Ω。

(1) 当测量 100Ω 左右的电阻时，宜采用__________电路；

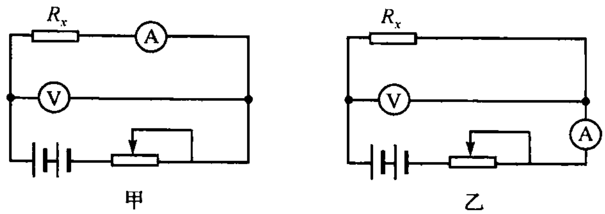


图 7-13-1

(2)现采用甲电路测量某电阻的阻值时，两电表的读数分别为 10V，0.11A，则此电阻的测量值为________Ω，真实值为________Ω。

【精析】 (1)$\frac{R_V}{R_x}=\frac{5000}{100}=50$，$\frac{R_x}{R_A}=\frac{100}{0.5}=200$，与 $R_x \ll R_V$ 和 $R_x \gg R_A$ 两个条件相比，显然待测电阻更符合 $R_x \gg R_A$，这说明因安培表的分压造成的误差要比因伏特表的分流造成的误差小，所以选甲图。

(2)$R_{测}=\frac{U_{测}}{I_{测}}=\frac{10}{0.11}\Omega=90.91\Omega$，

$R_{真}=R_{测}-R_A=90.91-0.5=90.41\Omega$。

答案：(1)甲　(2)90.91Ω；90.41Ω

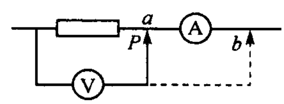


图 7-13-2

【同类精练】 如图 7-13-2 所示，用伏安法测电阻时，如果不知道待测电阻的大概阻值时，为了选择正确的电路以减少误差，可将电压表一个接头分别在 a、b 两点接触一下，如果安培表读数没有显著变化，则 P 应接在________处。如果伏特表读数没有显著变化，则 P 应接在________处。

解题捷径 14

仪表的读数方法：(1)最小分度是“1”的仪器，测量误差出现在下一位，下一位按十分之一估读；(2)最小分度是“2”、“5”的仪器，测量误差出现在同一位上，同一位分别按二分之一或五分之一估读；(3)欧姆表、待测电阻的阻值分别为表盘读数乘上倍数，为减小误差，指针应指表盘中央位置附近。

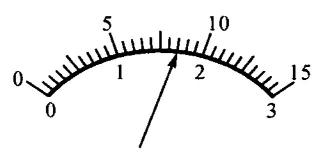
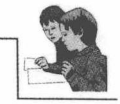


图 7-14-1

【范例】 如图 7-14-1 所示，为学生实验用的有两个量程的电压表刻度盘，当使用较小量程时，测量电压最大值不得超过________V，每小格表示________V，下列选项中正确的是(　　)

A. 3；0.5　　B. 3；0.1

C. 15；0.5　　D. 15；0.1



【精析】 使用较小量程时，测量电压的最高值为3V，又因为10个小格表示1V，所以每小格表示0.1V。选B。

上题中若使用较大量程，则表盘上每小格表示值和指针指示数分别为(　　)

A. 0.1V, 1.7V　　B. 0.1V,5.2V　　C. 0.5V,8.5V　　D. 0.5V,5.7V

【精析】 在使用较大量程时，10个小格表示5V，所以每小格表示0.5V。指针示数为$5+7.0\times0.5=8.5$V，所以，选C。

【同类精练】 如图7-14-2所示是学生实验用的有两个量程的电流表刻度盘，当用“+”和“-0.6”两接线柱时，能测量的最大电流是________A，对应刻度盘上每一小格代表________A；图中表针示数为__________A。当使用电流表的“+”和“-3”两个接线柱时，对应刻度盘上每一小格代表__________A，图中表针示数为__________A。

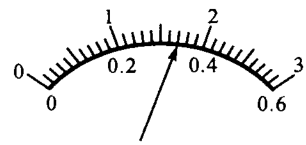


图7-14-2

解题捷径15

连接在电路中的用电器，若满足用电器的额定电压，则它的额定电流、额定功率也同时满足，即三额定同时满足。

【范例】 两个用电器的额定电压都是6V，它们的电阻分别为$R_1=60\Omega$，$R_2=20\Omega$。把这两个用电器并联后接在电压为8V的电路中，要使它们正常工作，应附加多大电阻？怎样连接，功率至少需多大？

【精析】 两个用电器的额定电压都是6V，并联后接入6V的电路上，就能正常工作；而今电路电压是8V，大于6V，故应串联一个分压电阻R_x，使其分担2V的电压，这个附加电阻的电流应等于通过两个用电器的电流之和。

$$I_{1m}=\frac{U_{1m}}{R_1}=\frac{6}{60}=0.1\text{A},$$

由“三额定同时满足”

$$I_{2m}=\frac{U_{2m}}{R_2}=\frac{6}{20}=0.3\text{A},$$

$$I=I_{1m}+I_{2m}=0.4\text{A},$$

所以，$R_x=\frac{U_x}{I}=\frac{8-6}{0.4}=5\Omega$，

即应串联一个5Ω的分压电阻，其功率$P_x=\frac{U_x^2}{R_x}=\frac{2^2}{5}=0.8$W。

【同类精练】 已知一个电阻的额定功率为0.5W，用多用电表粗测其阻值约为18Ω，现用伏安法精确测量它的阻值，实验器材有：A. 电流表(量程0～200mA，内阻20Ω)；B. 电流表(量程0～3A，内阻0.1Ω)；C. 电压表(量程0～3V，内阻10kΩ)；D. 电压表(量

程0～15V，内阻 30kΩ)；E. 滑动变阻器(0～20Ω，额定电流 2A)；F. 输出电压为 12V 的直流电源。

(1)实验中电流表应选用__________；电压表应选用__________。(填字母符号)

(2)画出实验电路图。

解题捷径 16

在闭合电路中，电源的伏安特性曲线和外电阻的伏安特性曲线的交点叫外电阻的工作点。工作点对应的电压和电流就是外电阻在此状态下的工作电压和电流。

【范例】 小灯泡灯丝的电阻会随温度的升高而变大。某同学为研究这一现象，用实验得到如下数据(I 和 U 分别表示小灯泡上的电流和电压)：

I/A	0.12	0.21	0.29	0.34	0.38	0.42	0.45	0.47	0.49	0.50
U/V	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00

(1)画出实验电路图。可用的器材有：电压表、电流表、滑动变阻器(阻值范围 0—10Ω)、电源、小灯泡、电键、导线若干。

(2)在图 7-16-1 中画出小灯泡的 U—I 曲线。

(3)如果某一电池的电动势是 1.5V，内阻是 2.0Ω。问：将本题中的灯泡接在该电池两端，小灯泡的实际功率是多少？(简要写出求解过程；若需作图，可直接画在第(2)小题的方格图中)

【精析】 (1)见图 7-16-2；(2)见图 7-16-3

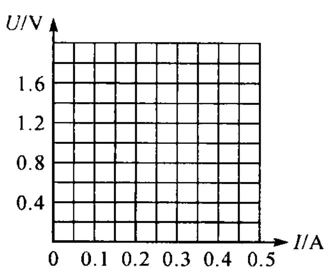


图 7-16-1

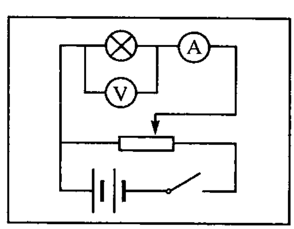


图 7-16-2

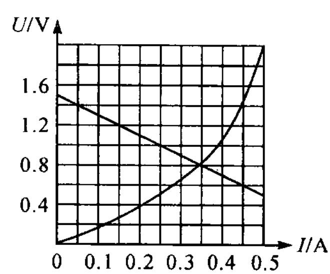


图 7-16-3

(3)作出 $U=E-Ir$ 图线，两条图线的交点为小灯泡的工作点，可得小灯泡的工作电流为 0.35A，工作电压为 0.80V，因此小灯泡实际功率为 0.28W。

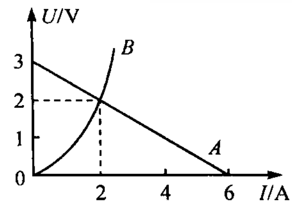


图 7-16-4

【同类精练】 如图 7-16-4 所示，直线 A 为电源的 $U—I$ 图线，曲线 B 为灯泡电阻的 $U—I$ 图线，用该电源和小灯泡组成闭合电路时，电源的输出功率和电路的总功率分别是(　　)

A. 4W，8W　　B. 2W，4W

C. 4W，6W　　D. 2W，3W

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 当电灯闭合盏数增多时，R 保持不变，总电阻变小，电流变大，电源内部发热功率变大，A 错。当电灯闭合盏数减少时，R 保持不变，总电阻变大，电流变小，输出电压变大，灯变亮，B 正确。当电灯闭合盏数增多时，总电阻变小，要保持灯亮度不变，变阻器滑片要向左移动，所以 C、D 错。所以应选 B。

解题捷径 2

【精析】 由“串反并同”知：电压表 V_1 和电压表 V_2 与 R 并联，电阻变小，所以，电压表 V_1 和电压表 V_2 的示数都变小，A 正确。

电压表 V_3 的示数是与 R 串联的用电器灯的电压，所以，它的电压应增大，即电压表 V_3 的示数变大，所以，D 答案正确。故应选 A、D 选项。

解题捷径 3

【精析】 电容器稳定相当于断路，则

(1)$I_1=I_{总}=\dfrac{E}{R_1+R_2}=1\text{A}$。

(2)断开 K 前，电容器相当于和 R_2 并联，电压为 I_1R_2，储存的电量为 $q_1=CI_1R_2$；断开 K 稳定后，总电流为零，电容器上电压为 E，储存电量为 $q_2=CE$，所以通过 R_1 的电量为：$\Delta q=q_2-q_1=C(E-I_1R_2)=1.2\times10^{-4}\text{C}$。

解题捷径 4

【精析】 为了使 R_x 接入后，R_{AB} 与网络无关，则右端的一个网络与 R_x 连接后的等效电阻应仍为 R_x，其等效电路如图 7-1 所示。根据串、并联关系，有

$$R_x=\frac{R(2R+R_x)}{R+(2R+R_x)},\ R_x^2+2RR_x-2R^2=0,$$

所以，$R_x=(\sqrt{3}-1)R$。

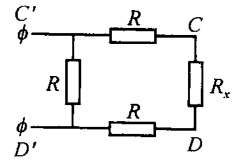


图 7-1

解题捷径 5

【精析】 当$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_t}$，即 $R_t=20\text{k}\Omega$ 时，$U_{ab}=0$，由乙图可知温度为 35℃。

解题捷径 6

【精析】 首先将条体框架压成平面框架，然后去掉等势点 C、D 间的电阻，得到具有直观串并联关系的等效电路。A、B 之间的定电阻为 $R_{AB}=\frac{1}{2}r=5\Omega$。

解题捷径 7

【精析】 由“串反并同”规律知，灯 L_1、L_2 与滑动变阻器串联，L_3 与滑动变阻器并联，而滑动变阻器的有效阻值变小，所以灯 L_1、L_2 都变亮，灯 L_3 变暗。B 答案正确。

在支直流电路动态分析中，其中支路变化的参量总是大于干路变化的参量，所以 $\Delta U_1>\Delta U_2$。D 答案正确。选 BD。

解题捷径 8

【精析】 把 R_1 看作电源的内阻，当 $R=R_1+r$ 时，R 消耗的功率最大，则

$$P_R(\text{最大})=\frac{E^2}{4(R_1+r)}=\frac{3^2}{4(2+1)}=0.75\text{W}。$$

解题捷径 9

【精析】 由题意可知电源是有电压的，由 $U_{ad}=0$ 可知，a、d 间没有断点；由 $U_{ab}=6\text{V}$ 和 $U_{cd}=6\text{V}$ 知外电路中的 a、b 间有断点和外电路中的 c、d 间有断点；取公共部分，可知灯 L_2 断路，由灯 L_2 两端电压不为零可知灯 L_1 与变阻器 R 是通的。应选 C。

解题捷径 10

【精析】 由题给数据可知，被测电流表Ⓐ₁两端允许加的最大电压为：$10\times10^{-3}\times40\text{V}$，远小于所给电压表的量程 10V，因而不能用电压表测电压。

而内阻已知的电流表Ⓐ₂两端允许加的最大电压为 $500\times10^{-6}\times750\text{V}$，与 0.4V 接近，所以可把Ⓐ₂与Ⓐ₁并联，利用电流表的电流与电阻成反比进行测量。

如图 7-2 所示。

另由题所给信息知：为了有尽可能高的测量精度，并能测得多组数据，所以滑动变阻

器应采用分压接法，同时将 R_1 作为保护电阻与Ⓐ₁、Ⓐ₂串联起来。

测量公式为：$r_1=\frac{I_1}{I_2}\cdot r_2$（$I_1$ 表示通过Ⓐ₁的电流，I_2 表示通过Ⓐ₂的电流）。

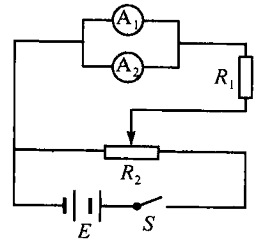


图 7-2

解题捷径 11

【精析】 (1)量程为 3V 的电压表其满偏电流为 $I_m=\frac{3}{3000}\text{A}=1\text{mA}$，那么，用伏特表测其内阻，所串联的电流表应选Ⓐ₁。因电源电压为 6V，若采用滑动变阻器的限流电路，无论是用 R_1 或是用 R_2，都会超过电压表的量程 3V，所以，滑动变阻器只能连成分压电路，而充当分压器的滑动变阻器的总阻值相对小些为好，所以，滑动变阻器应选用 R_2。如图 7-3 所示：

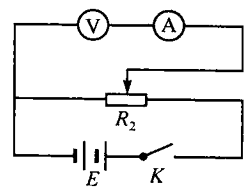


图 7-3

(2)实验中应测量的物理量：电压表的读数 U 和电流表的读数 I。

(3)实验中测出电压表内阻的测量式为：$R_V=\frac{U}{I}$。

解题捷径 12

【精析】 由校对规律知：两电压表只能并联，所以 C 错。要求对改装后的电表从零开始校对，那么，校对电路中的滑动变阻器只能连接成分压电路，所以 D 错。故 A、B 答案正确。

解题捷径 13

【精析】 若 P 从 a 移到 b 时，安培表读数没有显著变化，说明伏特表的分流不明显，待测电阻 R 是小电阻，P 应接在 a；若 P 从 a 移到 b 时，伏特表读数没有显著变化，说明电流表的分流不明显，待测电阻 R 是大电阻，P 应接在 b 处。

答案：a；b

解题捷径 14

【精析】 用“＋”和“－0.6”两接线柱时该表量程为 0.6A，故能测量的最大电流是 0.6A。每 10 个小格代表 0.2A，故每一小格代表 0.02A，图中示数为 0.34A。同理，在使用“＋”和“－3”两接线柱时，每一小格代表 0.1A，图中表针示数为 1.7A。

答案：0.6，0.02，0.34，0.1，1.7

解题捷径 15

【精析】 电阻额定功率为 0.5W，用多用电表粗测其阻值约为 18Ω，所以，其额定电

流 $I_m=\sqrt{\frac{0.5}{18}}=0.167A=167mA$,所以应选量程为 200mA 的电流表。额定电压 $U_m=I_mR=3V$,所以,应选量程为 3V 的电压表。

若选用滑动变阻器的限流电路,则电路中的最小电流为 $I_{min}=\frac{12}{18+20+20}=0.207A=207mA$,大于电阻的额定电流,不能用,只能用滑动变阻器的分压电路。电路图略。

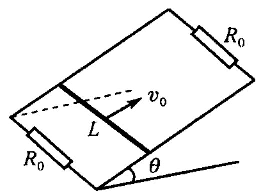
解题捷径 16

【精析】 由本题解题捷径知:选项 C 正确。

第八章 磁场中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：在电磁感应中，感应电量是由闭合线圈的匝数 n，电阻 R 和通过闭合回路的磁通量变化决定的，与发生磁通量变化的时间无关，即 $q=n\dfrac{\Delta\Phi}{R}$。



图一

【题目】 如图一所示，倾角为 $\theta=37°$，间距 $L=0.30\text{m}$ 且足够长的平行金属导轨电阻不计，处在磁感强度 $B=1.0\text{T}$，方向垂直于导轨平面的匀强磁场中。导轨两端各接一个阻值 $R_0=2.0\Omega$ 的电阻。在平行导轨间跨接一金属棒，金属棒质量 $m=1.0\text{kg}$，电阻 $r=2.0\Omega$，与导轨间的动摩擦因数 $\mu=0.50$。金属棒以平行于导轨向上的初速度 $v_0=10\text{m/s}$ 上滑，已知它上升到最高点的过程中，通过上端电阻的电量 $q=0.10\text{C}$，取 $g=10\text{m/s}^2$。

求：(1)金属棒上升的最大高度 h；

(2)金属棒上升过程中上端电阻 R_0 释放的焦耳热。

【精析】 (1)金属棒上升过程的平均速度为 $\bar{v}=\dfrac{s}{t}$，平均电动势为 $\bar{E}=Bl\bar{v}=Bls/t$，而平均电流为 $\bar{I}=\dfrac{\bar{E}}{R_{总}}$，$q_{总}=2q=2\times0.1\text{C}=0.2\text{C}$，而 $q_{总}=\bar{I}\cdot t=\dfrac{Bls}{R_{总}}$，代入数据得，金属棒上升的最大距离 $s=2\text{m}$，上升高度 $h=1.2\text{m}$。

(2)由能量守恒和转化知：$\dfrac{1}{2}mv_0^2=mgh+\mu mg\cos37°s+Q_J$，

代入题给数据得：$Q_J=30\text{J}$，

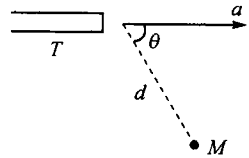
其中 R_0 释放的焦耳热是全部焦耳热的 $1/6$，$Q_{R_0}=30\times\dfrac{1}{6}=5\text{J}$，

所以，金属棒上升过程中上端电阻 R_0 释放的焦耳热为 5J。

小试二：若带电粒子的速度 v 与磁场 B 成任意夹角 θ 时，可将 v 分解为沿 B 的方向

的速度分量 v_1 和垂直于 B 方向的速度分量 v_2。带电粒子沿 B 方向的分运动是速度为 v_1 的匀速运动，在垂直磁场平面内的运动是匀速圆周运动，其轨迹为等距螺旋线。螺旋半径为 $R=\dfrac{mv\sin\theta}{Bq}$，螺距为 $h=\dfrac{2\pi mv\cos\theta}{Bq}$。

【题目】 如图二所示，被 $U=1000\text{V}$ 的电压加速的电子从电子枪发射出来，沿直线 a 的方向运动，现要求电子击中在 $\theta=60°$方向、距离枪口 T 为 $d=5\text{cm}$ 的靶 M，对以下两种情形求出所用的匀强磁场的磁感强度 B。

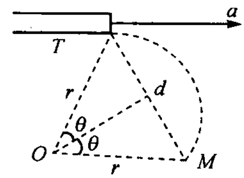


图二

(1)磁场方向垂直于由直线 a 与点 M 所确定的平面；

(2)磁场方向平行于 TM。

【精析】 (1)磁场方向垂直于直线 a 与 M 所确定的平面时，电子击中靶 M 的运动轨迹如图三所示。电子将做半径为 r 的圆周运动，已知 $TM=d$，所以 $r=\dfrac{d}{2\sin\theta}$，

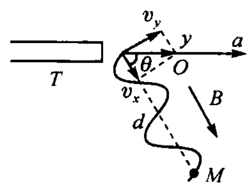


图三

且 $$\begin{cases}\dfrac{1}{2}mv^2=eU,\\ eBv=m\dfrac{v^2}{r},\end{cases}$$

得 $$B=\frac{mv}{er}=\frac{2\sin\theta}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}=0.0037\text{T}。$$

(2)当磁场方向沿 TM 方向时，电子的速度方向与磁场 B 的方向成 $\theta=60°$，电子将做等距螺旋线运动，如图四所示。其中



图四

$$v_x=v\cos\theta,v_y=v\sin\theta,$$

电子到达 M 所用的时间为 $t=\dfrac{d}{v\cos\theta}$，

同时，电子在垂直 MT 的平面内有

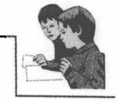
$$eBv_y=m\frac{v_y^2}{r},\ T=\frac{2\pi m}{eB},$$

且转一周就通过 TM 一次。故电子只有转过整圈数（设为 n），才能击中靶，所以有 $t=nT$，

即 $$\frac{d}{v\cos\theta}=n\cdot\frac{2\pi m}{eB},$$

即 $$B=n\cdot\frac{2\pi mv\cos\theta}{ed}=n\cdot\frac{2\pi\cos\theta}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}},$$

代入数据得 $B=0.0067nT(n\in\mathbf{N})$。



二、解题捷径精粹

解题捷径 1

两电流相互平行时，无转动趋势，同向电流相吸，反向电流相斥。

解题捷径 2

从同一直线边界射入匀强磁场中的粒子，从同一直线边界射出时，速度与直线边界的夹角相等；在圆形匀强磁场区域内沿径向射入的粒子必沿径向射出。

解题捷径 3

带电粒子在匀强磁场中的运动时间是由粒子运动的弧长所对的圆心角 θ 决定的（圆心角与速度的偏角相同），即 $t=\frac{2\pi m}{Bq}\cdot\frac{\theta}{360^\circ}$。

解题捷径 4

直导线绕其一端在垂直于匀强磁场的平面内转动时，产生的感应电动势等效为 $E=Bl\bar{v}$，其中 $\bar{v}=\frac{\omega r_1+\omega r_2}{2}$。

解题捷径 5

增反减同（判断感应电流的方向）：先定原（原来的磁场方向），找出变（磁通量的变化），减相同，增相反，右手旋出感应电。

解题捷径 6

在电磁感应中，感应电量是由闭合线圈的匝数 n，电阻 R 和通过闭合回路的磁通量变化决定的，与发生磁通量变化的时间无关，即 $q=n\frac{\Delta\Phi}{R}$。

解题捷径 7

电磁感应过程，实质是不同形式的能量转化的过程，电磁感应过程中产生的感应电流在磁场中必定受到安培力作用，克服安培力做功的过程就是其他形式的能转化为电能的过程。

解题捷径 8

在匀强磁场中，双金属棒在“U”形导轨上滑动时，当两棒的运动方向相同时，两“电源”反向，$E=|E_1-E_2|=|Bl_1v_1-Bl_2v_2|$；当两棒的运动方向相反时，两“电源”同向，$E=Bl_1v_1+Bl_2v_2$。

解题捷径 9

若带电粒子的速度 v 与磁场 B 成任意夹角 θ 时，可将 v 分解为沿 B 的方向的速度分量 v_1 和垂直于 B 方向的速度分量 v_2。带电粒子沿 B 方向的分运动是速度为 v_1 的匀速运动，在垂直磁场平面内的运动是匀速圆周运动，其轨迹为等距螺旋线。螺旋半径为 $R=\dfrac{mv\sin\theta}{Bq}$，螺距为 $h=\dfrac{2\pi mv\cos\theta}{Bq}$。

解题捷径 10

带电体在匀强电场、匀强磁场和重力场叠加的复合场中运动，若带电体做直线运动，则它一定做匀速直线运动，即带电体所受三力平衡。

解题捷径 11

电磁流量计、霍尔效应、磁流体发电机等一类问题，虽然形式不同，但其本质却是相同的。从微观上看，都是带电粒子受到了洛仑兹力作用，最后达到与电场力的动态平衡，从宏观上看，可等效于导体切割磁感线运动。

解题捷径 12

在电磁感应中，若求闭合回路中产生的热量，需要分析闭合回路中感应电流的有效值；若求通过闭合回路中某导体的电荷量，需要分析闭合回路感应电流的平均值。

解题捷径 13

理想变压器原线圈匝数为 n_1，副线圈有若干个时，其匝数为 $n_2,n_3,\cdots,n_n$，原副线圈两端电压分别为 $U_1,U_2,U_3,\cdots,U_n$，原副线圈中电流分别为 $I_1,I_2,I_3,\cdots,I_n$，则 $\dfrac{U_m}{U_n}=\dfrac{n_m}{n_n}$；$I_1n_1=I_2n_2+I_3n_3+\cdots+I_nn_n$；$I_1U_1=I_2U_2+I_3U_3+\cdots+I_nU_n$。

解题捷径 14

在理想变压器中，原线圈中的电流 I_1 随副线圈电流 I_2 的增大而增大，减小而减小。当副线圈中电流为零时，原线圈中的电流很小，但不为零。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

两电流相互平行时，无转动趋势，同向电流相吸，反向电流相斥。

【范例】 在同一平面上有 a、b、c 三根等距平行放置的长直导线，依次载有电流强度为 1A、2A 和 3A 的电流，各电流方向如图 8-1-1 所示，则导线 a 所受合力方向向______

__，导线 b 所受合力方向向________。

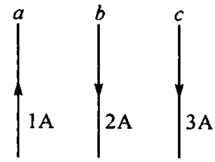


图 8-1-1

【精析】 a 与 b、c 导线的电流方向相反，它受到 b、c 两根导线的向左斥力的合力的作用，所以导线 a 所受合力方向向左；同理 b 导线电流方向与 a 导线的电流方向相反，相互排斥，b 受到 a 向右的斥力，b 与 c 方向相同，相互吸引，b 受到 c 向右的引力，所以，导线 b 所受合力方向向右。

【同类精练】 如图 8-1-2 所示，两根平行放置的长直导线 a 和 b 载有大小相同、方向相反的电流，a 所受到的磁场力大小为 F_1。当加入一与导线所在平面垂直的匀强磁场后，a 受到的磁场力大小变为 F_2，则此时 b 所受到的磁场力大小变为(　　)

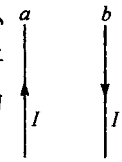


图 8-1-2

A. F_2　　　　B. F_1-F_2

C. F_1+F_2　　　　D. $2F_1-F_2$

解题捷径 2

从同一直线边界射入匀强磁场中的粒子，从同一直线边界射出时，速度与直线边界的夹角相等；在圆形匀强磁场区域内沿径向射入的粒子必沿径向射出。

【范例】 如图 8-2-1 所示，在 xOy 平面内，第一象限中有匀强电场，场强大小为 E，方向沿 y 轴正方向。在 x 轴的下方有匀强磁场，磁感应强度大小为 B，方向垂直于纸面向里。今有一个质量为 m，电量为 e 的电子(不计重力)，从 y 轴上的 P 点以初速度 v_0 垂直于电场方向进入电场，经电场偏转后，沿着与 x 轴正方向成 45°进入磁场，并能返回到原出发点 P。

求：(1) P 点离坐标原点的距离 h。

(2) 电子从 P 点出发经多长时间第一次返回 P 点？

【精析】 (1) 电子经过 A 点的速度大小 $v=\frac{v_0}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}v_0$，

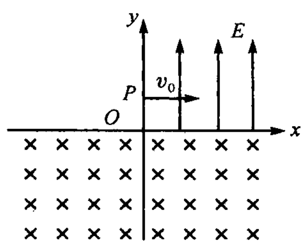


图 8-2-1

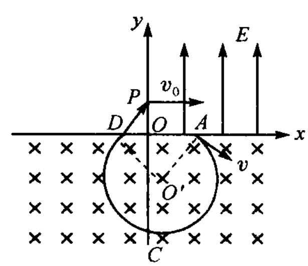


图 8-2-2

电子由 P 到 A，由动能定理 $Eeh=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ 得

$$h=\frac{mv_0^2}{2Ee},$$

(2)电子进入磁场与磁场边界的夹角为 45°，

那么电子射出磁场时与磁场边界的夹角也为 45°，

电子从 P 到 A，用时 $t_1=\frac{v_y}{a}=\frac{mv_0}{Ee}$，从 A 到 C 再到 D，用时 $t_2=\frac{270^\circ}{360^\circ}\cdot\frac{2\pi m}{Be}$，

从 D 到 P，用时 $t_3=\frac{\overline{DP}}{v}=\frac{\sqrt{2}h}{v}=\frac{mv_0}{2Ee}$，

所以，电子从 P 点出发第一次返回 P 点用时 $t=t_1+t_2+t_3=\frac{3mv_0}{2Ee}+\frac{3\pi m}{2Be}$。

【同类精练】 如图 8-2-3 所示，在以 O 为圆心，半径为 $R=10\sqrt{3}\text{cm}$的圆形区域内，有一个水平方向的匀强磁场，磁感应强度大小为 $B=0.10\text{T}$，方向垂直纸面向外。竖直平行放置的两金属板 A、K 相距为 $d=20\sqrt{3}\text{mm}$，连在图示电路中。电源电动势 $E=91\text{V}$，内阻 $r=1.0\Omega$，定值电阻 $R_1=10\Omega$，滑动变阻器 R_2 的最大阻值为 80Ω，S_1、S_2 为 A、K 板上的两个小孔，且 S_1、S_2 与 O 在竖直极板的同一直线上，$OS_2=2R$，另有一水平放置的足够长的荧光屏 D，O 点与荧光屏 D 点之间的距离为 $H=2R$。荷质比为 $2.0\times10^5\text{C/kg}$ 的正离子流由 S_1 进入电场后，通过 S_2 向磁场中心射去，通过磁场后落到荧光屏 D 上。离子进入电场的初速度、重力、离子之间的作用力均可忽略不计。问：(1)请分段描述正离子自 S_1 到荧光屏 D 的运动情况。(2)如果正离子垂直打在荧光屏上，电压表的示数多大？(3)调节滑动变阻器滑片 P 的位置，正离子到达荧光屏的最大范围多大？

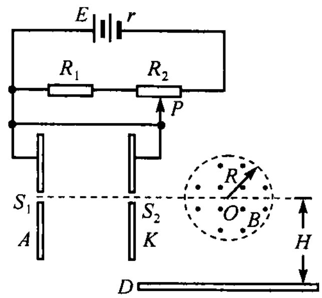
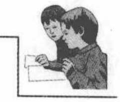


图 8-2-3



解题捷径 3

带电粒子在匀强磁场中的运动时间是由粒子运动的弧长所对的圆心角 θ 决定的（圆心角与速度的偏角相同），即 $t=\frac{2\pi m}{Bq}\cdot\frac{\theta}{360°}$。

【范例】 三个速度大小不同的同种带电粒子，沿同一方向从如图 8-3-1 所示长方形区域的匀强磁场上边缘射入，当它们从下边缘飞出时对入射方向的偏角分别为 90°，60°，30°。则它们在磁场中的运动时间之比为（　　）

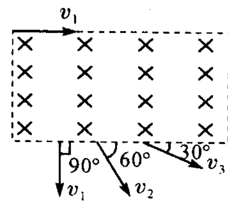


图 8-3-1

A. 1∶1∶1　　　B. 1∶2∶3

C. 3∶2∶1　　　D. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

【精析】 由规律知：同种粒子以不同速度射入磁场，经历的时间与它们的偏向角成正比，即 $t_1:t_2:t_3=90°:60°:30°=3:2:1$。选 C。

【同类精练】 如图 8-3-2 所示，正方形容器处在匀强磁场中，一束电子从 a 孔沿 ab 方向垂直射入容器内的匀强磁场中，结果一部分电子从小孔 c 射出，一部分电子从小孔 d 射出，则从两孔射出的电子（　　）

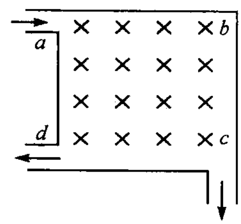


图 8-3-2

A. 速度之比 $v_c:v_d=2:1$

B. 在容器中运动的时间之比 $t_c:t_d=1:2$

C. 在容器中运动的加速度大小之比 $a_c:a_d=\sqrt{2}:1$

D. 在容器中运动的加速度大小之比 $a_c:a_d=2:1$

解题捷径 4

直导线绕其一端在垂直于匀强磁场的平面内转动时，产生的感应电动势等效为 $E=Bl\bar{v}$，其中 $\bar{v}=\frac{\omega r_1+\omega r_2}{2}$。

【范例】 如图 8-4-1 所示，导体 AB 的长度为 $2R$，绕 O 点以角速度 ω 匀速转动，OA 为 R，且 O、B、A 三点在一条直线上，有一匀强磁场磁感应强度为 B，充满转动平面且与转动平面垂直，那么 AB 两端的电势差为（　　）

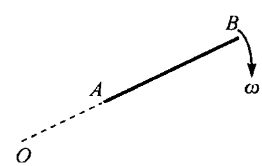


图 8-4-1

A. $\frac{1}{2}BR^2\omega$　　　B. $2BR^2\omega$

C. $4BR^2\omega$　　　D. $6BR^2\omega$

【精析】 导体 AB 绕 O 转动的平均速度 $\bar{v}=\frac{R\omega+3R\omega}{2}=2R\omega$，所以，$E=BL\bar{v}=B\cdot$

$2R \cdot 2R\omega = 4BR^2\omega$。所以，选 C。

【同类精练】 电磁“涡漩”制动器由一电阻率为 ρ、厚度为 d 的圆盘组成，圆盘绕通过其中心的轴旋转，如图 8-4-2 所示。有一覆盖面积为 a^2 的磁感应强度为 B 的匀强磁场垂直于盘面向下，若面积为 a^2 在离轴 r 处，且 $a \ll r$，当圆盘以角速度 ω 旋转时，求使圆盘慢下来的磁力矩。

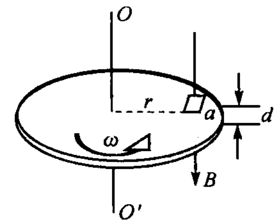


图 8-4-2

解题捷径 5

增反减同（判断感应电流的方向）：先定原（原来的磁场方向），找出变（磁通量的变化），减相同，增相反，右手旋出感应电。

【范例】 如图 8-5-1 所示，用一根长为 L、质量不计的细杆与一个上弧长为 l_0、下弧长为 d_0 的金属线框的中点连接并悬挂于 O 点，悬点正下方存在一个上弧长为 $2l_0$、下弧长为 $2d_0$ 的方向垂直纸面向里的匀强磁场，且 $d_0 \ll L$。先将线框拉开到如图所示位置，松手后让线框进入磁场，忽略空气阻力和摩擦。下列说法中正确的是(　　)

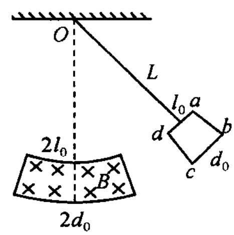


图 8-5-1

A. 金属线框进入磁场时感应电流的方向为：$a \to b \to c \to d \to a$

B. 金属线框离开磁场时感应电流的方向为：$a \to d \to c \to b \to a$

C. 金属线框 dc 边进入磁场与 ab 边离开磁场的速度大小总是相等

D. 金属线框最终将在磁场内做简谐运动

【精析】 金属线框进入磁场时，由于电磁感应，产生电流，根据楞次定律：增反减同判断电流的方向为：$a \to d \to c \to b \to a$，A 错误。金属线框离开磁场时由于电磁感应，产生电流，根据楞次定律：增反减同判断电流的方向为 $a \to b \to c \to d \to a$，所以 B 错误。据能量转化和守恒可知，金属线框 dc 边进入磁场与 ab 边离开磁场的速度大小不相等，C 错误。如此往复摆动，最终金属线框在匀强磁场内摆动，由于 $d_0 \ll L$，单摆做简谐运动的条件是摆角小于等于 10°，故最终在磁场内做简谐运动。答案为 D。

【同类精练】 如图 8-5-2 所示，一水平放置的矩形线框 $abcd$，在细长磁铁的 N 极附近竖直下落，保持 bc 边在纸外，ad 边在纸内。经过图中的位置Ⅰ，位置Ⅱ到位置Ⅲ，并且位置Ⅰ和位置Ⅲ都很靠近位置Ⅱ，在这一下落过程中，线框中感应电流方向是(　　)

A. 沿 $abcda$ 方向流动

B. 沿 $dcbad$ 方向流动

C. 由位置Ⅰ到位置Ⅱ是 $abcda$ 方向，由位置Ⅱ到位置Ⅲ是沿 $dcbad$

D. 由位置Ⅰ到位置Ⅱ是 $dcbad$ 方向，由位置Ⅱ到位置Ⅲ是沿 $abcda$

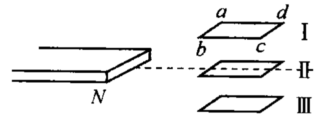


图 8-5-2

解题捷径 6

在电磁感应中，感应电量是由闭合线圈的匝数 n，电阻 R 和通过闭合回路的磁通量变化决定的，与发生磁通量变化的时间无关，即 $q=n\dfrac{\Delta\Phi}{R}$。

【范例】 如图 8-6-1 所示，倾角为 $\theta=37°$，间距 $L=0.30\text{m}$ 且足够长的平行金属导轨电阻不计，处在磁感强度 $B=1.0\text{T}$，方向垂直于导轨平面的匀强磁场中。导轨两端各接一个阻值 $R_0=2.0\Omega$ 的电阻。在平行导轨间跨接一金属棒，金属棒质量 $m=1.0\text{kg}$，电阻 $r=2.0\Omega$，与导轨间的动摩擦因数 $\mu=0.50$。金属棒以平行于导轨向上的初速度 $v_0=10\text{m/s}$ 上滑，已知它上升到最高点的过程中，通过上端电阻的电量 $q=0.10\text{C}$，取 $g=10\text{m/s}^2$。

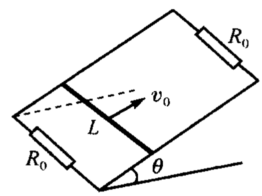


图 8-6-1

求：(1)金属棒上升的最大高度 h；

(2)金属棒上升过程中上端电阻 R_0 释放的焦耳热。

【精析】 (1)金属棒上升过程的平均速度为 $\bar{v}=\dfrac{s}{t}$，平均电动势为 $\bar{E}=Bl\bar{v}=Bls/t$，而平均电流为 $\bar{I}=\dfrac{\bar{E}}{R_{总}}$，$q_{总}=2q=2\times0.1\text{C}=0.2\text{C}$，而 $q_{总}=\bar{I}\cdot t=\dfrac{Bls}{R_{总}}$，代入数据得，金属棒上升的最大距离 $s=2\text{m}$，上升高度 $h=1.2\text{m}$。

(2)由能量守恒和转化知：$\dfrac{1}{2}mv_0^2=mgh+\mu mg\cos37°s+Q_J$，

代入题给数据得：$Q_J=30\text{J}$，

其中 R_0 释放的焦耳热是全部焦耳热的 1/6，$Q_{R_0}=30\times\dfrac{1}{6}=5\text{J}$

所以，金属棒上升过程中上端电阻 R_0 释放的焦耳热为 5J。

【同类精练】 如图 8-6-2 所示，虚线框 $abcd$ 内为一矩形匀强磁场区域，$ab=2bc$，磁场方向垂直于纸面；实线框 $a'b'c'd'$ 是一正方形导线框，$a'b'$ 边与 ab 平行。若将导线框匀速地拉离磁场区域，以 Q_1 表示沿平行于 ab 的方向拉出过程中流经导线某截面的电量，Q_2 表示以同样速率沿平行于 bc 的方向拉出过程中流经导线某截面的电

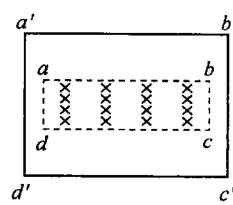


图 8-6-2

量，则（　　）

A. $Q_1=Q_2$　　B. $Q_1=2Q_2$

C. $Q_2=2Q_1$　　D. $Q_1=4Q_2$

解题捷径 7

电磁感应过程，实质是不同形式的能量转化的过程，电磁感应过程中产生的感应电流在磁场中必定受到安培力作用，克服安培力做功的过程就是其他形式的能转化为电能的过程。

【范例】 如图 8-7-1 所示，位于同一水平面内的两根平行导轨间距为 l，导体的左端连接一个耐压足够大的电容器，电容器的电容为 C，放在导轨上的导体 cd 与导轨接触良好，cd 杆在平行导轨平面的水平力作用下从静止开始匀加速运动，加速度为 a。磁感应强度 B 的匀强磁场垂直导轨平面竖直向下，导轨足够长，不计导轨、cd 杆和连接电容器导线的电阻，导体杆的摩擦也忽略。求从导体杆开始运动经过时间 t 电容器吸收的能量 E。

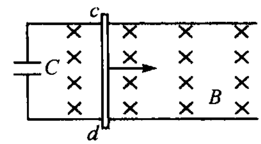


图 8-7-1

【精析】 导体杆在外力作用下向右加速运动，杆切割磁感线的速度不断增大，产生的感应电动势不断增大，因而持续给电容器充电，形成充电电流，因杆中有电流，故杆受安培力，克服这安培力做的功转化为电能储存在电容器中。

设经过时间 t，导体杆 cd 的速度 $v=at$，导体杆切割磁感线产生的感应电动势 $E_i=Blv=Blat$。

电容器上电压 $U=E_i=Blat$，电容器的电量 $Q=CU=CBlat$，即电量 Q 随时间 t 成正比增加，电路中出现稳定的充电电流 I。在短时间 Δt 内，电容器上电量增加 $\Delta Q=C\Delta U=CBla\Delta t$。

导体杆 cd 向右运动时受向左的安培力 F 作用，克服安培力做的功等于电容器吸收的能量。

安培力 $F=BIl=CB^2l^2a$，经过时间 t，导体杆的位移 $s=\frac{1}{2}at^2$，

克服安培力 F 做的功 $W=Fs=\frac{1}{2}C(Bla)^2t^2$，故 $E=W=\frac{1}{2}C(Bla)^2t^2$。

【同类精练】 如图 8-7-2 所示，MN 和 PQ 为两根间距不等的光滑金属导轨，水平放置在竖直向下的匀强磁场中。导轨 M、P 端间接入阻值 $R_1=30\Omega$ 的电阻和电流表，N、Q 端间接入阻值为 $R_2=6\Omega$ 的电阻。质量 $m=0.1\text{kg}$ 的金属棒放在导轨上以初速度 $v_0=5\text{m/s}$的速度从 ab 处向右滑到 $a'b'$ 处的时间为 $t=1\text{s}$。ab 处导轨间距 $L_{ab}=0.8\text{m}$，$a'b'$ 处导轨间距为 $L_{a'b'}=1\text{m}$。若金属棒滑动时电流表的读数始终保持不变，不计金属棒和导

轨的电阻。求：(1)导体棒从 ab 处向右滑到 $a'b'$ 处电阻 R_1 产生的热量 Q_1；(2)匀强磁场的磁感应强度 B。

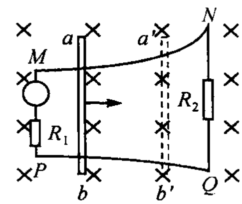


图 8-7-2

解题捷径 8

在匀强磁场中，双金属棒在"U"形导轨上滑动时，当两棒的运动方向相同时，两"电源"反向，$E=|E_1-E_2|=|Bl_1v_1-Bl_2v_2|$；当两棒的运动方向相反时，两"电源"同向，$E=Bl_1v_1+Bl_2v_2$。

【范例】 如图 8-8-1 所示，在水平面上有两条平行导电导轨 MN、PQ，导轨间距离为 l。匀强磁场垂直于导轨所在的平面(纸面)向里，磁感应强度的大小为 B。两根金属杆摆在导轨上，与导轨垂直，它们的质量和电阻分别为 m_1、m_2 和 R_1、R_2。两杆与导轨接触良好，与导轨间的动摩擦因数皆为 μ。已知：杆 1 被外力拖动，以恒定的速度 v_0 沿导轨运动，达到稳定状态时，杆 2 也以恒定速度沿导轨运动，导轨的电阻可忽略。求此时杆 2 克服摩擦力做功的功率。

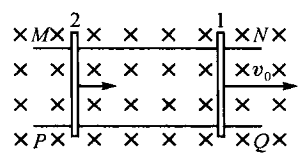


图 8-8-1

【精析】 设杆 2 的运动速度是 v，由于两杆运动时，两杆间和导轨构成的回路中的磁通量发生变化，产生的感应电动势为

$$E=Bl(v_0-v) \tag{1}$$

感应电流为

$$I=\frac{E}{R_1+R_2} \tag{2}$$

杆 2 做匀速运动，它受到的安培力等于它受到的摩擦力，

$$BlI=\mu m_2 g \tag{3}$$

杆 2 克服摩擦力所做功的功率为

$$P=\mu m_2 gv \tag{4}$$

由(1)(2)(3)(4)解得

$$P=\mu m_2 g\left[v_0-\frac{\mu m_2 g}{B^2 l^2}(R_1+R_2)\right]$$

【同类精练】 如图 8-8-2 所示，$a_1b_1c_1d_1$ 和 $a_2b_2c_2d_2$ 为在同一竖直平面内的金属导轨，处在磁感应强度为 B 的匀强磁场中，磁场方向垂直导轨所在的平面(纸面)向里。导轨的 a_1b_1 段与 a_2b_2 段是竖直的，距离为 l_1；c_1d_1 段与 c_2d_2 段也是竖直的，距离为 l_2。x_1y_1 与 x_2y_2 为两根用不可伸长的绝缘轻线相连的金属细杆，质量分别为 m_1 和 m_2，它们都垂直于导轨并与导轨保持光滑接触。两杆与导轨构成的回路的总电阻为 R。F 为作用于金属杆 x_1y_1 上的竖直向上的恒力。已知两杆运动到图示位置时，已匀速向上运动，求此时作用于两杆的重力的功率大小和回路电阻上的热功率。

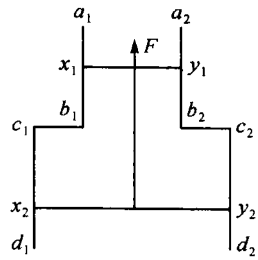


图 8-8-2

解题捷径 9

若带电粒子的速度 v 与磁场 B 成任意夹角 θ 时，可将 v 分解为沿 B 的方向的速度分量 v_1 和垂直于 B 方向的速度分量 v_2。带电粒子沿 B 方向的分运动是速度为 v_1 的匀速运动，在垂直磁场平面内的运动是匀速圆周运动，其轨迹为等距螺旋线。螺旋半径为 $R=\dfrac{mv\sin\theta}{Bq}$，螺距为 $h=\dfrac{2\pi mv\cos\theta}{Bq}$。

【范例】 如图 8-9-1 所示，被 $U=1000\text{V}$ 的电压加速的电子从电子枪发射出来，沿直线 a 的方向运动，现要求电子击中在 $\theta=60°$ 方向、距离枪口 T 为 $d=5\text{cm}$ 的靶 M，对以下两种情形求出所用的匀强磁场的磁感强度 B。

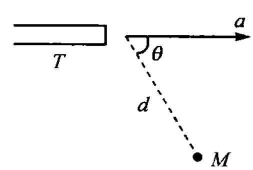


图 8-9-1

(1)磁场方向垂直于由直线 a 与点 M 所确定的平面；

(2)磁场方向平行于 TM。

【精析】 (1)磁场方向垂直于直线 a 与 M 所确定的平面时，电子击中靶 M 的运动轨迹如图 8-9-2 所示。电子将做半径为 r 的圆周运动，已知 $TM=d$，所以 $r=\dfrac{d}{2\sin\theta}$，

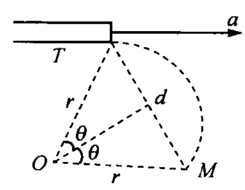


图 8-9-2

且 $\begin{cases}\frac{1}{2}mv^2=eU,\\ eBv=m\frac{v^2}{r}\end{cases}$

得
$$B=\frac{mv}{er}=\frac{2\sin\theta}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}=0.0037\text{T}。$$

(2)当磁场方向沿 TM 方向时，电子的速度方向与磁场 B 的方向成 $\theta=60°$，电子将做等距螺旋线运动，如图 8-9-3 所示。其中

$$v_x=v\cos\theta, v_y=v\sin\theta,$$

电子到达 M 所用的时间为

$$t=\frac{d}{v\cos\theta}$$

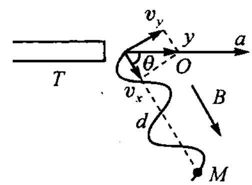


图 8-9-3

同时，电子在垂直 MT 的平面内有

$$eBv_y=m\frac{v_y^2}{r},$$

$$T=\frac{2\pi m}{eB},$$

且转一周就通过 TM 一次。故电子只有转过整圈数(设为 n)，才能击中靶，所以有$t=nT$，

即
$$\frac{d}{v\cos\theta}=n\cdot\frac{2\pi m}{eB},$$

即
$$B=n\cdot\frac{2\pi mv\cos\theta}{ed}=n\cdot\frac{2\pi\cos\theta}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

代入数据得 $B=0.0067nT(n\in\mathbf{N})$。

【同类精练】 如图 8-9-4 所示，电子束经过 a、b 板上恒定电场加速后，进入 c、d 板之间电场，c、d 板上加交变电压，所以飞出 c、d 板后粒子速度方向不同，从 A 孔穿入螺线管磁场中，在螺线管磁场中做螺旋线运动最后能会聚一点，这就是“磁聚焦技术”，试分析之。

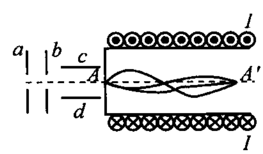


图 8-9-4

解题捷径 10

带电体在匀强电场、匀强磁场和重力场叠加的复合场中运动，若带电体做直线运动，则它一定做匀速直线运动，即带电体所受三力平衡。

【范例】 地面附近空间中存在着水平方向的匀强电场和匀强磁场，已知磁场方向垂直纸面向里，一个带电油滴能沿一条与竖直方向成 α 角的直线 MN 运动（MN 在垂直于磁场方向的平面内），如图 8-10-1 所示。则以下判断中正确的是（　　）

A. 如果油滴带正电，它是从 M 点运动到 N 点

B. 如果油滴带正电，它是从 N 点运动到 M 点

C. 如果电场方向水平向左，油滴是从 M 点运动到 N 点

D. 如果电场方向水平向右，油滴是从 M 点运动到 N 点

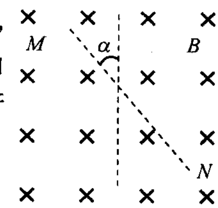


图 8-10-1

【精析】 带电油滴能沿直线运动，则它受三个力一定平衡，因电场方向水平，若向左，则正电荷从 M 点运动到 N 点满足平衡条件，其他情况不满足平衡条件。

所以，应选 A、C。

【同类精练】 如图 8-10-2 所示，在空间有水平方向的匀强磁场和竖直方向的匀强电场，场强为 E，磁感应强度为 B，在场区某点由静止释放一个带电液滴 a，它运动到最低点处，恰与一个原来静止的液滴 b 相碰，碰后合为一体沿水平方向做直线运动。已知液滴 a 的质量是 b 的 2 倍，液滴 a 所带电量是 b 的 4 倍，求两液滴初始位置之间的高度差 h（设 a、b 间静电力不计）。

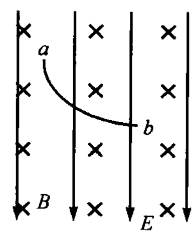


图 8-10-2

解题捷径 11

电磁流量计、霍尔效应、磁流体发电机等一类问题，虽然形式不同，但其本质却是相同的。从微观上看，都是带电粒子受到了洛仑兹力作用，最后达到与电场力的动态平衡，从宏观上看，可等效于导体切割磁感线运动。

【范例】 电磁流量计广泛应用于测量可导电流体（如污水）在管中的流量（在单位时间内通过管内横截面的流体的体积）。为了简化，假设流量计是如图 8-11-1 所示的横截面为长方形的一段管道，其中空部分的长、宽、高分别为图中的 a、b、c。流量计的两端与

输送流体的管道相连接(图中虚线)。图中流量计的上下两面是金属材料,前后两面是绝缘材料,现于流量计所在处加磁感应强度为 B 的匀强磁场,磁场方向垂直于前后两面。当导电流体稳定的流经流量计时,在管外将流量计上、下两表面分别与一串联了电阻 R 的电流表的两端连接,I 表示测得的电流值。已知流体的电阻率为 ρ,不计电流表的内阻,则流量为(　　)

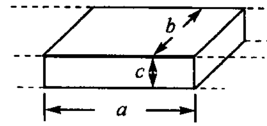


图 8-11-1

A. $\dfrac{I}{B}\left(bR+\rho\dfrac{c}{a}\right)$　　B. $\dfrac{I}{B}\left(aR+\rho\dfrac{b}{c}\right)$

C. $\dfrac{I}{B}\left(cR+\rho\dfrac{a}{b}\right)$　　D. $\dfrac{I}{B}\left(R+\rho\dfrac{bc}{a}\right)$

【精析】 电磁流量计的示意图如图 8-11-2 所示,设匀强磁场的方向从前向后垂直于前后两面。导电流体在管中刚开始流动时,流体中的正、负离子在磁场中受洛仑兹力的作用,正电荷受力向上;负电荷受力向下,下金属板带负电,形成匀强电场,场强方向向下。当运动电荷所受的洛仑兹力与电场力相平衡时,流体达到动态平衡。

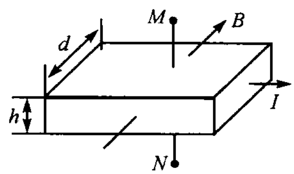


图 8-11-2

当外电路接通时,因为有电流,所以实际上每一个带电粒子所受的电场力和洛仑兹力是不平衡的,其实粒子还是不断地打到极板上,只不过打到极板上的电荷数达到了动态平衡。从宏观的角度看,导电流体的流动,实际上相当于导体切割磁感线运动,产生感应电动势;而这个装置相当于一个闭合电路,上下两极板为电源的正负极,两极板间的电路为电源的内电路,内电阻为:

$$r=\rho\frac{c}{ab}\ \text{而}\ I=\frac{Bcv}{R+r}(E=Bcv),$$

根据范例中流量的定义:$Q=bcv$,

综上所述,可得 $Q=\dfrac{I}{B}\left(bR+\rho\dfrac{c}{a}\right)$,故本题的正确答案为 A。

【同类精练】 有人设想用如图 8-11-3 所示的装置来选择密度相同、大小不同的球状纳米粒子。粒子在电离室中电离后带正电,电量与其表面积成正比。电离后,粒子缓慢通过小孔 O_1 进入极板间电压为 U 的水平加速电场区域Ⅰ,再通过小孔 O_2 射入相互正交的恒定匀强电场、磁场区域Ⅱ,其中磁场的磁感应强度大小为 B,方向如图所示。收集室的小孔 O_3 与 O_1、O_2 在同一条水平线上。半径为 r_0 的粒子,其质量为 m_0、电量为 q_0,刚好能沿 O_1O_3 直线射入收集室。不计纳米粒子重力。

(1)试求图中区域Ⅱ的电场强度;

(2)试求半径为 r 的粒子通过 O_2 时的速率;

(3)讨论半径 $r\neq r_2$ 的粒子刚进入区域Ⅱ时向哪个极板偏转。

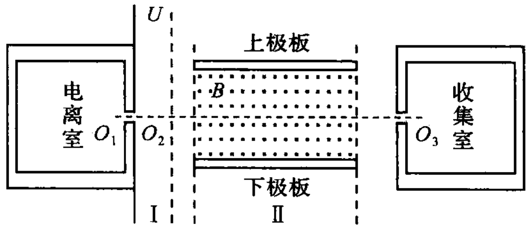


图 8-11-3

解题捷径 12

在电磁感应中，若求闭合回路中产生的热量，需要分析闭合回路中感应电流的有效值；若求通过闭合回路中某导体的电荷量，需要分析闭合回路中感应电流的平均值。

【范例】 边长为 a 的 N 匝正方形线圈在磁感应强度为 B 的匀强磁场中，以角速度 ω 绕垂直于磁感线的轴匀速转动，线圈的电阻为 R。求线圈从中性面开始转过 90°角的过程中产生的热量。

【精析】 线圈中产生的热量需从转动过程中交变电流的有效值考虑。因线圈中感应电动势的最大值为 $E_m=NBa^2\omega$，故线圈中电流的有效值为 $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{E_m}{\sqrt{2}R}=\frac{NBa^2\omega}{\sqrt{2}R}$，

线圈转过 90°角的时间为 $t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}$，

所以在转动过程中产生的热量

$$Q=I^2Rt=\pi N^2B^2a^4\omega/(4R)$$

【同类精练】 边长为 a 的 N 匝正方形线圈在磁感应强度为 B 的匀强磁场中，以角速度 ω 绕垂直于磁感线的轴匀速转动，线圈的电阻为 R。求线圈从中性面开始转过 90°角的过程中，通过导线截面的电量。

解题捷径 13

理想变压器原线圈匝数为 n_1，副线圈有若干个时，其匝数为 $n_2, n_3, \cdots, n_n$，原副线圈两端电压分别为 $U_1, U_2, U_3, \cdots, U_n$，原副线圈中电流分别为 $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_n$，则 $\frac{U_m}{U_n}=\frac{n_m}{n_n}$；$I_1 n_1=I_2 n_2+I_3 n_3+\cdots+I_n n_n$；$I_1 U_1=I_2 U_2+I_3 U_3+\cdots+I_n U_n$。

【范例】 如图 8-13-1 所示电路中，变压器初级线圈匝数 $n_1=1000$ 匝，次级有两个线圈，匝数分别为 $n_2=500$ 匝，$n_3=200$ 匝，分别接一个 $R=55\Omega$ 的电阻，在初级线圈上接入 $U=220\text{V}$ 交流电，求：

(1)两次级线圈输出功率之比；

(2)初级线圈中的电流。

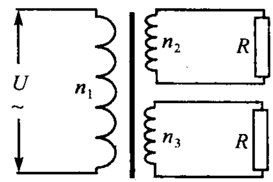


图 8-13-1

【精析】 (1)对两个次级线圈有 $U_1/U_2=n_1/n_2, U_1/U_3=n_1/n_3$，

所以 $U_2=n_2U_1/n_1=U/2, U_3=n_3U_1/n_1=U/5$，

又 $P=U^2/R$，

所以 $P_2/P_3=U_2^2/U_3^2=25:4$。

(2)由欧姆定律得 $I_2=U_2/R=2\text{A}, I_3=U_3/R=0.8\text{A}$，

对有两个次级线圈的变压器有 $n_1 I_1=n_2 I_2+n_3 I_3$，

所以 $I_1=0.5I_2+0.2I_3=1.16\text{A}$。

【同类精练】 如图 8-13-2 所示，理想变压器原线圈匝数为 n_1，两个副线圈匝数分别为 n_2 和 n_3，原、副线圈两端电压分别为 U_1、U_2、U_3，原、副线圈中电流分别为 I_1、I_2、I_3，下列关于这些物理量的关系中，正确的是(　　)

①$U_1/U_2=n_1/n_2, U_1/U_3=n_1/n_3$

②$I_1/I_2=n_2/n_1, I_1/I_3=n_3/n_1$

③$n_1 I_1=n_2 I_2+n_3 I_3$

④$I_1U_1=I_2U_2+I_3U_3$

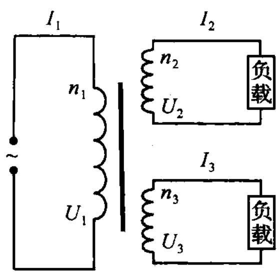


图 8-13-2

A. ①②④　　　B. ①②③　　　C. ①③④　　　D. ②③④

解题捷径 14

在理想变压器中，原线圈中的电流 I_1 随副线圈电流 I_2 的增大而增大，减小而减小。当副线圈中电流为零时，原线圈中的电流很小，但不为零。

【范例】 一理想变压器的原线圈连接一交流电流表，副线圈接入电路的匝数可以通过滑动触头 Q 调节，如图 8-14-1 所示，在副线圈两输出端连接了定值电阻 R_0 和滑动变

阻器 R，在原线圈上加一电压为 U 的交流电，则(　　)

A. 保持 Q 的位置不动，将 P 向上滑动时，电流表的读数变大

B. 保持 Q 的位置不动，将 P 向上滑动时，电流表的读数变小

C. 保持 P 的位置不动，将 Q 向上滑动时，电流表的读数变大

D. 保持 P 的位置不动，将 Q 向上滑动时，电流表的读数变小

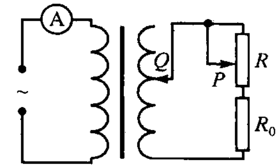


图 8-14-1

【精析】 保持 Q 的位置不动，副线圈上电压不变，将 P 向上滑动时，负载电阻增大，副线圈上电流减小，电流表的读数应变小，所以 A 错，B 对。保持 P 的位置不动，负载电阻不变，将 Q 向上滑动时，副线圈上电压变大，副线圈上的电流也随之变大，电流表的读数变大，所以 C 正确，D 错误。故应选 BC。

【同类精练】 如图 8-14-2 所示，理想变压器的副线圈上，通过输电线接两个相同的灯泡 L_1 和 L_2，输电线的等效电阻为 R，原线圈输入端接最大值恒定的交流电压，回路中接有一块理想电流表，当电键 S 接通时，以下说法中正确的是(　　)

A. 原线圈中电流表示数增大

B. 副线圈两端 MN 的输出电压增大

C. 灯泡 L_1 的亮度变暗

D. 输电线上产生的损耗增大

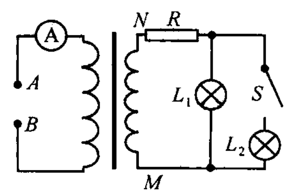


图 8-14-2

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 两导线载有大小相同、方向相反的电流，相互斥力大小相等、方向相反，因此外磁场施加在导线上的安培力也是大小相等、方向相反，因此，两直导线所受合力也为大小相等、方向相反。故 A 答案正确。

解题捷径 2

【精析】 (1)正离子在两金属板间做初速为零的匀加速直线运动，离开电场进入磁场前做匀速直线运动，沿径向进入磁场后做匀速圆周运动，沿径向离开磁场后做匀速直线运动，直到打在荧光屏上。

(2)如图 8-1①所示，离子在磁场中偏转 90°，因此轨迹半径 $r=R=10\sqrt{3}\,\text{cm}$，而 $r=\dfrac{\sqrt{2mUq}}{Bq}$，代入数据可得 $U=30\ \text{V}$。

(3)如图 8-1②所示，当滑动变阻器滑动头在左端时，$U_1=10\text{V}$，由 $r_1=\dfrac{\sqrt{2mU_1q}}{Bq}$ 可得

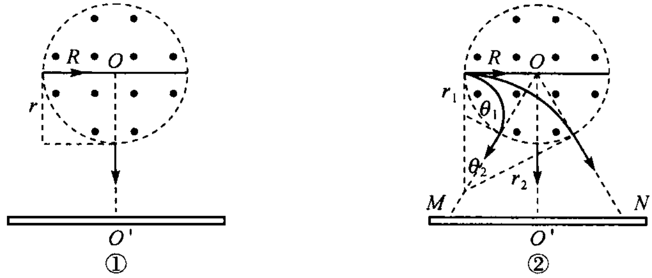


图 8-1

$r_1=10\text{cm}$，偏转角 $\theta_1=120°$，打在荧光屏上的 M 点处，$MO'=H/\sqrt{3}=20\text{cm}$；当滑动变阻器滑动头在右端时，$U_2=90\text{V}$，由 $r_2=\frac{\sqrt{2mU_2q}}{Bq}$ 可得 $r_2=30\text{cm}$，偏转角 $\theta_2=60°$，打在荧光屏上的 N 点处，$O'N=H/\sqrt{3}=20\text{cm}$。所以，离子到达荧光屏的最大范围是 40cm。

解题捷径 3

【精析】 由 $v\propto R$ 知 $v_c:v_d=2:1$；由 $t\propto\theta$ 知 $t_c:t_d=1:2$；由加速度 $a=\frac{F_{合}}{m}=\frac{Bqv}{m}$ 可知，$a_c:a_d:=v_c:v_d=2:1$。选 ABD。

解题捷径 4

【精析】 选取磁场所在区域的小块导体（面积 $a\times a$）作为研究对象，它产生的感应电动势为

$$E=Bl\bar{v}=Ba\omega\left[\frac{(r+a)+r}{2}\right],$$

考虑到 $a\ll r$，上式可简化为 $E=Bar\omega$，小块导体是电源，从电流方向看，

截面积 $S=ad$，则其内阻 $R=\rho\frac{a}{S}=\rho\frac{a}{ad}=\frac{\rho}{d}$，因 $a\ll r$，

外电路是大块导体，电流流经的截面积很大，可认为 $R_{外}=0$，这样 $I=\frac{E}{R}=\frac{Bard\omega}{\rho}$，

磁场对小导体的安培力可认为作用在 a 边的中点。

考虑到 $a\ll r$，则 $M=F\left(r+\frac{a}{2}\right)=Fr$，

联解以上各式并简化，可得使圆盘慢下来的磁力矩为 $M=\frac{B^2a^2r^2d\omega}{\rho}$。

解题捷径 5

【精析】 穿过矩形线框的磁通量先减小后增加，由规律知感应电流的方向始终是沿

$abcda$ 方向流动。答案 A 正确。

解题捷径 6

【精析】 由规律知:应选答案 A。

解题捷径 7

【精析】 (1)由电流表读数不变知感应电动势 E 不变,

所以,$E=Bl_1v_1=Bl_2v_2$,

得 $v_2=\frac{l_1v_1}{l_2}=\frac{0.8\times5}{1}=4\text{m/s}$,

克服安培力做功的过程就是其他形式的能转化为电能的过程,所以

$$Q=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{9}{20}\text{J},$$

R_1、R_2 产生的热量分别为 Q_1、Q_2,

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{5},Q=Q_1+Q_2,$$

$$Q_1=\frac{3}{40}\text{J}。$$

(2)$Q_1=I_1^2R_1t$,

$I_1=\sqrt{\frac{Q_1}{R_1t}}=\sqrt{\frac{3}{40\times30\times1}}=\frac{1}{20}\text{A}$,

$E=I_1R_1=\frac{1}{20}\times30=1.5\text{V}$,

又 $E=Bl_1v_1$,

所以 $B=\frac{E}{I_1l_1}=\frac{1.5}{0.8\times5}=\frac{3}{8}\text{T}$。

解题捷径 8

【精析】 设杆向上运动的速度为 v,因杆的运动,两杆与导轨构成的回路的面积减少,从而磁通量也减少,由法拉第电磁感应定律,回路中的感应电动势的大小为

$$E=B(l_2-l_1)v \tag{1}$$

回路中的电流为

$$I=\frac{E}{R} \tag{2}$$

电流沿顺时针方向,两金属杆都要受到安培力作用,作用于杆 x_1y_1 的安培力为

$$f_1=Bl_1I \tag{3}$$

方向向上,作用于杆 x_2y_2 的安培力为

$$f_2 = Bl_2 I \tag{4}$$

方向向下，当杆匀速运动时，根据牛顿第二定律有

$$F - m_1 g - m_2 g + f_1 - f_2 = 0 \tag{5}$$

解以上各式

$$I = \frac{F-(m_1+m_2)g}{B(l_2-l_1)} \tag{6}$$

$$v = \frac{F-(m_1+m_2)g}{B^2(l_2-l_1)^2}R \tag{7}$$

作用于两杆的重力的功率大小

$$P = (m_1+m_2)gv \tag{8}$$

电阻上的热功率

$$Q = I^2 R \tag{9}$$

由(6)(7)(8)(9)式可得

$$P = \frac{F-(m_1+m_2)g}{B^2(l_2-l_1)}R(m_1+m_2)g$$

$$Q = \left[\frac{F-(m_1+m_2)g}{B(l_2-l_1)}\right]^2 R$$

解题捷径 9

【精析】 设进入螺线管磁场中的粒子的速度为 v，可以认为它们的速率很相近，且速度方向与磁感应强度的方向之间的夹角 θ 很小，其速度在平行和垂直于磁感应强度方向上分量 $v_{/\!/}$ 和 $v_{\perp}$ 分别为

$$v_{/\!/} = v\cos\theta \approx v, v_{\perp} = v\sin\theta \approx v\theta,$$

由于各粒子与磁场的夹角不同，所以垂直分量不同，各粒子在洛仑兹力作用下将沿不同半径的螺旋线前进，但它们的平行分量近似相等，经过一个螺距 h 后（$h = v_{/\!/} T = \frac{2\pi m v_{/\!/}}{Bq} \approx \frac{2\pi m v}{Bq}$），它们又重新会聚在 A' 点，这与光束经透镜后聚焦的现象有些类似，所以叫磁聚焦现象。

解题捷径 10

【精析】 由于 b 静止在电场中，则一定带负电，设 b 的质量、电量分别为 m 和 $-q$，b 受力平衡，有

$$mg = Eq \tag{1}$$

开始 a 仅受重力 $2mg$、电场力 $4Eq$，向下运动，而又在洛仑兹力作用下向右偏转，由左手定则知 a 只能带正电，设 a 与 b 碰时速度为 v_0，碰后共同速度为 v，则由动量守恒得：

$$2mv_0=3mv \tag{2}$$

碰后的电量为

$$Q=4q-q=3q \tag{3}$$

碰后结合体沿水平方向做直线运动，则一定做匀速直线运动，由三力平衡得

$$3mg+3Eq=3Bqv \tag{4}$$

a 由初始位置下落到最低点的过程中，洛仑兹力不做功，则由动能定理得

$$4Eqh+2mgh=\frac{1}{2}\times 2mv_0^2 \tag{5}$$

联解(1)(2)(3)(4)(5)式得：$h=\dfrac{3E^2}{2gB^2}$。

解题捷径 11

【精析】 (1)设半径为 r_0 的粒子加速后的速度为 v_0，则

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2=q_0U,\ v_0=\sqrt{\frac{2q_0U}{m_0}}。$$

设区域Ⅱ内电场强度为 E，则

$$E=v_0B=B\sqrt{\frac{2q_0U}{m_0}},$$

$v_0q_0B=q_0E$，电场强度方向竖直向上。

(2)设半径为 r 的粒子的质量为 m、带电量为 q、被加速后的速度为 v，则

$$m=\left(\frac{r}{r_0}\right)^3m_0,\ q=\left(\frac{r}{r_0}\right)^2q_0,$$

$$\frac{1}{2}mv^2=qU,$$

得

$$v=\sqrt{\frac{2q_0U_0r}{m_0r}}=\sqrt{\frac{r_0}{r}}v_0。$$

(3)半径为 r 的粒子，在刚进入区域Ⅱ时受到合力为：

$$F_{合}=qE-qvB=qB(v_0-v),$$

由 $v=\sqrt{\dfrac{r_0}{r}}v_0$ 可知，当 $r>r_0$ 时，$v<v_0$，$F_{合}>0$，粒子会向上极板偏转；$r<r_0$ 时，$v>v_0$，$F_{合}<0$，粒子会向下极板偏转。

解题捷径 12

【精析】 线圈转过 $90°$角的过程中，感应电动势和感应电流的平均值分别为

$$\overline{E}=N\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},\ \overline{I}=\frac{\overline{E}}{R}=N\cdot\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t},$$

所以，流过导体截面的电量为 $Q=\bar{I}\Delta t=N\dfrac{\Delta\Phi}{R}=N\dfrac{Ba^2}{R}$。

解题捷径 13

【精析】 对于有多个副线圈的变压器，变流比的规律不在满足，所以，②错。由规律可知：①③④都正确。所以，C 答案正确。

解题捷径 14

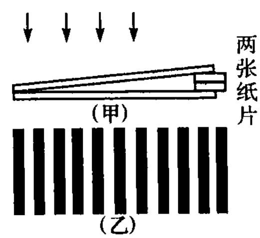
【精析】 当电键 S 接通时，负载电阻变小，副线圈上的电流增大，原线圈中电流表示数增大，A 正确。输电线上产生的损耗增大，D 正确。副线圈两端 MN 的电压不变，所以，B 错误。副线圈两端 MN 的电压不变，输电线电压增大，灯 L_1 两端电压减小，灯泡 L_1 的亮度变暗，所以，C 正确。故 ACD 正确。

第九章　光学、近代物理中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：在劈尖膜干涉中，劈尖的交角 α 要非常小，干涉条纹间距 x 与劈尖的交角 α 以及光的波长 λ 满足：$x\sin\alpha=\frac{\lambda}{2}$。

【题目】 劈尖干涉是一种薄膜干涉，其装置如图一所示。将一块平板玻璃放置在另一平板玻璃之上，在一端夹入两张纸片，从而在两块平板玻璃表面之间形成一个劈形空气薄膜，当光垂直入射后，从上往下看到的干涉条纹如图(乙)所示。干涉条纹有如下特点：(1)任意一条明条纹或暗条纹所在位置下面的薄膜厚度相等；(2)任意相邻明条纹或暗条纹所对应的薄膜厚度差恒定。现若在图(甲)装置中抽去一张纸片，则当光垂直入射到新的劈形空气薄膜后，从上往下观察到的干涉条纹(　　)



图一

A. 变疏　　B. 变密

C. 不变　　D. 消失

【精析】 从图甲中抽去一张纸意味着劈尖角变小，由 $x\sin\alpha=\frac{\lambda}{2}$ 知：条纹间距变大，即变疏。所以 A 答案正确。

小试二：放射性元素 ${}^{M}_{Z}A$ 经 m 次 α 衰变和 n 次 β 衰变成 ${}^{M'}_{Z'}B$，则 $m=\frac{(M-M')}{4}$，$n=Z'-Z+\frac{(M-M')}{2}$。

【题目】 ${}^{232}_{90}Th$(钍)经过一系列 α 衰变和 β 衰变，变成 ${}^{208}_{82}Pb$(铅)，下列说法中正确的是(　　)

A. 铅核比钍核少 8 个质子　　B. 铅核比钍核少 16 个质子

C. 共经过 4 次 α 衰变和 6 次 β 衰变　　D. 共经过 6 次 α 衰变和 4 次 β 衰变

【精析】 根据质量数的减少确定 α 衰变的次数为 $m=\frac{M-M'}{4}=\frac{232-208}{4}=6$ 次，再结合核电荷数的变化情况和衰变规律来判定 β 衰变的次数：

$$n=Z'-Z+\frac{M-M'}{2}=82-90+\frac{232-208}{2}=4\text{ 次},$$

答案 D 是正确的。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

有关影运动问题的分析，从运动物体(光源或障碍物)的运动状态入手，找出影的运动与物体的运动的联系，利用运动学知识解决。

解题捷径 2

当入射光线的方向不变时，平面镜绕镜上某点转过一个微小角度 θ 时，根据反射定律，法线也随之转过 θ 角，反射光线则偏转 2θ 角。

解题捷径 3

光线由真空射入折射率为 n 的介质时，如果入射角 θ 满足 $\tan\theta=n$，则反射光和折射光一定垂直；若反射光和折射光垂直，则入射角 θ 满足 $\tan\theta=n$；若光线从介质射入空气，则在介质中的入射角 θ 满足 $\tan\theta=\frac{1}{n}$。

解题捷径 4

根据平面镜成像特点作图：先根据成像的对称性作出物点的像点，然后作出物点射向平面镜上的任意两条光线，最后将像点与两入射光线在平面镜上的入射点分别用直线连接，并在镜前延长这两直线即为两条反射光线。

解题捷径 5

平面镜中，物点与像点对称，物点和像点的连线与平面镜的交点必在同一直线，且直线垂直于平面镜。

解题捷径 6

关于平面镜中表的读数问题：首先确定表的正确位置，即 12 点在最上面，然后，按照逆时针方向读数即可。

解题捷径 7

单色光从真空进入介质时，频率不变，光的颜色不变，光子的能量不变。由 $n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{c}{v}=\frac{\lambda_0}{\lambda}$ 可知，在同一种介质中，频率较高的光速较小，波长较短。

解题捷径 8

产生全反射的条件：(1)光从光密介质射入到光疏介质；(2)入射角大于等于临界角。由临界角 $\sin C=\frac{1}{n}$ 知：折射率越大的单色光越容易发生全反射。

解题捷径 9

在劈尖膜干涉中，劈尖的交角 α 要非常小，干涉条纹间距 x 与劈尖的交角 α 以及光的波长 λ 满足：$x\sin\alpha=\frac{\lambda}{2}$。

解题捷径 10

在光学元件（透镜、棱镜）的表面涂一层薄膜，当薄膜的厚度是入射光在薄膜中波长的 $\frac{1}{4}$ 时，在薄膜的两个面上的反射光，光程差恰好等于半波长，因而相互抵消，达到减小反射光、增大透射光强度的作用。

解题捷径 11

某单色光从空气射入介质或从介质射向空气，入射光的方向和出射光的方向偏折越大，则介质对该单色光的折射率越大，且该单色光的频率也越大。

解题捷径 12

由水平面上看水下的光源时，视深 $d'=\frac{d}{n}$；若由水面下看水上光源时，视高 $d'=dn$。

解题捷径 13

玻璃砖问题：(1)当玻璃砖两边界平行时，入射光与出射光平行，否则不平行；(2)玻璃砖两界面是否平行，不影响折射率的测定；(3)出射光线的出射点只能在入射光的左侧，并在入射点的右侧，侧移量 Δx 与玻璃砖的厚度 d 满足 $\Delta x=d\sin i\left(1-\frac{\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right)$；(4)两界面平行的玻璃砖，在玻璃砖下表面不可能发生全反射现象。

解题捷径 14

任何频率的光子所具有的能量，都是相对该频率的最小能量元，具有不可分割性，所

以，只有光子的能量等于两能级之差时，才能被吸收，即 $h\gamma=E_n-E_m$；

电子的能量可以连续改变，即具有可分割性，所以，电子的能量被吸收的条件为 $E\geqslant E_n-E_m$。

解题捷径 15

氢原子的激发态和基态的能量与核外电子轨道半径间的关系是：$E_n=\frac{E}{n^2}$，$r_n=n^2r_1$，由 n 激发态跃迁到基态所有的方式共有 $N=\frac{n(n-1)}{2}$种。

解题捷径 16

双缝干涉的条纹间隔与光波波长 λ 成正比，与双缝间隔 d 成反比，与双缝到屏的距离 L 成正比，即 $\Delta x=L\lambda/d$。

解题捷径 17

静止的原子核在匀强磁场中发生 α 衰变时，会形成外切圆径迹，发生 β 衰变时，会形成内切圆径迹，且大圆径迹分别是由 α，β 粒子形成的，且反冲核满足动量和能量守恒。

解题捷径 18

放射性元素衰变时放出的三种射线，不论是垂直进入匀强电场，还是匀强磁场，偏转角度大的（或半径小的）是 β 粒子，偏转角度小的（或半径大的）是 α 粒子。

解题捷径 19

放射性元素${}^{M}_{Z}\mathrm{A}$ 经 m 次 α 衰变和 n 次 β 衰变成${}^{M'}_{Z'}\mathrm{B}$，则 $m=\frac{(M-M')}{4}$，$n=Z'-Z+\frac{(M-M')}{2}$。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

有关影运动问题的分析，从运动物体（光源或障碍物）的运动状态入手，找出影的运动与物体的运动的联系，利用运动学知识解决。

【范例】 房间内 h 高度有一点光源 S，并在该位置以初速度 v_0 水平抛出一个小球，如图 9-1-1 所示，则下落过程中球在 BC 上的影子做什么样的运动？

【精析】 设光源与墙的距离 L，如图 9-1-2 所示，经过时间 t，小球的水平位移为 $x=v_0t$，

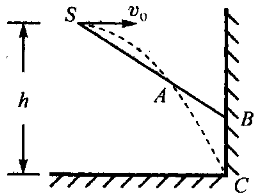


图 9-1-1

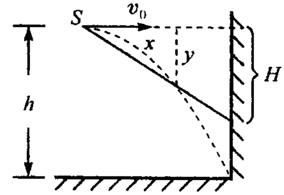


图 9-1-2

小球的竖直位移为 $y=\frac{1}{2}gt^2$。

由图可知：$\frac{y}{H}=\frac{v_0 t}{L}$，则影子的移动距离：

$$H=\frac{Ly}{v_0 t}=\frac{L\cdot\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}=\frac{gLt}{2v_0},$$

则$\frac{H}{t}=\frac{gL}{2v_0}$为一定值，即影子做匀速直线运动。

【同类精练】 如图 9-1-3 所示，P 为一堵墙，M 为高 $h=0.8$m 的矮墙，S 为一点光源，三者水平距离如图所示。S 以速度 $v_0=10$m/s 竖直向上抛出，求在落回地面前，矮墙在高墙上的影子消失的时间。

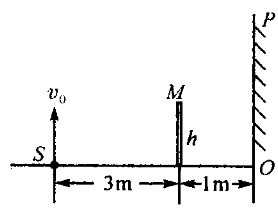


图 9-1-3

解题捷径 2

当入射光线的方向不变时，平面镜绕镜上某点转过一个微小角度 θ 时，根据反射定律，法线也随之转过 θ 角，反射光线则偏转 2θ 角。

【范例】 有一平面镜绕竖直轴转动，角速度 $\omega=2\pi$rad/s，现将一束光线射向平面镜，其反射光线可射至距平面镜 20m 远的圆弧形竖直墙壁上，其圆心在平面镜的转轴上，所对的圆心角 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，试求反射光点在墙壁上移动的速度是多少？在 1min 内，墙壁上有光线照射的时间是多长？

【精析】 如图 9-2-1 所示，当平面镜转过微小角度 α 时，其法线也转过 α 角，而反射光线将转过 2α 角，则其角速度 $\omega'=2\omega$。可得光点移动的线速度为

$$v=\omega' R=2\times2\pi\times20=251\mathrm{m/s},$$

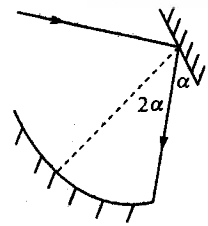


图 9-2-1

在一个周期内，反射光线照到墙壁上所对应的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，反射光线越过 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 时，平面镜转过的角度为 $\theta=\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{6}$，所对应的时间为 $t_1=\frac{\theta}{\omega}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\frac{1}{12}\mathrm{s}$，而平面镜的转动周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=1\mathrm{s}$，即在 1s 内墙壁上有光线照射的时间为$\frac{1}{12}$s。那么 1 分钟内，有光线照射到墙壁上的时间为 $t=60t_1=60\times\frac{1}{12}=5\mathrm{s}$。

【同类精练】 如图 9-2-2 所示，一平面镜 M 以角速度 $\omega=\frac{\pi}{3}\mathrm{rad/s}$ 绕垂直于纸面且通过 O 点的轴转动，AB 为一圆弧形屏幕，圆心也在 O 上，圆心角 $\angle AOB=120°$，现有来自闪频光源的一细束光 CO 射向平面镜，光源每秒闪光 12 次，求平面镜每转一周，屏幕 AB 上能出现多少个亮点？

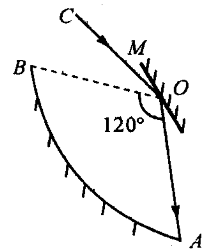


图 9-2-2

解题捷径 3

光线由真空射入折射率为 n 的介质时，如果入射角 θ 满足 $\tan\theta=n$，则反射光和折射光一定垂直；若反射光和折射光垂直，则入射角 θ 满足 $\tan\theta=n$；若光线从介质射入空气，则在介质中的入射角 θ 满足 $\tan\theta=\frac{1}{n}$。

【范例】 一束光从空气射入某折射率为$\sqrt{3}$的介质中，其反射光线与折射光线相互垂直，则入射角为多少？

【精析】 由规律知：$\tan\theta=n$，即 $\tan\theta=\sqrt{3}$，所以，入射角 $\theta=60°$。

【同类精练】 当光线以 30°的入射角从某介质射向空气时，反射光线与折射光线垂直，求介质的折射率及光在介质中的光速。

解题捷径 4

根据平面镜成像特点作图：先根据成像的对称性作出物点的像点，然后作出物点射向平面镜上的任意两条光线，最后将像点与两入射光线在平面镜上的入射点分别用直线连接，并在镜前延长这两直线即为两条反射光线。

【范例】 如图 9-4-1 所示，一个人站在竖直墙的一侧，其眼睛位于 E 点，用作图法画出他通过头顶上方水平放置的平面镜 MN 可以看到竖直墙另一侧地面的范围。

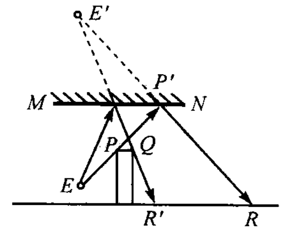


图 9-4-1

【精析】 先找到眼睛在平面镜中的虚像 E'，连接 EP 交平面镜上的 P' 点，连接 $E'P'$ 延长至 R，再连接 $E'Q$ 延长至地面上 R' 点，$R'R$ 之间的地面即为眼睛通过平面镜所看到的范围。

【同类精练】 如图 9-4-2 所示，AB 表示一水平放置的平面镜的断面，P_1P_2 是呈水平放置的米尺（有刻度线的一面朝着平面镜），MN 是屏，三者互相平行，屏 MN 上的 ab 表示一条竖直的缝（即 ab 之间是透光的），某人眼睛紧贴米尺上的小孔 S，可通过平面镜看到米尺的一部分刻度，试在题图中用三角板作图求出可看到的部位，并在 P_1P_2 上把这部分表示出来。

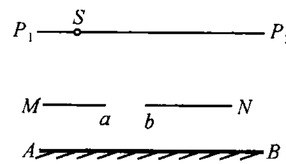


图 9-4-2

解题捷径 5

平面镜中，物点与像点对称，物点和像点的连线与平面镜的交点必在同一直线，且直线垂直于平面镜。

【范例】 如图 9-5-1 所示，一个点光源 S 通过平面镜成像。若光源不动，平面镜以速率 v 沿 OS 方向向光源平移，且镜面与 OS 方向的夹角为 30°，则光源的像 S'（原图中未画出）（　　）

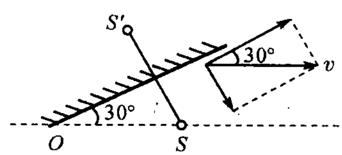


图 9-5-1

A. 以速率 v，平行 OS 向右运动

B. 以速率 v，垂直 OS 向下运动

C. 以速率 $\sqrt{3}v$，沿 $S'S$ 连线向 S 运动

D. 以速率 v，沿 $S'S$ 连线向 S 运动

【精析】 不论平面镜如何运动，像点和物点总是在垂直平面镜的连接直线 $S'S$ 上。在垂直镜面的方向上，镜以 $v\sin30^\circ$ 的速率向 S 运动。根据 S 与 S' 具有对称性，S' 与 S 的相对速率为 $v'=2v\sin30^\circ=v$。

所以，D 正确。

【同类精练】 如图 9-5-2 所示，宽度为 d 的平面镜 MN 立于水平地面上，在平面镜的正前方 A 点处（A 点距平面镜 M、N 点等距离），有一人面对平面镜站在水平地面上，A 点距镜面 h 远。在平面镜的前方与镜面平行的直线 PQ 上有一点光源 S，从远处以速度 v 沿直线 QP 运动，已知直线 PQ 与镜面相距 $H(H>h)$远。求人通过平面镜可以看到发光点 S 的时间是多少？

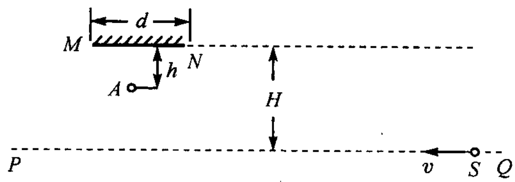


图 9-5-2

解题捷径 6

关于平面镜中表的读数问题：首先确定表的正确位置，即 12 点在最上面，然后，按照逆时针方向读数即可。

【范例】 某人从平面镜中看到时针如图 9-6-1 所示，则当时的时间是（　　）

A. 7 点 25 分　　B. 4 点 35 分　　C. 11 点 05 分　　D. 1 点 05 分

【精析】 如图所示最上面的刻线为 12 点，则按逆时针方向读数为：4 点 35 分。

所以，应选答案 B。

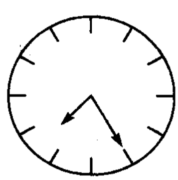


图 9-6-1

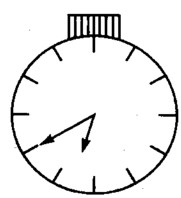


图 9-6-2

【同类精练】 如图 9-6-2 所示，是一块平面镜中观察到的一只手表的指示情况，此时手表所指示的时刻是(　　)

A. 6 点 40 分　　B. 5 点 20 分　　C. 2 点 05 分　　D. 8 点 35 分

解题捷径 7

单色光从真空进入介质时，频率不变，光的颜色不变，光子的能量不变。由 $n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{c}{v}=\frac{\lambda_0}{\lambda}$ 可知，在同一种介质中，频率较高的光速较小，波长较短。

【范例】 已知玻璃对紫光的折射率比对红光的大，则下列说法中正确的是(　　)

A. 在玻璃中红光的波长比紫光的大

B. 在玻璃中红光的频率比紫光的大

C. 在玻璃中红光的传播速度比紫光的大

D. 红光光子的能量比紫光光子的能量大

【精析】 由 $n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{c}{v}=\frac{\lambda_0}{\lambda}$ 知 A、C 正确。

【同类精练】 如图 9-7-1 所示，a、b 两束不同的单色光平行地从空气中射入水中，发生折射，折射角 $\alpha>\beta$，则下述结论中正确的是(　　)

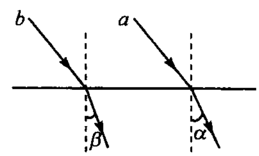


图 9-7-1

A. 水对光束 a 的折射率较大

B. 水中光束 b 的速度较小

C. 光束 a 的频率较小

D. 若从水中射向空气，光束 a 的临界角较光束 b 的临界角大

解题捷径 8

产生全反射的条件：(1)光从光密介质射入到光疏介质；(2)入射角大于等于临界角。由临界角 $\sin C=\frac{1}{n}$ 知：折射率越大的单色光越容易发生全反射。

【范例】 如图 9-8-1 所示，为一直光导纤维，AB 之间距离 s，使一光脉冲信号从光导纤维中间入射，射入后在光导纤维与空气的界面上恰好发生全反射，由 A 点传输到 B 点所用的时间为 t，求光导纤维所用材料的折射率。

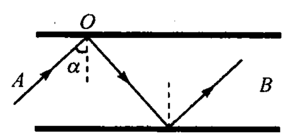


图 9-8-1

【精析】 光信号由 A 点进入光导纤维后，沿 AO 方向射到 O 点，此时入射角 α 恰好等于临界角。光在此介质中的速度为 v，而沿水平方向的分速度为 $v\sin\alpha$，沿水平方向传播的距离为 s。设介质的折射率为 n，则有

$$\sin\alpha=\sin C=\frac{1}{n} \quad (1)$$

$$n=\frac{c}{v} \quad (2)$$

$$t=\frac{s}{v\sin\alpha} \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得 $t=\dfrac{s}{\dfrac{c}{n}\cdot\dfrac{1}{n}}=\dfrac{sn^2}{c}$，所以，$n=\sqrt{\dfrac{ct}{s}}$。

【同类精练】 如图 9-8-2 所示，只含黄光和紫光的复色光束 PO，沿半径方向射入空气中的玻璃半圆柱后，被分成两束 OA 和 OB 沿如图所示方向射出，则(　　)

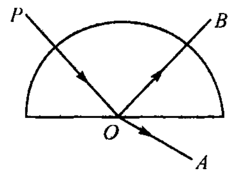


图 9-8-2

A. OA 为黄光，OB 为紫光

B. OA 为紫光，OB 为黄光

C. OA 为黄光，OB 为复色光

D. OA 为紫光，OB 为复色光

解题捷径 9

在劈尖膜干涉中，劈尖的交角 α 要非常小，干涉条纹间距 x 与劈尖的交角 α 以及光的波长 λ 满足：$x\sin\alpha=\dfrac{\lambda}{2}$。

【范例】 劈尖干涉是一种薄膜干涉，其装置如图 9-9-1 所示。将一块平板玻璃放置在另一平板玻璃之上，在一端夹入两张纸片，从而在两玻璃表面之间形成一个劈形空气薄膜，当光垂直入射后，从上往下看到的干涉条纹如图(乙)所示。干涉条纹有如下特点：(1)任意一条明条纹或暗条纹所在位置下面的薄膜厚度相等；(2)任意相邻明条纹或暗条纹所对应的薄膜厚度差恒定。现若在图(甲)装置中抽去一张纸片，则当光垂直入射到新的劈形空气薄膜后，从上往下观察到的干涉条纹(　　)

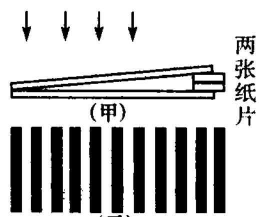


图 9-9-1

A. 变疏　　B. 变密　　C. 不变　　D. 消失

【精析】 从图甲中抽去一张纸意味着劈尖角变小，由 $x\sin\alpha=\dfrac{\lambda}{2}$ 知：条纹间距变大，即变疏。所以 A 答案正确。

【同类精练】 如图 9-9-2 甲所示，用单色光照射透明标准板 M 来检查零件 N 的表面情况，观察到如图乙所示的条纹，这说明(　　)

A. N 的表面 P 处向上凸起　　B. N 的表面 Q 处向上凸起

C. N 的表面 P 处向下凹陷　　D. N 的表面 Q 处向下凹陷

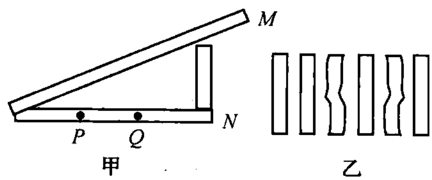


图 9-9-2

解题捷径 10

在光学元件(透镜、棱镜)的表面涂一层薄膜,当薄膜的厚度是入射光在薄膜中波长的 $\frac{1}{4}$ 时,在薄膜的两个面上的反射光,光程差恰好等于半波长,因而相互抵消,达到减小反射光、增大透射光强度的作用。

【范例】 高级照相机的镜头上有一层增透膜,看上去呈淡紫色。这是因为(　　)

A. 增透膜明显地增强了红光的透射能力

B. 增透膜明显地增强了紫光的透射能力

C. 增透膜明显地增强了绿光的透射能力

D. 增透膜明显地增强了红光和紫光的反射能力

【精析】 入射光一般都是白光,是由各种不同波长的单色光复合而成的。增透膜不可能使所有波长的反射波都互相抵消。因此,在确定薄膜厚度时,应该使光谱中间部分的绿色光,即人的视觉最敏感的光,在垂直入射时完全抵消。这时,光谱边沿部分的红光和紫光并没有显著削弱,所以有增透膜的光学镜头呈淡紫色。

所以,答案应选 C。

【同类精练】 市场上有种灯具俗称"冷光灯",用它照射物品时能使被照物品处产生的热效应大大降低,从而广泛地应用于博物馆、商店等。这种灯降低热效应的原因之一是在灯泡后面放置的反光玻璃表面上镀了一层薄膜(例如氟化镁),这种膜能消除不镀膜时玻璃表面反射回来的热效应最显著的红外线。以 λ 表示此红外线的波长,则所镀薄膜的厚度最小应为(　　)

A. $\frac{1}{8}\lambda$　　B. $\frac{1}{4}\lambda$　　C. $\frac{1}{2}\lambda$　　D. λ

解题捷径 11

某单色光从空气射入介质或从介质射向空气,入射光的方向和出射光的方向偏折越大,则介质对该单色光的折射率越大,且该单色光的频率也越大。

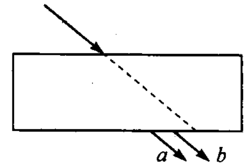


图 9-11-1

【范例】　一束可见光射到置于空气中的平行玻璃砖上，穿过玻璃砖后从下表面射出，变为 a、b 两束平行单色光，如图 9-11-1 所示。如果光束 b 是蓝色，则光束 a 可能是（　　）

A. 红光　　　　B. 黄光

C. 绿光　　　　D. 紫光

【精析】　由图可知：光束 a 的偏折较大，对应的折射率也较大，玻璃对紫光的折射率最大，所以，光束 a 可能是紫光。

所以，应选答案 D。

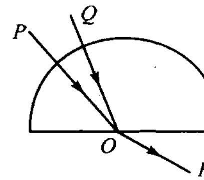


图 9-11-2

【同类精练】　如图 9-11-2 所示，两束不同的单色光 P 和 Q，射向半圆形玻璃砖，其出射光线都是从圆心 O 点沿 OF 方向射出，由此可知（　　）

A. P 光束的光子能量比 Q 光大

B. Q 光束穿过玻璃砖所需的时间比 P 光短

C. 若 P 光能使某金属发生光电效应，则 Q 光也一定能使其发生光电效应

D. 该两束光以相同的入射角从水中射向空气，若 Q 光能发生全反射，则 P 光也一定能发生全反射

解题捷径 12

由水平面上看水下的光源时，视深 $d'=\dfrac{d}{n}$；若由水面下看水上光源时，视高 $d'=dn$。

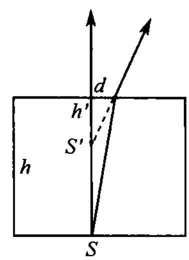


图 9-12-1

【范例】　如图 9-12-1 所示，玻璃砖的厚度为 h，折射率为 n，将其放在桌面的书上，透过玻璃砖从正上方观看书中的字，它的像提高了多少？

【精析】　字 S 发出的光线，经玻璃砖上表面折射，出射光线的反向延长线的交点即为字 S 的虚像点 S'，我们选一条光线竖直向上射出，不改变传播方向，另一条取近轴光线经上表面折射，反向延长交于 S' 点，S' 到上表面距离为 h'，像提高的距离为 $\Delta x=h-h'$，

$$\text{又}\because n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\dfrac{d}{\sqrt{h'^2+d^2}}}{\dfrac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}}=\sqrt{\frac{h^2+d^2}{h'^2+d^2}},$$

因为从正上方观看，光线偏移距离 $d \ll h$（和 h'），

$\therefore n\approx\dfrac{h}{h'}$，则 $\Delta x=h-\dfrac{h}{n}=h\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$。

【同类精练】 空中有一只小鸟，距水面3m，其正下方距水面4m深处的水中有一条鱼，已知水的折射率为$\frac{4}{3}$，则鸟看到鱼离它__________m，鱼看到鸟离它__________m。

解题捷径 13

玻璃砖问题：(1)当玻璃砖两边界平行时，入射光与出射光平行，否则不平行；(2)玻璃砖两界面是否平行，不影响折射率的测定；(3)出射光线的出射点只能在入射光的左侧，并在入射点的右侧，侧移量Δx与玻璃砖的厚度d满足$\Delta x = d\sin i\left(1-\frac{\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right)$；(4)两界面平行的玻璃砖，在玻璃砖下表面不可能发生全反射现象。

【范例】 如图9-13-1所示，光线斜射到一块两面平行的玻璃砖的一个侧面，出射光线相对入射光线发生平行侧移，侧移量d的大小与下列物理量有关的是(　　)

A. 玻璃的折射率　　　　B. 玻璃砖的厚度

C. 入射角的大小　　　　D. 与以上物理量均无关

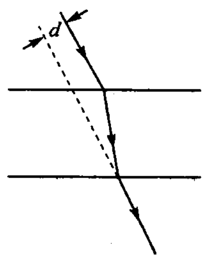


图9-13-1

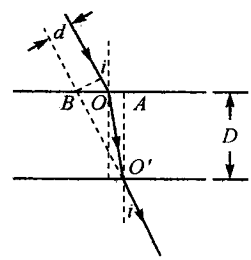


图9-13-2

【精析】 如图9-13-2所示，设玻璃砖的厚度为D，折射率为n，入射角为i，折射角为γ

$$d=(AB-OA)\cos i \tag{1}$$

而
$$AB=D\tan i, OA=D\tan r \tag{2}$$

有
$$\sin r=\frac{\sin i}{n},$$

$$\cos r=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2 i},$$

所以，

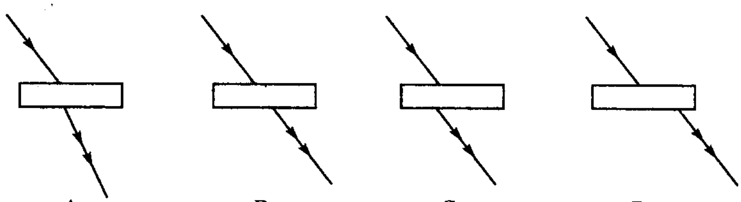
$$\tan r=\frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}} \tag{3}$$

由(1)(2)(3)得

$$d=D\sin i\left(1-\frac{\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right),$$

显见，d 与 n、D、i 均有关，故选 ABC。

【同类精练】 在测定玻璃的折射率的实验中，对一块两面平行的玻璃砖，用插针法找出与入射光线对应的出射光线，现有如图 9-13-3 所示四幅示意图，则其中正确的是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

图 9-13-3

解题捷径 14

任何频率的光子所具有的能量，都是相对该频率的最小能量元，具有不可分割性，所以，只有光子的能量等于两能级之差时，才能被吸收，即 $h\gamma=E_n-E_m$；电子的能量可以连续改变，即具有可分割性，所以，电子的能量被吸收的条件为 $E\geqslant E_n-E_m$。

【范例】 在下列情况下处于基态的氢原子可以跃迁到哪一能级上？

(1)利用动能为 11eV 的电子激发氢原子；(2)利用能量为 11eV 的光子激发氢原子。

【精析】 根据从 $n=1$ 的基态跃迁到 $n=2$ 的激发态，所需的能量为

$$\Delta E_{21}=E_2-E_1=-3.4-(-13.6)=10.2\text{eV},$$

而跃迁到 $n=3$ 的激发态则需能量为

$$\Delta E_{31}=E_3-E_1=-1.51-(-13.6)=12.09\text{eV},$$

所以在 11eV 电子的激发态下，氢原子可以从基态跃迁到 $n=2$ 的激发态。

因为氢原子不能吸收 11eV 的光子，所以这种光子的能量只能转化为氢原子的内能，而不能使氢原子受激发光。

【同类精练】 欲使处于基态的氢原子激发，下列措施可行的是(　　)

A. 用 10.2eV 的光子照射　　B. 用 11eV 的光子照射

C. 用 14eV 的光子照射　　D. 用 10eV 的光子照射

解题捷径 15

氢原子的激发态和基态的能量与核外电子轨道半径间的关系是：$E_n=\dfrac{E}{n^2}$，$r_n=n^2r_1$，由 n 激发态跃迁到基态所有的方式共有 $N=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 种。

【范例】 一群处于 $n=4$ 的激发状态的氢原子，向低能级跃迁时，可能发射的谱线为

(　　)

A. 3 条　　B. 4 条　　C. 5 条　　D. 6 条

【精析】 处于高能级的原子向低能级跃迁时，最终都要跃迁到最低能级，是直接跃迁到最低能级还是先跃迁到某一较低能级再跃迁到最低能级，受偶然因素支配，因此大量原子激发后，各种可能的跃迁都会发生。由数学的排列组合知识可以算出共可产生 6 条谱线。选 D。

【同类精练】 当氢原子的电子处于第 n 条可能轨道时，则下列说法中正确的是(　　)

A. 电子的轨道半径 $r_n=n^2r_1$

B. 根据 $E_n=\frac{E_1}{n^2}$，n 值越大，能量越小

C. 原子从 n 能级跃迁到 $n-1$ 能级时，辐射光子的波长为 $\frac{E_n-E_{n-1}}{h}$

D. 大量处于这一状态的氢原子，辐射光子的频率有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 种

解题捷径 16

双缝干涉的条纹间隔与光波波长 λ 成正比，与双缝间隔 d 成反比，与双缝到屏的距离 L 成正比，即 $\Delta x=L\lambda/d$。

【范例】 分别以红光和紫光先后用同一装置进行双缝干涉实验，在屏上得到相邻的明条纹的距离为 Δx_1 和 Δx_2，则(　　)

A. $\Delta x_1<\Delta x_2$

B. $\Delta x_1>\Delta x_2$

C. 若双缝间距 d 减小，而其他条件不变，则 Δx_1 增大

D. 若双缝间距 d 减小，而其他条件不变，则 Δx_1 不变

【精析】 由 $\Delta x=L\lambda/d$ 规律知：答案 BC 正确。

【同类精练】 激光散斑测速是一种崭新的测速技术，它应用了光的干涉原理。用二次曝光照相所获得的“散斑对”相当于双缝干涉实验中的双缝，待测物体的速度 v 与二次曝光时间间隔 Δt 的乘积等于双缝间距。实验中可测得二次曝光时间间隔 Δt、双缝到屏之间距离 l 以及相邻两条亮纹间距 Δx。若所用激光波长为 λ，则该实验确定物体运动速度的表达式是(　　)

A. $v=\frac{\lambda\Delta x}{l\Delta t}$　　B. $v=\frac{l\lambda}{\Delta x\Delta t}$

C. $v=\frac{l\Delta x}{\lambda\Delta t}$　　D. $v=\frac{l\Delta t}{\lambda\Delta x}$

解题捷径 17

静止的原子核在匀强磁场中发生 α 衰变时，会形成外切圆径迹，发生 β 衰变时，会形成内切圆径迹，且大圆径迹分别是由 α、β 粒子形成的，且反冲核满足动量和能量守恒。

【范例】 一个静止的放射性同位素的原子核 $^{30}_{15}\mathrm{P}$ 衰变为 $^{30}_{14}\mathrm{Si}$，另一个静止的天然放射性元素的原子核 $^{234}_{90}\mathrm{Th}$ 衰变为 $^{234}_{91}\mathrm{Pa}$，在同一磁场中，得到衰变后粒子的运动轨迹 1、2、3、4，如图 9-17-1 所示，则这四条轨迹依次是(　　)

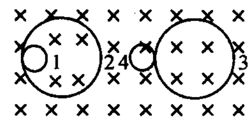


图 9-17-1

A. 电子、$^{234}_{91}\mathrm{Pa}$、$^{30}_{14}\mathrm{Si}$、正电子

B. $^{234}_{91}\mathrm{Pa}$、电子、正电子、$^{30}_{14}\mathrm{Si}$

C. $^{30}_{14}\mathrm{Si}$、正电子、电子、$^{234}_{91}\mathrm{Pa}$

D. 正电子、$^{30}_{14}\mathrm{Si}$、$^{234}_{91}\mathrm{Pa}$、电子

【精析】 B。根据运动半径知 1、4 为反冲核，根据旋转方向知 2 是电子，3 是正电子。

【同类精练】 如图 9-17-2 所示，两个相切的圆表示一个静止的原子核发生某种核变化后，产生的两种运动粒子在匀强磁场中的运动轨迹，可能是(　　)

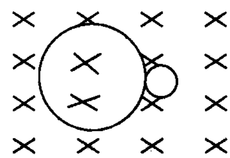


图 9-17-2

A. 原子核发生了 α 衰变

B. 原子核发生了 β 衰变

C. 原子核放出了一个正电子

D. 原子核放出了一个中子

解题捷径 18

放射性元素衰变时放出的三种射线，不论是垂直进入匀强电场，还是匀强磁场，偏转角度大的(或半径小的)是 β 粒子，偏转角度小的(或半径大的)是 α 粒子。

【范例】 如图 9-18-1 所示，P 为放在匀强电场中的天然放射源，其放出的射线在电场的作用下分成 a、b、c 三束，以下判断中正确的是(　　)

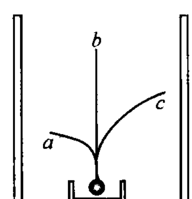


图 9-18-1

A. a 为 α 射线，b 为 β 射线

B. a 为 β 射线，b 为 γ 射线

C. c 为 α 射线，b 为 γ 射线

D. c 为 γ 射线，b 为 α 射线

【精析】 由图可知，在匀强电场中，偏转角度较大的 a 应为 β 射线，不偏转的 b 应为 γ 射线，偏转角度较小的 c 应为 α 射线。所以，答案 B 正确。

【同类精练】 如图 9-18-2 所示是放射性元素的原子核放出的甲、乙、丙三种射线在匀强磁场中的轨迹，由此可知(　　)

A. 甲的电离本领最强

B. 丙的电离本领最强

C. 乙的穿透本领最强

D. 丙的穿透本领最强

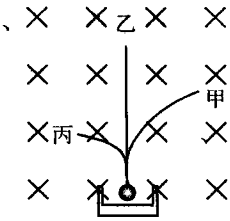


图 9-18-2

解题捷径 19

放射性元素$^{M}_{Z}$A 经 m 次 α 衰变和 n 次 β 衰变成$^{M'}_{Z'}$B，则 $m=\frac{(M-M')}{4}$，$n=Z'-Z+\frac{(M-M')}{2}$。

【范例】 $^{232}_{90}$Th(钍)经过一系列 α 衰变和 β 衰变，变成$^{208}_{82}$Pb(铅)，下列说法中正确的是(　　)

A. 铅核比钍核少 8 个质子　　B. 铅核比钍核少 16 个质子

C. 共经过 4 次 α 衰变和 6 次 β 衰变　　D. 共经过 6 次 α 衰变和 4 次 β 衰变

【精析】 根据质量数的减少确定 α 衰变的次数为 $m=\frac{M-M'}{4}=\frac{232-208}{4}=6$ 次

再结合核电荷数的变化情况和衰变规律来判定 β 衰变的次数：

$$n=Z'-Z+\frac{M-M'}{2}=82-90+\frac{232-208}{2}=4\text{ 次}$$

答案 D 是正确的。

【同类精练】 下列说法中正确的是(　　)

A. $^{226}_{88}$Ra 衰变为$^{222}_{86}$Rn 要经过 1 次 α 衰变和 1 次 β 衰变

B. $^{238}_{92}$U 衰变为$^{206}_{82}$Pb 要经过 8 次 α 衰变和 6 次 β 衰变

C. $^{232}_{90}$Th 衰变为$^{208}_{82}$Pb 要经过 6 次 α 衰变和 4 次 β 衰变

D. $^{238}_{92}$U 衰变为$^{222}_{86}$Rn 要经过 4 次 α 衰变和 4 次 β 衰变

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 矮墙在高墙上的影子的高度可将 SM 相连并延长交 PO 于点 M'，即是 M 点的影 M'，随着 S 上升，直线 SM'绕 M 转。当 M'到 O 点时，S 再上升，则在高墙上看不到矮墙的影子(如图 9-1 所示)。

设 S 上升 h' 时即看不到矮墙在高墙上的影，

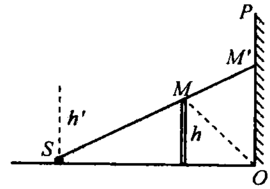


图 9-1

连 OM 并延长，则 $\frac{h}{h'}=\frac{1}{4}$，解得 $h'=3.2\text{m}$，

点光源 S 上升的最大高度为 H，

则 $H=\frac{v_0^2}{2g}=\frac{10^2}{2\times10}=5\text{m}$，

点光源在离地 3.2～5m 所用的时间为 t，

根据竖直上抛运动的对称性 $H-h'=\frac{1}{2}gt^2$，

所以，$t=\sqrt{\frac{2(H-h')}{g}}=\sqrt{\frac{2(5-3.2)}{10}}=0.6\text{s}$，

故矮墙在高墙上的影子消失的总时间 $t_{总}=2t=2\times0.6=1.2\text{s}$。

解题捷径 2

【精析】 反射光线在 120°的圆心角内时，屏幕上有光点出现，这期间，平面镜转过的角度为 60°，所对应时间为 $t=\frac{\frac{\pi}{3}}{\omega}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}=1\text{s}$，

在这 1s 内，闪光源闪频 12 次，即平面镜转一周，

$T=\frac{2\pi}{\omega}=6\text{s}$ 的时间内，照至屏幕上的光点会出现 12 个。

解题捷径 3

【精析】 由规律知：光线从介质射入空气，在介质中的入射角 θ 满足 $\tan\theta=\frac{1}{n}$，

所以，$n=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta=\cot30°=\sqrt{3}$，

由公式 $n=\frac{c}{v}$ 得该介质中光速为 $v=\frac{c}{n}=3.00\times10^8/\sqrt{3}=1.73\times10^8\text{m/s}$。

解题捷径 4

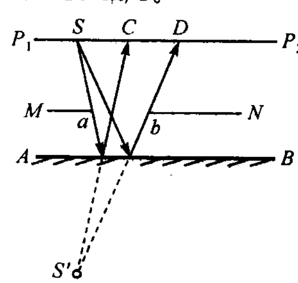


图 9-2

【精析】 如图 9-2 所示，先在平面镜中对称位置画出眼睛的像 S' 的位置，然后连接 Sa 至平面镜，再由 S' 与这交点连线延长至 P_1P_2 于 C 点，连 $S'b$ 交 P_1P_2 于 D 点，CD 之间刻度即为所求。

解题捷径 5

【精析】 像点和物点关于平面镜对称可确定 A 的像点 A'。

过 A' 点作两条边界光线可确定，

人在 A 点通过平面镜看到的光源 S 所在范围如图 9-3 所示，

设位于 A 点的人通过平面镜所看到的点光源 S 的范围为 L，由相似三角形可知

$$\frac{h}{h+H}=\frac{d}{L},$$

解出 $L=\frac{h+H}{h}\cdot d$，根据 $L=vt$，

所以 A 点的人通过平面镜所看到点光源 S 的时间为

$$t=\frac{h+H}{hv}\cdot d。$$

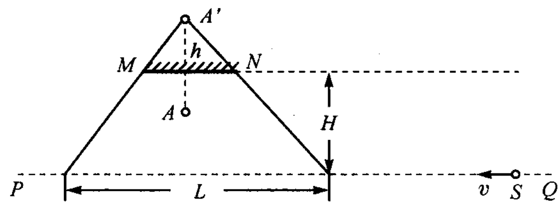


图 9-3

解题捷径 6

【精析】 因为手表发条旋钮的位置在 3 点是固定的，由图可知 12 点在最右的刻线处，则按逆时针方向读数为：8 点 35 分。所以，应选答案 D。

解题捷径 7

【精析】 由图可知水对光束 b 的折射率较大，故 A 错；由 $n=\frac{c}{v}$，得 $v_a>v_b$，故 B 正确，由于同一介质中，频率高的色光传播速度小，所以光束 a 的频率较光束 b 的频率小，故 C 错；若光束从水中射向空气，由 $\sin c=\frac{1}{n}$，光束 a 的临界角较光束 b 的临界角大，故 D 正确。选 BD。

解题捷径 8

【精析】 一束光在两种介质的分界面上既可发生反射，又可发生折射，当光束从光密介质射入光疏介质时，如果入射角大于等于临界角要发生全反射，而折射率越大的单色光越容易发生全反射。由图示知：OA 只能为黄光，而紫光已经发生全反射，所以 OB 光束既

含有反射光中的复色光，又有全反射中的紫光。所以，OB 为复色光。选 C。

解题捷径 9

【精析】 P 处条纹向左弯曲，弯曲处与左侧的条纹变密，由 $x\sin\alpha=\frac{\lambda}{2}$ 知：角度变大，即变厚，所以 P 处应向下凹陷；同理，Q 处的条纹与左侧的条纹变疏，意味着厚度变小，所以，Q 处向上凸起。

B、C 正确。

解题捷径 10

【精析】 为减小反射光的热效应显著的红外线，则要求红外线在薄膜的前后表面反射后叠加作用减弱，即光程差为半个波长的奇数倍，故膜的最小厚度为红外线在该膜中波长的 $\frac{1}{4}$。

所以，应选答案 B。

解题捷径 11

【精析】 由图可知：光束 Q 的偏折较大，对应的折射率也大，光束 Q 的频率也大，光子的能量也大，容易产生光电效应，容易发生全反射，光束 Q 在玻璃中的传播速度小，时间长。所以，只有 C 答案正确。

解题捷径 12

【精析】 由水平面上看水下的光源时，视深 $d'=\frac{d}{n}$，所以，鸟看到鱼离它 $d=3+\frac{4}{n}=3+3=6\text{m}$；若由水面下看水上光源时，视高 $d'=dn$，所以，鱼看到鸟离它 $d'=4+3n=4+4=8\text{m}$。

解题捷径 13

【精析】 由规律知：当玻璃砖两边界平行时，入射光与出射光平行，所以，A 错。出射光与入射光不可能不发生侧移，所以 B 错。出射光线的出射点只能在入射光的左侧，并在入射点的右侧，所以，D 错。故正确答案选 C。

解题捷径 14

【精析】 由上述规律可知：光子的能量只能等于两能级的能量差，题给数据只有 10.2eV 为第 2 能级与基态之间的能级差，而大于 13.6eV 的光子能使氢原子电离。

所以，应选 A、C 答案。

解题捷径 15

【精析】 电子的轨道半径 $r_n=n^2r_1$；因为氢原子的能量是负值，所以能级公式中的 n

值越大，能量越大；原子从 n 能级跃迁到 $n-1$ 能级时，辐射光子的波长为 $\lambda=\dfrac{hc}{E_2-E_1}$；大量处于第 n 能级的原子辐射光子频率有 C_n^2 种。选 A、D。

解题捷径 16

【精析】 根据 $v=\dfrac{l\lambda}{d}=\dfrac{l\lambda}{v\Delta t}$ 得 $v=\dfrac{l\lambda}{\Delta x\Delta t}$，故选项 B 正确。

解题捷径 17

【精析】 带电粒子在磁场中发生了衰变，由于无外力作用，由反冲核的动量守恒可知，新核与放出的粒子速度方向相反，若它们带相同性质的电荷，则它们的轨道应是外切圆，若它们的电荷的性质不同，则它们的轨道应是内切圆，图示的轨道说明了放出的是正电荷，所以可能是 α 衰变或放出了一个正电子，故正确选项为 A、C。

解题捷径 18

【精析】 由图可知，在匀强磁场中，偏转角度较大的丙应为 β 射线，不偏转的乙应为 γ 射线，偏转角度较小的甲应为 α 射线。所以，答案 A 正确。

解题捷径 19

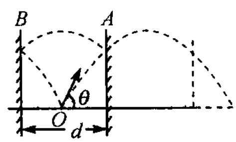
【精析】 由质量数守恒和电荷数守恒及本题捷径知：答案 B、C 正确。

第十章　物理方法中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：等效法：物理学中的等效法是从事物的等同效果这一基本点出发，把实际的、复杂的物理现象和物理过程等转化为等效的、简单的、易于研究的物理事物，从而认识实际的、复杂的物理事物的本质规律。

【题目】 如图一所示，水平面上，有两个竖直的光滑墙壁 A 和 B，相距为 d，一个小球以初速度 v_0 从两墙之间的 O 点斜向上抛出，与 A 和 B 各发生一次弹性碰撞后，正好落回抛出点，求小球的抛射角 θ。



图一

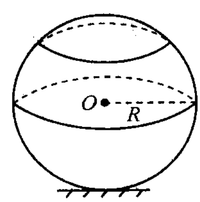
【精析】 将弹性小球在两墙之间的反弹运动，可等效为一个完整的斜抛运动（见图一），所以可用解斜抛运动的方法求解。

由题意得：$2d=v_0\cos\theta\cdot t=v_0\cos\theta\cdot\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$，

可解得抛射角 $\theta=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2gd}{v_0^2}$。

小试二：微元法：任何一个研究对象或过程，一般都可以无限小（短）地分割出一个个"微元"，从而将非理想化模型转化为理想化模型，使问题得到简化，最终实现问题的圆满解决。

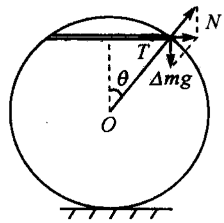
【题目】 半径为 R 的光滑球固定在水平桌面上，有一质量为 M 的圆环状均匀弹性绳圈，原长为 πR，且弹性绳圈的劲度系数为 k，将弹性绳圈从球的正上方轻放到球上，使弹性绳圈水平停留在平衡位置上，如图二所示，若平衡时弹性绳圈长为 $\sqrt{2}\pi R$，求弹性绳圈的劲度系数 k。



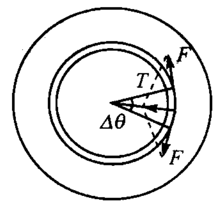
图二

【精析】 由于整个弹性绳圈的大小不能忽略不计，弹性绳圈不能看成质点，所以应将弹性绳圈分割成许多小段，其中每一小段 Δm 两端受的拉力就是弹性绳圈内部的弹力 F。在弹性绳圈上任取一小段质量为 Δm 作为研究对象，进行受力分析。由于 Δm 受的力不在同一平面内，需要从一个合适的角度观察。选取一

个合适的平面进行受力分析，这样可以看清楚各个力之间的关系。从正面和上面观察，分别画出正视图和俯视图，如图三和图四所示。



图三



图四

先看俯视图，设在弹性绳圈的平面上，Δm 所对的圆心角是 $\Delta\theta$，则每一小段的质量 $\Delta m=\frac{\Delta\theta}{2\pi}M$，$\Delta m$ 在该平面上受拉力 F 的作用，合力为

$$T=2F\cos\left(\frac{\pi-\Delta\theta}{2}\right)=2F\sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{1}$$

因为当 θ 很小时，$\sin\theta\approx\theta$，所以 $T=2F\frac{\Delta\theta}{2}=F\Delta\theta$。

再看正视图，Δm 受重力 Δmg，支持力 N，二力的合力与 T 平衡，即 $T=\Delta mg\cdot\tan\theta$，

现在弹性绳圈的半径为 $r=\frac{\sqrt{2}\pi R}{2\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，

所以 $\sin\theta=\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=45°$，$\tan\theta=1$，

因此 $T=\Delta mg=\frac{\Delta\theta}{2\pi}Mg$ (2)

(1)、(2)联立得，$\frac{\Delta\theta}{2\pi}Mg=F\Delta\theta$，

解得弹性绳圈的张力为：$F=\frac{Mg}{2\pi}$，

设弹性绳圈的伸长量为 x，则 $x=\sqrt{2}\pi R-\pi R=(\sqrt{2}-1)\pi R$，

所以绳圈的劲度系数为：$k=\frac{F}{x}=\frac{Mg}{2(\sqrt{2}-1)\pi^2R}=\frac{(\sqrt{2}+1)Mg}{2\pi^2R}$。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

模型还原法：物理习题是根据一定的要求，在设定的物理情景和物理模型中编制的，

解题时要先还原出题设的物理情景和物理模型，运用与之对应的物理规律进行讨论。这是解决物理问题的最基本的方法之一。

解题捷径 2

估算法：有些物理问题本身的结果，并不一定需要有一个很准确的答案，但是，往往需要对事物有一个预测的估计值；有些物理问题的提出，由于本身条件的限制，或者实验中尚未观察到必要的结果，使解决问题缺乏必要的已知条件，无法用常规的方法来求出物理问题的准确答案，采用“估算”的方法就能忽略次要因素，抓住问题的主要本质，充分应用物理知识进行快速数量级的计算。

解题捷径 3

隔离法：将研究的对象从其所处的情景中“隔离”出来，使研究的问题简化，易于集中分析其特征，运用已知规律讨论、认识和解决问题的一种方法。它被广泛地用于复杂问题、复杂过程的解题中。

解题捷径 4

等效法：物理学中的等效法是从事物的等同效果这一基本点出发，把实际的、复杂的物理现象和物理过程等转化为等效的、简单的、易于研究的物理事物，从而认识实际的、复杂的物理事物的本质规律。

解题捷径 5

类比法：根据两个或两类对象在某些属性上的相同或相似之处，从而推论出它们在另一属性方面也可能相同或相似的一种推论方法。

解题捷径 6

递推法：解决物体与物体发生多次作用后的情况。即当问题中涉及相互联系的物体较多并且有规律时，应根据范例特点应用数学思想将所研究的问题归类，然后求出通式。具体方法是先分析某一次作用的情况，得出结论；再根据多次作用的重复性和它们的共同点，把结论推广，然后结合数学知识求解。

解题捷径 7

近似法：在观察物理现象、进行物理实验、建立物理模型、推导物理规律和求解物理问题时，为了分析认识所研究问题的本质属性，往往突出实际问题的主要方面，忽略某些次要因素，进行近似处理。在求解物理问题时，采用近似处理的手段简化求解过程的方法叫近似法。

解题捷径 8

假设法：假设是一种非常重要的科学方法。在物理解题中，分析某些未知的物理现象

时，可以假设发生了某种物理现象，然后再利用已知的物理规律进行推理分析，从而肯定或否定所做的假设，进而得出正确的结论。

解题捷径 9

对称法：在解题时，利用范例中的对称特征巧解物理问题的方法就是对称法。利用对称法时，一定的规律可以等效地转化和迁移，可以避免繁琐的数学推证，一下子抓住问题的本质，寻找出解决问题的捷径，使解决问题的思路和步骤变得极为简捷，令人耳目一新。

解题捷径 10

微元法：任何一个研究对象或过程，一般都可以无限小(短)地分割出一个个“微元”，从而将非理想化模型转化为理想化模型，使问题得到简化，最终实现问题的圆满解决。

解题捷径 11

极限法：把某个物理量推向极端，即极大和极小或极左和极右，并依此做出科学的推理分析，从而给出判断或导出一般结论。极限法在进行某些物理过程的分析时，具有独特作用，恰当应用极限法能提高解题效率，使问题化难为易，化繁为简，思路灵活，判断准确。

解题捷径 12

转换法：对于一个复杂的、实际的问题，在效果相同的条件下，转化为简单的、理想的模型来处理。常见的有合力和分力的等效转换，合运动与分运动的等效转换，等效电阻，等效电源等。在保证效果相同的前提下，将一个陌生、复杂、模糊的模型用一个熟悉、简单、典型的模型来代替。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

模型还原法：物理习题是根据一定的要求，在设定的物理情景和物理模型中编制的，解题时要先还原出题设的物理情景和物理模型，运用与之对应的物理规律进行讨论。这是解决物理问题的最基本的方法之一。

【范例】 如图 10-1-1 所示，在水平正交的匀强电场和匀强磁场 B 中，半径为 R 的光滑绝缘竖直圆环上套有一个带电量为 $+q$ 的小球，已知小球所受电场力与重力相等(重力加速度为 g)，小球在环顶端 A 点由静止释放，求小球所受磁场力的最大值。

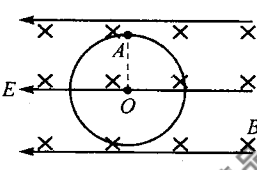


图 10-1-1

【精析】 小球下滑的过程中，要使磁场力最大，则需要速度最大，而速度最大的规律是合力为零的时刻，即加速度为零的时刻。

OC 为与小球受到的重力、电场力的合力平行的半径，由功能关系寻找速度最大的点。因为洛仑兹力不做功，所以不考虑磁场的作用，从图 10-1-2 中 A 到 C，上述合力有切向分力，且与速度同向，因此做正功，小球动能增加；在 C 点时，该合力为径向，没有切向分力，此后切向分力与线速度反向，动能将减小；故在 C 点时速度最大，所受磁场力也最大，由受力分析知 $mg=qE$，又 $mg=qE\tan\alpha$，得 $\alpha=45°$，

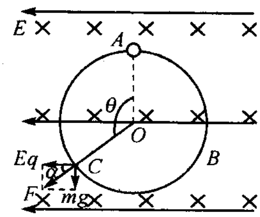


图 10-1-2

小球由 A 到 C，由功能关系得

$$mg\left(R+\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)+qE\frac{\sqrt{2}}{2}R=\frac{1}{2}mv^2,$$

磁场力 $$f=qB\sqrt{2gR(1+\sqrt{2})}。$$

【同类精练】 一跳水运动员从离水面 10m 高的平台上向上跃起，举双臂直体离开台面，此时其重心位于从手到脚全长的中点，跃起后重心升高 0.45m 达到最高点，落水时身体竖直，手先入水(在此过程中运动员水平方向的运动忽略不计)。从离开跳台到手触水面，他可用于完成空中动作的时间是__________s。(计算时，可以把运动员看作全部质量集中在重心的一个质点，g 取 $10m/s^2$，结果保留两位数)

解题捷径 2

估算法：有些物理问题本身的结果，并不一定需要有一个很准确的答案，但是，往往需要对事物有一个预测的估计值；有些物理问题的提出，由于本身条件的限制，或者实验中尚未观察到必要的结果，使解决问题缺乏必要的已知条件，无法用常规的方法来求出物理问题的准确答案，采用“估算”的方法就能忽略次要因素，抓住问题的主要本质，充分应用物理知识进行快速数量级的计算。

【范例】 假想有一水平方向的匀强磁场，磁感强度 B 很大，有一半径为 R，厚度为 $d(d\ll R)$ 的金属圆盘在此磁场中竖直下落，盘面始终位于竖直平面内并与磁场方向平行，如图 10-2-1 所示，若要使圆盘在磁场中下落的加速度比没有磁场时减小千分之一(不计空气阻力)，试估算所需磁感强度的数值，假定金属盘的电阻为零，并设金属的密度 $\rho=9\times10^3kg/m^3$，介电常数 $\varepsilon=9\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2$。

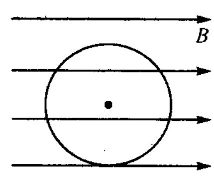


图 10-2-1

【精析】 当盘在磁场中下落速度为 v 时，盘中的感应电动势 $E=Bvd$，在感应电动势的作用下，圆盘两个表面上将带有等量异号的电荷($\pm Q$)，因为盘电阻为零，所以电荷($\pm Q$)引起的两表面间的电压 U 等于盘中感应电动势的数值，即$U=Bvd$。

圆盘上的 Q 与 U 之间的关系跟一个同样尺寸的带电电容器上的 Q 与 U 的关系相同，此电容器的电容 $C=\varepsilon\cdot S/d=\varepsilon\cdot\pi R^2/d$，故圆盘表面所带电量 $Q=CU=\varepsilon\cdot\pi R^2Bv$。

在盘下落过程中，盘的速度 v 随时间增大，盘面上的电量 Q 也随时间增大，由此可求出盘中电流 $I=\Delta Q/\Delta t=\varepsilon\cdot\pi R^2B\Delta v/\Delta t$，磁场对此电流的作用力 F 的方向向上，大小为 $F=BId=\varepsilon\cdot d\pi R^2B^2\Delta v/\Delta t$。若盘的质量为 m，则盘受到的力为 F 和重力 mg，盘的加速度 $a=\Delta v/\Delta t$ 可由下式求出

$$mg-F=ma=m\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

由此得盘的加速度 $a=\dfrac{mg}{m+\varepsilon\pi R^2B^2d}$，

按题意 $a=g-(1/1000)g$，由此得$\dfrac{\varepsilon B^2}{\rho}=\dfrac{1}{1000}$，

所以磁感应强度 $B=\sqrt{\dfrac{\rho}{\varepsilon}\times10^{-3}}=10^{-6}$。

【同类精练】 已知太阳到地球与地球到月球的距离的比值约为 390，月球绕地球旋转的周期约为 27 天。利用上述数据以及日常的天文知识，可估算出太阳对月球与地球对月球的万有引力的比值约为(　　)

A. 0.2　　B. 2　　C. 20　　D. 200

解题捷径 3

隔离法：将研究的对象从其所处的情景中“隔离”出来，使研究的问题简化，易于集中分析其特征，运用已知规律讨论、认识和解决问题的一种方法。它被广泛地用于复杂问题、复杂过程的解题中。

【范例】 如图 10-3-1 所示，有一块木板静止在光滑且足够长的水平面上，木板质量为 $M=4\text{kg}$，长为 $L=1.4\text{m}$；木板右端放着一小滑块，小滑块质量为 $m=1\text{kg}$，其尺寸小于 L。小滑块与木板之间的动摩擦因数为 $\mu=0.4(g=10\text{m/s}^2)$。

(1)现用恒力 F 作用在木板 M 上，为了使得 m 能从 M 上面滑落下来，问：F 大小的范围是什么？

(2)其他条件不变，若恒力 $F=22.8\text{N}$，且始终作用在 M 上，最终使得 m 能从 M 上面滑落下来。问：m 在 M 上面滑动的时间是多大？

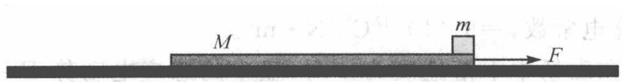


图 10-3-1

【精析】 (1)小滑块与木板间的滑动摩擦力

$$f=\mu N=\mu mg,$$

小滑块在滑动摩擦力 f 作用下向右匀加速运动的加速度为

$$a_1 = f/m = \mu g = 4\text{m/s}^2,$$

木板在拉力 F 和滑动摩擦力 f 作用下向右匀加速运动的加速度为

$$a_2 = (F-f)/M,$$

使 m 能从 M 上面滑落下来的条件是 $a_2 > a_1$，

即 $(F-f)/M > f/m$，解得 $F > \mu(M+m)g = 20\text{N}$。

(2)设 m 在 M 上滑动的时间为 t，当恒力 $F=22.8\text{N}$，木板的加速度为

$$a_2 = (F-f)/M = 4.7\text{m/s}^2,$$

小滑块在时间 t 内运动的位移 $s_1 = a_1 t^2/2$，

木板在时间 t 内运动的位移 $s_2 = a_2 t^2/2$，

因 $s_2 - s_1 = L$，

即 $4.7t^2/2 - 4t^2/2 = 1.4$，解得 $t = 2\text{s}$。

【同类精练】 如图 10-3-2 所示，将倾角为 θ 的足够长的光滑绝缘斜面放置在一个足够大的匀强磁场中，磁感应强度为 B，方向垂直纸面向里，一个质量为 m，带电量为 $-q$ 的带电体置于斜面上，由静止开始下滑。求带电体在斜面上滑行的距离。

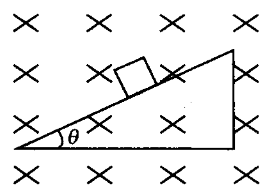


图 10-3-2

解题捷径 4

等效法：物理学中的等效法是从事物的等同效果这一基本点出发，把实际的、复杂的物理现象和物理过程等转化为等效的、简单的、易于研究的物理事物，从而认识实际的、复杂的物理事物的本质规律。

【范例】 如图 10-4-1 所示，水平面上，有两个竖直的光滑墙壁 A 和 B，相距为 d，一个小球以初速度 v_0 从两墙之间的 O 点斜向上抛出，与 A 和 B 各发生一次弹性碰撞后，正好落回抛出点，求小球的抛射角 θ。

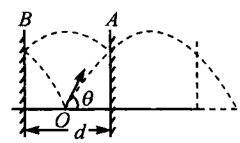


图 10-4-1

【精析】 将弹性小球在两墙之间的反弹运动，可等效为一个完整的斜抛运动（见图），所以可用解斜抛运动的方法求解。

由题意得：$2d = v_0\cos\theta \cdot t = v_0\cos\theta \cdot \dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$，

可解得抛射角 $\theta=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2gd}{v_0^2}$。

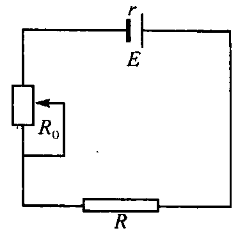


图 10-4-2

【同类精练】 如图 10-4-2 所示的电路中，电池的电动势 $E=5\text{V}$，内电阻 $r=10\Omega$，固定电阻 $R=90\Omega$，R_0 是可变电阻。在 R_0 由零增加到 400Ω 的过程中，求：

(1)可变电阻 R_0 上消耗热功率最大的条件和最大的热功率。

(2)电池的内电阻 r 和固定电阻 R 上消耗的最小热功率之和。

解题捷径 5

类比法：根据两个或两类对象在某些属性上的相同或相似之处，从而推论出它们在另一属性方面也可能相同或相似的一种推论方法。

【范例】 求图 10-5-1 所示的无穷网络电路中 ab 两点间的电阻，网络中每个电阻的阻值均为 r。

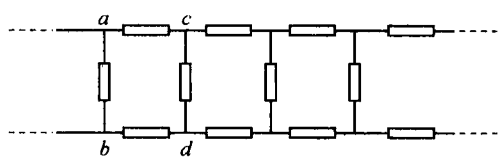


图 10-5-1

【精析】 直接从题意解答，要经过繁琐的递推才能求出它的等效电阻 R_{ab}。

我们联想到有一道数学题：

$$x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}},$$

为求解 x，可将上式两边平方，可得到

$$x^2=a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}},$$

此式右边第二项与原式中的 x 完全相同，所以它可以写成 $x^2=a+x$，

解得 $$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}。$$

我们在讨论如图 10-5-2 所示的电路时，与上述数学题有类似的情况：ab 间的等效电阻 R_{ab} 与 cd 间等效电阻是相同的，$R_{ab}=R_{cd}$；又因为 R_{ab} 是两个支路电阻的并联，如图所示。用并串联知识可得：

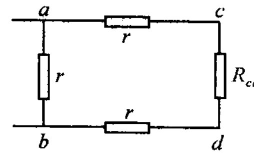


图 10-5-2

$$R_{ab}=\frac{r(2r+R_{cd})}{3r+R_{cd}}=\frac{r(2r+R_{ab})}{3r+R_{ab}}$$

即得　$R_{ab}{}^2+2rR_{ab}-2r^2=0$，

解得　$R_{ab}=(\sqrt{3}-1)r$。

【答案】 $R_{ab}=(\sqrt{3}-1)r$

【同类精练】 如图 10-5-3 所示，半径 $R=10\text{cm}$ 的光滑凹球面容器固定在地面上，有一小物块在与容器最低点 P 相距 5mm 的 C 点由静止无摩擦滑下，则物块自静止下滑到第二次通过 P 点时所经历的时间是多少？若此装置放在以加速度 a 向上运动的实验舱中，上述所求的时间又是多少？

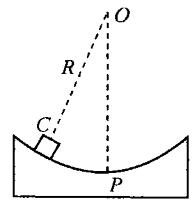


图 10-5-3

解题捷径 6

递推法：解决物体与物体发生多次作用后的情况。即当问题中涉及相互联系的物体较多并且有规律时，应根据范例特点应用数学思想将所研究的问题归类，然后求出通式。具体方法是先分析某一次作用的情况，得出结论，再根据多次作用的重复性和它们的共同点，把结论推广，然后结合数学知识求解。

【范例】 质点以加速度 a 从静止出发做直线运动，在某时刻 t，加速度变为 $2a$；在时刻 $2t$，加速度变为 $3a$；…；在 nt 时刻，加速度变为 $(n+1)a$，求：

(1) nt 时刻质点的速度；

(2) nt 时间内通过的总路程。

【精析】 根据递推法的思想，从特殊到一般找到规律，然后求解。

(1)物质在某时刻 t 末的速度为 $v_t=at$，

$2t$ 末的速度为 $v_{2t}=v_t+2at$，所以 $v_{2t}=at+2at$，

$3t$ 末的速度为 $v_{3t}=v_{2t}+3at=at+2at+3at$，

……

则 nt 末的速度为 $v_{nt}=v_{(n-1)t}+nat=at+2at+3at+\cdots+(n-1)at+nat=at(1+2+3+\cdots+n)=at\cdot\frac{1}{2}(n+1)n=\frac{1}{2}n(n+1)at$。

(2)同理：可推得 nt 内通过的总路程 $s=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)at^2$。

【同类精练】 如图 10-6-1 所示，一固定的斜面，倾角 $\theta=45^\circ$，斜面长 $L=2.00\text{m}$。在斜面下端有一与斜面垂直的挡板，一质量为 m 的质点，从斜面的最高点沿斜面下滑，初速度为零。下滑到最底端与挡板发生弹性碰撞。已知质点与斜面间的动摩擦因数 $\mu=0.20$，试求此质点从开始到发生第 11 次碰撞的过程中运动的总路程。

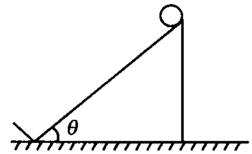


图 10-6-1

解题捷径 7

近似法：在观察物理现象、进行物理实验、建立物理模型、推导物理规律和求解物理问题时，为了分析认识所研究问题的本质属性，往往突出实际问题的主要方面，忽略某些次要因素，进行近似处理。在求解物理问题时，采用近似处理的手段简化求解过程的方法叫近似法。

【范例】 一只狐狸以不变的速度 v_1 沿着直线 AB 逃跑，一只猎犬以不变的速率 v_2 追击，其运动方向始终对准狐狸。某时刻狐狸在 F 处，猎犬在 D 处，$FD\perp AB$，且 $FD=L$，如图 10-7-1 所示，求猎犬的加速度的大小。

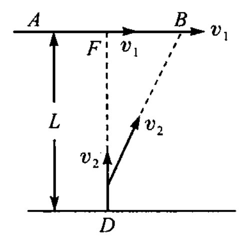


图 10-7-1

【精析】 猎犬的运动方向始终对准狐狸且速率大小不变，故猎犬做匀速率曲线运动，根据向心加速度 $a=\frac{v_2^2}{r}$，r 为猎犬所在处的曲率半径，因为 r 不断变化，故猎犬的加速度的大小、方向都在不断变化，范例要求猎犬在 D 处的加速度大小，由于 v_2 大小不变，如果求出 D 点的曲率半径，此时猎犬的加速度大小也就求得了。

猎犬做匀速率曲线运动，其加速度的大小和方向都在不断改变，在所求时刻开始的一段很短的时间 Δt 内，猎犬运动的轨迹可近似看做是一段圆弧，设其半径为 R，则加速度

$$a=\frac{v_2^2}{R}$$

其方向与速度方向垂直，如图 10-7-2 所示。在 Δt 时间内，设狐狸与猎犬分别到达 F' 与 D'，猎犬的速度方向转过的角度为$\alpha = v_2\Delta t/R$，

而狐狸跑过的距离是：$v_1\Delta t \approx \alpha L$，

因而 $v_2\Delta t/R \approx v_1\Delta t/L, R = Lv_2/v_1$，

所以猎犬的加速度大小为 $a = \dfrac{v_2^2}{R} = v_1v_2/L$。

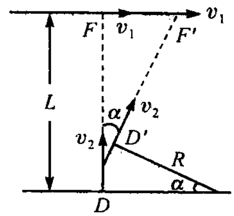


图 10-7-2

【同类精练】 某水池的实际深度为 h，垂直于水面往下看，水池底的视深为多少？（设水的折射率为 n）

解题捷径 8

假设法：假设是一种非常重要的科学方法。在物理解题中，分析某些未知的物理现象时，可以假设发生了某种物理现象，然后再利用已知的物理规律进行推理分析，从而肯定或否定所做的假设，进而得出正确的结论。

【范例】 三个半径为 r、质量相等的球放在一个半球形碗内，现把第四个半径也为 r，质量也相等的相同球放在这三个球的正上方，要使四个球都能静止，则半球形碗的半径应满足什么条件？不考虑各处摩擦。

【精析】 假设碗的球面半径很大，把碗面变成平面。因为各接触面是光滑的，当放上第四个球后，下面的三个球会散开，所以临界情况是放上第四个球后，下面三个球之间刚好无弹力。把上面的球记为 A，下面三个球分别记为 B、C、D，则四个球的球心连起来构成一个正四面体，正四面体的边长均为 $2r$，如图 10-8-1 所示。

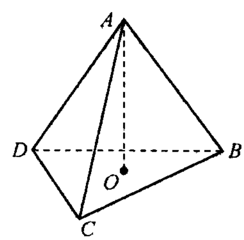


图 10-8-1

设 A、B 球心的连线与竖直方向的夹角为 α，设碗面球心为 O，O 与 B 球心的连线与竖直方向的夹角为 β，碗面对上面三个球的作用力都为 F，如图 10-8-2 所示。先以整体为研究对象，受重力、碗面对三个球的弹力 F，在竖直方向上有

$$3F\cos\beta = 4mg \tag{1}$$

再以 B 球为研究对象，受重力 mg、碗面对 B 球的作用力 F、A 球对 B 的压力 F_N，根据共点力平衡条件，有

$$\begin{cases} F\cos\beta = mg + F_N\cos\alpha, \\ F\sin\beta = F_N\sin\alpha, \end{cases}$$

消去 F_N，得：

$$\tan\alpha = \frac{F\sin\beta}{F\cos\beta - mg} \qquad (2)$$

(1)、(2)联立，消去 F 得：

$$\tan\beta = \frac{1}{4}\tan\alpha \qquad (3)$$

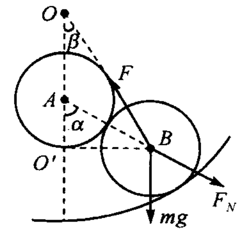


图 10-8-2

因为四个球的球心构成一个边长为 $2r$ 的正四面体，如图 10-8-1 所示，根据几何关系，可以知道：

$$\tan\alpha = \frac{BO'}{AO'} = \frac{BO'}{\sqrt{AB^2 - BO'^2}} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2r}{\sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2}} = \frac{1}{2},$$

代入(3)式得：$\tan\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}}$，

于是碗面的半径为 $R = BO + r = \frac{BO'}{\sin\beta} + r = BO'\sqrt{1+\cot^2\beta} + r = 7.633r$，

所以半球形碗的半径需满足 $R \leqslant 7.633r$。

【同类精练】 如图 10-8-3 所示，在半径为 r 的圆柱形区域内，充满与圆柱轴线平行的匀强磁场，一长为$\sqrt{3}r$ 的金属棒 MN 与磁场方向垂直地放在磁场区域内，棒的端点 MN 恰在磁场边界的圆周上，已知磁感应强度 B 随时间均匀变化，其变化率为$\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$，求 MN 中产生的电动势为多大？

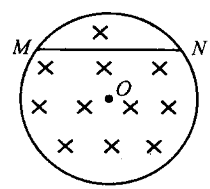


图 10-8-3

解题捷径 9

对称法：在解题时，利用范例中的对称特征巧解物理问题的方法就是对称法。利用对称法时，一定的规律可以等效地转化和迁移，可以避免繁琐的数学推证，一下子抓住问题的本质，寻找出解决问题的捷径，使解决问题的思路和步骤变得极为简捷，令人耳目一新。

【范例】 有一由匀质细导线弯成的半径为 a 的圆线圈和一内接等边三角形的电阻丝组成的电路(电路中各段的电阻见图 10-9-1)。在线圈平面内有垂直纸面向里的匀强磁场,磁感应强度 B 随时间 t 均匀减少,其变化率的大小为一已知常量 k。已知 $2r_1=3r_2$,试求图中 A、B 两点间的电势差 U_{AB}。

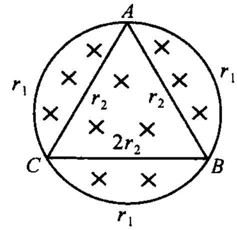


图 10-9-1

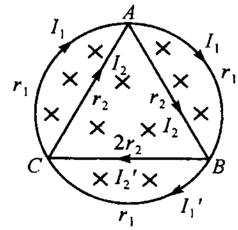


图 10-9-2

【精析】 由几何知识:圆电路三段圆弧的长度与圆面积分别为$\frac{2\pi a}{3}$与 πa^2;三角形电路三边的长度与三角形面积分别为$\sqrt{3}a$ 与$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$,如图 10-9-2 所示。由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=S\frac{\Delta B}{\Delta t}$,有

对圆电路:$\pi a^2\cdot k=2I_1r_1+I'_1r_1$,

对三角形电路:$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\cdot k=2I_2r_2+I'_2\cdot 2r_2$,

对由弦 AB 和弧 AB 组成的回路: $\frac{1}{3}\left(\pi a^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\right)\cdot k=I_1r_1-I_2r_2$,

对节点 B,流进 B 点的电流之和等于流出 B 点的电流之和:

$$I_1+I_2=I'_1+I'_2,$$

再由闭合电路欧姆定律 $U=\varepsilon-Ir$,将弧 AB 等效为电源 $\varepsilon=\frac{1}{3}\pi a^2\cdot k$——内电路,其余等效为外电路,所以有

$$U_{AB}=\frac{1}{3}\pi a^2\cdot k-I_1r_1,$$

由以上式子及题中给出的 $2r_1=3r_2$,可求出 $U_{AB}=-\frac{\sqrt{3}}{32}a^2k$。

【同类精练】 如图 10-9-3 所示,在平行板电场中,有一个质量为 m,电量为 q 的带负电小球,用长为 L 的细线悬挂。将小球拉向正极板一侧的水平位置,然后无初速释放,且小球向下摆过 60°到达 C 点时,速度恰好为零。试计算:

(1)电场强度的大小;
(2)小球的最大速度;
(3)小球在 C 点的加速度和对悬线的拉力。

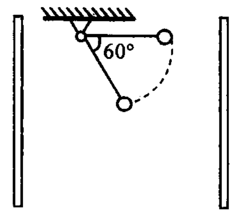


图 10-9-3

解题捷径 10

微元法:任何一个研究对象或过程,一般都可以无限小(短)地分割出一个个"微元",从而将非理想化模型转化为理想化模型,使问题得到简化,最终实现问题的圆满解决。

【范例】 半径为 R 的光滑球固定在水平桌面上,有一质量为 M 的圆环状均匀弹性绳圈,原长为 πR,且弹性绳圈的劲度系数为 k,将弹性绳圈从球的正上方轻放到球上,使弹性绳圈水平停留在平衡位置上,如图 10-10-1 所示,若平衡时弹性绳圈长为$\sqrt{2}\pi R$,求弹性绳圈的劲度系数 k。

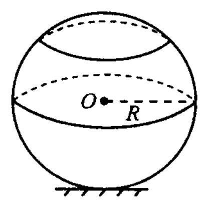


图 10-10-1

【精析】 由于整个弹性绳圈的大小不能忽略不计,弹性绳圈不能看成质点,所以应将弹性绳圈分割成许多小段,其中每一小段 Δm 两端受的拉力就是弹性绳圈内部的弹力 F。在弹性绳圈上任取一小段质量为 Δm 作为研究对象,进行受力分析。由于 Δm 受的力不在同一平面内,需要从一个合适的角度观察,选取一个合适的平面进行受力分析,这样可以看清楚各个力之间的关系. 从正面和上面观察,分别画出正视图的俯视图,如图 10-10-2 和 10-10-3 所示。

先看俯视图(见图 10-10-3),设在弹性绳圈的平面上,Δm 所对的圆心角是$\triangle\theta$,则每一小段的质量 $\Delta m=\frac{\Delta\theta}{2\pi}M$,$\Delta m$ 在该平面上受拉力 F 的作用,合力为

$$T=2F\cos\left(\frac{\pi-\Delta\theta}{2}\right)=2F\sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{1}$$

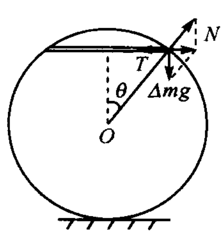


图 10-10-2

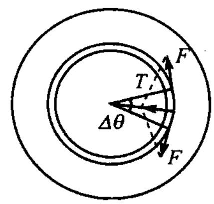


图 10-10-3

因为当 θ 很小时，$\sin\theta\approx\theta$，所以 $T=2F\dfrac{\Delta\theta}{2}=F\Delta\theta$，

再看正视图（见图 10-10-2），Δm 受重力 Δmg，支持力 N，二力的合力与 T 平衡。即 $T=\Delta mg\cdot\tan\theta$，

现在弹性绳圈的半径为 $r=\dfrac{\sqrt{2}\pi R}{2\pi}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=45^\circ$，$\tan\theta=1$，

因此 $T=\Delta mg=\dfrac{\Delta\theta}{2\pi}Mg$

（1）、（2）联立，$\dfrac{\Delta\theta}{2\pi}Mg=F\Delta\theta$，　　（2）

解得弹性绳圈的张力为：$F=\dfrac{Mg}{2\pi}$，

设弹性绳圈的伸长量为 x，则 $x=\sqrt{2}\pi R-\pi R=(\sqrt{2}-1)\pi R$，

所以绳圈的劲度系数为：$k=\dfrac{F}{x}=\dfrac{Mg}{2(\sqrt{2}-1)\pi^2 R}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)Mg}{2\pi^2 R}$。

【同类精练】 一质量为 M、均匀分布的圆环，其半径为 r，几何轴与水平面垂直，若它能经受的最大张力为 T，求此圆环可以绕几何轴旋转的最大角速度。

解题捷径 11

极限法：把某个物理量推向极端，即极大和极小或极左和极右，并依此做出科学的推理分析，从而给出判断或导出一般结论。极限法在进行某些物理过程的分析时，具有独特作用，恰当应用极限法能提高解题效率，使问题化难为易，化繁为简，思路灵活，判断准确。

【范例】 设地球的质量为 M，人造卫星的质量为 m，地球的半径为 R_0，人造卫星环绕地球做圆周运动的半径为 r。试证明：从地面上将卫星发射至运行轨道，发射速度 $v=\sqrt{R_0 g\left(2-\dfrac{R_0}{r}\right)}$，并用该式求出这个发射速度的最小值和最大值（取 $R_0=6.4\times10^6\,\text{m}$，设大气层对卫星的阻力忽略不计，地面的重力加速度为 g）。

【精析】 由能量守恒定律，卫星在地球的引力场中运动时总机械能为一常量。设卫

星从地面发射的速度为 $v_{发}$，卫星发射时具有的机械能为

$$E_1=\frac{1}{2}mv_{发}^2-G\frac{Mm}{R_0} \tag{1}$$

进入轨道后卫星的机械能为

$$E_2=\frac{1}{2}mv_{轨}^2-G\frac{Mm}{r} \tag{2}$$

由 $E_1=E_2$，并代入 $v_{轨}=\sqrt{\frac{GM}{r}}$，解得发射速度为

$$v_{发}=\sqrt{\frac{GM}{R_0}\left(2-\frac{R_0}{r}\right)} \tag{3}$$

又因为在地面上万有引力等于重力，即：$G\frac{Mm}{R_0^2}=mg$，所以

$$\frac{GM}{R_0}=R_0g \tag{4}$$

把(4)式代入(3)式，即得：$v_{发}=\sqrt{R_0g\left(2-\frac{R_0}{r}\right)}$，

(1)如果 $r=R_0$，即当卫星贴近地球表面做匀速圆周运动时，所需发射速度最小为

$$v_{min}=\sqrt{gR_0}=7.9\times10^3\,m/s。$$

(2)如果 $r\to\infty$，所需发射速度最大(称为第二宇宙速度或脱离速度)为

$$v_{max}=\sqrt{2R_0g}=11.2\times10^3\,m/s。$$

【同类精练】 军训中，学生距墙 s，以速度 v_0 起跳，如图 10-11-1 所示，再用脚蹬墙面一次，使身体变为竖直向上的运动以继续升高，墙面与鞋底之间的静摩擦因数为 μ。求能使人体重心最大总升高的起跳角 θ。

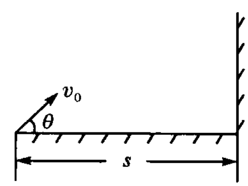


图 10-11-1

解题捷径 12

转换法：对于一个复杂的、实际的问题，在效果相同的条件下，转化为简单的、理想的模型来处理。常见的有合力和分力的等效转换，合运动与分运动的等效转换，等效电阻，等效电源等。在保证效果相同的前提下，将一个陌生、复杂、模糊的模型用一个熟悉、简单、典型的模型来代替。

【范例】 平板小车上竖直地固定一"U"形玻璃管，内盛液体，两支管间距为 L，如图 10-12-1 所示。若小车以加速度 a 向右做匀加速运动，则左支管中液面上升，右支管液面下降，试求两竖直管内液面的高度差。

【精析】 当小车向右匀加速运动时，将 U 形管模型转换为玻璃杯模型，其液面应成如图 10-12-2 所示形状，这种情况的液面高度差与液面的倾角 θ 有关；再将玻璃杯液面转换成常见的斜面模型，并在斜面上任取一质量为 m 的液滴为研究对象，作出小液滴的受力图，如图 10-12-3 所示，

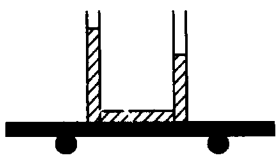


图 10-12-1

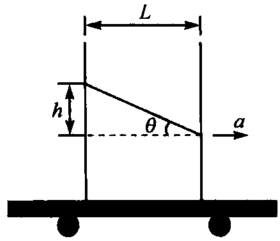


图 10-12-2

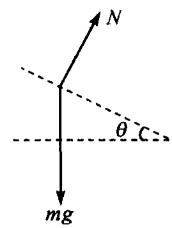


图 10-12-3

$N\sin\theta=ma$，

$N\cos\theta=mg$，

由此得 $\tan\theta=\dfrac{a}{g}$，

另由几何关系有 $\tan\theta=\dfrac{h}{L}$，

所以 $h=\dfrac{aL}{g}$。

【同类精练】 如图 10-12-4 所示，虚线框内各元件的参数都未知，当在它的输出端 a、b 间接一电阻 R 时，测得通过 R 的电流 I 情况如下：$R=10\Omega$ 时，$I=1\text{A}$；$R=18\Omega$ 时，$I=0.6\text{A}$。问 R 多大时，I 等于 0.1A？

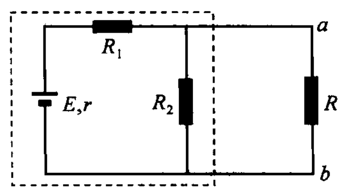


图 10-12-4

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 运动员的跳水过程是一个很复杂的过程，主要是竖直方向的上下运动，但也有水平方向的运动，更有运动员做的各种动作。构建运动模型，应抓主要因素。现在要讨论的是运动员在空中的运动时间，这个时间从根本上讲与运动员所做的各种动作以及水平运动无关，应由竖直运动决定，因此忽略运动员的动作，把运动员当成一个质点，同时忽略他的水平运动。当然，这两点范例都作了说明，所以一定程度上"建模"的要求已经有所降低，但我们应该理解这样处理的原因。这样，我们把问题提炼成了质点做竖直上抛运动的物理模型。

在定性地把握住物理模型之后，应把这个模型细化，使之更清晰。可画出如图 10-1 所示的示意图。由图可知，运动员做竖直上抛运动，上升高度 h，即题中的 0.45m；从最高点下降到手触到水面，下降的高度为 H，由图中 H、h、10m 三者的关系可知 $H=10.45\text{m}$。

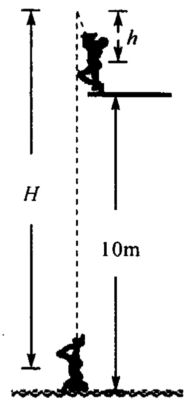


图 10-1

由于初速未知，所以应分段处理该运动。运动员跃起上升的时间为：$t_1=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=0.3\text{s}$，

从最高点下落至手触水面，所需的时间为：$t_2=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}=1.4\text{s}$，

所以运动员在空中用于完成动作的时间约为：$t=t_1+t_2=1.7\text{s}$。

点评：构建物理模型时，要重视理想化方法的应用，要养成画示意图的习惯。

解题捷径 2

【精析】 设太阳质量 M，地球质量 m，月球质量 m_0，日地间距离为 R，月地间距离为 r，日月之间距离近似等于 R，地球绕太阳的周期为 T 约为 360 天，月球绕地球的周期为 $t=27$天。对地球绕着太阳转动，由万有引力定律：$G\dfrac{Mm}{R^2}=m\dfrac{4\pi^2R}{T^2}$，同理对月球绕着地球转动：$G\dfrac{mm_0}{r^2}=m_0\dfrac{4\pi^2r}{t^2}$，则太阳质量与地球质量之比为 $M:m=\dfrac{R^3t^2}{r^3T^2}$；太阳对月球的万有引力 $F=G\dfrac{Mm_0}{R^2}$，地球对月球的万有引力 $f=G\dfrac{mm_0}{r^2}$，故 $F:f=\dfrac{Mr^2}{mR^2}$，带入太阳与地球质量比，计算出比值约为 2，B 对。答案：B。

解题捷径 3

【精析】 对带电体，在沿斜面下滑过程中，沿斜面向下受恒力 $mg\sin\theta$ 作用，带电体沿斜面做匀加速运动，有

$$a=\frac{mg\sin\theta}{m}=g\sin\theta \tag{1}$$

在带电体因速度加快到刚脱离斜面时，有

$$F=Bqv=mg\cos\theta \tag{2}$$

匀加速直线运动又有

$$2as_{\max}=v^2 \tag{3}$$

由(2)式得 $$v=\frac{mg\cos\theta}{Bq},$$

将 a、v 代入(3)式得到

$$s=\frac{\left(\dfrac{mg\cos\theta}{Bq}\right)^2}{2g\sin\theta}=\frac{m^2g\cos^2\theta}{2B^2q^2\sin\theta}。$$

解题捷径 4

【精析】 本题通常思路：根据全电路欧姆定律、电功率等知识，列出正确的功率表达式，结合范例中的所给条件，应用数学中的极值知识寻求极值来求解，对问题(1)，R_0 上消耗功率的表达式 $P_1=I^2R_0=\left(\dfrac{E}{R+r+R_0}\right)^2R_0=\dfrac{25R_0}{R_0^2+200R_0+10000}$，可看出函数关系式比较复杂。在寻求 P_1 的最大值及条件时，数学技巧比较强，不能顺利求解，但应用结构等效代替的方法可方便的求解。我们知道在闭合电路中，当外电阻等于电源的内电阻时，即 $R_{外}=r_{内}$ 时，外电阻上消耗的功率最大，且最大值 $P_m=\dfrac{E^2}{4r}$。根据这一结论，我们将定值电阻 R“划入”电源内与 r 一道组成一个等效的新电源，其电动势 $E'=E$，内阻 $r'=r+R$。这样利用结论，当 $R_0=r'$ 即 $R_0=r+R$ 时，R_0 上消耗的功率最大，其最大值 $P_1=\dfrac{E'^2}{4r'}=\dfrac{E^2}{4(R+r)}$，即可求得 R_0 上的消耗热功率最大的条件和最大热功率。而对问题(2)可按通常思路求解。

答案：(1)$R_0=100\Omega$，$P_1=0.125\text{W}$；(2)$P_2=0.01\text{W}$。

解题捷径 5

【精析】 本题中的小物块是在重力、弹力作用下做变速曲线运动，我们若抓住物体受力做 $\theta<5°$ 往复运动的本质特征，便可以进行模型等效，即把小物块在凹球面上的运动等

效为单摆模型。

将上述装置等效为单摆，根据单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，

得 $t=\frac{3}{4}T=\frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$。

若此装置放在以加速度 a 向上运动的实验舱中，比较两种情形中物体受力运动的特征，可以等效为单摆的重力加速度为 $g'=g+a$ 的情形，经类比推理可得：

$$t'=\frac{3}{4}T'=\frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g+a}}。$$

解题捷径 6

【精析】 因为质点每次下滑均要克服摩擦力做功，且每次做功又不相同，所以要想求质点从开始到发生 n 次碰撞的过程中运动的总路程，需一次一次的求，推出通式即可求解。

设每次开始下滑时，小球距挡板为 s，

则由功能关系：$\mu mg\cos\theta(s_1+s_2)=mg(s_1-s_2)\sin\theta$，

$\mu mg\cos\theta(s_2+s_3)=mg(s_2-s_3)\sin\theta$，

即有 $\frac{s_2}{s_1}=\frac{s_3}{s_2}=\cdots=\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\sin\theta+\mu\cos\theta}=\frac{2}{3}$。

由此可见每次碰撞后通过的路程是一等比数列，其公比为 $\frac{2}{3}$，

所以在发生第 11 次碰撞过程中的路程

$$s=s_1+2s_2+2s_3+\cdots+2s_{11}=2(s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{11})-s_1$$

$$=2\times\frac{s_1\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right]}{1-\frac{2}{3}}-s_1=10-12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{11}=9.86\text{m}$$

解题捷径 7

【精析】 如图 10-2 所示，设 S 为水池底的点光源，在由 S 点发出的光线中选取一条垂直于面 MN 的光线，由 O 点垂直射出，由于观察者在 S 正方，所以另一条光线与光线 SO 成极小的角度从点 S 射向水面点 A，由点 A 远离法线折射到空气中，因入射角极小，故折射角也很小，进入人眼的两条折射光线的反向延长线交于点 S'，该点即为我们看到水池底光源 S 的像，像点 S' 到水面

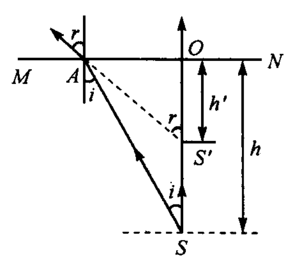


图 10-2

的距离 h'，即为视深。

由几何关系有 $\tan r=\overline{AO}/h'$，$\tan i=\overline{AO}/h$，所以 $\tan r/\tan i=h/h'$，因为 r、i 均很小，则有 $\tan r\approx\sin r$，$\tan i\approx\sin i$，所以 $\sin r/\sin i\approx h/h'$。

又因 $n=\dfrac{\sin r}{\sin i}$，所以视深 $h'=h/n$。

解题捷径 8

【精析】 由题可知，MN 上有感应电动势，这种感应电动势无法直接计算。但如果注意 MN 的长为$\sqrt{3}r$，结合题意，可假设虚构两根与 NM 完全相同的金属棒与 MN 棒一起刚好构成圆的内接正三角形，如图 10-3 所示。由法拉第电磁感应定律，这一回路中的感应电动势 $\varepsilon=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\cdot S=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}kr^2$。$MN$ 上的感应电动势是整个回路中电动势的 1/3，所以

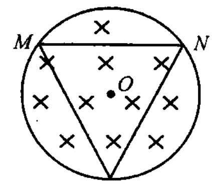


图 10-3

$$\varepsilon_{MN}=\frac{1}{3}\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{4}kr^2。$$

解题捷径 9

【精析】 (1)根据动能定理 $W=\Delta E_R$，

从释放到 C 点，合外力做的功

$$W=mgh+Eqs=mgL\sin60^\circ-Eq(L-L\cos60^\circ)=0,$$

得 $E=\dfrac{\sqrt{3}mg}{q}$。

(2)设绳与水平位置夹角为 θ 时，小球速度最大，由动能定理

$$W=mgL\sin\theta-Eq(L-L\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_m^2,$$

当 $\theta=30^\circ$时，v_1 最大。

(3)在 C 点对小球进行受力分析

$$F_{合}=Eq\sin60^\circ-mg\sin30^\circ=ma,得\ a=g,$$

悬绳拉力 $T=Eq\cos60^\circ+mg\cos30^\circ=\sqrt{3}mg$。

解题捷径 10

【精析】 因为向心力 $F=mr\omega^2$，当 ω 一定时，r 越大，向心力越大，所以要想求最大张力 T 所对应的角速度 ω，r 应取最大值。

如图 10-4 所示，在圆环上取一小段 ΔL，对应的圆心角为 $\Delta\theta$，其质量可表示为 $\Delta m=$

$\frac{\Delta\theta}{2\pi}M$，受圆环对它的张力为 T，则同上例分析可得 $2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}=\Delta mr\omega^2$，

因为 $\Delta\theta$ 很小，所以 $\sin\frac{\Delta\theta}{2}\approx\frac{\Delta\theta}{2}$，即 $2T\cdot\frac{\Delta\theta}{2}=\frac{\Delta\theta}{2\pi}Mr\omega^2$，解得最大角速度 $\omega=\sqrt{\frac{2\pi T}{Mr}}$。

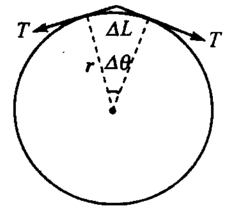


图 10-4

解题捷径 11

【精析】 人体重心最大总升高分为两部分，一部分是人做斜上抛运动上升的高度，另一部分是人蹬墙所能上升的高度。

如图 10-5 所示，人做斜抛运动 $v_x=v_0\cos\theta$，$v_y=v_0\sin\theta-gt$，

重心升高为 $H_1=s_0\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{s}{v_0\cos\theta}\right)^2$，

脚蹬墙面，利用最大静摩擦力的冲量可使人向上的动量增加，即

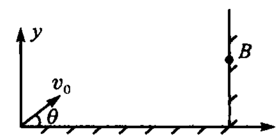


图 10-5

$$\Delta(mv_y)=m\Delta v_y=\sum f(t)=\sum\mu N(t)\Delta t=\mu\sum N(t)\Delta t，而\sum N(t)\Delta t=mv_x，$$

$\therefore\Delta v_y=\mu v_x$，所以人蹬墙后，其重心在竖直方向向上的速度为 $v'_y=v_y+\Delta v_y=v_y+\mu v_x$，继续升高 $H_2=\frac{v'^2_y}{2g}$，人的重心总升高 $H=H_1+H_2=\frac{v_0^2}{2g}(\mu\cos\theta+\sin\theta)^2-\mu s_0$，当 $\theta=\arctan\frac{1}{\mu}$ 时，重心升高最大。

解题捷径 12

【精析】 可以把虚线框转换成等效电源，等效电源的电动势为 E_0，等效内阻为 R_0。

$$1=\frac{E_0}{10+R_0}，0.6=\frac{E_0}{18+R_0}，$$

解得 $E_0=12\text{V}$，$R_0=2\Omega$。

由此可得 $0.1=\frac{12}{2+R}$，

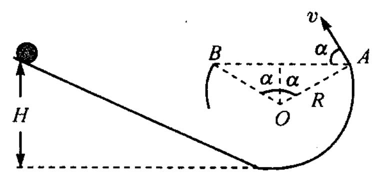
求得 $R=118\Omega$。

第十一章　数学在物理应用中的解题捷径

一、牛刀小试

小试一：定积求和原理：如果 n 个正数之积为常数 K，则 n 个数相等时，其和最小，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，有 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)_{\min}=n\sqrt[n]{K}$。

【题目】 如图一所示，一个小球由静止开始，从 H 高处无摩擦滑下，然后进入半径 R 的光滑圆轨道。为了越过轨道正上方圆心角为 2α 的缺口 AB，求小球下滑的最小高度是多少？



图一

【精析】 设小球质量为 m，从 A 点做斜上抛运动的速度为 v。

根据射程公式

$$2R\sin\alpha=\frac{v^2\sin2\alpha}{g} \tag{1}$$

根据机械能守恒定律

$$mgH=mg(R+R\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

由(1)、(2)得

$$H=\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)R \tag{3}$$

在(3)式中，因为 $\cos\alpha\times\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}$，

故当 $\cos\alpha=\frac{1}{2\cos\alpha}$，

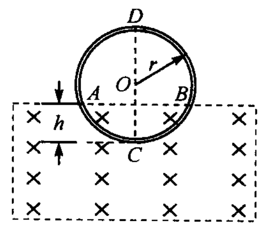
$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\alpha=45°$时，

其和最小，即 H 最小值为

$$H_{\min}=(1+\sqrt{2})R。$$

小试二：相交弦定理：一圆的两条弦的交点 O 将弦分为两段，且每条弦两段的乘积相等，即 $AO\cdot OB=CO\cdot OD$。

【题目】 如图二所示，质量为 m、电阻为 R、半径为 r 的金属环，竖直落入磁感应强度为 B、方向垂直纸面向里的匀强磁场中，且进入磁场 $h=\frac{1}{2}r$ 时，加速度为零，求此时环的下落速度。



图二

【精析】 设弦 AB 的有效切割长度为 l。根据相交弦定理 $\left(\frac{1}{2}l\right)^2=\frac{1}{2}r\times\frac{3}{2}r$，$l=\sqrt{3}r$，

若下落速度为 v，根据平衡条件 $mg=BIl=B\frac{Blv}{R}l$，

所以，速度 $v=\frac{mgR}{B^2l^2}=\frac{mgR}{3B^2r^2}$。

二、解题捷径精粹

解题捷径 1

韦达定理：在数学中，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1,x_2 与各项系数 a,b 和 c 具有下列关系，即 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。利用韦达定理，可以极为简捷地解决一些与二次函数有关的物理问题。

解题捷径 2

在物理中常用到等差数列，等差数列前 n 项和为：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；在物理中常用到等比数列，等比数列前 n 项和为：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq1)$，当公比 $q<1$ 时，前 n 项和为：$S_n=\frac{a_1}{1-q}$。

解题捷径 3

相交弦定理：一圆的两条弦的交点 O 将弦分为两段，且每条弦两段的乘积相等，即 $AO\cdot OB=CO\cdot OD$。

解题捷径 4

相似三角形对应边成比例。利用这一简单的比例关系，可以使有关的物理问题极为

简捷地得到解决。

解题捷径 5

利用 $y=ax^2+bx+c$ 的性质求极值，即当 $a>0$ 时，图象开口向上，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有极小值，为 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，图象开口向下，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有极大值，为 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

解题捷径 6

分子一定，当分母最小时，分数值最大；当分母最大时，分数值最小。利用此性质可以求出具有分式型的物理量的极值。

解题捷径 7

定积求和原理：如果 n 个正数之积为常数 K，则 n 个数相等时，其和最小，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，有 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)_{\min}=n\sqrt[n]{K}$。

解题捷径 8

定和求积原理：如果 n 个正数之和为常数 K，则 n 个数相等时，其积最大，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，有 $(x_1x_2\cdots x_n)_{\max}=(\frac{K}{n})^n$。

解题捷径 9

利用费马原理求最小值。光从一点沿着费时最少的路径传播，即在同一种均匀介质中，遵循反射定律光程最短；在两种均匀介质中，遵循折射定律的光程费时最少。

解题捷径 10

三角形中有一个内接矩形，若矩形的一个顶点位于直角三角形斜边上中点时，内接矩形的面积最大。

解题捷径 11

两个物理量成正比，那么，这两个物理量的变化量也成正比，即 $y=kx$，$\Delta y=k\Delta x$。

解题捷径 12

利用三角函数中的三角和差公式求极值：$y=a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$，其中 β 值符合 $\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\beta$

$=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

解题捷径 13

当判别式 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，一元二次方程有实数解。若我们在解物理习题时能选择适当的物理量作为未知量，使其成为一个一元二次方程，巧妙地利用判别式可解决极值问题。

解题捷径 14

变量求解问题可巧妙应用图象法解决此类问题，且解题过程简洁、思路清晰、便于应用。

解题捷径 15

在角 $\alpha\leqslant 5°$ 时，$\sin\alpha\approx\tan\alpha\approx\alpha(\text{rad})$。利用这一关系不仅可以极为方便地证明一系列的重要公式，还可以将非线性变量转化为线性变量，甚至恒量，使分析和解答问题的思路和步骤变得极为简捷。

解题捷径 16

利用比例函数性质求解比值：利用物理规律找出已知量和待求量的函数关系；把式中所有的物理量都变成已知量、待求量和本题中的不变量或相同量；把本题中的不变量或相同量全部去掉，列出已知量和待求量的函数关系。

三、解题捷径范例精析

解题捷径 1

韦达定理：在数学中，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1，x_2 与各项系数 a，b 和 c 具有下列关系，即 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。利用韦达定理，可以极为简捷地解决一些与二次函数有关的物理问题。

【范例】 以初速度 v_0 竖直上抛一个物体，在 t_1 末上升至 h 高处，在 t_2 末又回到 h 高处。试证明：$h=\dfrac{g^2}{4v_0}(t_1+t_2)t_1t_2$。

【精析】 根据竖直上抛运动的位移公式 $h=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$，有 $gt^2-2v_0t+2h=0$，

根据韦达定理知：

$$t_1+t_2=\frac{2v_0}{g} \tag{1}$$

$$t_1 t_2=\frac{2h}{g} \tag{2}$$

由(1)和(2)式相乘得

$$h=\frac{g^2}{4v_0}(t_1+t_2)t_1 t_2。$$

【同类精练】 有两个定值电阻，串联时总电阻为 18Ω，并联时总电阻为 4Ω。求每个电阻的阻值是多少？

解题捷径 2

在物理中常用到等差数列，等差数列前 n 项和为：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；在物理中常用到等比数列，等比数列前 n 项和为：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$，当公比 $q<1$ 时，前 n 项和为：$S_n=\frac{a_1}{1-q}$。

【范例】 如图 11-2-1 所示，多级滑轮组由 n 个重力均为 G_0 的动滑轮组成，下挂重力为 G 的物体。不计一切摩擦，求系统平衡时的拉力 F。

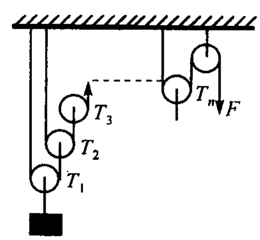


图 11-2-1

【精析】 设跨过每个动滑轮的各段绳的张力分别为 $F_1, F_2, F_3, \cdots, F_n$。

根据平衡条件，有

$$F_1=\frac{1}{2}(G+G_0),$$

$$F_2=\frac{1}{2}(F_1+G_0)=\frac{G}{2^2}+\frac{(1+2)G_0}{2^2},$$

$$F_3=\frac{1}{2}(F_2+G_0)=\frac{G}{2^3}+\frac{(1+2+2^2)G_0}{2^3},$$

$$F_n=\frac{G}{2^n}+\frac{(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})G_0}{2^n},$$

括号内是公比为 2 的等比数列，其和为 $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，所以，拉力为 $F=F_n=\frac{G+(2^n-1)G_0}{2^n}$。

【同类精练】 如图 11-2-2 所示，小球先从 h 高处，以速度 v 平抛，与光滑水平面发生碰撞后，损失一部分能量，且水平分速度不变，而竖直分速度在碰撞后与碰撞前之比为 $K(K<1)$。

试求从抛出到停止跳跃，小球通过的水平距离是多少？（不计碰撞时间和空气阻力）

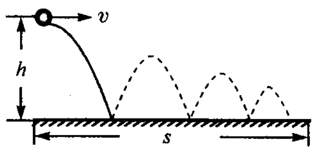


图 11-2-2

解题捷径 3

相交弦定理：一圆的两条弦的交点 O 将弦分为两段，且每条弦两段的乘积相等，即 $AO \cdot OB = CO \cdot OD$。

【范例】 如图 11-3-1 所示，质量为 m、电阻为 R、半径为 r 的金属环，竖直落入磁感应强度为 B、方向垂直纸面向里的匀强磁场中，且进入磁场 $h=\frac{1}{2}r$ 时，加速度为零，求此时环的下落速度。

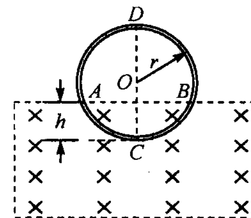


图 11-3-1

【精析】 设弦 AB 的有效切割长度为 l。根据相交弦定理

$$\left(\frac{1}{2}l\right)^2=\frac{1}{2}r\times\frac{3}{2}r,\ l=\sqrt{3}r,$$

若下落速度为 v，根据平衡条件 $mg=BIl=B\dfrac{Blv}{R}l$，

所以，速度 $v=\dfrac{mgR}{B^2l^2}=\dfrac{mgR}{3B^2r^2}$。

【同类精练】 如图 11-3-2 所示，一直径为 d 的圆环，处于磁感应强度为 B、方向垂直纸面向里的匀强磁场中。一金属棒，以速度 v 向右平动。当 $t=0$ 时，棒与环相切于 A 点。求在 t 时刻，棒与环的两交点 a、b 间的电动势是多少？（一切电阻忽略不计）

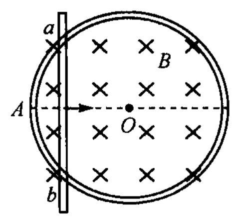


图 11-3-2

解题捷径 4

相似三角形对应边成比例。利用这一简单的比例关系，可以使有关的物理问题极为简捷地得到解决。

【范例】 如图 11-4-1 所示，在拉力作用下，小球 A 沿光滑大球表面缓慢向上移动。在此过程中，小球受到的拉力 F 和支持力 N 的大小关系是(　　)

A. F 和 N 都增大

B. F 和 N 都减小

C. F 增大，N 减小

D. F 减小，N 不变

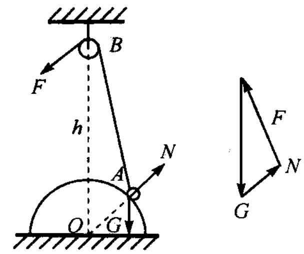


图 11-4-1

【精析】 设球半径为 R，定滑轮到球心高度为 h，$AB=L$。在沿球面缓慢向上移动的过程中，小球在三个共点力作用下处于平衡状态。因为三力构成的矢量三角形 GNF 与几何三角形 AOB 相似，对应边成比例，从而有

$$\frac{F}{G}=\frac{L}{h} \tag{1}$$

$$\frac{N}{G}=\frac{R}{h} \tag{2}$$

从而有

$$F=\frac{G}{h}L\propto L,$$

$$N=\frac{R}{h}G=\text{常量},$$

所以，应选 D。

【同类精练】 如图 11-4-2 所示，在距离竖直墙壁为 d 处，有一个点光源 S。一个小球从 S 处以初速度 v_0 水平抛出，则关于小球的影子在墙壁上的运动，下列哪些说法正确(　　)

A. 影子做自由落体运动

B. 影子做匀速直线运动

C. 小球的初速度 v_0 减小，影子的速度增大

D. 点光源与墙壁的距离 d 增大，影子的速度增大

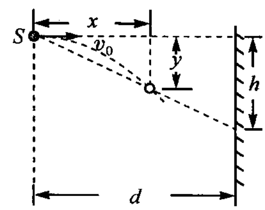


图 11-4-2

解题捷径 5

利用 $y=ax^2+bx+c$ 的性质求极值，即当 $a>0$ 时，图象开口向上，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有极小值，为 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，图象开口向下，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有极大值，

为 $y_{max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

【范例】 如图 11-5-1 所示，摩托车做腾跃特技表演，以 $v_0=10\text{m/s}$ 初速度冲上顶部水平的高台，然后从高台顶部水平飞出。试分析：当台高 h 多大时，飞出的水平距离最远？最大值是多少？（不计一切摩擦，取 $g=10\text{m/s}^2$）

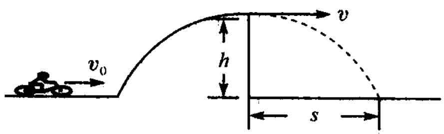


图 11-5-1

【精析】 设摩托车从高台飞出的水平速度为 v，由机械能守恒知

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgh+\frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

摩托车飞出高台做平抛运动，飞出的水平距离可以表示为

$$s=vt=v\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{2}$$

由(1)、(2)两式得

$$s=\sqrt{v_0^2-2gh}\times\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2v_0^2h}{g}-4h^2},$$

因为 $a=-4<0$，所以 s 有最大值的条件为

$$h=-\frac{b}{2a}=-\frac{2v_0^2/g}{2\times(-4)}=\frac{v_0^2}{4g}=2.5\text{m},$$

水平距离的最大值为 $s_{max}=\dfrac{v_0^2}{2g}=5\text{m}$。

【同类精练】 A、B 两站相距 $s_0=200\text{km}$，一辆汽车以 $v_A=40\text{km/h}$ 的速度从 A 驶向位于正西方向的 B 地；与此同时，另一辆汽车以 $v_B=30\text{km/h}$ 的速度从 B 向正南方向行驶。求两车何时相距最近？最近距离是多少？

解题捷径 6

分子一定，当分母最小时，分数值最大；当分母最大时，分数值最小。利用此性质可以求出具有分式型的物理量的极值。

【范例】 试证明：近地面人造卫星具有三个极值：

环绕速度最大 $v_{max}=\sqrt{gR}=9.8\text{km/s}$，

环绕角速度最大 $\omega_{\max}=\sqrt{\frac{R}{g}}=\frac{1}{180}\mathrm{rad/s}$，

环绕周期最短 $T_{\min}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=85\mathrm{min}$。

【精析】 根据万有引力定律和牛顿第二定律

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r,$$

所以，v，ω，T 可以分别表示为

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{R^2 g}{r}}\propto\frac{1}{\sqrt{r}},$$

$$\omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}}=\sqrt{\frac{R^2 g}{r^3}}\propto\frac{1}{\sqrt{r^3}},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{R^2 g}}\propto\sqrt{r^3},$$

式中 R 为地球半径，g 为地球表面的重力加速度。当轨道半径最小，即 $r=R$ 时，三个极值分别为

$$v_{\max}=\sqrt{gR}=9.8\mathrm{km/s},$$

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{R}{g}}=\frac{1}{180}\mathrm{rad/s},$$

$$T_{\min}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=85\mathrm{min}。$$

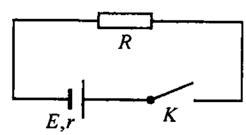


图 11-6-1

【同类精练】 如图 11-6-1 所示，恒定电源的电动势为 E，内电阻为 r。试分析外电路电阻 R 为多大时，电源输出功率最大？最大值是多少？

解题捷径 7

定积求和原理：如果 n 个正数之积为常数 K，则 n 个数相等时，其和最小，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，有 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)_{\min}=n\sqrt[n]{K}$。

【范例】 如图 11-7-1 所示，一个小球由静止开始，从 H 高处无摩擦滑下，然后进入半径 R 的光滑圆轨道。为了越过轨道正上方圆心角为 2α 的缺口 AB，求小球下滑的最小

高度是多少？

【精析】 设小球质量为 m，从 A 点做斜上抛运动的速度为 v。

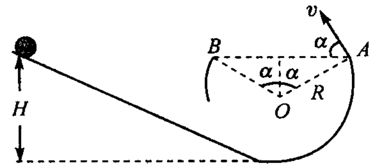


图 11-7-1

根据射程公式

$$2R\sin\alpha=\frac{v^2\sin2\alpha}{g} \qquad (1)$$

根据机械能守恒定律

$$mgH=mg(R+R\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

由(1)、(2)得

$$H=\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)R \qquad (3)$$

在(3)式中，因为 $\cos\alpha\times\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}$，

故当 $\cos\alpha=\frac{1}{2\cos\alpha}$，

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\alpha=45°$时，

其和最小，即 H 最小值为

$$H_{\min}=(1+\sqrt{2})R$$

【同类精练】 如图 11-7-2 所示，三个小球的质量分别为 m_1，m_2，m_3，在光滑水平面上排列成一直线。若 m_1 以速度 v_1 开始运动，并引起各球发生弹性碰撞。试分析：当 m_2 质量为多大时，m_3 被碰后获得的速度最大？最大值是多少？

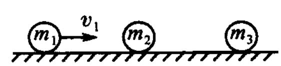
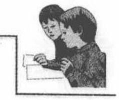


图 11-7-2

解题捷径 8

定和求积原理：如果 n 个正数之和为常数 K，则 n 个数相等时，其积最大，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，有 $(x_1x_2\cdots x_n)_{\max}=\left(\frac{K}{n}\right)^n$。

【范例】 一只帆船在河中顺水匀速航行。求船速与风速之比多大时，风对船提供的



功率最大？（假定风向始终与帆船垂直，且帆船面是弹性的）

【精析】 设帆面积为 S，空气分子的平均质量为 m，船速为 v，风速为 v_0。每个空气分子与帆面发生碰撞后，其动量增量为

$$\Delta p=2m(v_0-v) \tag{1}$$

设空气单位体积内含有的分子数为 n，则在 Δt 时间内撞击帆面的空气分子数为

$$N=nS(v_0-v)\Delta t \tag{2}$$

根据动量定理，帆面受到的冲击力为

$$F=N\frac{\Delta p}{\Delta t} \tag{3}$$

则风向帆船提供的功率为

$$P=Fv \tag{4}$$

由(1)、(2)、(3)、(4)联立得

$$P=nmS(2v)(v_0-v)(v_0-v)$$

因为 $2v+(v_0-v)+(v_0-v)=2v_0$，则当 $2v=v_0-v$ 时，功率具有最大值，故帆船的速度应为 $v=\frac{1}{3}v_0$，

如果已知 n,m,S,v_0，则最大功率可以表示为

$$P_{\max}=nmS\left(\frac{2}{3}v_0\right)^3=\frac{8}{27}nmSv_0^3。$$

【同类精练】 在真空中，两个金属球相距 r，将电量 Q 分配在两个球上。试分析：按什么比例分配时，两球间的库仑斥力最大？最大值是多少？

解题捷径 9

利用费马原理求最小值。光从一点沿着费时最少的路径传播，即在同一种均匀介质中，遵循反射定律光程最短；在两种均匀介质中，遵循折射定律的光程费时最少。

【范例】 如图 11-9-1 所示，A 为海上石油钻井台，与海岸相距为 $l=9\text{km}$；B 为岸上供应站，与 C 相距为 $L=18\text{km}$。已知在海上乘船，船速为 $v_1=4\text{km/h}$；在岸上步行，速度为 $v_2=5\text{km/h}$。为了尽快地从 A 到达 B，在上述条件下应该怎么办？

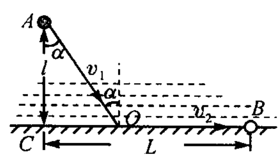


图 11-9-1

【精析】 人在海岸上和岸上运动，可视为光在光密介质和光

疏介质中的传播，且正好处于全反射的临界状态（这是一条符合折射定律的路线，所以时间最短）。

设人先乘船到达 O 点，然后登陆，从 O 步行到 B。

根据折射定律 $\frac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

$OC=l\tan\alpha=l\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=12\text{km}$，

$OB=BC-OC=6\text{km}$。

【同类精练】 如图 11-9-2 所示，海岛上有一个汽车站 O，到两海岸线的距离分别为 a 和 b，为了在南北海岸线上各设一个码头 A 和 B，并使汽车沿 O—A—B—O 运转周期最短。试问两码头应设在海岸线的什么地方？

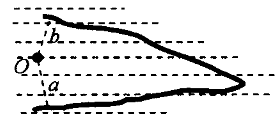


图 11-9-2

解题捷径 10

三角形中有一个内接矩形，若矩形的一个顶点位于直角三角形斜边上中点时，内接矩形的面积最大。

【范例】 如图 11-10-1 所示，宽为 l 的金属导轨置于磁感应强度为 B 的匀强磁场中，且 B 的方向竖直向下。电源电动势为 E，内阻为 r。不计其他电阻和一切摩擦，求当开关 K 闭合后，金属棒 AB 速度多大时机械功率最大？最大值是多少？

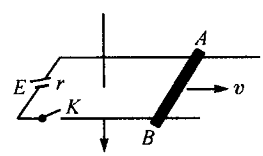


图 11-10-1

【精析】 当金属棒的速度为 v 时，所产生的感应电动势为 $E_感=Blv$。这时电路中电流为

$$I=\frac{E-E_感}{r}=\frac{E-Blv}{r},$$

金属棒受到的安培力为

$$F=BIl=\frac{BEl}{r}-\frac{B^2l^2v}{r},$$

安培力 F 与速度 v 为线性关系，

当 $v=0$ 时，F 达到最大值为 $F_{max}=\frac{BEl}{r}$，

当 $F=0$ 时，v 达到最大值为 $v_{max}=\frac{E}{Bl}$。

由图 11-10-2 可以，看出，金属棒瞬时功率 $P=Fv$，就是矩形面积 $ABCO$。根据 B 过图线中点时，直角三角形内接矩形面积最大，瞬时功率最大。所以，最大机械功率为 $P_{max}=\frac{1}{2}F_{max}\times\frac{1}{2}v_{max}=\frac{E^2}{4r}$。

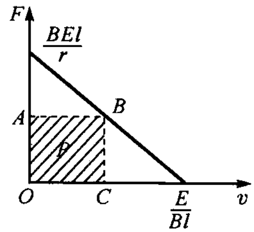


图 11-10-2

【同类精练】 利用电动势为 E、内阻为 r 的稳定电源，向负载供电，试证明：当 $R=r$ 时，电源输出功率最大 $P_{max}=\frac{E^2}{4r}$。

解题捷径 11

两个物理量成正比，那么，这两个物理量的变化量也成正比，即 $y=kx$，$\Delta y=k\Delta x$。

【范例】 如图 11-11-1 所示，两根光滑的平行金属导轨处于同一水平面内，相距 $L=0.3\text{m}$ 导轨的左端 M、N 用 0.2Ω 的电阻 R 连接，导轨电阻不计，导轨上停放着一金属杆，杆的电阻 $r=0.1\Omega$，质量 $m=0.1\text{kg}$。整个装置处于竖直向下的匀强磁场中，磁感应强度 B 为 0.5T。为了使 R 上电压每秒均匀增加 0.05V，且 M 点的电势高于 N 点的电势，必须使杆如何运动？若导轨足够长，则从杆开始运动后的 2s 末，外力的瞬时功率多大？

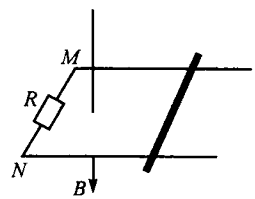


图 11-11-1

【精析】 设 R 两端电压为 U，杆运动的瞬时速度为 v，加速度为 a，则有 $U=\frac{R}{R+r}\cdot E$，$E=BLv$，所以 $v=\frac{R+r}{BLR}\cdot U$，

可推知：$\Delta v=\frac{R+r}{BLR}\cdot\Delta U\Rightarrow\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{R+r}{BLR}\cdot\frac{\Delta U}{\Delta t}$，而加速度 $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$，

由于 $\frac{\Delta U}{\Delta t}=0.05\text{V/s}$ 为一常数，所以 $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=0.5\text{m/s}^2$，杆应以 $a=0.5\text{m/s}^2$ 的匀加速度向右做匀加速直线运动。对杆有：$F=\frac{B^2L^2v}{R+r}+ma=0.125\text{N}$，2s 末杆的速度 $v=at=1\text{m/s}$，外力的瞬时功率 $P=Fv=0.125\text{W}$。

【同类精练】 如图 11-11-2 所示，将电动势 $E=1.5\text{V}$，内阻 $r=0.5\Omega$ 的电源与一粗细均匀的电阻丝相连，电阻丝的长度 $L=0.3\text{m}$。电阻 $R=100\Omega$。当滑动片以 $v=5\times10^{-3}\text{m/s}$ 的速度向右滑动时，电流表 G 的读数为多少？（已知 $C=\mu F$）。

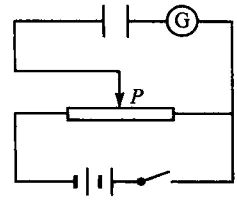


图 11-11-2

解题捷径 12

利用三角函数中的三角和差公式求极值：$y=a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$，其中 β 值符合 $\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

【范例】 如图 10-12-1 所示，质量为 $M=2\text{kg}$ 的木块与水平地面的动摩擦因数 $\mu=0.4$，木块用轻绳绕过光滑的定滑轮，轻绳另一端施一大小为 20N 的恒力 F，使木块沿地面向右做直线运动，定滑轮离地面的高度 $h=10\text{cm}$，木块 M 可视为质点，问木块从较远处向右运动到离定滑轮多远时加速度最大？最大加速度为多少？

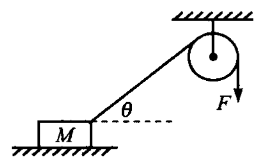


图 11-12-1

【精析】 设当轻绳与水平方向成角 θ 时，对 M 有

$$F\cos\theta-\mu(Mg-F\sin\theta)=Ma,$$

整理得
$$F(\cos\theta+\mu\sin\theta)-\mu Mg=Ma,$$

令 $\cos\theta+\mu\sin\theta=A$，可知，当 A 取最大值时 a 最大。利用三角函数知识有：$A=\sqrt{1+\mu^2}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$，而 $A_{\max}=\sqrt{1+\mu^2}$，与此相对应的角为 $\theta=90^\circ-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\approx21.8^\circ$，

所以加速度的最大值为：$a_{\max}=\frac{F\sqrt{1+\mu^2}}{M}-\mu g\approx6.8\text{m/s}^2$，

此时木块离定滑轮的水平距离为：$s=h\cot\theta\approx25\text{cm}$。

说明：此题并非在任何条件下都能达到上述最大加速度，当木块达到一定值时，有可能使物体脱离地面，此后物体将不再沿着水平面运动。因此，F、M、μ 必须满足 $F\sin\theta\leqslant$

Mg。此题所给数据满足上述条件，能够达到最大加速度。

【同类精练】 如图 11-12-2 所示，重为 G 的物体与水平地面的动摩擦因数为 μ，欲以一个拉力 F 使物体沿地面匀速前进。问 F 与水平地面的夹角 θ 为何值时最省力？这个最小拉力是多大？

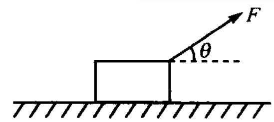


图 11-12-2

解题捷径 13

当判别式 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，一元二次方程有实数解。若我们在解物理习题时能选择适当的物理量作为未知量，使其成为一个一元二次方程，巧妙地利用判别式可解决极值问题。

【范例】 一个质量为 m 的电子与一个静止的质量为 M 的原子发生正碰，碰后原子获得一定速度，并有一定的能量 E 被贮存在这个原子内部。求电子必须具有的最小初动能是多少？

【精析】 设电子碰前的速度为 v_1，碰后的速度为 v'_1，静止的原子被碰后的速度为 v'_2。由动量守恒定律有

$$mv_1=mv'_1+Mv'_2 \tag{1}$$

由能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv'_1+\frac{1}{2}Mv'^2_2+E \tag{2}$$

在以上两个方程中，有三个未知数，v_1，v'_1，v'_2，

由(1)式解出 $v'_2=\dfrac{m(v_1-v'_1)}{M}$，

代入(2)可得：　$\dfrac{1}{2}mv_1^2=\dfrac{1}{2}mv'^2_1+\dfrac{1}{2}M\left[\dfrac{m(v_1-v'_1)}{M}\right]^2+E$，

进一步整理可得：

$$(M+m)mv'^2_1-2m^2v_1v'_1+(m-M)mv_1^2+2ME=0$$

此式是关于 v'_1 的一元二次方程，因电子碰后的速度 v'_1 必为实数，所以此方程的判别式 $b^2-4ac\geqslant0$，即

$$4m^4v_1^2-4(M+m)m[(m-M)mv_1^2+2ME]\geqslant0,$$

根据上式整理可得：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 \geq \frac{M+m}{M}E,$$

所以电子必须具有的最小的初动能是$\frac{M+m}{M}E$。

【同类精练】 如图 11-13-1 所示，顶角为 2θ 的光滑圆锥，置于磁感应强度大小为 B，方向竖直向下的匀强磁场中，现有一个质量为 m，带电量为 $+q$ 的小球，沿圆锥面在水平面做匀速圆周运动，求小球做圆周运动的轨道半径。

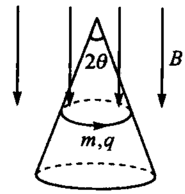


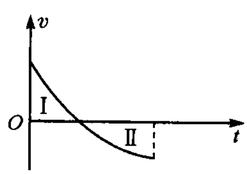
图 11-13-1

解题捷径 14

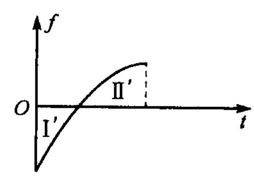
变量求解问题可巧妙应用图象法解决此类问题，且解题过程简洁、思路清晰、便于应用。

【范例】 小球以初速 v_0 上抛，已知小球运动过程中受到空气的阻力与其速率成正比，且落回抛点时小球速度为 v，求小球从上抛到落回抛点全过程所需的时间。

【精析】 此题小球所受的阻力与速率成正比，无论在上抛阶段还是下落阶段，小球所受的合外力是变力，加速度为变量，所以无法用匀加速直线运动的公式求解。但我们可以画出全过程的 v—t 图。如图 11-14-1①所示，因为速度—时间图线与 t 轴间所围的面积表示小球在对应时间内经过的位移大小，而且上抛与下落阶段所经过的位移大小相同，所以，图中区域Ⅰ与Ⅱ面积相等。



图①



图②

图 11-14-1

由已知条件可知，小球运动过程中受到空气的阻力与其速率成正比。设阻力 $f=-kv$，由此可画 f—t 图。图②中区域Ⅰ′和区域Ⅱ′的面积一定分别是图①中区域Ⅰ和区域Ⅱ面积的 k 倍。由此可知，Ⅰ′的面积与Ⅱ′的面积亦相等。

因为冲量 $I=F\cdot t$，所以图②中曲线与 t 轴所围面积表示对应时间内阻力 f 的冲量值。可见，在小球上抛和下落过程中阻力的冲量等大、反向，全过程阻力的合冲量为零。全过程应用质点动量定理，设向上为正方向：$-mv-mv_0=-mgt+I=-mgt$，$t=\dfrac{m(v+v_0)}{mg}=\dfrac{v+v_0}{g}$，

故小球全过程所需时间 $t=\dfrac{v+v_0}{g}$。

【同类精练】 蚂蚁离开蚁巢沿直线爬行，它的速度与到蚁巢中心距离成反比。当蚂蚁爬到距蚁巢中心 $d_1=1\text{m}$ 的 A 点处时，速度 $v_1=2\text{cm/s}$。

解题捷径 15

在角度 $\alpha\leqslant5°$ 时，$\sin\alpha\approx\tan\alpha\approx\alpha(\text{rad})$。利用这一关系不仅可以极为方便地证明一系列的重要公式，还可以将非线性变量转化为线性变量，甚至恒量，使分析和解答问题的思路和步骤变得极为简捷。

【范例】 如图 11-15-1 所示，在光滑水平的绝缘桌面上，有一个质量和带电量均匀分布的细圆环，其半径为 R，质量为 m，电量为 q，处于磁感应强度为 B、方向竖直向下的匀强磁场中，以角速度 ω 顺时方向旋转。求环中的张力。

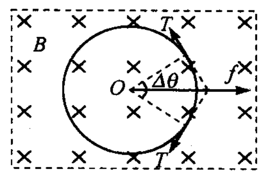


图 11-15-1

【精析】 设电量为 Δq 、质量为 Δm 的一段圆环，其所对圆心角为 $\Delta\theta$。它在水平方向受到张力 T、洛仑兹力 f 的作用。根据牛顿第二定律，有

$$2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}-f=\Delta mR\omega^2 \tag{1}$$

而洛仑兹力大小为

$$f=B\Delta qv=B\Delta qR\omega \tag{2}$$

根据圆环每段的带电量和质量与所对圆心角成正比，还有

$$\frac{\Delta q}{q}=\frac{\Delta m}{m}=\frac{\Delta\theta}{2\pi} \tag{3}$$

当 $\Delta\theta$ 很小时，$\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\approx\dfrac{\Delta\theta}{2}$，

所以，环中的张力为

$$T=\frac{R\omega}{2\pi}(m\omega+Bq)。$$

【同类精练】 如图 11-15-2 所示，两个平面镜 M_1 和 M_2 彼此成一个很小的夹角 θ。一条光线从 M_1 的 O 点垂直镜面射到 M_2 的 A 点，且经过 100 次来回反射，仍未跑出两镜

面。已知 $OA=L=5\text{cm}$。M_1 长为 $l=1\text{mm}$，求 θ 角最大不能超过多少？

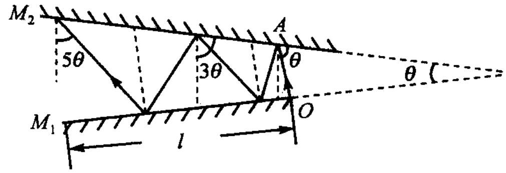


图 11-15-2

解题捷径 16

利用比例函数性质求解比值：利用物理规律找出已知量和待求量的函数关系；把式中所有的物理量都变成已知量、待求量和本题中的不变量或相同量；把本题中的不变量或相同量全部去掉，列出已知量和待求量的函数关系。

【范例】 静止氘核经电势差为 U_1 的加速电场加速后垂直射入电势差为 U_2 的两块平行极板间的电场之中，射出平行板区时偏转距离为 y；若静止氦核经过加速电压、偏转电压均为原来两倍、其余条件相同的加速电场和偏转电场，还能射出平行板区，则其偏转距离是__________。

【精析】 本题属比值问题，电场中的偏转距离公式为 $y=\dfrac{qU_2L^2}{2mdv_0^2}=\dfrac{U_2L^2}{4dU_1}$。

对本题中的氘核、氦核来说，d、L 都是常量，因而 y 与 U_2/U_1 的比值成正比，即 $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{U_2/U_1}{U_2'/U_1'}=\dfrac{U_2}{U_2'}\cdot\dfrac{U_1'}{U_1}=1$ 。

本题如果分别求出 y 和 y' 的表达式再相除，费时就偏多，且本题用比例法可更好地揭示出偏转距离与偏转电压和加速电压的函数关系，有利于学生对物理量间决定关系的量有直观的认识。

【同类精练】 三个速度大小不同的同种带电粒子，沿同一方向从如图 11-16-1 所示长方形区域的匀强磁场上边缘射入，当它们从下边缘飞出时对入射方向的偏角分别为 90°，60°，30°。则它们在磁场中运动时间之比为（　　）

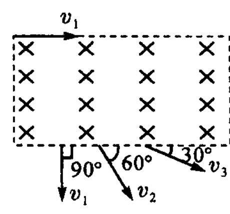


图 11-16-1

A. 1∶1∶1

B. 1∶2∶3

C. 3∶2∶1

D. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

四、同类精练参考答案

解题捷径 1

【精析】 根据串、并联电阻的计算公式，有

$$R_1+R_2=18 \tag{1}$$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{4},\ R_1R_2=72 \tag{2}$$

根据韦达定理，决定 R_1 和 R_2 的方程为 $R^2-18R+72=0$，

而方程的根为 $R=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{18\pm\sqrt{18^2-4\times72}}{2}=9\pm3$，

所以，两电阻分别为 $R_1=12\Omega$，$R_2=6\Omega$。

解题捷径 2

$$F_n=\frac{G}{2^n}+\frac{(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})G_0}{2^n}$$

【精析】 小球先平抛，然后不断做斜上抛运动，轨迹如图所示。小球从抛出到第一次落地的时间为 $t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，且落地时的竖直分速度为 $v_0=\sqrt{2gh}$，

小球每次碰地后，在竖直方向做竖直上抛运动，每相邻两次碰地的时间间隔依次为

$t_1=\frac{2v_1}{g}=\frac{2Kv_0}{g}=2K\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

$t_2=\frac{2v_2}{g}=\frac{2K^2v_0}{g}=2K^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

$t_3=\frac{2v_3}{g}=\frac{2K^3v_0}{g}=2K^3\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

…

$t_n=\frac{2v_n}{g}=2K^n\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

…

故小球停止跳动前运动的总时间为

$$t=t_0+t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n+\cdots=\sqrt{\frac{2h}{g}}+2\sqrt{\frac{2h}{g}}(K+K^2+K^3+\cdots+K^n+\cdots)$$

式中括号内为递减无穷几何级数之和，从无穷递减等比数列知：$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}+2\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\left(\frac{K}{1-K}\right)=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+K}{1-K}\right)$，

小球在水平方向始终以速度 v 匀速运动，故从抛出到停止跳动时，沿水平方向通过的距离为 $s=vt=v\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+K}{1-K}\right)$，

可以看出：小球的跳动次数虽然是无穷的，但最终还是要停止跳跃的。

解题捷径 3

【精析】 设在 t 时刻 a、b 的间距为 L。根据相交弦定理，有

$$\left(\frac{1}{2}L\right)^2=vt(d-vt),$$

$$L=2\sqrt{vt(d-vt)},$$

所以，在 t 时刻，a、b 间的电动势是 $E_{ab}=BLv=2Bv\sqrt{vt(d-vt)}$。

解题捷径 4

【精析】 如图 11-1 所示，小球在水平方向做匀速直线运动，在竖直方向上做自由落体运动，即

$$x=v_0t,$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2,$$

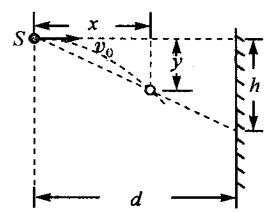


图 11-1

设在时间 t 内，影子在墙壁上的位移为 h。

根据相似三角形对应边成比例，有 $\frac{h}{y}=\frac{d}{x}$，

则影子的运动方程为 $h=\frac{d}{x}y=\frac{gd}{2v_0}t$，

因为 $h\propto t$，且在 t 一定时，$h\propto\frac{d}{v_0}$，所以选 B、C、D。

解题捷径 5

【精析】 如图 11-2 所示，以 B 为坐标原点建立直角坐标系，两汽车的运动方程分别为

$$s_A=s_0-v_At,$$

$$s_B=v_Bt,$$

则在任意时刻 t 两车的间距关系可以表示为

$$s^2=s_A^2+s_B^2=(s_0-v_At)^2+(v_Bt)^2,$$

$$s^2=(v_A^2+v_B^2)t^2-2v_As_0t+s_0^2,$$

因为 $a=v_A^2+v_B^2>0$，所以，

当 $t=-\frac{b}{2a}=\frac{v_A s_0}{v_A^2+v_B^2}$ 时，

s^2 有最小值，即两车达到最小距离的时间为 $t=\frac{v_A s_0}{v_A^2+v_B^2}=3.2\text{h}$，

最小距离为 $s_{\min}=\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}=\frac{v_B s_0}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}=120\text{km}$。

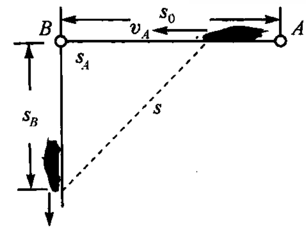


图 11-2

解题捷径 6

【精析】 电源输出功率，即 R 获得的功率为 $P=I^2R=\frac{E^2}{(R+r)^2}R$，

将上式变形得：$P=\frac{E^2}{\frac{(R-r)^2}{R}+4r}$，

当 $R=r$ 时，分母最小，电源输出功率最大 $P_{\max}=\frac{E^2}{4r}$。

解题捷径 7

【精析】 根据弹性碰撞动量守恒和动能守恒知：

$$m_1v_1=m_1v'_1+m_2v'_2,$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2,$$

则 m_2 的速度为 $v'_2=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$，　(1)

同理，当 m_2 与 m_3 相碰后，m_3 的速度为 $v'_3=\frac{2m_2v'_2}{m_2+m_3}$，　(2)

由(1)、(2)得 $v'_3=\frac{4m_1m_2v_1}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}=\frac{4m_1v_1}{m_2+\frac{m_1m_3}{m_2}+m_1+m_3}$，

因为 $m_2\times\frac{m_1m_3}{m_2}=m_1m_3$，故当 $m_2=\frac{m_1m_3}{m_2}$，$m_2=\sqrt{m_1m_3}$ 时，

其和最小，即 $v'_3=\frac{4m_1v_1}{(\sqrt{m_1}+\sqrt{m_3})^2}$。

解题捷径 8

【精析】 设将 Q 分为 q_1 和 q_2 两部分，根据库仑定律有 $F=K\frac{q_1q_2}{r^2}$，

因为 $q_1+q_2=Q$，故当 $q_1=q_2=\frac{1}{2}Q$ 时，两者之积最大，则最大库仑斥力为 $F_{max}=K\frac{Q^2}{4r^2}$。

解题捷径 9

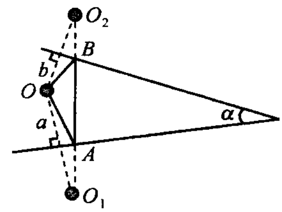


图 11-3

【精析】 将海岸线视为互成 α 角的两平面镜。根据平面镜所成的像与物体对称于镜面，分别作出 O 在两平面镜中的像 O_1 和 O_2；连接 O_1O_2，交平面镜于 A、B 两点。因为连线 OA、AB 和 BO 为符合反射定律的路线，即运输周期最短的行车路线，所以交点 A 和 B 即为码头应设立的位置，如图 11-3 所示。

解题捷径 10

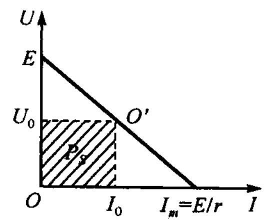


图 11-4

【精析】 根据闭合电路欧姆定律，路端电压为 $U=E-Ir$ 。其 $U-I$ 关系图象如图 11-4 所示，根据 O' 过斜边中点的直角三角形内接矩形面积最大，即输出功率最大。因为三角形两边的中位线等于第三边的一半，所以这时的输出电压和电流分别为

$$U_0=\frac{1}{2}E,I_0=\frac{1}{2}I_{max}=\frac{E}{2r},$$

最大输出功率为 $P_{max}=U_0I_0=\frac{E^2}{4r}$。

解题捷径 11

【精析】 根据欧姆定律，电阻丝两端的电压为 $U=\frac{R}{R+r}E$，

设与电容器并联的那部分电阻的长度为 x，对应的电压为 $U_C=\frac{RE}{(R+r)L}x$，

则 U_C 的减小量与 x 的减小量成正比，即

$$\Delta U_C=\frac{RE\Delta x}{(R+r)L}=\frac{REv\Delta t}{(R+r)L},$$

$$\Delta Q=C\Delta U_C=\frac{CREv\Delta t}{(R+r)L},$$

故通过电流表 G 的电流为 $I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{CRv}{(R+r)L}$，代入数据得 $I=5\times10^{-8}$ A。

解题捷径 12

【精析】 对物体受力分析知：$F\cos\theta-\mu(G-F\sin\theta)=0$，

整理得 $F(\cos\theta+\mu\sin\theta)-\mu G=0$，$F=\dfrac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$，

令 $\cos\theta+\mu\sin\theta=A$，可知，当 A 取最大值时 F 最小。利用三角函数知识有：$A=\sqrt{1+\mu^2}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$，而 $A_{\max}=\sqrt{1+\mu^2}$，$\sin\theta=\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$，

$F_{\min}=G\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$，即 $\theta=\arctan\mu$。

解题捷径 13

【精析】 小球在运动时将受重力 mg，圆锥面对球的弹力 N，及洛仑兹力 f 的作用，如图 11-5 所示。设小球做匀速圆周运动的轨道半径为 R，速率为 v。

由正交分解可得

$$Bqv-N\cos\theta=m\frac{v^2}{R}, \quad (1)$$

$$N\sin\theta-mg=0, \quad (2)$$

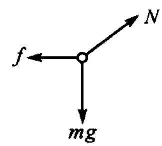


图 11-5

联立(1)、(2)得 $\dfrac{mv^2}{R}-Bqv+mg\cot\theta=0$，

上式有 v,R 两个未知量，似乎不可解，但因为是求极值问题，可用一元二次方程判别式求解。因为 v 有实数解，由 $b^2-4ac\geqslant0$，

即 $(-Bq)^2-4\dfrac{m}{R}\cdot mg\cot\theta\geqslant0$，得 $R\geqslant\dfrac{4m^2g\cot\theta}{B^2q^2}$，

小球做圆周运动的最小半径为 $R_{\min}=\dfrac{4m^2g\cot\theta}{B^2q^2}$。

解题捷径 14

【精析】 由于蚂蚁的速度随时间的变化规律不是线性的。所以在各段路程内的平均速度不是定值，不能利用平均速度公式求解。

由已知条件蚂蚁的速度与到蚁巢中心距离成反比，即 $vd=k$（k 为常数），

将上式变化为 $\dfrac{1}{v}=k'd$（k' 为常数），

发现 $\dfrac{1}{v}$ 与 d 成正比，因此可作 $\dfrac{1}{v}$—d 图象，

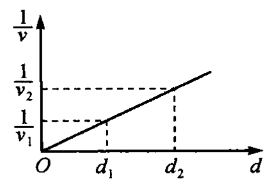


图 11-6

如图 11-6 所示，$\Delta t=\dfrac{1}{v}\Delta d$ 图中阴影部分的面积即为蚂蚁从 A

点爬到 B 点所需的时间。由 $\frac{1}{v}=k'd$，$\frac{\frac{1}{v_1}}{d_1}=\frac{\frac{1}{v_2}}{d_2}$，$\frac{1}{v_2}=\frac{1}{v_1}\frac{d_2}{d_1}$，

由数学公式

$$t=\frac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}{2}(d_2-d_1)=\left(\frac{1}{2v_1}+\frac{d_2}{2v_1d_1}\right)(d_2-d_1)$$

$$=\frac{d_2^2-d_1^2}{2v_1d_1}=\frac{4-1}{2\times2\times1\times10^{-2}}=75\text{s},$$

即蚂蚁从 A 点爬到 B 点需时 75s。

解题捷径 15

【精析】 如图 11-7 所示，光线在 M_2 上多次入射中，入射角依次为 $\theta, 3\theta, 5\theta, \cdots, (2n-1)\theta(n=1,2,3,\cdots)$，

因为 θ 角非常小，可认为两镜面各处的间距均为 L，且 $\tan\theta\approx\theta$。所以，光线经过 $n=100$ 次来回反射后，入射点在 M_1 上移动的距离为 l，所以，夹角 θ 不能超过 $\theta=\frac{l}{2Ln^2}=10^{-6}\text{rad}$。

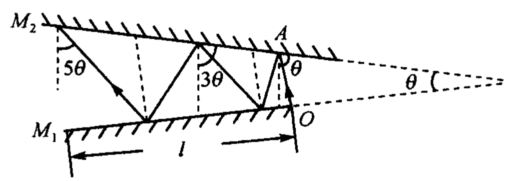


图 11-7

解题捷径 16

【精析】 同种粒子以不同速度射入磁场，经历的时间与它们的偏向角成正比，由本题解题捷径知：$t_1:t_2:t_3=90°:60°:30°=3:2:1$。