

内 容 提 要

本书是《大学物理》教材下册,共分6章,主要包括振动、波动和波动光学,热学,近代物理基础等内容。每章后附有思考题和习题,书后附有部分习题答案,以帮助学生巩固所学内容。

本书可作为高等院校工科专业大学物理课程教材,不同专业可根据其教学需要增减部分内容。本书还可作为各类成人教育及自学考试大学物理教学时的教材和参考书。

前 言

物理学是整个自然科学的基础,是工科各专业的一门重要基础课,对于培养学生科学素养和思维方法,提高学生科学研究能力起着重要的基础作用。学生通过本课程的学习,可以掌握一定的物理学基础理论和实验技能,为今后进一步学习专业知识打下坚实的基础。

在编写这本《大学物理》时,注意了以下几点。

(1) 工程专业大学物理教学要贯彻“以应用为主,以够用为度”的原则,内容力求弃繁就简。作为大学物理课教师,必须了解有关工程专业背景,尽量掌握一些实际应用知识,使自己的教学工作更好地符合培养高级应用型人才的需要。同时本书也适当注意保持大学物理课程体系的完整性。

(2) 大学物理与中学物理的衔接。在教学过程中,应充分利用中学阶段已经具备的物理基础,避免对已学知识的简单重复。本书在理论的阐述、例题、习题各部分都广泛使用了高等数学知识。

(3) 为增加应用训练,应安排讨论课(思考题)、习题课,以帮助学生理解教学内容。

(4) 教材使用的灵活性。本教材主要包括5个独立的篇幅,力学(第2、3、4章),电磁学(第5、6、7章),振动、波动和波动光学(第8、9章),热学(第10、11章),近代物理基础(第12、13章)。为适应不同专业的要求,本书在章节的安排上充分考虑了各单元的相对独立性,可供不同的工科专业选用。

全书分上、下两册:上册包含力学、电磁学;下册包含振动、波

动和波动光学,热学,相对论基础和量子论基础。

参加本书编写工作的教师有李孝华(第1、2章)、万行花(第3、4章)、李其京(第5、8章)、曾令准(第6章)、钟明新(第7章)、王彪(第9章)、王华强(第10、11章)、李传新(第12、13章)。上册由李孝华负责统稿,下册由李传新负责统稿。

由于水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,恳请各位读者在使用的过程中指正。

编者

2005年3月

目 录

第 8 章 振动学和波动学基础	(1)
第 1 节 简谐振动	(2)
第 2 节 简谐振动的合成	(21)
第 3 节 简谐波	(26)
第 4 节 平面简谐波的定量分析	(32)
第 5 节 电磁波	(41)
第 6 节 波的叠加	(45)
思考题	(52)
习题	(54)
第 9 章 波动光学	(62)
第 1 节 光的相干性 获得相干光的两种方法	(63)
第 2 节 双缝干涉 薄膜干涉	(68)
第 3 节 光的衍射	(82)
第 4 节 迈克耳孙干涉仪 时间相干性	(89)
第 5 节 衍射光栅	(92)
第 6 节 光的偏振	(99)
思考题	(104)
习题	(106)
第 10 章 气体分子运动论	(115)
第 1 节 理想气体的状态方程	(115)
第 2 节 理想气体的压强、温度和内能	(122)
第 3 节 麦克斯韦速率分布律 玻耳兹曼分布律	(132)
思考题	(142)
习题	(144)

第 11 章 热力学基础	(145)
第 1 节 热力学第一定律	(145)
第 2 节 热力学第一定律应用于理想气体特征过程	(149)
第 3 节 循环过程 卡诺循环	(157)
第 4 节 热力学第二定律	(163)
思考题	(169)
习题	(170)
第 12 章 相对论基础	(173)
第 1 节 相对运动 伽利略变换	(174)
第 2 节 狭义相对论的两条基本假设 洛伦兹变换	(178)
第 3 节 狭义相对论的时空观	(183)
第 4 节 狭义相对论动力学基础	(189)
第 5 节 广义相对论简介	(194)
思考题	(198)
习题	(198)
第 13 章 量子论基础	(199)
第 1 节 黑体辐射 普朗克能量子假说	(200)
第 2 节 光电效应 爱因斯坦光量子理论	(205)
第 3 节 氢原子光谱 玻尔理论	(208)
第 4 节 物质波 测不准原理	(214)
第 5 节 波函数 薛定谔方程	(220)
思考题	(227)
习题	(228)
附录 部分习题答案	(229)
参考文献	(234)

向。现将物体略微向右移到位置 B ,然后放开(见图8-1(b))。此时,由于弹簧被伸长而出现指向平衡位置的弹性力。在弹性力的作用下,物体向左运动。当通过平衡位置时,作用在物体上的弹性力减小到零,但是由于物体具有一定的运动速度,所以物体并不停留在平衡位置,而是继续向左运动,从而压缩弹簧。此时由于弹簧被压缩而出现的指向平衡位置的弹性力将阻止物体向左运动,使物体的运动速度减小,直到物体到达位置 C ,速度减小到零为止(见图8-1(c))。物体到达点 C 后也不可能静止下来,物体又将在弹性力作用下改变方向,向右运动。这样,在弹性力的作用下,物体就在平衡位置附近作往复运动。这一振动系统叫做弹簧振子。

在弹簧振子的振动过程中,弹簧给予物体的弹性力,其大小和方向都在发生变化。图8-1中,物体在任意时刻所受的弹性力可表示为

$$F = -kx$$

式中, x 为物体任意时刻的位置,也表示物体相对于坐标原点——平衡位置的位移。负号表示弹性力与物体位移方向相反。利用牛顿第二定律 $F=ma$ 和 $a=\frac{d^2x}{dt^2}$,可以把上式写为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

即
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$,代入上式,即得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (8-1)$$

解上述微分方程得

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \quad (8-2a)$$

式中： A 为振动的振幅， ω 称为圆频率， ϕ 称为初相位。它们的物理意义将在后面加以说明。

式(8-2a)就是弹簧振子的位置随时间变化的关系式。

对式(8-2a)求导，得振子的速度

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (8-2b)$$

再对式(8-2b)求导，得振子的加速度

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (8-2c)$$

下面从能量的观点考察弹簧振子。在式 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 两边乘以 dx ，得

$$m \frac{d^2x}{dt^2} dx = -kx dx$$

或

$$m \frac{dv}{dt} dx = -kx dx$$

即

$$mvdv = -kx dx$$

设初始时刻振子的位置为 x_0 ，速度为 v_0 ，对上式两边积分到任意时刻的位置 x 和速度 v ，即

$$\int_{v_0}^v mvdv = - \int_{x_0}^x kx dx$$

得
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

上式右边两项之和就是初始时刻振子系统的总机械能 E ，也就是

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (8-3a)$$

式中： $\frac{1}{2}mv^2$ 为弹簧振子的动能， $\frac{1}{2}kx^2$ 为弹簧振子的弹性势能。把式(8-2a)和式(8-2b)代入式(8-3a)，得

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) = E \quad (8-3b)$$

式(8-3a)和式(8-3b)说明,弹簧振子在振动过程中,系统的动能和势能也都随时间发生周期性变化,它们之间在不断相互转换,但在任意时刻动能和势能的总和始终保持为一个常量,即系统的总机械能是守恒的,如图8-2所示。

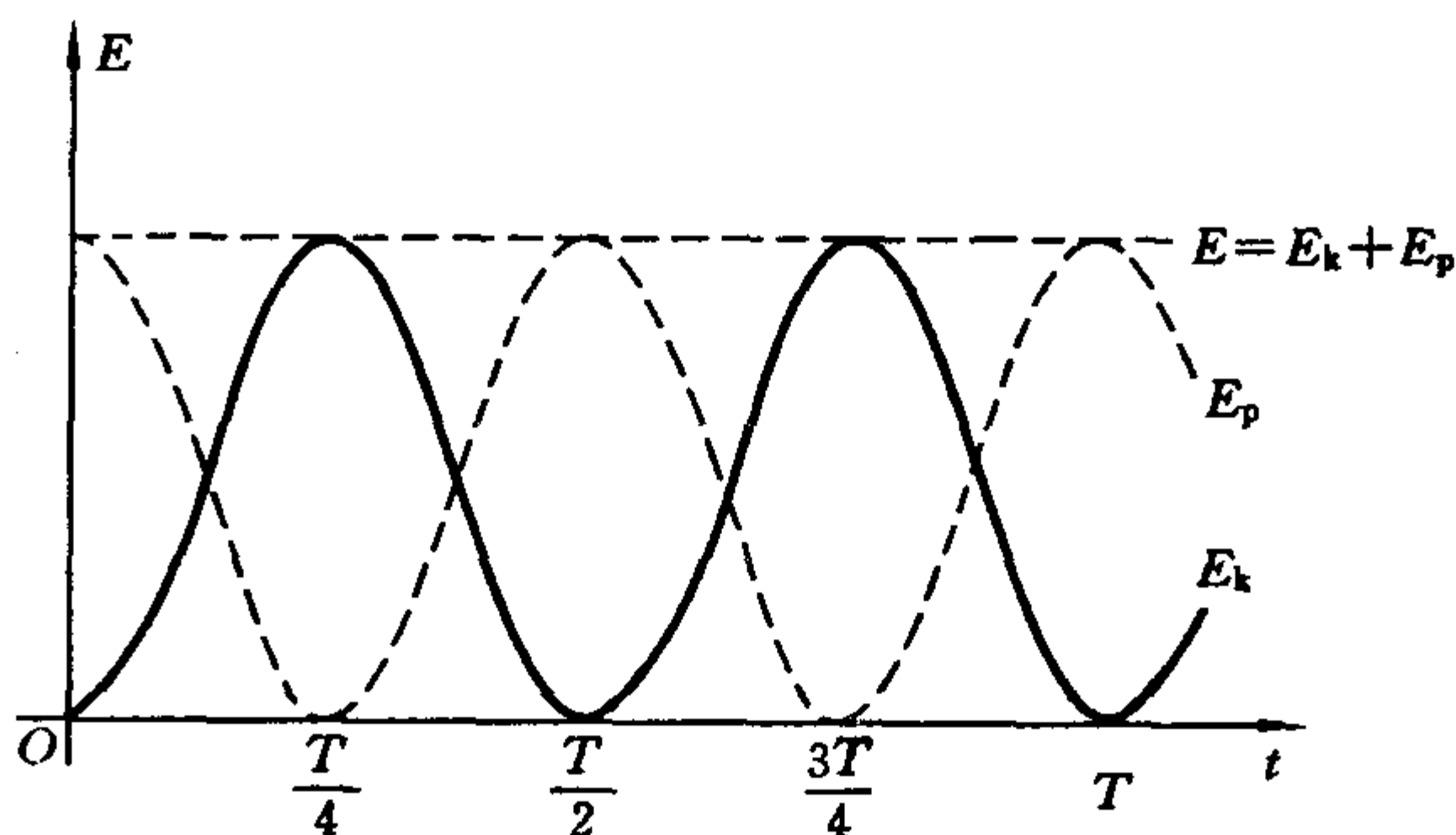


图8-2 每一时刻动能和势能的总和相同

经过上述分析,得出了三个重要公式。式(8-1)揭示了弹簧振子振动过程中的受力特点,式(8-2a)描绘了弹簧振子振动过程中的运动规律,式(8-3a)反映了弹簧振子振动过程中的能量变化关系。式(8-1)、式(8-2a)、式(8-3a)分别从三个不同侧面展现了弹簧振子的振动规律及振动特点。在一个系统所进行的物理过程中,受力特点支配运动规律又制约能量变化关系,式(8-1)是最本质的。所以把式(8-1)作为简谐振动的定义式。其定义如下:

一物体作机械振动时,若描述该振动物体位置的物理量 x 满足微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 则此振动为简谐振动(又称谐振动)。

有时称式(8-1)为简谐振动的动力学方程,而把式(8-2a)称为简谐振动的运动学方程。式(8-2a)表明,作简谐振动的物体,其位置 x 随时间按余弦(或正弦)函数的规律周期性地变化。式(8-2b)

和式(8-2c)则进一步表明,作简谐振动的物体,其速度 v 和加速度 a 也按余弦(或正弦)函数的规律随时间周期性地变化。但是, x 、 v 和 a 并不是每时每刻都以相同的步调变化着。例如, x 取正的最大值的时刻,速度 v 正好等于零,而此刻的加速度 a 却是负的最大值。读者可以从弹簧振子运动的物理过程来认识它们之间的关系;也可以从数学关系(v 是 x 对时间的一阶导数, a 是 v 对时间的一阶导数)来领会它们之间的联系。

式(8-1)可以作为物体是否作简谐振动的判据,即用它来判断一个系统所作的振动是不是简谐振动。对于机械振动,通常是先分析振动系统的受力情况,然后列出动力学方程,最后做出判断。

例 8-1 一远洋货轮,质量为 m ,浮在水面时其水平截面积为 S 。设在水平面上下附近货轮的水平截面积近似相等,如图 8-3 所示,试证明此货轮在水中作振幅较小的竖直自由运动是简谐振动。

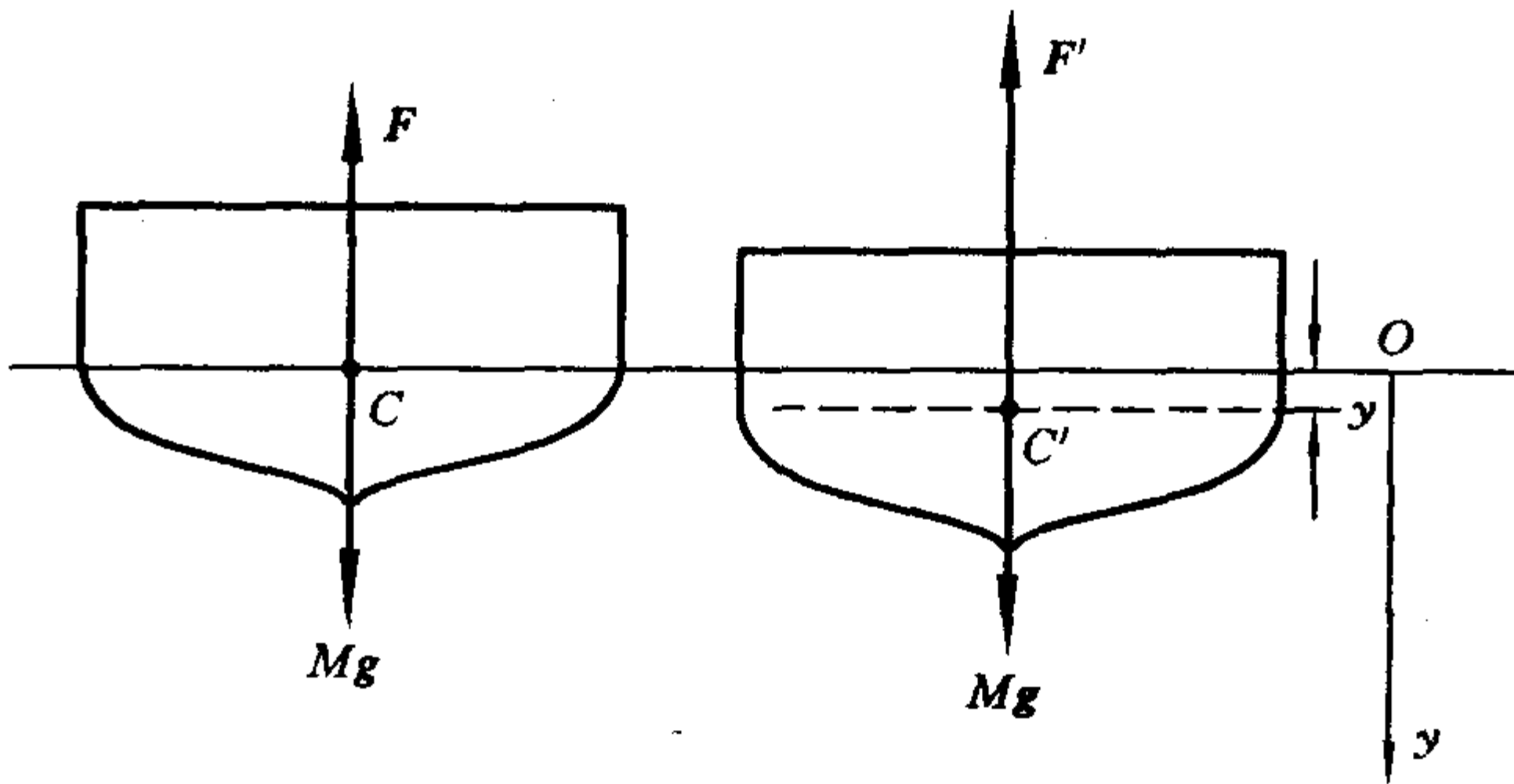


图 8-3 货轮的运动

解 选择点 C 代表船体。船处于静止状态时,点 C 与坐标原点 O 重合,此时船所受浮力 $F = -mg$,船上下振动的任一瞬时,点 C 的坐标为 y (y 可正可负),此时船所受的浮力 $F' = -(mg + \rho Sgy)$,式中 ρ 是水的密度,则作用在船上的合力

$$\sum F = mg + F' = -\rho S g y$$

由 $\sum F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$, 得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho S g y$$

即
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho S g}{m} y = 0$$

式中, m 、 ρ 、 S 、 g 皆为正, 可以设 $\omega^2 = \frac{\rho S g}{m}$, 则

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

可见, 描写船位置的物理量 y 满足简谐振动的动力学方程, 故船的竖直自由运动是简谐振动。

二、简谐振动的振幅、周期、频率和相位

1. 振幅

在简谐振动方程 $x = A \cos(\omega t + \phi)$ 中, 因 $\cos(\omega t + \phi)$ 的绝对值最大等于1, 所以物体的位移 x 的绝对值最大为 A 。作简谐振动的物体离开平衡位置的最大位移的绝对值 A 叫做振幅。

2. 周期 频率

物体作一次完全振动所经历的时间叫做振动的周期, 用 T 表示, 通常以秒(s)为单位。例如在图8-1中, 物体自位置 B 经 O 到达 C , 然后再回到 B ; 或者物体自位置 O 到达 B , 经过 O 到达 C , 然后再回到 O , 作了一次完全振动所经历的时间就是一个周期。所以物体在任意时刻 t 的位置和速度, 应与物体在时刻 $t+T$ 的位置和速度完全相同。因此有

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos[\omega(t + T) + \phi]$$

而余弦函数是以 2π 为周期的, 即

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \phi + 2\pi)$$

对比以上两式可得

$$\omega T = 2\pi$$

所以

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8-4)$$

对于弹簧振子, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 所以弹簧振子的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8-5)$$

单位时间内物体所作的完全振动的次数叫做频率, 用 ν 表示。它的单位是赫兹, 代号是赫(Hz)。当物体每秒钟振动一次时, 振动频率为 1 Hz。显然, 频率等于周期的倒数, 即

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (8-6)$$

有

$$\omega = 2\pi\nu \quad (8-7)$$

所以 ω 表示物体在 2π s 时间内所作的完全振动的次数, 叫做角频率(或圆频率), 单位为弧度/秒(rad/s)。弹簧振子的频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8-8)$$

由于弹簧振子的角频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 是由表征弹簧振子性质的物理量——质量 m 和劲度系数 k 所决定的, 所以周期和频率只和振动系统本身的性质有关。这种由振动系统本身的性质所决定的周期和频率叫做固有周期和固有频率。

3. 相位 初相

在力学中, 物体在某一时刻的运动状态可以用位置和速度来描述。但对角频率和振幅已给定的谐振动, 它的运动状态可用“相

位”这一物理量来表示。由谐振动的位移和速度方程(8-2a)和(8-2b)可看出,当振幅 A 和角频率 ω 一定时,振动物体在任一时刻相对平衡位置的位移和速度都取决于物理量 $\omega t + \phi$,也就是说,当物体以一定的振幅和角频率作谐振动时, $\omega t + \phi$ 既决定了振动物体在任意时刻相对平衡位置的位移,也决定了振动物体在该时刻的速度。量值 $\omega t + \phi$ 就叫做振动的相位,它是决定谐振动物体运动状态的物理量。例如图8-1中作谐振动的弹簧振子,当相位 $\omega t_1 + \phi = \frac{\pi}{2}$ 时, $x=0, v=-\omega A$,说明这时物体在平衡位置,并以速率 ωA 向左运动;而当相位 $\omega t_2 + \phi = \frac{3}{2}\pi$ 时, $x=0, v=\omega A$,说明这时物体虽也在平衡位置,但却以速率 ωA 向右运动。可见,在 t_1 和 t_2 两时刻,谐振动的相位是不同的。虽然在这两时刻它们都位于平衡位置,速度的大小也相等,但运动方向不同,因此它们的运动状态也不同。

常量 ϕ 是 $t=0$ 时的相位,叫做振动的初相位,简称初相。它是决定在起始时刻(又叫计时起点)振动物体运动状态的物理量。例如,若 $\phi=0$,则在 $t=0$ 时,由式(8-2a)和(8-2b)可分别得出 $x_0=A$ 及 $v_0=0$,这表示在计时起点,物体位于距离平衡位置的正最大位移处,速率为零;又如若 $\phi=\frac{\pi}{2}$,则在 $t=0$ 时,由式(8-2a)和(8-2b)可分别得出 $x_0=0$ 及 $v_0=-A\omega$,这表示在计时起点,物体处于平衡位置处,速率为 $A\omega$,向 x 轴负方向运动。

4. 常数 A 和 ϕ 的确定

如上所述,谐振动方程 $x=A\cos(\omega t + \phi)$ 中的 ω (或 T 和 f)由振动系统本身的性质所决定。在角频率已经确定的条件下,如果知道物体的初位移 x_0 和初速度 v_0 ,就可确定谐振动的振幅 A 和初相 ϕ ,从而确定该谐振动。因为把 $t=0$ 代入式(8-2a)和式(8-2b)则有

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \cos \phi \\ v_0 &= -\omega A \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

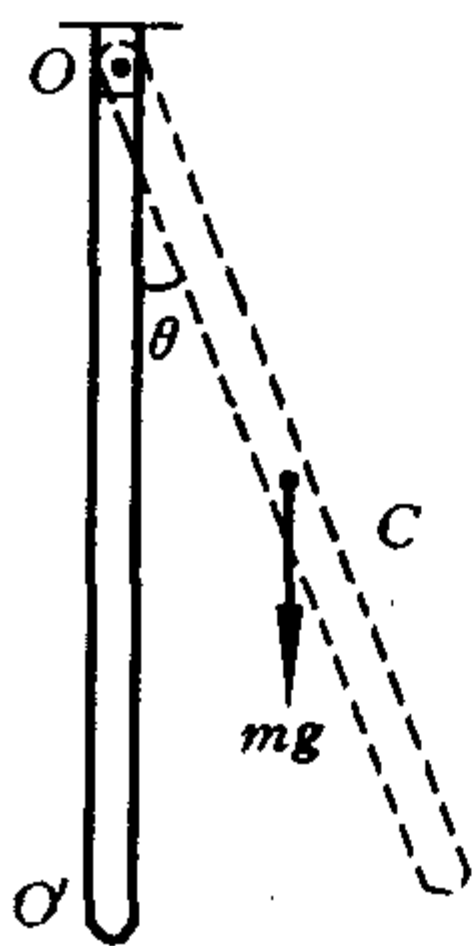
从以上两式即可求得 A 和 ϕ 的惟一解为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (8-9)$$

$$\phi = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0} \quad (8-10)$$

初位移 x_0 和初速度 v_0 叫做起始条件。上述结果说明,对一定的弹簧振子(即 ω 为已知量),它作谐振动的振幅 A 和初相 ϕ 是由起始条件决定的。由于谐振动的振幅不随时间而变化,故谐振动是等幅振动。

总之,对于给定的谐振动系统,周期(或频率)由振动系统本身的性质决定,振幅和初相由起始条件决定。



例 8-2 物理摆又称复摆。一根质量为 m 、长度为 l 的均匀细棒,一端悬挂在支点 O ,如图 8-4 所示。开始,棒在垂直位置 OO' ,处于平衡状态。将棒拉开微小角度后放手,棒将在重力矩作用下,绕点 O 在竖直平面内来回摆动。此装置是最简单的物理摆。若不计棒与轴的摩擦力和空气阻力,棒将摆动不止。试证明在摆角很小的情况下,细棒的摆动为简谐振动,并求其振动周期。

解 以 OO' 为参考方向,棒在任意时刻的角位置可用棒与 OO' 的夹角 θ 来表示。棒是均匀的,重心 C 在棒的中点,则棒所受的重力矩大小为 $\frac{1}{2}mgl\sin\theta$,因为 θ 微小,所以 $\sin\theta \approx \theta$,故棒在任意时刻受到的重力矩可表示为

图 8-4 物理摆

$$M = -\frac{1}{2}mgl\theta$$

式中：负号表示重力矩的转向总是与 θ 角的转向相反。由转动定律 $M=J\beta$ ，得

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{2}mgl\theta$$

式中： $J = \frac{1}{3}ml^2$ 。上式略加整理，得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\theta = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$ ，上式变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

此式说明，在细棒的振动过程中，棒的角位置 θ 满足简谐振动的定义式(8-1)，所以细棒小角度的摆动是一个近似的简谐振动，有时

称这种振动为角振动，其振动圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ ，固有周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$ 。

综上所述，一个孤立的振动系统，在其自身因素的作用下振动，若在振动过程中，描述位置的物理量符合简谐振动的定义式(8-1)，则它的振动必遵循以下规律：它的位置随时间按余弦(或正弦)规律变化，它的振动周期为由系统固有性质所确定的固有周期，它的机械能始终是守恒的。

例 8-3 如图 8-1 所示，一轻弹簧的左端固定，其劲度系数 $k = 1.60 \text{ N/m}$ ，弹簧的右端系一质量 $m = 0.40 \text{ kg}$ 的物体，并放置在水平光滑的桌面上。今将物体从平衡位置沿桌面向右拉长到 $x_0 = 0.2 \text{ m}$ 处释放，试求：(1)谐振动方程；(2)物体从初位置运动到第

一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度。

解 (1) 要确定一个物体的谐振动方程式, 需要确定圆频率 ω , 振幅 A 和初相 ϕ 三个物理量。

圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.60}{0.40}} = 2.0 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

振幅和初相由起始条件 x_0 及 v_0 决定, 已知 $x_0 = 0.20 \text{ m}$, $v_0 = 0$, 故由式(8-9)和式(8-10)可求得

$$\text{振幅} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = x_0 = 0.20 \text{ (m)}$$

$$\text{初相} \quad \phi = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0} \quad (\text{根据题设 } x_0 \text{ 为正, } v_0 = 0)$$

$$\text{故} \quad \phi = 0$$

将 ω 、 A 和 ϕ 代入谐振动方程 $x = A \cos(\omega t + \phi)$ 中, 可得

$$x = 0.20 \cos 2.0t$$

(2) 欲求 $x = \frac{A}{2}$ 处的速度, 需先求出物体从初位置开始运动, 第一次抵达 $\frac{A}{2}$ 处的相位。因为 $x = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \omega t$, 所以得

$$\omega t = \arccos \frac{x}{A} = \arccos \frac{\frac{A}{2}}{A} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \left(\text{或} \frac{5\pi}{3} \right)$$

按题意, 物体由初位置 $x = +A$ 第一次运动到 $x = +\frac{A}{2}$ 处, 相位 ωt 应取第一象限, 即取 $\omega t = \frac{\pi}{3}$ 。

将 A 、 ω 和 ωt 的值代入速度公式, 可得

$$v = -A\omega \sin \omega t = -0.20 \times 2.0 \times \sin \frac{\pi}{3} = -0.34 \text{ (m/s)}$$

负号表示速度的方向沿 x 轴负方向。

例8-4 一质量为 0.01 kg 的物体作谐振动,其振幅为 0.24 m ,周期为 4 s ,起始时刻物体在 $x=0.12 \text{ m}$ 处,向 Ox 轴负方向运动(见图 8-5)。试求:

- (1) $t=1.0 \text{ s}$ 时物体所处的位置和所受的力;
- (2) 由起始位置运动到 $x=-0.12 \text{ m}$ 处所需要的时间。

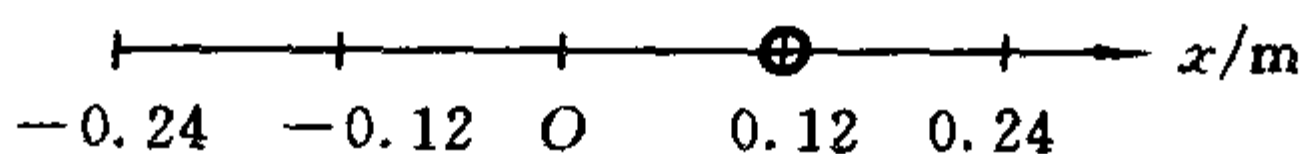


图 8-5

解 物体的谐振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\phi)$ 。由题意知, $A=0.24 \text{ m}$ 。因为 $T=4 \text{ s}$, 所以有

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$t=0$ 时, $x=0.12 \text{ m}$, 代入振动方程得

$$0.12 = 0.24\cos\phi$$

所以 $\cos\phi = \frac{1}{2}$, $\phi = \pm \frac{\pi}{3}$

又已知此时的速度 $v=-A\omega\sin(\omega t+\phi)$ 为负值, 故取 $\phi = \frac{\pi}{3}$, 得物体的振动方程

$$x = 0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(1) 当 $t=1.0 \text{ s}$ 时物体所处的位置

$$x = 0.24\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 1.0 + \frac{\pi}{3}\right) = -0.208 \text{ (m)}$$

负号说明此时物体在平衡位置点 O 的左方。此时物体所受的力

$$\begin{aligned} f &= -kx = -m\omega^2x = -0.01 \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times (-0.208) \\ &= 5.13 \times 10^{-3} \text{ (N)} \end{aligned}$$

力的方向沿 Ox 轴的正方向, 指向平衡位置。

(2) 设物体由起始位置运动到 $x = -0.12 \text{ m}$ 处所需的最短时间为 t 。把 $x = -0.12 \text{ m}$ 代入谐振动方程, 得

$$-0.12 = 0.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

所以

$$t = \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} = 0.667 \text{ (s)}$$

三、旋转矢量法

为了便于对谐振动研究, 下面介绍谐振动的旋转矢量表示法。

如图 8-6 所示, 自 Ox 轴的原点 O 作一矢量 A , 使它的模等于谐振动的振幅 A , 并使矢量 A 在图面内绕点 O 沿逆时针方向旋转, 其角速度的大小与谐振动的角频率 ω 相等, 这个矢量叫做旋转矢量。

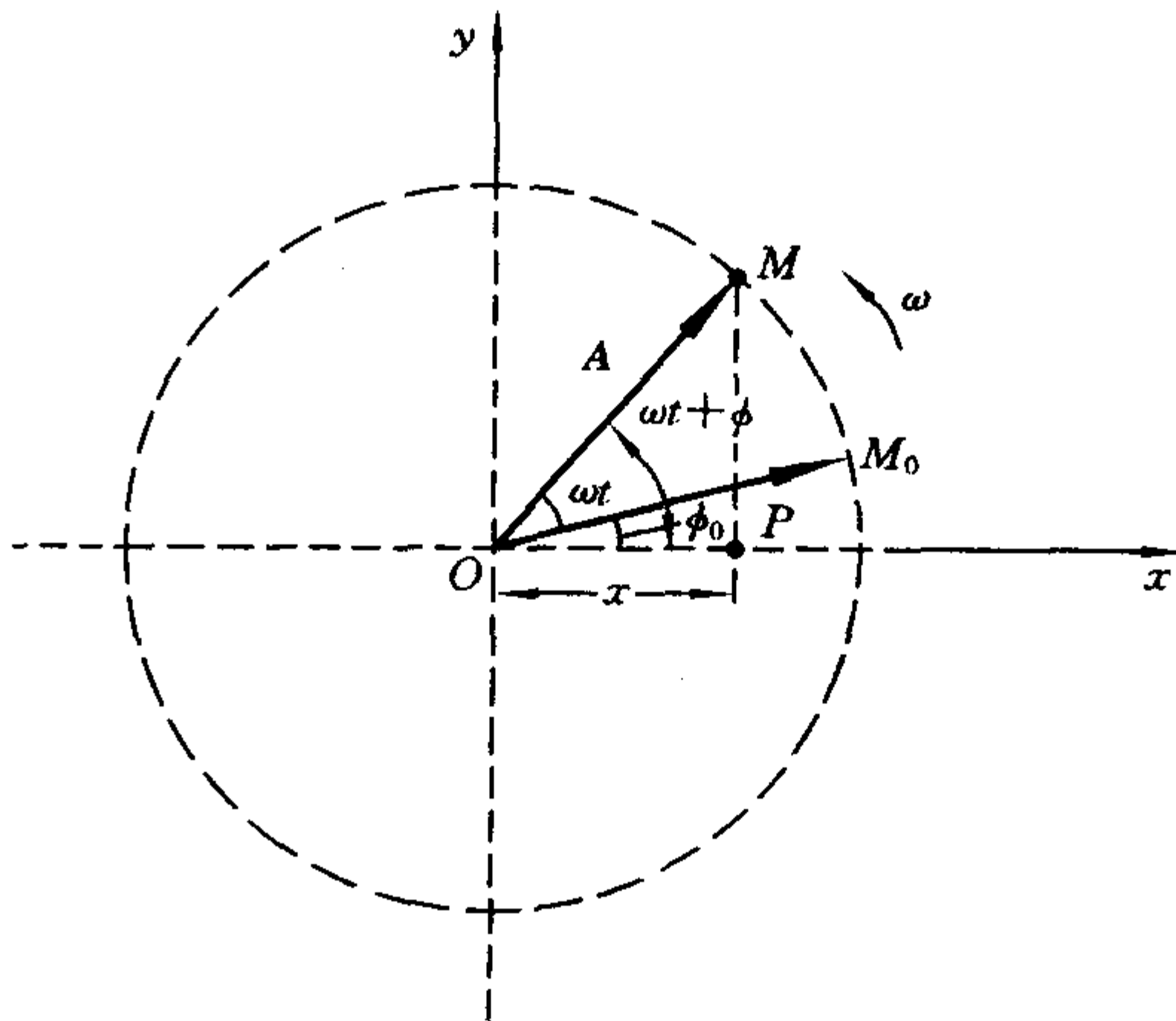


图 8-6 旋转矢量示意图

在 $t=0$ 时刻, 矢量 A 的矢端在 M_0 位置, 它与 Ox 轴的夹角为 ϕ_0 ; 在任意时刻 t , 矢量 A 的矢端在 M 位置。在这过程中, 矢量 A 沿逆时针方向旋转了角度 ωt , 它与 Ox 轴的夹角为 $\omega t + \phi$, 由图可见, 这时矢量 A 的矢端在 Ox 轴上的投影为 $x = A \cos(\omega t + \phi)$, 与式(8-2a)比较, 它恰是沿 Ox 轴作谐振动物体在时刻 t 相对原点 O 的位移, 因此, 旋转矢量 A 的矢端 M 在 Ox 轴上的投影点 P 的运动, 可表示物体在 Ox 轴上的谐振动。旋转矢量 A 以确定的角速度 ω 旋转一周, 相当于谐振动物体在 x 轴上作一次完全振动。在 $t=0$ 时刻, A 与 Ox 轴的夹角为 $\omega t + \phi$, 则跟谐振动的相位相对应。

旋转矢量是研究谐振动的一种比较直观的方法, 可以避免一些烦琐的计算。在分析谐振动及其合成时常常用到。但必须指出, 旋转矢量本身并不在作谐振动, 而是旋转矢量端点的投影点在作谐振动。

下面进一步用旋转矢量表示法来说明谐振动的运动规律。为方便起见, 选取 Ox 轴的正方向如图8-7(a)所示, 在 $t=0$ 时刻, 旋转矢量 A 与 Ox 轴的夹角为零, 即初相位 $\phi_1 = 0$ 。这时 M_0 在 x 轴上的投影点亦处在 M_0 位置, 且与位移曲线上的点 P_0 对应。当旋转矢量 A 逆时针转动, 其矢端相继转到 M_1, M_2, \dots 位置(相邻两连续位置的时间间隔均为 $\frac{T}{4}$), 这时, 矢端在 x 轴上的投影点亦相应地处在图中 P_1, P_2, \dots 位置上。

图8-7(b)表示初相 $\phi_2 = \pi$ 时的旋转矢量图及相应的谐振动的位移时间曲线。

由上讨论可知, 图8-7(a)和图8-7(b)是两个振幅和频率相同, 但初相不同的谐振动, 它们在 $t=0$ 时的相位差 $\phi_2 - \phi_1 = \pi$ 。通常说图(b)中谐振动的相位比图(a)中谐振动的相位超前 π , 或者说图(a)中谐振动的相位比图(b)中谐振动的相位落后 π 。在同一时刻,

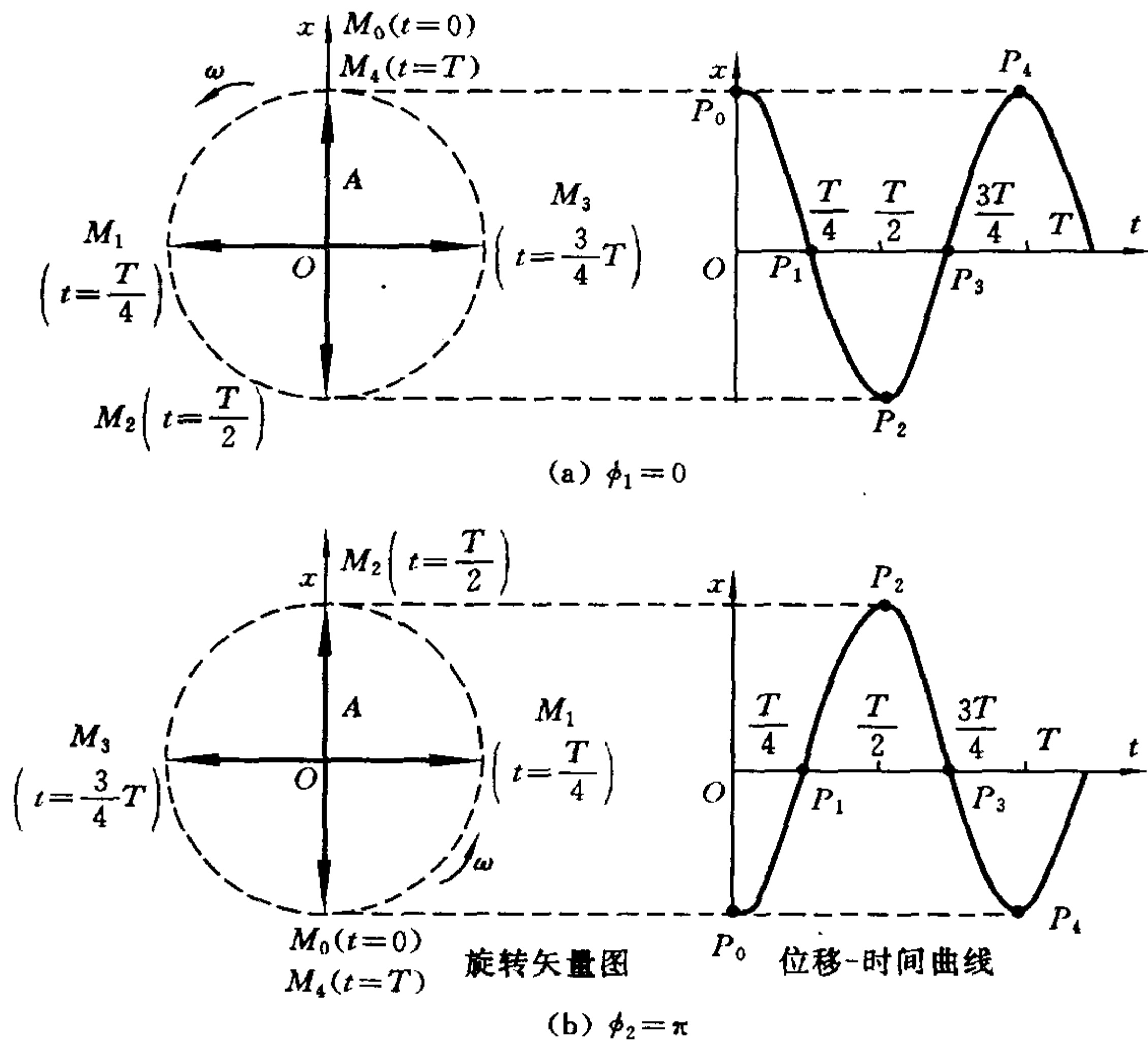


图 8-7 旋转矢量图及谐振动的位移-时间曲线图

若相位差为 π 的两谐振动,叫做相位相反或简称“反相”;若两谐振动的相位差 $\Delta\phi = 0$,叫做相位相同或简称“同相”。

例8-5 质量 0.1 kg 的物体悬于弹簧的下端,把物体从平衡位置向下拉 0.1 m 后释放,测得其周期为 2 s (见图 8-8(a)),试求:

- (1) 物体的振动方程;
- (2) 物体首次经过平衡位置处的速度;
- (3) 第二次经过平衡位置上方 0.05 m 处的加速度;
- (4) 物体从平衡位置下方 0.05 m 向上运动到平衡位置上方 0.05 m 处所需的最短时间。

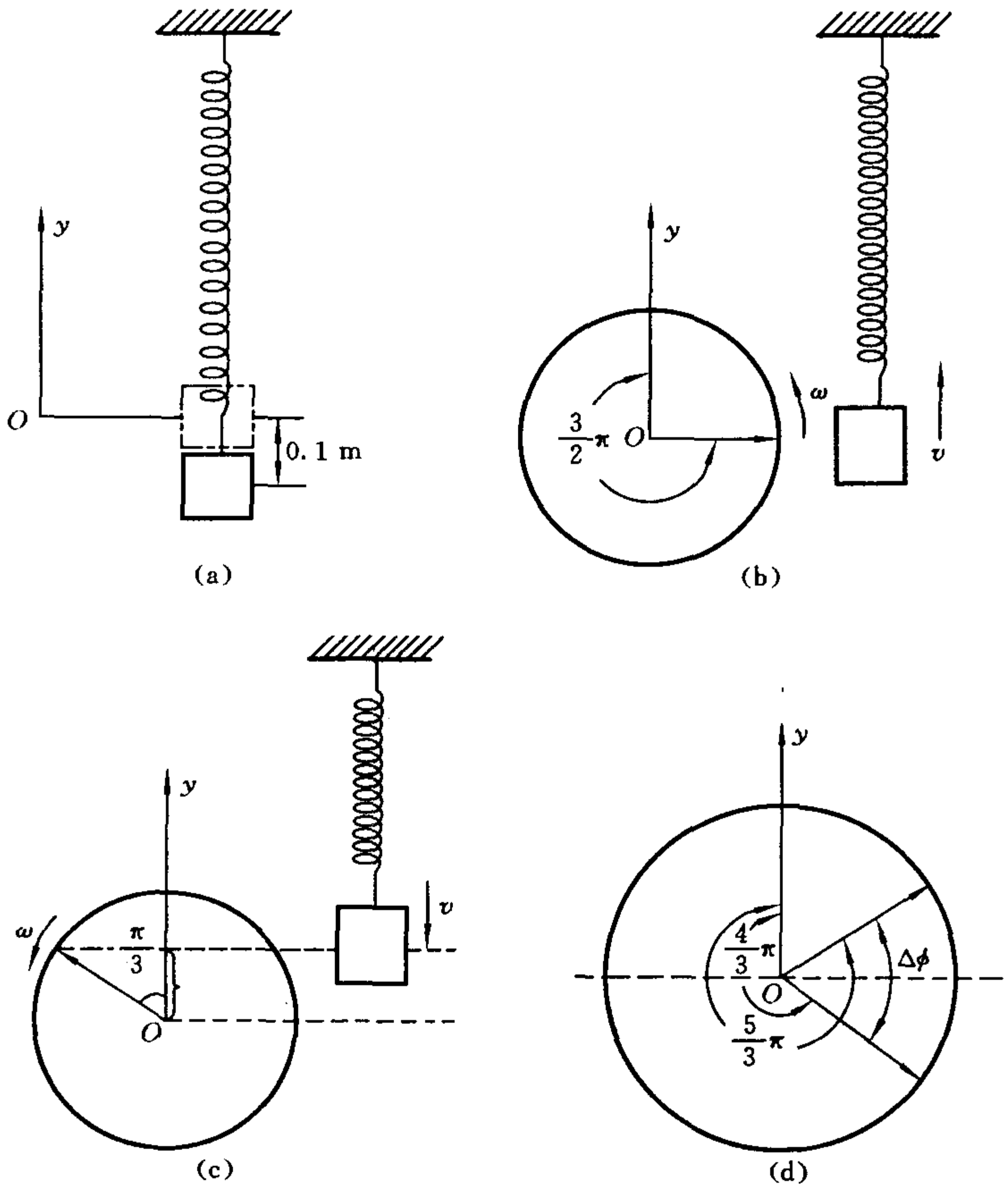


图 8-8 物体的振动

解 以弹簧挂上物体后的平衡位置坐标原点向上作为 y 轴的正方向。已知 $T=2\text{ s}$, 则

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi (\text{s}^{-1})$$

(1) 以释放物体时作起始时刻, $t=0$ 时, $y_0 = -0.1 \text{ m}$, $v_0 = 0$, 则

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0.1 \text{ (m)}$$

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{y_0\omega} = 0$$

所以 $\phi = 0$ 或 $\phi = \pi$

因为 y_0 为负值, 故 ϕ 应取 π 。故弹簧振动的振动方程为

$$y = 0.1\cos(\pi t + \pi)$$

若向下作为 y 轴的正方向, y_0 为正值, ϕ 应取 0 , 弹簧的振动方程为

$$y = 0.1\cos\pi t$$

可见, 对于同一个简谐振动选取不同的坐标系, 将会有不同形式的运动方程。

(2) 由旋转矢量图 8-8(b) 可知, 物体首次经过平衡位置的相位为 $\omega t + \phi = \frac{3}{2}\pi$, 此时的速度为

$$v = -A\omega\sin\frac{3}{2}\pi = A\omega = 0.314 \text{ (m/s)}$$

速度的方向向上, 与坐标轴正方向相同。

(3) 由旋转矢量图 8-8(c) 可知, 物体第二次经过平衡位置上方 0.05 m 处的相位为 $\omega t + \phi = \frac{7\pi}{3}$, 此时的加速度为

$$a = -A\omega^2\cos\frac{7\pi}{3} = -\frac{1}{2}A\omega^2 = -0.493 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

负号表示加速度的方向与 y 轴正方向相反, 即指向中心 O 。

(4) 由旋转矢量图 8-8(d) 可知, 在平衡位置下方 0.05 m 处向上运动时的相位 $\omega t_1 + \phi = \frac{4\pi}{3}$, 当物体第一次经过平衡位置上方

0.05 m处时的相位 $\omega t_2 + \phi = \frac{5\pi}{3}$ 。在此过程中物体经历的相位变化为

$$\Delta\phi = \frac{5\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

即 $(\omega t_2 + \phi) - (\omega t_1 + \phi) = \frac{\pi}{3}$

所需要的时间为

$$t_2 - t_1 = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = 0.33 \text{ (s)}$$

四、振动曲线

在实用中经常绘出谐振动的位置 x 随时间 t 的变化曲线, 此曲线称为振动曲线, 又称 $x-t$ 图, 由式(8-2a)可知, 它是描述简谐振动的一种几何工具, 它形象而直观地反映出一个特定的谐振动的运动规律, 还可方便地对几个谐振动做出比较。

下面介绍如何利用旋转矢量绘出 $x-t$ 图及如何利用 $x-t$ 图绘出某时刻的旋转矢量。

例8-6 一谐振动的运动方程为 $x = A\cos(\omega t + \phi)$, 设 $\phi = \frac{\pi}{4}$, 试利用它的旋转矢量绘出 $x-t$ 图。

解 以 O 为圆心、 A 为半径画一个参考圆, 如图 8-9 左方所示。作矢量 \vec{OM} 与 x 轴成 $\phi = \frac{\pi}{4}$, 过矢端 M 作 Ot 轴的平行线交右图 x 轴于点 P 。以 M 为起点, 沿逆时针方向把圆分为 8 等份, 得到 1, 2, 3, \dots , 8 点, 在 Ot 轴上按适当比例取 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 把 Ot 分为 8 等份, 并过等分点作一系列平行于 Ox 轴的虚线。过 1 作平行于 Ot 轴的直线, 与第一条虚线相交于点 P_1 。同样, 可分别得到 P_2, P_3, \dots, P_8 点。

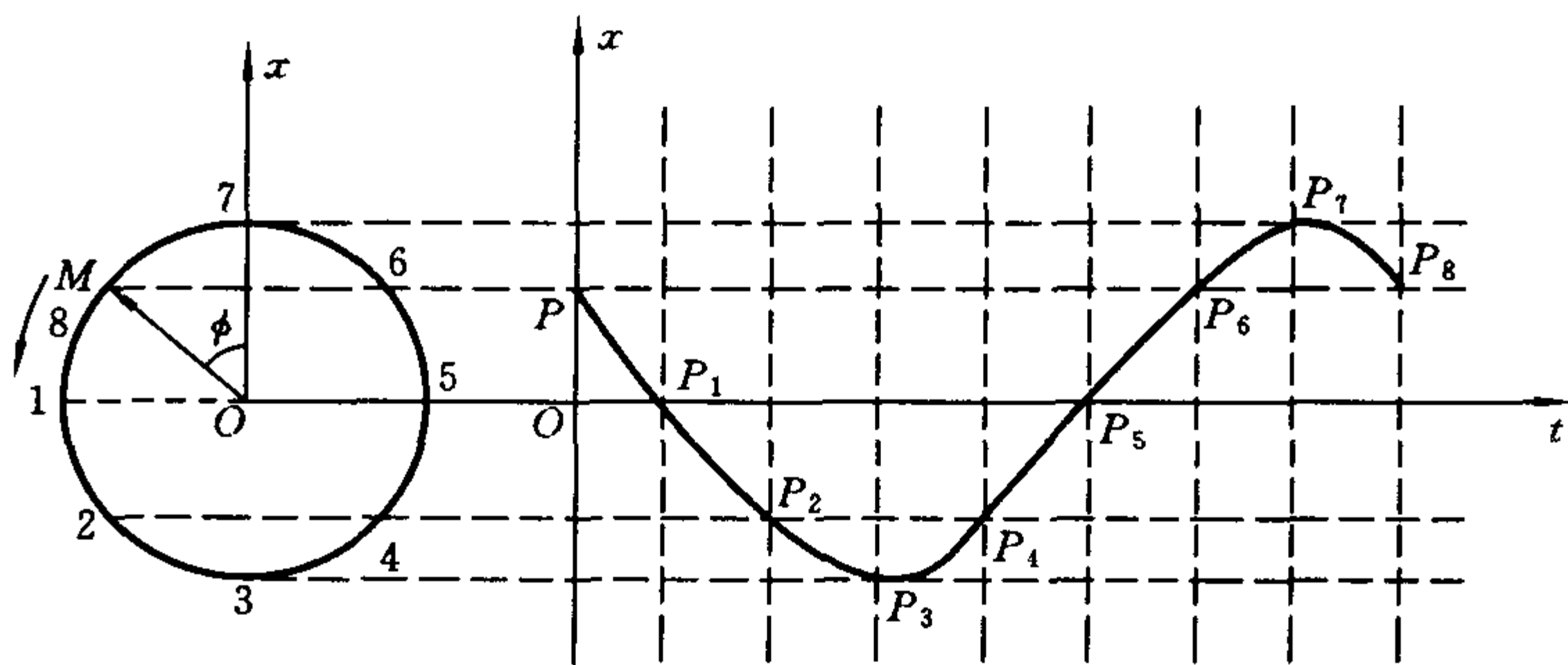


图 8-9 谐振动

这样就可以点 P 为起点,用描点法得到一个周期内的 $x-t$ 曲线。

例 8-7 一谐振子的 $x-t$ 曲线如图 8-10 所示,绘出任意时刻的旋转矢量。

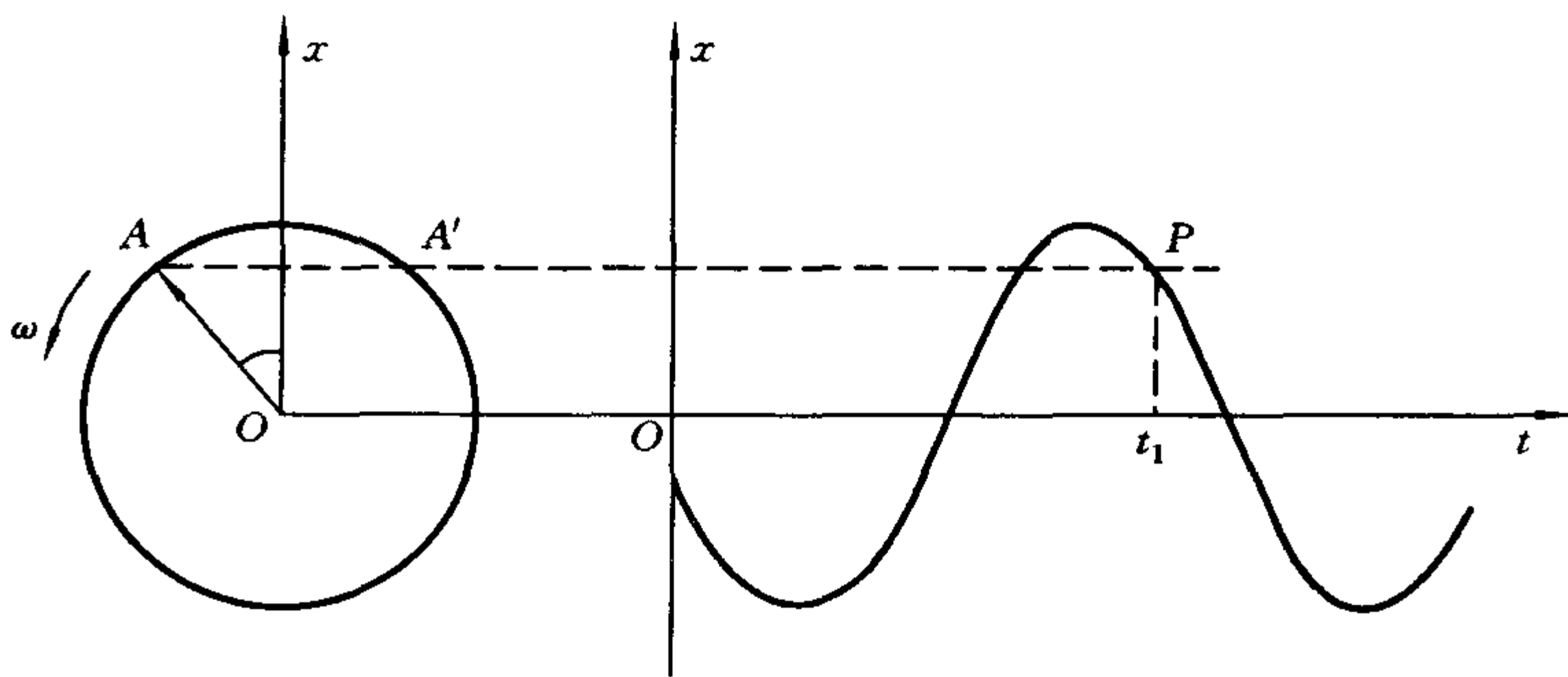


图 8-10 谐振子

解 在 Ot 轴上取某一时刻 t_1 作平行于 Ox 轴的直线交曲线于点 P ,过 P 作平行于 Ot 轴的直线交参考圆于点 A 和点 A' ,由于此刻质点运动速度沿 x 轴负方向,故 \vec{OA} 为该时刻的旋转矢量。 \vec{OA} 与 x 轴的夹角便为此时刻的相位,据此可绘出任意时刻的旋转矢量,

从而确定该时刻的相位值。

这两种作图方法反映了谐振动两种几何描述间的关系,应掌握其作图要领。

第2节 简谐振动的合成

当一个物体同时参与两个(或几个)简谐振动时,根据运动叠加原理,物体在任意时刻的位置矢量为物体单独参与每个分振动的位置矢量之和,即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \dots$$

下面利用叠加原理,讨论几种特殊情况下简谐振动的合成。

一、同方向、同频率的谐振动合成

若两个同方向的谐振动,它们的角频率都是 ω ,振幅分别为 A_1 和 A_2 ,初相位分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 ,则这两个谐振动的运动方程分别为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\}$$

因为振动是同方向的,所以当这两个谐振动合成时,任一时刻合振动的位移 x 仍应在同一直线上,而且等于上述两个振子位移的代数和,即

$$x = x_1 + x_2$$

可以用旋转矢量法求出合振动的位移 x 。如图8-11所示,两个分振动相对应的旋转矢量分别为 A_1 和 A_2 ,开始时($t=0$),它们与 Ox 轴的夹角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 ,它们在 Ox 轴的投影分别为 x_1 及 x_2 。由矢量合成的平行四边形法则,可求出合矢量 $A=A_1+A_2$ 。由于 A_1 、

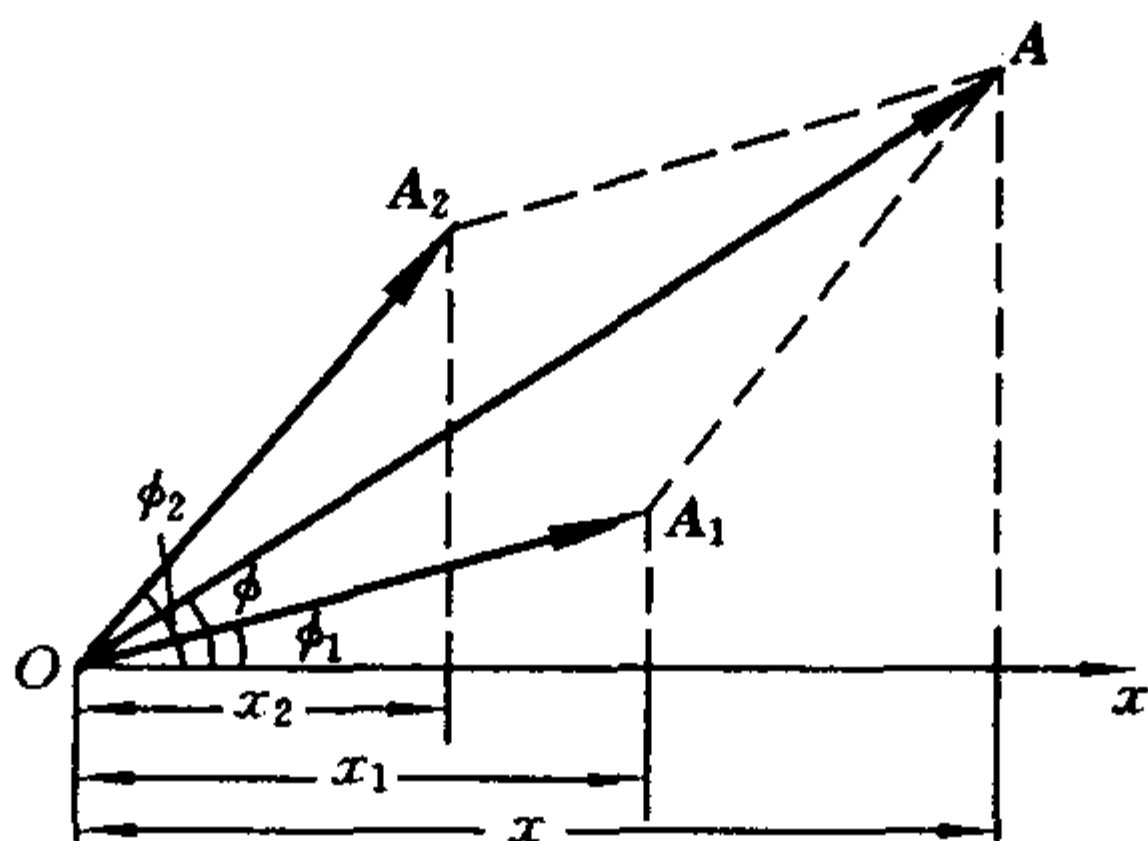


图 8-11 谐振动的合成

A_2 以相同的角速度 ω 绕点 O 作逆时针旋转, 它们的夹角 $(\phi_2 - \phi_1)$ 在旋转过程中保持不变, 所以矢量 A 的大小也保持不变, 并以相同的角速度 ω 和 A_1 、 A_2 一起绕点 O 作逆时针旋转。从图 8-11 可以看出, 任一时刻合矢量 A 在 Ox 轴上的投影 x , 等于矢量 A_1 、 A_2 在 Ox 轴上的投影 x_1 、 x_2 的代数和, 即 $x = x_1 + x_2$ 。因此合矢量 A 即为合振动所对应的旋转矢量, 它的模即为合振动的振幅 A , 开始时矢量 A 与 Ox 轴的夹角即为合振动初相位 ϕ 。由图 8-11 可得合振动的位移

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

可见, 合振动仍是一谐振动, 它的频率与分振动的频率相同。用平行四边形法则可求出合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} \quad (8-11)$$

合振动的初相位满足

$$\phi = \arctan \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad (8-12)$$

从式(8-11)可以看出, 合振动的振幅不仅与两分振动振幅有关, 而且还与它们的相位差 $\phi_2 - \phi_1$ 有关。下面讨论两种常见的特殊情况。

(1) 若相位差 $\phi_2 - \phi_1 = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 则

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1$$

所以

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 \quad (8-13)$$

即当两分振动的相位相同或相位差为 2π 的整数倍(即同相)时,合振动的振幅等于两分振动的振幅之和,合成的结果为相互加强。若 $A_1 = A_2$,则

$$A = A_1 + A_2 = 2A_1$$

(2) 若相位差 $\phi_2 - \phi_1 = (2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,则

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1$$

所以

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \quad (8-14)$$

即当两分振动的相位相反或相位差为 π 的整数倍(即反相)时,合振动的振幅等于两分振动的振幅之差的绝对值(振幅总是正的,故取绝对值),合成的结果为相互减弱。若 $A_1 = A_2$,则 $A=0$ 。

在一般情形下,相位差 $\phi_2 - \phi_1$ 可取任意值,而合振动的振幅值则在 $A_1 + A_2$ 和 $|A_1 - A_2|$ 之间。

二、两个互相垂直的同频率的简谐振动合成

如果一个质点同时参与两个互相垂直的同频率的简谐振动,则分振动的运动方程分别为

$$x = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \quad (8-15)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \phi_y) \quad (8-16)$$

由式(8-15)和式(8-16)消去时间 t ,得出质点在 Oxy 平面内的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos(\phi_y - \phi_x) = \sin^2(\phi_y - \phi_x) \quad (8-17)$$

这是一个椭圆方程,椭圆的具体形状则由相位差 $\Delta\phi$ 的值决定,以下选择几个特殊的相位差进行讨论。

(1) 当相位差 $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = 0$, 则椭圆方程为 $y = \frac{A_y}{A_x}x$ 。

合运动的轨迹是一条通过坐标原点的直线,其斜率等于两个分振动振幅之比(见图 8-12(a))。

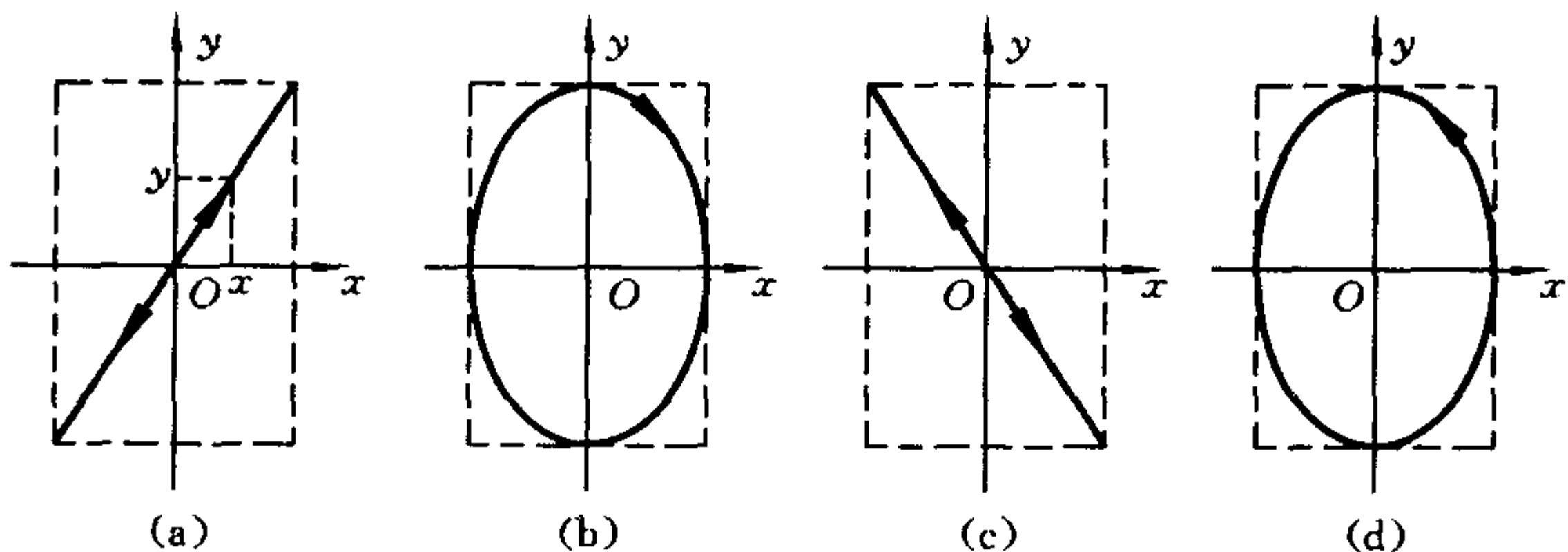


图 8-12 两个互相垂直的同频率的简谐振动合成

(a) $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = 0$; (b) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$; (c) $\Delta\phi = \pi$; (d) $\Delta\phi = \frac{3}{2}\pi$

合运动为沿此直线方向的简谐振动,振动频率与分振动的频率相同。

(2) 当相位差 $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}$, 则有

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

合运动的轨迹为一沿顺时针方向运行的正椭圆(见图 8-12(b))。

(3) 当相位差 $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \pi$, 则有

$$y = -\frac{A_y}{A_x}x$$

合运动的轨迹也是一条直线,但其方位与(1)不同(见图 8-12(c))。

(4) 当相位差 $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \frac{3\pi}{2}$, 则有

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

运动的轨迹也为一正椭圆,但质点运行方向与(2)相反(见图8-12(d))。

以上结果说明,质点参与两个互相垂直的同频率的简谐振动,除 $\Delta\phi=0$ 和 $\Delta\phi=\pi$ 的特殊情况外,其运动不再是沿某一直线的简谐振动。图8-13给出了质点参与两个互相垂直的同频率、同振幅相位差 $\Delta\phi=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \pi$ 振动时合运动的轨迹。由图可知,当相位差从0变到 2π 时,质点合运动的轨迹依次从直线变为椭圆、圆等。

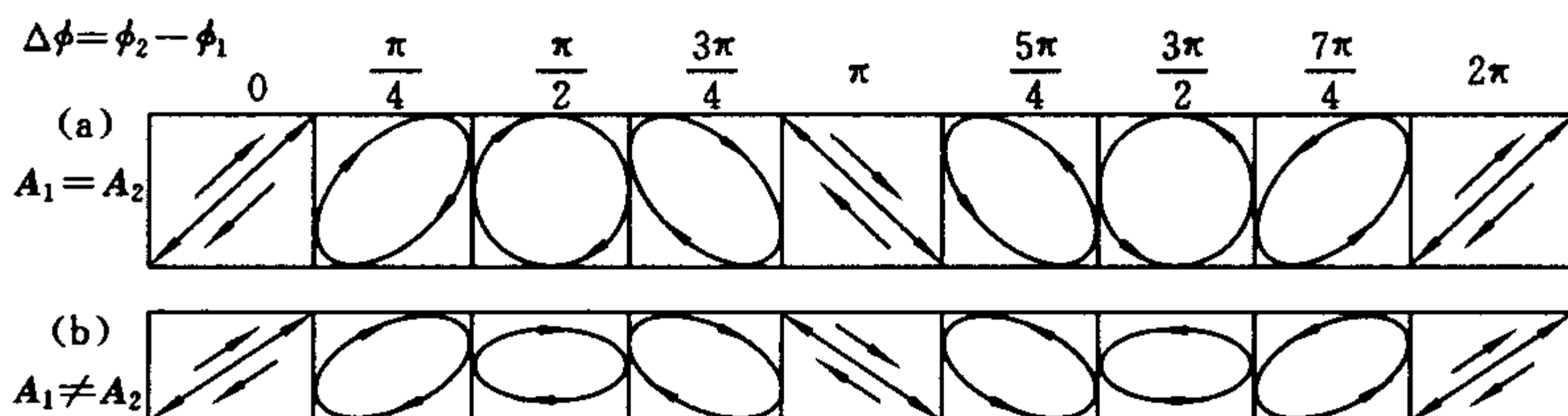


图8-13 合运动

如果两个互相垂直分振动的频率之间成整数比,则其合运动的轨迹就呈有规则的稳定的闭合曲线。这类有规则的稳定的闭合曲线,称为李萨如图形。图8-14给出了 $\omega_x : \omega_y = 2 : 1, 3 : 1, 3 : 2$ 等几种李萨如图形。

李萨如图形提供了一条测定未知振动频率的途径。如果把已知频率的振动信号接示波器 y 轴输入,把未知频率的振动信号接示波器 x 轴输入,则示波器屏上将出现合振动图形。将此图与李萨如图形加以比较,便可测未知振动的频率。

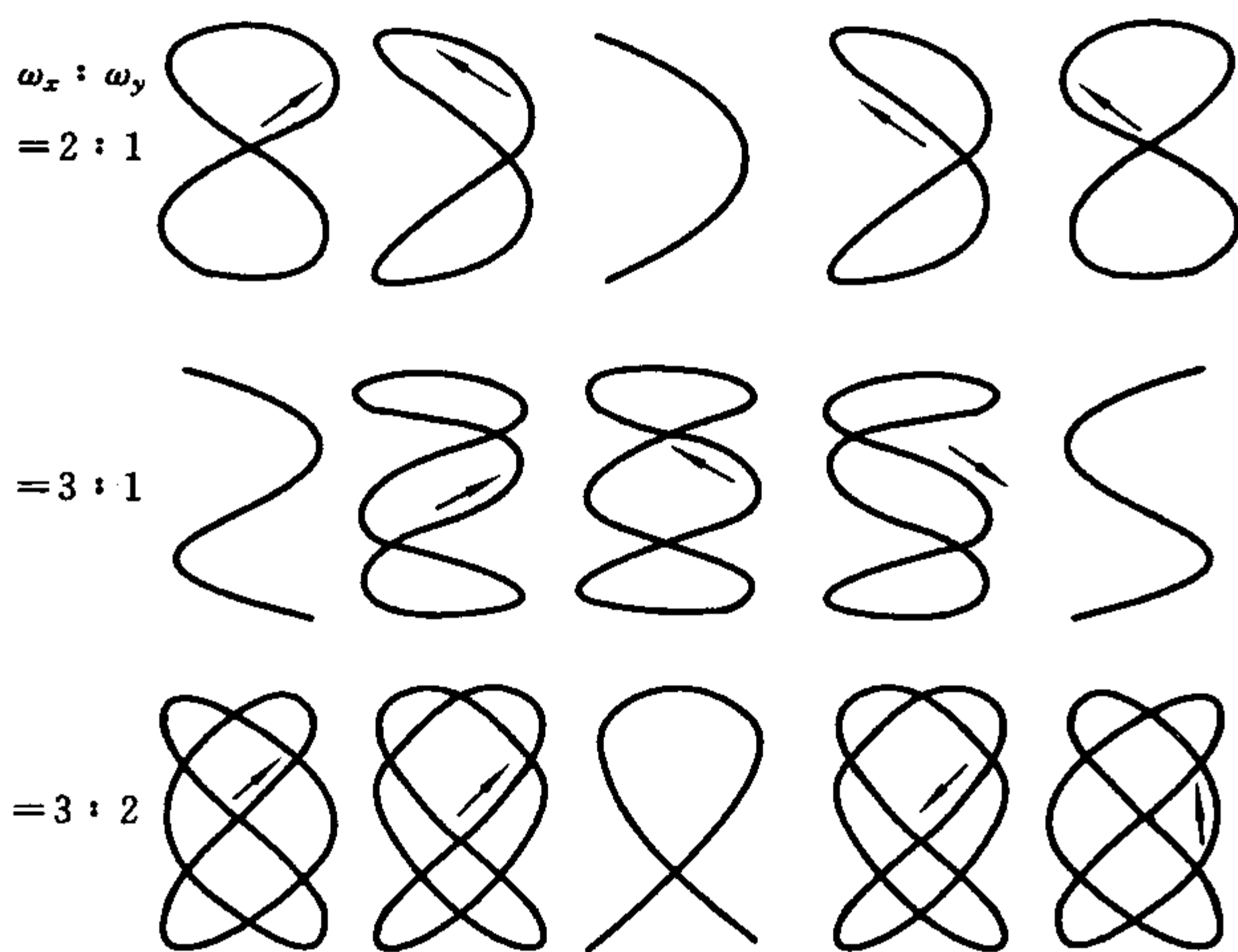


图 8-14 李萨如图形

第 3 节 简 谐 波

一、机械波的产生和传播

产生机械波必须有振源和传递振动的媒介。引起波动的初始振动物称为振源,振动赖以传播的媒介物则称为媒质。

机械波分为横波和纵波两大类。质元的振动方向与波的传播方向垂直的为横波,质元的振动方向与波的传播方向一致的为纵波。本书只讨论一维简谐横波。

现以弹性绳索上传播的一维弹性横波为例,分析机械波的产

生及传播过程。如图 8-15 所示,一条拉直的弹性绳索可视为以弹性力相联系的无数个质元的均匀排列。质元间是以弹性力相互联系的,当绳的一端由于外力策动而在与绳的垂直方向上作振动后,在弹性力的作用下,会带动邻近的质点振动,邻近的质点又带动它的邻近质点。这样依次带动,就把振动由近及远传播出去,形成波动。这表明振动是产生波动的根源,波动是振动的传播。

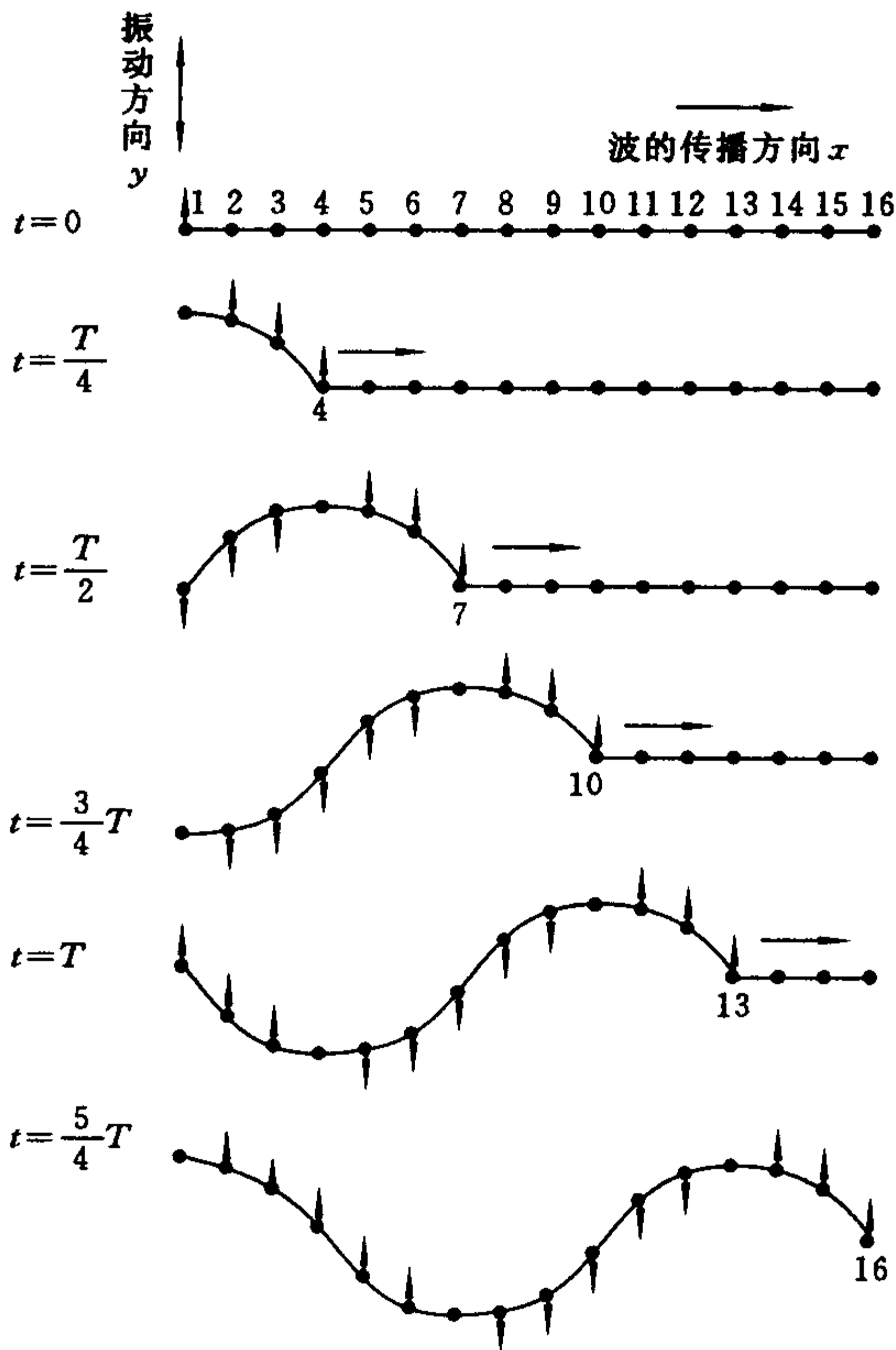


图 8-15 波动过程分析

一般来说,弹性介质中任意两质点离开平衡位置时,由于形变,邻近的质点将对它产生弹性力的作用,使之回到平衡位置。因此这个质点就会在平衡位置附近振动起来。与此同时,这个质点也将给邻近的质点以弹性力的作用,使邻近的质点也在平衡位置附近振动。这样,当弹性介质的一部分发生振动时,由于介质各部分间的弹性联系,振动将由近及远在介质中传播出去,形成机械波。由此可见,机械波的产生必须具有作为波源的机械振动物体和能够传播这种机械波的介质。

为了形象地说明横波的产生,现对图 8-15 中绳子以 1, 2, 3, 4, … 对质元进行编号。以质元 1 的平衡位置为坐标原点 O , 向上为 y 轴的正向。设在某一起始时刻 $t=0$, 质元 1 受扰动得到一向上的速度 v_m 而开始作振幅为 A 的简谐振动。由于质元间弹性力的作用, 在 $t=0$ 以后相继的几个特定时刻, 绳中各质元的位置将有如图 8-15 所示的排列。下面分别对图 8-15 所示的各个时刻每个质元的运动状态作一分析。

图 8-15 所示, $t_1=0$ 时刻, 质元 1 的振动状态为: 位置 $y_1=0$, 速度 $v_1=v_m$, 相应的相位为 $\omega t_1 + \phi = \frac{3}{2}\pi$ 。

$t_2 = \frac{T}{4}$ 时刻, 质元 1 的振动状态为: $y_2=A, v_2=0$, 相位 $\omega t_2 + \phi = 2\pi$, 振源 1 在 $t_1=0$ 时刻的振动状态已传至质元 4, 质元 4 的振动相位为 $\frac{3}{2}\pi$ 。

$t_3 = \frac{T}{2}$ 时刻, 质元 1 的振动状态为: $y_3=0, v_3=-v_m$, 相应的振动相位 $\omega t_3 + \phi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ 。质元 1 在 $t_1=0$ 时刻的振动状态已传至质元 7, 质元 7 的振动相位为 $\frac{3\pi}{2}$, 质元 1 在 $t_2 = \frac{T}{4}$ 时刻的振动状态已传

至质元4,质元4的振动相位为 2π 。

当 $t_4=T$ 时,质元1完成一次全振动回到起始的振动状态,而它所经历的各个振动状态均传至相应的质元。如果振源持续地振动,振动过程将会不断地在绳索上向前传播。

透过以上的波动图景,我们对简谐波传播的物理本质有如下的认识。

(1) 波有赖媒介传播,而质元本身并不随波的传播而向前移动。所有的质元都以原来的位置为平衡位置,作同频率、同方向、同振幅的简谐运动,但振幅相位有规律地“参差不齐”,因而波动是媒介中各质元保持一定相位联系的集体振动。

(2) 振源的状态随时间发生周期性的变化,它所经历的每一状态顺次向前传递。前已提及,机械振动的状态可以用位置、速度等力学量来描述,也可以用振动相位来描述,因而机械波是力学量周期性的变化在空间的传播过程,亦即相位的传播过程。

(3) 振源得以持续振动是外界不断馈入能量所致。随着振动状态的传递,原来静止的质元获得能量而开始振动。沿波传播的方向,每个质元不断从后面的质元中吸取能量,又不断地向前面的质元放出能量,因而波动也是能量的传播过程。

简谐波是最简单最基本的波。可以证明,任何周期性的机械波都可以看做若干个简谐波的合成。因此,对任意一个周期性的波动过程的物理本质,均可作如上认识。

二、描写波动过程的物理量

1. 波长 λ

在波传播方向上,相位差为 2π 的两个邻点之间的距离称为波长。

2. 波的周期 T

一定的振动相位向前传播一个波长的距离所需的时间称为波的周期。由图8-15可知,振源完成一次全振动,相位就向前传播一个波长,所以波的周期在数值上等于质点的振动周期。

3. 波速 u

一定的振动相位在一媒质中传播的速度称为波速。波速与波长和波的周期的关系为

$$u = \frac{\lambda}{T} \quad (8-18)$$

4. 波的频率 ν

单位时间内,波前进距离中所包含的完整的波长数目,称为波的频率, $\nu = \frac{1}{T}$ 。因此

$$u = \lambda\nu \quad (8-19)$$

三、波动过程的几何描述

前面重点分析了沿直线传播的一维波,实际上绝大多数波源四周为媒质所包围,它的振动状态是通过媒质向空间各个方向传递的。在波传播过程的任意时刻,振动相位相同的点所连成的面称为波阵面(又称波前)。按波阵面的形状对波进行如下分类:波阵面呈球面的称为球面波,如图8-16(a)所示;波阵面呈平面的称为平面波,如图8-16(b)所示。实际波的波阵面不会有这样严格的几何形状,球面波和平面波都是对真实波动的理想近似,例如空气中电铃发出的声波可以近似地当做球面波;用锤沿棒方向打击金属棒的一端,沿棒传播的声波可以近似地当做平面波。在均匀的各相同性的媒质中,波传播的方向始终垂直波阵面,与波阵面垂直且表示波传播方向的线称为波线。

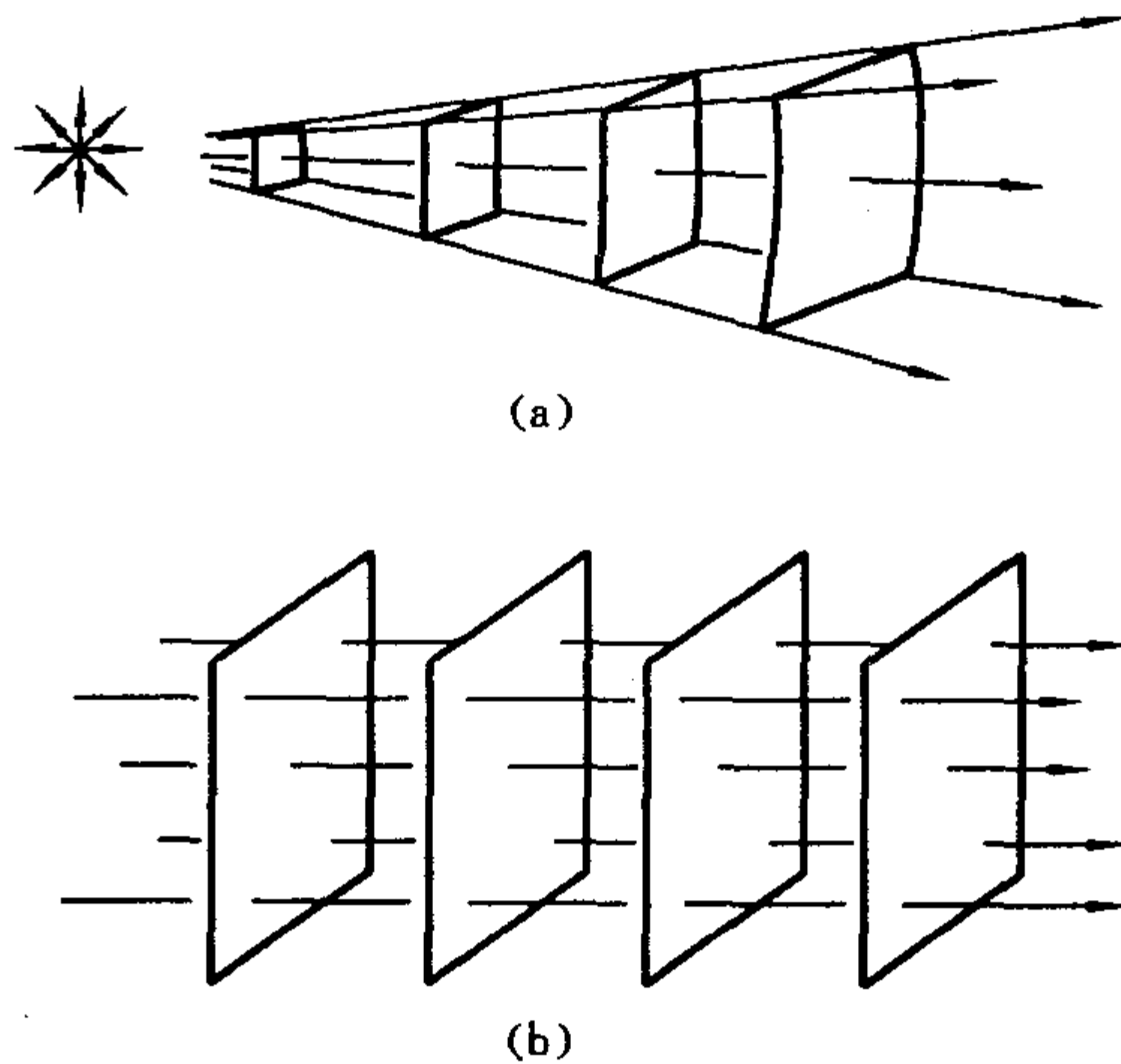


图 8-16 波阵面和波线

(a) 球面波; (b) 平面波

实际上,在波传播的空间并不存在真正的“面”和“线”,引入波阵面和波线是为了借助于一些如图 8-16(a)、(b)所示的几何图形来描绘波动过程。通过图面可以想像:由振源发出的波阵面不断地扩大,向前推进,后面的波阵面一个个接踵而来,它们形象而直观地展示了波传播的物理图景。

在对波动过程的几何描述中,惠更斯(Huygens, 1629—1695)总结了大量的实验事实后指出:波所到达的每一点都可看做发射次级子波的波源,新的波阵面就是这些次级子波波阵面的包迹。这就是著名的惠更斯原理。惠更斯原理对机械波和电磁波的波动过程都是适用的,根据这一原理,只要知道某一时刻的波阵面,就可以用几何的方法决定下一时刻的波阵面。

第4节 平面简谐波的定量分析

一、平面简谐波动方程

1. 波动方程

当波源作谐振动, 介质中各点也都作谐振动时形成的波叫做简谐波, 又叫余弦波或正弦波。平面简谐波是最基本的波, 任何复杂的波都可看成由若干个频率不同的平面简谐波叠加而成。

对于平面波而言, 在所有的波线上, 振动传播的情况都是相同的, 因此可以将平面简谐波简化为一维简谐波来进行研究。

设有一平面简谐波沿某一方向向前传播, 任取一条波线, 在此波线上, 任取一质元的平衡位置作为坐标原点 O , 波线的方向为 x 轴正方向, 质元向上振动的方向为 y 轴的正方向, 如图 8-17 所示。选择某一时刻作为起始时刻, 原点 O 处质元的振动方程可表示为

$$y_0 = A \cos(\omega t + \phi)$$

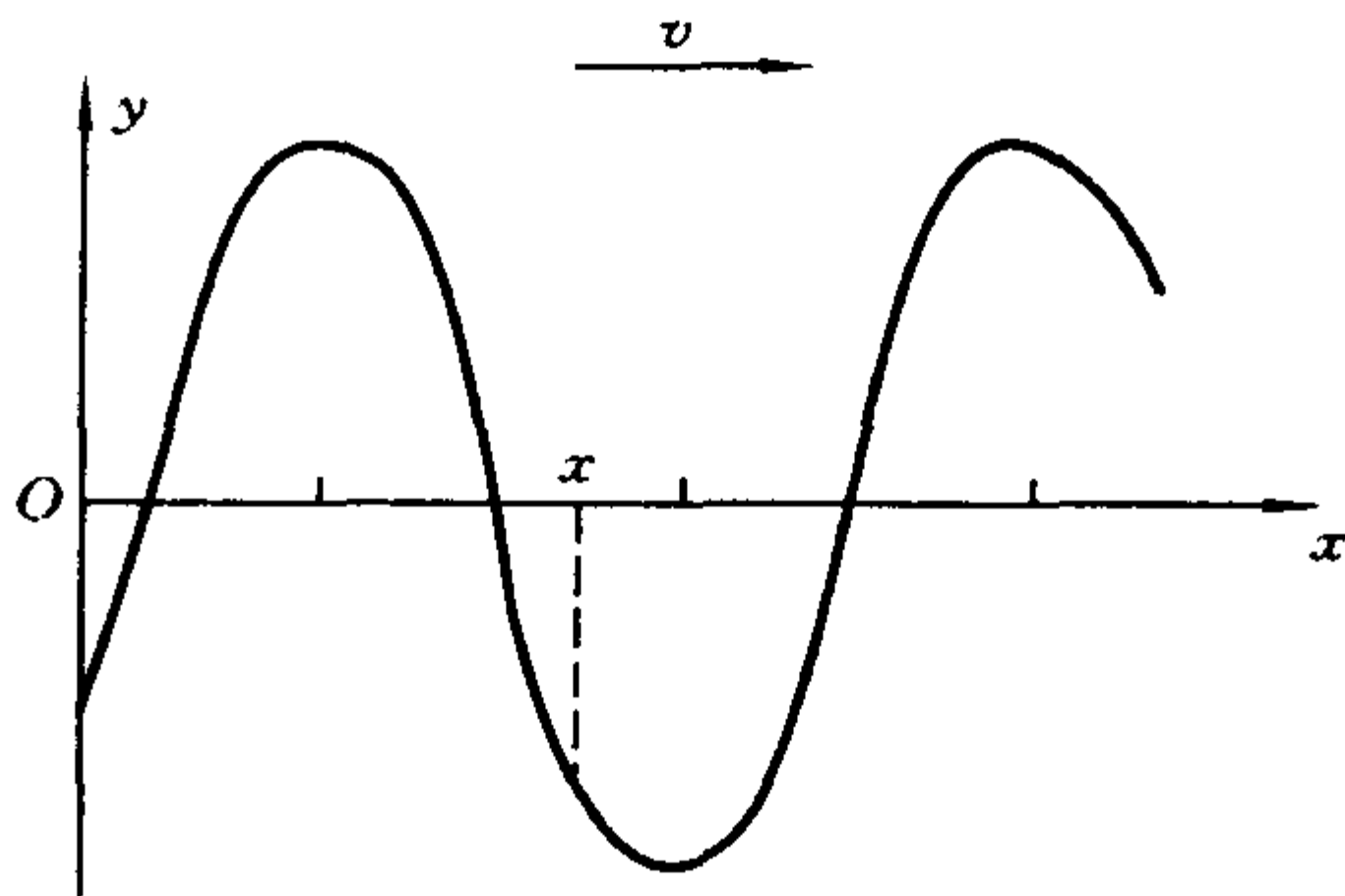


图 8-17 平面波的波线

现考虑平衡位置在 x 处的质元的振动情况。该质元应作与振源同方向、同频率、同振幅的简谐振动,但相对 O 处质元其相位落后 $\Delta\phi$ 。与 O 处质元距离为 λ 的质元,相对 O 处质元相位落后 2π ,由

$$\lambda : 2\pi = x : \Delta\phi$$

得到
$$\Delta\phi = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (8-20a)$$

应当指出:在同一时刻,距离波源 O 分别为 x_1 和 x_2 两质点的相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \quad (8-20b)$$

式中, $\Delta x = x_2 - x_1$ 叫做波程差。

因此, x 轴上的任意一点的振动规律为

$$y = A\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \phi\right)$$

上面是从相位落后的角度出发推得了 x 处质元的振动方程,若从时间落后的角度考虑,由于波传播的速度为 u , O 处质元的振动传至 x 处所需时间为 $\frac{x}{u}$,所以 x 处质元在 t 时刻的位移等于原点 O 处质元在时刻 $\left(t - \frac{x}{u}\right)$ 的位移。因而 x 处质元的振动规律又可表示为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]$$

若平面波是沿 x 轴负向传播,与原点 O 处质元的振动方程 $y_0 = A\cos(\omega t + \phi)$ 相比, x 轴上任一点 x 处质元的振动方程为

$$y = A\cos\left(\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda} + \phi\right)$$

或
$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \phi\right]$$

如果改变计时起点,使原点 O 处质元振动初相为零($\phi=0$),则 x 处的振动规律是

$$y = A \cos \left(\omega t \pm 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (8-21a)$$

或

$$y = A \cos \omega \left(t \pm \frac{x}{u} \right) \quad (8-21b)$$

实际上,这两个方程给出了波传播路程上所有质元的振动规律。此外,方程中的 $\pm 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 项或 $\pm \omega \frac{x}{u}$ 项指出了不同位置 x 处质元振动相位间的关系。所以,式(8-21a)或式(8-21b)描述了波动传播中所有质元的运动规律,把它称为平面简谐波动方程。利用 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, $\frac{\lambda}{T} = u$,平面简谐波动方程还可写成

$$y = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \quad (8-21c)$$

或

$$y = A \cos \left[2\pi \left(vt \pm \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (8-21d)$$

式(8-21a)到式(8-21d)称为平面简谐波的标准式。纵波的平面简谐波动方程具有同样的形式。

2. 运动状态的描述

由波动方程

$$y = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (8-22)$$

对时间求导,得速度表达式

$$v = -A\omega \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (8-23)$$

对某简谐波,当 x 为具体数值 x_0 时,式(8-22)和式(8-23)可写为

$$y = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x_0}{\lambda} \right) \quad (8-24)$$

$$v = -A\omega \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x_0}{\lambda} \right) \quad (8-25)$$

式(8-24)和式(8-25)表示 x_0 处质元的运动状态(位置的速度)随时间周期性变化的规律。

当方程中 t 为具体数值 t_0 时,式(8-22)和式(8-23)可写为

$$y = A \cos \left(\omega t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (8-26)$$

$$v = -A\omega \sin \left(\omega t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (8-27)$$

式(8-26)和式(8-27)展示了某一瞬时各质元的运动状态在空间周期性分布的规律。

由式(8-26),采用描点法可得到 $y-x$ 的分布曲线图(即波形图)。读者可自行画一画。

二、振动状态传播的描述

在平面简谐波动方程中,若取 $x=x_1, t=t_1$,则得到一个确定的相位值 $\omega t_1 - \frac{2\pi x_1}{\lambda}$,它描述了 x_1 处的质元在 t_1 时刻的状态: $y_1 =$

$$A \cos \left(\omega t_1 - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right); v_1 = -A\omega \sin \left(\omega t_1 - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right)。$$

当时间 t 和位置 x 都在增加时,相位表示式中的被减数和减数都在增大,假设两者增加相等,则相位值保持不变。例如,当 t_1 增加至 $t_1 + \Delta t$, x_1 增至 $x_1 + \Delta x$ 时,若两个相位值恰好相等,则有

$$\omega t_1 - \frac{2\pi x_1}{\lambda} = \omega(t_1 + \Delta t) - \frac{2\pi(x_1 + \Delta x)}{\lambda}$$

它的物理意义是: t_1 时刻 x_1 处质元的振动相位当时间推移至 $t_1 + \Delta t$,它传至 $x_1 + \Delta x$ 处。这正体现了前面所述波动是振动相位传

递的过程。而振动相位向前传播的速度,由上式可得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = u$$

此式说明,振动相位亦即振动状态以速度 u 向前传播。物理量 u 又正是前节所定义的波的传播速度,所以波动方程定量地反映了振动状态以波速 u 向前传播的过程。

在图8-18中,实线表示 t_1 时刻的波形图,虚线表示 $t_1 + \Delta t$ 时的波形图。在某一时刻的波形图上,所有的质元均有确定的相位,且所有的相位均以 u 向前传播,即整个波形在向前传播。

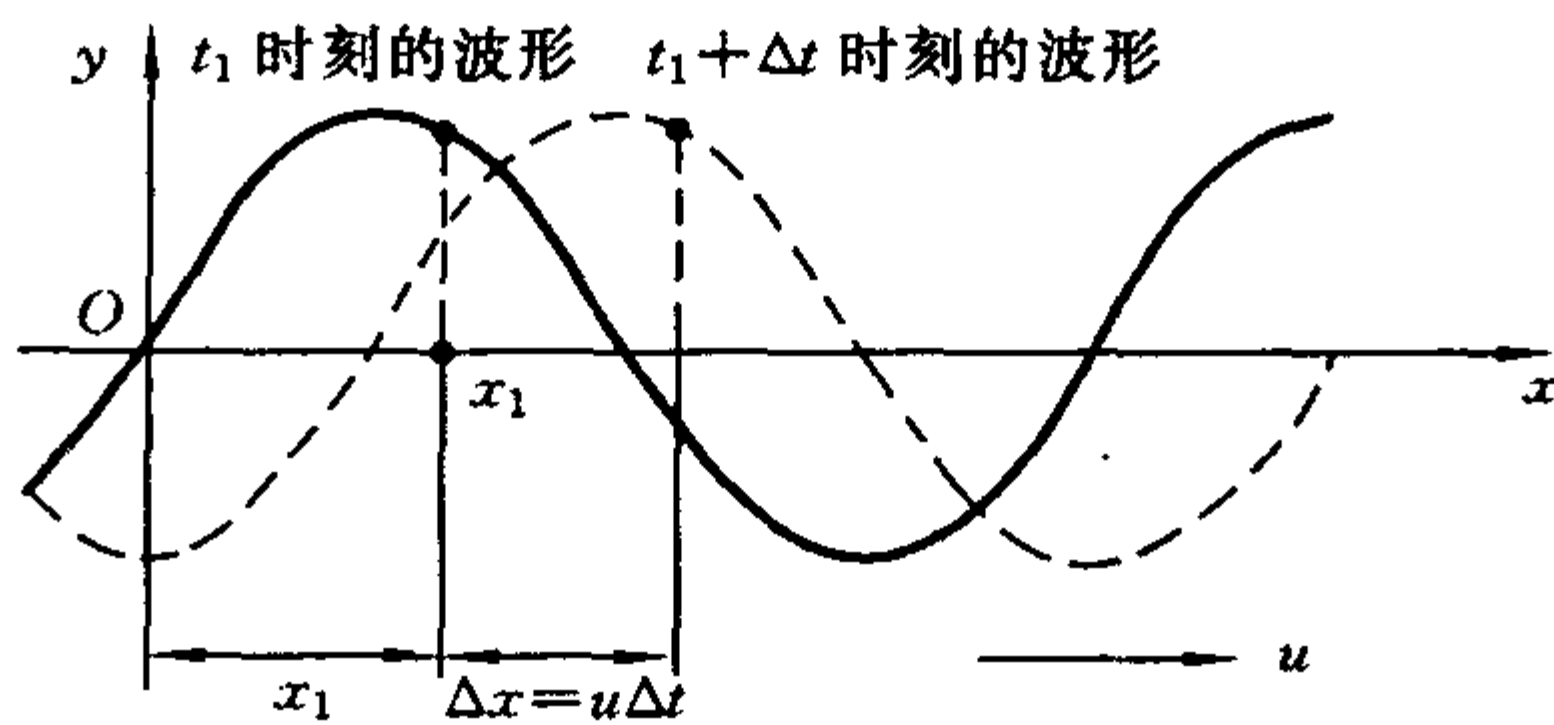


图 8-18 平面简谐波不同时刻波形图

例 8-8 一振源在媒质内作谐振动,图 8-19 为它的振动曲线。此振动向 x 正方向发出一平面简谐波,波速为 0.3 m/s ,若以振源

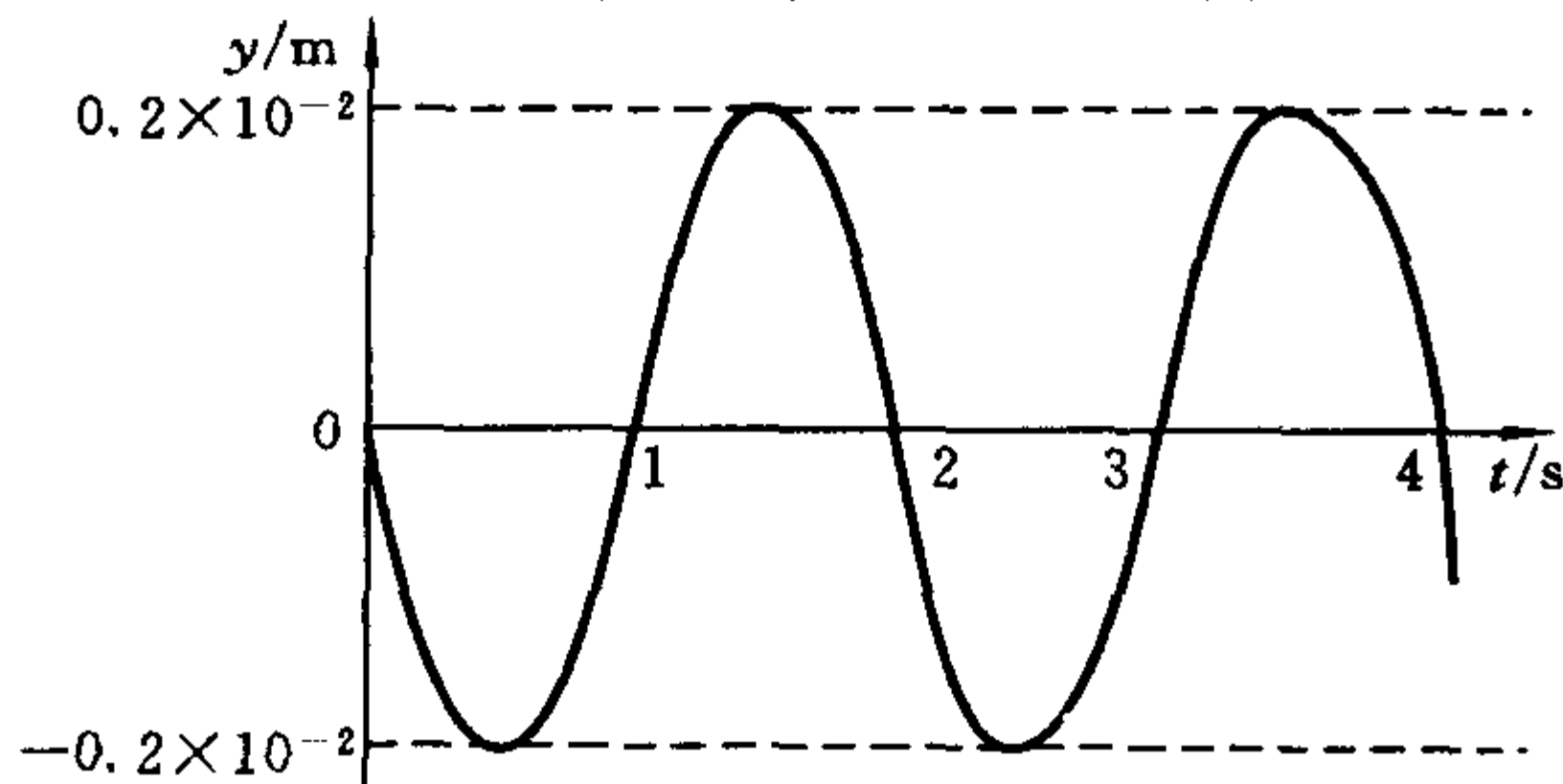


图 8-19 谐振动的振动曲线

处作为坐标原点,试根据图中数据,写出波动方程。

解 由图可知,此振源的振幅 $A=0.2 \times 10^{-2} \text{ m}$,周期 $T=2 \text{ s}$,则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ s}^{-1}$ 。起始时刻,振源处在平衡位置且向 y 轴负方向运动,故初相位 $\phi = \frac{\pi}{2}$,又已知波速 $u=0.3 \text{ m/s}$,由波动方程 $y=A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]$,代入以上数值,可得此平面简谐波的波动方程为

$$y = 0.2 \times 10^{-2} \cos\left[\pi\left(t - \frac{x}{0.3}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \text{ (m)}$$

例 8-9 已知简谐波的周期 $T=0.5 \text{ s}$,波长 $\lambda=1 \text{ m}$,振幅 $A=0.1 \text{ m}$ 。(1)试写出波动方程;(2)求距波源为 $\lambda/2$ 处的质点的振动方程;(3)求距波源 $x_1=0.40 \text{ m}$ 和 $x_2=0.60 \text{ m}$ 处两质点的相位差。

解 (1) 将 $T=0.5 \text{ s}$ 、 $\lambda=1 \text{ m}$ 、 $A=0.1 \text{ m}$ 代入波动方程 $y=A \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)]$,可得该简谐波方程为

$$y = 0.1 \cos[2\pi(2t - x)] \text{ (m)}$$

(2) 已知 $x = \frac{\lambda}{2}$,所以可得距波源 $\lambda/2$ 处的质点的振动方程为

$$y = 0.1 \cos[\pi(4t - 1)] \text{ (m)}$$

(3) 把 $x_1=0.40 \text{ m}$ 和 $x_2=0.60 \text{ m}$ 代入式(8-20b),得

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(0.60 - 0.40) = 0.40\pi$$

若 $\Delta x = x_2 - x_1 = \lambda$,则 $\Delta\phi = 2\pi$ 。这也就是说,对于相距为1个波长的两质点,它们之间的相位差为 2π ;换句话说,在波动过程中,同一时刻沿波线相距为一个波长的两点,其振动相位改变了 2π 。

例 8-10 一横波沿 x 轴方向传播的波动方程为 $y=0.05 \cdot \cos(10\pi t - 4\pi x)$,式中 t 以 s 计, x 、 y 以 m 计。

(1) 求 $x_1=0.2 \text{ m}$ 处的质元在 $t_1=1 \text{ s}$ 时的振动相位。该质元

此时刻的运动状态如何?

(2) 此相位所描述的运动状态在 $t=1.5\text{ s}$ 时刻传到哪一点?

解 (1) $x_1=0.2\text{ m}$, $t_1=1\text{ s}$ 时的相位为

$$\phi = 10\pi t - 4\pi x = 9.2\pi$$

此相位所代表的运动状态:

位移 $y = A\cos\phi = 0.05\cos 9.2\pi = -0.04\text{ (m)}$

振动速度

$$v = -A\omega\sin\phi = -0.05 \times 10\pi \times \sin 9.2\pi = 9.23\text{ (m/s)}$$

说明此质元处在平衡位置下方 0.04 m 处, 以 9.23 m/s 的速度向上运动。

(2) 把波动方程化为标准式

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = 0.05\cos\left[10\pi\left(t - \frac{x}{2.5}\right)\right]$$

可得波速 $u = 2.5\text{ (m/s)}$

波速 u 即为相位传播速度, 在 Δt 时间间隔内相位传播的距离为

$$\Delta x = u\Delta t = 2.5 \times (1.5 - 1) = 1.25\text{ (m)}$$

$$x = x_1 + \Delta x = 1.45\text{ (m)}$$

即 1.5 s 时刻, 此相位所描述的运动状态传至离原点 1.45 m 处。

三、波的能量

机械波是振动状态的传播, 而一定的状态是与一定的能量相对应的, 所以振动状态的传播必然伴随着能量的传播。

假如平面简谐波在密度为 ρ 的均匀媒质中传播, 其波动方程为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

由于振动, 平衡位置在 x 处的质元在任意时刻的速度为

$$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

设每个质元的体积为 dV , 则质量为 $dm = \rho dV$, 显然, 所有质元都在与传播方向垂直的方向上作持续的简谐振动, 每个质元具有的动能为

$$dE_k = \frac{1}{2}\rho dV A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \quad (8-28)$$

在此时刻, 质元由于形变而具有的势能为

$$dE_p = \frac{1}{2}\rho dV A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \quad (8-29)$$

质元的总能量为它的动能与势能之和

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \quad (8-30)$$

由式(8-28)和式(8-29)可知, 一质元的动能和势能具有相同的数值, 它们同时到达最大值, 同时为零。图8-20示意地说明了动能和势能的关系。例如, 在某一瞬时, 某质元A处于最大位移处, 振动速度为零, 且就整个体积元而言基本上不发生形变, 动能势能皆为零; 而质元B此时处于平衡位置, 振动速度最大, 体积元形变也最大, 因此动能和势能都达最大值。式(8-30)又告诉我们, 在给定时刻 t , 各质元的总能量随它们所在的位置在媒质内呈现一个周期性变化。

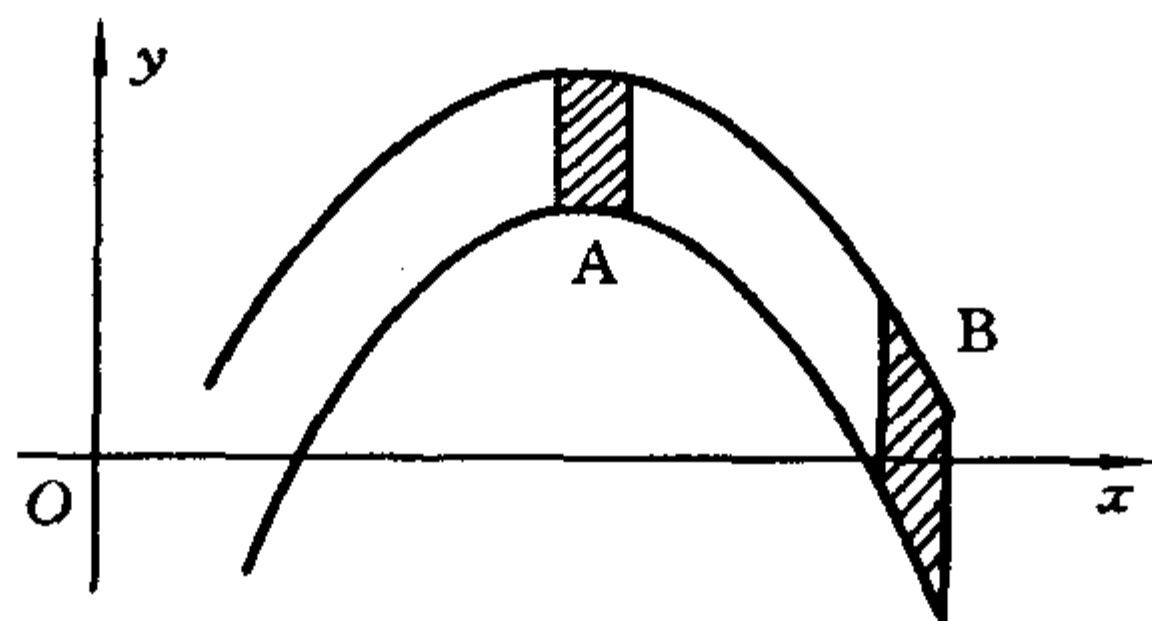


图8-20 质元A没有形变, 质元B形变最大

波动过程中,所有质元实际上都作受迫振动,服从简谐振动的运动规律,但式(8-30)反映的波的能量规律与简谐振动的能量规律截然不同。简谐振动的能量是指一个作谐振动的孤立系统的能量,在振动过程中,它的总能量是守恒的,即动能的增加必以势能的减少作代价,反之亦然。而现在研究的质元是处于媒质的整体之中,每个质元与其他的质元以弹性力相联系,它不是孤立的。在波动中,沿着波前进的方向,每个质元不断从后面质元中吸取能量而改变本身的运动状态,又不停地向前面的质元放出能量而迫使它们改变运动状态,这样,能量就伴随着振动状态从媒质的一部分传至另一部分。

媒质中所有质元的动能与势能之和称为波的能量。为了定量地反映能量在媒质中的分布和随时间变化的情况,引入能量密度的概念。能量密度表示媒质中单位体积内的能量,用 w 表示。

$$w = \frac{dE}{dV} \quad (8-31)$$

把式(8-30)应用于上式,得平面简谐波的能量密度

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]$$

能量密度在一个周期内的平均值,称为平均能量密度,用 \bar{w} 表示

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

由于能量伴随振动状态传播,因而波动的能量也以波速 u 向前传播。所以引入能流这个概念:单位时间内通过媒质中某面积的能量称为该面积的能流。可以想像,在与波前进方向垂直的平面上,都会有能量通过,如果在此垂直面上任取面积 S ,在一个周期内流过 S 面的能量应等于体积 uTS 中的平均能流,即 $\bar{w}uTS$,这里 \bar{w} 是平均能量密度。单位时间内通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流,称为平均能流密度,又称波的强度。声学中称为声

强。用我国国家标准符号 I 表示。

$$I = \overline{wu} = \frac{\rho\omega^2 A^2 u}{2} \quad (8-32)$$

I 与圆频率 ω 的二次方及振幅 A 的二次方成正比,单位为瓦特每二次方米,即瓦/米²,符号为 W/m²关于电磁波的能量传播,将在下一节中讨论。

第5节 电 磁 波

根据麦克斯韦电磁理论,变化的电磁场在空间的传播可以这样理解:设在空间某一区域中电场发生了改变,则在它邻近的区域就会产生变化的磁场,这变化的磁场又要引起较远的区域产生变化的电场,接着又要在更远的区域产生变化的磁场。如此继续下去,变化的电场和变化的磁场不断相互交替,就由近及远地传播下去了。这种周期性变化的电磁场在空间的传播称为电磁波。

电磁波无须依赖介质而可以在真空内传播。产生电磁波的首要条件是要有一个激发交变电磁场波源。电磁波波源的机制多种多样。本书仅以振荡电偶极子为例,说明电磁波的产生和传播。

一、电磁波的产生与传播

前面介绍过电偶极子这个理想模型,并用电偶极子 $p=ql$ 来表征它的电特性。在电偶极子周围是一个稳定的电场分布空间。若一个电偶极子的电偶极矩的方位不改变,其大小随时间按余弦规律变化,即 $p=p_0\cos\omega t$,称此偶极子为振荡电偶极子, ω 为它的振

荡频率, p_0 为电偶极矩的振幅。它是电磁波波源中的基本组成部分。图 8-21 是发射无线电波的天线的示意图。

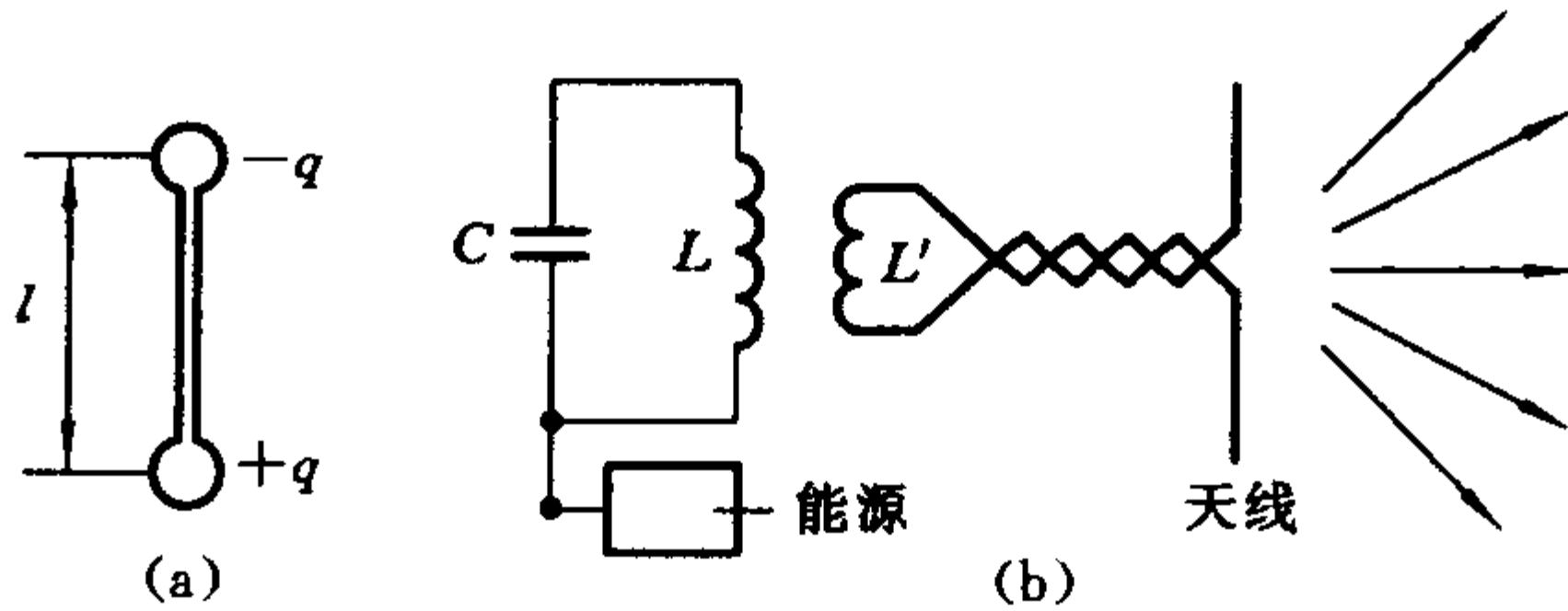


图 8-21 振荡电偶极子和发射天线示意图

LC 振荡电路产生高频率的电磁振荡, 通过互感将这个振荡耦合到 L' 中, 再由传输线馈入天线, 在天线内形成高频率的振荡电流, 这样, 天线就相当于一个振荡偶极子。由于电偶极矩的高频变化, 在振荡偶极子周围形成一个迅变的电场。按电磁场理论, 在迅变电场较远的周围空间就会激起迅变的磁场, 而在迅变的磁场较远的周围空间又激起迅变的电场, 变化的电磁场互为因果, 交替产生, 由近及远地向外传播而形成电磁波。

二、平面电磁波

振荡偶极子发射的电磁波是一个球面波。在离波源较近处的近区场由电偶极子的振荡产生, 与场源关系密切, 场的分布十分复杂; 离波源较近的远区场大部分由近区场内变化的电磁场激发而生, 场的分布比较简单。在整个电磁场中, 有实际意义的是远区场。离波源很远的远区场内, 球面波可看做平面波, 这部分场基本上不受波源控制, 与波源没有能量交换。因此可以认为场内不存在电荷, 也不存在电流。用麦克斯韦理论可以证明, 此场内的电磁波可用下列方程来描述:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \\ H &= H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8-33)$$

式(8-33)是一组平面正弦电磁波的波动方程,它和机械波的平面简谐波动方程形式类似。平面电磁波是最简单的电磁波,它可用图8-22表示。

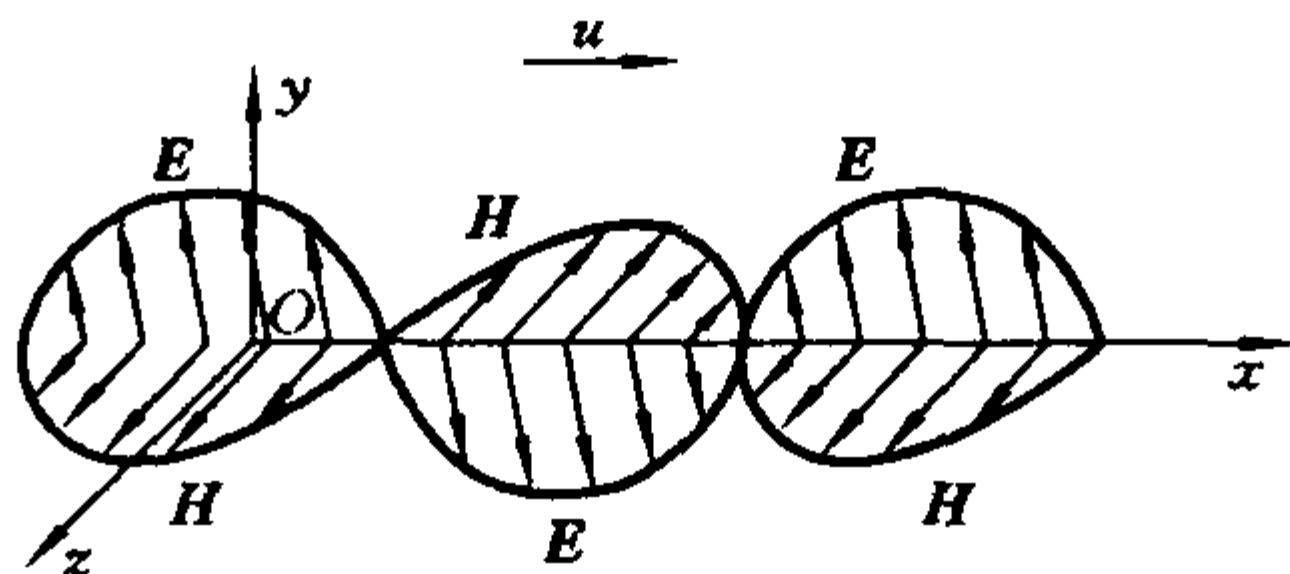


图8-22 平面电磁波

可以证明,平面电磁波具有以下性质。

(1) 电磁波中的电矢量 E 和磁矢量 H 互相垂直,而且都与传播方向垂直,因而电磁波是横波。

(2) 在电磁波传播空间的任意一点, E 和 H 都随时间发生周期性的变化,两者频率相同,相位相同,某一瞬时它们的数值满足 $\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$ 。

(3) 电磁波的传播速度取决于媒介的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 。在真空中,电磁波的速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 8.9875 \times 10^9}{4\pi \times 10^{-7}}} = 2.9979 \times 10^8 (\text{m/s})$$

三、电磁波的能量

交变电磁场是以电磁波的形式传播的。因为电磁场具有能量,

所以随着电磁波的传播,就有能量的传播,这种以电磁波形式传播出去的能量叫做辐射能。显然,辐射能的传播速度就是电磁波传播的速度 v ,辐射能传播的方向就是电磁波的传播方向。

设 dA 为垂直于电磁波传播方向的截面积。如果电磁场的能量密度为 w ,则在介质不吸收电磁能量条件下,在 dt 时间内通过面积 dA 的辐射能量应为 $wvdAdt$,而单位时间内通过单位截面积的能量,即电磁波的能量密度,为

$$S = wv$$

在电磁学中讲过,电场和磁场的能量密度各为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2, \quad w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

因此,电磁场的能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

亦即电磁场辐射的能量密度与 E^2 或 H^2 成正比。

把这一关系代入 $S = wv$,得

$$S = \frac{v}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

将 $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ 代入上式,化简后得

$$S = EH$$

由于 E 、 H 和电磁波的传播方向两两互相垂直,而辐射能的传播方向就是电磁波的传播方向,所以上式又可以用矢量表示如下:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

式中: \mathbf{S} 为电磁波的能量密度矢量,也叫做坡印亭矢量。上式表明, \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{S} 三个矢量组成一个右手螺旋系(见图 8-23)。

振荡偶极子辐射的电磁波的能量密度为

$$S = EH = \frac{\sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu^3} P_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2} \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right]$$

振荡偶极子在单位时间内辐射出去的能量叫做辐射功率,用 P 表示。如果把上式在以振荡偶极子为中心,半径为 r 的球面上积分,并把所得结果对时间取平均值,则得振荡偶极子的平均辐射功率为

$$\bar{P} = \frac{\mu P_0^2 \omega^4}{12\pi v}$$

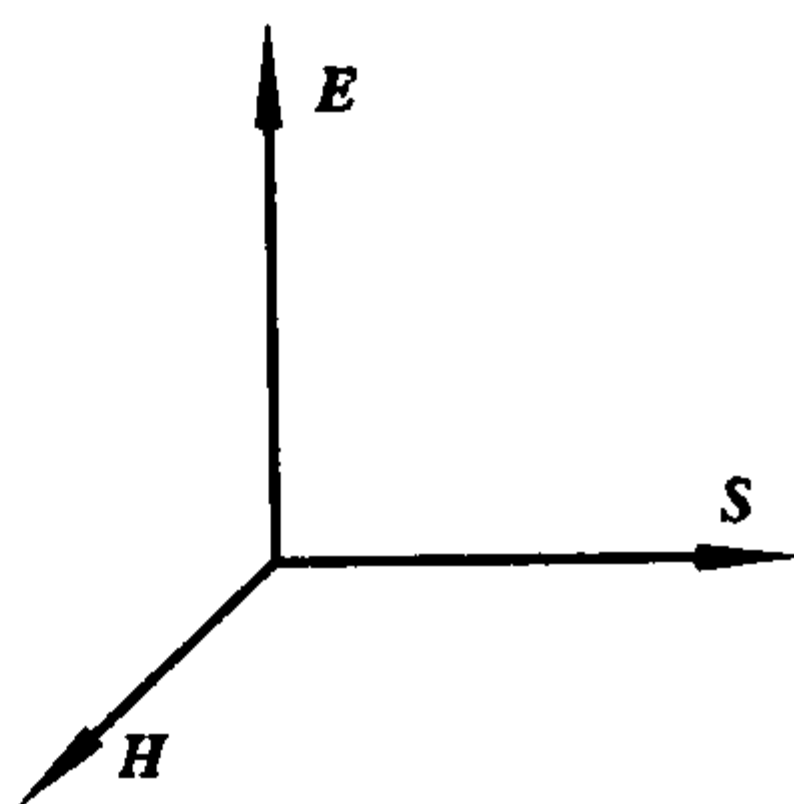


图 8-23 E 、 H 和 S 组成右手螺旋系

可见,平均辐射功率与振荡偶极子的频率的四次方成正比。因此,振荡偶极子的辐射范围(km)随着频率的增高而迅速增大。普通发电厂发出的交电流的频率仅为 50 Hz,因此,电路中辐射的电磁波能量可以忽略不计。为了获得一定的辐射功率,在无线电中使用的频率则在 100 000 Hz 以上。

第6节 波的叠加

一、波的叠加原理

实验事实证明,如果有数列波同时在空间传播,并满足下列规律。

(1) 两列波在传播过程中相遇,相遇后仍然保持它们各自原有的特性(频率、波长、振幅、振动方向等)不变,仍然按照自己原来的传播方向继续前进,好像在各自的传播过程中没有遇到其他波一样。

(2) 在相遇区域内,任一点的振动为两列波单独存在时在该

点所引起的振动的位移的矢量和。

上述规律,叫做波的叠加原理,又叫波的独立传播原理。

二、波的干涉

频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时,使某些地方振动始终加强,而使另一些地方振动始终减弱的现象,叫做波的干涉现象。这两列能产生干涉现象的波叫做相干波,它们的波源叫做相干波源。

如图 8-24 所示,设有两个相距很近的相干波源 S_1 、 S_2 ,它们都作谐振动,其振动方程为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_{10} \cos(\omega t + \phi_1) \\ y_2 &= A_{20} \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\}$$

式中: ω 为两波源作谐振动的角频率, A_{10} 、 A_{20} 分别为它们的振幅, ϕ_1 、 ϕ_2 分别为它们的初相。若两波源发出的这两列波在同一介质中传播,分别经过 r_1 、 r_2 的距离,并设两列波到达空间某一点 P 时的振幅分别为 A_1 和 A_2 ,波长为 λ ,则这两列波在点 P 引起的分振动分别为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos\left(\omega t + \phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 &= A_2 \cos\left(\omega t + \phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) \end{aligned} \right\}$$

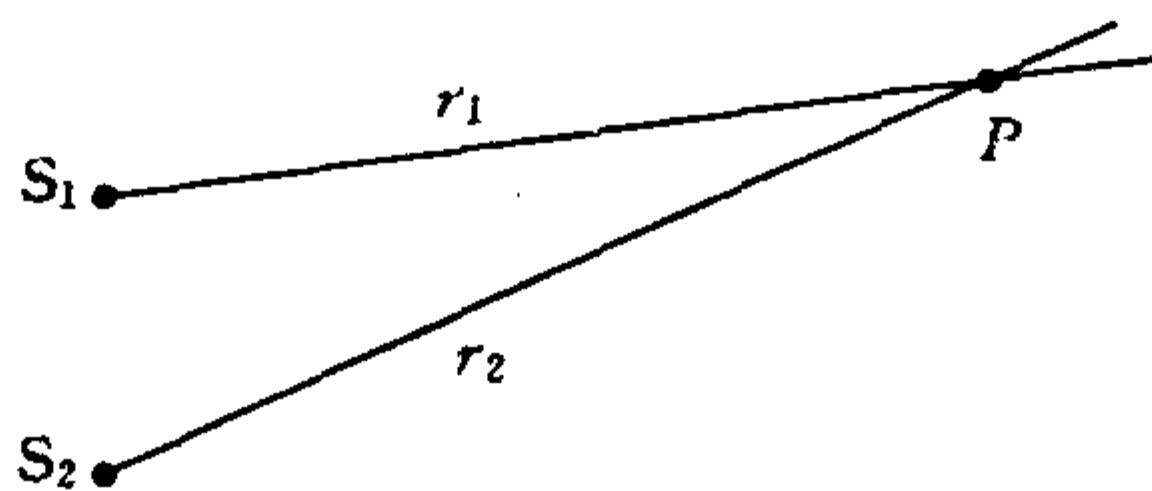


图 8-24 两相干波源发出的波在空间相遇

这是两个同方向、同频率的谐振动。根据波程差和相位差的关系式(8-20b),可得两相干波在空间任一点引起的两个分振动的相位差

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad (8-34)$$

式中, $\phi_2 - \phi_1$ 为两波源原有的相位差, $\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ 为因传播而引起的相位差。因此点 P 的合振动为这两个分振动的合成,即

$$y = A \cos(\omega t + \phi) \quad (8-35)$$

式中, ϕ 为合振动的初相

$$\phi = \arctan \frac{A_1 \sin\left(\phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)} \quad (8-36)$$

A 为合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\phi} \quad (8-37)$$

因为 $\Delta\phi$ 为一恒量,所以合振动的振幅也是一个恒量。这样干涉的结果使空间各点的振幅各自保持不变,在空间某些点处振动始终加强,在某些点处振动始终减弱。

由式(8-34)可知,在适合

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

的空间各点,合振幅最大,其值为 $A = A_1 + A_2$ 。而在适合

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

的空间各点,合振动的振幅最小,其值为 $A = |A_1 - A_2|$ 。

如果两相干波源的初相相同,即 $\phi_2 = \phi_1$,则上述两种情形可化简为

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots (\text{最大}))$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \pm (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots (\text{最小}))$$

式中： $r_1 - r_2 = \delta$ 即为两相干波从各自的波源到达点 P 时所经过的波程差。故上述条件又可简化为

$$\delta = r_1 - r_2 = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时,即在波程差等于零或为波长的整数倍的空间各点,合振动的振幅最大。当

$$\delta = r_1 - r_2 = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时,即在波程差等于半波长的奇数倍的空间各点,合振动的振幅最小。

在其他情况下,即波程差 δ 既不是波长的整数倍,也不是半波长的奇数倍时,合振幅的数值,则在最大值 $(A_1 + A_2)$ 和最小值 $|A_1 - A_2|$ 之间。

由上讨论可知,两相干波源在空间任一点相遇时,其干涉加强和减弱的条件,除了两波源的初相之外,只取决于该点至两相干波源间的波程差。

必须注意,如两波源不是相干波源,则不会出现干涉现象。

三、驻波

驻波是干涉的特例。如果让两列沿相反方向传播而振幅又相同的相干波叠加,在一定条件下可以形成驻波。驻波是一种重要的干涉现象。一般情况下,驻波由一列前进的波与它在界面的反射波叠加而成。例如,轻轻地拨动提琴或胡琴的琴弦,在拨动处发出的人射波与由琴轴返回的反射波叠加,便在琴弦上、琴盒内形成各种不同波长不同形式的驻波,这些乐器便能发出悠扬的琴声。

下面先用图示法定性地讨论驻波的形成。图8-25表示两列振幅相同的相干波，一列向 x 轴正向传播，用虚线表示，一列向 x 轴负向传播，用短划线表示。在 $t=0$ 时，两波互相重叠。 x 轴上的每个质点得到最大的合位移，合成波是一条起伏较大的曲线，用实线表示。 $t=T/4$ 时，两波已分别向前推进了 $1/4$ 波长的距离，此时，各质点的合位移为零，合成波已为一条与 x 轴重合的直线； $t=T/2$ 时，两波再次重合，各点合位移又达最大，但各点位移的方向与 $t=$

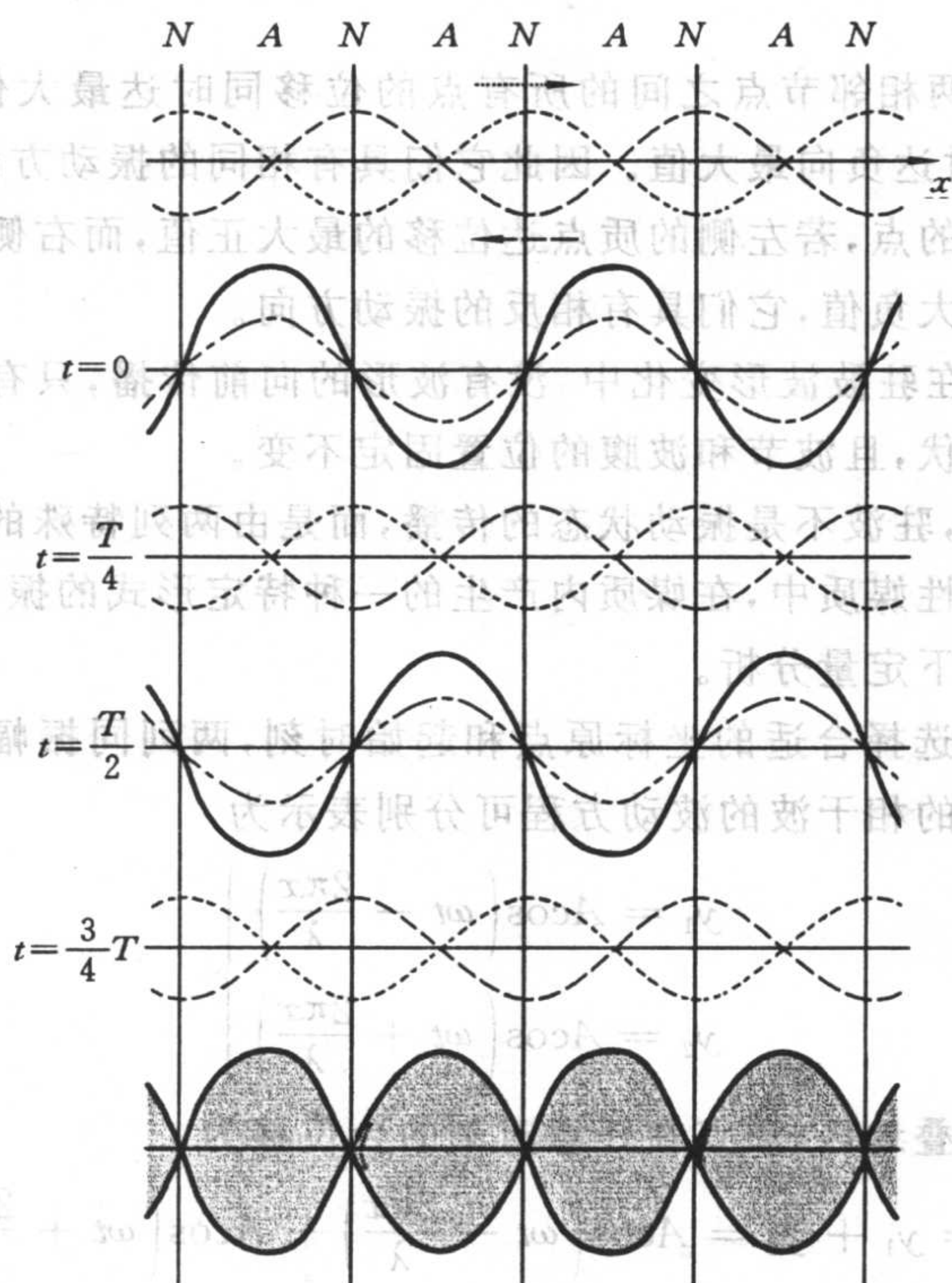


图 8-25 驻波

0时刻相反; $t=3T/4$ 时,合成波又成为一条直线。随着时间的推移,以上过程不断重复。在观察驻波时,由于视觉暂留,可以看到显示驻波轮廓的图形,如图8-25中最下面的图形所示。

通过上面的讨论,使我们认识到驻波具有以下特点。

(1) 在两波交叠地区,各点的合振动仍是同方向、同频率的简谐振动,但它们的振幅是各不相同的,有些点(用 N 表示)始终静止不动,即振幅为零,称为波节;有些点(用 A 表示)振幅最大,称为波腹。

(2) 两相邻节点之间的所有点的位移同时达最大值,同时为零,又同时达负向最大值。因此它们具有相同的振动方向;在同一节点两侧的点,若左侧的质点达位移的最大正值,而右侧的质点却达位移最大负值,它们具有相反的振动方向。

(3) 在驻波波形变化中,没有波形的向前传播,只有波形的原地上下起伏,且波节和波腹的位置固定不变。

因此,驻波不是振动状态的传播,而是由两列特殊的相干波叠加在某弹性媒质中,在媒质内产生的一种特定形式的振动。下面对驻波作如下定量分析。

如果选择合适的坐标原点和起始时刻,两列同振幅的沿相反方向传播的相干波的波动方程可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \\ y_2 &= A \cos \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\}$$

在两波交叠地区,质点在任意时刻的合位移为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + A \cos \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

对上式进行运算,得驻波方程

$$y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad (8-38)$$

驻波方程以严格的数学形式对驻波作了更准确的描述。方程由两个因子组成,后一个因子 $\cos \omega t$ 表示两波交叠地区的每个质元都作圆频率为 ω 的简谐振动。而其振幅由前一个因子的绝对值 $\left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ 决定,它说明各质元的振幅随 x 呈现周期性的分布,

位于 $x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda, \dots$,也就是

$$x = \pm (2i + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (8-39)$$

的各点,振幅 $\left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0$,这些点为波节。对于 $x = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \lambda, \pm \frac{3}{2}\lambda, \dots$ 也就是

$$x = \pm \frac{i}{2}\lambda \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (8-40)$$

的各点,振幅 $\left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 2A$,振幅最大,这些点为波腹。由式(8-39)和式(8-40)可以得到,两相邻波腹(节)间的距离为 $\frac{\lambda}{2}$,波节与相邻波腹之间的距离为 $\frac{\lambda}{4}$ 。

由式(8-38)至式(8-40)还可以证明,两节点之间的质元不仅具有相同的振动方向,且具有相同的相位。有兴趣的读者可以自己完成此证明。

驻波在无线电、激光、雷达等领域都有重要的应用,可以用它来测定波长和确定振动系统的频率。驻波还被利用来进行无损探伤,其基本原理如下:将一块完好的材料板的某处固定,并呈水平,以一定的频率策动边缘某处,使它振动,从这点开始,在板内向各

个方向发出入射波,并在面界上反射而在板内叠加成驻波。驻波的

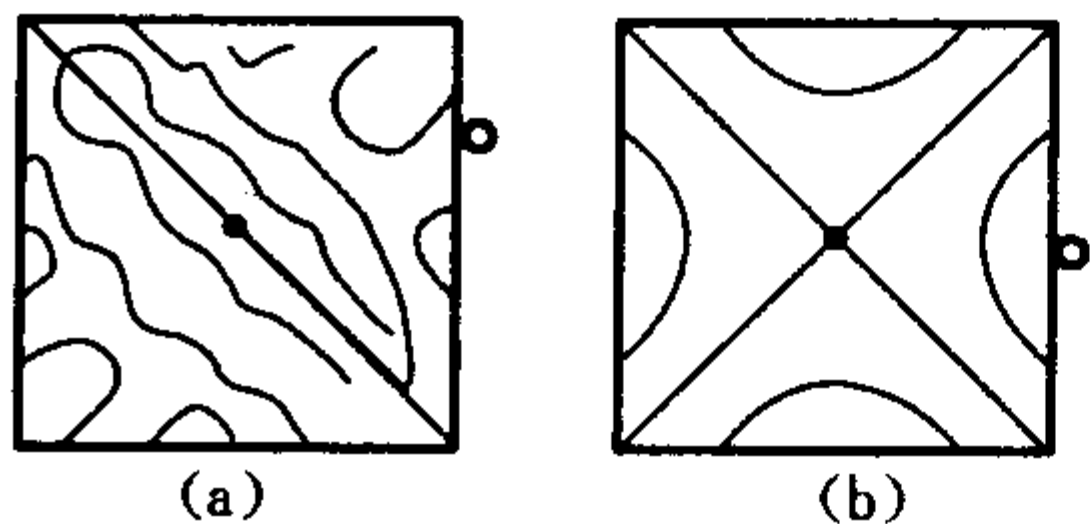


图 8-26 利用驻波进行无损探伤原理图

波节与波腹的位置,除了与策动点、固定点的位置有关外,主要取决于材料的性质。若在金属板上撒一些锯末,锯末不能停留于波腹,而聚集于波节,波节所连成的曲线便可被描绘出来,如图 8-26 所示。

如果将一块有损伤材料板做以上同样的实验,从波节位置的变异可以判断出材料损伤的位置和损伤程度。利用驻波进行无损探伤工艺十分复杂,这里仅作最简要的介绍。

思考题

8-1 符合什么规律的运动是谐振动?并说明下列运动是不是谐振动:

- (1) 活塞的往复运动;
- (2) 一质点作匀速圆周运动,它在直径上的投影点的运动;
- (3) 织布机的梭子沿纬线方向,在两边冲力作用下的往复运动。

8-2 谐振动的周期和频率由什么决定?用同一材料做成的大小、形状不同的两个弹簧,分别挂有质量相同的物体。试问:这两个弹簧振子的振动频率是否相同?

8-3 指出在弹簧振子中,物体处在下列位置时的位移、速度、加速度和所受的弹性力的数值和方向:

- (1) 正方向的端点;
- (2) 平衡位置且向负方向运动;

(3) 平衡位置且向正方向运动；

(4) 负方向的端点。

8-4 两个相同的弹簧挂质量不同的物体。它们以相同的振幅作谐振动时,振动的能量是否相同?

8-5 什么是波动? 振动与波动有什么区别和联系?

8-6 必须具备哪些条件才能形成机械波?

8-7 有一物件在作机械振动,是否一定产生波? 如果没有振动,是否一定没有波?

8-8 横波和纵波有什么区别?

8-9 横波的波形及传播方向如图 8-27 所示,试画出质点 A、B、C、D 的运动方向。

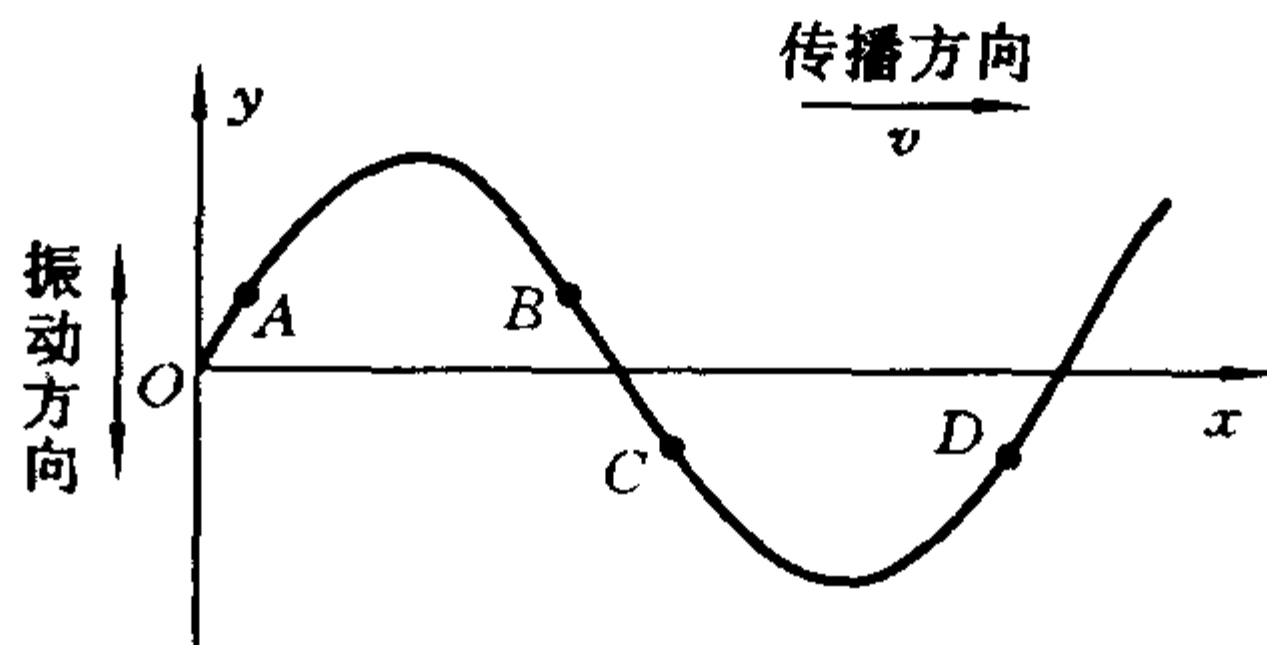


图 8-27 横波

8-10 关于波长的概念有三种说法,试分析它们是否一致:

(1) 同一波线上,相位差为 2π 两个振动的质点之间的距离;

(2) 在一个周期内,振动所传播的距离;

(3) 波的两个相邻峰(或波谷)之间的距离,纵波的两个相邻部(或疏部)对应点之间的距离。

8-11 当简谐波在介质中传播时,试问:

(1) 波源振动的周期(或频率)与波动的周期(或频率)数值是否相同?

(2) 波源振动的速度与波速是否相同?

8-12 波长都是 λ 的两列波相叠加, 合成波的波长等于多少?

习 题

8-1 试比较下列每种情况下两个谐振子固有周期的大小。

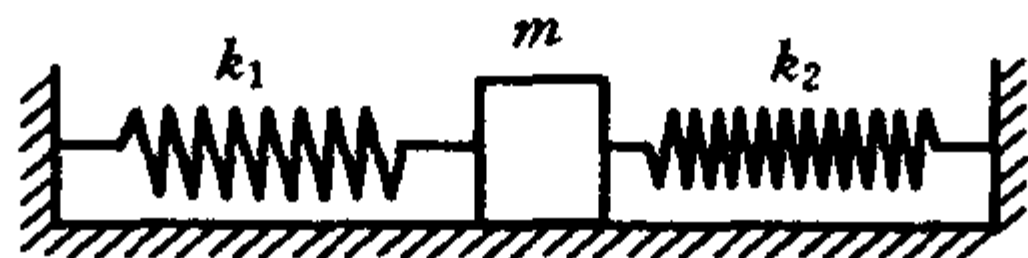
(1) 两个在光滑水平面上运动的弹簧振子, $k_1 = k_2, m_1 = 2m_2, A_1 = 2A_2$ 。

(2) 两个竖直的弹簧振子, $k_1 = k_2, m_1 = m_2$, 一个在地球上, 一个在月球上。

(3) 两个相同的单摆, 一个在地球上, 一个在月球上。

(4) 一个长为 l 、质量为 m 如图 8-4 所示的物理摆; 另一个相同的物理摆上, 在离悬挂点 $h = \frac{2}{3}l$ 处固定一质量为 m 的线度极小的物体。

8-2 在气垫导轨上质量为 m 的物体由两个轻弹簧分别固定在气垫导轨的两端, 如题 8-2 图所示, 试证物体的左右运动为简谐振动, 并求其振动周期。设弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2 。

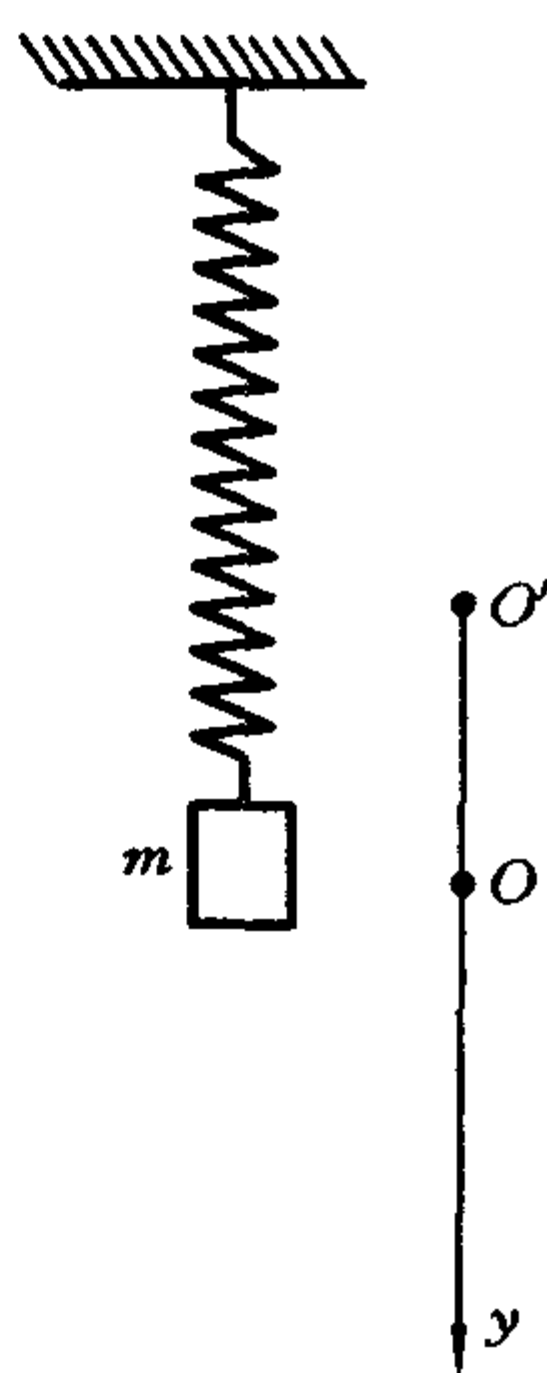


题 8-2 图

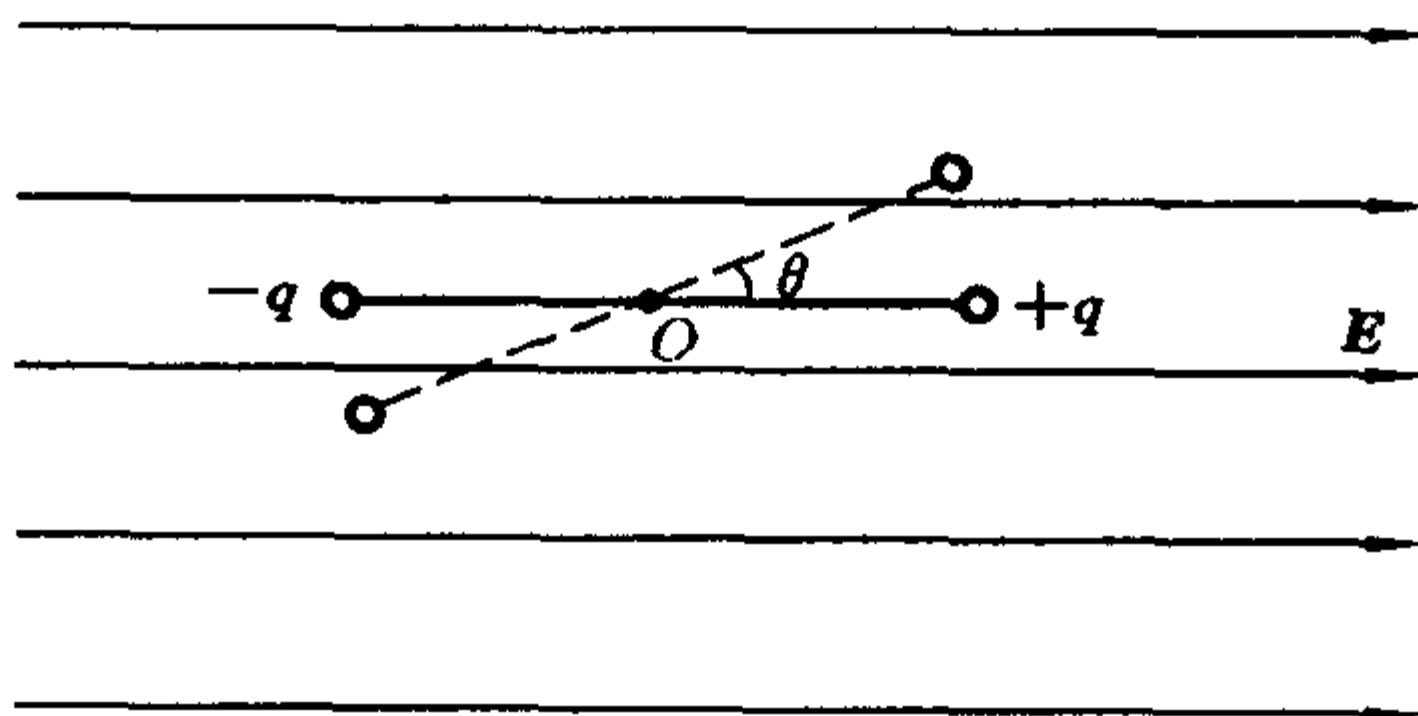
8-3 把弹簧振子竖直悬挂, 如题 8-3 图所示, 并在它的下端系一质量为 m 的重物, 使其在弹簧限度内上下振动。设弹簧的劲度系数为 k 。(1) 证明此振动为简谐振动; (2) 求振动周期。(提示: 若挂重物后, 弹簧伸长 Δl 时平衡。可把坐标原点由原来的平衡处 O' 移至新的平衡点 O 。)

8-4 汽车的重量一般支撑在固定于轴承的若干根弹簧上, 成为一倒置的弹簧振子。汽车在开动时, 上下自由振动的频率应保持在 $\nu = 1.3 \text{ Hz}$ 附近, 与人的步行频率相近, 才能使乘客没有不适之感。汽车在正常载重时, 每根弹簧比松弛状态压缩了多少距离?

8-5 如题8-5图所示, 在电场强度 E 的匀强电场中, 放置一电偶极矩 $p = ql$ 的电偶极子, $+q$ 、 $-q$ 相距 l , 且 l 不变。若一外界扰动使这对电荷偏过一微小角度, 扰动消失后, 这对电荷会以垂直于电场并通过 l 的中点 O 的直线为转轴来回摆动。试证明这种摆动是近似的简谐振动, 并求其振动周期。设电荷的质量皆为 m , 重力忽略不计。



题8-3图



题8-5图

8-6 一放置在水平桌面上的弹簧振子, 振幅 $A = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$, 周期 $T = 0.50 \text{ s}$, 当 $t = 0$ 时, (1) 物体在正方向的端点; (2) 物体在负方向的端点; (3) 物体在平衡位置, 向负方向运动; (4) 物体在平衡位置, 向正方向运动; (5) 物体在 $x = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处向负方向运动; (6) 物体在 $x = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处向正方向运动。求以上各种情况的振动方程。

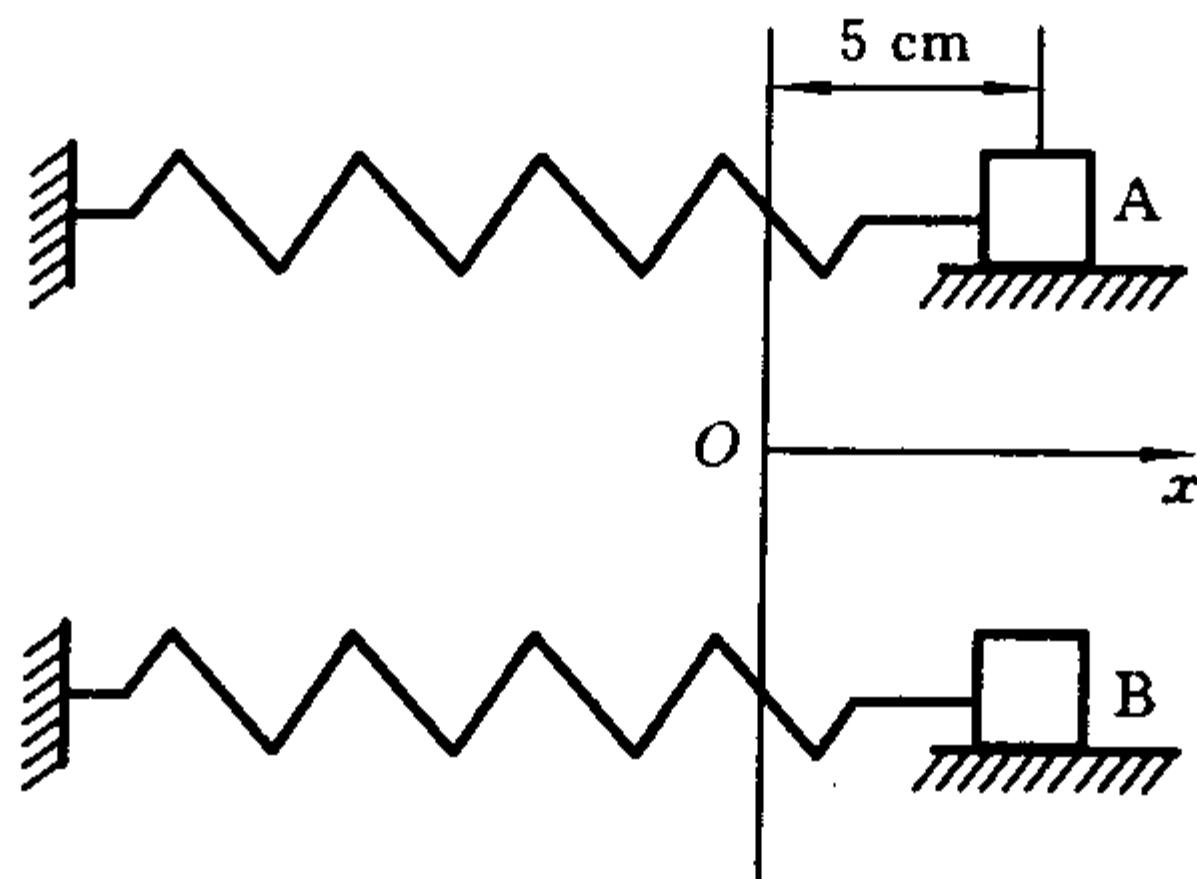
8-7 一质点沿 x 轴作简谐振动, 振幅为 0.12 m , 周期为 2 s , 当 $t=0$ 时, 质点的位置在 0.06 m 处, 且向 x 轴正方向运动, 试求:

- (1) 质点振动的运动方程;
- (2) $t=0.5\text{ s}$ 时, 质点的位置、速度、加速度;
- (3) $x=-0.06\text{ m}$ 处, 且向 x 轴负方向运动, 再回到平衡位置所需的时间。

8-8 一弹簧悬挂 0.01 kg 砝码时伸长 8 cm 。现将这根弹簧悬挂 0.025 kg 的物体, 使它作自由振动。请建立坐标系, 分别对下述三种情况列出初始条件, 求出振幅和初相位, 最后建立振动方程。

- (1) 开始时, 使物体从平衡位置向下移动 4 cm 后松手;
- (2) 开始时, 物体在平衡位置, 给予向上 21 cm/s 的初速度, 使其振动;
- (3) 把物体从平衡位置拉下 4 cm 后, 又给予向上 21 cm/s 的初速度, 同时开始计时。

8-9 有两个完全相同的弹簧振子 A 和 B, 并排地放在光滑的水平台面上, 测得它们的周期都是 2 s 。现将两个物体从平衡位置向右拉开 5 cm 。然后先释放 A 振子, 经过 0.5 s 后, 再释放 B 振子, 如以 B 释放的瞬间作为时间的起点,



题 8-9 图

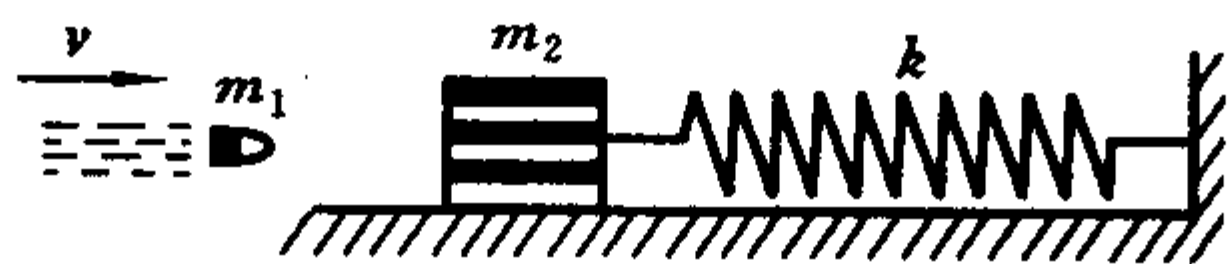
(1) 分别写出两个物体的振动方程;

(2) 它们的相位差为多少? 分别画出它们的 $x-t$ 图。

8-10 一物体作谐振动, (1) 当它的位置在振幅一半处时, 试利用旋转矢量计算它的相位可能为哪几个值? 并作出这些旋转矢量。(2) 谐振子在这些位置时, 其动能、势能各占总能量的百分比为多少?

8-11 质量为 0.1 kg 的物体, 以振幅 $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 作谐振动, 其最大加速度为 4.0 m/s^2 , 试求: (1) 振动周期; (2) 通过平衡位置时的动能; (3) 总能量。

8-12 如题8-12图所示, 质量为 10 g 的子弹, 以 1000 m/s 的速度射入木块并嵌入木块中, 使弹簧压缩从而作谐振动, 若木块质量为 4.99 kg , 弹簧的劲度数为 $8 \times 10^3 \text{ N/m}$, 求振动的振幅。



题8-12图

8-13 一质点同时参与两个方向、同频率的谐振动, 它们的振动方程为

$$x_1 = 6\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = 8\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

试用旋转矢量求出合振动方程。

8-14 有两个同方向、同频率的谐振动, 其合振动的振幅为 0.2 m , 合振动的相位与第一个振动的相位之差为 $\frac{\pi}{6}$, 若第一个振动的振幅为 0.173 m , 求第二个振动的振幅, 第一、第二两振动的相位差。

8-15 试用简单的方法求出下列两组简谐振动合成后所得合

振动的振幅:

$$\text{第一组, } x_1 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{\pi}{8}\right), x_2 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{7\pi}{8}\right);$$

$$\text{第二组, } x_3 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right), x_4 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{4\pi}{3}\right)。$$

8-16 试证明:

(1) 在一个周期中, 谐振动的动能和势能对时间的平均值都等于 $\frac{kA^2}{4}$;

(2) 在一个周期中, 谐振动的动能和势能对位置的平均值分别等于 $\frac{kA^2}{3}$ 和 $\frac{kA^2}{6}$ 。

8-17 已知两个同方向、同频率的谐振动, 它们的振动方程分别为

$$x_1 = 5 \cos(10t + 0.75\pi), \quad x_2 = 6 \cos(10t + 0.25\pi)$$

(1) 求合振动的振幅及初相;

(2) 若另有一个同方向、同频率的谐振动 $x_3 = 7 \cos(10t + \phi_3)$, 则 ϕ_3 为多少时, $x_1 + x_3$ 的振幅最大? 又 ϕ_3 为多少时, $x_2 + x_3$ 的振幅最小?

8-18 有两个同方向、同频率的谐振动, 其合振动的振幅为 20 cm, 合振动的相位与第一个振动的相位之差为 30° , 若第一个振动的振幅为 17.3 cm, 求第二个振动的振幅, 第一、第二两振动的相位差。

$$8-19 \quad \text{一平面简谐波的波动方程为 } y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi\right)。$$

试问: (1) $\frac{2\pi x}{\lambda}$ 表示什么? (2) ϕ 表示什么? (3) 若把波动方程改写为

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right], \quad \frac{x}{u} \text{ 表示什么?}$$

8-20 在平面简谐波传播方向的一条波线上, 点 A、B、C、D 离

波源分别为 $\frac{\lambda}{4}$ 、 $\frac{2\lambda}{4}$ 、 $\frac{3\lambda}{4}$ 、 λ , 设振源的振动方程为 $y = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, 振动周期为 T , (1) 这四点与振源的振动相位差各为多少? (2) 这四点的初相位各如何? (3) 这四点开始振动的时刻比振源各落后多少?

8-21 在波传播路程上有 A 、 B 两点, 媒质的各质元都作谐振动, 点 B 的相位比点 A 落后 $\frac{\pi}{6}$, 已知 A 、 B 之间的距离为 2 cm, 振动周期为 2 s。求波速 u 和波长 λ 。

8-22 一声波在空气中的波长是 0.25 m, 速度是 340 m/s。当它进入另一介质中, 波长变成了 0.79 m, 求它在这种介质中的传播速度。

8-23 波源作谐振动, 周期为 0.01 s, 振幅为 1.0×10^{-2} m, 经平衡位置向 y 轴正方向运动时, 作为计时起点, 设此振动以 $u = 400$ m/s 的速度沿 x 轴正方向传播, 试写出波动方程。

8-24 一横波沿 x 轴方向的波动方程为 $y = 0.05\cos(10\pi t - 4\pi x)$, 求此波的频率、周期、波长、波速和振幅。

8-25 平面简谐波的波动方程为 $y = 8\cos[2\pi(2t - x/100)]$, 试求:

(1) $t = 2.1$ s 时波源及距波源 0.10 m 处的相位;

(2) 离波源 0.80 m 及 0.30 m 两处的相位差。

8-26 一平面简谐波的波动方程为

$$y = 8 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - 2\pi x)$$

(1) $x = 0.2$ m 处的质点在 $t = 2.1$ s 时刻的振动相位 ϕ 为多少? 此相位所描述的运动状态如何?

(2) 此相位值在哪一时刻传至 0.4 m 处?

8-27 一波源作简谐振动, 周期为 0.01 s, 振幅为 0.1 m, 经平衡位置向正方向运动时作为计时起点。设此振动以 $u = 400$ m/s 的

速度沿直线传播。

- (1) 写出波动方程;
- (2) 求距波源 16 m 和 20 m 处的质元的振动方程和初相位;
- (3) 计算距波源 15 m 和 16 m 的两质元的相位差。

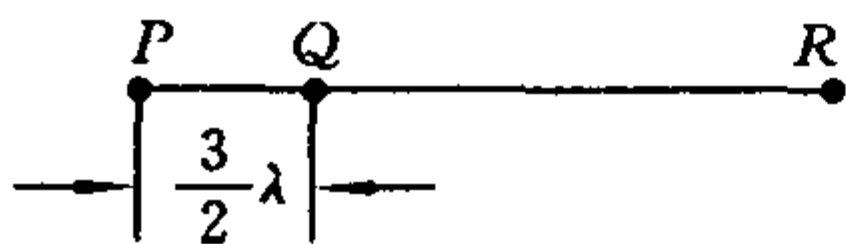
8-28 有一波在介质中传播,其波速 $u=10^3$ m/s,振幅 $A=1.0 \times 10^{-4}$ m,频率 $\nu=10^3$ Hz。若介质的密度为 800 kg/m³,试求:

- (1) 该波的能量密度;
- (2) 1 min 内垂直通过一面积 $S=4 \times 10^{-4}$ m² 的总能量。

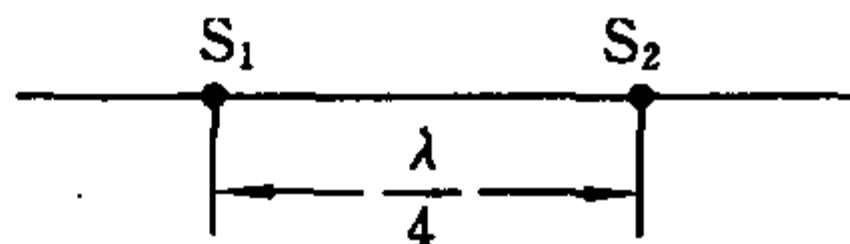
8-29 一平面简谐波的频率为 500 Hz,在空气 ($\rho=1.3 \times 10^{-3}$ g/cm³) 中以 $u=340$ m/s 的速度传播到达人耳时,振幅 $A=10^{-4}$ cm。试求耳中的平均能量密度和声强(这就是通常人们听报告的声强)。

8-30 两相干波源分别在点 P 、 Q 处,它们相距 $\frac{3\lambda}{2}$,如题 8-30 图所示,由 P 、 Q 发出频率为 ν ,波长为 λ 的相干波, R 为 PQ 连线上的一点,试求在下列两种情况下,两波在点 R 的合振幅:

- (1) 设两波源有相同的初相位;
- (2) 两波源初相位相差为 π 。



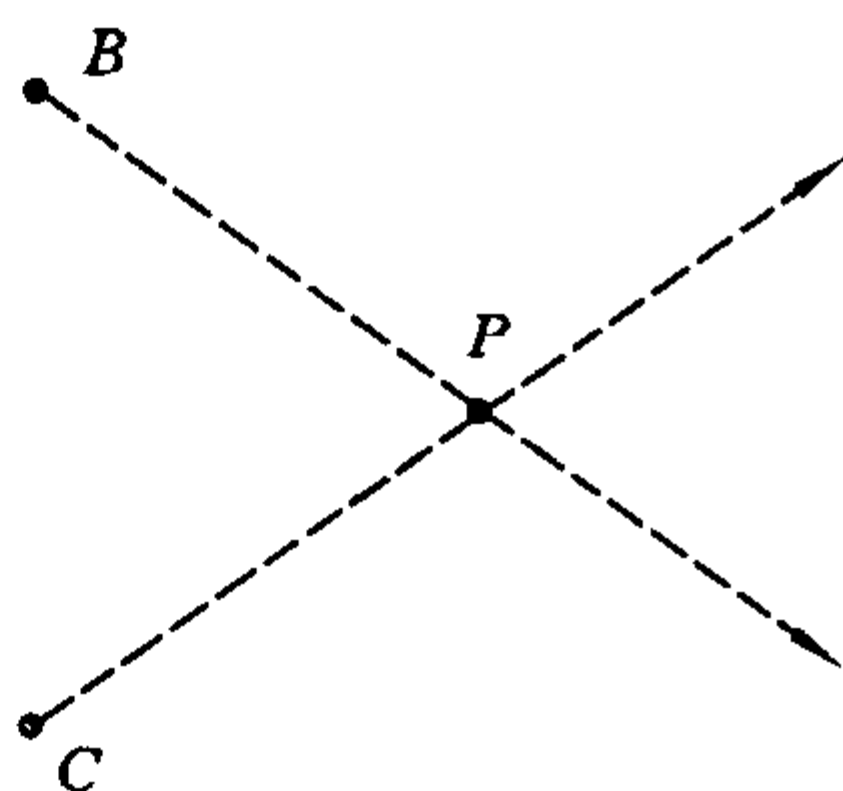
题 8-30 图



题 8-31 图

8-31 S_1 、 S_2 为两相干波源,相距 $\frac{\lambda}{4}$ (见题 8-31 图), S_1 较 S_2 相位超前 $\frac{\pi}{2}$,试问在 S_1 、 S_2 的连线上, S_1 和 S_2 外侧各点的合振幅如何?

8-32 设平面横波 1 沿 \overrightarrow{BP} 方向传播, 它在点 B 的振动方程为 $y_1 = 0.2 \times 10^{-2} \cos 2\pi t$, 平面横波 2 沿 \overrightarrow{CP} 方向传播, 它在点 C 的振动方程为 $y_2 = 0.2 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + \pi)$, 如题 8-32 图所示。点 P 与点 B 相距 0.4 m , 与点 C 相距 0.5 m , 波速为 0.2 m/s 。试求: (1) 两波传到点 P 的相位差; (2) 在点 P 合振动的振幅。



题 8-32 图

* 8-33 两个波在一根很长的细绳上传播, 它们的方程为

$$y_1 = 0.06 \cos[\pi(x - 4t)]$$

$$y_2 = 0.06 \cos[\pi(x + 4t)]$$

(1) 试证明该细绳实际上作驻波式振动, 并求波节和波腹的位置。

(2) 波腹处的振幅为多大? 在 $x = 1.2 \text{ m}$ 处, 振幅多大?

第9章 波动光学

光是人类获取信息、认识自然的最主要途径之一,但人类对光的本性的认识却经历了一个曲折的历史过程。在17世纪后期,牛顿提出了光的微粒说,认为光是由发光体所发射的微粒流。运用微粒说可以说明光的直线传播、光的反射和折射,但它却认为光在光密媒质中的速度大于其在光疏媒质中的速度。同一时期,惠更斯提出了光的波动说,认为光是一种在假想媒质“以太”中的波动过程,并建立了惠更斯原理,利用波动说也能说明光的反射和折射,但它认为光在光密媒质中的速度小于在光疏媒质中的速度。由于牛顿的学术权威性,其微粒说占有主要地位。直到19世纪初,托马斯·杨(Thomas Young, 1773—1829)、菲涅耳(Fresnel, 1788—1827)、马吕斯(Malus, 1775—1812)等人的一系列实验事实才有力地证明了光的波动说,特别是傅科(Foucault, 1819—1868)利用实验测出了光在水中的速度小于在空气中的速度,至此,光的波动说才得到了普遍承认。

到19世纪下半叶,麦克斯韦发表了电磁场理论、赫兹用实验验证了电磁波及其一些性质后,找到了光和电磁场之间的联系,奠定了光的电磁理论,从而进一步确定了光是一种电磁波。通常意义上的光是指可见光,即能引起人的视觉的电磁波,频率在 3.9×10^{14} Hz到 8.6×10^{14} Hz之间,在真空中的波长在 $7\,700 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)到 $3\,500 \text{ \AA}$ 之间。不同频率的可见光给人以不同颜色的感觉。

到了20世纪初,在研究黑体辐射、光电效应等光与物质的相互作用时,光的电磁理论遇到了极大的困难,这时普朗克提出了量子假说,爱因斯坦又进一步提出了光子的概念,认为光是由许多光子组成的粒子流(不同于牛顿的机械微粒),并提出了光既具有波动性,又具有粒子性,即光具有波粒二象性的观点,使人们对光的本性的认识又进了一步。随着科学技术的发展,人们对光的本性的认识会进一步深化。本章将以光的波动性为基础,研究光的干涉、衍射、偏振等波动光学问题。

第1节 光的相干性 获得相干光的两种方法

一、光的相干性

通过第8章波动的学习我们知道:由频率相同、振动方向相同、相位差相同或保持恒定的两个波源所发出的波是相干波。在两相干波相遇的区域内,有些点的振动始终加强,有些点的振动始终减弱或完全抵消,即产生了干涉现象。

干涉现象是波动过程的基本特征之一。对于光波而言,振动的是电场强度 E 和磁场强度 H 。其中能引起人眼视觉和底片感光的是 E ,故通常把 E 称为光矢量, E 的振动称为光振动。光既然是电磁波,就会具有波动的一般特征。波的一个重要特征是能产生干涉现象。光也不例外,若两束光满足频率相同、相位差恒定、振动方向相同的条件,即满足相干条件,也能产生光的干涉。光的干涉现象表现为在空间形成稳定的明暗相间的干涉条纹。若两束光的光矢量

满足相干条件,则它们是相干光,相应的光源叫做相干光源。

由于光源发光本质的复杂性,光波的相干条件不像机械波和无线电波那样容易满足。光是光源中的原子或分子的运动状态发生变化时辐射产生的。原子或分子每次发光的持续时间为 $10^{-8}\sim 10^{-9}$ s,也就是说,原子或分子所发的光是一个个短短的波列。普通光源的辐射过程以自发辐射为主,这是一种随机过程。每个原子或分子先后发射的不同波列,以及不同原子或分子发射的各个波列,彼此之间在相位上没有联系,频率和振动方向也彼此无关。在实验中观察到的光是由光源中的许多原子发出的,由许多相互独立的波列所组成。尽管在有些条件下(如在单色光源内)可以使这些波列的频率相同,但是当两个不相同的光源或同一光源上的两部分的光发生叠加时,这些波列的振动方向不可能都相同,相差也不可能保持恒定。因此,也就不可能产生干涉现象。这就是用两盏灯泡照明时,我们不会看到光的干涉现象的原因。

二、获得相干光的两种方法

一种方法称为波阵面分割法,就是在光源发出的某一波阵面上,取出两部分面元作为相干光源的方法,如图 9-1(a)所示。下面将要介绍的杨氏双缝和洛埃镜等光的干涉实验都是利用波阵面分割法实现的。

另一种称为振幅分割法,如图 9-1(b)所示。其原理是利用反射、折射把波面上某处的振幅分成两部分,再使它们相遇从而产生干涉现象。

日常生活中所看到的油膜、肥皂膜所呈现的彩色条纹就是一种光的干涉现象。太阳光中含有各种波长的光波,当太阳光照射到肥皂膜上时,有的地方红光得到加强,有的地方绿光得到加强……这样便形成了彩色干涉条纹。

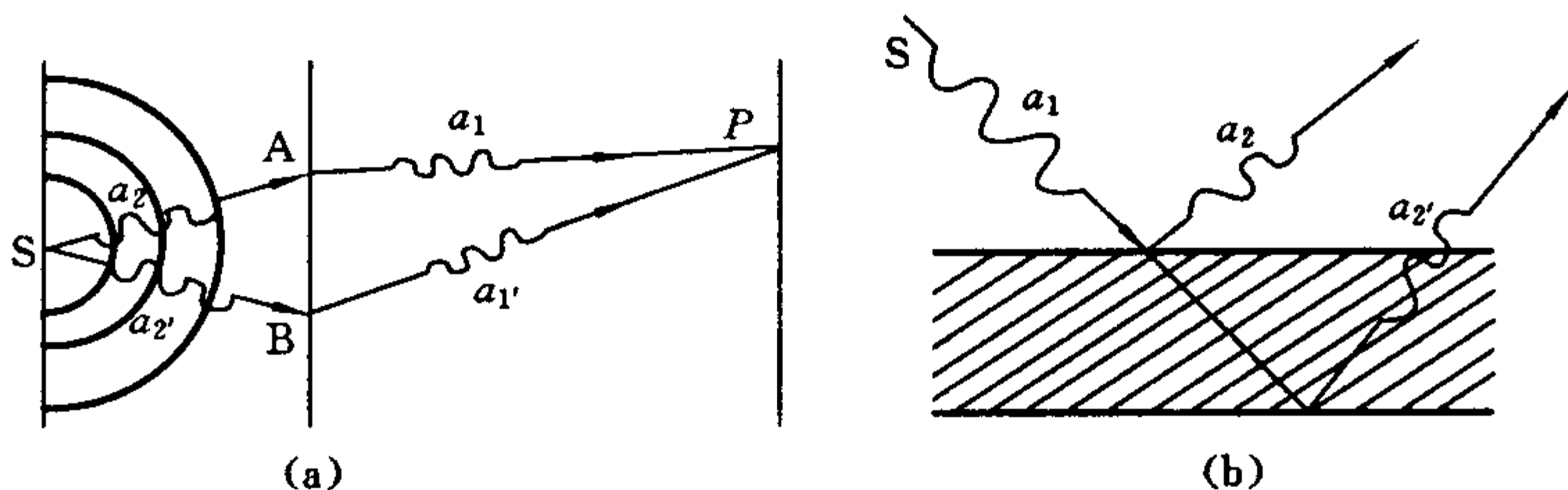


图 9-1 获得相干光的方法

(a) 分波面法; (b) 分振幅法

三、光程和光程差

由波动学可知,同一单色光在媒质中传播时,其频率不变,而光速 u 却为真空中光速 c 的 $1/n$, n 为所在媒质的折射率。设光在折射率为 n 的透明介质中传播,所经过的路程为 r_0 ,所用的时间为 Δt ,则在相同的时间内,光在真空中所走的距离 r 为

$$\Delta t = r_0/u, \quad u = c/n$$

$$\Delta t = nr_0/c, \quad r = c\Delta t = nr_0$$

即光在折射率为 n 的透明介质中传播经过的路程若为 r_0 ,相当于在真空中走过了 nr_0 的距离。由此得到:光波在折射率为 n 的媒质中,在某段时间内所经历的路程 x 与该媒质的折射率 n 的乘积 nx 称为光程。

引入光程的概念有什么作用呢?可以通过以下例子来说明。

例 9-1 设两束相干光经不同的媒质 n_1 、 n_2 和路径 r_1 、 r_2 在空间 P 处相遇,将产生光的干涉现象,如图 9-2 所示。满足上述条件的这两束光的波动方程为

$$E_1 = E_{01} \cos[\omega(t - r_1/\nu_1)]$$

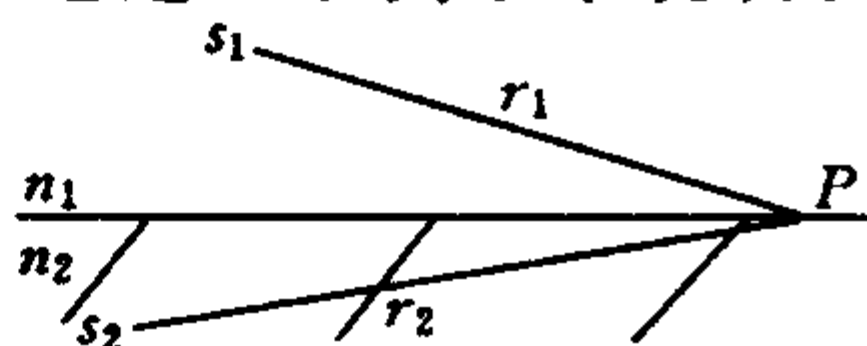


图 9-2 用光程差计算相位差

$$E_2 = E_{02} \cos[\omega(t - r_2/\nu_2)]$$

相位差

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= [\omega(t - r_1/\nu_1) - \omega(t - r_2/\nu_2)] = \omega(r_2/\nu_2 - r_1/\nu_1) \\ &= \frac{\omega}{c}(n_1 r_1 - n_2 r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 r_1 - n_2 r_2) \end{aligned}$$

令 $\delta = n_1 r_1 - n_2 r_2$, δ 是这两束光的光程之差, 称为光程差。由上式知相位差决定于光程差。它们的关系是 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$, 其中 λ 是光在真空中的波长。

与机械波相同, 光的干涉极大和极小的条件为

$$\Delta\phi = \begin{cases} \pm 2k\pi, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{干涉极大} \\ \pm (2k + 1)\pi, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{干涉极小} \end{cases}$$

所以

$$\delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{干涉极大(明)} \\ \pm (2k + 1)\lambda/2, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{干涉极小(暗)} \end{cases}$$

由于光在真空中的折射率 $n=1$, 光程 nx 实际上是把光在折射率为 n 媒质中某段时间内通过的路程 x 折合成在同样一段时间内光在真空中的路程。这样折合的好处是可以统一地用光在真空中的波长 λ 来计算光的相位变化。

上两式表明, 两相干光叠加时光程差等于波长整数倍的各点, 光强最大; 光程差等于半波长奇数倍的各点, 光强最小。因此有了光程和光程差的概念后, 两相干光波的相位差和产生干涉明、暗条纹位置的计算就可归结为光程差的计算。

例9-2 如图9-3所示, 假设有两个同相的相干点光源 S_1 和 S_2 , 发出波长为 λ 的光, 经过相同的路程相遇于 A 点, 若在 S_1 与 A 之间插入厚度为 e 、折射率为 n 的薄玻璃片, 则两光源发出的光在点 A 的相差 $\Delta\phi$ 是多少? 试写出点 A 为明条纹的条件。

解 S_1 和 S_2 到点 A 的几何路程相等, 设为 r 。若在 S_1 与 A 之间插入厚度为 e 、折射率为 n 的薄玻璃片后, S_1 与 A 的光程为: $r - e + en$ 。所以 S_1 和 S_2 到点 A 的光程差

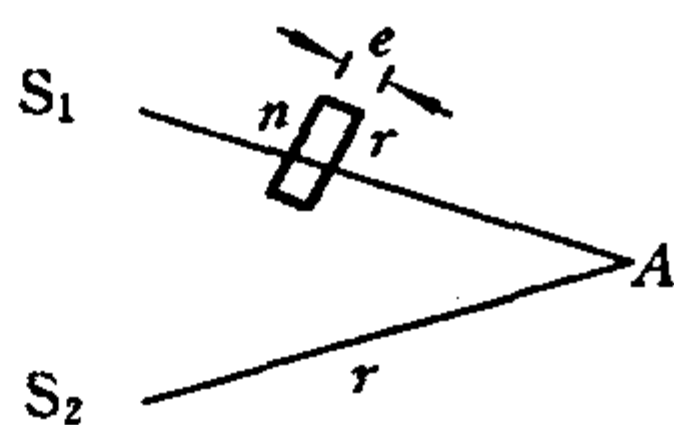


图 9-3 两光源

$$\delta = (r - e + en) - r = (n - 1)e$$

相差 $\Delta\phi$ 为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1)e$$

A 点为明条纹的条件为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1)e = 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

或
$$\delta = (n - 1)e = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots)$$

通过例 9-2, 可以掌握光程差的计算、光程差与相位差的关系以及对于干涉极大和极小条件的理解。

下面简单说明光波通过薄透镜传播时的光程情况。如图 9-4 (a) 所示, 平行光通过薄透镜后会聚于焦点 F 上形成一个亮点, 这是因为平行光波前上各点 A, B, \dots, E 的相位相同, 到达焦点 F 后的相位仍然相同, 因而相互加强, 产生亮点, 这说明各光线 AaF, BbF, \dots, EeF 所经历的光程也相等, 虽然光线 AaF 比光线 CcF 经过的几何路程长, 但光线 CcF 在透镜中经过的路程比光线 AaF 长, 折算成光程, 两者光程相等, 其他光线也一样。对于图 9-4 (b) 所

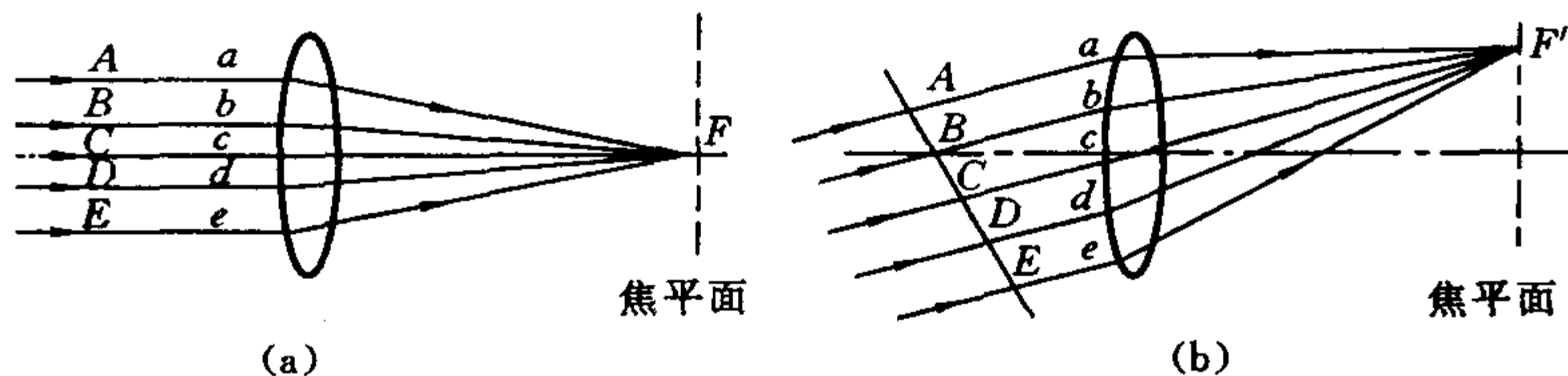


图 9-4 光通过透镜的光程

示的平行光斜入射,然后会聚于 F' 点的情况,通过类似讨论可知,各光线 AaF' , BbF' , \dots , EeF' 的光程也都相等。因此,使用薄透镜不引起附加光程差,这一结论在光的干涉和衍射问题中经常用到。

第2节 双缝干涉 薄膜干涉

一、杨氏双缝干涉实验

干涉现象是波动过程的基本特征之一,只有在实验中实现光的干涉现象才能证实光是一种波动。1801年英国科学家托马斯·杨用极简单的装置和巧妙的构思实现了光的干涉实验。杨氏双缝干涉实验是最早利用单一光源形成两束相干光,从而获得干涉现象的实验装置。杨氏实验装置如图9-5所示。

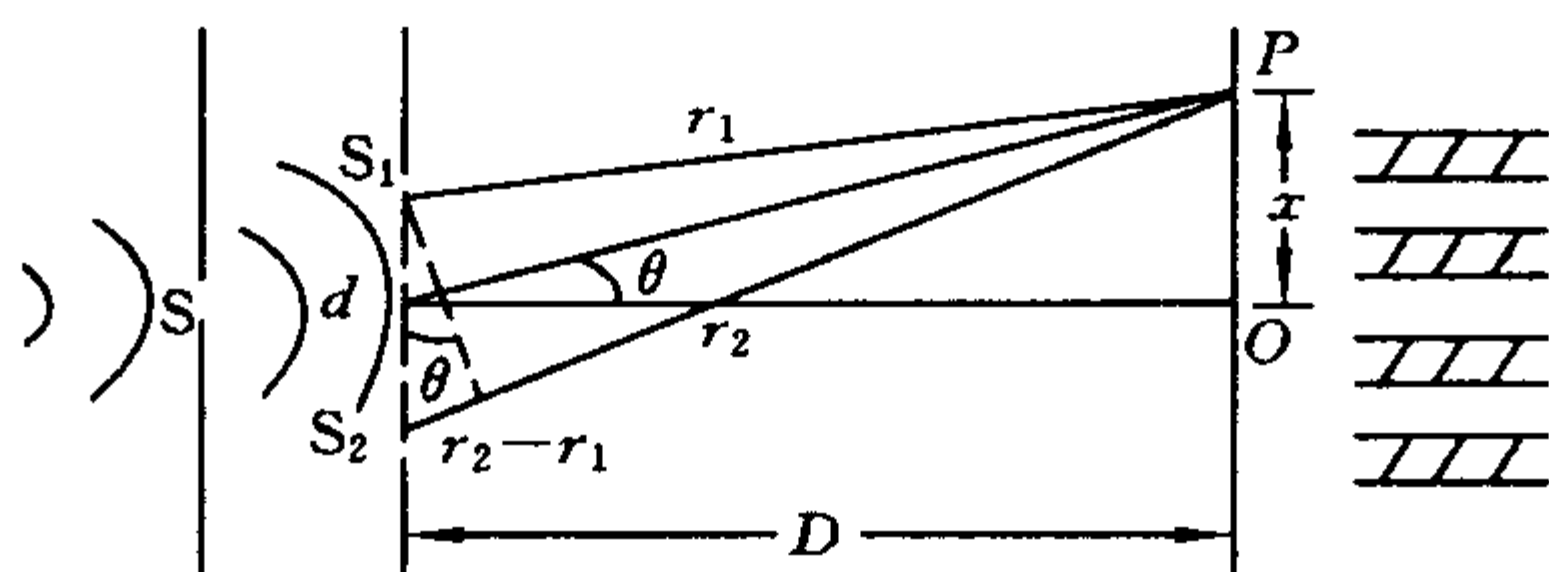


图9-5 双缝干涉实验简图

实验中,由光源 L 发出的光照射到单缝 S 上,使之成为实施本实验的缝光源。在 S 前面放置两个相距很近的狭缝 S_1 和 S_2 ,且 S_1 、 S_2 与 S 之间的距离均相等。由于 S_1 和 S_2 是由同一光源 S 形成的,故满足振动方向相同、频率相等、相位差恒定(本实验中相位差为零)的相干条件, S_1 和 S_2 是相干光源。这样,由 S_1 和 S_2 发出的光在

空间相遇,将会产生干涉现象。在 S_1 、 S_2 前面点 P 处的屏幕上将会出现明暗交替的干涉条纹。由于 S_1 和 S_2 是同一波阵面的两部分,所以这种获得相干光的方法也叫做分波阵面法。

下面定量分析屏幕上形成干涉明、暗条纹的条件。在图9-5中,设杨氏双缝的间隔为 d ,屏幕到双狭缝平面的距离为 D ,屏幕上任一点 P 到点 O 的距离为 x ,点 O 是由 S 作出的平分双狭缝的中央线与屏幕的交点。

由于杨氏实验的整个系统都在空气中($n \approx 1$),所以在近似的情况下这两束光的光程差 δ 即为自 S_1 和 S_2 到所研究的点 P 的距离之差:

$$\delta = r_2 - r_1$$

杨氏双缝干涉实验装置中,双缝间隔 d 的大小一般为 $0.1 \sim 1$ mm,干涉条纹的观测范围 x 一般为 $1 \sim 10$ cm,屏幕与双缝屏的距离 D 为 $1 \sim 10$ m,因而 $d \ll D, x \ll D$ 。

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

在杨氏双缝干涉中, θ 角很小,因而 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ 。这两束光的光程差近似地为

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta = \frac{xd}{D}$$

如果点 P 为亮条纹(干涉极大),按干涉条件,光程差应等于波长的整数倍,即若 δ 满足条件

$$d \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

即在屏幕上

$$x = \pm k \frac{D \lambda}{d} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $k=0$ 相应于在点 O 处的零级明纹(又称为中央明纹),正、负号表示干涉条纹在点 O 两侧对称分布。 $k=1, 2, \dots$ 分别称为第一级

明纹、第二级明纹……

点 P 出现暗条纹的条件是

$$\delta = d \frac{x}{D} = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

即
$$x = \pm \frac{D}{d} (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

式中: $k=1, 2, \dots$ 为第一级暗纹、第二级暗纹……

由上式可得相邻两明纹或相邻两暗纹间的间距都是

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{d} \lambda$$

下面对以上所得结果做进一步分析。

(1) Δx 与级次 k 无关, 因而干涉条纹是等间隔排列的。

(2) 双缝间距 d 增大, Δx 减小, 零级明纹中心位置不变, 其他各级条纹相应向中央明纹靠近, 条纹变密; 反之, 条纹变稀疏。当双缝间距 d 增大到一定程度, 条纹密集到肉眼不能区分时, 就观察不到干涉现象了。两窗户的光、手指伸直时指缝的通过光等, 都不能观察到干涉现象, 就是这个道理。

屏幕与双缝的距离 D 减小, Δx 减小, 零级明纹中心位置不变, 其他各级条纹相应向中央明纹靠近, 条纹变密; 反之, 条纹变稀疏。入射波长 λ 增大, Δx 增大, 条纹变疏; 波长 λ 减小, Δx 减小, 条纹变密。

(3) 相邻两明纹的间隔与波长 λ 成正比。若白光入射, 中央明纹的中心为白色, 中央明纹的两侧, 各种波长的同一级明纹彼此错开, 形成从紫到红的彩色条纹; 级次增加时, 不同级的条纹发生重叠, 看到的是由混合色光形成的彩色条纹; 再向外, 则条纹因重叠而消失。

(4) 在杨氏双缝干涉实验中, 只要知道实验装置中的几何尺寸, 如屏幕与双缝的距离 D , 双缝间隔 d , 相邻两明纹的间距 Δx , 就

可以计算出光波波长。历史上正是从双缝干涉实验中首次测出光波波长的。如果在双缝干涉装置中用一透明薄片覆盖其中一缝,干涉条纹就会移动,根据移动的条纹数目,薄片的厚度,光波长,双缝距离等就可计算出薄片的折射率。如果已知折射率就可以测出薄片的厚度。以上看出,杨氏双缝实验装置在工程技术中有实际应用价值。

例 9-3 杨氏双缝实验中,若用厚度均为 d 的云母片 ($n_1=1.4, n_2=1.7$) 分别盖住 S_1 及 S_2 缝,如图 9-6 所示,中央位置 O 处变第五级明条纹。已知 $\lambda=4800 \text{ \AA}$ 。求玻璃片的厚度 d 。

解 中央位置 O 处有

$$r_2 - r_1 = 0$$

盖住玻璃片后,对中央位置 O 处,有

$$\begin{aligned} \delta &= (r_2 - d + n_2d) - (r_1 - d + n_1d) \\ &= (n_2 - n_1)d = 5\lambda \end{aligned}$$

所以
$$d = \frac{5\lambda}{n_2 - n_1} = 8.0 \times 10^{-6}(\text{m})$$

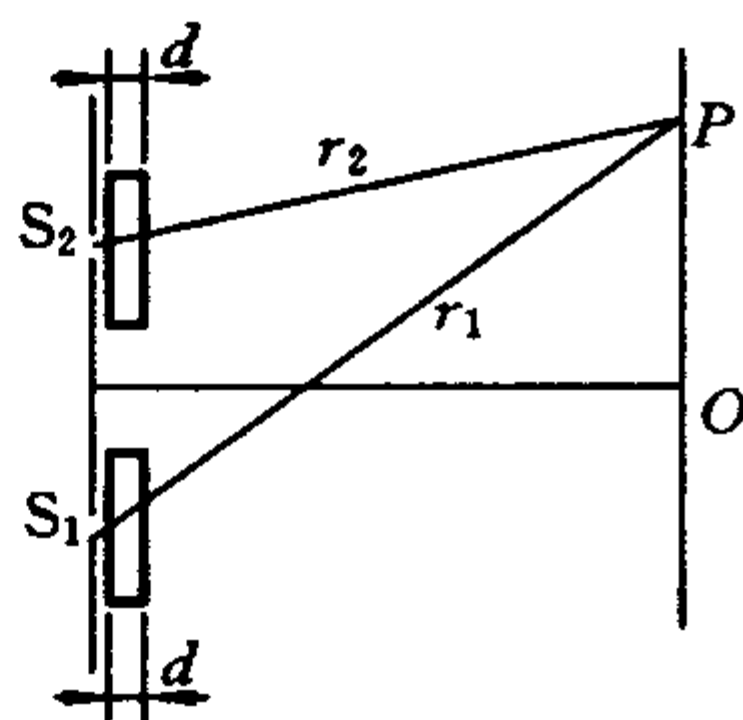


图 9-6 杨氏双缝实验原理图

二、洛埃镜实验

洛埃镜如图 9-7 所示, K 、 L 为反射镜上两点。从狭缝 S_1 射出的光,一部分直接射到屏幕上的点 E 上,另一部分掠射到反射镜上,反射后到达屏幕上。反射光可看成是由虚光源 S_2 发出的。 S_1 、 S_2 构成一对相干光源。图中阴影的区域表示叠加的区域,这时,在屏幕上可以观察到明、暗相间的干涉条纹。

若把屏幕放到和镜面相接触的 E' 位置,此时从 S_1 、 S_2 发出的光到达接触点 L 的路程相等。在 L 处似乎应出现明纹,但是实验事实

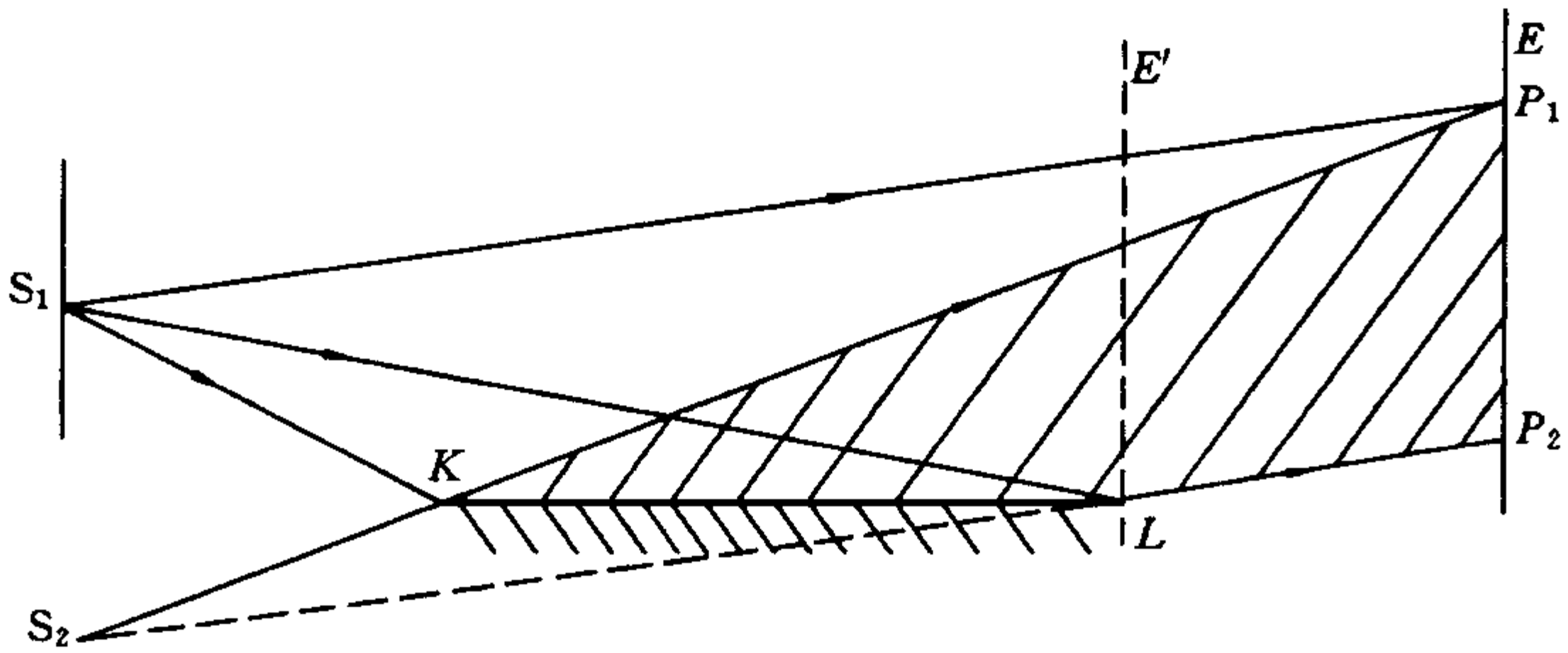


图 9-7 洛埃镜实验原理图

是,在接触处为一暗纹。这表明,直接射到屏幕上的光与由镜面反射出来的光在 L 处的相位相反,即相位差为 π 。由于入射光的相位没有变化,所以只能是反射光(从空气射向玻璃并反射)的相位跃变了 π 。

实验和理论研究都表明,在正入射和掠入射(入射角 $\theta=0$ 或近于 $\pi/2$)情况下,当光从光疏媒质射向光密媒质而被反射时,就会发生相位为 π 的突变。这相当于反射光多走(或少走)了半个波长的光程,因此通常这种现象为半波损失。出现半波损失时,计算光程、光程差应注意的是光经过的路程、介质,以及有反射时是否存在半波损失。

洛埃镜不但显示了光的干涉现象,而且还显示了当光由光速较大(折射率较小)的介质射向光速较小(折射率较大)的介质时,反射光的相位发生了跃变。

例 9-4 求在透明薄膜表面直接反射光 1 与折射后再反射的光 2 的光程差(见图 9-8)。

解 (1) 两束光是在薄膜表面相遇,折射光较之入射光在介质膜中多走了 $2e$ 的距离。

(2) 对于反射光,光是从光疏媒质入射到光密媒质表面反射

的,反射光1存在半波损失;而折射光是从光密媒质入射到光疏媒质表面反射的,不存在半波损失。所以

$$\delta = 2ne + \lambda/2$$

例 9-5 以单色光照射到相距为 0.2 mm 的双缝上,双缝与屏幕的垂直距离为 1 m。

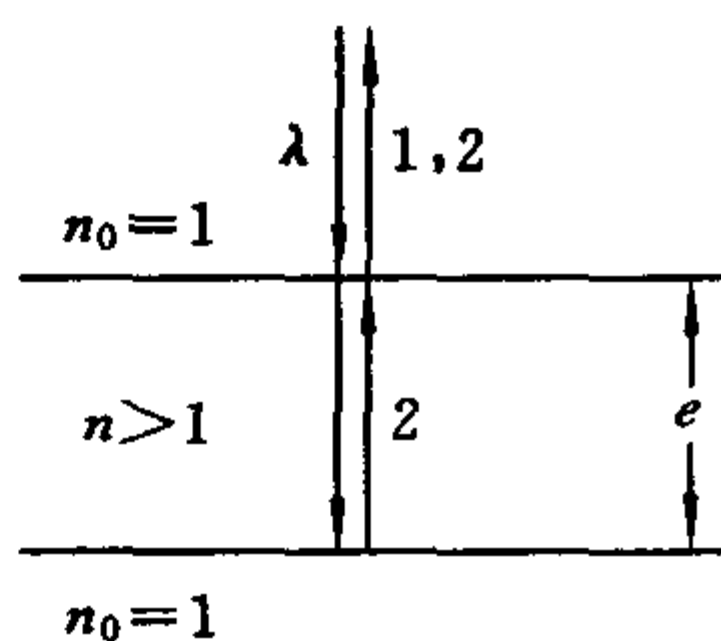


图 9-8 透明薄膜

(1) 从第一级明纹到同侧的第四级明纹间的距离为 7.5 mm, 求单色光的波长;

(2) 若入射光的波长为 600 nm, 求相邻两明纹间的距离。

解 (1) 根据双缝干涉明纹的条件

$$x_k = \pm \frac{D}{d} k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

以 $k=1$ 和 $k=4$ 代入上式, 得

$$\Delta x_{14} = x_4 - x_1 = \frac{D}{d} (k_4 - k_1) \lambda$$

所以

$$\lambda = \frac{d}{D} \frac{\Delta x_{14}}{k_4 - k_1}$$

已知 $d=0.2$ mm, $\Delta x_{14}=7.5$ mm, $D=1\ 000$ mm, 代入上式, 得

$$\lambda = \frac{d}{D} \frac{\Delta x_{14}}{k_4 - k_1} = \frac{0.2 \times 7.5}{1\ 000 \times (4 - 1)} = 500 \text{ (nm)}$$

(2) 当 $\lambda=600$ nm 时, 相邻两明纹间距离为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda = \frac{1\ 000}{0.2} \times 6 \times 10^{-4} = 3.0 \text{ (mm)}$$

三、薄膜干涉

薄膜干涉是利用分振幅法来获得相干光的。实验装置如图 9-9 所示。这里由光源发出的光线经薄膜上表面反射形成的光线 1 和

经薄膜下表面反射再折射形成的光线2是相干光。现在计算光线1和光线2的光程差。

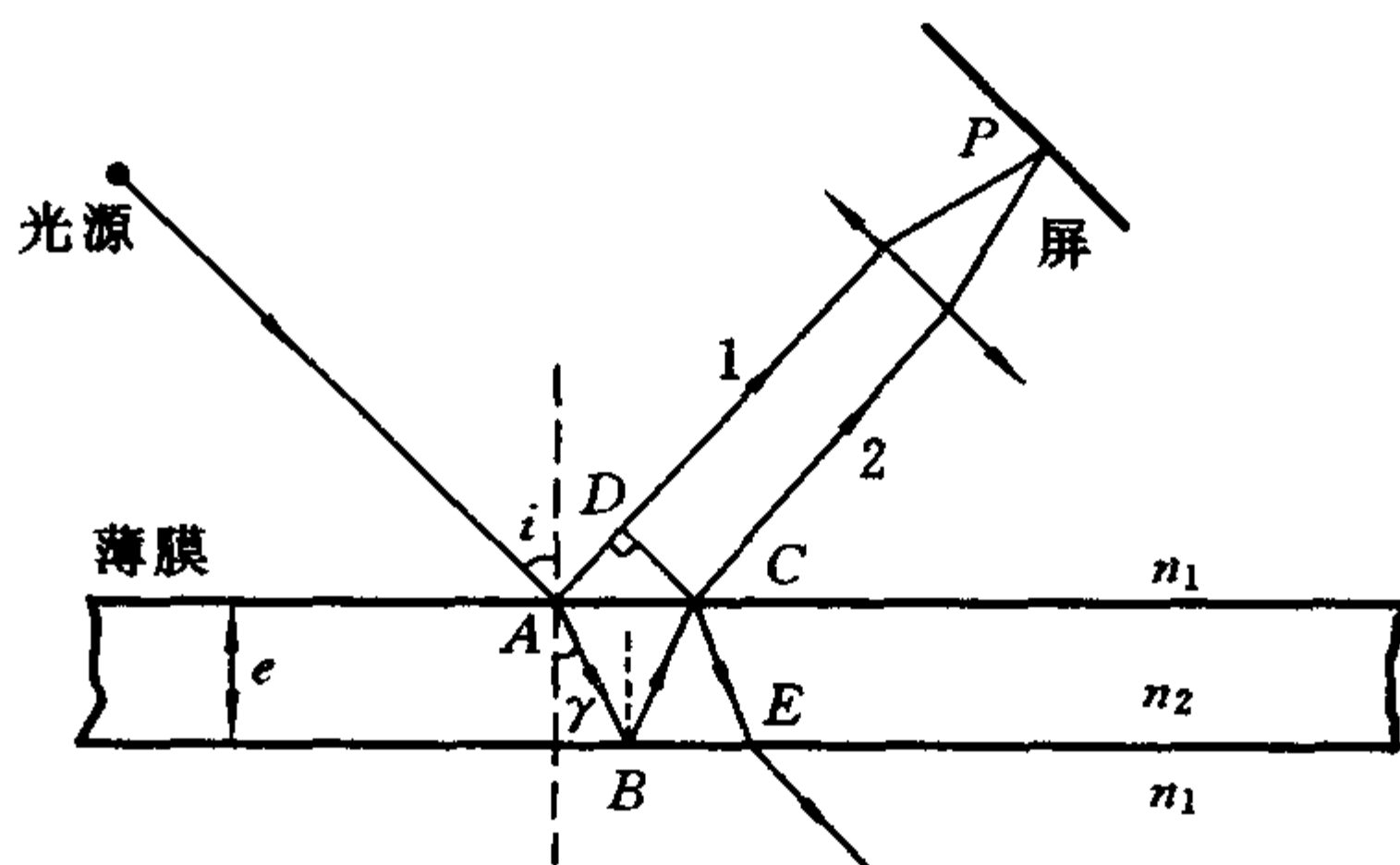


图 9-9 薄膜干涉

设 $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, 则 \overline{CP} 和 \overline{DP} 的光程相等。由图 9-9 可知, 光线 2 在折射率为 n_2 的介质中的光程为 $n_2(\overline{AB} + \overline{BC})$; 光线 1 在折射率为 n_1 的介质中的光程为 $n_1 \overline{AD}$ 。因此, 它们的光程差为

$$\delta = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{AD} \quad (9-1)$$

设薄膜的厚度为 e , 由图 9-9 可得

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{BC} = e / \cos \gamma \\ \overline{AD} &= \overline{AC} \sin i = 2e \tan \gamma \sin i \end{aligned}$$

把以上两式代入式(9-1), 得

$$\delta = \frac{2e}{\cos \gamma} (n_2 - n_1 \sin \gamma \sin i)$$

根据折射定律 $n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$, 上式可写成

$$\delta = \frac{2e}{\cos \gamma} n_2 (1 - \sin^2 \gamma) = 2n_2 e \cos \gamma \quad (9-2)$$

或
$$\delta = 2n_2 e \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \quad (9-3)$$

此外, 由于两介质的折射率不同, 还必须考虑光在界面反射时有 π

的相位跃变,或附加光程差 $\pm \frac{\lambda}{2}$ 。在此取 $+\frac{\lambda}{2}$,则两反射光的总光程差为

$$\delta_r = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \quad (9-4)$$

于是,干涉条件为

$$\begin{aligned} \delta_r &= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \\ &= \begin{cases} k\lambda, & k = 1, 2, \dots (\text{加强}) \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, & k = 0, 1, 2, \dots (\text{减弱}) \end{cases} \end{aligned} \quad (9-5)$$

当光垂直入射(即 $i=0$)时

$$\delta_r = 2n_2 e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k = 1, 2, \dots (\text{加强}) \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, & k = 0, 1, 2, \dots (\text{减弱}) \end{cases} \quad (9-6)$$

透射光也有干涉现象。在图9-9中不难看出,光线 AB 到达 B 处时,一部分直接经下界面折射而出,还有一部分经点 B 和 C 两次反射后在 E 处折射而出,因此,两透射光线3、4的总光程差为

$$\delta_t = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

与式(9-5)相比较, δ_t 与 δ_r 相差 $\lambda/2$,即当反射光的干涉相互加强时,透射光的干涉相互减弱。显然,这与能量守恒定律相符合。

例9-6 一油轮漏出的油(折射率 $n_1=1.2$)污染了某海域,在海水($n_2=1.3$)表面形成一层薄薄的油污。

(1) 如果太阳正位于海域上空,一直升机的驾驶员从机上向下观察,他所正对的油层厚度为 $d=460 \text{ nm}$,则他将观察到油层呈什么颜色?

(2) 如果一潜水员潜入该区域水下,又将观察到油层呈什么

颜色?

解 这是一个薄膜干涉的问题,太阳垂直照射在海面上,驾驶员和潜水员所看到的分别是反射光的干涉结果和透射光的干涉结果。

(1) 由于油层的折射率 n_1 小于海水的折射率 n_2 ,但大于空气的折射率,所以在油层上、下表面反射的太阳光均发生 π 的相位跃变。两反射光之间的光程差为

$$\delta = 2n_1d$$

当 $\delta = k\lambda$, 即 $\lambda = \frac{2n_1d}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ 时,反射光干涉形成极亮,把 $n_1 = 1.2$, $d = 460 \text{ nm}$ 代入,得干涉加强的光波波长为

$$k = 1, \quad \lambda_1 = 2n_1d = 1104 \text{ (nm)}$$

$$k = 2, \quad \lambda_2 = n_1d = 552 \text{ (nm)}$$

$$k = 3, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}n_1d = 368 \text{ (nm)}$$

其中,波长为 $\lambda_2 = 552 \text{ nm}$ 的绿光在可见范围内,而 λ_1 和 λ_3 则分别在红外线和紫外线的波长范围内,所以,驾驶员将看到油膜呈绿色。

(2) 此题中透射光的光程差为

$$\delta_t = 2n_1d + \frac{\lambda}{2}$$

令 $\delta_t = k\lambda$, $k = 1, 2, \dots$ 得

$$k = 1, \quad \lambda_1 = \frac{2n_1d}{1 - \frac{1}{2}} = 2208 \text{ (nm)}$$

$$k = 2, \quad \lambda_2 = \frac{2n_1d}{2 - \frac{1}{2}} = 736 \text{ (nm)}$$

$$k = 3, \quad \lambda_3 = \frac{2n_1d}{3 - \frac{1}{2}} = 441.6 \text{ (nm)}$$

$$k = 4, \quad \lambda_4 = \frac{2n_1d}{4 - \frac{1}{2}} = 315.4 \text{ (nm)}$$

其中, 波长为 $\lambda_2 = 736 \text{ nm}$ 的红光和 $\lambda_3 = 441.6 \text{ nm}$ 的紫光在可见范围内, 而 λ_1 是红外线, λ_4 是紫外线。所以, 潜水员看到的油膜呈紫红色。

利用薄膜干涉不仅可以测定波长或薄膜的厚度, 而且还可提高或降低光学器件的透射率。例如, 在玻璃表面上镀一层厚度为 d 的氟化镁 (MgF_2) 薄膜, 当 $d = 0.10 \mu\text{m}$ 时, 波长为 552 nm 的黄绿光在薄膜的两界面上反射时由于干涉减弱而无反射光。根据能量守恒定律, 反射光减少, 透射光就增加了。这种能减少反射光强度而增加透射光强度的薄膜, 称为增透膜。相同的道理, 选择合适的一定厚度的薄膜, 可以增强反射光减弱透射光, 这种薄膜称为增反膜。许多现代化大楼的窗户玻璃常常显蓝色, 且楼外的人看不清大楼内部的情况, 而楼内的人员却可以看清楼外的情况, 就是因为玻璃外表面有一层膜(对于射向大楼的蓝光是增反膜)的缘故。

四、劈尖

如图 9-10(a) 所示, G_1 、 G_2 为两片叠放在一起的平板玻璃, 其一端的棱边相接触, 另一端被一直径为 D 的细丝隔开, 故在 G_1 的下表面和 G_2 的上表面之间形成一空气薄层, 叫做空气劈尖。图中 M 为倾斜 45° 角放置的半透明半反射平面镜, L 为透镜, T 为显微镜。单色光源 S 发出的光经透镜 L 后成为平行光, 经 M 反射后垂直射向劈尖(入射角 $i = 0$)。自空气劈尖上下两面反射的光相互干涉。从显微镜 T 中可观察到明暗交替、均匀分布的干涉条纹, 如图 9-10

(b)所示,图中相邻两暗纹(或明纹)的中心间距 Δl 叫做劈尖干涉的条纹宽度。

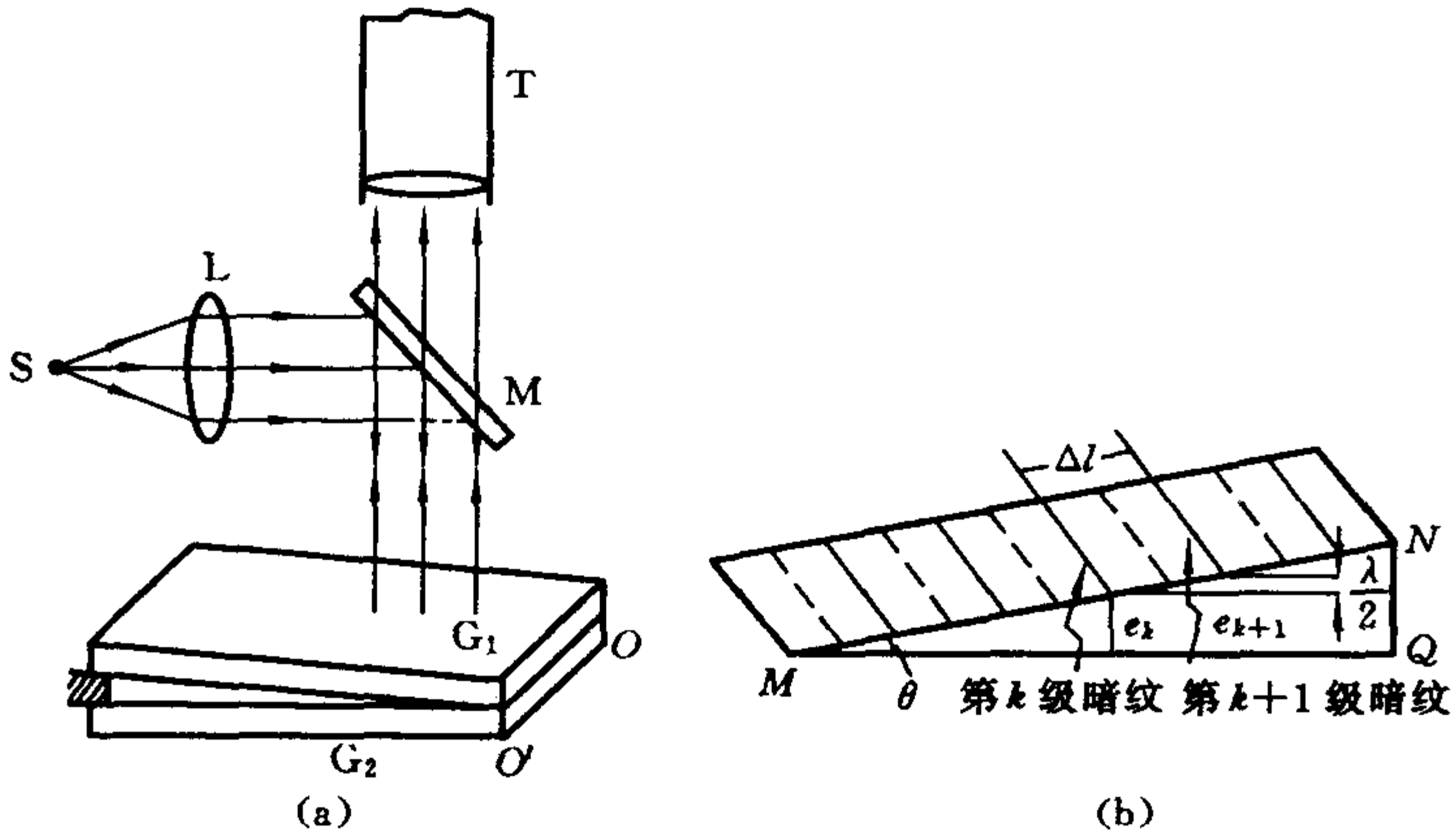


图 9-10 劈尖

下面定量讨论劈尖干涉条纹的形成原理。在图9-10中, θ 为两玻璃片间的夹角。由于 θ 实际很小,所以在劈尖的上表面处反射的光线和在劈尖下表面处反射的光线都可看做垂直于劈尖表面,它们在劈尖表面处相遇并相干叠加。由于劈尖层空气的折射率 n 比玻璃的折射率 n_1 小,所以光在劈尖下表面反射时因有相位跃变而产生附加光程差 $\lambda/2$ 。这样,由式(9-6)可得劈尖上下两表面反射的两相干光的总光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

式中: e 为劈尖上下表面间的距离,劈尖反射光干涉极大(明纹)的条件是

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9-7)$$

产生干涉极小(暗纹)的条件是

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (9-8)$$

从式(9-7)和式(9-8)可以看出,凡劈尖内厚度 e 相同的地方均满足相同的干涉条件。因此,劈尖的干涉条纹是一系列平行于劈尖棱边的明暗相间的直条纹,如图9-10(b)所示。我们把这种与等厚线相应的干涉现象,叫做等厚干涉。

根据以上讨论,不难求出两相邻明纹(或暗纹)处劈尖的厚度差。

设第 k 级明纹处劈尖的厚度为 d_k ,第 $k+1$ 级明纹处的厚度为 d_{k+1} ,由于干涉极大的条件公式很容易得到

$$d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda_n}{2}$$

式中: $\lambda_n = \lambda/n$ 为光在折射率为 n 的介质中的波长。可见,相邻两明纹处劈尖的厚度差为光在劈尖介质中波长的 $1/2$;同理,两相邻暗纹处劈尖的厚度差也是光在该介质中的波长的 $1/2$;而相邻的明、暗纹(即同一 k 值的明纹和暗纹)处劈尖的厚度差为光在劈尖介质中波长的 $1/4$ 。

由于一般劈尖的夹角 θ 很小,从图9-10可以看出,若相邻两明(或暗)纹间的距离为 Δl ,则有

$$\theta \approx \frac{D}{L}, \quad \theta \approx \frac{\lambda_n/2}{\Delta l}$$

即

$$D = \frac{\lambda L}{2n\Delta l}$$

所以,若已知劈尖长度 L 。光在真空中的波长 λ 和劈尖介质的折射率 n ,并测出相邻暗纹(或明纹)间的距离 Δl ,就可计算出细丝的直径 D 。

五、牛顿环

图 9-11(a)是牛顿环实验装置的示意图,一块曲率半径很大的平凸透镜与一平玻璃相接触,构成一个上表面为球面,下表面为平面的空气劈尖。由单色光源S发出的光经半透半反射镜M反射后垂直射向空气劈尖,并在劈尖空气层的上下表面反射,从而在显微镜T内可观察到如图9-11(b)所示的干涉条纹图样。由于这里空气

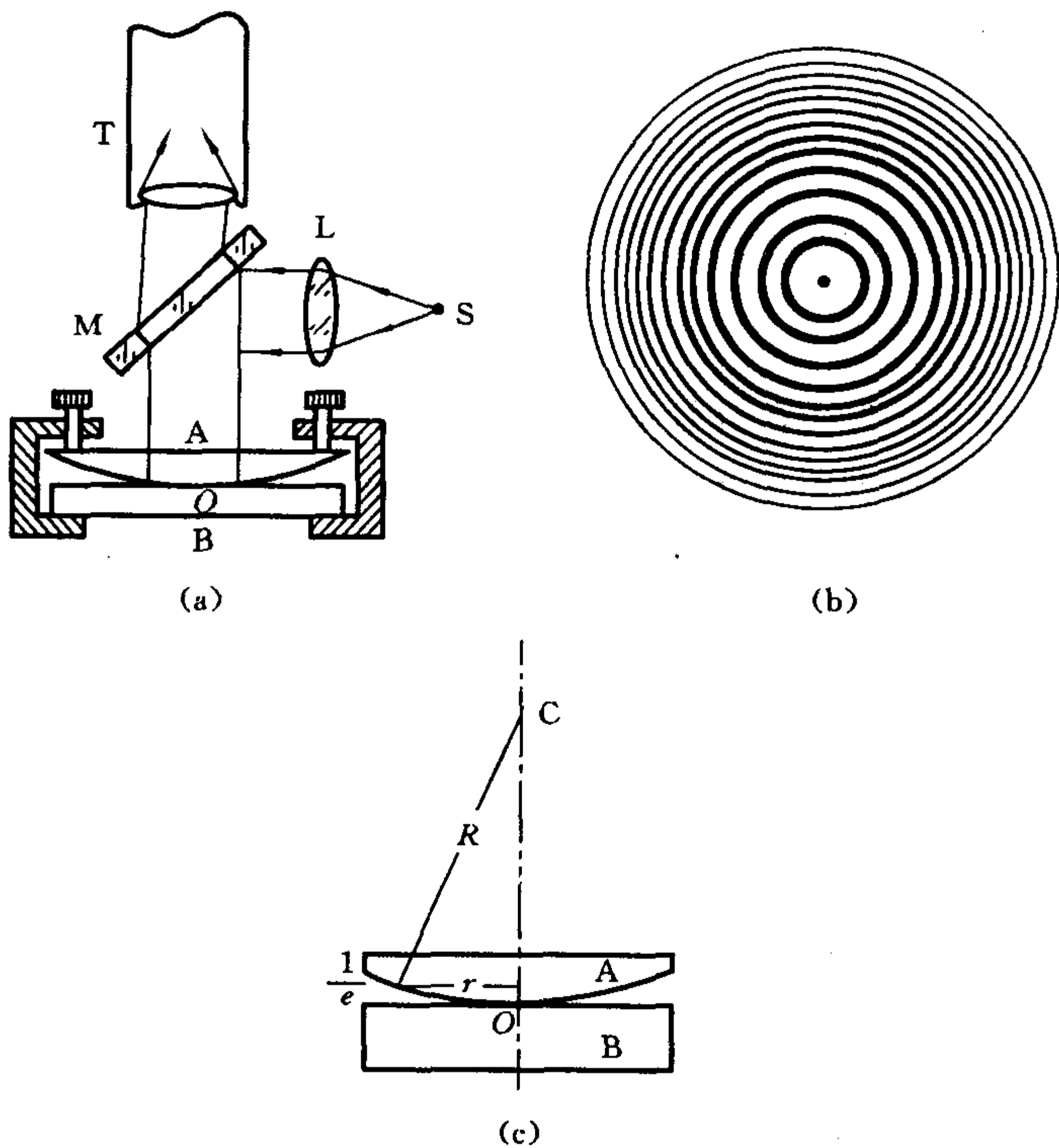


图 9-11 牛顿环

劈尖的等厚轨迹是以接触点为圆心的一系列同心圆,所以干涉条纹的形状也是明暗相间且间距不等的同心圆环,因其最早是被牛顿观察到的,故称为牛顿环。

下面推导干涉条纹的半径 r 、光波波长 λ 和平凸透镜的曲率半径 R 之间的关系。考虑到空气劈尖的折射率($n \approx 1$)小于玻璃的折射率 n_1 ,以及光是垂直入射($i=0$)的情形,可知在厚度为 e 处,两相干光的光程差为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

由图可得

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2eR - e^2$$

已知 $R \gg e$,可以略去 e^2 ,故得

$$r = \sqrt{2eR} = \sqrt{\left(\delta - \frac{\lambda}{2}\right)R}$$

结合式(9-7),解得明环半径

$$r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)R\lambda} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9-9)$$

暗环半径

$$r = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (9-10)$$

在透镜与平玻璃的接触处, $e=0$,光程差 $\delta=\lambda/2$ (是由于光在平玻璃的上表面反射时相位跃变了 π 造成的),所以反射式牛顿环的中心总是暗纹。

例9-7 用氦氖激光器发出的波长为633 nm的单色光做牛顿环实验,测得第 k 个暗环的半径为5.63 mm,第 $k+5$ 个暗环的半径为7.96 mm,求平凸透镜的曲率半径 R 。

解 根据式(9-10)有

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}, \quad r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda}$$

可得

$$5R\lambda = (r_{k+5}^2 - r_k^2)$$

所以

$$R = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5\lambda} = \frac{7.96^2 - 5.63^2}{5 \times 633} = 10.0 \text{ (m)}$$

第3节 光的衍射

一、光的衍射现象

前面介绍光的干涉现象是光的波动性的特征之一,下面我们讨论光的波动性的另一种基本特征,即光的衍射。实验发现,光在传播过程中若遇到尺寸与光的波长差不多的障碍物或狭缝,就不再遵循直线传播的规律,而会传到障碍物的阴影区并形成明暗相间的条纹,这就是光的衍射现象。如图9-12所示,一束光线遇到一细小的圆形障碍物时,在障碍物后方所形成的衍射图样,通常称为圆盘衍射图样。在障碍物阴影的中央出乎意料地呈现为一个亮斑,叫菲涅耳斑。

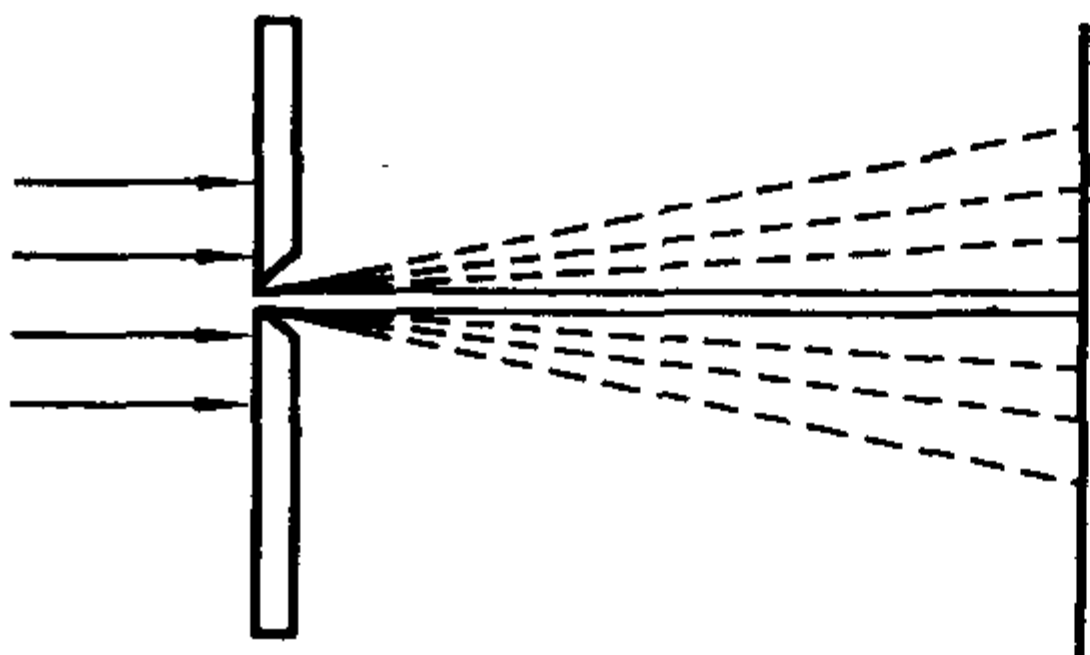


图9-12 光的衍射现象

从实验可得出光的衍射现象具有以下特点。

(1) 光的衍射是在一定条件下(光波遇到障碍物且障碍物线度与光波波长相近时)产生的光偏离直线传播和光能在空间不均匀分布的现象。

(2) 光束在什么方向受到限制,衍射图样就在什么方向铺展,且限制愈甚,衍射效应愈强。

二、惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯曾指出,媒质中波所到达的各点都可看成是发射子波的波源,其后任一时刻,这些子波的包迹就决定新的波前。根据惠更斯原理可以确定波的传播方向,说明衍射中波的绕弯行为,但不能解释波的衍射区域中能量的不均匀分布现象。菲涅耳根据波的叠加和干涉原理,提出了“子波相干叠加”的概念,从而对惠更斯原理作了物理性的补充。菲涅耳认为,从同一波面上各点发出的子波是相干波。在传播到空间某一点时,各子波进行相干叠加的结果,决定了该处的波振幅。这个发展了的惠更斯原理,叫做惠更斯-菲涅耳原理。

由该原理可将某时刻的波前上某点分割成无数面元,每一面元可视为一子波源。所有面元发出的子波在空间某点的叠加结果决定了该点的振动情况,也即决定了该点的振幅或光强度。因此,根据惠更斯-菲涅耳原理可进一步定量讨论衍射区的光强分布,从而为解决衍射问题奠定了理论基础。

三、菲涅耳衍射和夫琅和费衍射

依照光源、衍射孔(或障碍物)、屏幕三者的相互位置,可把衍射分成两种。障碍物距光源及接收屏(或两者之一)为有限远时的衍射称为菲涅耳衍射,如图9-13(a)所示。在这种衍射中,光源S和显示衍射图样的屏P,与衍射孔(或障碍物)R之间的距离是有限的。当把光源和屏都移到无限远处时,这种衍射叫做夫琅和费衍射。这时,光到达衍射孔(或障碍物)和到达屏幕时的波前都是平面,如图9-13(b)所示。实验室中,常把光源放在透镜 L_1 的焦点上,并把屏幕P放在透镜 L_2 的焦面上(见图9-13(c)),这样到达孔(或障碍物)的光和衍射光也满足夫琅和费衍射的条件。本书只讨论夫

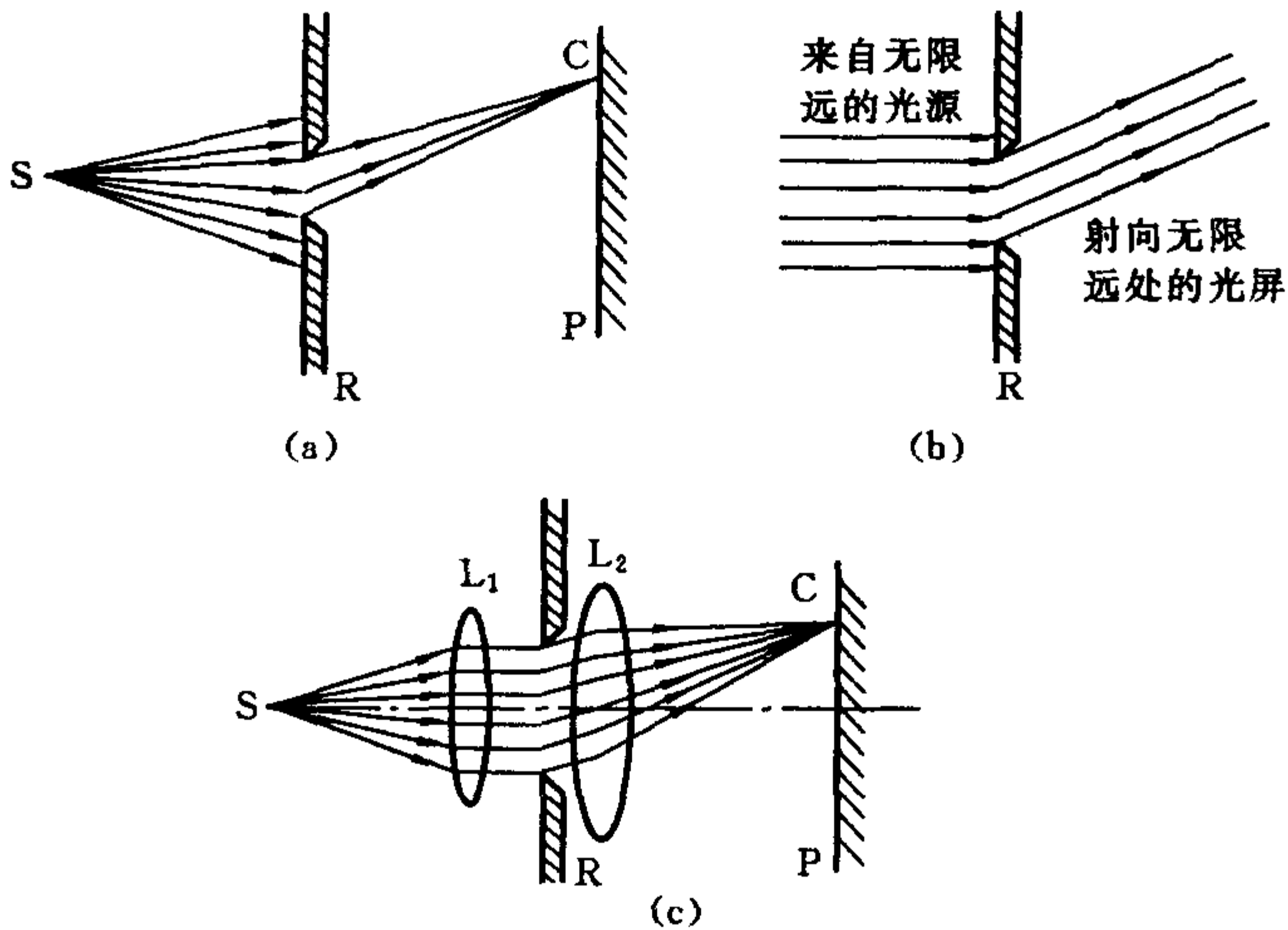


图 9-13 菲涅耳衍射

琅和费衍射,不仅因为这种衍射理论比较简单,而且夫琅和费衍射也是大多数实用场合需要考虑的情形。

单缝衍射实验装置如图 9-14(a)所示,当一束平行光垂直照射宽度可与光的波长比较的狭缝时,会绕过缝的边缘向阴影区衍射,衍射光线经透镜会聚到聚焦平面处的屏幕E上,形成衍射条纹。这种条纹叫单缝衍射条纹。

单缝衍射条纹是怎样分布的呢?本节将介绍一种简单、方便的近似判断方法:菲涅耳波带法。

图 9-14 是单缝衍射的示意图,AB 为单缝的截面,其宽度为 a 。按照惠更斯-菲涅耳原理,波面 AB 上的各点都是相干的子波源。先来考虑沿入射方向传播的各子波射线(图 9-14(b)中的光束 1),它们被透镜 L_2 会聚于焦点 P_0 。由于 AB 是同相面,而透镜又不会引起附加的光程差,所以它们到达点 P_0 时仍保持相同的相位而互相

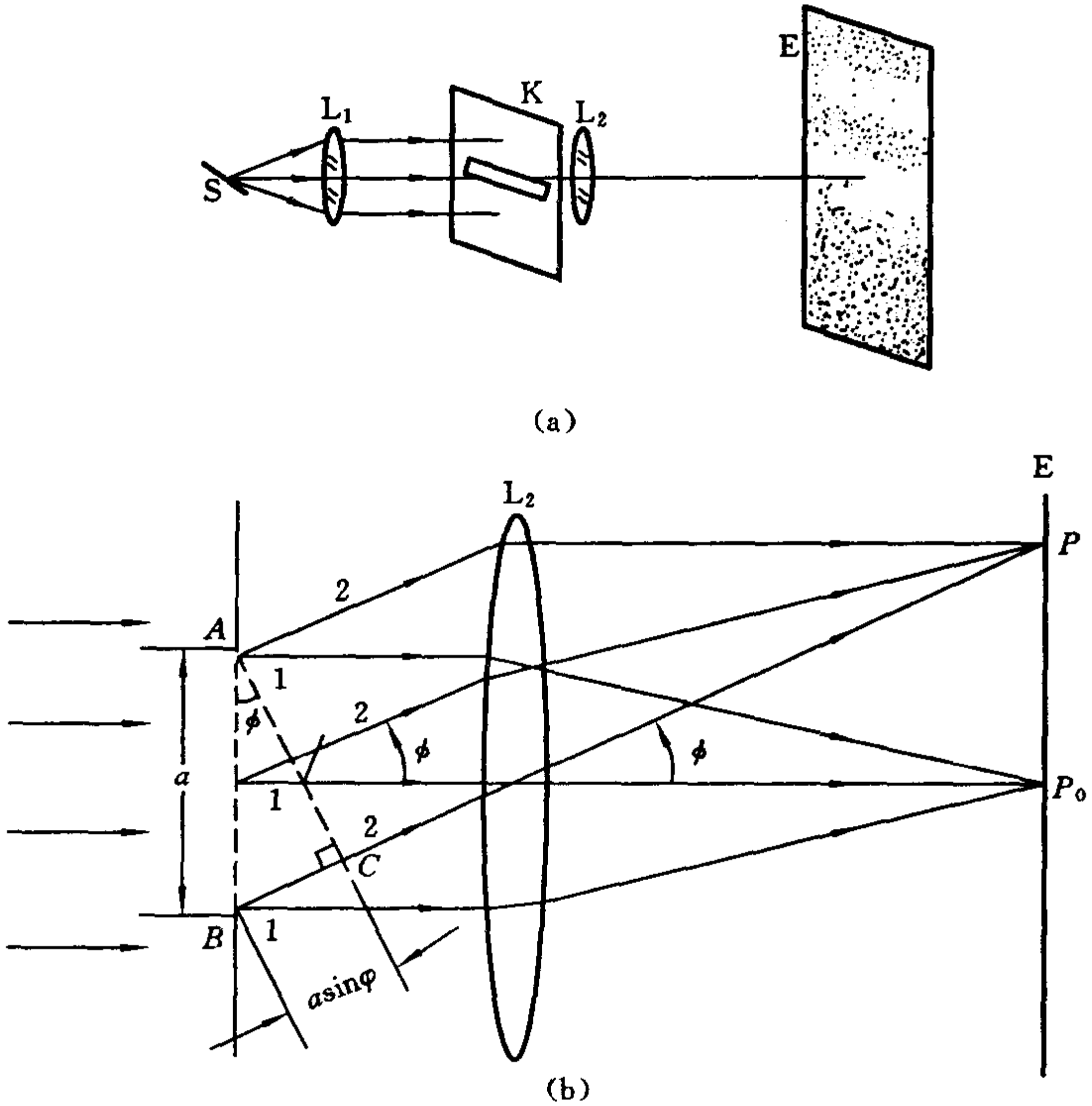


图 9-14 单缝衍射

(a) 实验装置示意图; (b) 光路图

加强。这样,在正对狭缝中心的点 P_0 处将是一条明纹的中心,这条明纹叫做中央明纹。

下面来讨论与入射方向成 ϕ 角的子波射线(图 9-14(b)中的光束 2), ϕ 叫做衍射角。平行光束 2 被透镜会聚于屏幕上的点 P ,但要注意光束 2 中各子波到达点 P 的光程并不相等,所以它们在点 P 的相位也不相同。显然,由垂直于各子波射线的面 AC 上各点到达

点 P 的光程都相等,换句话说,从面 AB 发出的各子波在点 P 的相位差,就对应于从面 AB 到面 AC 的光程。由图可见,点 A 发出的子波比点 B 发出的子波少走了 $\overline{BC} = a \sin \phi$ 的光程,这是沿 ϕ 角方向各子波的最大光程差。如何从上述分析获得各子波在点 P 处叠加的结果呢?为此,我们采用菲涅耳提出的波带法。

设 BC 恰好等于入射单色光束半波长的整数倍,即

$$a \sin \phi = \pm k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

这相当于把 BC 分成 k 等份。作彼此相距 $\lambda/2$ 的平行于 AC 的平面,这些平面把波面 AB 切割成了 k 个波带。图9-15表示在 $k=3$ 时,波面 AB 被分成 AA_1 、 A_1A_2 、 A_2B 三个面积相等的波带,可以近似地认为,所有波带发出的子波的强度都是相等的,且相邻两个波带上的对应点(如 AA_1 与 A_1A_2 的中点)所发出的子波,到达点 P 处的光程差均为 $\lambda/2$ 。这就是把这种波带叫做半波带的缘由。

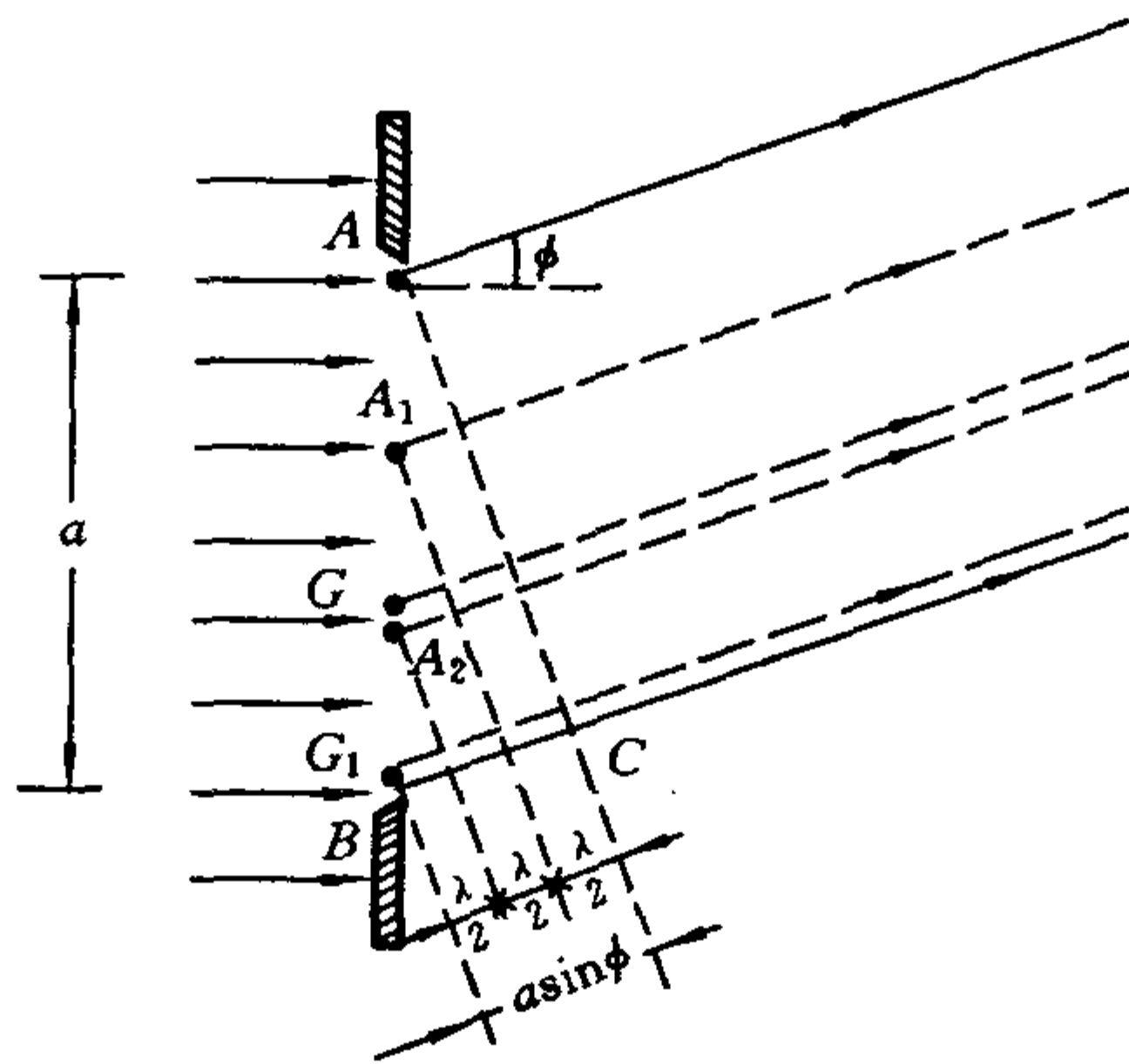


图9-15 菲涅耳半波带法

于是,相邻两半波带的各子波将两两成对地在点 P 处相互干

涉抵消,依此类推,偶数个半波带相互干涉的总效果,是使点 P 处呈现为干涉抵消。所以,对于某确定的衍射角 ϕ ,若 BC 恰好等于半波长的偶数倍,即单缝上波面 AB 恰好能分成偶数个半波带,则在屏上对应处将呈现为暗条纹的中心。若为半波长的奇数倍,则相邻两半波带(AA_1 与 A_1A_2)上各对应点的子波,相互干涉抵消,只剩下一个半波带(A_2B)上的子波到达点 P 处时没有被抵消,因此点 P 将是明条纹。

依次类推, $k=5$ 时,可分为五个半波带,其中四个相邻半波带两两干涉抵消,只剩下一个半波带的子波没有被抵消,因此也将出现明条纹。但是对于同一缝宽而言, $k=5$ 时每个半波带的面积要小于 $k=3$ 时每个半波带的面积,因此波带越多,即衍射角 ϕ 越大时,明条纹的亮度越小,而且都比中央明纹的亮度小得多。

上述诸结论可用数学方式表述如下。当衍射角 ϕ 适合

$$a \sin \phi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9-11)$$

时,点 P 处为暗条纹(中心),对应于 $k=1, 2, \dots$ 分别叫做第一级暗条纹、第二级暗条纹……式中正、负号表示条纹对称分布于中央明纹的两侧。显然,两侧第一级暗纹之间的距离,即为中央明纹的宽度。而当衍射角 ϕ 适合

$$a \sin \phi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9-12)$$

时,为明条纹(中心)。对应于 $k=1, 2, \dots$ 分别叫做第一级明条纹,第二级明条纹……

应当指出,上面两式均不包括 $k=0$ 的情形。讨论:为什么式(9-11)、(9-12)中不包含 $k=0$? 因为对式(9-11)来说, $k=0$ 对应着 $\phi=0$,但这却使中央明纹的中心不符合该式的含义。而对于式(9-12)来说, $k=0$ 虽对应于一个半波带形成的亮点,但仍处在中

央明纹的范围内,仅是中央明纹的一个组成部分,呈现不出是一个单独的明纹。中央明纹是对应于 $k=\pm 1$ 的两条暗纹之间的部分。另外应注意,上述两式与杨氏干涉条纹的条件,在形式上正好相反,切勿混淆。

由图9-15的几何关系可以容易地求出条纹宽度。通常衍射角很小,有 $\sin\phi\approx\phi$,于是条纹在屏上距中心 O 的距离 x 可写成

$$x = \phi f$$

由式(9-11),第一级暗纹距中心的距离为

$$x_1 = \phi f = \frac{\lambda}{a} f$$

所以中央明纹的宽度为

$$l_0 = 2x_1 = \frac{2\lambda}{a} f$$

其他的任意相邻暗纹(明纹)的距离为

$$l = \phi_{k+1} f - \phi_k f = \left[\frac{(k+1)\lambda}{a} - \frac{k\lambda}{a} \right] f = \frac{\lambda f}{a}$$

可见,中央明纹的宽度是其他明纹宽度的两倍。

例9-8 单缝夫琅和费衍射中,已知缝宽 $a=1.0\times 10^{-2}$ cm,透镜焦距 $f=50$ cm。用复色光 $\lambda_1=4\ 000\ \text{\AA}$, $\lambda_2=7\ 600\ \text{\AA}$ 垂直入射。试求两种光第一级衍射明条纹中心距离。

解 由单缝衍射公式及 x 与 ϕ 的关系可得

$$a\sin\phi = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}\lambda$$

$$x = f\tan\phi \approx f\sin\phi$$

所以

$$x = \frac{3}{2} \frac{f}{a} \lambda$$

$$x_2 - x_1 = \frac{3}{2} \frac{f}{a} (\lambda_2 - \lambda_1) = 0.27 \text{ (cm)}$$

第4节 迈克耳孙干涉仪 时间相干性

一、迈克耳孙干涉仪

1881年,迈克耳孙(Michelson)为了研究光速问题,精心设计了一种用分振幅法产生双光束干涉的装置,这就是迈克耳孙干涉仪。由于现代科技中有多种干涉仪器都是从迈克耳孙干涉仪衍生而来的,所以需要对其结构和原理有基本的了解,其结构如图9-16所示。图中: M_1 、 M_2 是两块平面反射镜,分别置于相互垂直的两平台顶部; G_1 和 G_2 是两块平板玻璃,在 G_1 朝着E的一面镀有一层薄薄的半透明膜,使照在 G_1 上的光,一半反射,一半透射; G_1 、 G_2 与 M_1 、 M_2 成 45° 角, M_2 是固定的,它的方位可由螺钉 V_2 调节; M_1 由螺旋测微计 V_1 控制,可在支承面T上作微小移动。

来自光源S的光,经过透镜L后,平行射向 G_1 ,一部分被 G_1 反射后,向 M_1 传播,经 M_1 反射后再穿过 G_1 向E处传播(图9-16中的光1);另一部分则透过 G_1 及 G_2 向 M_2 传播,经 M_2 反射后,再穿过 G_2 经 G_1 反射后也向E处传播(图9-16中的光2)。显然,到达E处的光1和光2是相干光。 G_2 的作用是使光1、2都能三次穿过厚薄相同的平玻璃,从而避免1、2间出现额外的光程差,因此 G_2 也叫做补偿玻璃。

考虑了补偿玻璃作用,在如图9-16所示的迈克耳孙干涉仪的原理图中, M'_2 是 M_2 经由 G_1 形成的虚像,所以从 M_2 上反射的光,可看成是从虚像 M'_2 处出来的。

这样,相干光1、2的光程差,主要由 G_1 到 M_1 和 M_2 的距离 d_1 和 d_2 的差决定。通常 M_1 与 M_2 并不严格垂直,那么, M'_2 与 M_1 也不

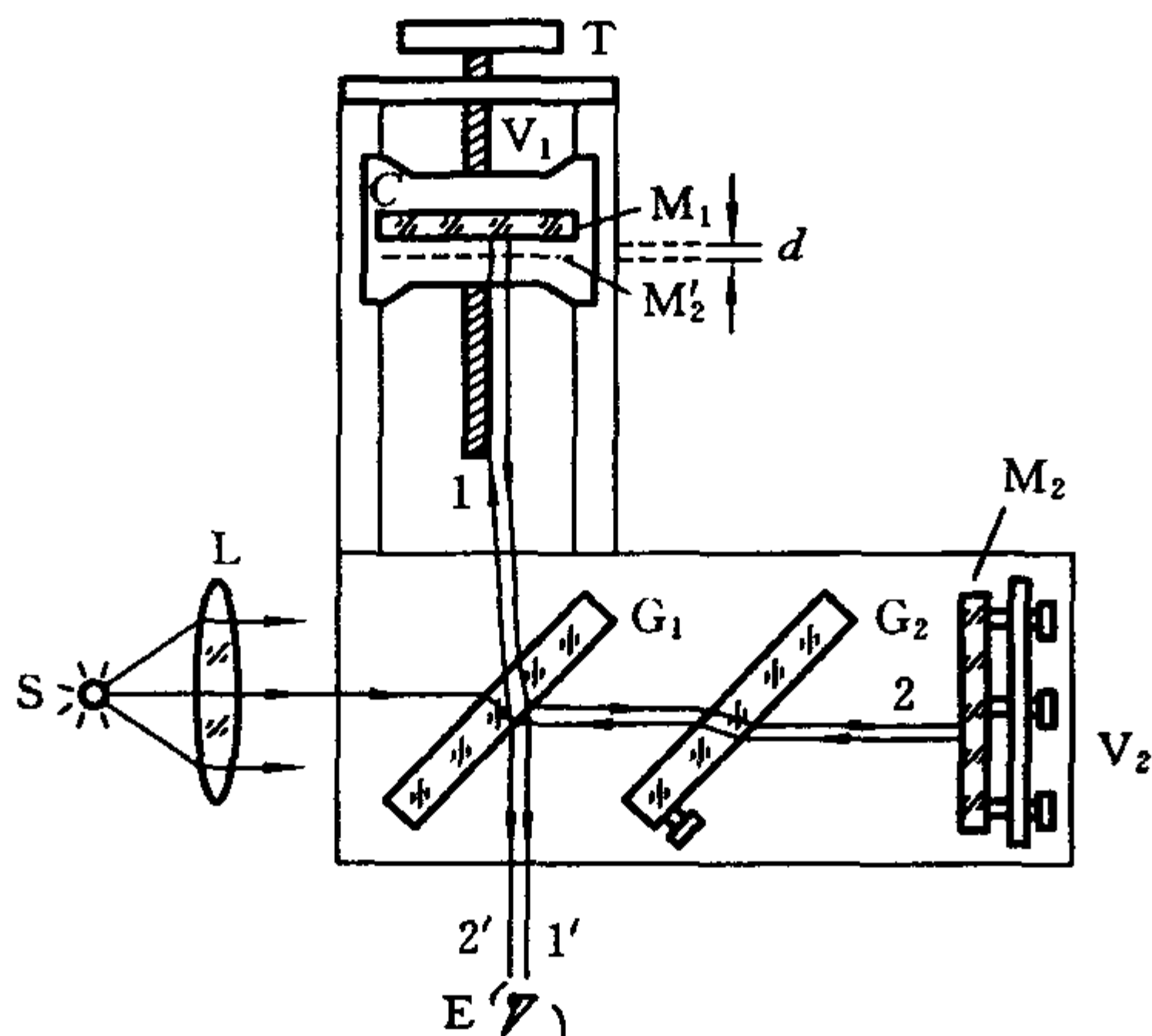


图 9-16 迈克耳孙干涉仪

严格平行,它们之间的空气薄层就形成一个劈尖。这时,观察到干涉条纹是等间距的等厚条纹。若入射单色光波长为 λ ,则每当 M_1 向前或向后移动 $\lambda/2$ 的距离时,就可看到干涉条纹平移过一条。所以测出视场中移过的条纹数目 Δn ,就可以算出 M_1 移动的距离

$$\Delta d = \Delta n \frac{\lambda}{2} \tag{9-13}$$

因此,若已知光源的波长,利用上式可以测定长度;若已知长度,则可用上式来测定光的波长。

例9-9 在迈克耳孙干涉仪的两臂中,分别插入 $l=10.0\text{ cm}$ 长的玻璃管,其中一个抽成真空,另一个则储有压强为 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 的空气,用以测定空气的折射率 n 。设所用光波波长为 546 nm ,实验时,向真空玻璃管中逐渐充入空气,直至压强达到 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 为止。在此过程中,观察到 107.2 条干涉条纹的移动,试求空气的折射率 n 。

解 设玻璃管充入空气前,两相干光之间的光程差为 δ_1 ,充入空气后两相干光的光程差为 δ_2 ,根据题意,有

$$\delta_1 - \delta_2 = 2(n - 1)l$$

因为干涉条纹每移动一条,应对于光程变化一个波长,所以

$$2(n - 1)l = 107.2\lambda$$

故空气的折射率为

$$n = 1 + \frac{107.2\lambda}{2l} = 1 + \frac{107.2 \times 546 \times 10^{-7}}{2 \times 10.0} = 1.00029$$

二、时间相干性

在日常生活中,能从油膜、肥皂膜等膜上看到彩色干涉图样,但为什么在玻璃窗上观察不到这种现象呢?在迈克耳孙干涉实验中,也能发现,如果 M_1 和 M_2' 之间距离超过一定范围时,也观察不到干涉条纹,为什么呢?

我们知道,实际光源由原子发光,而每个原子每次发射的都是一列有限长度的光波列。光的干涉归根到底是使同一原子的光波列分成两个部分,经过不同光路后再相遇叠加,叠加的结果将由两个分光束的光程差决定。例如,在迈克耳孙实验中,光源先后发射

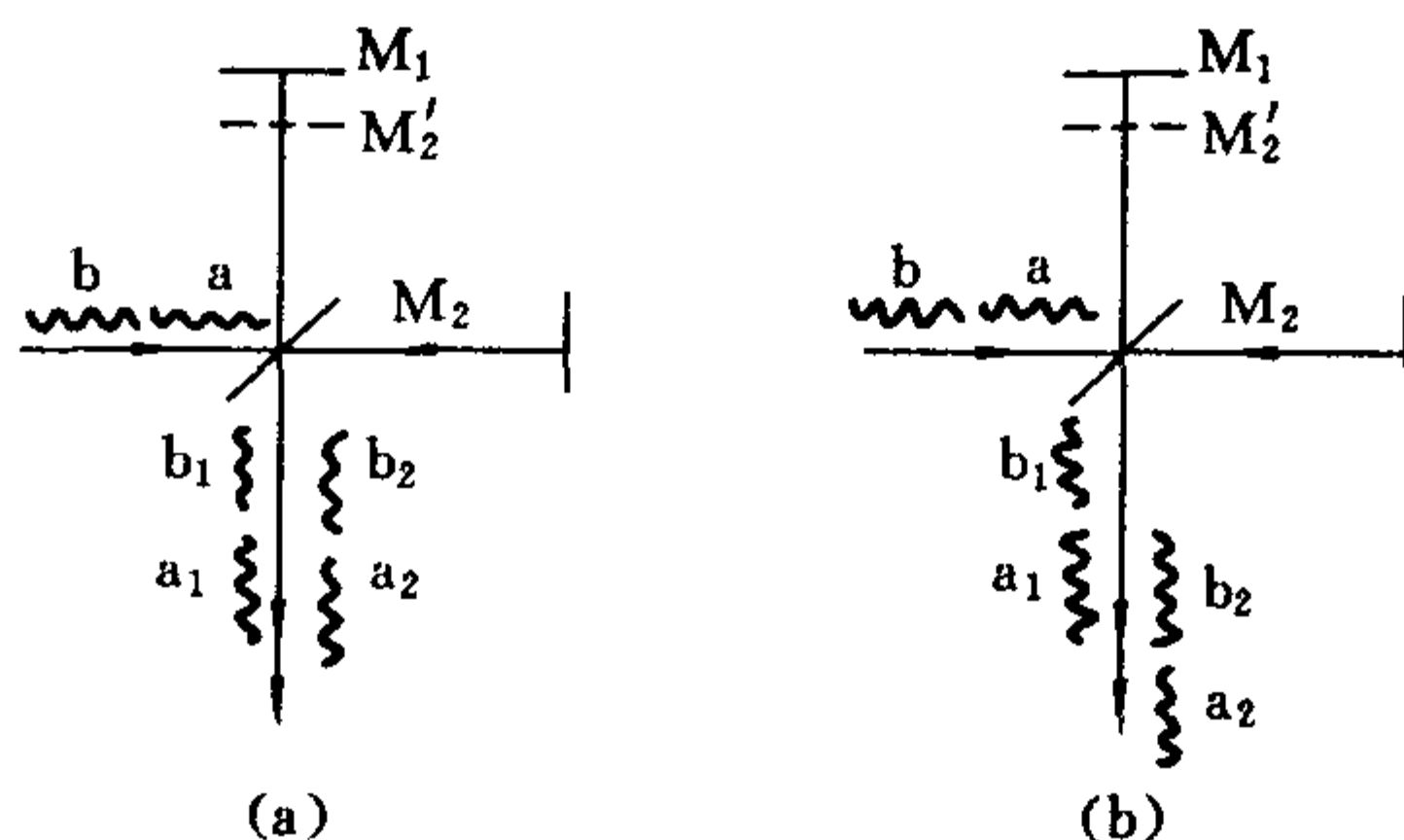


图 9-17 迈克耳孙实验光路图

两个波列 a 和 b ,它们被分割成 a_1 、 a_2 和 b_1 、 b_2 。如果两光路光程差不太大,如图9-17(a)所示,那么分波列 a_1 与 a_2 相遇, b_1 与 b_2 相遇,它们分别属于同一原子光波列的两部分,叠加后将产生干涉现象;如果两光路光程差太大,如图9-17(b)所示,这时属于同一原子光波列的两分波列将不再相遇,而相遇的是属于不同原子光波列的两个分波列(例如 a_1 和 b_2),它们叠加后就不会产生干涉现象。

显然,要产生干涉现象,两分光束间的最大光程差不能超过原子光波列本身的长度,通常称波列长度 L 为相干长度。而与相干长度所对应的时间 Δt 称为相干时间(即原子发光的持续时间)。 L 与 Δt 之间的关系为

$$L = c\Delta t \quad \text{或} \quad \Delta t = L/c$$

从时间上讲也就是说,两分波列到达同一点的时间间隔必须小于 Δt ,才能相遇产生干涉现象。这也就是在研究劈尖、牛顿环等干涉时,取的是上面一块玻璃的下表面反射的光波和下面一块玻璃的上表面反射的光波作为相干光波的原因。 Δt 越长,光的相干性就越好,所以把这类相干性称为光波的时间相干性。

第5节 衍射光栅

一、衍射光栅

由平行、等宽而又等间隔的多狭缝构成的衍射屏称为衍射光栅。广义地说,具有周期性空间结构或光学性能(如反射率、折射率)的衍射屏,只要能起等宽等间隔地分割波阵面的作用,这样的屏就是衍射光栅。例如,在一玻璃板上刻画大量等宽且等间距的平

行刻线,刻痕处入射光因各方向散射而不易透过,相邻两刻痕间的光滑部分则可以透光(相当于狭缝),这样就构成一个平面透射光栅;又如晶体内部的原子(或离子)具有很规则的空间排列结构,则可构成天然的三维光栅。常用到的光栅有两种:一是用于透射光衍射的透射光栅;另一种是用于反射光衍射的反射光栅。

如图 9-18 所示,设光栅每条缝的宽度为 a ,缝间不透明部分的宽度为 b ,则 $a+b$ 叫光栅常数,它表示了光栅的空间周期性。光栅的总缝数用 N 表示。

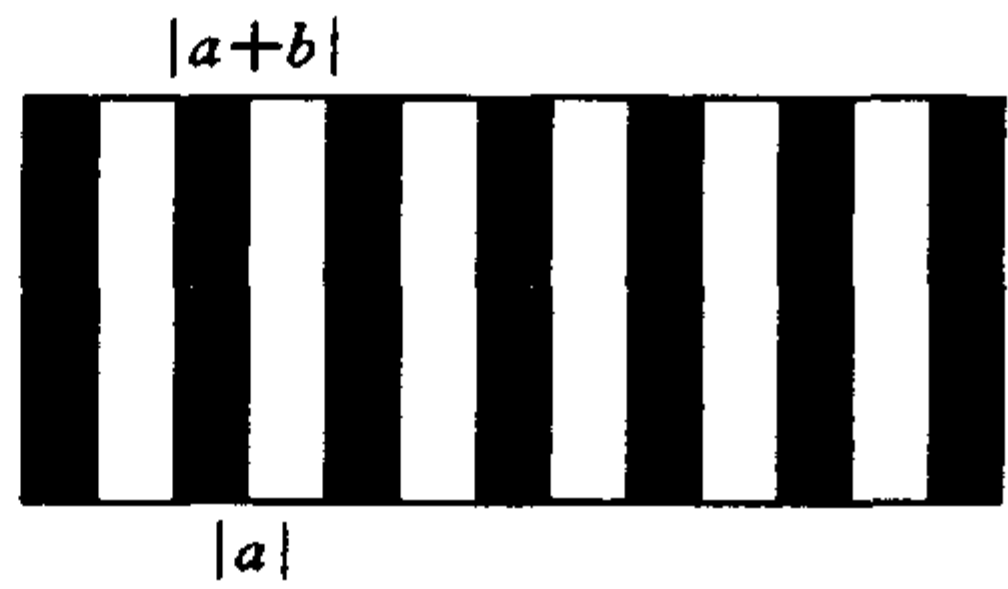


图 9-18 光栅衍射光路图

衍射光栅实验装置如图 9-19 所示。 S 为光源,它位于透镜 L_1 的焦面上,屏幕放在物镜 L_2 的焦面上。设平面单色光波垂直入射到光栅表面上。光线经过透镜 L_2 后,将在屏幕上呈现各级衍射条纹。

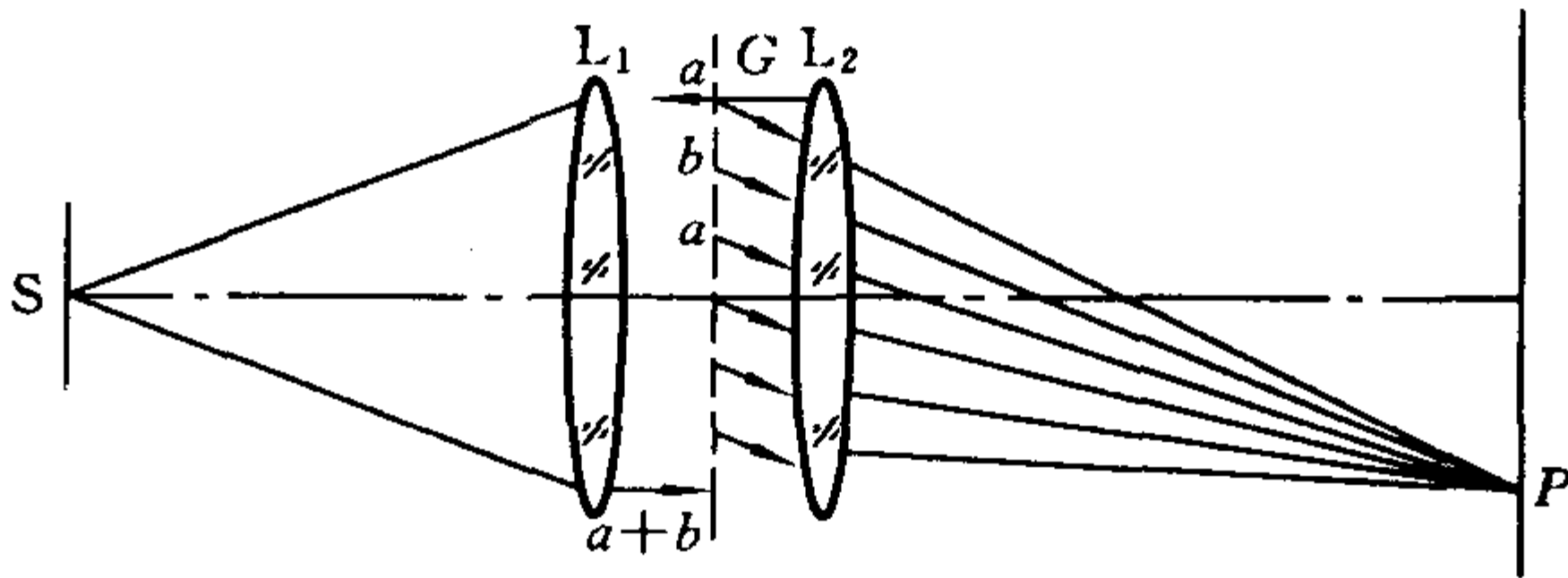


图 9-19 衍射光栅实验装置

对光栅衍射的分析如下。对光栅的每一狭缝来说,相当于缝宽为 a 的单缝衍射;若把每一狭缝看做一个整体,总缝数为 N 的衍射光栅又相当于 N 光束干涉。因而,光栅的衍射条纹应看做单缝衍射与多缝干涉的结合效果。

理论计算和实验结果均表明:在透镜 L_2 的焦平面上任一点的

光强度,等于由 N 个相干光在该点所产生的干涉光强度与宽度为 a 的单狭缝的夫琅和费衍射在该点所产生的光强度的乘积。

1. N 光束干涉的明、暗条纹的条件

(1) 主极大。

设屏幕上任一点 P 的衍射角为 θ , 光栅常数为 $a+b$, 光栅上相邻两缝的光程差为 $\delta = (a+b)\sin\theta$, 若这一光程差等于波长的整数倍, 即满足

$$\delta = (a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9-14)$$

相邻两缝的两相干光束应相互加强。因为组成光栅的狭缝是平行、等宽、等间隔的, 所以光栅上任两缝的光束在 P 点也是相互加强的, 故 P 点应出现明条纹, 是主极大的位置。以四条缝为例, 若 $\delta = (a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$, 则其各光振幅的叠加为同相相加, 合振幅最大, 如图 9-20 所示, $A = 4A_1$, 总光强 $I = 16I_1$ 。



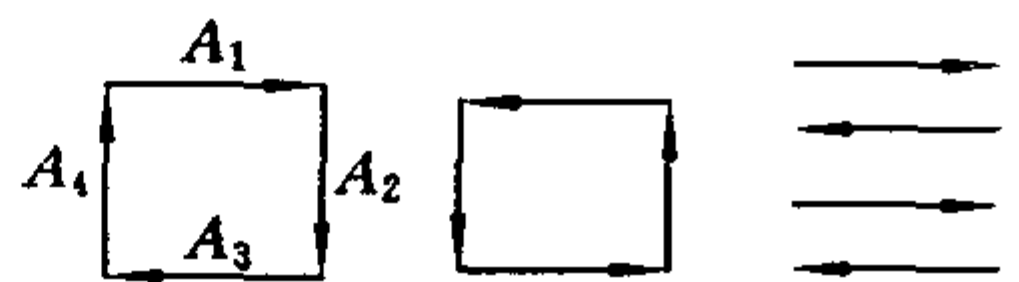
图 9-20 主极大

由于光栅衍射中能看到的明条纹均为主极大, 决定主极大位置的式(9-14)也就称为光栅方程。

由于光栅的总缝数 N 均很大, 所以光栅衍射中的主极大比杨氏双缝的明条纹亮得多。

(2) 暗条纹。

若各相干光束在屏幕上某点 P 的总相差为 2π 或 2π 的整数倍, 这 N 个振幅矢量将构成一个封闭的正 N 边形, 因而合振幅为零, 该点的光强为零, 应出现暗条纹。以四条缝



的干涉光束为例, 其叠加为暗条纹的可能性如图 9-21 所示。在两条相邻主极大条纹间有 $4-1=3$ 条暗条纹。据此分析, N 光束干涉暗条纹的条件用光程差可表示为

$$N(a+b)\sin\theta = \pm k''\lambda$$

图 9-21 四条缝的干涉光束

$$k'' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots$$

其中： $k'' \neq N, 2N, \dots$ ，这是因为若 $K'' = N, 2N, \dots$ 该点应出现主极大。此式表明，在相邻两个主极大之间有 $N-1$ 个极小（暗条纹）。

(3) 次极大。

当各相干光束的相位关系既不满足主极大的条件，也不满足暗条纹的条件时，则其合振幅不为零，称为次极大。在相邻两个主极大之间有 $N-1$ 个极小（暗条纹），就应有 $N-2$ 个次极大，靠近主极大的第一次极大的光强度只约为主极大的 $1/25$ 。

当光栅狭缝数 N 很大时，在主极大明条纹之间实际上形成一片黑暗的背景。由于在相邻两主极大之间充满了大量的暗条纹，这就使主极大能占据的宽度很小，因而主极大很细。光栅衍射中的主极大分得很开，又亮又细。图 9-22 给出了多光束干涉光强分布。

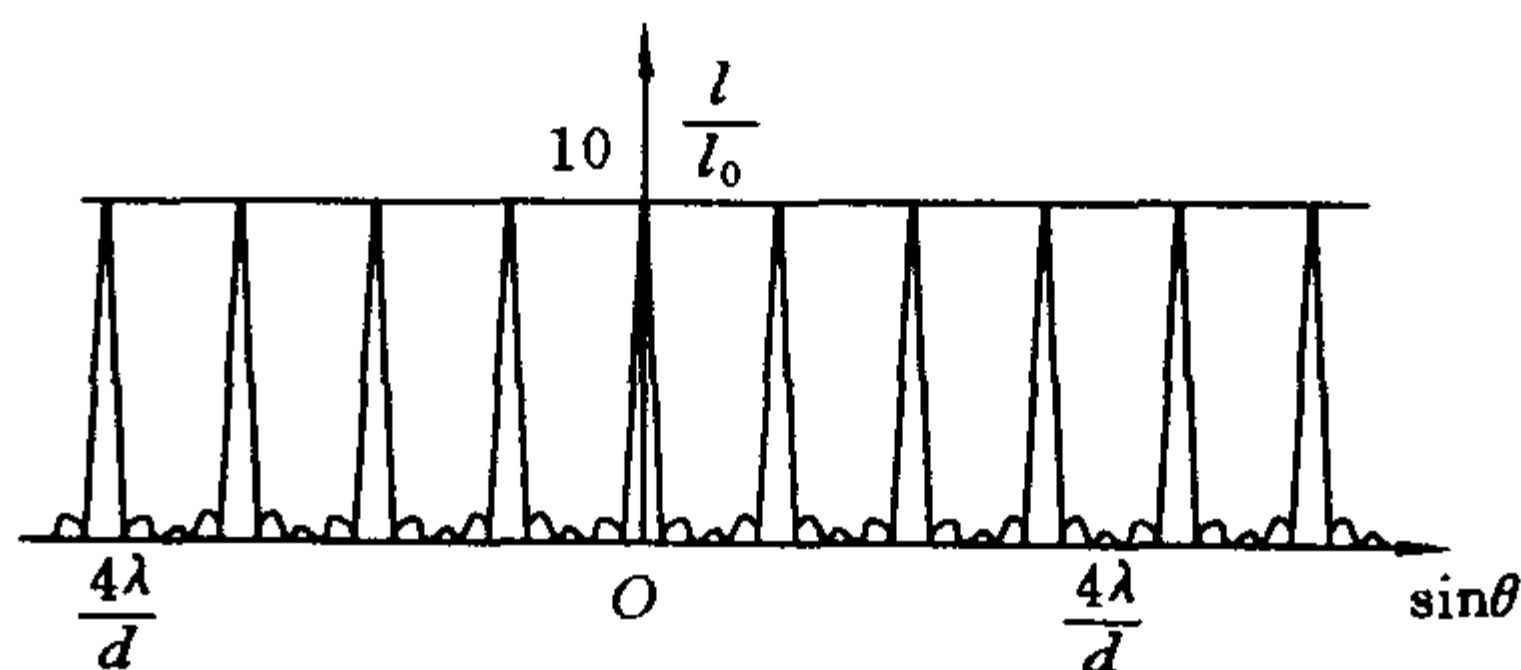


图 9-22 多光束干涉光强分布

2. 单缝衍射的调制、缺级现象

因对光栅的每一狭缝来说，相当于缝宽为 a 的单缝衍射，故光栅衍射条纹还被单缝衍射的效果所调制。特别是，若满足光栅方程的 P 点，同时又满足单缝衍射暗条纹的条件，则 P 点应出现暗条纹。将光栅衍射中，因为多光束干涉本应出现明条纹的位置，但由于同时又为单缝衍射暗纹所在，因此该点光强实际为零的现象称为缺级现象。

缺级条纹的级数 k 满足

$$k = \frac{a+b}{a}k'$$

式中: k 为出现缺级现象的主极大的级次; k' 为单缝衍射极小的级次。若 $(a+b)/a=2$, 则所有的偶级主极大缺级。在单缝衍射的中央极大宽度内中有 3 条主极大, 为 $k=0, \pm 1$ 级。

3. 光栅衍射的光强分布图像

光栅衍射的总光强等于多光束干涉光强与单缝衍射光强的乘积, 即多光束干涉形成的主极大要受单缝衍射光强的影响, 或者说各主极大要受单缝衍射的调制。多缝干涉和单缝衍射共同决定光栅衍射的总光强分布, 如图 9-23 所示。

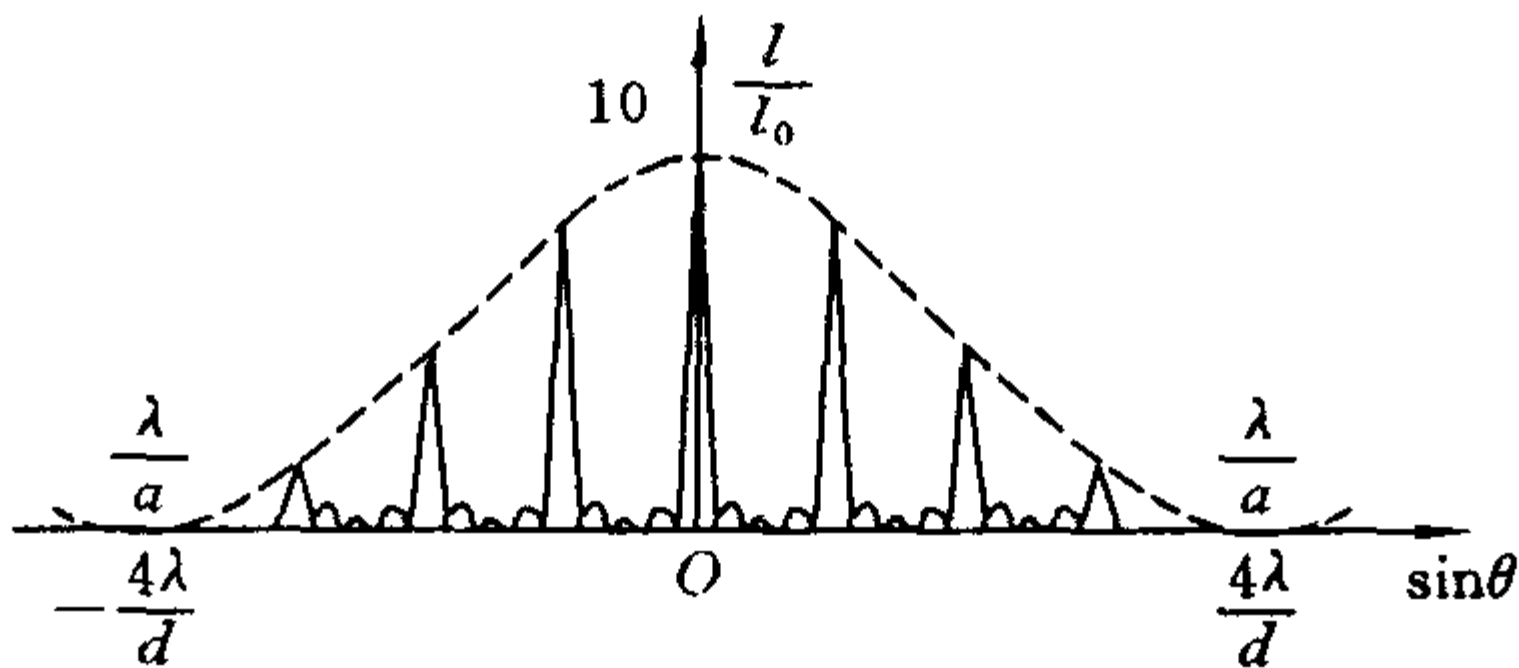


图 9-23 光栅衍射光强分布曲线

试分析为什么通常用衍射光栅可以比较准确地测量入射光波的波长。

4. 光栅衍射光谱

复色光(例如白光)入射到光栅上, 由光栅方程可知, 不同波长的同一级主极大, 除零级外均不重合, 并且波长的次序自零级开始向左右两侧, 由短波向长波散开, 形成由紫到红的彩色光谱。随光谱线的级数而增加, 高级数的光谱线彼此将有部分重叠。

例 9-10 使单色平行光垂直入射到一双缝上(可以把它看成

只有两条缝的光栅),其夫琅和费衍射包络的中央极大宽度内恰好有13条干涉明条纹,试问,两缝中心的间隔 $a+b$ 与缝宽 a 应有何关系?

解法一 双缝衍射的中央极大应是单缝衍射的中央极大,此中央极大的宽度为

$$\Delta x_1 = 2f \tan \theta_1 \approx 2f\lambda/a$$

式中, f 为双缝后面所用透镜的焦距。此宽度内的主极大明条纹是两缝衍射光的干涉结果,其明纹中心在屏上的位置 x 满足光栅方程

$$(a+b)\sin\theta = k\lambda$$

由近似关系 $\sin\theta \approx \tan\theta = x/f$,可求得相邻两主极大明条纹中心的间距为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = f\lambda/(a+b)$$

由于在 Δx_1 内共有13条明条纹,则有

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x} = 13 + 1 = 14$$

即

$$a+b = 7a$$

解法二 单缝衍射的中央极大中共有13条干涉主极大明纹,除中央零级主极大明纹,最高级次的明纹为 $12/2=6$,即第一次发生在第7级明纹缺级。由缺级公式 $k=k'(a+b)/a$ 和 $k'=\pm 1$,所以

$$a+b = 7a$$

例9-11 在光栅光谱仪中常发生邻级光谱重叠的现象,在实际测量时应避免发生这种情况。一束平行光垂直入射到某个光栅上,该光束有两种波长的光, $\lambda_1=4400\text{Å}$, $\lambda_2=6600\text{Å}$ 。实验发现,两种波长的谱线(不计中央明纹)第二次重合于衍射角 $\theta=60^\circ$ 的方向上,试求此光栅常数 $a+b$ 。

解 对于两种波长的光,由光栅方程有

$$(a + b)\sin\theta_1 = k_1\lambda_1, \quad (a + b)\sin\theta_2 = k_2\lambda_2$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_1\lambda_1}{k_2\lambda_2}$$

当两谱线重合时有 $\theta_1 = \theta_2$, 所以

$$k_1/k_2 = 3/2 = 6/4 = 9/6 = \dots$$

当第二次重合时

$$k_1/k_2 = 6/4, \quad k_1 = 6, \quad k_2 = 4$$

由光栅方程可知 $(a + b)\sin(\pi/3) = 6\lambda_1$, 所以

$$a + b = 3.05 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

二、X 射线在晶体上的衍射

晶体的特点是外部具有规则的几何形状, 内部原子具有周期性的排列, 构成晶体的晶粒间的距离 d 约为 1 \AA , 因此晶体可看做光栅常数很小(数量级为 1 \AA)的天然空间衍射光栅。X 射线是波长为 $0.1 \sim 100 \text{ \AA}$ 的电磁波。晶体内部的晶粒间隔 $d \approx \lambda$, 是理想的

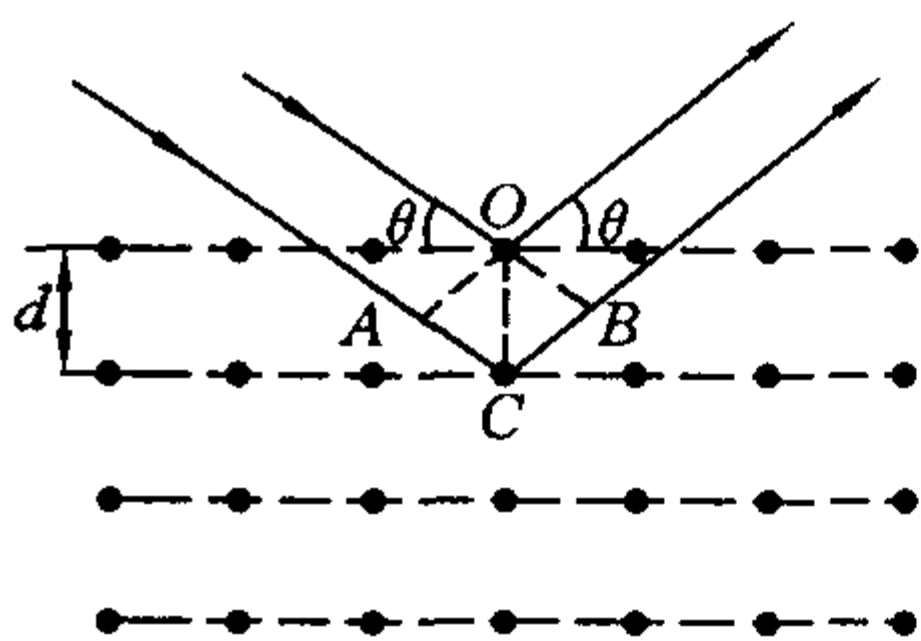


图 9-24 晶体

X 射线的衍射光栅。X 射线照射晶体时, 晶体中每一个微粒都是发射子波的衍射中心, 向各个方向发射子波, 这些子波相干叠加, 就形成衍射图样。晶体由一系列平行平面(晶面)组成。各晶面间间距为 d , θ 为入射 X 射线的掠射角。如图 9-24 所示, 相邻两晶面反射

线的光程差

$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d\sin\theta$$

要使各晶面的反射线叠加起来产生主极大, 光程差 δ 必须是波长 λ 的整数倍, 即主极大条件为

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots)$$

这就是X光晶体衍射的布喇格公式。

利用X光衍射可对晶体的结构进行分析和判断,在工程技术上有广泛的应用,已发展成为专门的学科和技术。

第9节 光的偏振

一、自然光和偏振光

马吕斯于1809年就在实验上发现了光的偏振现象。电磁理论指出,在自由空间传播的光波是横波。光的横波性只表明电矢量与光的传播方向垂直,在与传播方向垂直的平面内电矢量可能有各种振动状态,称之为光的偏振态或偏振结构。最常见的光的偏振态大体可分为五种,即自然光、线偏振光、部分偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光。本节主要介绍前三种。

1. 自然光

光是由光源中大量原子或分子发出的,在普通光源中各原子或分子发出的光波不仅初相位彼此无关联,它们的振动方向也是杂乱无章的,光矢量 E 的振动可能取所有可能的方向,即没有一个方向比其他方向更占优势。具有这样特征的光,称为自然光。所以在与传播方向垂直的平面内,对于任一垂直坐标,自然光中的光矢量 E 的振幅在两坐标方向上的分量都是相等的,如图9-25(a)所示。

2. 线偏振光

光矢量 E 只沿一个固定的方向振动时,这种光称为线偏振光,如图9-25(b)所示。光矢量的方向和光的传播方向构成的平面称为振动面。线偏振光的振动面是固定不动的。

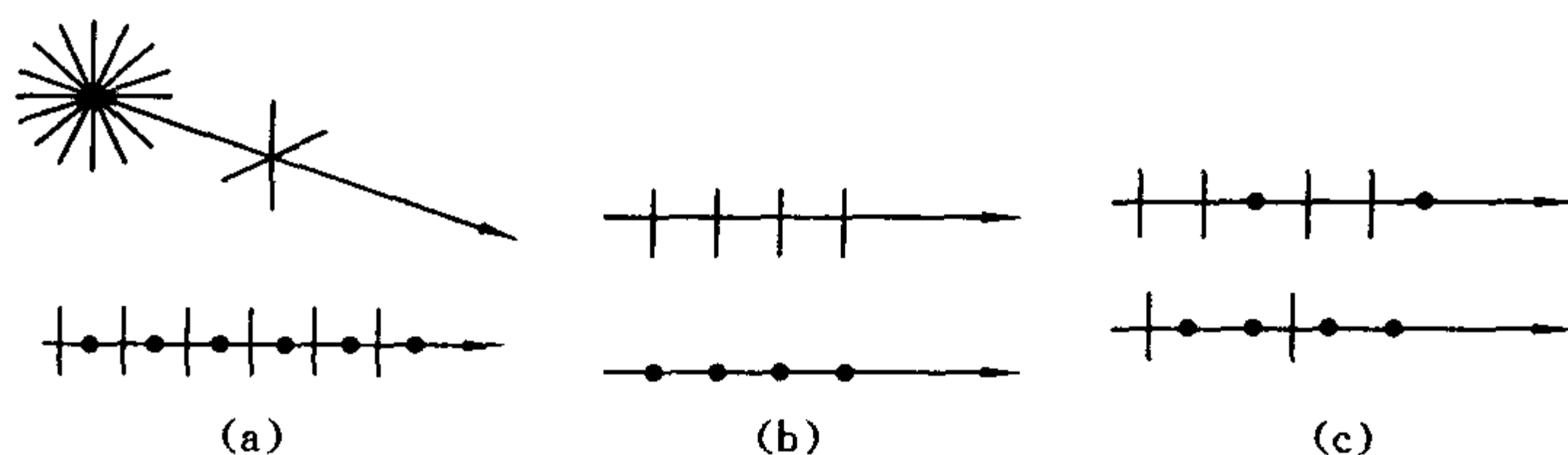


图 9-25 光的偏振态

(a) 自然光; (b) 线偏振光; (c) 部分偏振光

3. 部分偏振光

部分偏振光的光矢量 E 在各方向都有, 但在某振动方向上占有优势, 如图 9-25(c) 所示。

二、起偏和检偏

1. 偏振片

在透明基片上镀一层硫酸碘奎宁晶粒, 由于这种晶粒对某一方向振动的光矢量有强烈的吸收作用, 而对相垂直的方向的光矢量吸收很少, 这样就得到了偏振片。偏振片基本上只允许沿某一特定方向振动的偏振光通过。这一方向称为偏振片的偏振化方向, 图 9-26 中偏振片的偏振化方向可用线表示出来。

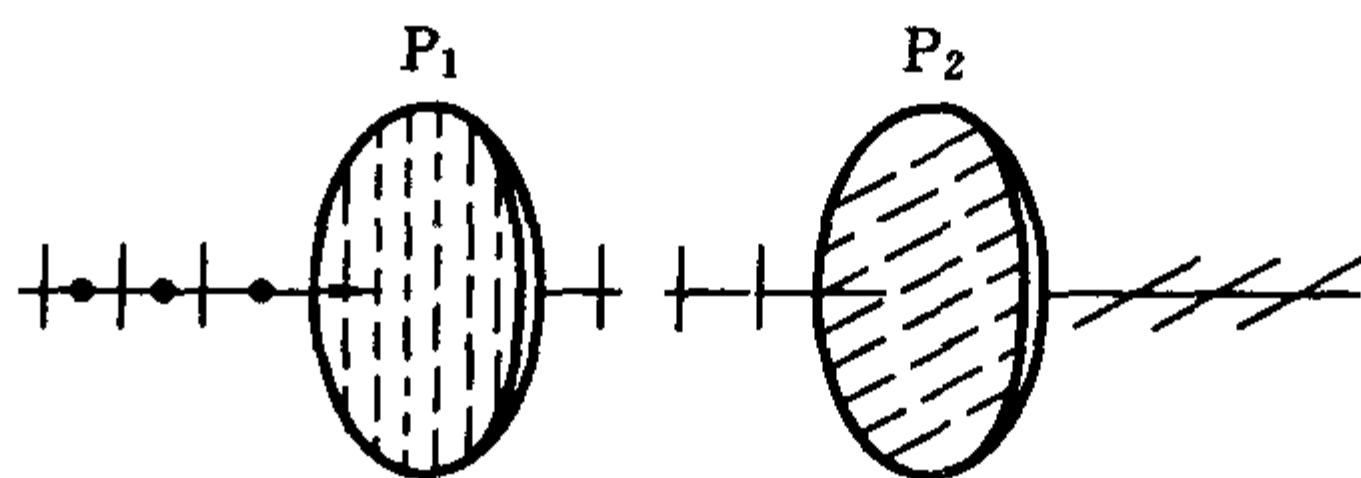


图 9-26 偏振片

2. 起偏和检偏

(1) 当自然光垂直入射到偏振片时, 透过的光成为线偏振光,

这个过程叫起偏,此偏振片称为起偏器。由于自然光光矢量对称均匀,起偏器旋转,出射的线偏振光振动面也旋转;出射光强不随起偏器旋转而变化,但它只有入射光强的一半。自然光通过起偏器时,起偏器旋转一周,光强始终为入射光强的一半,无光的强弱变化。

(2) 线偏振光入射到偏振片时,让偏振片缓慢旋转,其透过的光强随它的转动而变化。当偏振片的偏振化方向平行于入射光的光矢量方向时,光强最强。当它的偏振化方向垂直于入射光的光矢量方向时,光强为零,称为消光。将偏振片旋转一周时,透射光强出现两次最强,两次消光。这是一种识别线偏振光的方法,叫检偏,此偏振片称为检偏器(见图9-27)。

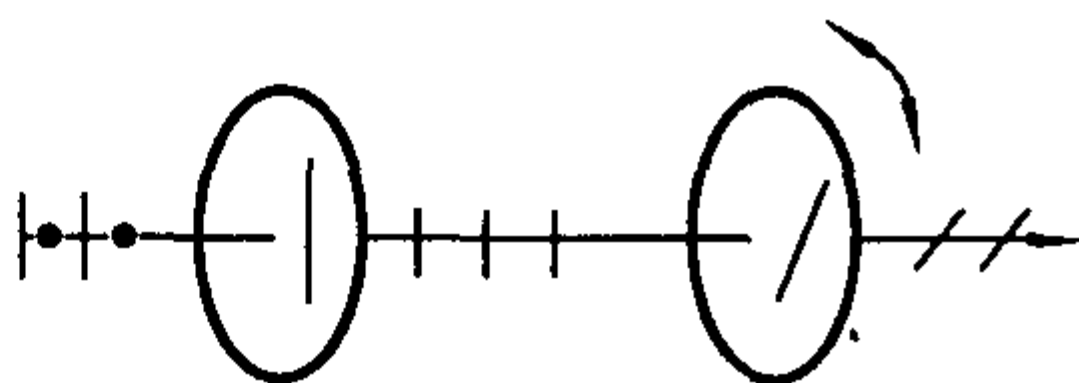


图9-27 检偏器

(3) 当部分偏振光通过检偏器时,检偏器旋转一周出现两次最强、两次最弱的光,但不消光。

3. 马吕斯定律

如图9-28所示, P_1 表示入射线偏振光的光振动方向, P_2 表示检偏振器的偏振化方向,两者的夹角为 α , A_0 为入射线偏振光的振幅。

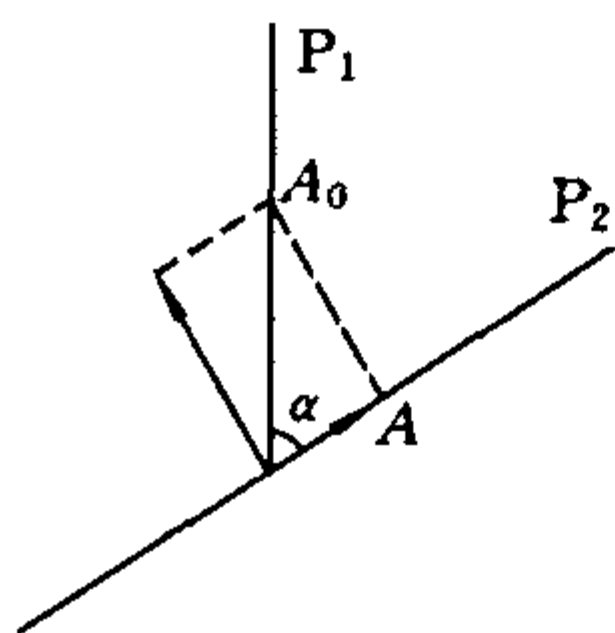


图9-28 马吕斯定律

由于检偏振器只让入射线偏振光沿平行于检偏振器的偏振化方向的分量通过,从检偏振器透射出的光振动的振幅 A 为

$$A = A_0 \cos \alpha$$

由于透射光强 I 与入射光强 I_0 之比等于各自振幅的平方之比,即

$$I/I_0 = A^2/A_0^2$$

于是得

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

上式为马吕斯定律。它给出了线偏振光通过检偏器后透射光强随 α 角变化的规律。当 α 等于 90° 或 270° 时, $I=0$, 是两个消光位置。当 α 等于零或 180° 时, $I=I_0$, 光强最大。 α 为其他值时, I 介于零和 I_0 之间。

例9-12 如图9-29所示, 在两块正交偏振片(即偏振化方向相互垂直) P_1 、 P_3 之间插入另一块偏振片 P_2 , 光强为 I_0 的自然光垂直入射于偏振片 P_1 , 求转动 P_2 时, 透过 P_3 的光强 I_3 与转角的关系。

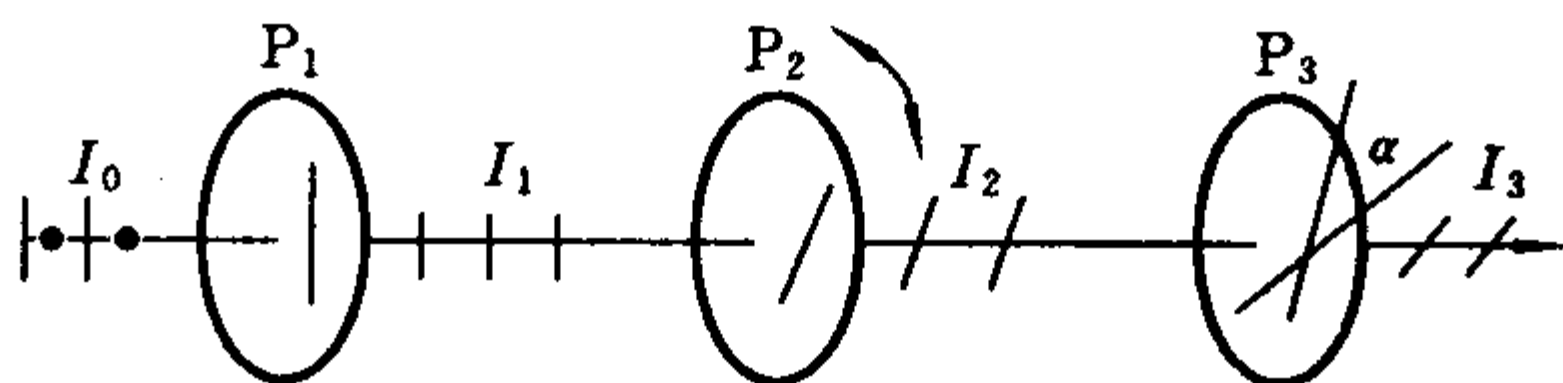


图 9-29 光强与转角的关系

解法一 透过各偏振片的光振幅矢量如图 9-29 所示, 其中 α 为 P_1 和 P_2 的偏振化方向间的夹角。由于各偏振片只允许和自己的偏振化方向相同的偏振光透过, 所以透过各偏振片的光振幅的关系为

$$A_2 = A_1 \cos \alpha, A_3 = A_2 \cos(\pi/2 - \alpha)$$

所以
$$A_3 = A_1 \cos \alpha \cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{2} A_1 \sin 2\alpha$$

于是透过 P_3 的光强

$$I_3 = \frac{1}{4} I_1 \sin^2 2\alpha$$

又由于 $I_1 = I_0/2$, 所以得

$$I_3 = \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\alpha$$

解法二 自然光通过起偏器 P_1 后光强为

$$I_1 = I_0/2$$

通过 P_1 后的线偏振光再入射到检偏器 P_2 上, 根据马吕斯定律, 出射光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

再根据马吕斯定律, 可求得 P_3 出射后的光强为

$$\begin{aligned} I_3 &= I_2 \cos^2(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha \cos^2(\pi/2 - \alpha) \\ &= \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

三、反射和折射时光的偏振

自然光在两种各向同性媒质分界面上反射或折射时, 由于在分界面处要满足边界连续条件, 反射光和折射光的偏振状态要发生变化。一般情况下, 反射光和折射光不再是自然光, 而是部分偏振光。在反射光中垂直于入射面的光振动多于平行于入射面的光振动, 而在折射光中平行于入射面的光振动多于垂直于入射面的光振动, 如图 9-30(a) 所示。

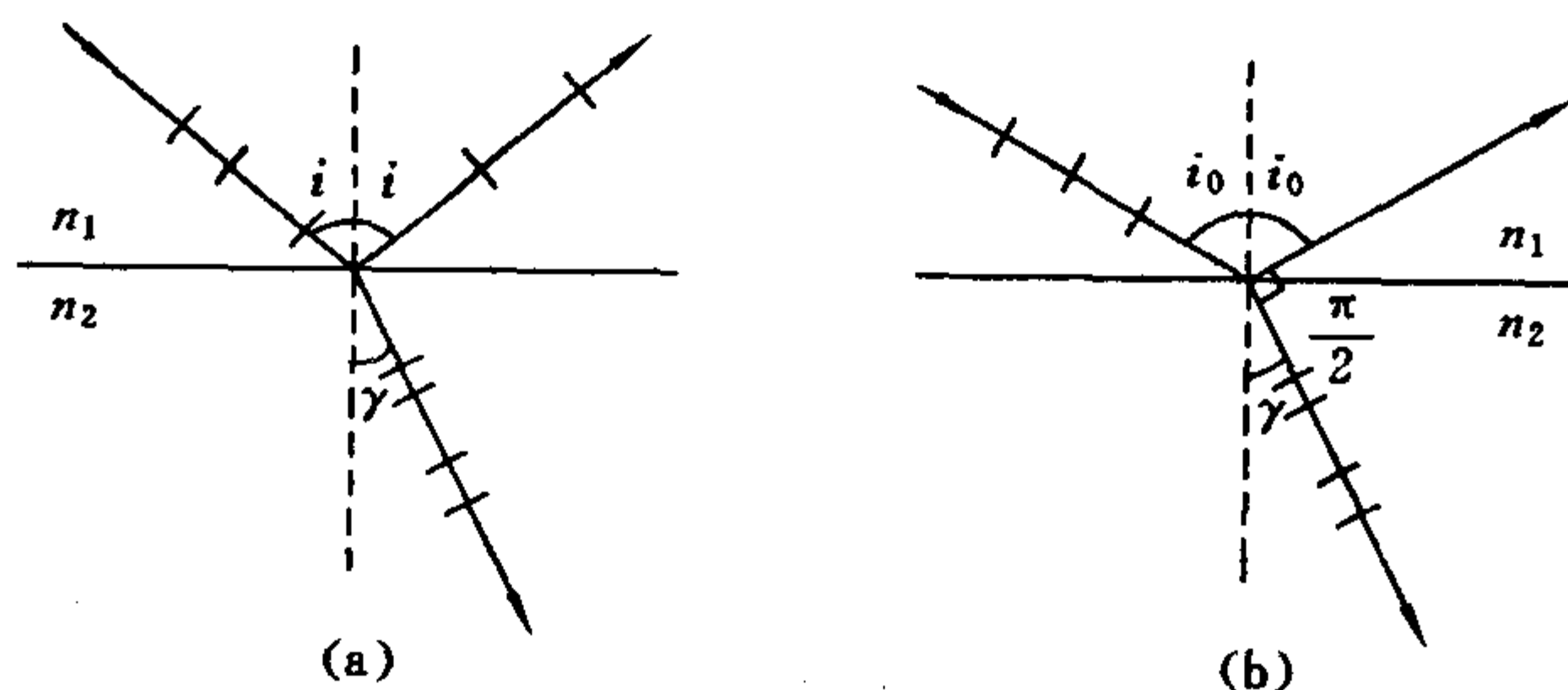


图 9-30 布儒斯特角

理论和实验(1812年布儒斯特由实验发现)都证明, 反射光

的偏振化程度和入射角有关。当入射角等于某一特定值 i_0 时,反射光是光振动垂直于入射面的线偏振光,如图9-30(b)所示。这个特定的人射角 i_0 称为起偏振角,或称为布儒斯特角。

当光线从起偏振角入射时,反射光和折射光的传播方向相互垂直,即 $i_0 + \gamma = 90^\circ$,根据折射定律,有 $n_1 \sin i_0 = n_2 \sin \gamma$, $\sin \gamma = \cos i_0$,即

$$\tan i_0 = n_2 / n_1 = n_{21}$$

n_{21} 是媒质2对媒质1的相对折射率,上式称为布儒斯特定律。

根据麦克斯韦电磁场方程及不同介质分界面的衔接条件,可以从理论上严格证明这一定律。以布儒斯特角入射,单块玻璃只能产生部分偏振的透射光。若光经过由多层玻璃块堆砌而成的玻璃片堆,由于经过多层玻璃的多次反射与折射,透射光的垂直分量逐渐减小,最后接近于完全线偏振光。所以,可利用玻璃片堆做偏振片(起偏器或检偏器)。

思 考 题

9-1 从普通光源获得两束相干光的一般方法是什么?在光的干涉中决定相遇点产生明纹或暗纹的因素是什么?

9-2 在杨氏双缝实验中,当作如下调节时,屏幕上的干涉条纹将如何变化?(说明理由)

(1) 使两缝之间的距离逐渐减小;

(2) 保持双缝的间距不变,使双缝与屏幕的距离逐渐减小;

(3) 把双缝中的一条狭缝遮住,并在两缝的垂直平分线上放置一块平面反射镜。

9-3 薄膜干涉的光程差公式 $\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$ 中, $\frac{\lambda}{2}$

代表什么意义？它是否一定存在？举例说明。

9-4 在白光的照射下，我们通常可看到呈彩色花纹的肥皂膜和肥皂泡，并且当发现有黑色斑纹出现时，就预示着泡膜即将破裂，试解释这一现象。

9-5 在观察劈尖干涉现象时，若劈尖的上表面向上平移，干涉条纹会发生怎样的变化？若劈尖的上表面向右方平移，干涉条纹又会发生怎样的变化？若劈尖的角度增大，干涉条纹又将发生怎样的变化？

9-6 处理衍射问题的基本思想是什么？在解释衍射现象时，菲涅耳在哪一点上发展了惠更斯原理？

9-7 某人在他眼睛瞳孔的前方握着一个竖直方向的单狭缝，通过狭缝注视一遥远的线状光源。这人看见的衍射图样是菲涅耳衍射还是夫琅和费衍射？

9-8 光的干涉现象与衍射现象有什么区别和联系？

9-9 光栅衍射和单缝衍射有何区别？为什么光栅衍射的明纹特别明亮？

9-10 试指出当衍射光栅常数为下述三种情况时，哪些级次的主极大衍射条纹消失？

(1) 光栅常数为狭缝宽度的两倍，即 $d=2a$ ；

(2) 光栅常数为狭缝宽度的3倍，即 $d=3a$ ；

(3) 光栅常数为狭缝宽度的4倍，即 $d=4a$ 。

9-11 普通光源中原子发光有何特征？

9-12 如何用实验检验一束光是线偏振光、部分偏振光还是自然光？

9-13 自然光可以用两个独立的、相互垂直的、振幅相等的光振动表示。那么偏振光是否也可以用两个相互垂直的光振动来表示？如果可以，则这两个相互垂直的光振动之间关系如何？

习 题

9-1 在双缝干涉实验中,入射光的波长为 λ ,用玻璃纸遮住双缝中的一个缝,若玻璃纸中光程比相同厚度的空气的光程大 2.5λ ,则屏上原来的明纹处将如何变化?

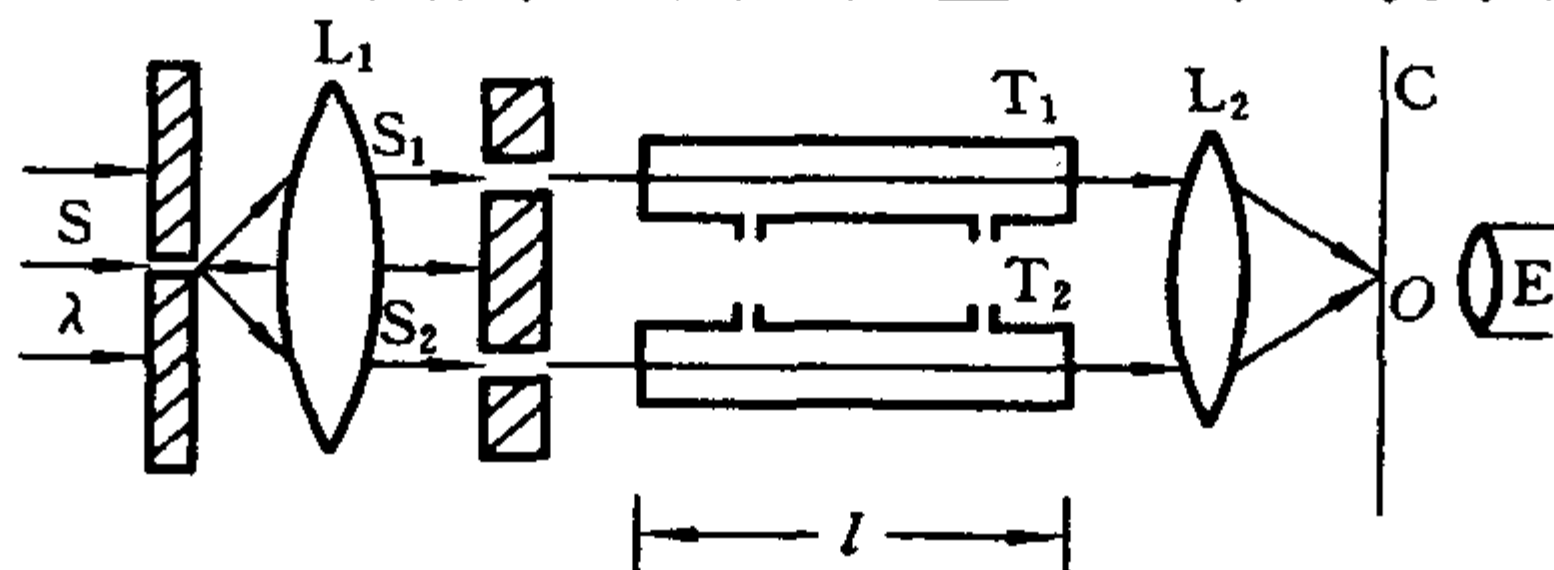
9-2 薄钢片上有两条紧靠的平行细缝,用波长 $\lambda=5461 \text{ \AA}$ 的平面光波正入射到钢片上。屏幕距双缝的距离为 $D=2.00$,测得中央明条纹两侧的第5级明条纹间的距离为 $\Delta x=12.0 \text{ mm}$ 。试求:

(1) 两缝间的距离;

(2) 从任一明条纹(记做0)向一边数到第20条明条纹,共经过多大距离?

(3) 如果使光波斜入射到钢片上,条纹间距将如何改变?

9-3 如题9-3图所示的瑞利干涉仪是用来测定气体在各种温度和压力下的折射率的。 T_1 、 T_2 是两个长度都是 l 的气室,波长为 λ 的单色光的缝光源 S 放在透镜 L_1 的前焦点上,在双缝 S_1 和 S_2 处形成两个同相位的相干光源,用目镜 E 观察透镜 L_2 焦平面 C 上的干涉条纹。当两气室均为真空时,观察到一组干涉条纹。在往气室 T_2 中充入一定量的某种气体的过程中,观察到干涉条纹移动了 M 条,试求出该气体的折射率 n (用已知量 M 、 λ 和 l 表示出来)。



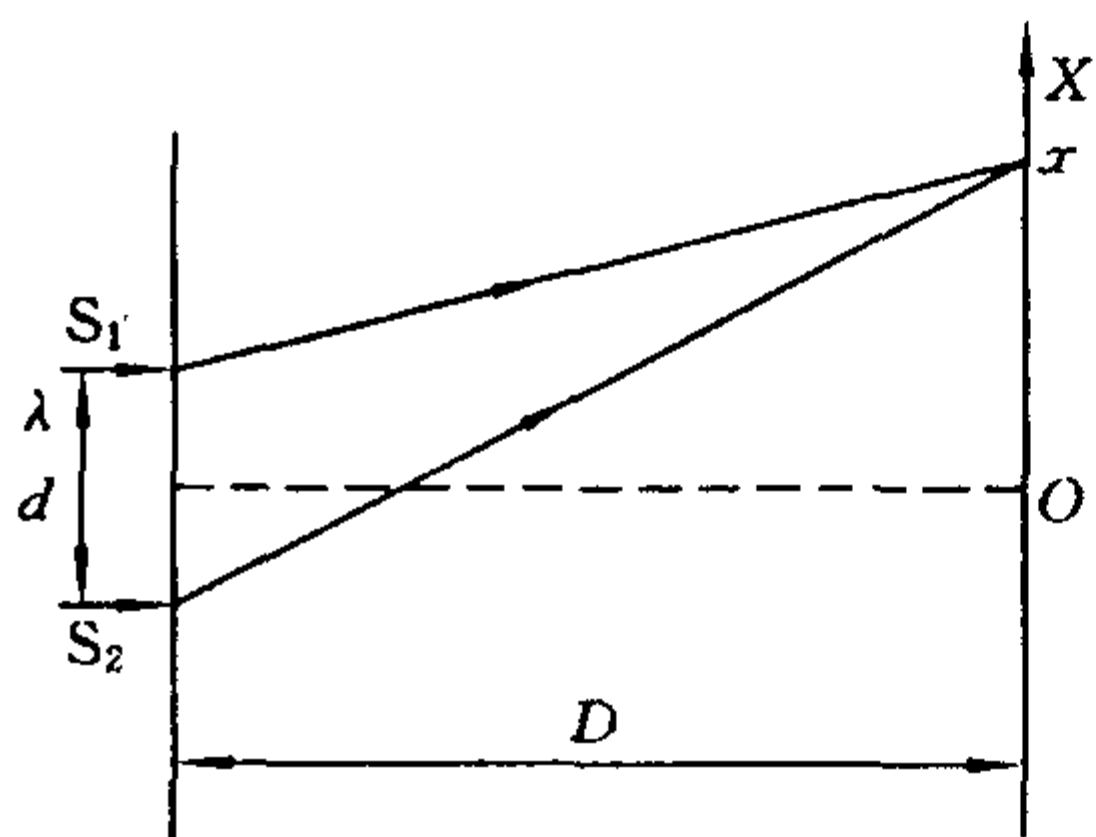
题9-3图

9-4 在双缝干涉实验中,若用薄玻璃片(折射率 $n_1=1.4$)覆盖缝 S_1 ,用同样厚的玻璃片(但折射率 $n_2=1.7$)覆盖缝 S_2 ,将使屏上 S_2 未放玻璃时的中央明条纹所在处变为第五级明纹。设单色光波长 $\lambda=4800 \text{ \AA}$,求玻璃片的厚度 d (可认为光线垂直穿过玻璃片)。

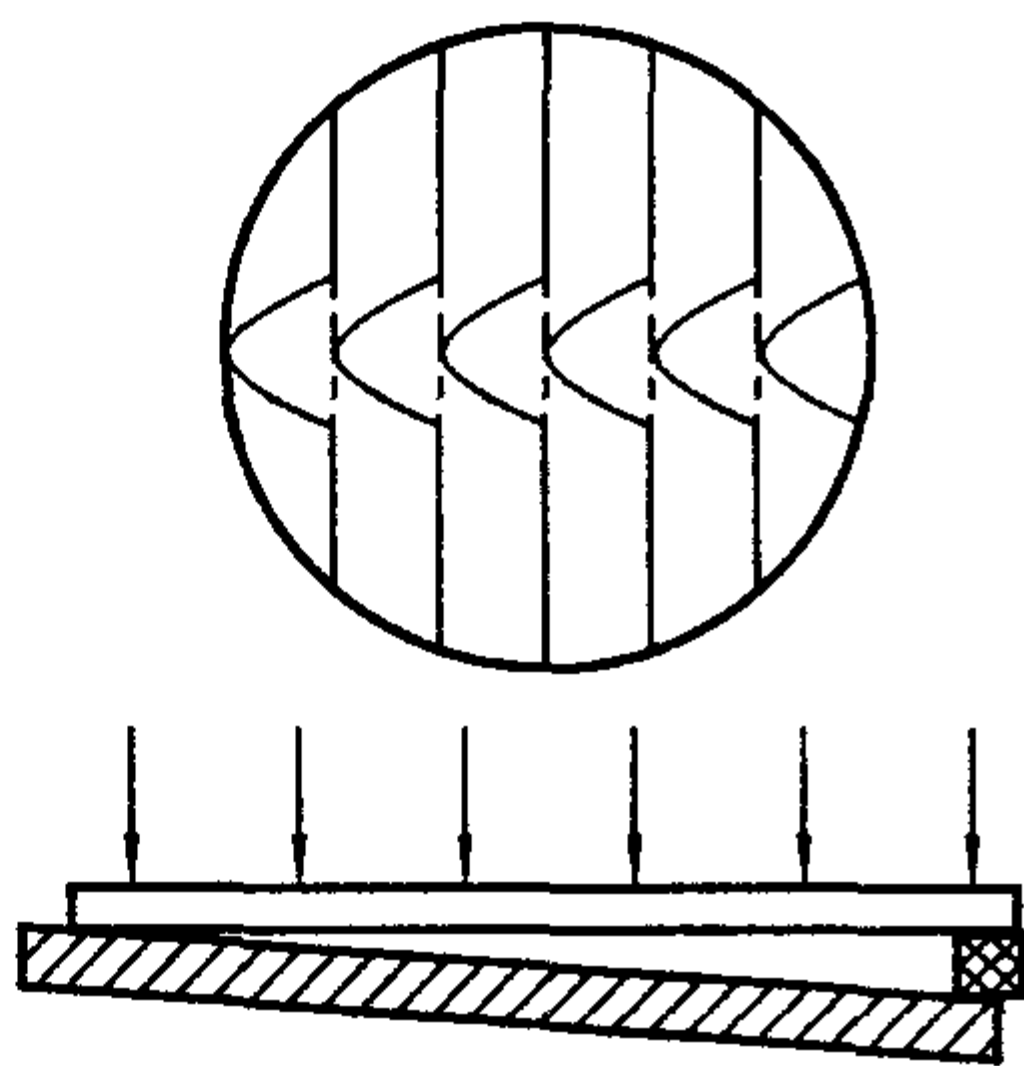
9-5 双缝干涉实验装置如题 9-5 图所示,双缝与屏之间的距离 $D=120 \text{ cm}$,两缝之间的距离 $d=0.50 \text{ mm}$,用波长 $\lambda=5000 \text{ \AA}$ 的单色光垂直照射双缝。

(1) 求原点 O (零级明条纹所在处)上方的第五级明条纹的坐标 x 。

(2) 如果用厚度 $l=1.0 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 、折射率 $n=1.58$ 的透明薄膜覆盖在图中的 S_1 缝后面,试求上述第五级明条纹的坐标 x' 。



题 9-5 图



题 9-6 图

9-6 用劈尖干涉法可检测工件表面缺陷,当波长为 λ 的单色平行光垂直入射时,若观察到的干涉条纹如题 9-6 图所示,每一条纹弯曲部分的顶点恰好与其左边条纹的直线部分的连线相切,则工件表面与条纹弯曲处对应的部分是凸起还是凹陷? 高度或深度

是多少?

9-7 在双缝干涉实验中,波长 $\lambda=5\ 500\ \text{\AA}$ 的单色平行光垂直入射到缝间距 $d=2\times 10^{-4}\text{ m}$ 的双缝上,屏到双缝的距离 $D=2\text{ m}$,试求:

(1) 中央明纹两侧的两条第10级明纹中心的间距。

(2) 用一厚度为 $e=6.6\times 10^{-6}\text{ m}$ 、折射率为 $n=1.58$ 的玻璃片覆盖一缝后,零级明纹将移到原来的第几级明纹处?

9-8 用波长为 λ_1 的单色光照射空气劈尖,从反射光干涉条纹中观察到劈尖装置的A点处是暗条纹。若连续改变入射光波长,直到波长变为 $\lambda_2(\lambda_2>\lambda_1)$ 时,A点再次变为暗条纹,试求A点的空气薄膜厚度。

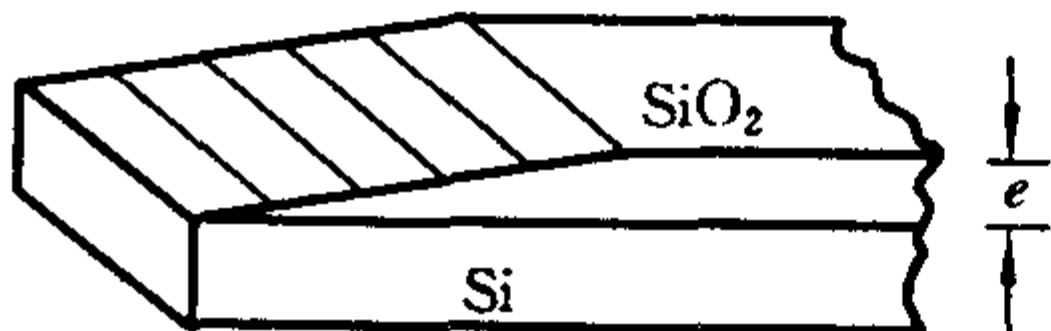
9-9 用波长为 500 nm ($1\text{ nm}=10^{-9}\text{ m}$)的单色光垂直照射到由两块光学平玻璃构成的空气劈尖上,在观察反射光的干涉现象中,距劈尖棱边 $l=1.56\text{ cm}$ 的A处是从棱边算起的第四条暗条纹中心。

(1) 求此空气劈尖的劈尖角 θ 。

(2) 改用 600 nm 的单色光垂直照射到此劈尖上仍观察反射光的干涉条纹,A处明条纹还是暗条纹?

(3) 在第(2)问的情形从棱边到A处的范围内共有几条明条纹?几条暗纹?

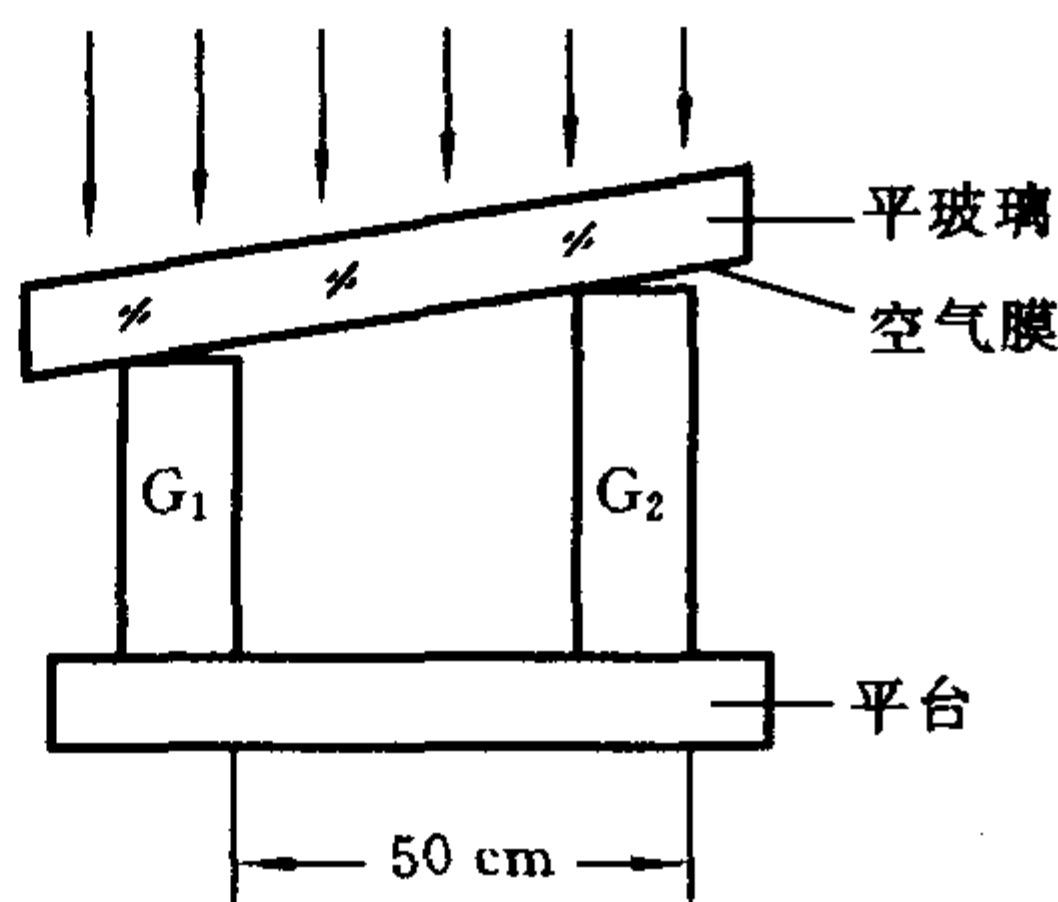
9-10 制造半导体元件时,常常要精确测定硅片上二氧化硅薄膜的厚度,这时可把二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉,使其形成劈尖,利用等厚干涉条纹测出其厚度。



题9-10图

已知Si的折射率为3.42,SiO₂的折射率为1.5,入射光波长为 $5\ 893\ \text{\AA}$,观察到7条暗纹,如题9-10图所示,请问SiO₂薄膜的厚度 e 是多少?

9-11 块规是一种长度标准器。它是一块钢质长方体，两端面磨平抛光，很精确地相互平行，两端面间距离即长度标准。如题9-11图中所示 G_1 是一合格块规， G_2 是与 G_1 同规号待校准的块规。校准装置如题9-11图所示。块规置于平台上，上面盖以平玻璃。平玻璃与块规端面间形成空气劈尖。用波长为 5893 \AA 的光垂直照射时，观察到两端面上方各有一组干涉条纹。



题9-11图

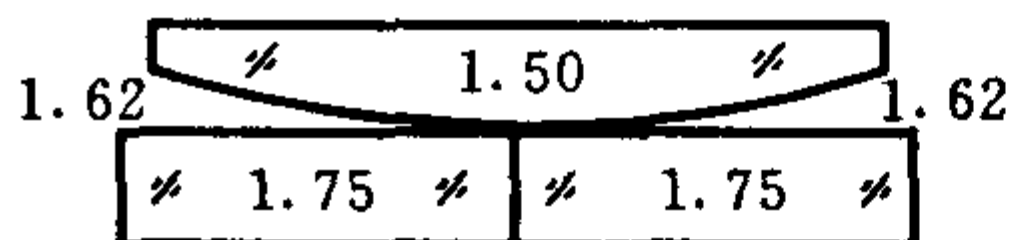
观察到两端面上方各有一组干涉条纹。

(1) 两组条纹的间距都是 $L = 0.50 \text{ mm}$ ，试求 G_1 、 G_2 的长度差。

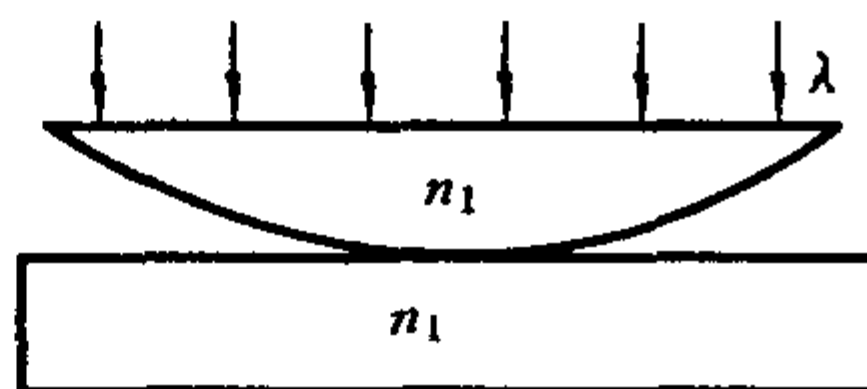
(2) 如何判断 G_2 比 G_1 长还是短？

(3) 如两组条纹间距分别为 $L_1 = 0.50 \text{ mm}$ ， $L_2 = 0.30 \text{ mm}$ ，这表示 G_2 加工有什么不合格？如果 G_2 加工完全合格，应观察到什么现象？

9-12 牛顿环干涉装置各部分折射率如题9-12图所示。试大致画出反射光的干涉条纹的分布。



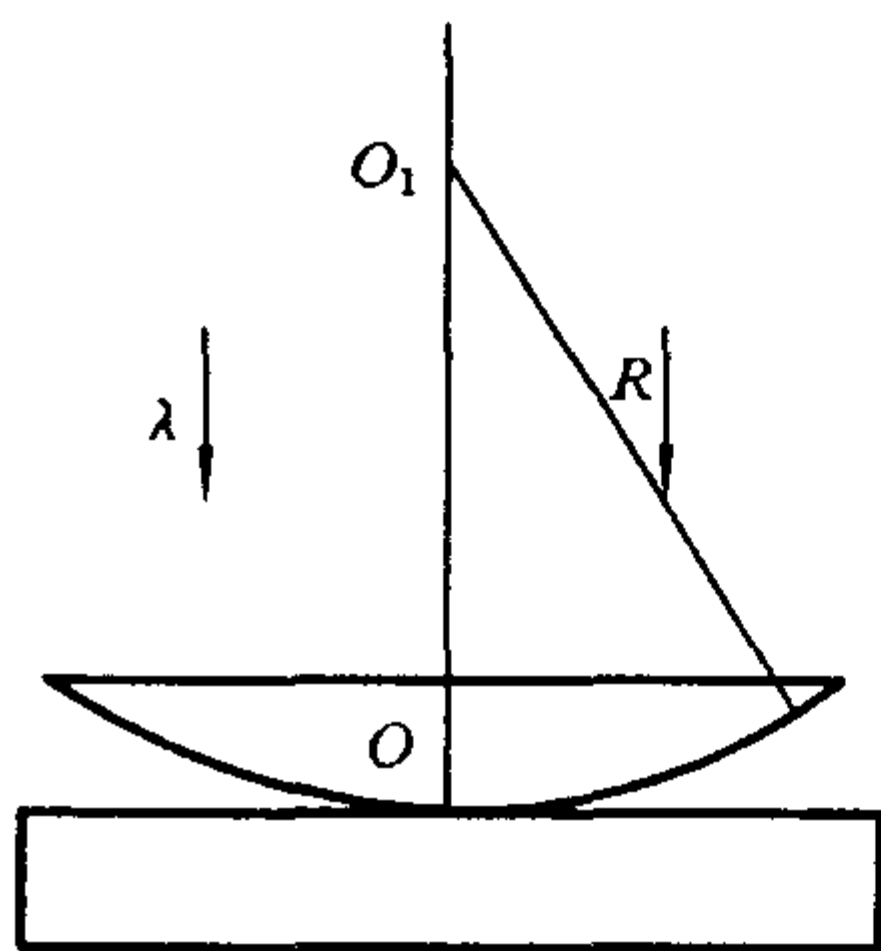
题9-12图



题9-13图

9-13 在如题9-13图所示的牛顿环装置中，把玻璃平凸透镜和平面玻璃（设玻璃折射率 $n_1 = 1.50$ ）之间的空气（ $n_2 = 1.00$ ）改换成水（ $n'_2 = 1.33$ ），求第 k 个暗环半径的相对改变量 $(r_k - r'_k) / r_k$ 。

9-14 在牛顿环装置的平凸透镜和平板玻璃间充以某种透明液体,观测到第10个明环的直径由充液前的14.8 cm变成充液后的12.7 cm,试求这种液体的折射率 n 。



题 9-15 图

9-15 曲率半径为 R 的平凸透镜和平板玻璃之间形成空气薄层,如题9-15图所示。波长为 λ 的平行单色光垂直入射,观察反射光形成的牛顿环,设平凸透镜与平板玻璃在中心点 O 恰好接触,试求:

(1) 从中心向外数第 k 个明环所对应的空气薄膜的厚度 e ;

(2) 第 k 个明环的半径 r_k (用 R ,波长 λ 和正整数 k 表示, R 远大于上一问的

e_k)。

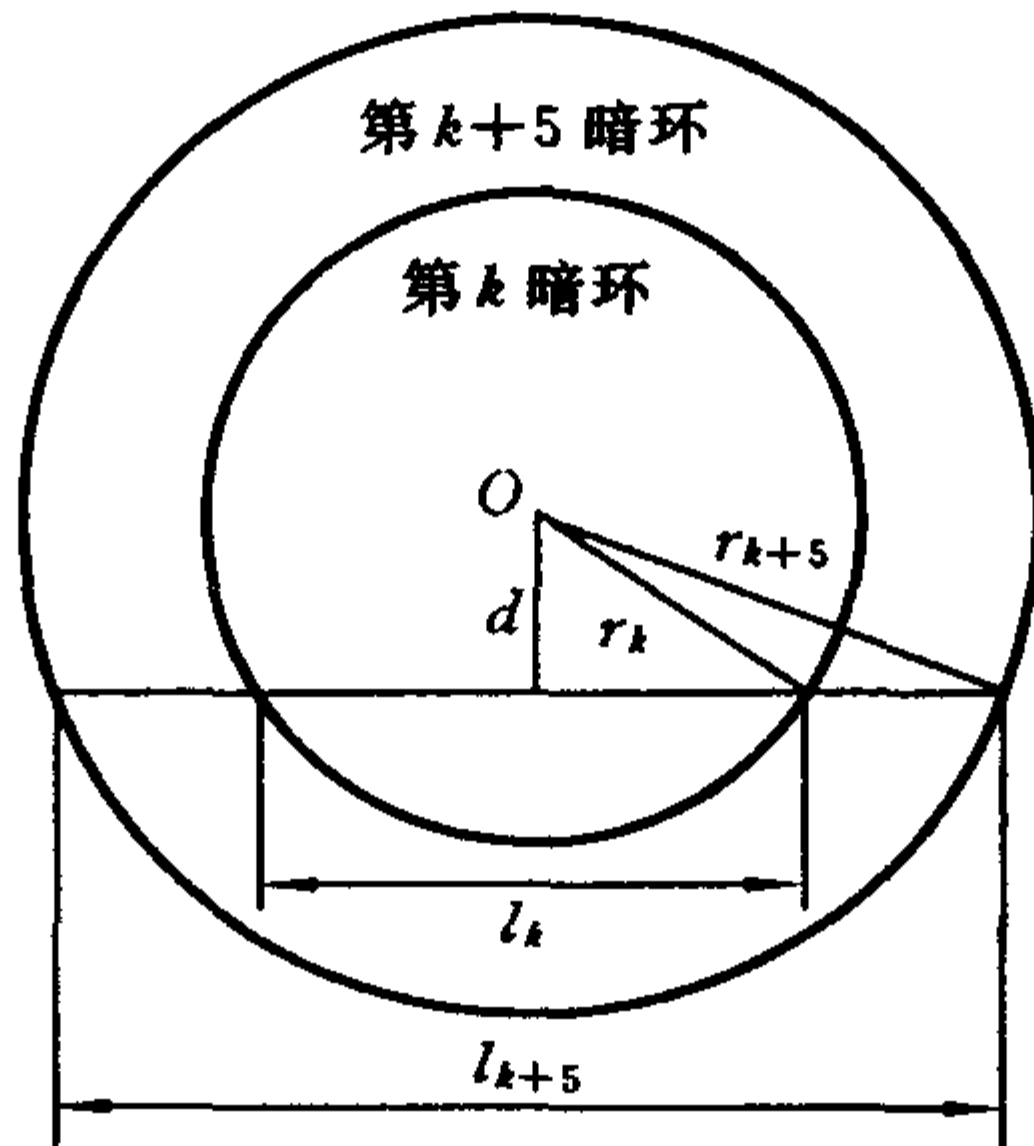
9-16 在牛顿环装置的平凸透镜和平玻璃板之间充满折射率 $n=1.33$ 的透明液体(设平凸透镜和平玻璃板的折射率都大于1.33)。凸透镜的曲率半径为300 cm,波长 $\lambda=6500 \text{ \AA}$ 的平行单色光垂直照射到牛顿环装置上,凸透镜顶部刚好与平玻璃板接触,试求:

(1) 第10个明环的半径 r_{10} ;

(2) 从中心向外数第10个明环所在处的液体厚度 e_{10} 。

9-17 一平凸透镜放在一平晶上,以波长为 $\lambda=5893 \text{ \AA}$ 的单色光垂直照射于其上,测量反射光的牛顿环,测得从中央数起第 k 个暗环的弦长为 $l_k=3.00 \text{ mm}$,第 $k+5$ 个暗环的弦长为 $k+5=4.60 \text{ mm}$,如题9-17图所示,试求平凸透镜的球面的曲率半径 R 。

9-18 在迈克耳孙干涉仪的一支光路中,放入一片折射率为 n 的透明介质薄膜后,测出两束光的光程差的改变量为一个波长 λ ,



题 9-17 图

则薄膜的厚度是多少？

9-19 压电陶瓷的电致伸缩被用在电子显微镜上做微小位移。这个位移的标定可以用迈克耳孙干涉仪来实现。把压电陶瓷片固定在迈克耳孙干涉仪可移动的反射镜上，用氦氖激光器作为光源($\lambda=6\,328\text{ \AA}$)，如果在压电陶瓷片加电压前后观察到条纹移动了 12 条，那么这个微小位移是多少？

9-20 波长为 λ 的单色平行光垂直入射到一狭缝上，若第一级暗纹的位置对应的衍射角为 $\theta=\pm\pi/6$ ，则缝宽为多少？

9-21 在单缝夫琅和费衍射实验中，波长为 λ 的单色光垂直入射在宽度 $a=4\lambda$ 的单缝上，对应于衍射角为 30° 的方向，单缝处波阵面可分成的半波带数目是多少？

9-22 在夫琅和费单缝衍射实验中，如果缝宽 a 与入射光波长 λ 的比值分别为 (1)1, (2)10, (3)100, 试分别计算中央明条纹边缘的衍射角，再讨论计算结果说明什么问题。

9-23 在某个单缝衍射实验中，光源发出的光含有两种波长 λ_1 和 λ_2 ，并垂直入射于单缝上，假如 λ_1 的第一级衍射极小与 λ_2 的第

二级衍射极小相重合,试问:

(1) 这两种波长之间有何关系?

(2) 在这两种波长的光所形成的衍射图样中,是否还有其他极小相重合?

9-24 波长为 600 nm 的单色光垂直入射到宽度为 $a = 0.10$ mm 的单缝上,观察夫琅和费衍射图样,透镜焦距 $f = 1.0$ m,屏在透镜的焦平面处。试求:

(1) 中央衍射明条纹的宽度 Δx ;

(2) 第二级暗纹离透镜焦点的距离 x_2 。

9-25 (1) 在单缝夫琅和费衍射实验中,垂直入射的光有两种波长 $\lambda_1 = 4\ 000$ Å, $\lambda_2 = 7\ 600$ Å。已知单缝宽度 $a = 1.0 \times 10^{-2}$ cm,透镜焦距 $f = 50$ cm,试求两种光第一级衍射明纹中心之间的距离。

(2) 若用光栅常数 $a + b = 1.0 \times 10^{-3}$ cm 的光栅替换单缝,其他条件和上一问相同,试求两种光第一级主极大之间的距离。

9-26 用钠光($\lambda = 5\ 893$ Å)垂直照射到某光栅上,测得第三级光谱的衍射角为 60° 。

(1) 若换用另一光源测得第二级光谱的衍射角为 30° ,求后一光源发光的波长。

(2) 若以白光($4\ 000 \sim 7\ 600$ Å)照射在该光栅上,求第二级光谱的张角。

9-27 用一束具有两种波长的平行光垂直入射在光栅上, $\lambda_1 = 6\ 000$ Å, $\lambda_2 = 4\ 000$ Å,发现距中央明纹 5 cm 处 λ_1 光的第 k 级主极大和 λ_2 光的第 $k + 1$ 级主极大相重合,放置在光栅与屏之间的透镜的焦距 $f = 50$ cm,试问:

(1) 上述 k 为何值?

(2) 光栅常数 $a + b$ 为何值?

9-28 设光栅平面和透镜都与屏幕平行,在平面透射光栅上每 cm 有 5 000 条刻线,用它来观察钠黄光($\lambda=589\text{ nm}$)的光谱线。

(1) 当光线垂直入射到光栅上时,能看到的光谱线的最高级数 k_m 是多少?

(2) 当光线以 30° 的入射角(入射线与光栅平面的法线的夹角)斜入射到光栅上时,能看到的光谱线的最高级数 k'_m 是多少?

9-29 波长为 $6\ 000\ \text{\AA}$ 的单色光垂直入射在一光栅上。第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin\theta=0.20$ 与 $\sin\theta=0.30$ 处,第四级缺级。试问:

(1) 光栅上相邻两缝的间距是多少?

(2) 光栅上狭缝的宽度有多大?

(3) 按上述选定的 a 、 b 值,在 $-90^\circ<\theta<90^\circ$ 范围内,实际呈现的全部级数。

9-30 一衍射光栅,每 cm 有 200 条透光缝,每条透光缝宽为 $a=2\times 10^{-3}\text{ cm}$,在光栅后放一焦距 $f=1\text{ m}$ 的凸透镜,现以 $\lambda=6\ 000\ \text{\AA}$ 的单色平行光垂直照射光栅,试求:

(1) 透光缝 a 的单缝衍射中央明条纹宽度为多少?

(2) 在该宽度内,有几个光栅衍射主极大?

9-31 使一光强为 I_0 的平面偏振光先后通过两个偏振片 P_1 和 P_2 , P_1 和 P_2 的偏振化方向与原入射光矢量振动方向的夹角分别是 α 和 90° ,则通过这两个偏振片后的光强 I 是多少?

9-32 一束光强为 I_0 的自然光,相继通过三个偏振片 P_1 、 P_2 、 P_3 后,出射光的光强为 $I=I_0/8$,已知 P_1 和 P_3 的偏振化方向相互垂直,若以入射光线为轴,旋转 P_2 ,试问 P_2 最少要旋过多大角度,才能使出射光的光强为零?

9-33 两偏振片 P_1 、 P_2 叠在一起,强度相同的自然光和线偏振光混合而成的光束垂直入射在偏振片上,测得穿过 P_1 后的透射光

强为人射光强的 $1/2$, 相继穿过 P_1 、 P_2 之后透射光强为人射光强的 $1/4$, 若忽略 P_1 、 P_2 对各自可透过的分量的反射和吸收, 将它们看做理想的偏振片, 试问:

(1) 入射光中线偏振光的光矢量振动方向与 P_1 的偏振化方向间的夹角 θ 为多大?

(2) P_1 、 P_2 的偏振化方向之间的夹角 α 为多大?

9-34 某种透明媒质对空气的临界角(指全反射)等于 45° , 光从空气向此媒质入射时的布儒斯特角是多少?

第10章 气体分子运动论

在物质的气、液、固三种聚集态中,气体的性质较为简单。因此,研究分子运动论应先从气体开始,并且在本章中也只讨论气体分子运动论。

本章先介绍气体的一些宏观性质和规律,然后由气体分子运动论来解释这些宏观性质和规律的微观本质。

第1节 理想气体的状态方程

一、分子运动论的基本概念

1. 分子运动论的基本观点

无论是气体、液体或固体,组成这些物质的分子数目都十分巨大。例如,一摩尔气体的分子数 $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ (这个数字称为阿伏加德罗常数),用标准状态下的体积来计算,每立方厘米有 2.69×10^{19} 个分子。分子总是处于不停息的运动中,在室温下,气体分子运动的平均速率约为每秒数百米,甚至上千米。在气体分子运动的过程中,分子之间还发生着频繁的碰撞,标准状态下,气体分子的平均碰撞次数的数量级达每秒 10^9 次。由此还可以估计出一个

分子在连续两次和其他分子碰撞之间平均飞越的自由路程(称为平均自由程)的数量级为 $10^{-8}\sim 10^{-7}$ m,即大约百分之几到十分之几微米。气体分子相互碰撞时彼此相互作用,这种作用属于分子之间的作用力或分子力。

对分子运动的上述认识,是人们从大量实验事实总结出来的,可把这些认识归纳为如下的基本观点:

宏观物体由大量分子组成,分子间存在间隙;分子都在作永不停息的无规则运动;分子间有相互作用力。

分子运动论是在这些基本观点的基础上发展形成的理论。

可以设想物质中的单个分子是遵守牛顿定律的,从而可用经典力学的方法研究每个分子的运动状态及其变化。但是,对数量如此巨大的分子,找出每个分子的运动方程和运动的初始条件,求得其速度、动量和能量,实际上是不可能的。事实上,也没有必要这样做。热现象是大量分子杂乱无章运动所呈现的宏观特性。一个粒子或少量粒子的运动,不会表现出热现象的各种特征。换言之,热现象不是个别分子的行为,而是组成宏观物体的大量分子的集体表现。由于分子数量的众多,运动从量变引起了质的变化,表现出不同于机械运动的特征。所以,热运动是比机械运动更复杂而又更高级的运动。热运动中包含有机运动(分子个体的运动),但是,不能简单地把热运动还原为机械运动。不同质的问题,要用不同的方法去研究。因此,研究热现象的运动规律,要采用与研究机械运动不同的方法。

2. 宏观状态和宏观量

由大量分子组成的气体、液体和固体,都是热学研究的对象,称之为热力学系统,或简称系统。对于气体系统,常用体积(用 V 表示)、压强(用 p 表示)和温度(用 T 表示,指热力学温度)这样一些物理量来描述系统的宏观状态。这些量反映了大量分子的集体特

征,称为宏观量。一般来说,系统的宏观量是可以由有关仪器测量的。

宏观状态可分为平衡状态和非平衡状态。在容器中盛入一定量的气体,如果它与外界没有能量交换,系统内部也没有任何形式的能量转换(如由化学变化引起的能量转换等),经过一段时间后,容器中气体的密度、温度、压强将处处相同,不再随时间而改变。系统的这种状态称为平衡状态,简称平衡态。否则,称为非平衡态。这里只讨论处于平衡态中的理想气体系统。

3. 微观状态和微观量

为简单起见,设想有图 10-1 中由四个分子 a、b、c、d 构成的系统。分子在容器中不断地运动和碰撞。对一个分子而言,它可能出现在容器中的任何部位。如果把容器想像地分为 A、B 两部分,考察分子的位置所在,每个分子都可能在 A 半部或 B 半部中出现。从宏观来看,有如下几种状态:

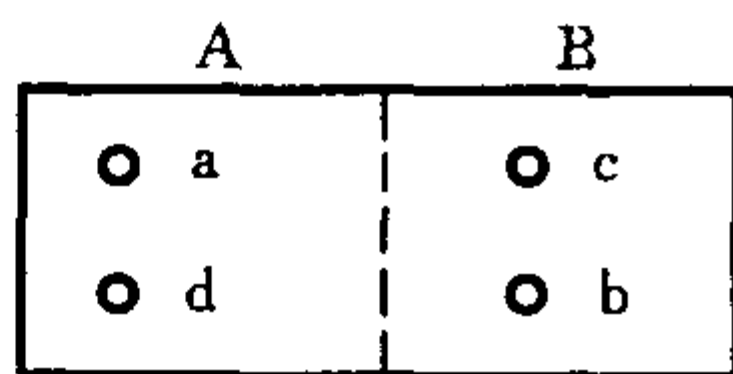


图 10-1 由四个分子组成的假想系统

(I) A 半部中有四个分子(B 中没有分子);(II) A 半部中有三个分子(B 中只有一个);(III) A 半部中有两个分子(B 中也有两个);(IV) A 半部中有一个分子(B 中有三个);(V) A 半部中没有分子(B 中有四个)。但是,从微观的组合来看,对第(III)种宏观状态,A 半部中的两个分子可能是 a、b,也可能是 a、c,或 a、d,或 b、c,或 b、d,或 c、d。由此可见,第(III)种宏观状态中包含有六种微观组合。粗略地说,把系统中分子在两个半部的每一种微观组合称为微观状态。

表 10-1 中列出了构成上述五种宏观状态的各种可能的微观状态。

表 10-1

宏观态编号	I	II	III	IV	V
A 半部	abcd	abc,abd, acd,bcd	ab,ac,ad, bc,bd,cd	a,b,c,d	0
B 半部	0	d,c,b,a	cd,bd,bc, ad,ac,ab	bcd,acd, abd,abc	abcd
微观态数	1	4	6	4	1

根据上面的讨论,仅从每个分子是在容器的哪一边来看,可以总结下列几条规律。

(1) 四个分子构成的系统,按照上面的区分方法,其微观态的数目共有 $16=2^4$ 个。如果是由 N 个分子构成的系统,其微观态应该有 2^N 个,实际热力学系统中分子数很大,那么,微观态的数目十分巨大。

(2) 因为分子都处于不停息的运动中,在任一时刻,系统只能是 16 个微观态中的某一个,而对 N 个分子的系统,则是 2^N 个微观态中的某一个。

(3) 容器两半部中的分子数相等相当于两边的密度相等(这种“相当于”的看法十分粗糙,应该注意到是为了使问题简单一些,才这么认为)。这种情况对应于宏观的平衡态,即上述第(III)种宏观态。从四个分子的系统也可以看出,宏观的平衡态所包含的微观态的数目很多,即宏观平衡态对应了数目最多的微观态。对 N 个分子构成的系统,这一结论更为明显。而非平衡的宏观态只是占 2^N 个微观态的很少部分,例如第(I)种宏观态只占 2^N 个微观态中的一个。

(4) 系统中分子运动达到宏观平衡后,仍不断地更迭其微观

态,但是,在绝大部分时间内(几乎全部时间)都呈现为平衡的宏观态。而像第(I)种不平衡的宏观态,它出现的可能性只是 $1/2^N$,由于 2^N 这个数字巨大,因而,这个可能性已经小到几乎为零。从微观分子运动的角度看,由于微观态随分子的运动而更迭,所谓宏观平衡态实际上是一种动平衡(或热动平衡)。

上面的例子,实际是用系统中的分子在容器中的位置来描述系统的微观态。把容器分为两部分,用指出分子在哪一部分的方法确定分子的位置,显然十分粗糙。如果要更细致地确定分子的位置,可以把容器分为更多更细的相等的小区间(也就是说,在容器的各边设置坐标),这样就可以用位置坐标精确地确定分子的位置。用位置坐标描述分子系统的微观状态,本质上是牛顿力学方法。牛顿力学是用位置和速度(或动量)描述质点的状态,描述分子的微观状态,除了确定其位置坐标,还应该用速度(或动量)描述其运动。所以,确切地说,热力学系统的微观状态,实际上是用力学的方法对系统的全体分子进行描述的结果,系统的一种微观状态指的是系统中所有分子的位置坐标和速度(或动量)分量的一种组合所描述的力学状态。由于势能(在保守力场中)是位置的函数,动能是动量的函数 $\left(E_k = \frac{p^2}{2m}\right)$,那么,在气体系统中分子的势能和动能也可以用来描述系统的微观状态。可以描述系统微观状态的分子的位置坐标、速度、动量、动能和势能,统统称为系统的微观量。前述例子指出,系统的宏观状态和微观状态存在着某种关系,因而描述系统的宏观量和微观量也应该有内在的联系。微观量是不可测量的。但是,设法揭示出宏观量与微观量的联系,可以深入地理解描述系统宏观状态的诸物理量的物理本质。

对于数目巨大、杂乱无章地运动着的气体分子,取其中一个分子研究,起始时刻它在什么位置,具有怎样的速度,运动过程中将

在什么地方与哪一个分子作了怎样的碰撞,然后又怎样地运动,由于偶然性,这些问题都无法回答。但是,一旦系统达到了平衡,尽管作为个体的分子仍在运动,而宏观地看,如果没有外力场,各处密度总是维持不变;尽管每个分子个体的速度仍在不断地改变,而宏观地看,所有分子在各种速度上的分配比例却是固定不变的。也就是说,大量分子构成的系统呈现出另外一种规律,称为统计规律。从大量个体或大量事件中表现出来的统计规律,不仅存在于自然界微观客体群的运动中,而且在社会现象、日常生活的宏观领域里也能表现出统计规律。例如,我国铁路运输的乘客总是在每年春节前后出现高峰,在此期间每日旅客流量的分布情况几乎年年相同,因而表现了一种统计的客观规律。尽管作为个体的每一位旅客究竟在哪一天乘车,取决于各个人的具体情况,但是,当乘客数目很大时,每年春节前后出现高峰就成为一种规律而呈现出来。

面对由大量分子组成的热力学系统,怎样寻找宏观量和微观量之间的关系?虽然微观量无法直接测量,但是,求出大量分子的某些微观量的统计平均值还是可能的。宏观量实际上是微观量统计平均的结果。我们将依据每个分子所遵循的力学规律,用统计的方法,求出理想气体大量分子的某些微观量的统计平均值,从而建立宏观量与微观量之间的关系。

二、理想气体的状态方程

对处于平衡态的一定量气体,其状态可用温度 T 、压强 p 和体积 V 这三个状态参量来描述。在一般情况下,当其中任意一个参量发生变化时,其他两个参量也将随之改变。气体处于某一给定平衡状态时,这三个状态参量也必有一定的关系,即其中一个量是其他两个量的函数,如

$$T = f(p, V)$$

这个方程就是一定量的气体处于平衡状态时的气体状态方程。一般来说,这个方程的形式是很复杂的,它与气体的性质有关。这里只讨论理想气体的状态方程。

我们知道,任何一个物理定律都有一定的适用范围。在中学物理中已经知道,玻意耳(Boyle)定律、盖-吕萨克(Gay-Lussac)定律和查理(Charles)定律是在温度不太低(与室温相比)、压强不太大(与大气压强相比)的实验条件下总结出来的。因此,只要气体满足上述实验条件,它们都遵守这三条实验定律。可以设想有这样一种气体,它在任何情况下都遵守上述三条实验定律,这种气体叫做理想气体。但如上所述,一般气体在温度不太低、压强不太大时,都可以近似当做理想气体。因此,研究理想气体各状态参量之间的关系,即理想气体状态方程仍有重要意义。

由气体三实验定律可得平衡态时,理想气体状态方程为

$$pV = \frac{M}{\mu}RT \quad (10-1)$$

式中: M 为气体的质量; μ 为1 mol 气体的质量; M/μ 为气体的物质的量。当 $M=\mu$ 时,气体为1 mol。上式通常叫做克拉珀龙(Claperon)方程。在式(10-1)中, R 为常数,一般称为普适气体恒量,或简称气体恒量。由理想气体状态方程(10-1)可以看出,在 p 、 V 、 T 这三个状态参量中,如有两个参量被确定,可利用状态方程求出第三个状态参量,则气体的状态便已确定。

应当指出,普适气体恒量 R 的量值与状态参量的单位有关。在国际单位制中,压强的单位为Pa(即 N/m^2),体积的单位为 m^3 ,温度的单位为K, R 的量值为

$$R = 8.31(\text{N}/\text{m}^2) \cdot \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{K}) = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

在热学中,热量有时用cal表示,1 J=0.239 cal,于是 R 亦为

$$R = 1.99 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \approx 2 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

如果用大气压(atm)作为压强的单位,体积的单位为升(L),温度的单位为开(K),那么有

$$R = 0.082 \text{ atm} \cdot \text{L}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

例10-1 一容器中有0.100 kg 氧气,其压强为10.0 atm,温度为320 K。因容器漏气,稍后,测得压强减到原来的5/8,温度降到300 K。试求:

- (1) 容器的容积;
- (2) 在两次观测之间漏掉多少氧气。

解 (1) 由理想气体的状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 有

$$V = \frac{MRT}{\mu p} = \frac{0.100}{0.032} \times \frac{8.20 \times 10^{-5} \times 320}{10.0} = 8.20 \times 10^{-3} (\text{m}^3)$$

(2) 由式(10-1)可得

$$\begin{aligned} M' &= \frac{\mu p' V}{RT'} = \frac{0.032 \times \frac{5}{8} \times 10.0 \times 8.20 \times 10^{-3}}{8.20 \times 10^{-5} \times 300} \\ &= 6.70 \times 10^{-2} (\text{kg}) \end{aligned}$$

因此,漏掉的氧气质量为

$$M - M' = 0.100 - 0.067 = 0.033 (\text{kg})$$

第2节 理想气体的压强、温度和内能

一、理想气体的压强公式和温度公式

1. 理想气体分子的模型

在标准状态下,气体的密度大约是凝成液体时密度的千分之

一。即,如果在单位体积中有1 000个液体分子,那么,在同样的体积中则只有1个气体分子。若认为液体分子是紧密排列着,则气体分子之间的间距大约是分子本身线度的10倍。由此可见,气体中分子的间隔比分子本身的线度大得多,它们之间有相当大的空隙。此外,实验指出,实际的气体越稀薄,它越接近于理想气体。据此,人们认为,理想气体分子应该是如下的微观模型。

(1) 分子的大小比分子间的平均距离小得多,因而可以把理想气体的分子视为质点。

(2) 除碰撞的瞬间外,分子之间以及分子与容器器壁之间都没有相互作用力。

(3) 分子之间以及分子与器壁之间的碰撞是完全弹性碰撞。

气体处于平衡状态时,在没有外力场的条件下,气体分子在空间的分布是均匀的;再考虑到在平衡状态时,分子向每一个方向运动的可能性是相同的。因此,对理想气体系统中的大量分子做出如下统计假定。

(1) 容器中任一位置处单位体积内的分子数相同。

(2) 对大量分子而言,分子沿任何方向运动的机会相等,没有任何一个方向比其他方向更占优势。因此,向各个方向运动的分子数目相等;平均看来,在具有同样速率的分子中,向各个方向运动的分子数目也相等。

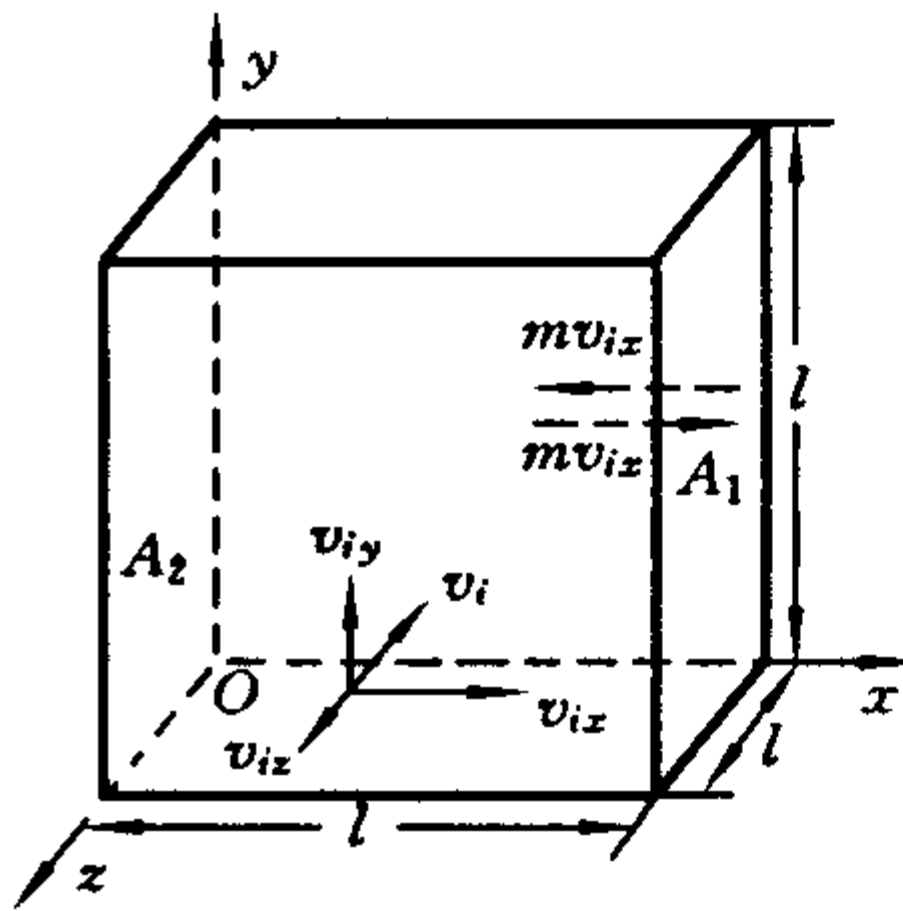
由上面的统计假定可以推论:分子的速度在各个方向的分量的各种统计平均值相等。例如,在直角坐标系中因为沿 x 、 y 、 z 各轴正向速度分量为正,沿各轴负向速度分量为负,故得各分量的算术平均值 $\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$,各分量的均方值相等 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ 。

2. 理想气体的压强公式

首先对气体压强作定性说明:容器内的气体分子处于永不停息的杂乱运动中,不断地碰撞器壁。每一个分子与器壁碰撞时,都

给器壁以一定的冲量,使壁受到冲力的作用。就个别分子来说,这个冲力的大小是随机的。然而对大量分子而言,任何时刻都有很多分子与器壁碰撞。从平均效果看,器壁受到一个均匀连续的连续的压力作用。正如密集的雨点打到伞上,感受到一个均匀的压力一样。下面对理想气体的压强公式作定量推导。

设在边长为 l 的正方体容器中,有 N 个气体分子。每个分子的质量是 m 。因为气体处于平衡状态,容器内各处压强相同,故只需



计算容器的某一器壁(如与 x 轴垂直的 A_1 面,见图10-2)受到的压强,就可以得到容器内各处气体的压强。如图10-2所示,设第 i 个分子的速度为 v_i ,它在直角坐标系中的分量为 v_{ix} 、 v_{iy} 、 v_{iz} ,并且有 $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$ 。

根据理想气体分子模型,碰撞是完全弹性的,所以,碰撞后,第 i 个分子被 A_1 面弹回的速度分量为 $-v_{ix}$ 、 v_{iy} 、 v_{iz} 。因为后两个速度分量 v_{iy} 和 v_{iz} 没有发生

图10-2 气体分子运动论的压强公式的推导

变化,所以,该分子的动量改变为

$$\Delta p_i = -mv_{ix} - mv_{ix} = -2mv_{ix}$$

由动量定理可知,这一动量的改变等于此次碰撞中 A_1 面施于分子的冲量,其方向指向 x 轴的负方向。根据牛顿第三定律,该分子在此次碰撞中施于 A_1 面的冲量为 $2mv_{ix}$,方向指向 x 轴正方向。

为了简化问题,忽略了分子间的相互碰撞。这样,该分子与 A_1 面碰撞后,将以 $-v_{ix}$ 飞向 A_2 面。由于 x 方向速度分量的数值不变(因为是完全弹性碰撞),分子与 A_2 面碰撞后又以 v_{ix} 飞向 A_1 面,再次对 A_1 面碰撞。由图10-2可知,分子与 A_1 面发生两次连续碰撞所

需时间 $\frac{2l}{v_{ix}}$, 单位时间内该分子与 A_1 面碰撞的次数是 $\frac{v_{ix}}{2l}$ 。这样, 在单位时间内, 第 i 个分子作用于 A_1 面的总冲量是 $\frac{v_{ix}}{2l} 2mv_{ix} = \frac{mv_{ix}^2}{l}$, 它等于在此时间内第 i 个分子作用于 A_1 面的平均冲力, 即

$$F_i = \frac{mv_{ix}^2}{l}$$

一个(或少量)分子施于 A_1 面的冲力是间歇的。但容器内有大量分子, 大量分子不断地与 A_1 面碰撞, 因而使 A_1 面受到一个持续的作用力。现在, 把容器中 N 个分子对器壁的作用都考虑进去, 则 A_1 面受到各分子平均冲力之和是

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^N F_i = \frac{mv_{1x}^2}{l} + \frac{mv_{2x}^2}{l} + \dots + \frac{mv_{Nx}^2}{l} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{l} = \frac{m}{l} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \end{aligned}$$

将上式变换, 得

$$F = \frac{Nm}{l} \sum_{i=1}^N \frac{v_{ix}^2}{N} = \frac{Nm}{l} \overline{v_x^2}$$

式中

$$\overline{v_x^2} = \sum_{i=1}^N \frac{v_{ix}^2}{N}$$

表示容器中 N 个分子在 x 轴方向的速度分量平方的平均值(简称均方值), 它是统计平均量。 A_1 面受到的压强

$$p = \frac{F}{S} = \frac{N}{l^3} m \overline{v_x^2} = nm \overline{v_x^2}$$

式中, $n = \frac{N}{l^3}$ 表示单位体积内的分子数(称为分子数密度), 它也是统计平均量。由于分子速度的平方可表示为 $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$, 所以, N 个分子的速度均方值为

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{ix}^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N v_{iy}^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N v_{iz}^2}{N} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

根据统计假定,有 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$,所以 $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$,应用这一关系,从前面的压强 p 的关系式得到理想气体的压强公式

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

或
$$p = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{1}{3}n\bar{\epsilon} \quad (10-2)$$

式中, $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$ 为气体分子的平均平动动能。从前面的讨论可知,压强 p 是系统中所有分子对器壁作用的平均效果,它具有统计意义。离开了大量分子,气体压强的概念就失去了意义。压强公式(10-2)揭示了宏观量 p 和微观量($\bar{\epsilon}$ 或 v^2)的统计平均值($\bar{\epsilon}$ 或 v^2)之间的联系,它表明:理想气体的压强 p 由大量分子的两个统计平均量(单位体积内的分子数 n 和气体分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}$)所决定。

上面推导压强公式时,忽略了气体分子之间的碰撞。如果考虑分子间的碰撞,由于碰撞是完全弹性的,又由于所有分子的质量相等,可以证明仍将得到相同的结果。式(10-2)是气体分子运动论的一个重要结论,虽然不能直接用实验来验证,但从这个公式出发,可以很好地解释和推证许多实验事实。

从上面的分析可以看出,虽然单个分子的运动服从力学规律,但是大量分子的运动呈现出了统计的规律。

3. 理想气体的温度

从理想气体的压强公式(10-2)和状态方程(10-1)可以导出气体温度和分子平均平动动能的关系,从而说明温度的本质。

设容器中气体的质量为 M ,摩尔质量为 μ ,每个分子的质量是

m , 则 $M = Nm$, $\mu = N_A m$ (N 是容器中气体分子的总数, N_A 是阿伏加德罗常数)。把它们代入理想气体的状态方程(10-1), 得

$$p = \frac{Nm}{V} \frac{RT}{N_A m} = nkT$$

式中, $k = \frac{R}{N_A}$, 称为玻耳兹曼常数, 在国际单位制中, $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K。上式是状态方程的另一种表示, 把它与式(10-2)比较, 得到理想气体分子的平均平动动能

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad (10-3)$$

和理想气体的温度公式

$$T = \frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon}}{k} \quad (10-4)$$

式(10-4)表明, 理想气体的热力学温度 T 与气体分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}$ 成正比, T 是宏观量, $\bar{\epsilon}$ 是微观量的统计平均值。 $\bar{\epsilon}$ 的大小表示分子热运动的激烈程度, 因而, 宏观量 T 是标志分子热运动激烈程度的物理量, 分子无规则运动越激烈, 气体的温度就越高。显然, 温度也具有统计意义。和压强一样, 对个别分子来说, 温度失去意义。

从式(10-3)可得

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$\sqrt{\bar{v}^2}$ 称为方均根速率, 在气体分子运动的研究中是常用的物理量。

式(10-3)和式(10-4)都说明, 当温度相同时, 不同种类的气体分子的平均平动动能相等, 这已为比林(J. Perrin)实验间接地证实。比林通过对布朗运动实验的研究, 证实了在外界条件保持不变

的情况下,悬浮在同一温度的液体中的不同微粒,不论其质量大小如何,其平均平动动能都相等。气体分子的运动情况和悬浮在液体中的布朗粒子相似,故可以说比林实验证明了在同一温度下不同种类的气体分子有相同的平均平动动能。

例 10-2 计算在 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,氧气、氢气、氮气的方均根速率。

解 根据 $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, 对氧气而言, $\mu = 0.032\text{ kg/mol}$, $R = 8.31\text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$, $T = 273\text{ K}$, 则

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 273}{0.032}} = 460\text{ (m/s)}$$

用同样方法,可得氢气的 $\sqrt{\overline{v^2}} = 1\ 800\text{ m/s}$,氮气的 $\sqrt{\overline{v^2}} = 500\text{ m/s}$ 。

从以上数值可以看出,气体分子的速率是很大的,一般都在每秒几百米的数量级。

例 10-3 储于体积为 10^{-3} m^3 容器中的某种气体,分子总数 $N = 10^{23}$,每个分子的质量为 $5 \times 10^{-26}\text{ kg}$,分子的方均根速率为 400 m/s 。求气体的压强和气体分子的总平动动能以及气体的温度。

解 由式(10-2)得气体的压强为

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{3}n \left(\frac{1}{2}m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2}m \overline{v^2} \right) \\ &= \frac{2 \times 10^{23} \times 5 \times 10^{-26} \times 400^2}{3 \times 10^{-3} \times 2} = 2.67 \times 10^5\text{ (Pa)} \end{aligned}$$

气体分子的总平动动能

$$E_k = N\bar{\epsilon} = N \frac{1}{2}m \overline{v^2} = \frac{10^{23} \times 5 \times 10^{-26} \times 400^2}{2} = 400\text{ (J)}$$

气体的温度,由 $p = nkT$ 得

$$T = \frac{p}{nk} = \frac{pV}{Nk} = \frac{2.67 \times 10^5 \times 10^{-3}}{10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23}} = 193\text{ (K)}$$

二、能量均分和理想气体的内能

1. 气体分子的自由度

上面讨论理想气体分子热运动时,把分子看成质点,即只考虑了分子的平动。实际上,双原子、三原子等结构复杂的分子,除了平动外,还有转动和振动。分子热运动的能量应该包括各种运动形式的能量。为了比较仔细地研究分子的平动、转动和振动,需要讨论自由度的概念。

决定分子位置所需要的独立坐标级数目,称为分子的自由度。

对单原子分子气体(如He、Ne、Ar等),可以把它们的分子看成质点,只要三个独立坐标(x 、 y 、 z)便可决定分子的位置。因此,单原子分子有三个平动自由度,如图10-3(a)所示。对双原子分子气体(如 H_2 、 O_2 、 N_2 等),分子中的两个原子由一根键连接起来。双原子分子可看成两端各有一个质点的直线,分子整体(即两个原子)除了平动运动外,还有转动运动。上面说过,平动运动(相当于一个质点的运动)需要三个独立坐标描述,这三个独立坐标决定了双原子分子的平动自由度的数目。描述转动运动,需要相应地增加独立坐标的数目。由两个原子组成的分子转动时,此二原子连线的方位发生变化。而确定一直线的方位,需要两个独立坐标,如图10-3(b)所示 α 和 β 。由于两个原子被看成质点,分子绕连线的转动没有意义。所以,当两个原子间的距离不变(即没有相对振动)时,双原子分子有五个自由度,其中三个平动自由度,两个转动自由度。对于三原子以上的气体分子,还应该增加一个独立坐标,确定分子绕其中两分子连线的转动(相当于分子绕轴的自转)位置。所以,当原子间的距离不变时,三原子以上的气体分子,有六个自由度,其中三个平动自由度,三个转动自由度。严格地说,双原子以上的气体分子还有振动运动,故还有相应的振动自由度。在经典理论

中,一般不考虑振动自由度。综上所述,单原子分子有三个自由度,双原子分子有五个自由度,三原子以上的分子有六个自由度。

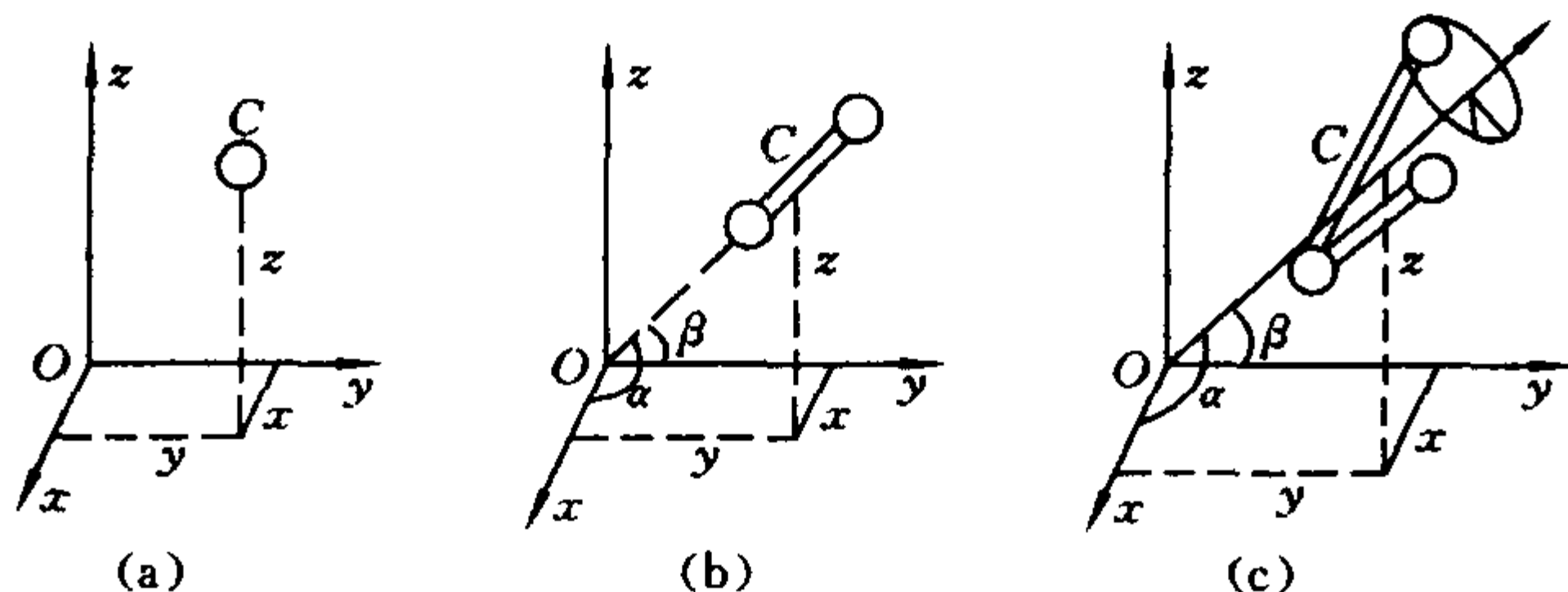


图 10-3 分子运动的自由度

2. 能量按自由度均分定理

理想气体分子的平均平动动能是

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

式中, $\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$ 。根据理想气体的统计假定,在平衡态下,

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2$$

由此得到

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_y^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right) = \frac{1}{2} kT$$

上式表明,气体分子沿 x 、 y 、 z 三根轴的方向运动的平均平动动能皆相等,并且都等于 $\frac{1}{2} kT$ 。分子的平均平动动能均匀地分配在每一个平动自由度上,每一个平动自由度分配的平均能量是 $\frac{1}{2} kT$ 。

可把上述结论推广到多原子分子的转动自由度上。因为气体分子间不断地碰撞,在达到平衡状态后,任何一种运动都不会比另一种运动占优势,各种运动在各个自由度上的运动,其机会是均等的。因此,可以认为在分子的每个转动自由度上,也和每个平动自

由度一样分配有相等的平均能量,即 $\frac{1}{2}kT$ 。这一结论,在统计物理中可以得到理论上的证明。由此得到能量均分定理:

在温度为 T 的平衡状态下,物质分子的任何一个自由度上均分配有 $\frac{1}{2}kT$ 的平均能量。

能量均分定理是一条统计规律,是大量分子统计平均的结果。对个别分子,在某时刻,它的各种形式的(平动的、转动的)动能不一定按自由度均分;个别分子的总动能与按能量均分定理所确定的平均值可能有很大的差别。从大量分子平均来看,动能之所以能按自由度均分,是由于分子的无规则碰撞。在碰撞过程中,一个分子的能量可以传递给另一个分子,一种形式的动能可以转化为另一种形式的动能,一个自由度上的动能可以转移为另一个自由度上的动能。从统计平均观点看,任何一个自由度都不占优势,动态平衡时实现能量均分。

3. 理想气体的内能

气体分子具有动能(包括平动动能和转动动能)。实际气体的分子间存在相互作用,因而气体分子间还具有与此作用力对应的势能。

气体内部所有分子的动能和势能之总和,叫做气体的内能。对于理想气体,前面已述,不计分子间的相互作用,因此理想气体的内能是所有分子的动能之总和。这里,分子的动能包括平动动能和转动动能。请注意,气体的内能不同于力学中的机械能。例如,一瓶静置于地面的气体,若取地面为重力势能为零的位置,则机械能等于零。但是,气体内部的分子却永远处于运动中并相互作用着,其内能永远不等于零。

设某种理想气体的分子自由度为 i 。一个分子的平均动能为

$\frac{i}{2}kT$, 1 mol 的气体含有 N_A 个分子, 故 1 mol 理想气体的内能为

$$E_0 = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT$$

由此可得, 质量为 M , 摩尔质量为 μ 的理想气体的内能是

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT \quad (10-5)$$

由式(10-5)可知, 一定量的理想气体的内能完全由分子的自由度 i 和热力学温度 T 决定, 与气体的压强和体积无关。理想气体的内能是温度的单值函数。温度是气体的状态参量, 所以内能也是理想气体状态的单值函数, 它是描述气体系统宏观状态的物理量。

对一定量的理想气体, 当温度改变 ΔT 时, 由式(10-5)可知, 内能的改变等于

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}R\Delta T \quad (10-5')$$

上式表明, 不论经历什么样的状态变化过程, 只要温度改变一定, 一定量的理想气体的内能的改变总是一定的, 它与过程无关。这一点在讨论热力学系统状态变化过程中将要用到。

第 3 节 麦克斯韦速率分布律 玻耳兹曼分布律

一、几率

在本章的第 1 节中讨论了由四个分子组成的系统, 把容器分成两个部分, 研究分子在这两个部分的分布情况, 按微观状态分, 共有 $2^4 = 16$ 个状态; 按宏观状态分, 共有五个宏观状态。每一种宏观

状态分别包含不同数目的微观状态。这一情况也可以换成下面的说法：研究四个分子在两半部分的分布情况时，共有16种不同的微观组合（微观状态）。由于分子处于不停顿的碰撞和运动中，系统在某时刻呈现何种宏观状态，具有随机性（偶然性）。但是，由于每种宏观状态都包含有确定的微观状态数，可以由此判断系统呈现某一宏观状态的可能性。例如（参见前述中的表10-1），系统呈现第（I）种宏观状态的可能性是 $\frac{1}{16}$ ，而呈现第（III）种宏观状态的可能性是 $\frac{6}{16}$ ，即 $\frac{3}{8}$ 。

在一定条件下，某事件（例如上面说的宏观状态）出现的可能性，叫做该事件的几率。

在由大量分子组成的热力学系统中，由于分子数目的众多，由于碰撞的频繁和运动的激烈，欲跟踪其中一个分子的行为，确定其位置和动量怎么随时间变化，已经是十分困难的事情；而要跟踪全体分子的力学状态，确定系统的微观状态，更是无法办到。事实上，这时关心的是系统的宏观特性（例如在上一节中寻求宏观参量与微观量的统计平均值之间的联系）和各种统计分布规律（例如下面将要介绍的麦克斯韦速率分布律和玻耳兹曼分布律）。研究统计分布规律，必须应用几率的概念。

二、麦克斯韦速率分布

1. 气体速率分布规律（麦克斯韦速率分布律）

在分子数目极大的气体系统中，由于混乱的热运动和相互间的频繁碰撞，对于一个分子而言，它的速度的大小和方向在不断地变化。某时刻，它向什么方向运动，速率有多大，都具有偶然性。它的速率可以从零到无限大区间内的任意实数值。但是，在给定的温度下，处于平衡状态的气体，个别分子的速率虽然具有偶然性，

而大量分子速率的分布却有确定的规律。麦克斯韦于1859年在几率理论的基础上导出了气体速率分布规律,称为麦克斯韦速率分布律。1920年,斯特恩(O. Stern, 1888—1969)从实验上给予了证实。

图 10-4 表示斯特恩实验装置简图。整个仪器置于真空室,水银在炉O中蒸发,一束水银气体分子从炉的小孔射出,穿过一系列狭缝(未画出)后,这束分子穿过盘D上的小缝。盘D与另一相似的盘D'相固联,但两盘的小缝错开。如果两盘不转动,则分子束不能穿过D'到达探测器C。盘转动时,如果分子从D运动到D'所经历的时间恰好等于D'的小缝旋转到D上小缝原来位置成一直线时所需的时间,则分子束可穿过D',到达探测器C。用这种方法可以探测到某特定速率的分子数。改变两盘的角速度,可使不同速率的分子通过D'。两盘狭缝虽窄,但有一定宽度,因此当转动角速度一定时,能射到探测器C的分子速率不是一个确定值 v ,而是分布在 $v \sim v + \Delta v$ 速率区间内的统计值。

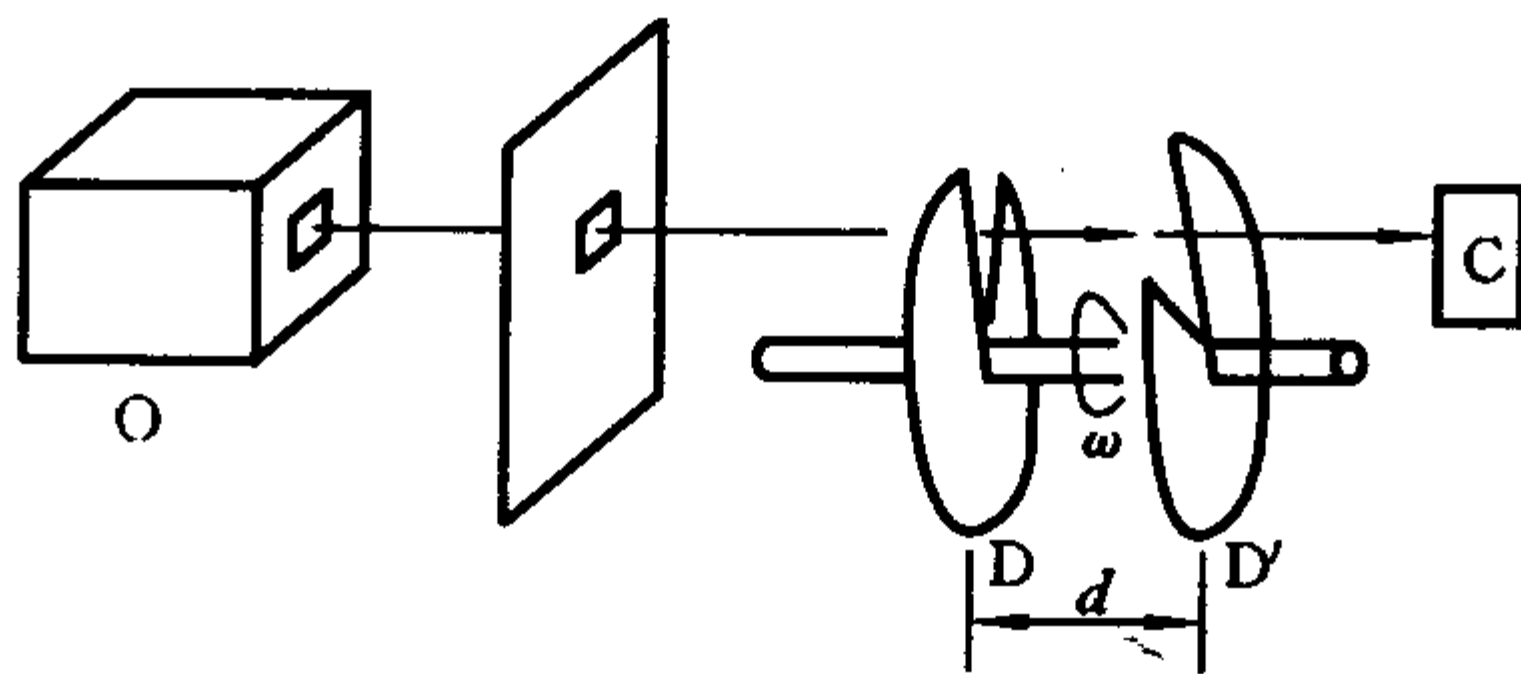


图 10-4 斯特恩实验装置

实验时,使两盘先后以不同的角速度 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 转动,由探测器C测出对应的速率区间 $v_1 \sim v_1 + \Delta v_1, v_2 \sim v_2 + \Delta v_2, \dots$ 内的分子数 $\Delta N_1, \Delta N_2, \dots$ 。用 ΔN_i 表示 i 个速率间隔 $v_i \sim v_i + \Delta v_i$ 中的分子数,那么, $\frac{\Delta N_i}{N}$ 则是该速率间隔中的相对分子数,即共有 $\frac{\Delta N_i}{N} \times 100\%$

的分子的速率在 $v_i \sim v_i + \Delta v_i$ 速率间隔中。如果考虑系统中的一个分子, $\frac{\Delta N_i}{N}$ 则表示该分子的速率在 $v_i \sim v_i + \Delta v_i$ 速率间隔中的几率。显然, 这一几率(或相对分子数) $\frac{\Delta N_i}{N}$ 与速率间隔 Δv_i 的宽窄有关。如果各个速率间隔 $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots$ 的宽窄各不相同, 则分子在这些间隔出现的几率 $\frac{\Delta N_1}{N}, \frac{\Delta N_2}{N}, \dots$ 就不便比较。为此, 用速率间隔 Δv_i 再除以 $\frac{\Delta N_i}{N}$ 得 $\frac{\Delta N_i}{N \Delta v_i}$, 它表示 $v_i \sim v_i + \Delta v$ 单位速率间隔中的相对分子数, 或者是一个分子在 $v_i \sim v_i + \Delta v_i$ 中单位速率间隔中的几率。

在图 10-5 中, 纵坐标表示 $\frac{\Delta N_i}{N \Delta v_i}$, 横坐标表示速率 v , 用实验测得的结果画出了直方图(图中的实线部分)。直方图中各小矩形的高度表示 $\frac{\Delta N_i}{N \Delta v_i}$, 小矩形的面积代表在各速率区间内的相对分子数 $\frac{\Delta N_i}{N}$ 。由图可见, 不同速率区间内的相对分子数不同, 不同速率值处的 $\frac{\Delta N_i}{N \Delta v_i}$ 也不相同。从图中还可以看到, $\frac{\Delta N_i}{N \Delta v_i}$ 随速率的变化趋势如图中虚线所示的曲线。更为重要的是, 在实验条件不变的情况下, 每次实验结果都能得到相同的曲线。实验的这个结果表明, 大

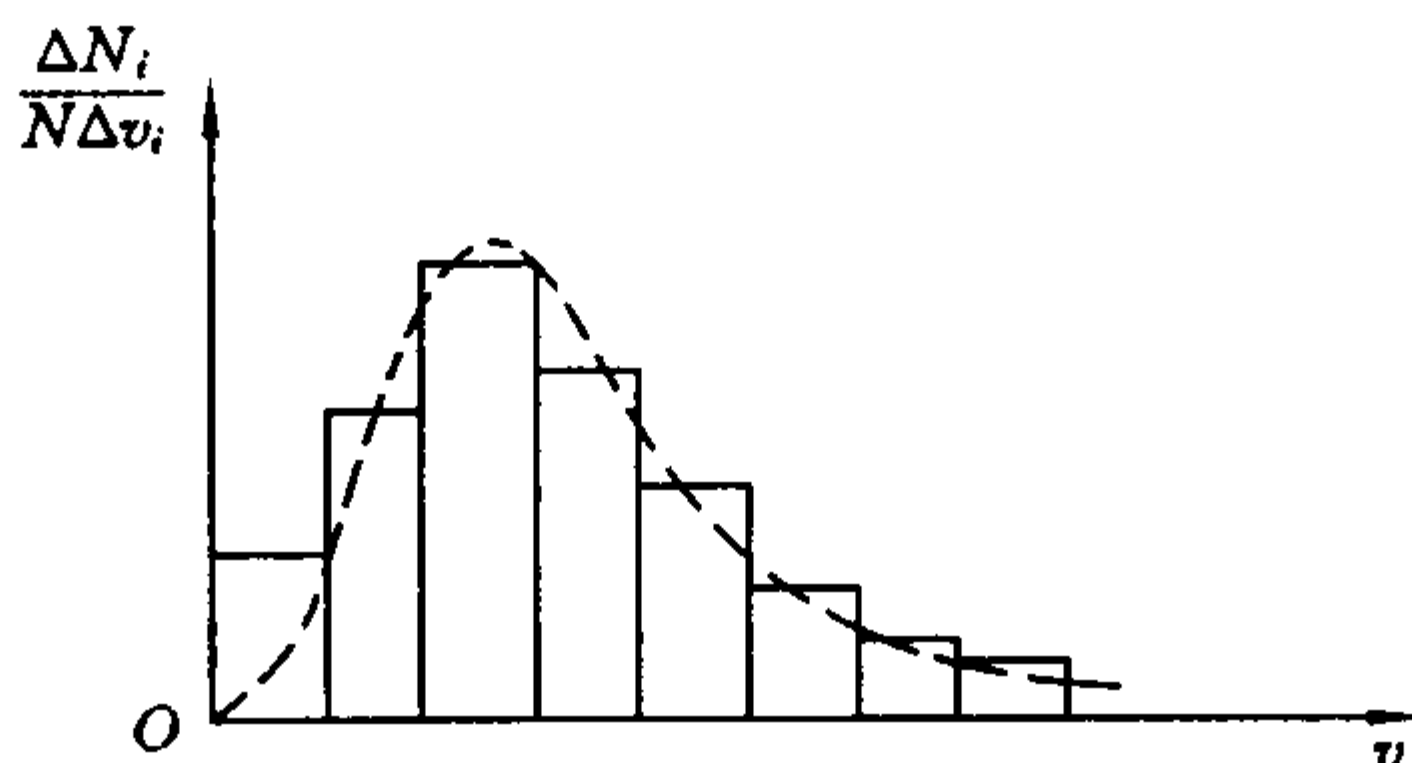


图 10-5 分子速率分布的实验结果

量分子的速率分布遵从一定的统计规律。

图 10-5 中用实线画得的直方图在许多位置偏离了用虚线画出的曲线。这种偏离是由于速率间隔 Δv_i 取得太宽而致。如果把 Δv_i 都取得十分小, 直方图就会向虚线表示的曲线靠近, 直方图中各矩形面积之和将趋近于曲线与横轴所围的面积。当 $\Delta v \rightarrow 0$ 时, 纵坐标表示的 $\frac{\Delta N_i}{N \Delta v_i}$ 的极限将成为分子速率的连续函数。我们把这个函数称为气体分子速率分布函数用 $f(v)$ 表示, 即

$$f(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N \Delta v} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv} \quad (10-6)$$

$f(v)$ 是在速率 v 附近的单位速率区间内的分子数占全体总分子数的百分率, 也表示一个分子具有该区间内的速率的几率。而

$$f(v)dv = \frac{dN}{N} \quad (10-6')$$

则表示分子速率在 $v \sim v+dv$ 区间内的分子数占气体分子总数的百分率, 也表示一个分子具有 $v \sim v+dv$ 区间内的速率的几率。

理想气体的速率分布函数 $f(v)$ 的数学表达式首先由麦克斯韦推导出来, 即

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (10-7)$$

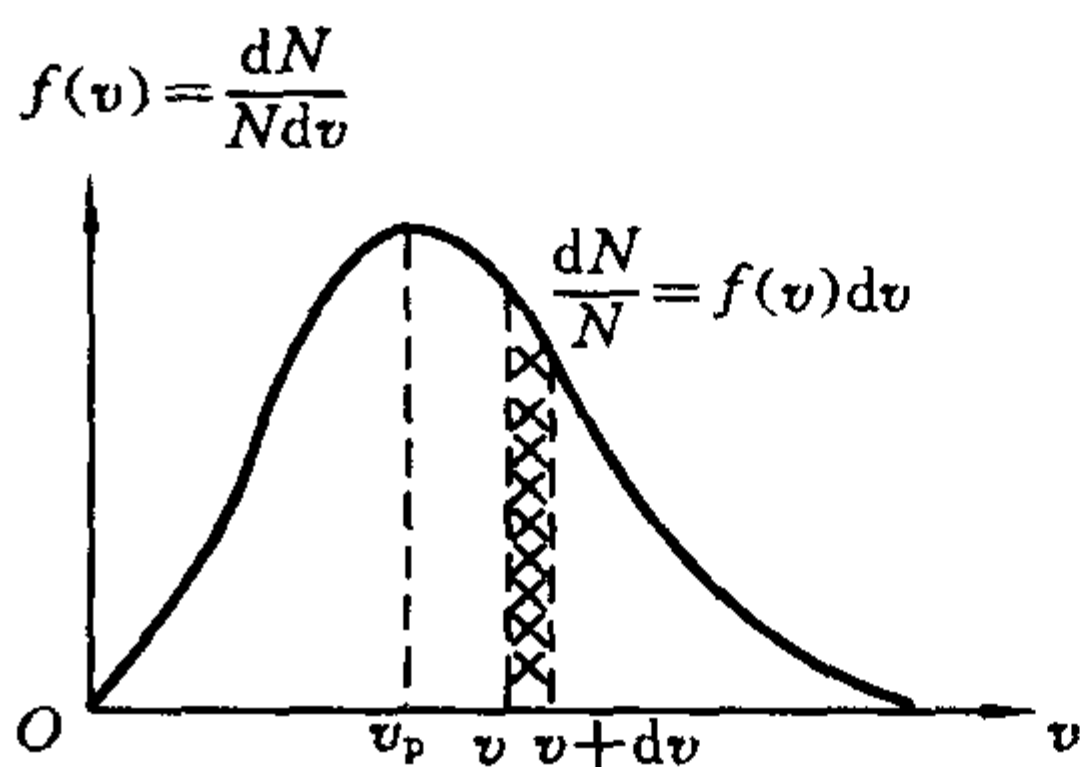


图 10-6 麦克斯韦速率分布曲线

由式(10-7)确定了气体分子速率分布规律, 称为麦克斯韦速率分布律。式中: k 为玻耳兹曼常数; m 为分子的质量; T 为气体的热力学温度。以 v 为横坐标, $f(v)$ 为纵坐标画出的曲线叫做气体分子速率分布曲线, 如图 10-6 所示。

由速率分布曲线可知, 分布曲

线从原点出发,开始, $f(v)$ 随 v 而增加, 经过一个极大值之后, 随着 v 的继续增大, $f(v)$ 减少并逐渐趋向横轴。这表明气体分子有从零到无限大的各种可能的速率; 同时还看出, 具有中等速率的分子数占气体分子总数的百分比很大, 而具有较大速率和较小速率的分子数占分子总数的百分比却很小。进一步分析还可知, 在一有限速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内曲线下的面积是

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

它表示速率在 v_1 到 v_2 区间内分子数占气体分子总数的比值, 也是一个分子速率取值在 v_1 到 v_2 区间内的几率。而曲线下的总面积 $\int_0^{\infty} f(v) dv$ 则是一个分子速率取任意数值的几率。显然, 这个几率为 100%, 即

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

这个式子称为速率分布函数的归一化。速率分布函数的归一化表明, 对温度不同的同种气体或同一温度下的不同气体, 虽然速率分布曲线不同, 但曲线与 v 轴所围成的面积都是一样的。

2. 三种速率

利用速率分布函数可求得最可几速率、平均速率和方均根速率三种速率。

(1) 最可几速率 v_p 。

速率分布曲线上, 速率分布函数 $f(v)$ 为极大值对应的速率叫做最可几速率, 用 v_p 表示。最可几速率可以从方程

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

求出, 它的表达式是

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

v_p 的物理意义是,就单位速率间隔而言,它表示在最可几速率附近的单位速率间隔内的分子数占分子总数百分比最大,或者说一个分子具有这个速率区间内的速率的几率最大。

(2) 平均速率 \bar{v} 。

气体分子速率的算术平均值叫做气体分子的平均速率,用 \bar{v} 表示,可由麦克斯韦速率分布函数 $f(v)$ 算出。其表达式是

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

(3) 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 。

气体分子速率的平方的平均值的平方根叫做气体分子的方均根速率,用 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 表示。在例 10-2 中已经从分子的平均动能与温度的关系式导出。用麦克斯韦速率分布函数 $f(v)$ 也可以求得它的表达式为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

这三种速率都与热力学温度的平方根 \sqrt{T} 成正比,与摩尔质量的平方根 $\sqrt{\mu}$ 成反比。在数值上, $\sqrt{\overline{v^2}}$ 最大, \bar{v} 次之, v_p 最小。这三种速率在不同的问题中有不同的应用:研究分子速率分布时常用最可几速率 v_p ; 计算分子的平均平动动能时用到方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$; 计算分子运动的平均自由程时用到平均速率 \bar{v} 。

对于一定的气体,温度增高时,最可几速率 v_p 增大,速率较大的分子数增多,速率较小的分子数减少,分布曲线向速率大的方向

移动。应该注意的是：由归一化条件，曲线下的总面积恒等于1，因此当温度增高时，分布曲线的高度逐渐下降，曲线变得较为平滑，如图10-7所示。

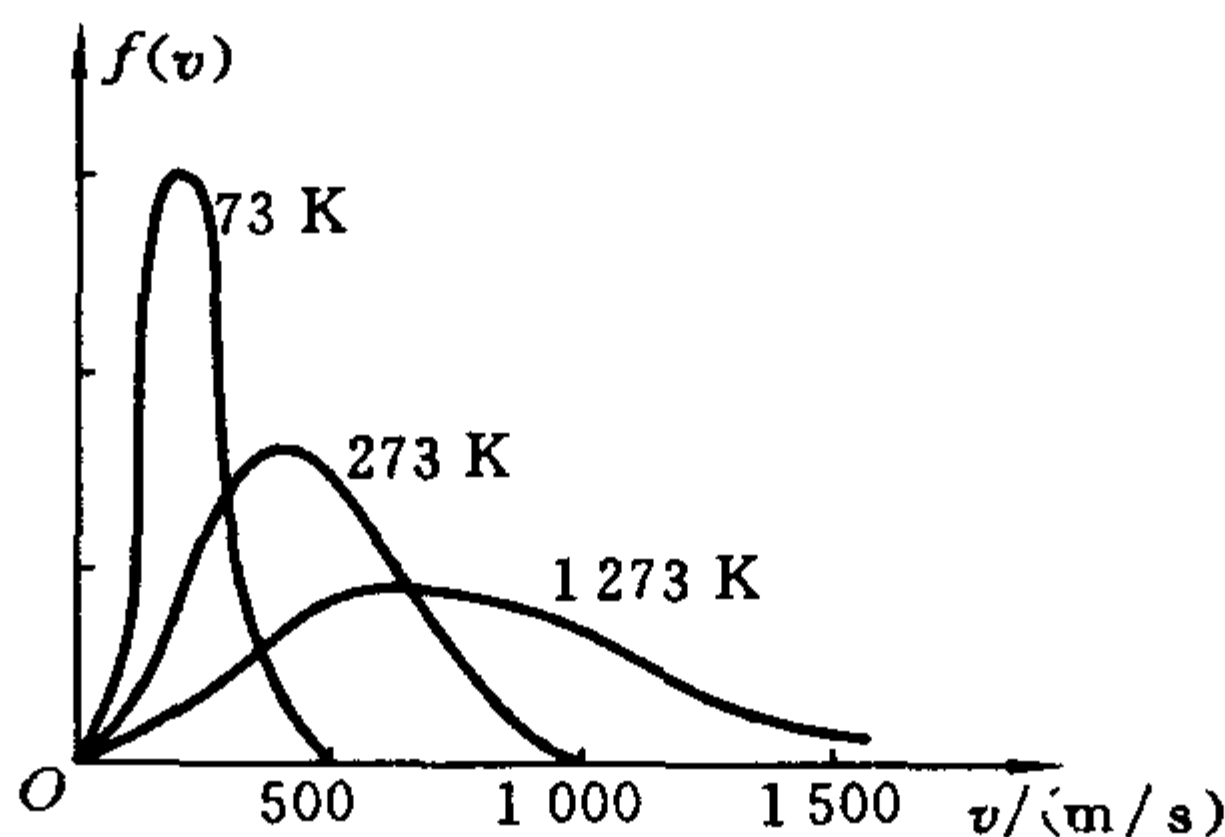


图10-7 不同温度下的分子速率分布曲线

三、玻耳兹曼分布律

麦克斯韦速率分布律的公式

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

中的函数是以分子的速率 v 作为自变量的。因为分子的平动动能 $\epsilon_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，分子按速率的分布也可以转换成动能 ϵ_k 的分布。把 $\epsilon_k =$

$$\frac{1}{2}mv^2, v = \sqrt{\frac{2\epsilon_k}{m}} \text{ 和 } dv = \frac{d\epsilon_k}{\sqrt{2m\epsilon_k}} \text{ 代入}$$

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

得到

$$f(\epsilon_k)d\epsilon_k = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_k}{kT}} \sqrt{\epsilon_k} d\epsilon_k$$

此式描述了分子按动能 ϵ_k 的分布规律，它是麦克斯韦速率分布关

系的另一种表述。这种分布只与速度或动能有关,这是因为,直到现在,我们所研究的气体系统都是处于没有外力场的空间中。

如果气体系统所在的空间有外力场,系统中的分子除了具有动能外,还有在该力场中的势能;因为动能与分子的速度有关,势能与分子在场中的位置有关,这时气体分子的分布规律除了与速率或速度有关外,还与分子的空间位置有关。玻耳兹曼经过研究,得到:在外力场中的理想气体处于平衡状态时,分子的位置坐标在区间 $x \sim x+dx, y \sim y+dy, z \sim z+dz$ 内,同时速度介于区间 $v_x \sim v_x+dv_x, v_y \sim v_y+dv_y, v_z \sim v_z+dv_z$ 中的分子数为

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{(\epsilon_k + \epsilon_p)}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz \quad (10-8)$$

式中:分子动能和势能之和 $\epsilon_k + \epsilon_p$ 为分子的总能量 ϵ ; n_0 为势能 ϵ_p 为零处的分子数密度。这个结论叫做玻耳兹曼分布律。

玻耳兹曼分布律指出,如果乘积 $dv_x dv_y dv_z dx dy dz$ 相同(即速度间隔和空间坐标间隔相同)时,分子数 dN 正比于 $e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$ 。显然,能量较大的分子数目较少,而能量较小的分子数目较多。也就是说,按统计分布来看,分子总是处于低能状态的几率大些。这正是玻耳兹曼分布律的意义所在。

如果不考虑分子的动能 ϵ_k ,只考虑分子的势能 ϵ_p ,可以用式(10-8)研究分子在空间位置的分布。所谓不考虑分子的动能,是认为分子的动能可以取任何值,或者说,分子可以具有各种速度。这时,可以根据式(10-8)从理论上证明:分子在坐标区间 $x \sim x+dx, y \sim y+dy, z \sim z+dz$ 内具有各种速度的分子数为

$$dN' = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}} dx dy dz \quad (10-8a)$$

这个结论也称为玻耳兹曼分布律。它表示,把具有各种速度的分子都计算在内,它们按势能的分布是:在相同的体积元($dx dy dz$ 相

同)内,分子数的多少与 $e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}}$ 成正比,即势能愈小,分子数愈多。分子处于低能状态的几率大些。

式(10-8a)给出了分子(或其他微粒)在势场中的分布规律。以重力场中的分子为例,在重力场中,分子的势能 $\epsilon_p = mgz$,得

$$dN' = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} dx dy dz$$

式中, dN' 表示在势能为 mgz (即高为 z)的位置处体积元 $dx dy dz$ 中的分子数。那么,这个位置处单位体积中的分子数 $n = \frac{dN'}{dx dy dz}$ 是

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (10-9)$$

可见,当温度保持一定时,在重力场中分子数密度 n 随高度的增加而按指数规律减小。因为压强 $p = nkT$,所以还可以进一步看出,压强也随高度的增高而减小。

如果用几率表示玻耳兹曼分布律,可表述为:在平衡状态下,温度为 T 的气体中,一个分子具有能量 ϵ 的几率 p_ϵ 正比于 $e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$,即

$$p_\epsilon \propto e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \quad (10-8b)$$

如果是式(10-8)所讨论的情况,这里的 ϵ 是分子动能和势能之和 $\epsilon_k + \epsilon_p$;如果是式(10-8a)所指出的情况,则 ϵ 是分子所在位置的势能。

经典物理认为,能量可以连续地取所有值,但是,近代物理的实验和理论都指出,分子和原子等微观粒子的能量只能取某些不连续的数值 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 物理学称之为能量的量子化。相应地, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 称为分子或原子的能级。实验结论表明,不论能量是否量子化,玻耳兹曼分布律照样正确。这样,对量子化的原子(或分子)系统,原子处于某个能级 ϵ_i 的几率 p_{ϵ_i} 正比于 $e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$,即

$$p_{\epsilon_i} \propto e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad (10-8c)$$

它表示原子处于低能级的几率大些。所以,在通常情况下,多数原子总是按玻耳兹曼分布律处于低能级,而高能级状态的原子则很少。应用式(10-8c)可以得到处于 ϵ_1 和 ϵ_2 这两个能级的原子数 N_1 和 N_2 的比是

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(kT)} \quad (10-8d)$$

例 10-4 二氧化碳激光器中充有 CO_2 气体。 CO_2 分子的能级中有两个能级 ϵ_1 和 ϵ_2 , $\epsilon_1 = 0.172 \text{ eV}$, $\epsilon_2 = 0.29 \text{ eV}$ 。设具有 ϵ_1 和 ϵ_2 能级的分子数各为 N_1 和 N_2 ,求273 K和673 K时具有上述两能级的分子数之比 $\frac{N_2}{N_1}$ 。(1 eV = $1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$)

解 $T = 273 \text{ K}$ 时,

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{0.119 \times 1.602 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{23} \times 273}} = 0.006 = 0.6\%$$

$T = 673 \text{ K}$ 时,

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(kT)} = e^{-\frac{0.119 \times 1.602 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{23} \times 673}} = 0.13 = 13\%$$

可见,常温下 CO_2 分子的绝大部分都处于低能级状态;当温度升高时,具有较大能量状态的分子逐渐增多。

思 考 题

10-1 试解释物体为什么能够被压缩,但又不能被无限地压缩?

10-2 平衡态有何特征?气体处于平衡态时还有热运动吗?这种平衡态与力学中所指的平衡有何不同?

10-3 对一定量的气体来说,温度不变时,压强随体积减小而增大;体积不变时,压强随温度升高而增大。从宏观来看,两种变化

过程都使压强增大。从分子热运动来看,它们有什么区别?

10-4 通常把水银温度计或酒精温度计放到口中度量体温时,总要等几分钟后才从口中取出。这是什么道理?

10-5 为什么说温度具有统计意义?单讲一个分子的温度有无意义?

10-6 气体分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$, 如何理解? 如果容器内只有一个分子或几个分子, 能否根据 $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$ 来计算它的平均平动动能? 此时, 这个式子还有意义吗?

10-7 从状态方程式 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 中可以看出, 在等温条件下, 当 $p \rightarrow \infty$ 时, $V \rightarrow 0$ 。这种情况在实际气体中有可能吗? 为什么?

10-8 力学中的平均速率与分子物理学中的平均速率是否具有相同的物理含义?

10-9 气体分子的平均速率、最可几速率和方均根速率的物理意义有什么区别? 它们和温度有什么关系? 它们和物质的量 (μ) 有什么关系?

10-10 两种不同的理想气体, 若它们分子的平均速率相等, 则:

- (1) 它们的方均根速率是否相等?
- (2) 最可几速率是否相等?
- (3) 分子的平均平动动能是否相等?

10-11 气体分子的平均速率可达每秒几百米, 那么为什么在房间内打开一汽油瓶的瓶塞后, 隔一段时间才能嗅到汽油味?

10-12 试指出下列各式所表示的物理意义: (1) $\frac{1}{2}kT$; (2) $\frac{3}{2}kT$; (3) $\frac{i}{2}kT$; (4) $\frac{i}{2}RT$; (5) $\frac{M}{\mu} \frac{3}{2}RT$; (6) $\frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT$ 。

习 题

10-1 质量为 2×10^{-3} kg 氢气储于体积为 2×10^{-3} m³ 的容器中,当容器内气体的压强为 300 mmHg (1 mmHg \approx 133 Pa) 时,氢气分子的平均平动动能是多少? 总平动动能是多少?

10-2 目前实验室能获得的真空,其压强为 10^{-10} mmHg。试问,温度 27 °C 时在此真空中每立方厘米内有多少个气体分子?

10-3 体积为 10^{-3} m³ 的容器中含有 1.03×10^{23} 个氢气分子,如果其中压强为 1.013×10^5 Pa。试求气体的温度和分子的方均根速率。

10-4 一摩尔氢气,在温度为 300 K 时,分子的总平动动能、总转动动能和气体的内能各是多少?

10-5 (1) 当氧气压强为 2.026×10^5 Pa, 体积为 3×10^{-3} m³ 时,所有氧气分子的总能量是多少?

(2) 当温度为 300 K 时, 4×10^{-3} kg 的氧气的内能是多少?

10-6 在体积为 3×10^{-2} m³ 的容器中装有 2×10^{-2} kg 的气体,容器内气体压强为 0.5 大气压。求气体分子的最可几速率。

10-7 温度为 273 K、压强为 1.01×10^3 Pa 时,某种气体的密度为 1.25×10^{-2} kg/m³。试求:

(1) 气体分子的方均根速率;

(2) 气体的摩尔质量,并指出是哪一种气体。

10-8 证明气体分子的最可几速率为 $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ 。

第11章 热力学基础

热力学是研究热力学系统的宏观状态及其变化规律的科学。热力学以观测和实验为依据,从能量观点出发来说明热、功等的基本概念,以及它们之间相互转换的关系和条件。本章讨论的中心问题是热力学第一定律和热力学第二定律。

第1节 热力学第一定律

一、内能 热量 功

热力学系统的内能是组成系统的所有分子的各种动能、分子间相互作用的势能以及分子内部原子、电子的能量的总和。由于内能是状态的单值函数,系统处于某一状态时,具有确定的内能;系统与外界发生能量交换,从一个状态变化到另一个状态时,不管它的转化过程怎样,内能的改变总是一定的。

要改变热力学系统的状态,或者说使系统的内能变化,有两种方式:一是外界对系统传递热量;二是外界对系统做功。例如,汽缸中的气体可因吸热而升温,增大内能;也可因外力推动活塞做功,压缩气体而升温,增大内能。可见,就改变系统内能而言,做功和传

递热量具有相同的效果。功是能量变化的量度,同样,热量也是能量变化的量度。功是与物理过程相联系的物理量,热量也是与物理过程有联系的物理量。说某个系统具有多少热量是毫无意义的,只能说,在一个物理过程中传递了多少热量。

做功是通过系统与外界物体之间产生宏观的相对位移完成的,是外界物体有规则运动和系统内分子无规则热运动之间发生能量转换,从而改变系统的内能的过程。传递热量是通过系统与外界接触边界处分子之间的碰撞来完成的,是系统外物体分子无规则热运动与系统内分子无规则热运动之间交换能量的过程。

在国际单位制中,热量的单位是焦(J)。

二、热力学第一定律

实验证明,系统在状态变化的过程中,若从外界吸收热量 Q ,内能从初状态的值 E_1 变化到末状态的值 E_2 ,同时对外做功 W 。系统所吸收的热量 Q ,在数值上一部分使系统内能增加,另一部分用于系统对外作功,用公式表示上述关系是

$$Q = E_2 - E_1 + W \quad (11-1)$$

这一关系称为热力学第一定律。显然,热力学第一定律是包括热现象在内的能量转换和守恒定律。在式(11-1)中: Q 代表系统从外界吸收的热量, W 代表系统对外做的功。按此规定,当 Q 为正值($Q > 0$)时,表示系统从外界吸收热量; Q 为负值($Q < 0$)时,表示系统向外界放出热量。 $W > 0$ 时表示系统对外做功, $W < 0$ 时表示外界对系统做功。式中的 $E_2 - E_1$ 可以写成 ΔE , $\Delta E > 0$,表示系统的内能增加了; $\Delta E < 0$,表示系统的内能减少了。

对系统状态的微小变化过程, dQ 表示系统吸收的热量, dW 表示系统对外做的功, dE 表示系统内能的增加量。热力学第一定律可表示为

$$dQ = dE + dW \quad (11-1')$$

热力学第一定律指出,要使系统对外做功($W > 0$),必然要消耗系统的内能,或由外界给系统传递热量,或者两者兼而有之。历史上,有人企图设计一种机器,使系统不断地经历状态变化而仍然回到初始状态($\Delta E = 0$),同时在这个过程中又无须外界提供任何能量($Q = 0$),却可以不断地对外做功($W > 0$)。人们称此类机器为第一类永动机。它违反热力学第一定律,不可能实现。

三、平衡过程

1. 平衡过程

前面已经说过,可以用一组宏观参量(p, V, T)来描述质量一定的理想气体系统的平衡状态。从理想气体的状态方程式(10-1)又可知道,一组(p, V, T)参量中只有两个是独立的。因此,描述质量一定的理想气体系统的平衡状态,只要其中任意两个参量就可。

以压强 p 表示纵坐标,体积 V 表示横坐标的直角坐标系(见图11-1(a)),称为 p - V 图。显然 p - V 图上一点表示质量一定的气体系统的一个平衡状态。对非平衡状态,由于气体系统各部分的压强和温度皆不相同,无法在 p - V 图上表示。

设想气体系统从一个平衡状态(如图11-1(a)中的I点所表示

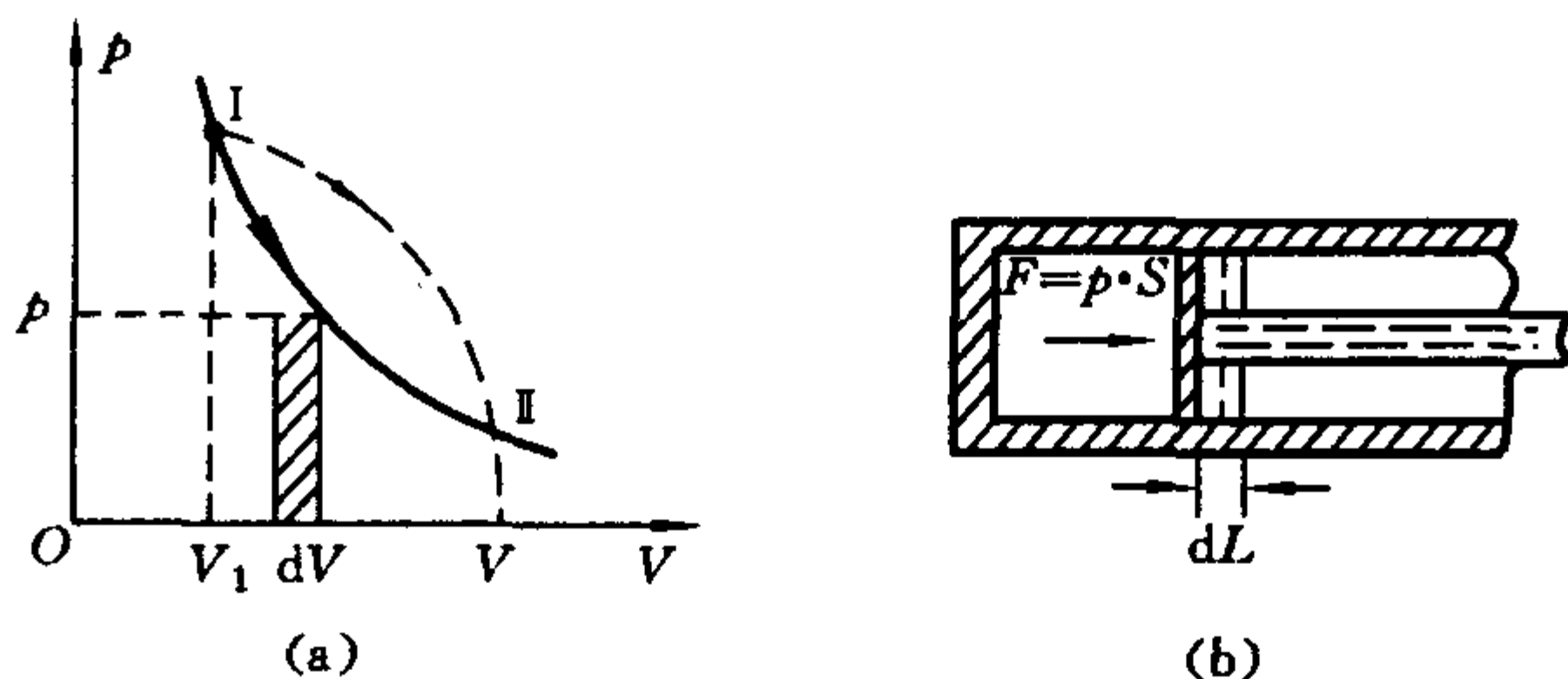


图 11-1 平衡过程和气体膨胀做功

的状态)开始,经历一个过程后到达另一个平衡状态(图 11-(a)中的 II)。如果所经历的中间过程的状态不是平衡态(不是由平衡态构成的热力学过程),当然无法在 p - V 图上表示。但是,如果控制外界条件,使状态变化的过程进行得足够缓慢,以致在每一时刻系统所经历的中间状态都无限接近于平衡状态,这样的热力学过程可以看成由无限多个近似于平衡状态的状态组成。这种变化过程叫做平衡过程,或称准静态过程。显然,平衡过程可以用 p - V 图上的一条曲线表示。非平衡的热力学过程无法表示在 p - V 图上。有时用一条虚线作为非平衡过程的示意。图 11-1(a)中曲线的箭头表示过程进行的方向。平衡过程是理想过程,对平衡过程的讨论有助于探讨实际的非平衡过程。在热力学中主要研究各种平衡过程的能量转换关系。

2. 气体系统做功的表达式

设有图 11-1(b)所示的汽缸,其中气体压强为 p ,活塞的截面积为 S ,如果气体从状态 I 沿实线所表示的过程膨胀到状态 II(见图 11-1(a)),压强 p 不是常数,气体对活塞的压力 $F = pS$ 是变力。计算变力做功,应先写出功的表达式。当活塞移动微小距离 dL 时,气体对外所做的元功 $dW = FdL = pSdL = pdV$,即

$$dW = pdV \quad (11-2)$$

系统从状态 I (p_1, V_1, T_1) 变化到状态 II (p_2, V_2, T_2), 气体对外所作的总功

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (11-2')$$

它等于 p - V 图上从 I 到 II 的那段曲线与横坐标之间的曲边梯形的面积。式(11-2)和式(11-2')是用活塞为例讨论得到的,但是,这个结论对任何形状的气体系统都适用。在一般情况下,压强 p 是体积 V 的函数,根据气体状态方程和实际平衡过程的特征找出函数

$p(V)$ 的数学形式,就可对式(11-2')积分算出 W 来。

有了做功表达式(11-2)和式(11-2'),则气体系统热力学第一定律可以写成

$$dQ = dE + p dV \quad (11-3)$$

和
$$Q = E_2 - E_1 + \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (11-3')$$

第2节 热力学第一定律应用于理想气体特征过程

热力学第一定律讨论了系统在状态变化过程中,被传递的热量、功和内能之间的相互关系。它是自然界的一条普遍定律,不论是气体、液体或固体系统,都能适用。本节只讨论在理想气体的几种特殊过程中热力学第一定律的应用。

一、等容过程 摩尔定容热容

1. 等容过程

气体体积保持不变($V = \text{恒量}$,或者 $dV = 0$)的状态变化过程叫做等容过程。在 $p-V$ 图上,等容过程是一条平行于 p 轴的直线,这条直线叫做等容线,如图11-2所示。

在等容过程中,由于 $dV = 0$,所以 $dW = 0$,气体不做功。热力学第一定律变成

$$dQ_V = dE \quad \text{或} \quad Q_V = E_2 - E_1$$

式中: Q 标以脚标 V ,表示是等容过程中系

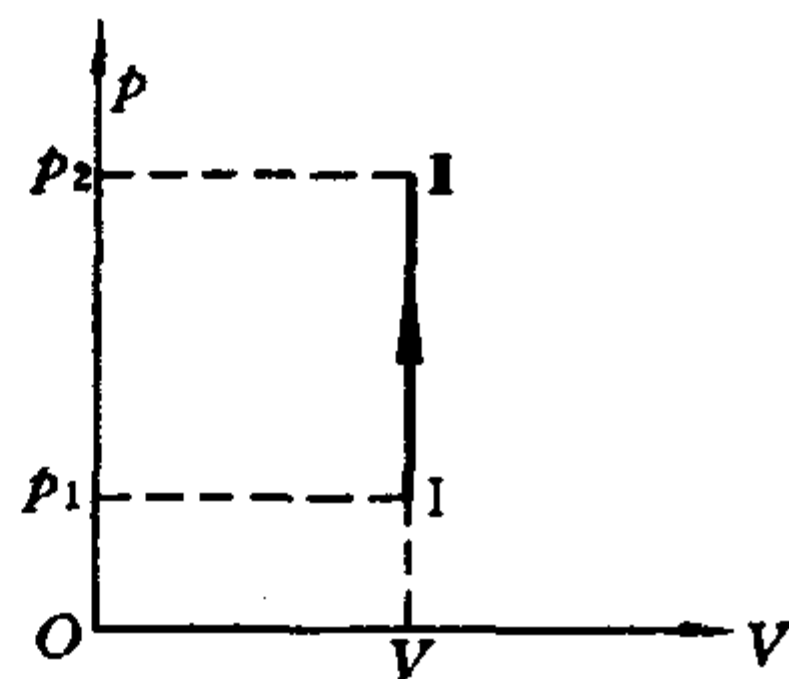


图11-2 等容过程

统吸收的热量; E_1 和 E_2 分别表示状态 I 和状态 II 的内能。由上式可见, 在等容过程中, 系统从外界吸收的热量全部用于增加系统的内能; 或者说, 系统向外界放出热量时, 系统将减少同样多的内能。

2. 摩尔定容热容

在体积不变的条件下, 1 mol 的理想气体, 温度升高(或降低) 1 K 时, 吸收(或放出)的热量, 称为该气体的摩尔定容热容, 用 $C_{V,m}$ 表示。即

$$C_{V,m}^{\text{def}} = \frac{dQ_V}{dT}$$

因为 1 mol 理想气体的内能 $E = \frac{i}{2}RT$, 故 $dE = \frac{i}{2}RdT$, 又因为 $dQ_V = dE$, 所以

$$C_{V,m}^{\text{def}} = \frac{dQ_V}{dT} = \frac{dE}{dT} = \frac{i}{2}R \quad (11-4)$$

由式(11-4)对 1 mol 气体, 有 $dE = C_{V,m}dT$, 而对 $\frac{M}{\mu}$ mol 气体, 有 $dE = \frac{M}{\mu}C_{V,m}dT$ 。将此式从状态 I (p_1, V_1, T_1) 积分到状态 II (p_2, V_2, T_2), 得 $E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2 - T_1)$, 所以

$$\begin{aligned} Q_V &= E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2 - T_1) \\ &= \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}R(T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (11-5)$$

式中: Q_V 表示等容过程中系统吸收的热量, 而 $E_2 - E_1$ 表示系统从状态 I 到状态 II 内能的改变量。前者是对等容过程而言, 后者与过程无关。等式 $Q_V = E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}R(T_2 - T_1)$ 的意义是: 理想气体状态改变时, 其内能的改变 ($E_2 - E_1$) 总可以用 T_1 和 T_2 两条等温线之间的一个等容过程中系统所吸收的热量 Q_V 来度量。因为 $Q_V =$

$\frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$, 所以有理由用摩尔等容热容 $C_{V,m}$ (或 $\frac{i}{2}R$) 计算任何两个状态之间内能的变化。

二、等压过程 摩尔定压热容

1. 等压过程

气体压强保持不变 ($p = \text{恒量}$, 或者 $dp = 0$) 的过程, 叫做等压过程。在 $p-V$ 图上, 等压强过程是一条平行于 V 轴的直线, 如图 11-3 所示。这条直线叫做等压线。

等压过程中, 热力学第一定律表示式 $dQ_p = dE + pdV$ 中的压强不变。气体从状态 I (p_1, V_1, T_1) 变化到状态 II (p_2, V_2, T_2) 的等压过程中, 系统对外做功 $W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1)$, 所以

$$Q_p = E_2 - E_1 + p_1(V_2 - V_1)$$

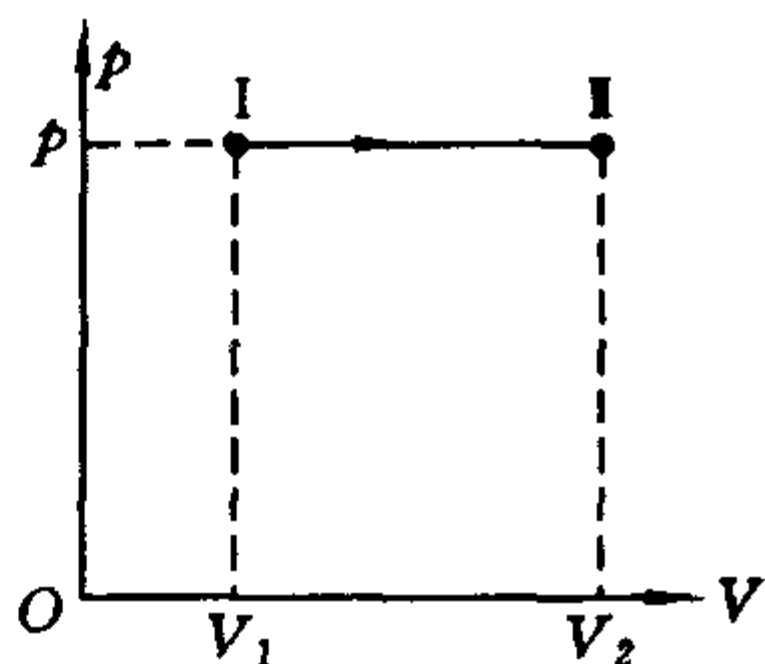


图 11-3 等压过程

把式(11-5)的内能公式 $E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2 - T_1)$ 和理想气体的状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 代入上式, 得等压过程中气体吸收(或放出)的热量

$$\begin{aligned} Q_p &= \frac{M}{\mu}C_{V,m}(T_2 - T_1) + \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1) \\ &= \frac{M}{\mu}(C_{V,m} + R)(T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (11-6)$$

2. 摩尔定压热容

在压强不变的条件下, 1 mol 的理想气体, 温度升高(或降低) 1 K 时, 吸收(或放出)的热量叫做该气体的摩尔定压热容。用 $C_{p,m}$ 表示, 则

$$C_{p,m}^{\text{def}} = \frac{dQ_p}{dT}$$

由于 p 不变, $dp=0$, 1 mol 理想气体状态方程的微分形式变成 $p dV = R dT$, 其内能公式 $dE = \frac{i}{2} R dT = C_{v,m} dT$, 所以 $dQ_p = dE + p dV = (C_{v,m} + R) dT$, 故

$$C_{p,m}^{\text{def}} = \frac{dQ_p}{dT} = C_{v,m} + R = \frac{i+2}{2} R \quad (11-7)$$

从上式可以看出 $C_{p,m} > C_{v,m}$, 这是因为在等压膨胀过程中, 除了气体温度增高, 内能增加外, 系统还要对外做功, 所吸收的热量多于等容过程。对 1 mol 理想气体, 在等压过程中有 $p dV = R dT$ 或 $p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$ 。显然, R 在数值上等于 1 mol 理想气体等压膨胀时, 在温度升 1 K 的过程中系统对外做功的大小。

有了物理量 $C_{p,m}$, 等压过程中气体吸收(或放出)的热量可以表示成

$$Q_p = \frac{M}{\mu} C_{p,m} (T_2 - T_1) \quad (11-8)$$

三、等温过程

温度保持不变 ($T = \text{恒量}$, 或者 $dT = 0$) 的过程, 叫做等温过程。

理想气体的等温线是 $p-V$ 图上的一条双曲线, 如图 11-4 所示。

等温过程中, 温度不变时, $dT = 0$, 对理想气体系统有 $dE = C_{v,m} dT = 0$, 即内能不发生变化。此时, 热力学第一定律变成

$$dQ_p = p dV$$

下面计算从状态 I (p_1, V_1, T_1) 沿着等温线变到状态 II (p_2, V_2, T_2) 的过程

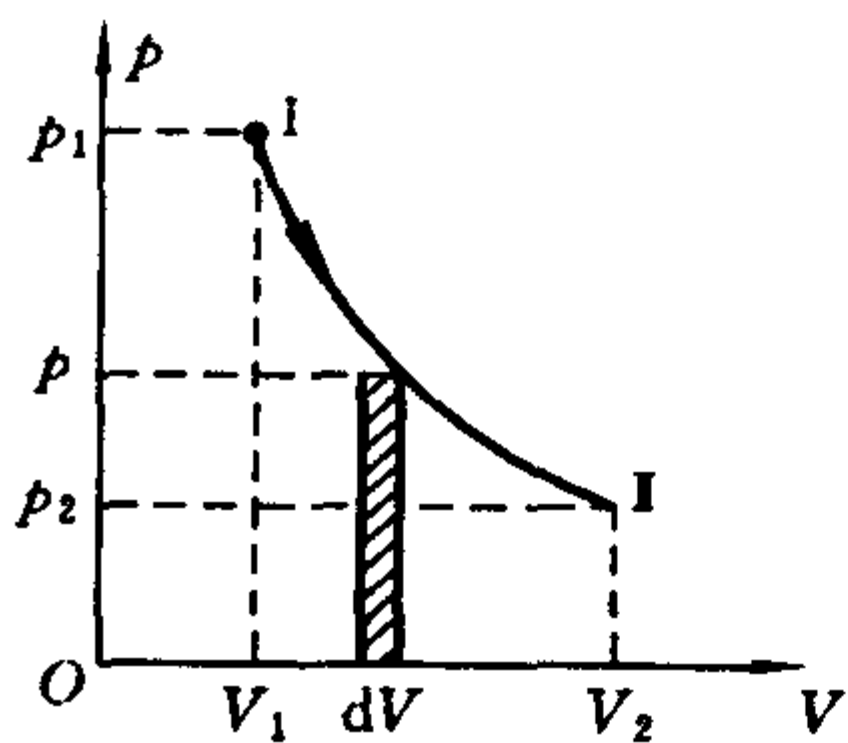


图 11-4 等温过程

中,系统对外所做的功。由理想气体的状态方程,得

$$p = \frac{M}{\mu}RT_1 \frac{1}{V}$$

压强 p 是体积 V 的函数。对 $p dV$ 积分,得

$$W = \frac{M}{\mu}RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

所以,等温过程中气体吸收(或放出)的热量是

$$\left. \begin{aligned} Q_T = W &= p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ Q_T = W &= p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned} \right\} \quad (11-9)$$

例11-1 将摩尔数相等的三种气体He、N₂和CO₂都看做理想气体,它们从相同的初始状态出发,都经过等容吸热过程。如果吸收的热量相等,试问:

(1) 温度升高是否相等?

(2) 压强增加是否相等?

解 (1) 等容过程, $dV=0, W=0$, 所以

$$Q_V = E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$$

因为 $\frac{M}{\mu}$ 相同, $C_{V,m} = \frac{i}{2}R$, He, $i=3$; N₂, $i=5$; CO₂, $i=6$ 。由于吸收的热量相同,而三种气体的 $C_{V,m}$ 不同,故

$$(\Delta T)_{\text{He}} > (\Delta T)_{\text{N}_2} > (\Delta T)_{\text{CO}_2}$$

即三种气体温度升高不相等。

(2) 由于 $p=nkT$ 得 $\Delta p=nk\Delta T$ 。因为三种气体初始状态相同,摩尔数相同,故单位体积内的分子数相等,根据(1)的计算结果,得

$$(\Delta p)_{\text{He}} > (\Delta p)_{\text{N}_2} > (\Delta p)_{\text{CO}_2}$$

即三种气体压强增加不相等。

四、绝热过程

系统与外界没有热量交换(即 $dQ=0$)的过程叫做绝热过程。例如在热水瓶内或者用毛绒毡子、石棉等绝热材料包起来的容器内所经历的状态变化过程,可以近似看成绝热过程。又如,内燃机汽缸里的气体被迅速压缩的过程或者爆炸后急速膨胀的过程,由于这些过程进行很迅速,热量来不及和四周交换,也可以近似地看成绝热过程。在 p - V 图上表示绝热过程的曲线叫做绝热线。

在绝热过程中,由于 $dQ=0$,所以热力学第一定律为

$$dW = -dE$$

气体从状态 I (p_1, V_1, T_1) 经一绝热过程变化到状态 II (p_2, V_2, T_2) 时

$$W = - \int_{E_1}^{E_2} dE = - (E_2 - E_1)$$

可见,在绝热过程中,系统对外做功 W ,完全依靠自身内能的减少 $-(E_2 - E_1)$;或者说,外界对系统做功 W (即系统做功 $-W$),全部用于增加系统的内能 $E_2 - E_1$ 。由内能公式 $E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$,可以得到绝热过程中气体所做的功

$$W = - \frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1) \quad (11-10)$$

下面推导绝热过程中理想气体遵循的方程——绝热方程。由绝热过程的热力学第一定律 $dW = -dE$ 和公式

$$dE = \frac{M}{\mu} C_{V,m} dT$$

得该过程元功表达式

$$dW = p dV = - \frac{M}{\mu} C_{V,m} dT \quad (1)$$

而理想气体状态方程的微分式是

$$pdV + Vdp = \frac{M}{\mu}C_{V,m}dT \quad (2)$$

以式①和式②中消去 dT , 整理后, 得

$$(C_{V,m} + R)pdV = -C_{V,m}Vdp$$

对变量 p 和 V 加以分离, 有

$$\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

令 $\gamma^{\text{def}} = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$, 上式可写成

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

对上式积分, 得

$$\gamma \ln V + \ln p = C'$$

或

$$\ln(pV^\gamma) = C'$$

所以

$$pV^\gamma = C(\text{恒量}) \quad (11-11a)$$

利用状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$, 还可以把上式变换成

$$\left. \begin{aligned} V^{\gamma-1}T &= \text{恒量} \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} &= \text{恒量} \end{aligned} \right\} \quad (11-11b)$$

式(11-11a)和式(11-11b)中的另外两个公式, 都称为理想气体的绝热方程, 其中

$\gamma^{\text{def}} = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$ ($\gamma > 1$) 叫做比热容比。

把式(11-11)中表示的 $p-V$ 的关系画在 $p-V$ 图上, 所得曲线即绝热线。图 11-5 中画出了一条绝热线和一条等温线, 它们相交于 A 点。在 A 点比较这两条线, 很明显, 绝热线陡一些。两者的斜率

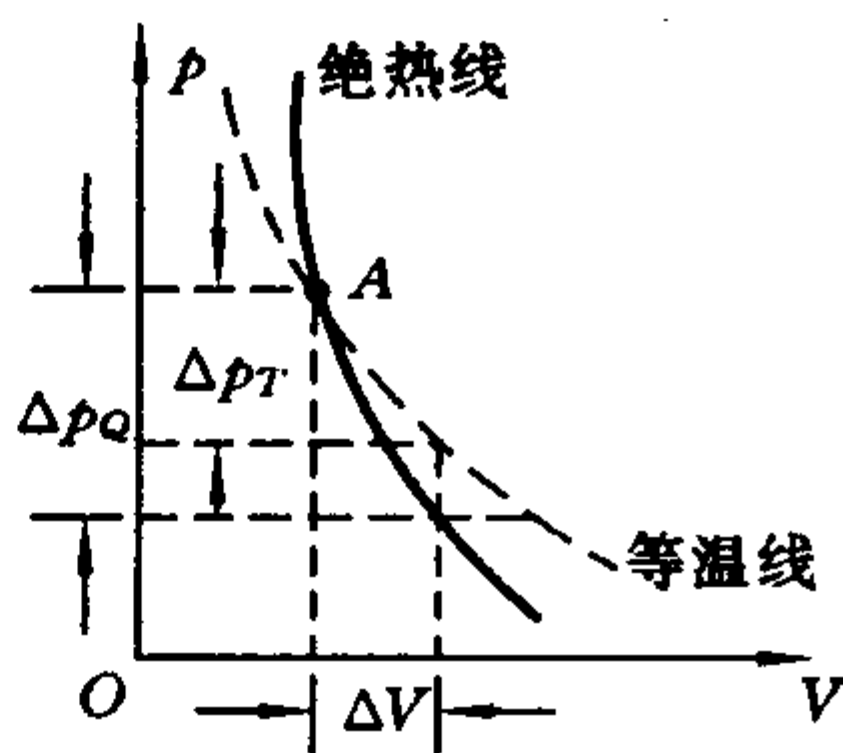


图 11-5 绝热线与等温线比较

不同,表明系统从相同的初态出发,作相同体积的膨胀(ΔV 相同)时,绝热过程中压强降低得快一些。这是因为等温膨胀过程中的内能不变,压强降低只取决于分子数密度的减小。而绝热膨胀过程中,除了分子数密度减小外,系统的内能还要减小。

例 11-2 证明绝热过程中的功可用下式计算

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}。$$

证明 由绝热过程方程(11-11)有

$$pV^\gamma = C(C \text{ 为恒量}) \quad \text{或} \quad p = \frac{C}{V^\gamma}$$

则
$$dW = p dV = C \frac{dV}{V^\gamma}$$

所以 $\int_0^W dW = C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma}$, 得

$$W = \frac{C(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})}{1-\gamma}$$

因为 $C = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, 故

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$$

例 11-3 有体积为 $1 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 的 CO 气体, 压强为 10^7 Pa , 绝热膨胀后, 压强为 10^5 Pa 。求气体所做的功。

解法一 由 $W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$, 已知 $p_1 = 1 \times 10^7 \text{ Pa}$, $p_2 = 1 \times 10^5$

Pa, $V_1 = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, 根据 $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, $V_2 = V_1 \sqrt[\gamma]{\frac{p_1 V_1^\gamma}{p_2}} = \sqrt[\gamma]{\frac{p_1}{p_2}} V_1$

对 CO 气体分子, $i=5$, 所以

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{5+2}{2} = 1.4$$

故

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} V_2}{\gamma - 1} = \frac{(10^7 - 10^5 \times 100^{\frac{1}{1.4}}) \times 10^{-2}}{1.4 - 1}$$

$$= 1.83 \times 10^5 \text{ (J)}$$

解法二 由 $W = -(E_2 - E_1) = -\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$

$$= -\frac{i}{2} p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

根据 $p_1^{\gamma-1} T_1^{-\nu} = p_2^{\gamma-1} T_2^{-\nu}$, 得 $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ 。故

$$W = -\frac{i}{2} p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$= -\frac{5}{2} \times 10^7 \times 10^{-2} \times \left[\left(\frac{10^5}{10^7} \right)^{\frac{0.4}{1.4}} - 1 \right]$$

$$= 1.83 \times 10^5 \text{ (J)}$$

第3节 循环过程 卡诺循环

一、循环过程

1. 循环过程

热力学是在蒸汽机问世之后,为解决热机的理论问题而发展起来的。任何一种热机,首先要有工作物质。例如,蒸汽机中的蒸汽,柴油机中的混合气体,都是工作物质。为了讨论的方便,我们选用理想气体作为工作物质,即以理想气体系统作为研究对象。其

次,要使热机能连续地工作下去,必须使工作物质回复到最初的状态,以便能够不断地往复工作而实现持续的热功转换。这种使工作物质系统的状态经过一系列变化之后,又回到初始状态的整个过程叫做循环过程,简称循环。如果循环过程是平衡过程,在 p - V 图上可以用一条封闭曲线表示。图 11-6 画出了一个循环的曲线。

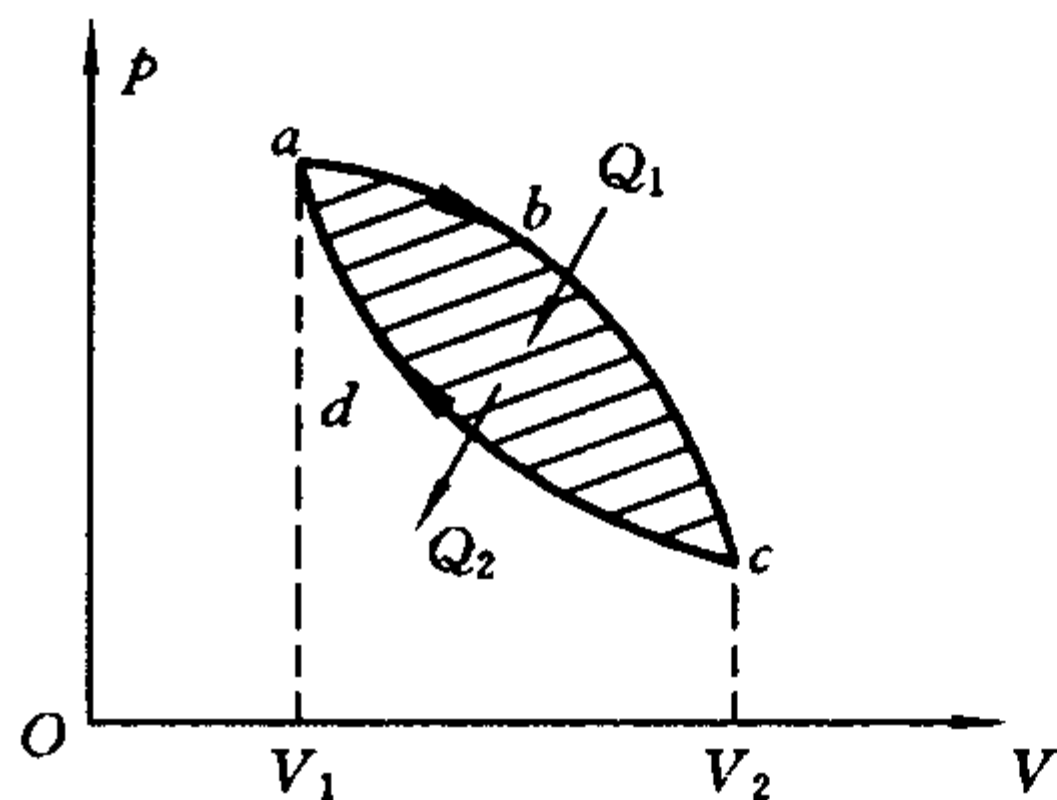


图 11-6 循环过程

循环是一种特殊的过程。经过一个循环之后,系统回复到最初的状态。设初态系统的内能是 E_1 , 用 E_2 表示经过一个循环后系统的内能。因为内能是状态的单值函数,所以 $E_2 = E_1$, 即 $\Delta E = 0$ 。下面讨论循环过程中的能量转换关系,即在循环过程中系统与外界热量的交换和系统对外界所做的功。

任何循环过程可由若干个分过程组成。图 11-6 中的循环可认为由 abc 和 cda 两个过程组成。在 abc 过程中,设系统吸收的热量为 Q_1 , 对外界做功为 W_1 , 根据热力学第一定律,有

任何循环过程可由若干个分过程组成。图 11-6 中的循环可认为由 abc 和 cda 两个过程组成。在 abc 过程中,设系统吸收的热量为 Q_1 , 对外界做功为 W_1 , 根据热力学第一定律,有

$$Q_1 = E_c - E_a + W_1 \quad (1)$$

由图可见 cda 是体积压缩的过程,压缩过程中是外界对系统做功,而且通常是系统对外放热。按照热力学第一定律表达式(11-1)的约定,在此过程中系统吸收的热量是负值,系统对外所做的功也是负值。设在 cda 过程中系统放出热量的多少为 $|Q_2|$, 外界对系统做功的大小是 $|W_2|$, 那么,根据热力学第一定律,有

$$-|Q_2| = E_a - E_c - |W_2| \quad (2)$$

把式①和式②加起来,得

$$Q_1 - |Q_2| = W_1 - |W_2| \quad (11-12a)$$

或

$$Q_1 - |Q_2| = W \quad (11-12b)$$

其中 $W = W_1 - |W_2|$ 表示整个循环过程中, 系统对外作的净功, $Q_1 - |Q_2|$ 是循环过程中系统从外界吸取的净热量。式(11-12b)表示在一个循环中, 系统对外作的净功在数值上等于外界吸取的净热量, 它等于 p - V 图上循环曲线包围的面积。

2. 热机的效率

仔细分析循环过程, 就会看出, 在循环过程中, 工作物质要从外界吸热 Q_1 ; 在循环中, 工作物质对外做功 W ; 而且, 在此循环中, 工作物质还向外界放出热量 Q_2 , 称提供热量 Q_1 者为高温热源, 接受热量 Q_2 者为低温热源。高温热源就是热机的能源。热机经过一个循环从能源吸取的热量 Q_1 只有一部分 $Q_1 - |Q_2|$ 变成热机对外所做的有用功 W , 剩下的 Q_2 放给低温热源而废弃不用。我们把 W 与 Q_1 的比值称为热机的热效率, 或称热机的效率, 用 η 表示, 所以

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \quad (11-13)$$

二、卡诺循环

图11-7(b)中画出了一个由两条等温线 AB 、 CD 和两条绝热线 BC 、 DA 组成的循环。这个循环称为卡诺循环。卡诺循环在分析热机的效率上有重要的意义。我们把按卡诺循环工作的热机称为卡诺热机。卡诺热机的工作物质是理想气体。下面分别讨论卡诺循环的四个过程, 从而研究卡诺循环及其效率。

在等温膨胀过程 AB 中, 系统吸收的热量全部转化为对外做功, 即

$$Q_1 = W_1 = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (3)$$

在绝热膨胀过程 BC 中, 系统对外所做的功等于内能的减少, 即

$$W_2 = -(E_2 - E_1) = -\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1) \quad (4)$$

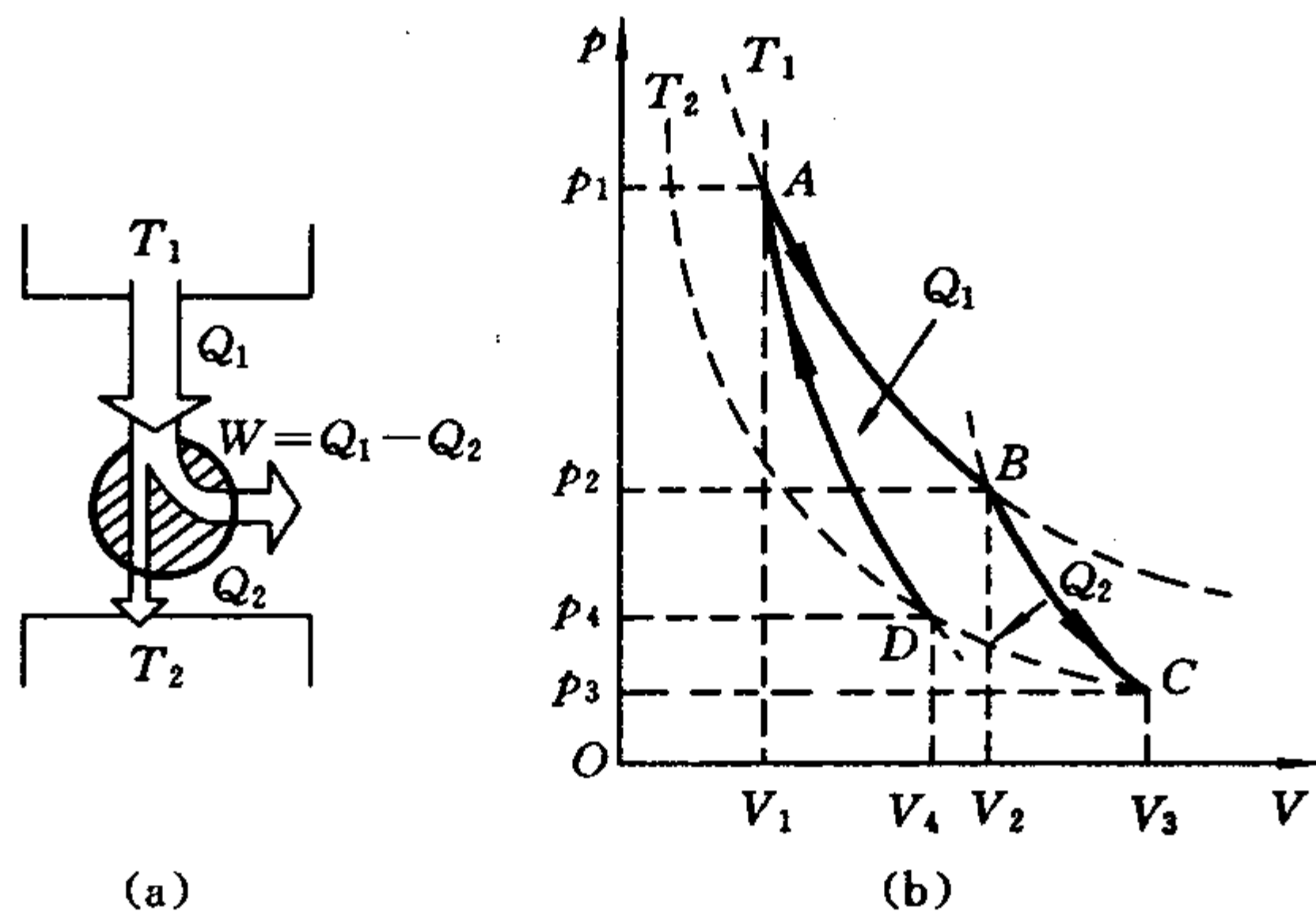


图 11-7 卡诺循环

(a) 工作示意图; (b) p - V 图

在等温压缩过程中,外界对系统做的功全部转化为系统放出的热量,即

$$Q_2 = W_3 = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

因为 $V_4 < V_3$, 即 Q_2 和 W_3 都是负值。 Q_2 为负表示系统是放出热量, W_3 为负表示外界对系统做功。取其绝对值,得

$$|Q_2| = |W_3| = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (5)$$

绝热压缩过程 DA 中,外界对系统做功全部转化为系统内能的增加,即

$$W_4 = -(E_1 - E_2) = -\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_1 - T_2)$$

取绝对值,得外界对系统做功的大小是

$$|W_4| = \frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_1 - T_2) \quad (6)$$

因为 $W_2 = |W_4|$, 故系统对外所做净功

$$W = W_1 + W_2 - |W_3| - |W_4| = W_1 - |W_3|$$

即
$$W = Q_1 - |Q_2|$$

把式③和式⑤中的 Q_1 和 $|Q_2|$ 代入效率公式 $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$,得卡诺循环的效率为

$$\eta_{\text{卡}} = 1 - \frac{\frac{M}{\mu}RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{M}{\mu}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

利用绝热方程可得 $V_2^{\gamma-1}T_1 = V_3^{\gamma-1}T_2$, $V_1^{\gamma-1}T_1 = V_4^{\gamma-1}T_2$,这两个式子的两边分别相除,有

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

把它代入 $\eta_{\text{卡}}$ 的公式中,得卡诺循环的效率是

$$\eta_{\text{卡}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (11-14)$$

式(11-14)指出,卡诺热机的效率仅由高温热源和低温热源的温度 T_1 和 T_2 决定。从以上的分析,可以总结出:

- (1) 要完成一次卡诺循环,必须有高温和低温两个热源;
- (2) 卡诺热机的效率只与两个热源的温度有关。高温热源温度愈高,低温热源温度愈低, $\eta_{\text{卡}}$ 越大。也就是说,两个热源温度差越大,从高温热源吸收的热量 Q_1 的利用价值就越高;
- (3) 卡诺循环的效率总是小于1,由于不可能获得 $T_1 = \infty$ 或 $T_2 = 0$ 的热源,热机的效率受到限制。

例 11-4 1 000 mol 的空气, $C_{p,m} = 29.2 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$,开始处于标准状态 A,等压膨胀至状态 B,其体积为原来的 2 倍,然后按图 11-8 所示的等容和等温过程,回到状态 A,完成一次循环过程。求循环效率。

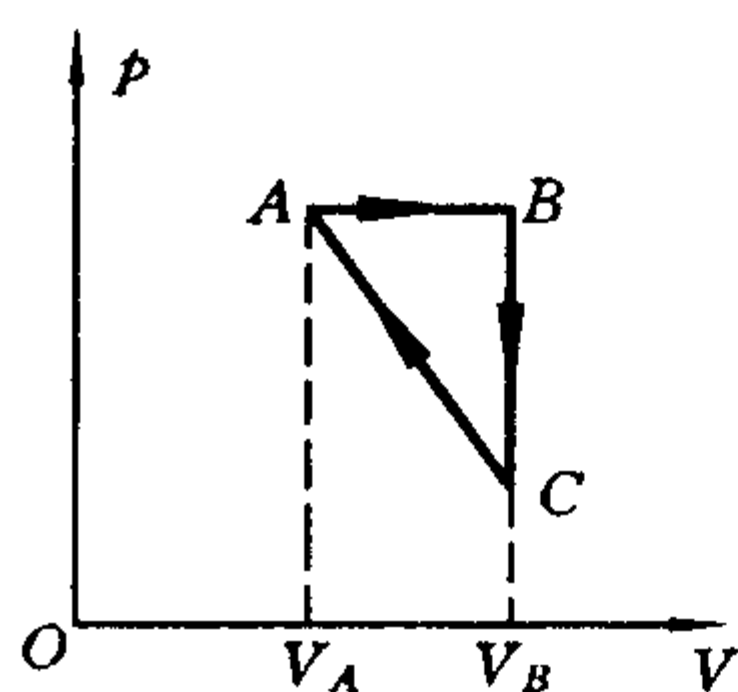


图 11-8

解 AB 是等压膨胀过程, 吸收热量为

$$Q_1 = \frac{M}{\mu} C_{p,m} (T_B - T_A)$$

已知 $T_A = 273 \text{ K}$, 又由 $\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A}$ 得 $T_B = \frac{V_B}{V_A} T_A = 546 \text{ K}$, 故

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1\,000 \times 29.2 \times (546 - 273) \\ &= 7.97 \times 10^6 \text{ (J)} \end{aligned}$$

BC 是等容降压过程, 放出热量的绝对值为

$$|Q_{BC}| = \left| \frac{M}{\mu} C_{v,m} (T_C - T_B) \right|$$

已知 $T_C = T_A = 273 \text{ K}$, $C_{v,m} = C_{p,m} - R = 20.95 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$, 故

$$\begin{aligned} |Q_{BC}| &= |1\,000 \times 20.9 \times (273 - 546)| \\ &= 5.71 \times 10^6 \text{ (J)} \end{aligned}$$

CA 段是等温压缩过程, 放热的绝对值为

$$|Q_{CA}| = \left| \frac{M}{\mu} R T_C \ln \frac{V_A}{V_B} \right|$$

已知 $T_C = T_A = 273 \text{ K}$, $V_B = 2V_A$, 故

$$\begin{aligned} |Q_{CA}| &= \left| 1\,000 \times 8.31 \times 273 \times \ln \frac{1}{2} \right| \\ &= 1.57 \times 10^6 \text{ (J)} \end{aligned}$$

所以, 循环的效率为

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{|Q_{BC}| + |Q_{CA}|}{Q_1} \\ &= 1 - \frac{5.71 \times 10^6 + 1.57 \times 10^6}{7.97 \times 10^6} \\ &= 8.7\% \end{aligned}$$

第4节 热力学第二定律

热机的效率不可能大于100%，这是因为，工作物质在循环过程中遵从热力学第一定律（即能量转换和守恒定律）。简言之，能量不能无中生有，因为热机转换效率不能大于1。然而，实际热机的效率都是远远地小于1的，上面例11-4中循环的效率只有8.7%，而理想的卡诺循环的效率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ，只要高温热源的温度 T_1 不是足够大，低温热源的温度 T_2 不是足够小，其效率就不能显著地提高。为了充分地利用能源，能否使循环的效率接近于1，甚至等于1呢？卡诺热机指出，提高高温热源温度 T_1 ，降低低温热源温度 T_2 的办法，受到各种条件的限制。那么，能不能设计这样一种热机：从高温热源吸取热量全部转换为对外界所做的功，而不向低温热源丢弃热量呢？亦即提出了这样一个理论问题：单一热源的热机是否可能？

一、热力学第二定律的两种表述

单一热源的热机是否可能？对这一问题的研究导致了热力学第二定律的产生。

开尔文总结了大量的实验事实，得到如下结论：不可能创造一种循环动作的热机，只从一个热源吸收热量，使之完全变为功，而其他物体不发生变化。

现在称这一结论为热力学第二定律的开尔文表述。在这里，应该注意“循环动作”这几个字。如果工作物质不是进行循环过程，而

是某单一过程,是可以把从单一热源吸取的热量全部转化为功的。例如,等温膨胀过程,就可将气体从单一热源吸取的热量全部转化为功。

人们把能够从单一热源吸取热量,并使之全部转化为功而不产生其他变化的热机,叫做第二类永动机。这种永动机并不违反热力学第一定律。如果第二类永动机能够制造成功,从经济观点看,可算是最理想的热机。例如,只要海水的温度稍微降低一点,把它放出的热量全部转化为功,就能为全世界提供巨大的能量。但是,这是不可能的,因为它违反了热力学第二定律。

从热传导现象可知,热量可以自动地从高温物体传递给低温物体,决不会自动地从低温物体传递给高温物体而不引起其他物体发生变化。于是克劳修斯(J. E. Clausius, 1822—1888)提出了热力学第二定律的另一种表述:热量不能自动地从低温物体传向高温物体。

这里应当注意“自动”二字。实际上,通过外界做功,是可以把热量从低温物体传向高温物体的。克劳修斯的表述说明:热量的自动传递是有方向的。

热力学第二定律的上面两种表述是等价的。可用反证法作如下说明:如果克劳修斯表述不成立,即假定有热量 Q_2 自动地从低温物体(低温热源)传向高温物体(高温热源),那么,另外再引入一个热机,此热机从高温热源吸取热量 Q_1 ,向外做功 W ,同时向低温热源放出热量 Q_2 。于是,上面两个循环的总效果是,从高温热源吸取的热量是 $Q_1 - Q_2$,向低温热源放出的热量等于零,向外做的功 $W = Q_1 - Q_2$,从而实现了只从单一热源吸取热量使之全部变成功的循环,而且外部环境没有其他变化。这样就违反了开尔文的表述,即若克劳修斯表述不成立,则开尔文表述也不成立。用类似方法还可证明,若开尔文表述不成立,则克劳修斯表述也不成立。

就实质而言,热力学第二定律指出了自然界中过程的方向性。除了上述两种表述外,热力学第二定律还可以有其他的表述方式。例如:一容器中的气体的体积(指气体的活动空间)不能自动地缩小。为了进一步理解热力学第二定律的内容,下面先研究可逆过程和不可逆过程这两个概念。

二、可逆过程和不可逆过程

一个系统由某一状态出发,经某一过程到达另一状态,如果沿相反方向进行,可以经过和原来一样的那些中间状态,而又重新回到初状态,外界未发生任何变化,这种过程叫做可逆过程。反之,如果沿过程反方向进行,不能重复经历原来的所有中间状态回到初状态,或回到初状态,或回到初状态而外界不能完全复原,则称这种过程为不可逆过程。

热力学第二定律的开尔文表述指出了热功转换的不可逆性;克劳修斯的表述指出了热传导过程的不可逆性;气体扩散运动的过程也具有不可逆性;此外,摩擦生热是不可逆过程;落体的运动过程是不可逆过程;电流能自动地从高电势处向低电势处流动,但不能自动地从低电势处向高电势处流动,因而电流的运动过程也是不可逆过程……

大量的观察和实验事实都表明,自然界的一切自发的运动过程都是有方向性的,是不可逆过程。这是热力学第二定律的实质所在。要想使这些过程能够逆向进行,回复到原来的状态,必须借助于外来因素,引起外界变化。

在众多的不可逆过程中,以气体体积膨胀过程为例来讨论。

设想图 11-9 中汽缸活塞的移动是无限缓慢地进行的,因而可以认为此过程缸中气体的每一个状态都是平衡状态(即此过程是平衡过程)。

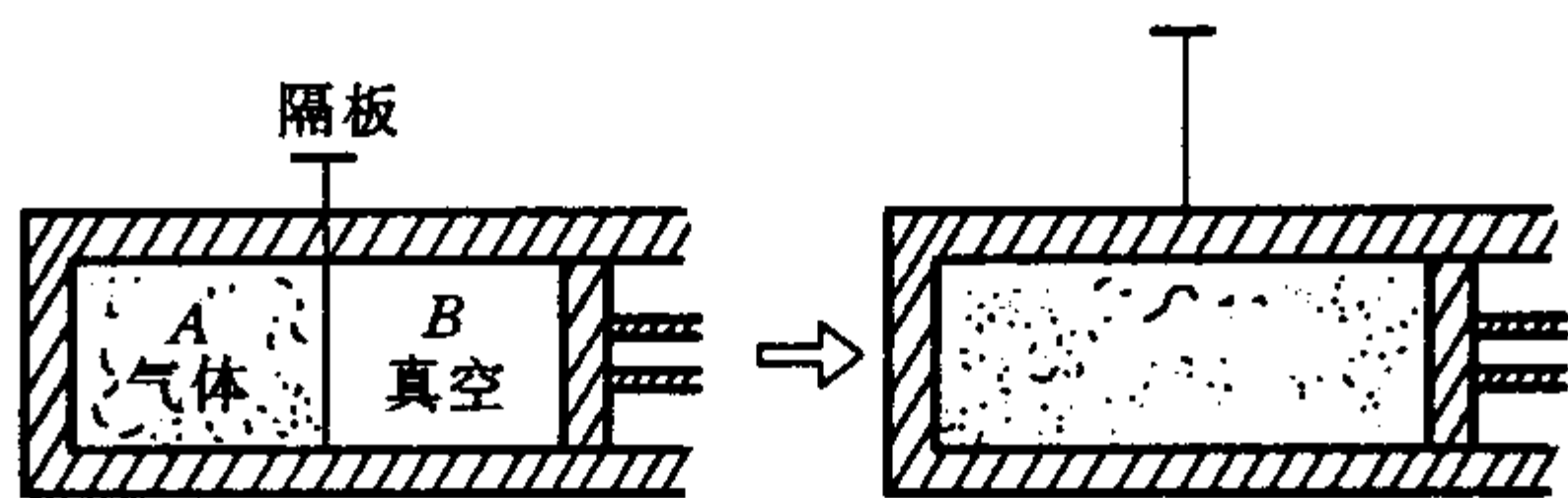


图 11-9 讨论可逆过程和不可逆过程

先讨论理想情况,认为活塞汽缸壁之间没有摩擦力的作用。活塞无限缓慢地移动,在正、逆两过程中气体可以经历相同的平衡态。而且,由于没有摩擦力的作用,在正、逆过程终止后,外界环境也不会发生变化(正过程系统对外做功,逆过程外界对系统作了同样的功)。显然,这样的过程是可逆过程。

再讨论实际的情况。事实上,汽缸壁与活塞之间必定有摩擦力存在,这时活塞无论运动多么缓慢,气体作用在活塞上的力总是与外界作用于活塞上的力不相等。膨胀过程中气体作用于活塞上的力大于外力,压缩时则相反。这样,气体在膨胀和压缩的正、逆两种过程中,气体不能经历相同的状态。不仅如此,由于活塞与汽缸壁之间的摩擦作用,在膨胀和压缩的正、逆两个过程中摩擦力都要做功,温度升高而向外界放出热量,使周围环境发生变化。所以有摩擦力存在的过程是不可逆过程。

如果系统所经历的过程不是无限缓慢,例如气体体积突然膨胀,过程的中间状态不是平衡状态,这样的过程无法逆向进行而经历正过程中的每一个平衡状态,所以也是不可逆过程。

综上所述,只有当系统的状态变化无限缓慢,而且没有摩擦作用,上述系统所经历的过程才是可逆过程;否则是不可逆过程。也就是说,可逆过程是理想过程;而自然界的一切现实过程是不可逆的。即使如此,在一定条件下,我们还是可以忽略像摩擦力一类的

因素,讨论理想的可逆过程。因为可逆过程可以是实际过程的一种近似,讨论可逆过程可以指导实际的不可逆过程。例如,下面介绍的卡诺定理给人们指出了提高热机效率的途径。

三、卡诺定理

卡诺循环中的每一个过程,都是平衡过程。它是一个理想的可逆循环,而实际的热机循环都不是可逆循环。卡诺热机是可逆机。

从热力学第二定律可以导出对提高热机效率有指导意义的卡诺定理。卡诺定理(证明从略)指出:

(1) 在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切可逆机,不论用什么工作物质,其效率均相同,即为 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 。

(2) 在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切不可逆机的效率,均不可能高于可逆机的效率,即 $\eta_{\text{不}} \leq \eta_{\text{可}}$ 。

卡诺定理指出了提高热机效率的途径。就过程而言,应当使实际热机尽量接近可逆机(如减少摩擦、漏气及其他散热等);就温度而言,应当尽量提高高温热源的温度,降低低温热源的温度。

四、热力学第二定律的统计意义

热力学第二定律指出,一切与热现象有关的宏观过程都是不可逆过程,而热又是与大量分子无规则运动相联系的。因此,可以从统计的意义来说明热力学第二定律。

下面以气体的自由膨胀为例说明。

如图11-10所示,用隔板将容器分成A、B两室,A室中充满气体,B室为真空。如果只考虑一个分子,如a分子,把隔板抽去后,它就在整个容器中运动。由于

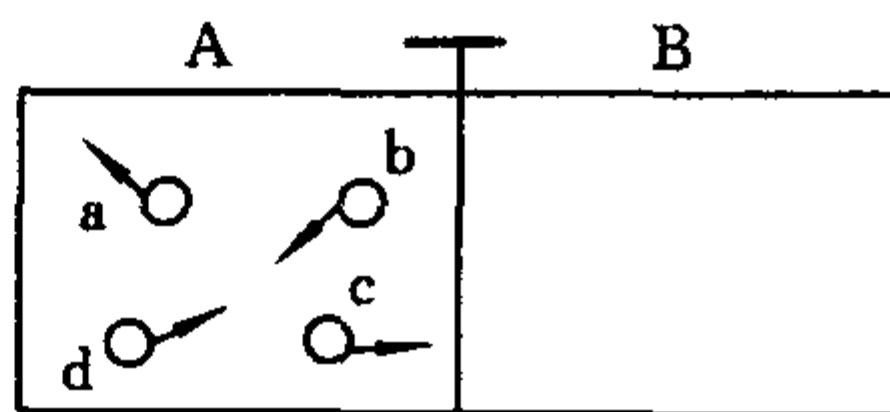


图11-10 气体自由膨胀的统计意义

碰撞,它一会儿在A室,一会儿又在B室。因此,就单个分子而言,它是有可能自动地回到A室的,回到A室的几率为 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$ 。如果考虑四个分子,如a、b、c、d四个分子。隔板抽去后,它们将在整个容器中运动。这个问题在本章第1节中讨论微观态和微观量时已经作了说明。如果以A室和B室来分,这四个分子在A、B两室中出现的微观状态共有16种。在16种微观状态中,只有一种微观态是四个分子全部回到A室,所以四个分子全部自动收缩,回到A室的几率是 $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$,其几率最小。而四个分子中的两个分子出现在A室,另两个分子出现在B室(即均匀分布)的几率最大。

如果有 N 个分子,则它们的A室和B室分布的微观状态共有 2^N 个,其中只有一个微观态是 N 个分子全部回到A室,故全部分子自动收缩到A室的几率是 $\frac{1}{2^N}$ 。由此可见,分子数 N 越大,自动收缩的几率越小。如果在图11-10中的容器里有1 mol气体,分子数 $N = 6 \times 10^{23}$ 。当气体达到平衡状态后,所有分子全部回到A室的几率约为 $\frac{1}{2^N} = 2^{-6 \times 10^{23}}$ 。这个几率极小,以致可以认为是零,即自动收缩实际上是不可能的。这就从统计意义上说明了气体自由膨胀的不可逆性。

由上面的分析还可看出,实现从几率小的宏观态到几率大的宏观态的转变的过程是可以实现的;而相反的过程,其可能性极小,实际上不可能实现。热力学第二定律所描述的过程的方向性,从微观的角度可以这样来理解:一个不受外界影响的系统,其内部发生的过程,总是由出现几率小的宏观状态向出现几率大的宏观状态进行。或者说,由包含微观态数目少的宏观态向包含微观态数目多的宏观态进行。通常把这种认识称为热力学第二定律的统计

意义。

必须指出,热力学第二定律不能无原则地推广到整个宇宙中去。如果错误地把整个宇宙看成一个封闭系统,认为宇宙的温度是从不平衡趋向平衡,因而,整个宇宙的温度最终将达到处处相同,形成不再有热量传递的“热寂”状态,将导致错误的结论。事实上,热力学第二定律是从地球上的有限时间和有限空间中总结出来的,不加分析地把它应用到整个宇宙是不恰当的。

思 考 题

11-1 做功和传递热量对增加系统内能来说是等效的,但也有本质上的不同,如何理解?

11-2 一系统能否吸收热量,仅使其内能变化?一系统能否吸收热量,而不使其内能变化?

11-3 在一个巨大的容器内,储满温度与室温相同的水,底部有一个小气泡缓缓上升,逐渐变大,这是什么样的过程?上升过程中,泡内气体是吸热还是放热?

11-4 一个速率为 200 m/s 的子弹射入木块中,假使全部动能都用来使子弹发热,这个子弹的温度将升高多少?设子弹射入木块前的温度是 $20 \text{ }^\circ\text{C}$ 。

11-5 保温瓶里的水和外界绝热,所以不会冷却。由此可以得出结论:“在任意绝热过程中只要系统和外界没有热量交换,系统温度一定不变”。此结论对吗?为什么?

11-6 一定量的理想气体,分别经绝热、等温和等压过程,膨胀了相同的体积,试从 p - V 图上比较这三种过程做功的差异。

11-7 已知空气的 $\gamma = C_{p,m}/C_{v,m} = 1.40$,试说明空气分子的模型是下列模型中的哪一种?

- (1) 似质点的弹性小球;
- (2) 刚性哑铃, 即有平动和转动;
- (3) 非刚性哑铃, 即有平动、转动和振动。

11-8 有人说, 因为在循环过程中, 系统对外做的净功在数值上等于 p - V 图中封闭曲线所包围的面积, 所以封闭曲线包围的面积越大, 循环效率就越高, 对吗?

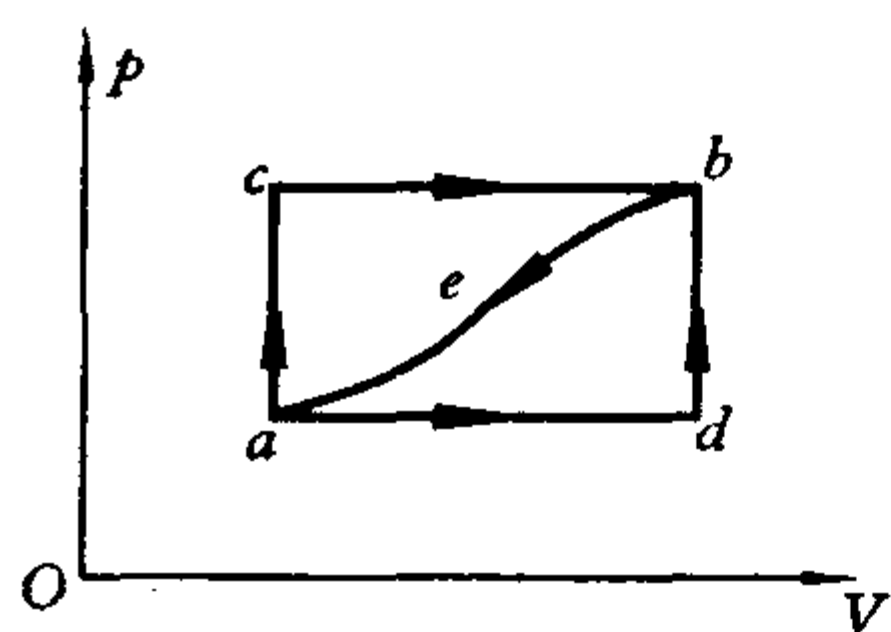
11-9 等温膨胀时, 系统吸收的热量全部用来做功, 这和热力学第二定律有没有矛盾? 为什么?

11-10 墨水在水中的扩散过程是可逆过程还是不可逆过程?

11-11 由 $\eta \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, 可知 $T_2 = 0$ 时, 可以有 $\eta = 100\%$, 但为什么又不制造这样的机器呢?

习 题

11-1 如题11-1图所示, 系统从状态 a 沿 acb 变化到 b , 有 334 J 的热量传递给系统, 而系统对外做功为 126 J 。



题 11-1 图

(1) 若沿曲线 abd 时, 系统做功 42 J , 试问有多少热量传递给系统?

(2) 当系统从状态 b 沿曲线 bea 返回到状态 a 时, 外界对系统做功 84 J , 试问系统是吸热还是放热? 传递热量是多少?

(3) 若 $E_b - E_a = 167 \text{ J}$, 求系统沿 ad 及 db 变化时, 各吸收多少热量?

11-2 压强为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积为 $1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的氧气, 自温度 $0 \text{ }^\circ\text{C}$ 加热到 $160 \text{ }^\circ\text{C}$, 试问:

- (1) 当压强不变时, 需要多少热量?

(2) 当体积不变时,需要多少热量?

(3) 在等压和等容过程中,各做了多少功?

11-3 1 mol 的氢气,压强为 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$,温度为 20°C ,体积为 V_0 。(1) 先保持体积不变,加热使其温度升高到 80°C ,然后令其作等温膨胀,体积变为 $2V_0$;(2) 先使其作等温膨胀至体积为 $2V_0$,然后保持体积不变,加热使其温度升高到 80°C 。试分别计算以上两种过程中,气体吸收的热量,对外所做的功和内能增量。

11-4 质量为 $6.4 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 的氧气,在温度为 27°C 时,体积为 $3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 。试计算下列各过程中气体所做的功。

(1) 气体绝热膨胀至体积为 $1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$;

(2) 气体等温膨胀至体积为 $1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$,然后再等容冷却,直到温度等于绝热膨胀后达到最后温度为止,并解释这两种过程中做功不同的原因。

11-5 证明在绝热过程中,1 mol 的气体做功为

$$W = \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}。$$

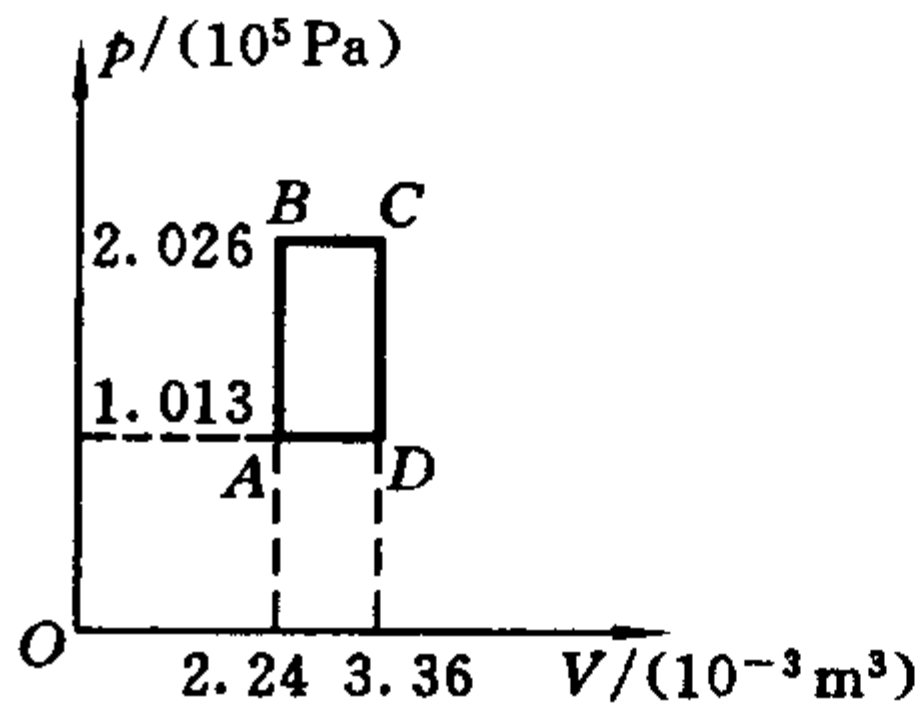
11-6 有 1 mol 单原子理想气体作如题 11-6 图所示的循环过程。试求气体在循环过程中吸收的净热量和对外所做的净功,并求循环效率。

11-7 一卡诺热机的低温热源的温度为 7°C ,效率为 40%,若将其效率提高到 50%,试问高温热源的温度应提高多少?

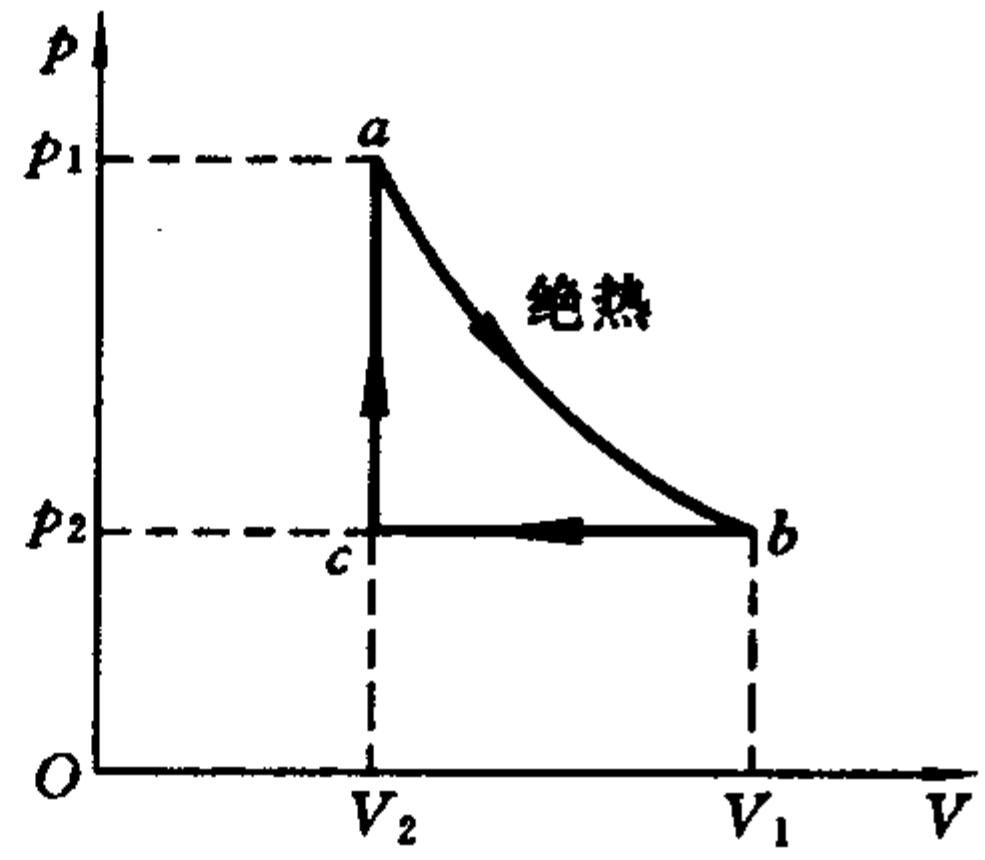
11-8 2 mol 的理想气体在 300 K 时,从 4 L 等温压缩到 1 L,试求气体做的功和吸收的热量。

11-9 设有一以理想气体为工作物质的热机,其循环如题 11-9 图所示,试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{P_1}{P_2} - 1}。$$



题 11-6 图



题 11-9 图

第 12 章 相对论基础

以前讨论的内容都是以牛顿运动定律为基础的经典力学体系(质点力学、刚体力学、热学)和以麦克斯韦方程组为基础的经典电磁学体系,合称为经典物理学。到19世纪末,经典物理学取得了巨大的成功,当时经典物理学理论内部是自洽的,与各方面的科学实验和生产实际也是一致的,而且物理学家们对这种状况也是非常满意的。

但就在这时,由于生产和科学技术的进步,以及由此带来的实验条件的改善,人类的实践进入了高速领域和微观领域。当时美国物理学家迈克耳孙(A. A. Michelson)和莫雷(E. W. Morley)测出的以太对地球运动的否定性结果和黑体辐射实验结果与经典统计物理不一致的矛盾,被著名英国物理学家开尔文(Kelvin)在1900年新世纪元旦致词中称为飘在物理学天际的两朵乌云。在拨开这两朵乌云的过程中,人类建立起了近代物理学的两大体系——相对论和量子论。这是20世纪物理学的两大成就。本章讨论相对论基础知识,下一章讨论量子论基础知识。

相对论包含了狭义相对论和广义相对论,主要都是由爱因斯坦建立的。狭义相对论研究惯性系中的高速运动问题,它广泛应用于天体物理、原子物理、原子核物理及粒子物理研究中;广义相对论研究非惯性系和引力问题,是现代宇宙学的理论基础。狭义相对论和广义相对论就其基本理论体系而言都是演绎形式的。

第1节 相对运动 伽利略变换

一、相对运动

在本书第2章的质点运动学中,我们知道质点运动的描述量主要有四个,即位置矢量、位移、速度和加速度,在那里还对运动描述的相对性和叠加性作了一般的说明。现在进一步讨论相对运动的定量关系。参看图12-1,把 $Oxyz$ 系称为 K 系, $O'x'y'z'$ 称为 K' 系, K' 系相对于 K 系以速度 u 平动。有质点 M 在空间运动,某时刻, M 点在 K 系中的位置矢量是 r ,在 K' 系中的位置矢量是 r' 。按矢量叠加关系,由图12-1可得

$$r = r' + R \quad (12-1)$$

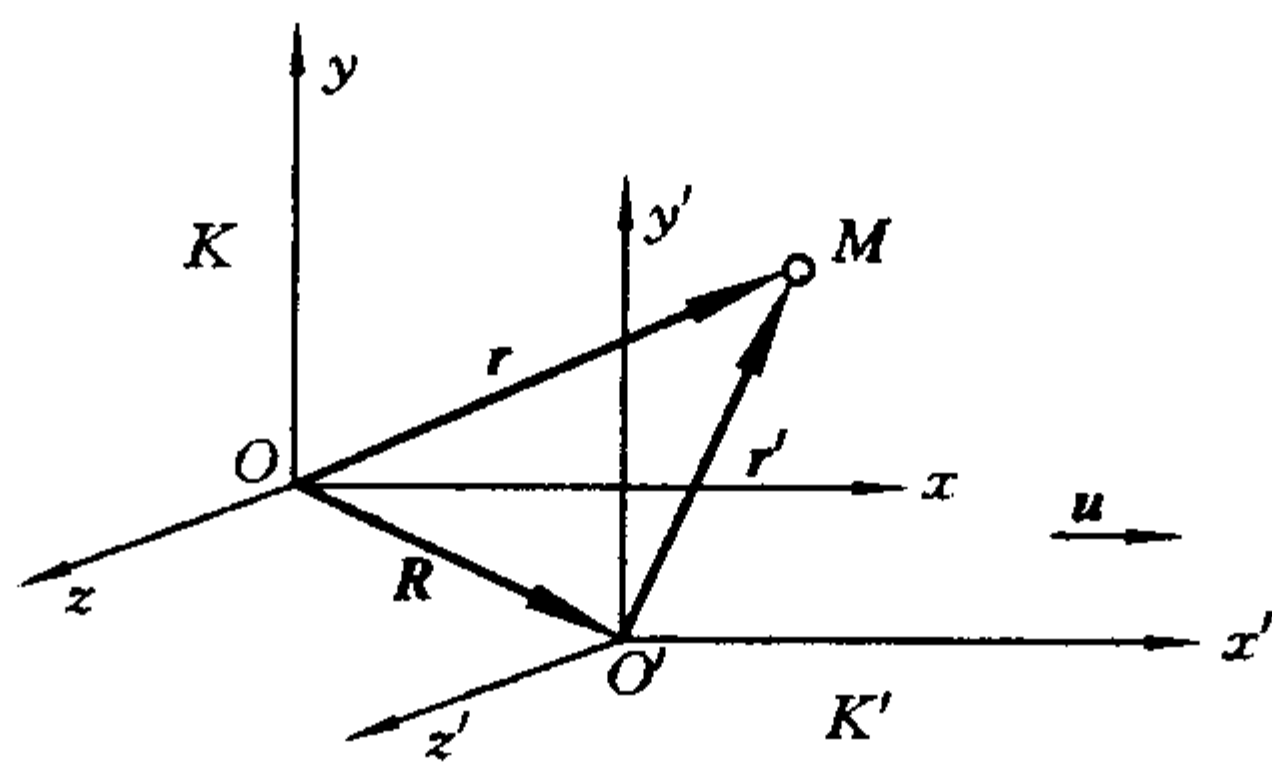


图12-1 相对运动

式中: R 为 K' 系的原点 O' 在 K 系中的位置矢量。把式(12-1)中的各项对时间求导数,得

$$dr/dt = dr'/dt + dR/dt$$

用速度表示,也就是

$$v = v' + u \quad (12-2)$$

式中: v 为 M 对 K 系的速度; v' 为 M 对 K' 系的速度; u 为 K' 系的原点 O' 对 K 系的速度(在这里, K' 在平动,也就是 K' 系对 K 系的速度)。

通常,把 v 叫做质点 M 的绝对速度;把 v' 叫做 M 点的相对速度;把 u 叫做 M 点的牵连速度。应该注意,以上诸式都是矢量式,必须按矢量运算法则计算。

把式(12-2)中的各项对时间再次求导数,就可以得到两个相对作平动的参考系中的加速度关系

$$a = a' + du/dt$$

其中, $a = dv/dt$ 表示 M 点在 K 系中的加速度, $a' = dv'/dt$ 表示 M 点在 K' 系中的加速度, du/dt 表示 K' 系对 K 系的平动加速度。

下面讨论一种简单而很有意义的情况: K' 系相对于 K 系的运动是匀速直线运动,即 $u = \text{常矢量}$ 。很明显,此时有 $du/dt = 0$,那么加速度关系就变成

$$a = a' \quad (12-3)$$

结论是:在相互作用匀速直线运动的各参照系中,质点 M 的加速度相同。这是一个非常重要的结论。

二、惯性参照系

在本书第1章就已经说明,描述质点的运动可以根据问题的特点选择合适的参照系。所有的参照系,按经典力学规律在其中是否成立,分为两大类,凡是牛顿运动定律在其中成立的参照系,称为惯性参照系;凡是牛顿运动定律在其中不成立的参照系,称为非惯性参照系。

要判断一个参照系是否为惯性系,只有依靠观察和实验。理论

和实验都已经证明:如果已知一个参照系是惯性系,则相对此惯性系作匀速直线运动的一切参照系都是惯性系;反之,相对此惯性系有加速度的参照系都是非惯性系。平常一般是以地球为参照系,可以近似认为这是一个较好的惯性系。绝对的惯性系在宇宙中是找不到的。

事实上,惯性系的概念可以从相对运动的运动学公式中得到很好的说明。在经典物理学的框架内,力 F 和质量 m 都是不随参照系而变的物理量,这样只有相互是匀速运动的参照系才有 $a=a'$,并同时满足 $F=ma$ 和 $F=ma'$ 。

三、伽利略变换和经典时空观

如图12-1所示,如果 K 系和 K' 系的 x 轴和 x' 轴重合、 y 轴和 y' 轴平行、 z 轴和 z' 轴平行,设 K 系静止, K' 系相对于 K 系以速度 u 向 x 、 x' 两轴的正方向运动,并以 O 和 O' 两原点重合的时刻作为两参照系的共同记时起点(即这时 $t=t'=0$)。假设在空间 P 点发生一物理事件,在 K 系和 K' 系中记录同一事件的时空坐标分别为 (x, y, z) 和 (x', y', z') ,其间的数学关系为

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (12-4)$$

这一关系式叫伽利略变换。此式与式(12-1)本质是一致的,只是增加了根据日常生活经验引入的时间变换关系。

从伽利略变换可以看出经典时空观的以下特点。

(1) 同时性是绝对的。在不同地点发生的两事件,如果在 K 系看来是同时发生的,由于 $t'=t$,则在 K' 系看来也必然是同时发生的。

(2) 时间间隔是绝对不变量。设有A、B两事件，K系记录A事件发生在 t_1 时刻，B事件发生在 t_2 时刻，两事件的间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ ；K'系记录A事件发生在 t'_1 ，B事件发生在 t'_2 ，两事件的间隔 $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ 。根据伽利略变换，有 $\Delta t' = \Delta t$ ，即从不同的惯性系看，两事件的时间间隔不变。

(3) 空间间隔是绝对不变量。设有A、B两事件，K系记录发生在地点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ；K'系记录发生在地点 (x'_1, y'_1, z'_1) 和 (x'_2, y'_2, z'_2) 。两事件发生的空间间隔，K系中的间隔是

$$\Delta l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

在K'系中的间隔是

$$\Delta l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

由伽利略变换，显然有 $\Delta l' = \Delta l$ ，即从不同的惯性系看，两事件发生的空间间隔是不变量。

将式(12-4)对时间求一阶导数，就得到伽利略速度变换式

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v_x - u \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned} \right\} \quad (12-5)$$

四、力学相对性原理

在两个相互做匀速直线运动的惯性系K和K'中，观察同一个质点的运动，由相对运动的加速度关系式 $a = a'$ ，而力和物体的质量都与参照系无关。因此，只要对某一惯性系牛顿第二定律 $F = ma$ 成立，那么对其他任何惯性系，牛顿第二定律都成立。也可以证明，对于经典力学中的所有基本定律，如动量守恒定律、机械能守恒定律等，一切惯性系都是等价的。这就是说，在一切惯性系中，物体运动所遵循的力学规律是完全相同的，应具有相同的数学形式。也就

是说,对于力学规律而言,一切惯性系都是等价的,这称为力学相对性原理或者经典相对性原理或者伽利略相对性原理。

第2节 狭义相对论的两条基本假设 洛伦兹变换

一、相对论产生的历史背景

物理规律需要用一定的参照系来表述。在经典力学中,人们根据实践经验引入了惯性系,力学规律对所有惯性系成立。关于电磁现象,人类在长期实践中总结出电磁场的基本规律,在此基础上必然提出参照系的问题,即所总结出的电磁场的基本规律究竟适用于什么参照系。经典物理学主要就是力学和电磁学两大体系,这就是19世纪末物理学的状况。

参照系问题在麦克斯韦方程组中变得更加突出,从麦克斯韦方程组可以得到电磁波的波动方程,并由此得出电磁波在真空中的传播速度为 c 。按照伽利略时空观,如果物质运动相对于某一参照系的传播速度为 c ,则变换到另一参照系的速度就不可能向各个方向都是 c 。从经典时空观看,电磁波只对一个特殊参照系的传播速度为 c ,因此麦克斯韦方程组也就只对该特殊参照系成立。如果这样,则经典力学中的一切参照系等价的相对性原理在电磁学中就不再成立。因此由电磁现象可决定一个特殊的参照系,这样便可以把相对于该特殊参照系的运动叫做绝对运动。这个特殊的惯性系就叫做以太媒质。那么根据伽利略速度变换,电磁波对除以太外的其他媒质的传播速度就不是 c 了。

假设以太是真实的存在,那么地球应该在以太中运动,要证实以太的存在,只要能测量出地球对以太的运行速度就可以了。基于这种想法,美国物理学家迈克耳孙和莫雷设计了精巧的实验装置迈克耳孙干涉仪。设电磁波对以太的传播速度为 c ,地球应该在以太中运动的惯性系,那么根据伽利略变换,在地球上沿着不同方向就有不同的电磁波波速,如在地球运动方向的传播速度为 $c-u$,在地球运动的反方向的传播速度为 $c+u$,在与地球垂直方向的运动速度为 $\sqrt{c^2-u^2}$ 。但是迈克耳孙和莫雷的长期实验结果却否定了地球相对于以太的运动,没有得到电磁波相对于地球的不同方向的速度差异。相反,实验的结果却表明:在所有的惯性系中,电磁波沿着各个方向的速率都相同,都是 c 。这一实验事实揭示了伽利略变换的局限性和隐含在其中的绝对时空观的错误。

二、狭义相对论的两条基本假设

1905年,26岁的爱因斯坦以其深刻的洞察力和超人的胆识抛弃了以太假说和伽利略时空观,提出了两条假设,并以此为基础建立了狭义相对论,特别是推出了已经被实验证明了的洛伦兹变换。这两条基本假设已经被大量的实验所证明,现在称为狭义相对论的两条基本原理。

(1) 相对性原理:在所有惯性系中,一切物理定律都具有相同的数学形式,即对物理规律而言,一切惯性系都是等价的。

(2) 光速不变原理:在所有惯性系中,光在真空中沿各个传播方向的速率等于恒定值 c ,与光源和观察者的运动状态无关。

相对性原理是对经典相对性原理的推广和发展,它指明不论用什么物理实验方法(不只是力学方法)都不能找到绝对参照系,一切惯性系对物理学规律都是平权的。光速不变原理是对不同惯性系之间的坐标变换、速度变换提出了新的要求,在这种变换下,

各惯性系内光在真空中沿着不同的方向的速率都是 c 。这个新的坐标变换就是洛伦兹变换,它带来了一种不同于伽利略时空观的新时空观。

三、洛伦兹变换

爱因斯坦根据相对性原理和光速不变原理得到了狭义相对论的坐标变换式,即洛伦兹坐标变换式,该变换式是关于一个事件在两个惯性系中的两组时空坐标之间的变换关系。

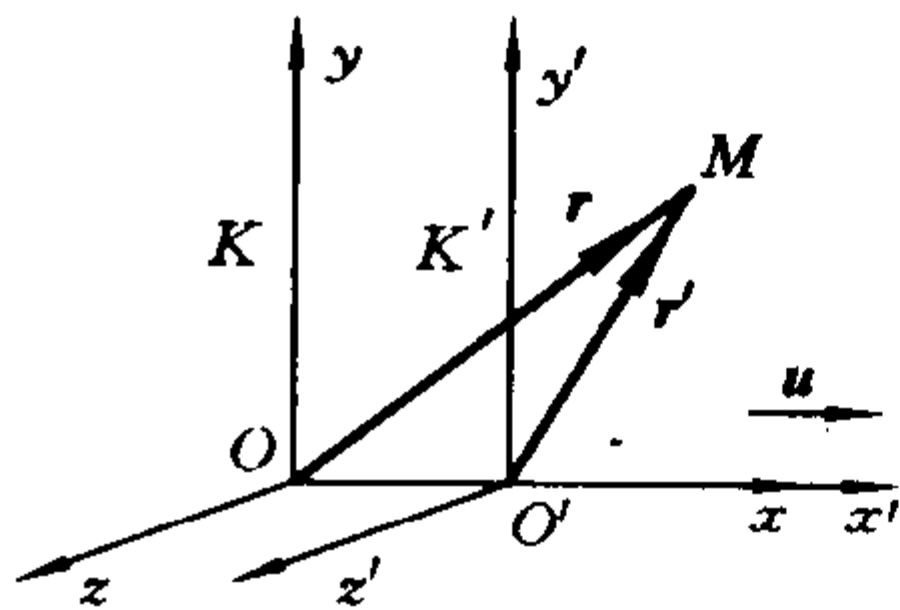


图 12-2 洛伦兹变换

设有两惯性系 K 和 K' ,它们相对应的坐标轴相互平行,且 x 轴与 x' 轴重合,如图12-2所示。设 K' 系沿 x 轴以恒定速度 u 相对 K 系运动,并且在坐标原点 O 与 O' 重合,则 $t=t'=0$ 。假设某一事件在 K 系中的时空坐标为 (x, y, z) ,在 K' 系中的坐标为 (x', y', z') ,按照狭义相对

论,这两组时空坐标之间的变换关系为

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\left(1 - \frac{ux}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12-6)$$

其中 $\beta = \frac{u}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, c 为真空中的光速,从上式可解出 x, y 和 z ,于是其逆变换为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12-7)$$

式(12-6)和式(12-7)都称为洛伦兹坐标变换,两者是互为逆变换,同一事件在不同惯性系中的时空坐标不同,而且时间坐标与空间坐标密切联系,显然与伽利略变换不同。

关于洛伦兹变换,要注意以下几点。

(1) 变换式中 (x, y, z) 与 (x', y', z') 的关系是线性的,这是因为一个事件 K 系中的一组坐标,总是与它在 K' 系的一组坐标对应,反之亦然。这是真实事件必须满足的条件。

(2) 当 $u \ll c, \beta = u/c \rightarrow 0$ 时,洛伦兹变换与伽利略变换趋于一致,这表明伽利略变换是在惯性系之间做低速相对运动条件下的近似。这表明洛伦兹变换包容了伽利略变换,这是新理论成功的必要条件。在惯性系之间做高速的相对运动时,则必须用洛伦兹变换。

(3) 由于洛伦兹变换表示的是一个真实事件中两惯性系中的时空关系,因此变换式中不应出现虚数。由此可得出一个重要的结论:任何两惯性系之间相对运动的速率都小于真空中的光速 c 。由于每一个惯性系都与一个物体或者物体组相固结,因此,按照狭义相对论,真空中的光速是一切物体运动速率的上限,而在经典力学中,物体的速率是没有上限的。

由洛伦兹坐标变换式(12-6)和式(12-7),很容易得到两个事件在不同的惯性系中的时间间隔和空间间隔之间的变换关系。设

有任意两个事件1和2,事件1在惯性系 K 和 K' 系中的时空坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x'_1, y'_1, z'_1) ,事件2在 K 系和 K' 系中的时空坐标分别为 (x_2, y_2, z_2) 和 (x'_2, y'_2, z'_2) ,则这两事件在 K 系和 K' 系中沿惯性系相对运动方向的时间间隔和空间间隔之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\}$$

和其逆变换

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\}$$

式中, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ 。不难看出,对于两个事件的时间间隔和空间间隔,在不同的惯性系中观测,所得结果一般是不同的。也就是说,两个事件之间的时间间隔和空间间隔都是相对的,随观察者所在参照系的不同而不同。这反映出相对论时空观与经典时空观的根本区别,详细论述将在本章第3节。

例 12-1 地面上 A 、 B 两点相距100 m,一个运动员由点 A 跑到点 B 历时10 s。一飞船以 $0.8c$ 的速率对地飞行,其飞行方向与运动员运动方向相同。在飞船中观测,这运动员由点 A 到点 B 跑过的距离、所用时间和平均速度各是多少?

解 取地面参照系为 S 系,飞船参照系为 S' 系,飞船对地飞行方向为 x 轴和 x' 轴的正方向。设运动员在点 A 起跑为事件1,跑到点 B 为事件2,则由题意可知

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 100 \text{ (m)}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10 \text{ (s)}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10 \text{ (m/s)}$$

$$u = 0.8c$$

在飞船系中观测,两事件的空间间隔和时间间隔为

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{100 - 0.8 \times 3 \times 10^8 \times 10}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \\ &= -4.0 \times 10^9 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{10 - \frac{0.8}{3 \times 10^8} \times 100}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 16.6 \text{ (s)}$$

$\Delta x'$ 和 $\Delta t'$ 就是在飞船系中观测到的运动员 A 至 B 所经历的位移和时间,因此运动员的平均速率为

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-4.0 \times 10^9}{16.6} = -2.4 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

由于 $\Delta x' < 0$, $v' < 0$, 表明在 S' 系中观测,运动员是沿着 x' 轴负方向由 A 地至 B 地运动的。

第3节 狭义相对论的时空观

从伽利略变换出发必然导致经典时空观念,这在本章第1节已经讨论了。洛伦兹变换能同时满足狭义相对论的两条基本原理,而且是这两条基本原理的自然结果。从洛伦兹变换出发,讨论同时性、长度、时间等这些基本运动学概念,从中可以体会狭义相对论带给我们的新的时空观——狭义相对论时空观。

一、同时性的相对性

在经典力学中,时间是绝对的。如果两事件在某惯性系中观察是同时发生的,那么在另一惯性系中观察也必然是同时发生的。但是狭义相对论认为,在一个惯性系中同时发生的两事件,在另一惯性系中就不一定是同时发生的。

本节都采用图12-2的惯性系 K 和 K' 。设有事件1和2,在 K 系中的时空坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ,在 K' 系中的时空坐标分别为 (x'_1, y'_1, z'_1) 和 (x'_2, y'_2, z'_2) ,根据洛伦兹变换,这两事件在 K 系和 K' 系中的时间间隔分别为

$$\left. \begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t_2 - t_1 &= \frac{(t_2 - t_1) + \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (12-8)$$

此两式表明,两个事件的时间间隔在 K 系和 K' 系中观察的结果一般是不相同的。例如,在 K' 系中,不同地点($x'_1 \neq x'_2$)同时($t'_1 = t'_2$)发生的两事件,由式(12-8)可知,在 K 系中观察这两个事件并不同时($t_1 \neq t_2$),这一结论称为同时性的相对性。

例 12-2 设北京和上海的直线距离是1 000 km,有两列列车同时从这两地开出。现有一飞船沿着北京到上海方向直线飞行,速度为 u 。当(1) $u = 9 \text{ km/s}$ 和(2) $u = 0.999c$ 时,分别求飞船参照系测得两列车开出的时间先后差多少?

解 取 K 系与地面相连,北京到上海方向为 x 轴, K' 系与飞船相连。已经知道在 K 系同时开出的两列车的距离 $\Delta x = 10^6 \text{ m}$, $t_1 = t_2 = 0$ 。

(1) 当 $u = 9 \times 10^3 \text{ m/s}$ 时, $\beta = \frac{u}{c} = 3 \times 10^{-5}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1$,

所以

$$t'_2 - t'_1 = - \frac{u\Delta x}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \approx - \frac{9 \times 10^3 \times 10^6}{9 \times 10^{16}} = - 10^{-7}(\text{s})$$

即飞船测得从上海开出的列车比北京开出的列车要早一些,在 K 系同时的事件 K' 系变得不同时了。

(2) 当 $u = 0.999c$ 时, $\beta = 0.999$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 22.3$, 所以

$$t_2 - t_1 = - \gamma \frac{\beta\Delta x}{c^2} \approx - 7.4 \times 10^{-2}(\text{s})$$

负号同样表明了上海开出的列车要早,但这时的相对论效应已经很大了。通过对比,进一步理解了相对论是研究高速运动的惯性系的理论。

二、洛伦兹长度收缩效应

在经典力学中,两点之间的距离或者物体的长度是绝对的,与参照系的运动无关。而在狭义相对论中,同一物体在不同参照系中的测量长度是不同的。

设有两观察者分别静止于 K 系和 K' 系中。一根细棒 AB 静止于 K' 系中,并沿着 $O'x'$ 方向放置,如图12-3所示。设 K' 系中的观察者测得棒两端点的坐标分别为 x'_1, x'_2 (因为棒是静止的,可以同时或者不同时测得棒两端点的坐标),于是棒的长度

$$l_0 = x'_2 - x'_1$$

这是相对于静止参照系中测得的长度,叫固有长度,也叫静止长度。

在 K 系中观察,由于棒在运动,必须同时测得棒两端的时空坐标,设为 $(x_1, t_1), (x_2, t_1)$ 。棒的长度

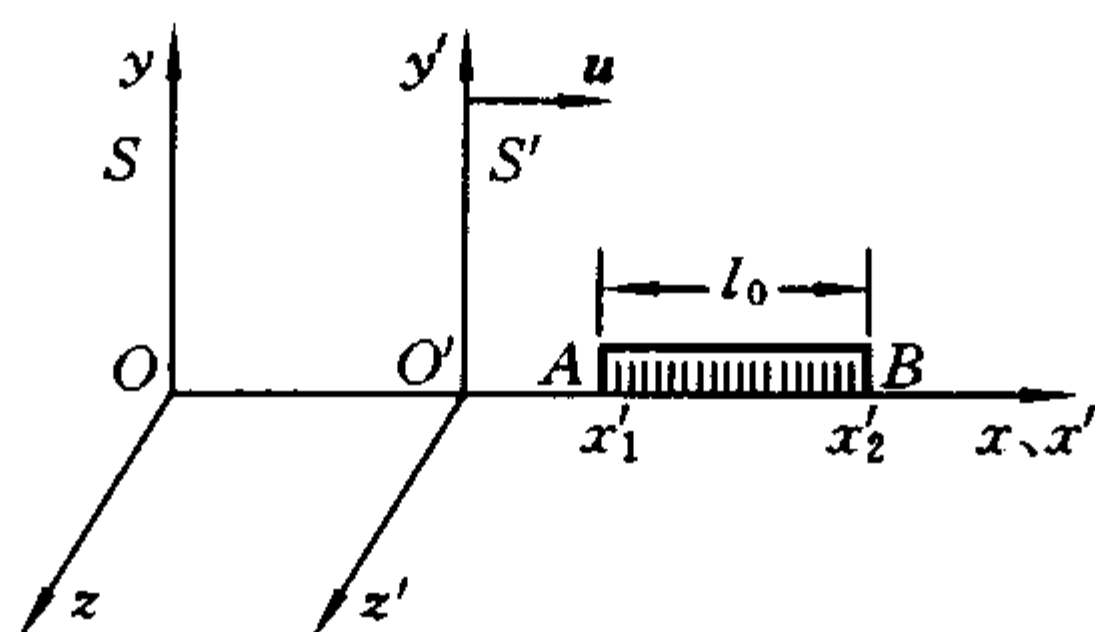


图 12-3 洛伦兹长度收缩

$$l = x_2 - x_1$$

这是从相对运动的惯性系中测得的长度,叫做运动长度。由洛伦兹变换式(12-6)得

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_2 &= \frac{x_2 - ut_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\}$$

两式相减得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

即得

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma l$$

或者

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (12-9)$$

可见 $l < l_0$, 相对于棒运动的参照系测得的棒长比固有长度短。即运动物体在其运动方向上长度缩短了, 这叫做运动物体的洛伦兹长度收缩效应。

三、爱因斯坦时间膨胀效应

在经典力学中,发生两事件的时间间隔是不变的绝对量,与参照系的选取无关,而在狭义相对论中,发生两事件的时间间隔是相对的,在不同参照系是不同的。

设两个事件在 K' 系中的同一地点 x' 处发生,用固定在 K' 系中的时钟来度量,两事件分别发生于 t'_1, t'_2 ,两者之间的时间间隔为

$$t'_2 - t'_1 = \tau_0$$

这是在相对静止的参照系中测得的时间间隔,称为固有时间,也称为原时。

而用固定在 K 系中的时钟来度量时,两事件分别发生在 $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ 的时空坐标下,注意由于坐标系的运动, $x_1 \neq x_2$,由洛伦兹变换得

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{ux'_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

两式相减得

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \tau_0 \quad (12-10)$$

由于在有相对运动的参照系中测得的两事件的时间间隔 $\tau > \tau_0$,即比固有时间长,这一现象叫做爱因斯坦时间膨胀效应。如果用时钟走的快慢来说明,就是观察者发现相对他运动的时钟比相对他静止的时钟走得慢了,因此爱因斯坦时间膨胀也叫做动钟减慢。

宏观物体由于速度远小于光速,因此爱因斯坦时间膨胀效应不明显。在粒子物理学中,爱因斯坦时间膨胀效应获得了大量的实验证明。某种粒子从产生到衰变所经历的平均时间称为这种粒子的平均寿命。

例 12-3 检验时间膨胀效应的著名实验是由罗西(B. Rossi)和霍尔(D. B. Hall)于1941年完成的。外层空间进入地球大气的宇宙射线所产生的 μ 子相对于地球以速度 $0.995c$ 运动。 μ 子是不稳定的,静止的 μ 子的平均寿命是 $\tau_0 = 2.15 \times 10^{-6} \text{ s}$,如果运动的 μ 子的寿命仍然不变,则它从产生到衰变所能飞行的平均距离为

$$l_0 = v\tau_0 = 0.995 \times 3 \times 10^8 \times 2.15 \times 10^{-6} = 642 \text{ (m)}$$

这样大气层高处的 μ 子在未到达地面之前就已经衰变,能到达地面的 μ 子就非常少了。但实验测出有大量的 μ 子到达地面,试解释其原因。

解 (1) 原因是由于爱因斯坦时间膨胀效应,在地球上的观察者用时钟测得的 μ 子的平均寿命是

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{2.15 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.995^2}} = 2.15 \times 10^{-5} \text{ (s)}$$

因此飞行长度为

$$l = v\tau = 0.995c \times 2.15 \times 10^{-5} = 6420 \text{ (m)}$$

这样,在距离地面6.4 km以内产生的 μ 子都有可能到达地面。

(2) 还有一种解释,如果以 μ 子本身为参照系,则地球以 $0.995c$ 的速度上升,上升距离为

$$l = v\tau_0 = 642 \text{ (m)}$$

这是 μ 子参照系测得的运动长度,其固有长度为

$$l_0 = \lambda l = 6420 \text{ (m)}$$

即在 μ 子存活期内相对于地球飞行的距离。可见,从爱因斯坦时间膨胀效应和从洛伦兹长度收缩效应可以得到相同的效果。

综上所述,经典力学认为,同时性、时间和空间都是绝对的,它们的量度与参照系的选择无关。而狭义相对论认为,同时性、时间和空间都是相对的,它们的量度与参照系的选择有关系。它认为时间和空间有着密切的联系,时间、空间与物体的运动不可分割,根

本不存在离开运动的绝对时间和空间。反映这种时空观的数学表示就是洛伦兹变换。

第4节 狭义相对论动力学基础

本章前面几节主要讨论洛伦兹变换及由此带来的狭义相对论时空观,这些内容都是描述运动现象的,属于狭义相对论运动学。本节将研究这些运动现象的原因,属于狭义相对论动力学。这种划分的方法与经典力学是一样的。

在经典力学中,质点动力学的基本方程是牛顿第二定律

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

其中质点的质量 m 是恒量。根据这一定律,如果质点受到一个与其方向相同的合外力作用,即使力 F 不大,只要时间足够长,质点的速度总会达到光速或者超过光速,这显然与狭义相对论的结论不符,也与无数的高能物理实验的结论是相矛盾的。另外,根据狭义相对论,物理学的所有规律都应该在洛伦兹变换下数学形式不变,而此方程在洛伦兹变换不能保持形式不变,故牛顿运动定律不满足狭义相对论的基本原理。因此,必须对经典的质量、动量、动能等基本概念和经典动力学规律进行修正。这种修正应满足狭义相对论的基本原理,而且在低速度情况下能还原为经典力学中相应的规律。

严格地建立狭义相对论动力学,必须引入洛伦兹标量、洛伦兹矢量和洛伦兹张量,这里只引入其中的一些重要结论。

一、相对论的质量、动量和动力学基本方程

动量在经典力学中占有重要地位,而且动量守恒定律具有普遍的意义。在相对论力学中,如果仍然定义质点的动量等于其质量与速度的乘积,理论证明要使动量守恒定律在洛伦兹变换下保持形式不变,则质点的质量 m 不再是一个恒量, m 与质点的速率 v 有关,其关系为

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (12-11)$$

式中: m_0 对应于 $v=0$ 时的质量,称为质点的静止质量,或者叫静质量; m 为质点以速度 v 运动时的质量,称为相对论质量,或者质量。式(12-11)叫做相对论的质速关系,已经被许多的实验所证实。

由质速关系可知,物体的质量与其相对于观察者的速度有关,说明物体的质量也同时间、空间一样,具有相对性。物体的速度越大,其质量就越大。当速率接近于光速时,即 $v \rightarrow c$ 时,若 $m_0 \neq 0$,可得

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow \infty$$

可见,对静质量不为零的粒子,以光速运动是不可能的。所以光速是一切运动物体的速度上限。但是当 $v \rightarrow c$ 时,若 $m_0 = 0$,则 m 为一个 $\frac{0}{0}$ 型的不定型, m 可为有限的值。这说明只有静质量为零的粒子,才能以光速运动,这正是光子情况。

由式(12-11)可知,当 $v \ll c$ 时, $m \approx m_0$,这时可认为物体的质量与速率无关,就还原为经典力学中的质量概念。

利用式(12-11),可以定义相对论动量

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \boldsymbol{v} \quad (12-12)$$

按式(12-11)定义动量后,狭义相对论中的质点动力学基本方程为

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (12-13)$$

可以证明式(12-13)对洛伦兹变换保持数学形式不变。容易看出,在低速情况下,上式还原为经典力学中的对应关系式。

二、相对论能量 质能关系

在相对论力学中,动能定理仍然成立,即合外力的功等于物体动能的增加量。为简化分析过程,只考虑质点受力方向与其运动方向相同的特殊情况,所得结果对一般情况普遍成立。设质点由静止开始受方向不变的合力 F 的作用,当速率增加到 v 时,其动能为

$$E_k = \int_0^v \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^v \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^v d(m\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$$

而且

$$d(m\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = dm\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + m d\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2 dm + mv dv$$

将 $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 取平方,并整理得

$$m^2 v^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$$

将上式两边求微分,并整理得

$$v^2 dm + mv dv = c^2 dm$$

所以有

$$E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2 \quad (12-14)$$

这就是相对论的质点动能公式。

当 $v \ll c$ 时,做近似处理,保留前两项后有

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

代入式(12-14),有质点做低速运动时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$$

即回到了经典力学中的动能表达式。

现在进一步分析式(12-14)的物理意义。定义物体的静能为 $E_0 = m_0c^2$, 而 mc^2 表示物体的静能与动能之和, 称为物体的总能量, 即

$$E = E_0 + E_k = mc^2 \quad (12-15)$$

这就是相对论中著名的质能关系, 它深刻地揭示了质量和能量这两个物质基本属性之间的内在联系, 即一定的质量 m 相应地联系着一定的能量 E , 即使物体处于静止状态也具有巨大的能量 $E_0 = m_0c^2$ 。如果一个物体的质量发生了变化, 由式(12-15), 这时能量必然有相对应的变化, 并且有

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

反之, 如果物体的能量发生了变化, 也必然伴随着相应的质量变化。

在日常现象中, 物体的能量一般变化不大, 其相应的质量变化也很小, 不容易觉察得到。例如, 把 1 kg 水由 0 °C 加热到 100 °C 时所增加的能量为 4.18×10^5 J, 相应的质量只增加了 4.6×10^{-12} kg。但是在原子核反应过程中相对论质能关系得到了证实。事实上, 现在全世界的核武器(包含原子弹和氢弹)以及世界范围内的利用核能的原子反应堆, 在理论上都是以这一公式为基础的。能量的概念也是相对的。

三、相对论能量和动量的关系

在经典力学中, 一个质点的动能和动量的关系是

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

在相对论力学中,由质速关系式(12-11),有

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2$$

两边同乘以光速的四次方,并移项,得

$$m^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

由于 $p = mv$, $E = mc^2$, $E_0 = m_0 c^2$, 代入上式得

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad (12-16)$$

这就是相对论的能量动量关系式。

下面用相对论能量动量关系讨论光子情形。对于光子,由于其静质量为零,因此, $E_0 = 0$, $E = pc$, 又因为 $p = mv$, 有

$$(mc^2)^2 = (mv)^2 c^2$$

即有

$$v = c$$

静质量为零的粒子必然以光速运动,这在粒子物理学中是一个重要的结论。

例 12-4 静止的电子经过 1 000 000 V 高压加速后,其质量、速率各为多少?

解 已知电子的静质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 因此其静能为

$$E_0 = m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} = 8.2 \times 10^{-14} \text{ (J)}$$

静止的电子经过 1 000 000 V 电压加速后,其动能为

$$E_k = 1\,000\,000 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ (J)}$$

由于 $E_k > E_0$, 因此必须考虑相对论效应。此时电子的质量为

$$\begin{aligned} m &= \frac{E}{c^2} = \frac{E_0 + E_k}{c^2} \\ &= \frac{8.2 \times 10^{-14} + 1.6 \times 10^{-13}}{9 \times 10^{16}} = 2.69 \times 10^{-30} \text{ (kg)} \end{aligned}$$

可见,此时 $m \approx 3m_0$, 由相对论的质速关系得

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{9.11 \times 10^{-31}}{2.69 \times 10^{-30}}\right)^2} \times 3.0 \times 10^8 = 0.94 c \end{aligned}$$

可见,电子经过高电压加速后,速率与光速相比已经不可忽视。这是一个相对论动力学习题。本题显示了一种典型的相对论力学的计算处理思路。

四、小结

通过上面的学习,我们对时间、空间、质量、动量、能量等概念有了更加深入、更加广泛的认识。爱因斯坦首先从经典力学和经典电磁学的对比中,提出了狭义相对论的思想。后来又把相对论的洛伦兹变换的要求推广到一切的物理学规律,这就有了一个从更高的水平高度来审视一切物理概念和物理规律的正确性和局限性。

第5节 广义相对论简介

广义相对论是研究物质在空间和时间中如何进行引力相互作用的理论,这个理论的基础是爱因斯坦在1915年建立的,20世纪60年代以来又取得了新的进展。现在公认为相对论引力理论。

爱因斯坦在建立了狭义相对论理论后发现,无法建立洛伦兹协变的新的引力理论来代替旧的牛顿引力理论,基于万有引力定律的牛顿引力理论与狭义相对论不相容,这是从理论方面的考虑。而且,在实践上,牛顿的引力理论虽然在天文学上获得了广泛的支

持,但是不能描述水星近日点的进动,也不能对宇宙大范围的性质做出完善的描述。这是当时牛顿的引力理论所面对的情况。

牛顿运动定律、狭义相对论都只适用于惯性系,而自然界大量的实际参照系都是非惯性系。爱因斯坦认为,非惯性系与惯性系应处于同样的地位。这也是爱因斯坦考虑建立广义相对论的原因之一。

狭义相对论的基本思想之一是否定物质或能量以超光速运动的可能性。麦克斯韦的电磁场理论是符合这一观点的,而牛顿的万有引力理论带有超距作用的观念。爱因斯坦认为应该用引力场理论代替牛顿的引力理论,应该如同电磁场理论一样建立引力场方程,并从实验中探测引力波的存在。

经过十年的艰苦努力,爱因斯坦的广义相对论,建立起对一切参照系都取相同形式的物理定律,并且把加速系统与引力场等效,把包括加速系统的空间几何结构和引力场视为一体。从而把物质、引力场、时空三者连接为一个整体,成功地建立起新的引力理论。

等效原理和广义相对性原理是爱因斯坦广义相对论的两条基本原理。在此基础上,爱因斯坦用黎曼几何来描述具有引力场的时间和空间,建立起了引力场方程,成功地解释了水星近日点的进动,预言了光线的偏折、引力红移、引力辐射等一系列全新的效应,并对宇宙结构进行了开创性的研究。本节只介绍广义相对论的两条基本假设。

一、等效原理

在牛顿的万有引力定律中,

$$F = G \frac{Mm_g}{r^2}$$

可以定义一个叫做引力质量的物理量 m_g ,它是物体引力属性的量

度,反映该物体产生和承受引力场的本领。

在牛顿第二定律中,

$$F = m_i a$$

可以定义一个叫做惯性质量的物理量 m_i ,它是物体惯性大小的量度,反映物体对加速度的阻抗。

显然,物质的这两种属性从物理上说是完全不同的,无法预先期望它们之间存在任何的联系。然而,经过很多物理学家的长期实验研究,发现 m_g/m_i 是一个与物质特性无关的普适常数,在实用上就可以把它们当做同一个物理量来对待。

无论是牛顿力学还是狭义相对论,都没有解决惯性力的本质问题。1907年爱因斯坦从惯性质量与引力质量精确相等,以及在同样的引力场中一切物体都具有相同的加速度的实验事实出发,提出了等效原理。他是用有名的思想实验——爱因斯坦电梯来说明的,如图 12-4 所示。由此对惯性力的本质提出了解释。

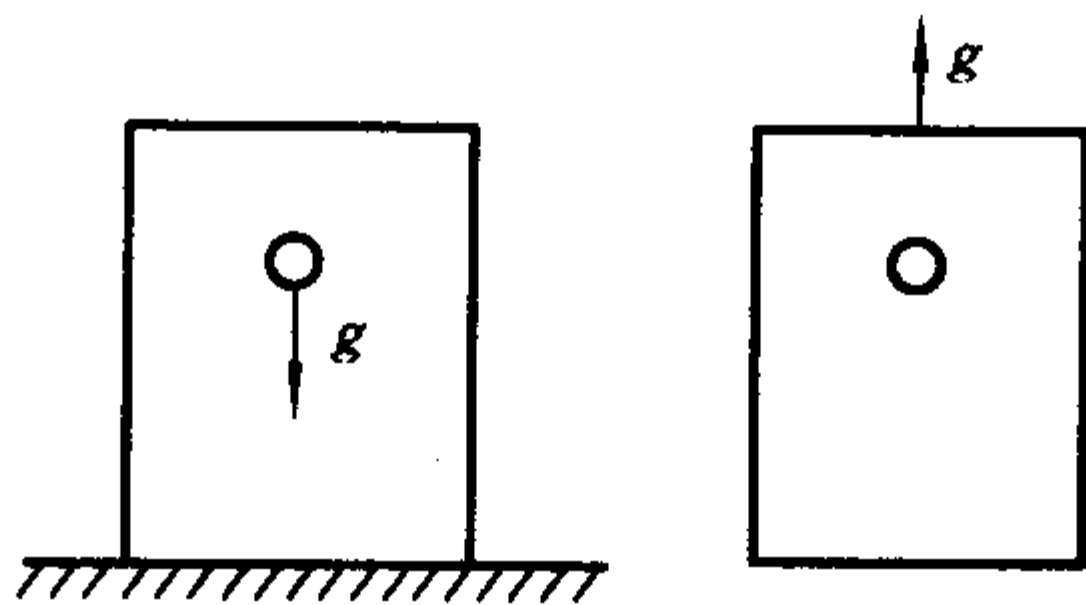


图 12-4 爱因斯坦电梯实验

(1) 当一密封的电梯停在某天体形成的均匀引力场中,室内的一切物体都以相同的加速度(设为 g)下落。

(2) 当电梯在远离引力场的太空中,相对于太空(作为惯性系)以加速度 g 上升时,室内一切物体也以同一加速度 g 下落。

就电梯内观察到的力学现象来说,两种情况是没有区别的,即在室内不可能通过力学实验来区分电梯是处于引力场中,还是在

做加速度的运动。也即,在室内无法区分什么是引力,什么是惯性力,即引力效应和加速度效应是不可区分的,正是这种性质,使我们能够做到:

- (1) 在非惯性系中构造一引力场,就可以作为惯性系处理;
- (2) 反之,可以设想一非惯性系来代替引力场;
- (3) 让电梯在引力场中自由下落,使惯性力抵消引力,从而消除引力场。

实际上,由于引力源产生的引力场在大尺度上的不均匀性,因此在引力场空间每一点上配置的自由下落实验室只代表那一点的惯性系。在不均匀的引力场中无法实现大范围的物体以同一加速度下落,所以把在引力场中自由下落的实验室称为局部惯性系。

由此可以得到广义相对论的第一条原理即等效原理:惯性力和引力场的动力学效应是局部不可区分的。

上述表示只是等效原理的弱形式,如果考虑到一切物理效应,则成为等效原理的强形式。

二、广义相对论原理

狭义相对论认为一切惯性系都是平权的,客观的物理规律都应该是洛伦兹协变的。但是,宇宙中不存在严格意义上的惯性系。我们希望发展一种理论,它能抛弃惯性系的概念,使一切的参照系都能平权地表示物理规律。等效原理把非惯性系中的惯性系当做引力场来处理,所以这种理论应该考虑引力场对物理规律的影响。

爱因斯坦将狭义相对性原理加以推广,得到广义相对论的另一条基本原理,即广义相对性原理:一切参照系都是平权的。或者说,客观真实的物理规律应该在任意坐标变换下数学形式不变。

思 考 题

- 12-1 绝对时空观与相对论的时空观的根本区别是什么?
- 12-2 力学相对性原理与狭义相对性原理有什么不同?
- 12-3 在光速不变原理中,为什么要强调是真空中光速?
- 12-4 洛伦兹变换与伽利略变换的主要区别是什么?
- 12-5 假设宇宙飞船的速度接近于真空中的光速,飞船中有一个正方形的物体。问地球上的观察者看到该物体是什么形状?
- 12-6 相对论的质量-速度关系为 $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, 这个关系式是否违背了质量守恒原理?

习 题

- 12-1 在惯性系 S 中,有两个事件同时发生在 xx' 上相距 1.0×10^3 m 处,从惯性系 S' 观测到这两个事件相距 2.0×10^3 m,试问从 S' 测到此两事件的时间间隔为多少?
- 12-2 在正负电子对撞机中,电子和正电子以 $v = 0.9c$ 的速率相向运动,正负电子的相对速率是多少?
- 12-3 若从一惯性系中测得宇宙飞船的长度为其静止长度的一半,试问宇宙飞船相对此惯性系的速率是多少?
- 12-4 一个被加速器加速的电子,其能量为 3.0×10^9 eV,试求该电子的速率?
- 12-5 如果将电子的速率从 $0.8c$ 加速到 $0.9c$,需要对它做多少功? 该电子的质量增加多少?

第 13 章 量子论基础

1900年,普朗克在研究黑体辐射规律时,提出了能量子假说,成功地解释了热辐射的规律,成为早期量子论的开端。1905年,爱因斯坦提出了光量子的概念,成功地解释了光电效应,发展了量子论。1913年,丹麦物理学家玻尔在卢瑟福的原子有核模型基础上,应用量子化的概念解释了氢原子光谱,从而使早期量子论获得了很大成功。1924年,法国物理学家德布罗意提出了微观粒子具有波粒二象性的假设,拉开了现代量子论的序幕。1925年到1932年间,薛定谔、海森堡、玻恩、狄拉克等著名物理学家建立了描述微观粒子运动规律的新理论——量子力学。同一时期,玻色、爱因斯坦、费米、狄拉克等建立了量子统计和相对论量子力学。在量子力学、量子统计和相对论量子力学的基础上,1929年,海森堡和泡利创立了量子场论。

本章将用三节内容介绍早期量子论的三个主要内容,而用两节的篇幅介绍现代量子论的最基础的内容(德布罗意假说、测不准原理、波函数概念和薛定谔方程)。因此本章只解释量子论中最重要的七个基本概念或现象,力图从中反映量子论的基础。

量子论与我们日常生活和科技发展的关系非常密切。现在,从基本粒子到天体物理,从晶体管到大规模集成电路(如CPU),从激光到超导材料,几乎物理学的各个分支以及物理与化学、生物学、医学、计算机科学技术等学科都要涉及量子物理学。

在本章中,我们不可能按照逻辑的线索来安排内容,只有按照历史的线索来介绍量子论基础。

第1节 黑体辐射 普朗克能量量子假说

一、热辐射

物体以电磁波的形式向外发射能量,叫做辐射。实验证明,任何物体在任何温度下都能发出辐射,向周围空间发射的电磁波波谱是连续的。在一定时间内,物体辐射电磁波能量的多少及能量按波长的分布,主要取决于物体的温度。室温下,物体在单位时间内辐射的能量很少,而且所辐射的大部分能量分布在波长较长的远红外区域。随着温度的升高,单位时间内辐射的能量迅速增加,且其中短波部分所占比例也逐渐增加。如金属和碳,当温度低于800 K时,绝大部分辐射能分布在远红外区域,用肉眼看不见。当温度升高到800 K以上时,开始辐射可见光,物体呈暗红色,随着温度的升高,逐渐变为赤红、黄、白、青白色。这种由物体温度决定的电磁辐射称为热辐射。产生热辐射的原因是物体中带电粒子的热运动导致物体不断地向外发射电磁波。

物体在发射电磁波的同时,还吸收和反射其他物体投射到此物体表面的电磁波。同一时间内,如果物体辐射出去的能量恰好等于所吸收的能量,则物体的温度不变而处于平衡状态,这种热辐射称为平衡热辐射。

温度为 T 时,在单位时间内从物体表面单位面积上所辐射出来的各种波长电磁波能量的总和,称为该物体的辐射出射度,简称

为辐出度,用 $M(T)$ 表示。在国际单位制中, $M(T)$ 的单位是 $J/(m^2 \cdot s)$ 。如果在单位时间内从物体表面单位面积上所辐射出来的、波长在 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ 范围内的电磁波能量为 $dM(T)$, 则把 dM 和 $d\lambda$ 的比值称为该物体的单色辐射出射度, 简称为单色辐出度, 用 $M(\lambda, T)$ 表示, 即

$$M(\lambda, T) = \frac{dM(T)}{d\lambda}$$

显然, 上式也可以写为

$$M(T) = \int_0^{\infty} M(\lambda, T) d\lambda$$

实验表明, 辐出度和单色辐出度与物体的材料和表面状况有关。

在温度为 T 时, 物体吸收的波长在 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ 范围内的电磁波能量与相应波长的入射电磁波能量之比, 称为该物体的单色吸收比, 用 $\alpha(\lambda, T)$ 表示。

不同物体的单色辐出度和单色吸收比各不相同。1860年, 基尔霍夫从实验中发现并用热力学理论证明: 在热平衡条件下, 任何物体的单色辐出度与单色吸收比的比值是一个与物体性质无关而只与物体的温度和辐射波长有关的普适函数, 即

$$\frac{M_1(\lambda, T)}{\alpha_1(\lambda, T)} = \frac{M_2(\lambda, T)}{\alpha_2(\lambda, T)} = K = f(\lambda, T) \quad (13-1)$$

式(13-1)称为基尔霍夫定律, $f(\lambda, T)$ 为与具体物体无关, 而只与温度和波长有关的普适函数。这是一个在热辐射研究中非常重要的规律。

二、黑体辐射

根据基尔霍夫定律, 一个物体的辐射本领越大, 则其吸收本领也越强。如果一个物体在任何温度下, 对任何波长的入射电磁波的吸收比都等于1, 则称之为绝对黑体, 简称为黑体。如用 $M_B(\lambda, T)$ 、

$\alpha_B(\lambda, T)$ 分别表示黑体的单色辐出度和单色吸收比, 则根据基尔霍夫定律, 对于黑体有

$$\alpha_B(\lambda, T) = 1$$

因此有

$$\frac{M_B(\lambda, T)}{\alpha_B(\lambda, T)} = M_B(\lambda, T) = f(\lambda, T)$$

可见, 黑体的单色辐出度 $M_B(\lambda, T)$ 就是式(13-1)中的普适函数。因此研究黑体的单色辐出度已成为研究热辐射的一个重要问题。19世纪末 20 世纪初, 黑体辐射的研究成为当时物理学家关注的一个中心问题, 被英国著名物理学家开尔文称为当时物理学的两朵“乌云”之一, 在拨开这朵“乌云”的过程中, 建立了量子论理论。

在自然界, 黑体是不存在的, 投射到物体表面的电磁波或多或少要反射或者透射一部分。黑体只是一种理想模型。实验中可以人为地构造一种黑体的模型。人们用不透明的材料制作一个开小孔的空腔, 则此空腔小孔就可以近似地作为黑体, 如图 13-1 所示。

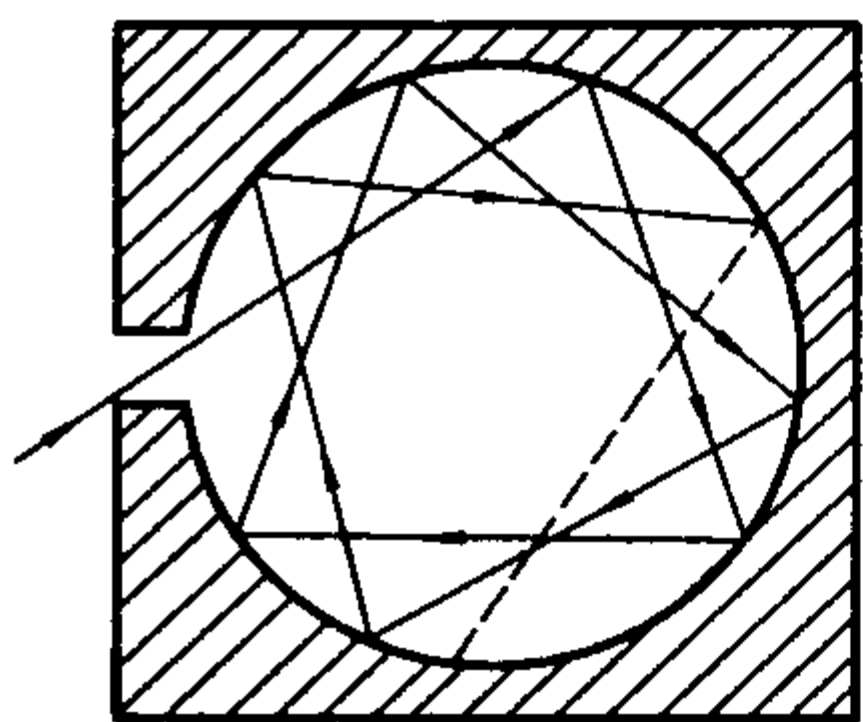


图 13-1 近似黑体

当外来电磁波射入小孔后, 在空腔内壁经过多次反射, 每反射一次, 空腔内壁就要吸收一部分能量。如果小孔的面积远小于内表面的面积, 那么反射次数就会很大, 外来电磁波的能量几乎全部被吸收, 小孔不反射电磁波, $\alpha_B(\lambda, T) = 1$ 。在日常生活中, 黑烟煤、黑绒线、冶炼炉上开的小孔等可近似地认为是黑体。

注意, 由于黑体没有反射和透射, 只有辐射形成物体的视角。在常温下, 黑体的辐射少, 故看起来它们是黑的, 但是在高温下, 黑体的辐射本领强, 故看起来它们很明亮。

三、普朗克能量量子假说

19世纪末,物理学家研究的中心课题之一,就是如何从理论上推导出黑体辐射度 $M_B(\lambda, T)$ 对各种黑体普适的数学表达式,使之与实验相符。其中最典型的是维恩公式和瑞利-金斯公式。

1896年,德国物理学家维恩根据对实验数据的分析,由经典统计物理学推导出了黑体辐射度的半经验公式

$$M_B(\lambda, T) = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (13-2)$$

这就是维恩公式,其中 C_1 、 C_2 都是常量。这一公式在短波区域与实验符合,在长波区域有明显的偏离,如图13-2所示。

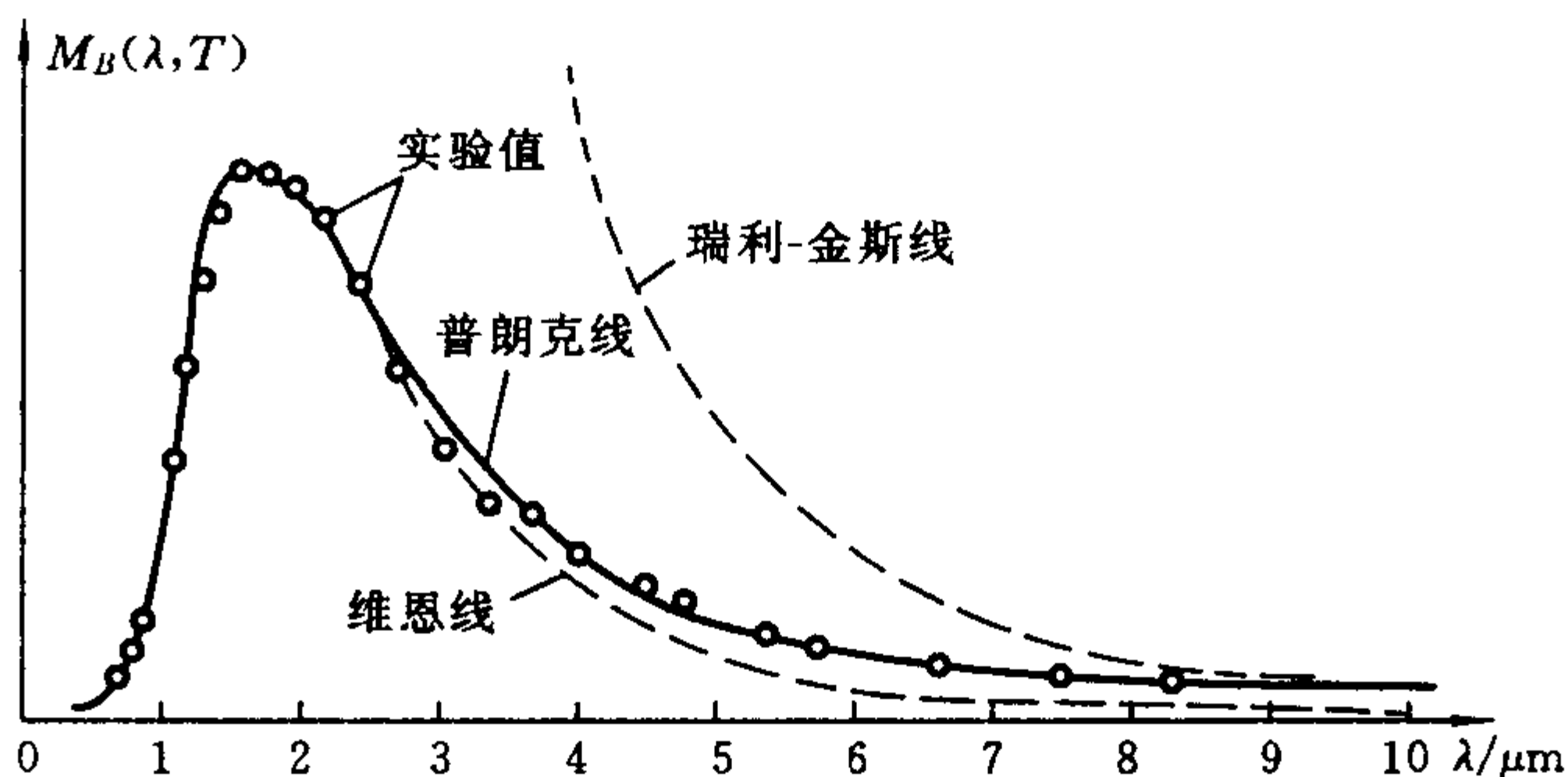


图13-2 黑体辐射公式曲线

1900年,瑞利和金斯根据经典电动力学和统计物理学推导出了如下的黑体辐射公式

$$M_B(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^5} kT \quad (13-3)$$

这就是著名的瑞利-金斯公式。式中: k 为玻尔兹曼常数; c 为真空中的光速。这一公式在长波区域与实验符合得很好,但是在短波区

域与实验就完全不符,特别是当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,有辐出度 $M_B(\lambda, T) \rightarrow \infty$ (见图 13-2),这在历史上被称为“紫外灾难”。

维恩公式和瑞利-金斯公式与实验的不符,明显地暴露了经典物理学的缺陷。经典物理学认为,辐射体由很多的带电谐振子所组成,无论分子、原子还是离子,都可以看成谐振子,电磁波辐射来源于粒子的振动,电磁波振动频率与谐振子固有频率相同。谐振子辐射的电磁波含有各种频率的波长,是连续的,物体所辐射和吸收的能量也是任意的量值。

1900年,德国物理学家普朗克为了把代表短波方向的维恩公式和代表长波方向的瑞利-金斯公式结合到一起,并与实验结果相吻合,找到了一个黑体辐射的经验公式

$$M_B(\lambda, T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \quad (13-4)$$

式中, h 为普朗克常数,后来有实验测得 $h = 6.626\ 075\ 5 \times 10^{-34}$ J·s。这个公式与实验符合得非常好(见图 13-2),被称为普朗克公式。

为了从理论上推导式(13-4),普朗克提出了能量量子假说:辐射体中带电谐振子的能量不能连续变化,频率为 ν 的谐振子的能量只能取 $h\nu, 2h\nu, 3h\nu$ 等分离值。物体发射和吸收的辐射能只能是 $h\nu$ 的整数倍,谐振子能量的最小单位 $\epsilon = h\nu$ 称为能量子。

普朗克的能量量子化假说与经典物理学中谐振子的能量可以取任意值、可以连续变化的结论不相容,这是对经典物理学的重大突破,宣告了量子论的诞生。彻底解决了在黑体辐射上存在的长期困惑,拨开了笼罩在物理学上空的一朵乌云。在量子论早期的发展中,它在光电效应和光谱理论上取得了很大的成功。

第2节 光电效应 爱因斯坦光量子理论

1887年,德国物理学家赫兹在证明麦克斯韦理论的实验中发现:当紫外光照射到金属上时,能使金属发射出电子。1900年,德国物理学家勒纳德(Lenard)用实验证实了金属所发射的就是电子。这就是光电效应,逸出的电子叫做光电子。

一、光电效应的实验规律 经典物理学的困难

通过对光电效应的实验研究,人们发现这一现象中有如下四点规律。

(1) 饱和光电流与入射光的强度成正比。

(2) 光电子的最大初动能随入射光的频率的增加而线性增加,与入射光的强度无关。

(3) 存在截止频率。实验表明,对每种金属,都存在一个相应的临界频率,当入射光的频率小于截止频率时,无论光强多大,照射时间多长,都不会产生光电子。

(4) 光电效应是瞬时发生的。实验发现,只要入射光的频率大于截止频率,无论光强多小,从光照射阴极到逸出光电子的时间间隔小于 10^{-9} s。

按照光的经典电磁理论,当光照射到金属表面时,将会使金属中的电子作受迫振动,那么入射光的振幅越大,即光波的强度越大,电子获得的能量就越多,从而逸出金属表面时的初动能就越大。其次,不论入射光的频率如何,只要入射光的光强足够大,电子就能够吸收到足够的能量而逸出金属表面,不存在截止频率。还

有,电子从入射光波中吸收能量时,必须积累到一定量值才能逸出,如果入射光越弱,能量积累的时间就越长,光电效应就不会瞬时发生。但是,光电效应的实验结果完全否定了这种理论。

二、爱因斯坦的光量子理论

1905年,爱因斯坦为了解释光电效应的实验事实,提出了关于光的本性的光子假说。他认为:光是由不连续的能量单元所组成的能量流,其中每一能量单元称为光量子或者光子;频率为 ν 的光子中每一光子的能量为 $\epsilon=h\nu$,光子只能整个地被吸收或发射。

光子理论比普朗克能量量子假说又前进了一步。光子假说指出了光不仅在发射和吸收时表现出粒子性,而且在传播过程中也具有粒子性,能量也是量子化的。

按照爱因斯坦的光子假说,当光子入射到金属的表面时,一个电子将吸收一个光子的全部能量 $h\nu$,一部分能量用于脱离金属表面时克服阻力所做的功 A ,另一部分成为电子逸出时的初动能 $\frac{1}{2}mv_0^2$,根据能量守恒定律,有

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv_0^2$$

上式叫做爱因斯坦公式。由于金属内部的电子可以处于不同的能量状态,从金属内逸出时所需做的功 A 也不同。通常把 A 最小的值 A_0 叫做逸出功。现在知道这本质上就是处于基态的电子。不同金属的 A_0 不同。对处于 $A=A_0$ 的电子,可以写为

$$h\nu = A_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (13-5)$$

一般采用式(13-5)的爱因斯坦公式讨论光电效应问题。根据上式,可以对光电效应给出圆满的解释。

(1) 照射光的强度取决于单位时间内通过垂直于光传播方向

的单位面积的光子数。光强越大,光子数就越多,逸出的光电子也越多,所以光电流就越大。

(2) 由爱因斯坦公式可见,对某一给定的金属,其 A_0 一定,光电子的最大初动能 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 与入射光的频率 ν 呈线性关系,而与光的强度无关。

(3) 光存在一个截止频率 ν_0 。由式(13-5),当逸出的光电子的初动能为0时,有 $\frac{1}{2}mv_0^2=0$,因此

$$\nu_0 = \frac{A_0}{h}$$

可见,当 $\nu < \nu_0$ 时,由于电子吸收的能量小于逸出功,电子不可能跑出来。这里提出了一种测量普朗克常数的重要方法。

(4) 因为一个光子的能量是全部被一个电子所吸收,只要光子的能量大于金属内电子的逸出功,电子吸收后就脱离金属表面,不需要时间的积累。这就解释了光电效应的瞬时性。

1916年,美国物理学家密立根(Millikan)对光电效应做了精确的测量,证实了爱因斯坦的光子假说,并由此测得了普朗克常数。1923年,美国物理学家康普顿(Compton)用X射线的散射进一步证实了爱因斯坦的光量子理论。

三、光的波粒二象性

光子理论不仅成功地解释了光电效应,而且加深了人类对光的本性的认识。光的干涉、衍射、偏振等现象显示了光的粒子性;黑体辐射、光电效应等显示了光的粒子性。综合起来,就说明了光的波粒二象性。

频率为 ν 的光子具有的能量为

$$\epsilon = h\nu$$

由相对论质能关系,可得光子的质量为

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

这是光子以光速运动时的质量,是有限的数值。由相对论理论有

$$m_0 = m \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0$$

光子是一种静止质量为零的特殊粒子。

由动量的定义,光子的动量为

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

光子具有动量已经被许多的实验所证实。

第3节 氢原子光谱 玻尔理论

经典物理学不仅在说明黑体辐射、光电效应上遇到了困难,而且在解释原子光谱的线状结构和原子结构的稳定性上也遇到了不可克服的困难。

一、氢原子光谱的规律及经典物理学的困难

原子发光是重要的原子现象之一,例如钠盐燃烧时发黄光。早在19世纪80年代,人们就对原子光谱进行了大量的实验研究。由于原子很小,当时不能直接观测其结构,但是不同原子的辐射光谱的特征完全不同,因此研究原子光谱的规律是研究原子结构的重要的线索。

氢原子是最简单的原子,人们通过光谱仪观测发现,氢原子光

谱是线状光谱,全部谱线分为5个谱系。为研究方便,定义波长的倒数为波数,即 $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 。氢原子光谱各谱系的名称和各自的经验公式分别为

$$\begin{aligned} \text{赖曼系} \quad \tilde{\nu} &= R_{\infty} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=2,3,4,\dots \quad \text{紫外光} \\ \text{巴耳末系} \quad \tilde{\nu} &= R_{\infty} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=3,4,5,\dots \quad \text{可见光} \\ \text{帕邢系} \quad \tilde{\nu} &= R_{\infty} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=4,5,6,\dots \quad \text{红外光} \\ \text{布喇开系} \quad \tilde{\nu} &= R_{\infty} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=5,6,7,\dots \quad \text{红外光} \\ \text{普丰特系} \quad \tilde{\nu} &= R_{\infty} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=6,7,8,\dots \quad \text{红外光} \end{aligned}$$

从上述很有规律的一些经验公式中,可以发现氢原子光谱有下述规律。

(1) 氢原子光谱是相互分立的线状光谱,每一条谱线有确定的波长。

(2) 任何谱线系的每一条谱线的波数是两项之差。一般有

$$\tilde{\nu} = R_{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) = T(k) - T(n) \quad (13-6)$$

式中: $k=1,2,3,4,5,\dots$; $n=k+1, k+2, k+3,\dots$; R_{∞} 为里德堡常数,其实验数值为 $R_{\infty} = 1.096\,775\,8 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$; $T(k)$ 和 $T(n)$ 为光谱项。

(3) 当正整数 k 取值一定时, n 取不同的值而构成一个谱线系; k 取不同的数值构成不同的谱线系;当 $n \rightarrow \infty$ 时,每个谱线系有一个线系极限。

另一方面,1911年,新西兰著名物理学家卢瑟福提出了原子有核模型。而且这一模型在定量上与 α 粒子的散射实验完全符合,很快为全世界的物理学家所接受。

在原子有核模型的基础上,用经典物理学来理解氢原子的光谱规律。按照经典电磁理论,电子围绕原子核作加速运动要不断地辐射电磁波,因此电子的轨道半径及其能量将会逐渐变小,最后会坠落到原子核上,即产生“坍塌”,而且这一过程在宏观上是非常快的。但是原子是稳定的,这是一个不容否定的客观事实。

另一方面,当电子的能量逐渐减小时,它所辐射的电磁波的频率是连续变化的,应该形成连续的谱线,但是,长期的原子光谱的实验研究表明,原子光谱是分离的谱线。

因此,经典电磁理论在理解原子的稳定上和光谱的不连续性上遇到了困难。

二、玻尔的氢原子理论

为了说明氢原子光谱的规律,克服经典理论所遇到的困难,1913年,丹麦的物理学家玻尔(N. Bohr)在卢瑟福原子核式模型和普朗克的能量子、爱因斯坦的光量子概念的基础上,提出了一种新的原子结构的理论——玻尔理论。它有以下两条基本的假设。

(1) 定态假设:原子只能处于一系列具有不连续能量的稳定状态,简称定态。定态是分立的,处于定态中的原子具有确定的能量。电子虽然做加速运动,但是不辐射能量。

(2) 频率条件:仅当原子从一个具有较高能量 E_n 的定态跃迁到另一个较低能量 E_k 的定态时,原子才辐射一个光子的能量。光子的频率为

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h} \quad (13-7)$$

式中: h 为普朗克常数。反之,当原子处于较低能量 E_k 的定态时,如果吸收一个频率为 ν 的光子,则可以跃迁到较高能量 E_n 的定态。

另外,玻尔还提出了对应原理:当量子数趋于无穷大时,量子

理论得出的结论与经典理论的结果相一致。玻尔根据对应原理推导出了角动量量子化条件：电子在绕核做圆轨道运动时的角动量 L 只能等于 $h/(2\pi)$ 的整数倍，即

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\eta \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13-8)$$

式中： n 称为量子数； η 称为约化普朗克常数。

三、玻尔理论对氢原子的处理结果

玻尔根据上述的量子化假设，结合经典力学和经典电学规律，对氢原子中的电子的轨道半径、定态能量做了定量的计算，并对氢原子光谱给出了合理的解释。

1. 电子的轨道半径

电子在半径为 r 的定态轨道上以速率 v 围绕原子核做圆周运动时，按照牛顿定律和库仑定律，有

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

式中： m 为电子的质量。将式(13-8)代入上式消去 v ，并以 r_n 代替 r ，可得原子处于第 n 个定态时的电子轨道半径为

$$r_n = n^2 \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \right) = n^2 a_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中： a_0 为 $n=1$ 对应的最小的轨道半径，称为玻尔半径，其数值为

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.529 \times 10^{-10} (\text{m})$$

这表明电子的轨道半径是量子化的，不能连续变化，而且氢原子的玻尔半径的数值也与用其他方法得出的结论一致。

2. 能级

在不考虑原子核的运动时，原子的能量为电子的动能和势能之和。如果规定电子在离开核无穷远的电势能为零，则电子在第 n

个轨道上运动时,氢原子的能量为

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (13-9)$$

式中: ν_n 为第 n 轨道的速率。将电子轨道半径的量子化公式代入式(13-8),得到电子运动速率的量子化公式

$$\nu_n = \frac{e^2}{2n\epsilon_0 h} \approx \frac{2.18 \times 10^6}{n}$$

将 r_n, ν_n 的量子化公式代入式(13-9),得到

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{me^4}{8\epsilon_0 h^2} \right) = -\frac{13.6}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中: E_n 的单位为电子伏特(eV),为能量的单位。上式清楚地表明,氢原子的能量是不连续的,是量子化的。这种量子化的能量称为能级。

$n=1$ 的状态是能量最稳定的,其能量最低,叫做基态。 $n=2, 3, 4, 5$ 等各态叫做激发态。

3. 氢原子光谱的解释

在通常情况下,氢原子处于基态。当原子从外界吸收了能量(例如高能粒子的碰撞、热激发、光照射等),就从基态跃迁到较高能量的激发态。处于激发态的原子是不稳定的,电子将自发地从能量较高的态跃迁到能量较低的态。这种跃迁可能是由某一高能态直接跃迁到基态,也可能经过一系列激发态最后返回基态。

根据玻尔理论,当氢原子中的电子从高能态 E_n 向低能态 E_m 跃迁要放出能量,发射一个光子,其频率和波数分别为

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{E_n - E_m}{h} \\ \tilde{\nu} &= \frac{\nu}{c} = \frac{E_n - E_m}{hc} = \frac{me^4}{8\epsilon_0 h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13-10)$$

上式与氢原子光谱的一般经验公式(13-6)是一致的。两式比较,可

得里德堡常数的理论值

$$R_{\infty} = \frac{me^4}{8\epsilon_0 h^3 c} = 1.097\,373\,1 \times 10^7 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

这一理论值与实验值非常接近。

当氢原子从一系列激发态跃迁到同一低能态时,发射的光谱线形成一个谱线系。式(13-10)中的 $k=1,2,3,4,5$ 分别对应赖曼系、巴耳末系、帕邢系、布喇开系、普丰特系。由于能级是量子化的,所以观察到的谱线是分立的线状谱。图13-3显示了氢原子的能级情况。

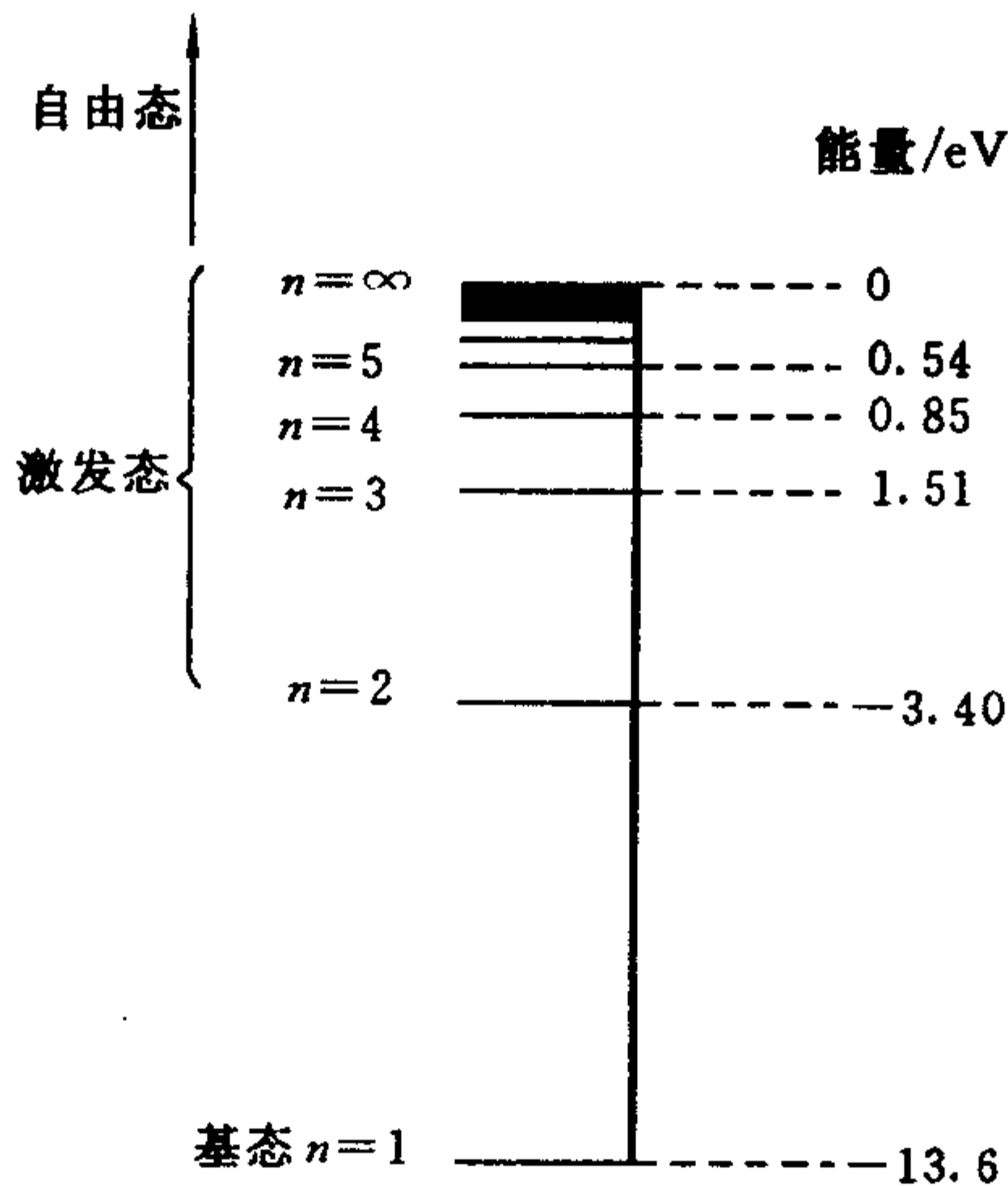


图13-3 氢原子的能级

综上所述,玻尔理论成功地解释了氢原子光谱的实验规律,表明该理论在一定程度上正确地反映了原子内部的规律,为后来的理论发展奠定了基础。但是,玻尔理论是经典理论与量子理论的混合物,不是一个在逻辑上自洽的理论,它不能说明氢原子谱线的强

度、宽度、光的偏振等现象,更不能说明其他原子的光谱规律。后来发展的量子力学系统地解决了这些问题。

第4节 物质波 测不准原理

19世纪,光已经被确认是一种电磁波,而从光电效应、黑体辐射中,又认识到光的粒子性。人们逐渐认识到,必须把光的粒子和波动两种对立的物理图像统一到对光的描述中,以相对论理论为基础,才能全面地认识光的本质,并用光的波粒二象性这一物理学词汇来概括。这是人类到目前为止,对光的本性的最终认识。光的波粒二象性具体表现在本章第2节的公式

$$\left. \begin{aligned} E &= h\nu \\ p &= \frac{E}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \right\}$$

之中。两式左边是反映粒子属性的能量和动量,右边是反映波动特点的频率和波长,通过普朗克常数 h 这一桥梁把两种不同的物理学量联系起来。

光的波粒二象性不仅揭示了光的本质,而且启发了人类对物质世界的重新认识。

一、物质波假说及其验证

法国物理学家德布罗意在光的波粒二象性的启发下,按照对称的观点,用类比的方法,认为质量为 m ,速度为 v 的实物粒子也有波动性。这种与实物粒子对应的波称为德布罗意波或者物质波。德布罗意还具体地预言了物质波的波长和频率:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ \nu &= \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} \end{aligned} \right\} \quad (13-11)$$

这里用了相对论理论的基本关系式。宇宙中任何物质都有波粒二象性,而光子只是其中的一种。这两式称为德布罗意公式。

当 $v \ll c$ 时,有 $m \approx m_0$,并考虑到 $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$,有

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}$$

例 13-1 有一动能为 100 eV 的电子束,求其物质波的波长。

解 由于电子速度不大,可按非相对论理论处理。电子质量为 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ kg,因此此电子束的德布罗意波的波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}} \\ &= \frac{6.6 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 100 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 1.2 \times 10^{-10} = 0.12 \text{ (nm)} \end{aligned}$$

这表明,电子的物质波波长与原子的大小或固体中相邻原子之间的距离具有相同的数量级。这就启发人们用金属表面上规则排列的原子作为精细的衍射光栅来显示电子的波动性。很快,电子波动性的预言得到了实验的证实。

1927年,戴维逊(C. J. Davisson)与革末(Germer)合作,研究低能电子束在镍单晶表面的散射时观察到了电子的衍射现象。同年,汤姆逊(G. P. Thomson)在高能电子束通过金属的透射实验中也观察到电子衍射,所获得的衍射图样与X射线的衍射图样类似,如图13-4所示。以后,中子、原子、分子的衍射现象也观察到了。所

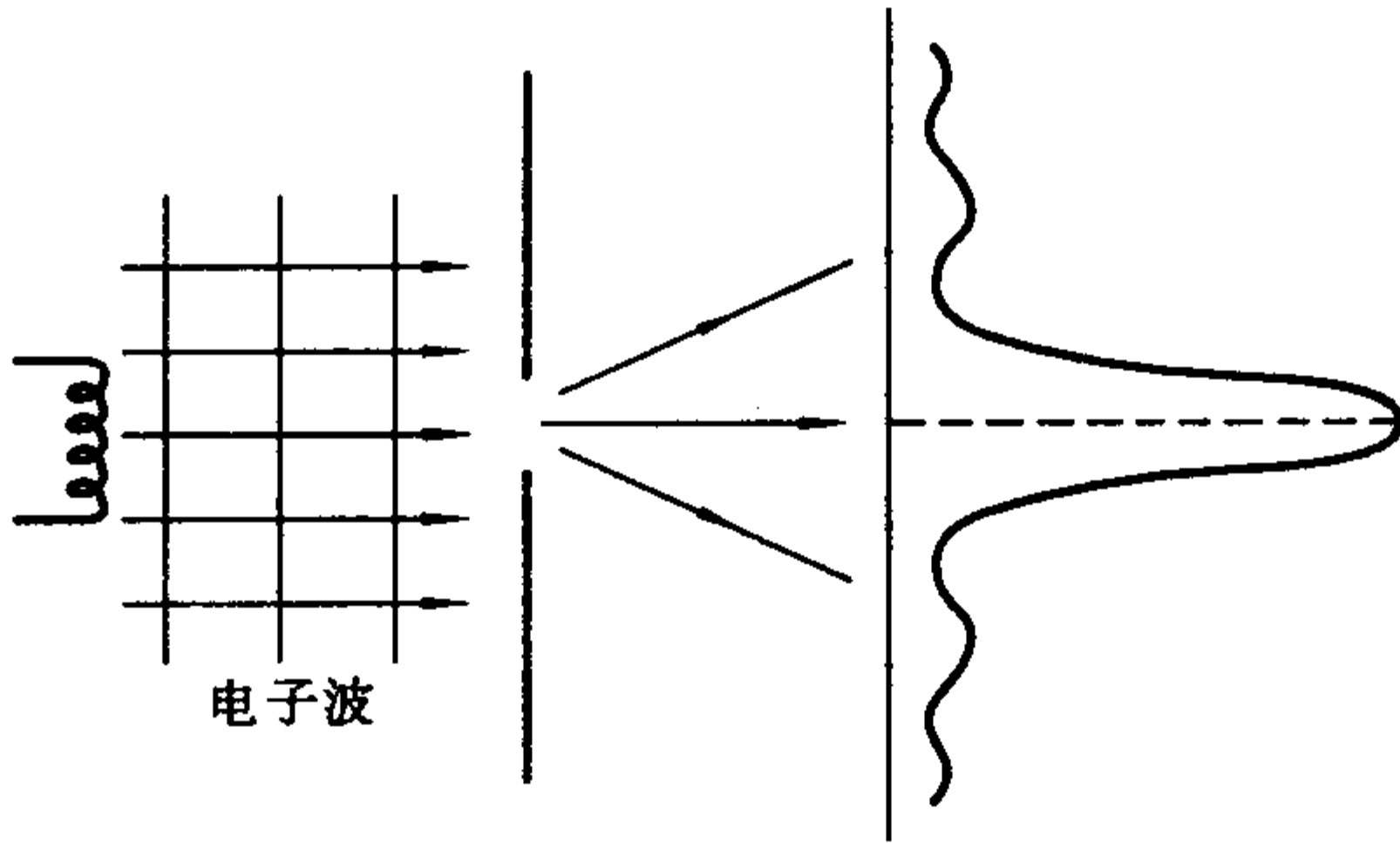


图 13-4 电子衍射现象

有的这些实验都成功地证明了德布罗意的物质波假说。

现在来考察质量比原子和分子大得多的尘埃颗粒的德布罗意波长：观察布朗运动所用的液体中悬浮的小颗粒，其质量大约为 10^{-15} kg，直径大约为 10^{-6} m，在常温下热运动的能量为

$$E = \frac{3}{2}kT \approx 0.4 \times 10^{-20} \text{ (J)}$$

动量 $p = \sqrt{2mE} = \sqrt{3mkT}$ ，则其物质波波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \approx 5 \times 10^{-16} = 5 \times 10^{-7} \text{ (nm)}$$

显然，这样的布朗粒子的波长根本不可能显示出其波动性一面的特性。

从根本上说，波动是所有物质的客观属性，知识对宏观物体而言，其物质波波长很小很小，因此显示不出它的波动性来。从 $\lambda = \frac{h}{p}$ 可见，由于普朗克常数 h 很小，就限制了物质的波动性，只能在微观粒子的运动中表现得很明显。

二、实物粒子的波粒二象性

在经典物理学中,我们讨论了经典的波动图像,经典的波动过程是大量介质元的整体所呈现的一种特殊的运动状态:这种运动状态通过一些物理量对时间和空间的周期性变化来描述,在特定的条件下会发生干涉、衍射现象。那么,物质波是否符合这一图像呢?下面通过理想的电子单缝衍射实验来分析。

一束电子入射到单缝上形成单缝衍射图样,如图13-5所示。如果减弱入射电子的强度,以致电子几乎是一个一个地射向单缝,实验发现,一开始在底版上出现的是零散的、无规则的单个电子的痕迹,慢慢地,经过充分长时间后,同样形成规则的单缝衍射图样。值得注意的是,电子是被一个一个地射向单缝,它们之间毫无联系。结果,大量彼此孤立的电子的足迹竟能在照相底版上勾画出单缝衍射的图样。这一事实表明,单个电子就具有波动性。如此看来,这不符合经典的波动图像。但是运动的电子发生了干涉和衍射现象。干涉和衍射是波的相干叠加性的反映,是波动的特征之一。从能产生干涉和衍射现象来看,运动的电子具有波动性。

1926年,德国物理学家马克思·玻恩(M. Born)对物质波提

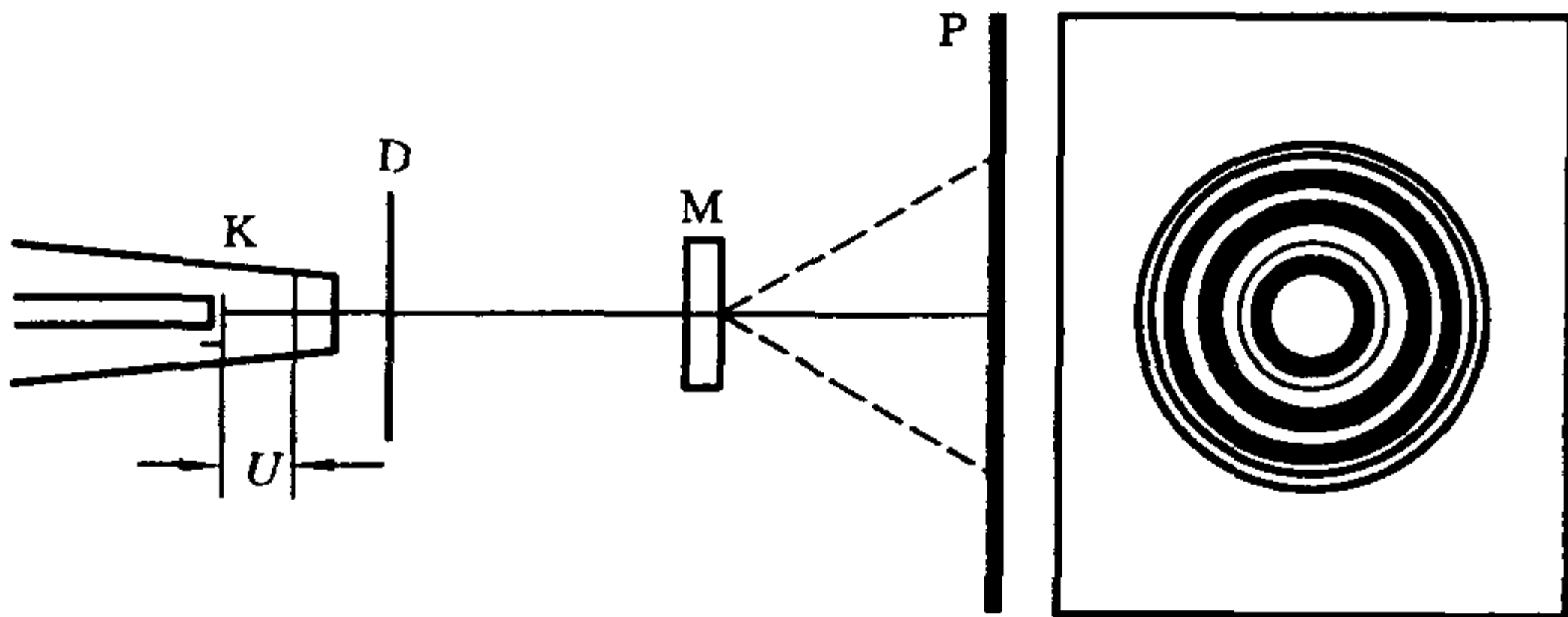


图13-5 单缝衍射

出了正确的解释。他认为,电子等微观粒子所呈现出来的波动性反映了粒子运动的一种统计规律性。或者说,电子波是大量电子的统计行为。在上述理想实验中,不论是让电子一个个地射向单缝,还是让这些电子一次射向单缝,只要电子是大量的,就会在照相底版上得到相同的衍射条纹。条纹的明暗反映了波的强度,衍射极大处,波的强度最大,电子到达得最多,电子在此处出现的几率最大;衍射极小处,波的强度最小,电子到达得最少,电子在此处出现的几率最小。这样,底版上某处附近波的强度自然地与该点附近体积中电子出现的几率成正比。所以,玻恩把德布罗意波叫做几率波。

物质的波动性揭示出来后,人们对物质的粒子性有了新的认识。把电子和其他的微观粒子称为粒子,是因为它的质量、动量、能量集中在一个很小的范围内,呈现出颗粒的外在形式。但是,在任何一瞬时,它没有确定的位置和动量,所以,它和经典粒子不同,没有确切的运动轨道,不再符合经典粒子的物理图像。这将在测不准原理中加以分析。

因此,电子不是经典意义下的波,也不是经典物理中的粒子。但它是波,也是粒子,它的波动性和粒子性在统计一样下得到了自洽的统一。这才是波粒二象性的真实含义。德布罗意假说及其验证极大地推进了人类的认识。

三、测不准原理

测不准原理是微观粒子遵循的普遍规律。1927年,德国物理学家海森堡(W. Heisenberg)从理想的电子单缝衍射为例,引出了这一规律。

在图13-6中,一束电子沿着 Oy 轴射向 AB 屏的狭缝,缝宽为 a ,在 CD 屏上得到衍射图样。图中曲线表示波的强度分布,也就是到达底版上的几率分布。

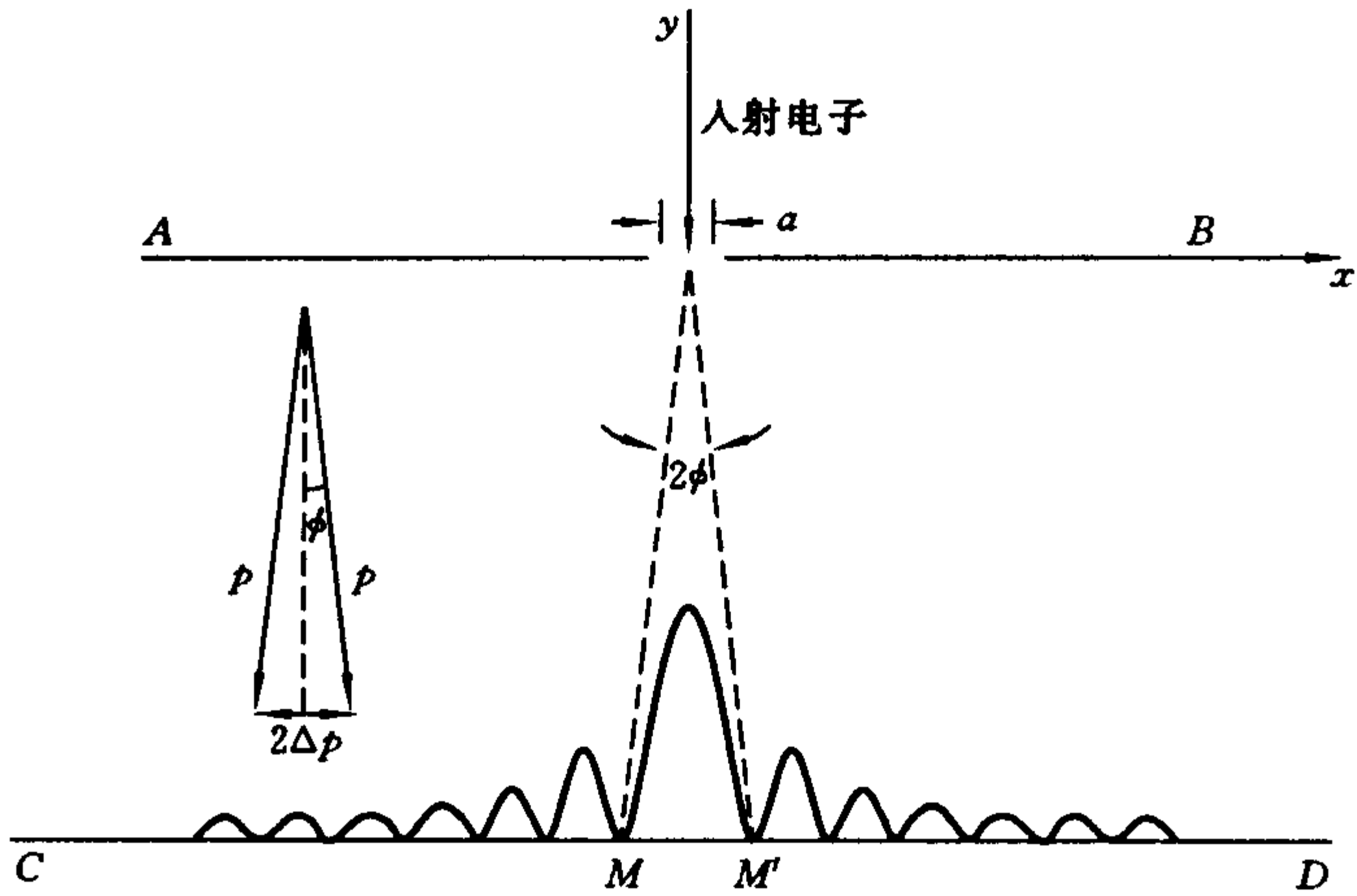


图 13-6 电子单缝衍射

由于电子的波动性,对于其中的任意一个电子,无法预言它落到屏上的确切的位置。因此,它穿过缝的瞬间,也就无法确定它的确切位置 x 的数值。但是,它被限制在缝宽为 a 的范围内通过狭缝。用 Δx 表示电子坐标的不确定量,则有

$$\Delta x = a$$

在电子通过缝的瞬间,它的动量值可以由它打到底版的位置来估算。如果它落在中央极大处,它的动量 x 轴方向的分量 p_x 为零。如果它落在一级最小 M 或 M' 处,它的动量 x 轴方向的分量为 $p_x = p \sin \phi$ 。但是在这种单缝衍射情况下,电子究竟落在何处是无法预言的,也就是它的动量是无法确定的。根据衍射图样可知,电子有较大的可能性落在两个一级极小之间,即 p_x 的取值范围界定在 0 到 $p \sin \phi$ 之间,就是 $\Delta p_x = p \sin \phi$ 。考虑到电子还有可能落在中央亮条纹以外,这时电子的不确定量还要大一些。因此电子动量 x 方向的分量的不确定关系为

$$\Delta p_x \geq p \sin \phi \quad (13-12)$$

由于有 $\sin \phi = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{\Delta x}$, 由德布罗意关系有 $\lambda = \frac{h}{p}$ 。将此两式代入上式, 就有

$$\Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x}$$

即

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \quad (13-13)$$

此式称为海森堡测不准原理, 也叫做不确定关系。它适用于一切的微观粒子。测不准原理表明, 微观粒子不可能既有确定的位置, 又有确定的动量。要使它们的位置的准确度越高 (Δx 越小), 此瞬间的动量的不确定性越低, 衍射图样就铺展得越宽。反之亦然。

要注意的是, 测不准原理表明的“测不准”不是测量技术和主观能力问题, 而是波粒二象性的本质表现。

第5节 波函数 薛定谔方程

经典力学用位置、速度和动量来描述质点的运动状态, 这些量随时间变化的规律是牛顿运动定律。微观粒子有波粒二象性, 它的位置和动量不能同时确定, 因此经典力学的描述方法和动力学规律对微观粒子都不适用。描述微观粒子的定量方法是用波函数, 这相当于物质波的运动学部分; 波函数随时间而变化的规律是薛定谔方程, 这相当于其动力学部分。

一、波函数

实物粒子客观存在着波动性, 当然也有粒子性的一面, 而且本

质上是一种几率波。那么如何定量地描述呢？

从与经典波动的类比中，可以用波函数来描述物质波的几率分布，而且先介绍最简单的一维波函数。

不受任何外力作用(或者说不存在外力场)的粒子称为自由粒子。设有一个动量为 p 、能量为 E 的自由粒子。按照德布罗意假设，它相当于一列沿着 x 轴运动传播的单色平面波(取 x 轴方向为波的传播方向)，其波长和频率分别为 $\lambda = \frac{h}{p}$ ， $\nu = \frac{E}{h}$ 。而经典的平面波的波动方程为

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

以符号 ψ 代替 y ， ψ_0 代替 A ，并代入德布罗意关系式，写成指数形式有

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

这就是自由粒子的物质波的表达式。在一般情况下，它是位置和时间的函数，写为 $\psi(x, y, z, t)$ ，称为波函数。它一般是复数形式，反映了粒子和波动的两方面特征。

物质波是几率波，处于空间某一状态的粒子，对于空间的各个位置，呈现出一定的几率分布，在某处出现的几率是与该处物质波的强度成正比的。而根据波动的观点，波的强度是与振幅的平方成正比的。如果能找到与运动粒子相应的波函数 ψ ，波的强度正比于 $|\psi|^2$ ，这样就可以对微观粒子的运动状态做出定量的描述。根据以上分析，在空间一个小体积元 dV ，在该体积元中粒子出现的几率用 dP 表示，有

$$dP \propto |\psi|^2 dV$$

取比例系数为1，可以写为等式

$$dP = |\psi|^2 dV$$

波函数 ψ 是复数,用 ψ^* 表示它的共轭复数。根据共轭复数的性质,有

$$|\psi|^2 = \psi \times \psi^*$$

$$dP = \psi \times \psi^* dV$$

进一步可以写成

$$\frac{dP}{dV} = \psi \times \psi^* = |\psi|^2$$

式中, $\frac{dP}{dV}$ 为单位体积内粒子出现的几率,称为粒子在该点的几率密度。可见波函数只是一个数学表达式,而不是物理量,它没有确切的物理含义,有实际物理意义的是波函数的模的平方。

例 13-2 试利用自由粒子的波函数讨论它的空间位置的几率分布。

解 量子情况下的自由粒子的波函数为

$$\psi = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

它在某处出现的几率密度为

$$\frac{dP}{dV} = \psi \times \psi^* = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \times \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = |\psi_0|^2$$

可见,对于自由粒子,空间任意一点它都可能出现在,而且在整个空间出现的几率密度是一样的。即它的位置是完全不能确定。我们知道,自由粒子具有完全确定的动量值,即动量的不确定量为零, $\Delta p = 0$,而位置是完全不能确定, $\Delta x \rightarrow \infty$,这一结论是符合测不准原理的。自由粒子为理想模型,因此这里的结论也是理想化的。实际的物质波的波函数都是波包,不可能有真正的自由粒子。

由于波函数描述的是具有统计意义的概率波,因此波函数必须满足下述条件。

(1) 在某时刻,在空间任意一点,粒子出现的概率是惟一的,

不可能有几个值,这就要求波函数是单值的。

(2) 粒子必然在空间出现,整个空间概率总和为1,因此在空间的一个有限的体积内找到粒子的概率为有限值,因此波函数是有限的。

(3) 粒子在空间各点出现的概率是连续分布的,不会在某点发生突变,因此要求波函数是在整个空间都连续的。

一般将波函数的单值、有限、连续称为波函数的标准条件,而不满足标准条件 $\psi(x, y, z, t)$ 是没有意义的。

再者,由于粒子必然存在,因此粒子在整个空间各点出现的概率的总和为1,即

$$\iiint_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1$$

式中,积分区域遍及粒子可能到达的整个空间,这称为波函数的归一化条件。

二、薛定谔方程

以上讨论了描述表征微观粒子波粒二象性的波函数,而且以平面波的波函数为例讨论了波函数的标准条件和归一化条件。但是一般情况下怎么求出其具体的波函数呢? 1924年,奥地利物理学家薛定谔(E. Schrodinger)用类比的方法提出了薛定谔方程,很好地解决了这个问题。

当粒子在势场中沿着 x 轴方向运动,且势场的势能 V 仅取决于坐标 x ,即 $V=V(x)$,这时波函数 ψ 将只是坐标 x 的函数,用 $\psi(x)$ 表示。这种情况下的薛定谔方程是

$$\frac{\eta}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + [E - V(x)]\psi(x) = 0 \quad (13-14)$$

式中: m 和 E 分别代表粒子的质量和总能量; $\eta = \frac{h}{2\pi}$ 为约化普朗克

常数。由于波函数只是坐标 x 的函数,与时间 t 无关,因此这里描述的是粒子在一维定态情况下的薛定谔方程。这个方程的每一个有物理意义的解 $\psi(x)$ 表示粒子运动的某一个稳定状态,与这个解相对应的常数 E 是粒子处在这个稳定状态的能量。

在具体问题中,要正确地分析粒子所在的力场,找出势能函数的形式 $V(x)$,然后写出薛定谔方程的具体表示式;在根据波函数的标准化条件,在求解的过程中选出合理的波函数;最后再归一化波函数。有了波函数,就可以对粒子的位置几率分布做出定量的描述。薛定谔方程在量子力学中的地位与牛顿运动定律在经典力学中的地位是相当的。

三、用薛定谔方程处理一维无限深势阱

假设有一个粒子在某力场中作一维运动,它的势能在一定的区域内为零,在此区域之外为无穷大,即

$$\begin{cases} V(x) = 0, & 0 \leq x \leq a \\ V(x) = \infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$

这种理想化的势能随 x 变化的曲线称为一维无限深势阱,如图13-7所示。

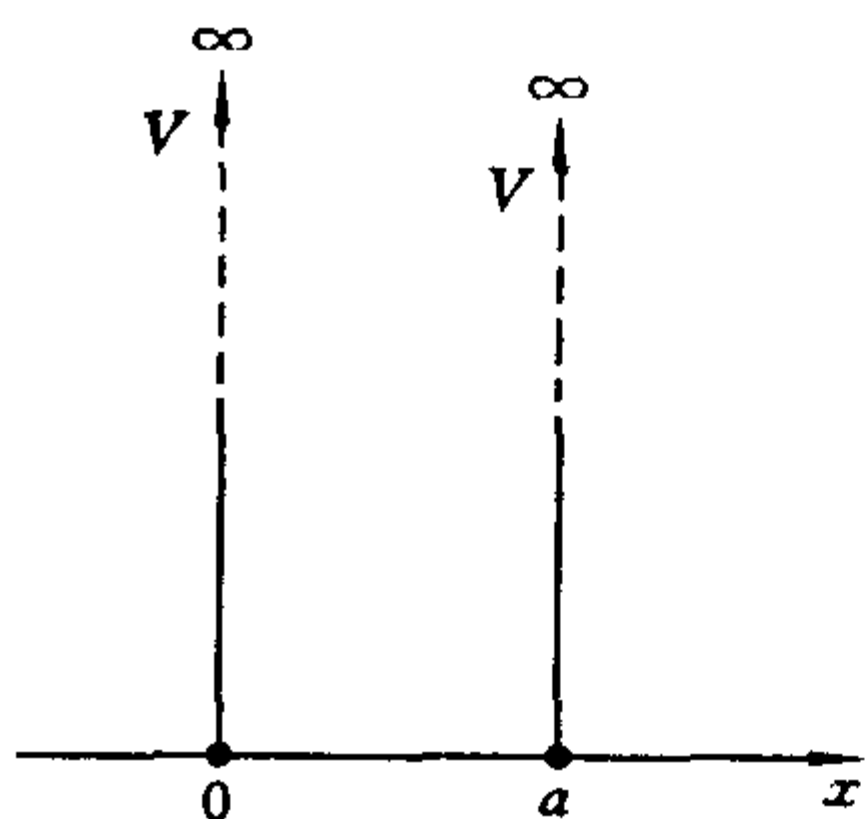


图 13-7 一维无限深势阱

由于在整个空间范围内 $V(x)$ 与时间无关,因此在势阱中运动的粒子处于定态,因此用一维定态薛定谔方程来解决。又因为在 0 到 a 范围内 $V(x) = 0$,式(13-14)的薛定谔方程可简化为

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

设 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$,则有

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$$

方程的通解为

$$\psi(x) = A\sin(kx + \delta)$$

式中, A 和 δ 是待定常数。先利用边界条件确定 δ 。由于粒子被限制在势阱内运动, 在势阱的两端 $x=0$ 和 $x=a$ 处, 波函数的数值应为零, 边界条件为 $\psi(0) = \psi(a) = 0$, 即

$$\psi(0) = A\sin\delta = 0$$

因此有 $\delta=0$ 。再者, 由

$$\psi(a) = A\sin(ka) = 0$$

这就必须有 $ka = n\pi, n=1, 2, 3, \dots$, 即 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{a}$, 由此导致能量 E 只能取一系列分立的数值, 即

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13-15)$$

相应的波函数为

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

常数 A 可用归一化条件求出。由于粒子必定在势阱中出现, 有

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} A^2 a = 1$$

也即

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

最后得到波函数为

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad |x| \leq a, n = 1, 2, 3, \dots \quad (13-16)$$

与能量 E (也就是量子数 n) 对应的粒子在势阱中出现的几率密度

为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a}$$

图 13-8 中的(a)和(b)分别绘出了 $n=1, 2, 3, 4$ 的波函数和几率密度随 x 的分布图形。

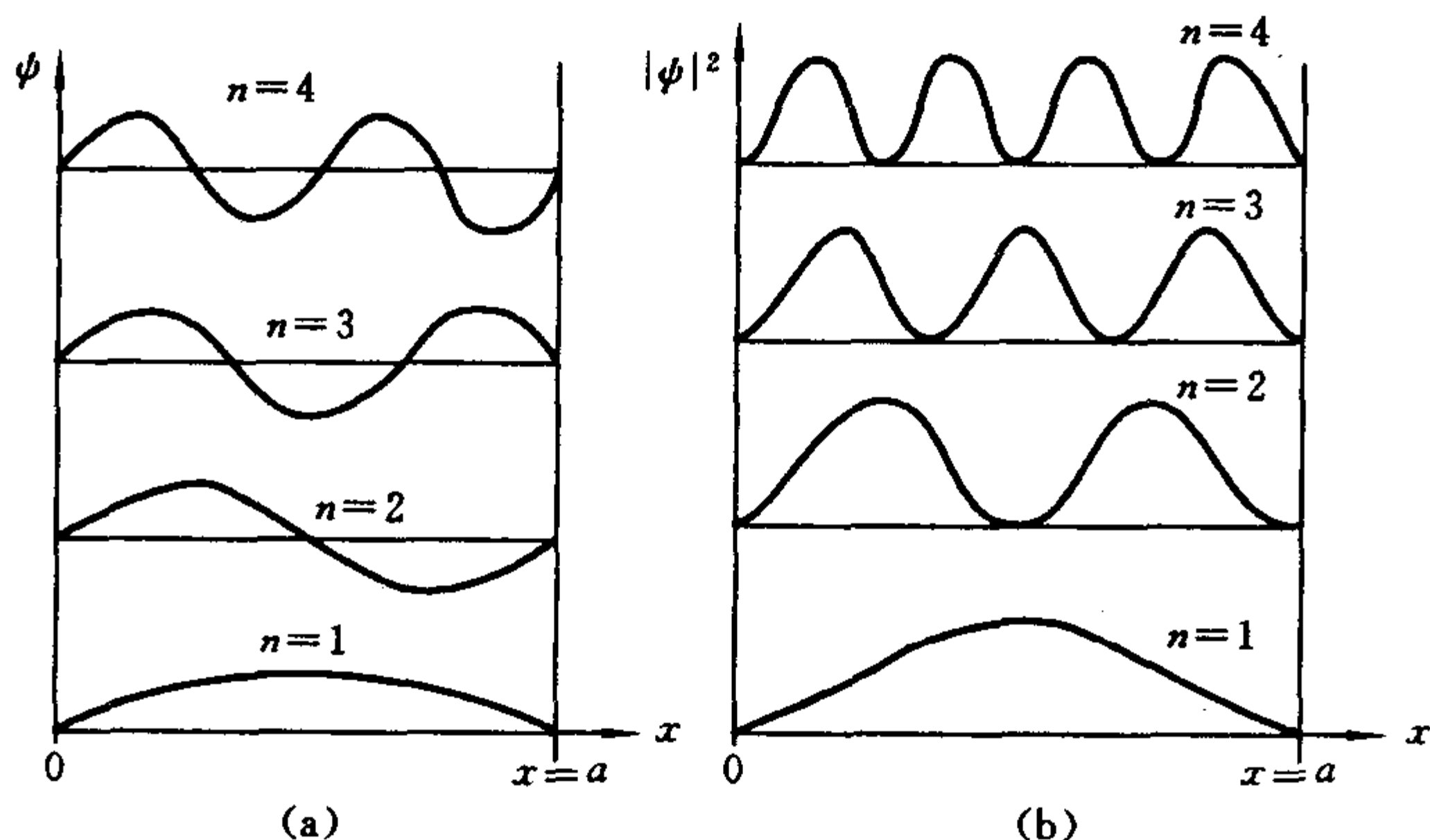


图 13-8 波函数和几率密度随 x 的分布图形

从上面的讨论,可以得到如下几点结论。

(1) 由式(13-14)可见,粒子的能量 E_n 只能取分立的数值,这本质就是能量的量子化。普朗克能量量子化假设在量子力学中成为了一个自然的结论,这是量子力学的一个重要成果。

当 $n=1$ 时,得到粒子能量的最低能量 $E_1 = \frac{\pi^2 \eta^2}{2ma^2}$,也叫做零点能, $E_1 \neq 0$ 表示束缚在势阱内的粒子不可能静止。这也是测不准原理所要求的。由于 $\Delta x = a$,根据 $\Delta x \times \Delta p_x \geq \eta$,故 $\Delta p_x \neq 0$,粒子的动能不可能为零,必定有零点能的存在。这与经典的粒子完全不同。

(2) 式(13-14)中的 E_n 称为能量的本征值,对应的波函数 ψ_n 叫做能量本征态。由图 13-8 可见,束缚在无限深势阱中的粒子的定

态波函数具有驻波形式。对基态 $n=1$ 的波函数,除 $x=0$ 和 $x=a$ 外,没有波节;对第一激发态 $n=2$,有一个节点,在 $x=a/2$ 处;在第 k 个激发态有 k 个节点。

在量子情况下,在势阱中各处找到粒子的概率不同,在波节处找到粒子的概率为零,在波腹处找到粒子的概率最大。这显然与经典物理不同,经典力学认为粒子在势阱内不受力,它将做匀速直线运动,在阱内各处出现的概率应该相同。

(3) 由图 13-8 可见,当 n 增加时,概率分布 $|\psi(x)|^2$ 的极值个数增多;当 n 相当大时, $|\psi(x)|^2$ 的极值个数就会非常多,几乎连续排列,表明粒子在势阱内各处出现的概率均等。这说明当 $n \rightarrow \infty$ 时,量子力学与经典力学的结果一致,经典力学是量子力学在高量子数条件下的近似结果。

一维无限深势阱是从实际问题中抽象出来的理想模型。当某个粒子被约束在一定的空间间隔中时,我们就可以用无限深势阱中的粒子来描述它。束缚在金属体内的自由电子,只能在金属体内运动而不能逸出金属表面,小球的重力势能曲线、电子的电势能曲线,都可以近似当做一维无限深势阱来处理,有着广泛的物理意义。1982年,宾尼(G. Binnig)和罗雷尔(H. Rohrer)等人利用一维无限深方势阱模型研制成功了扫描隧道显微镜(STM),为人类认识微观世界提供了一种方便的观测手段。

思 考 题

13-1 黑体能够全部吸收射在其表面的所有的辐射,一点也不反射,那么在阳光的照射下,为什么黑体的温度不能无限制地升高?

13-2 两件衣服的布料相同,一件为白色,另一件为黑色。夏

天在烈日下穿哪一件较凉快? 在室内穿哪一件较凉快?

13-3 某金属在一束绿光的照射下有光电子逸出,在下述两种情况下逸出的电子会发生怎样的变化?

- (1) 再多用一束绿光照射;
- (2) 用一束强度相同的紫光照射。

13-4 根据玻尔的能级公式,说明当量子数 n 增加时,能级怎样变化? 能级间距怎样变化?

13-5 当氢原子被激发到 $n=4$ 的能态时,可发射哪几条谱线?

13-6 怎样理解实物粒子的波粒二象性?

13-7 波函数的物理意义是什么? 它有哪些特征?

习 题

13-1 试求波长为下列数值的光子的能量、动量及质量

- (1) 波长为 1 500 nm 的红外线;
- (2) 波长为 500 nm 的可见光;
- (3) 波长为 0.15 nm 的 X 射线。

13-2 求温度为 27 °C 时,对应于方均根速率的氧气分子的德布罗意波的波长。

13-3 在势阱范围为 0 到 a 的一维无限深方势阱中,当粒子处于 ψ_1 、 ψ_2 时,求发现粒子概率最大的位置。

附录 部分习题答案

第8章

8-1 (1) $T_1 = \sqrt{2} T_2$; (2) $T_1 = T_2$; (3) $T_1 < T_2$;
(4) $T_1 = T_2$ ($g_{\text{月}} < g_{\text{地}}$)。

8-2 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$ 。

8-3 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$ 。

8-4 0.15 m。

8-5 $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2gE}}$ 。

8-6 (1) $2 \times 10^{-2} \cos 4\pi t$; (2) $2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$;

(3) $2 \times 10^{-2} \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$; (4) $2 \times 10^{-2} \cos\left(4\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$;

(5) $2 \times 10^{-2} \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; (6) $2 \times 10^{-2} \cos\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$ 。

8-7 (1) $x = 0.12A \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$;

(2) 0.1 m, -0.09 m/s, -1.0 m/s²;

(3) 0.83 s。

8-8 坐标轴向下。(1) $0.04 \cos 7t$; (2) $0.03 \cos\left(7t + \frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $0.05 \cos(7t + 0.64)$ 。

8-9 (1) $x_B = 0.05 \cos \pi t$, $x_A = 0.05 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$, 图略。

- 8-10 (1) $\pm \frac{\pi}{3}$ 或 $\pm \frac{2\pi}{3}$; (2) 75%, 25%。
- 8-11 (1) 0.314 s; (2) 2×10^{-3} J; (3) 2×10^{-3} J。
- 8-12 5 cm。
- 8-13 $x = 0.1 \cos(2t - 0.4)$ 。
- 8-14 0.1 m, $\frac{\pi}{2}$ 。
- 8-15 0.038 m; 0。
- 8-16 略。
- 8-17 7.81 cm, $84^\circ 48'$; $0.75\pi, 1.25\pi$ 。
- 8-18 0.1 m, $\frac{\pi}{2}$ 。
- 8-19 略。
- 8-20 (1) $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$; (2) $0, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$;
 (3) $\frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$ 。
- 8-21 $u = 0.12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \lambda = 0.24 \text{ m}$ 。
- 8-22 $1.08 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。
- 8-23 $y = 1.0 \times 10^{-2} \cos \left[2\pi \left(100t - \frac{x}{4} \right) + \frac{3}{2}\pi \right]$ 。
- 8-24 5 Hz, 0.2 s, 0.5 m, 2.5 m/s, 0.05 m。
- 8-25 $8.4\pi, 8.2\pi, \pi$ 。
- 8-26 (1) 8π ; 状态: $x = 8 \times 10^{-2} \text{ m}, v = 0$; (2) 2.2 s。
- 8-27 (1) $y = 0.1 \cos \left[2\pi \left(100t - \frac{x}{4} \right) + \frac{3}{2}\pi \right]$;
 (2) $y_{16} = 0.1 \cos(200\pi t - 6.5\pi)$,
 $y_{20} = 0.1 \cos(200\pi t - 8.5\pi)$;
 (3) $\frac{\pi}{2}$ 。

- 8-28 $1.58 \times 10^5 \text{ W/m}^2; 3.79 \times 10^3 \text{ J}$ 。
- 8-29 $6.41 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3; 2.18 \times 10^{-3} \text{ J/(m}^2 \cdot \text{s)}$ 。
- 8-30 (1) $\Delta\phi = -3\pi, A = |A_1 - A_2|$;
(2) $\Delta\phi = -2\pi, A = A_1 + A_2$ 。
- 8-31 S_1 外侧: $A = |A_1 - A_2|$; S_2 外侧: $A = A_1 + A_2$ 。
- 8-32 (1) $\Delta\phi = 0$; (2) $4 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。
- 8-33 (1) 波节 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, 处; 波腹 $0, 1, 2, 3, \dots$, 处;
(2) $A_{\max} = 0.12 \text{ m}; A' = 0.097 \text{ m}$ 。

第9章

- 9-1 原明纹处变为暗纹。
- 9-2 (1) 0.91 mm ; (2) 24 mm ; (3) 不变。
- 9-3 $n = l + M\lambda/l$ 。
- 9-4 $d = 8 \times 10^{-6} \text{ m}$ 。
- 9-5 (1) 6.0 mm ; (2) 19.9 mm 或 7.9 mm 。
- 9-6 凹陷, $\frac{\lambda}{2}$ 。
- 9-7 (1) 0.11 m ; (2) 7 级。
- 9-8 $\lambda_1\lambda_2/[2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda]$ 。
- 9-9 (1) $4.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$; (2) 明纹; (3) 3 条明纹, 3 条暗纹。
- 9-10 $1.28 \times 10^{-6} \text{ m}$ 。
- 9-11 (1) $2.95 \times 10^{-5} \text{ m}$; (2) G_2 比 G_1 长。
- 9-13 13.3% 。
- 9-14 $n = 1.36$ 。
- 9-15 (1) $e_k = (2k - 1)\lambda/4$;
(2) $r_k = \sqrt{(2k - 1)R\lambda/2}$ ($k = 1, 2, \dots$)。
- 9-16 (1) $r_{10} = 0.373 \text{ m}$; (2) $e_{10} = 2.32 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 。

- 9-17 1.03 m。
 9-18 $(n-1)\lambda/2$ 。
 9-19 37 968 Å。
 9-20 2λ 。
 9-21 4。
 9-22 (1) 90° ; (2) $5^\circ 44'$; (3) $34'$ 。
 9-23 (1) $\lambda_1 = 2\lambda_2$; (2) $k_2 = 2k_1$ 相应的暗纹重合。
 9-24 (1) 1.2 cm; (2) 1.2 cm。
 9-25 (1) 0.27 cm; (2) 1.8 cm。
 9-26 (1) 5 103 Å; (2) 25° 。
 9-27 (1) 2; (2) 1.2×10^{-3} cm。
 9-28 (1) 3; (2) 5。
 9-29 (1) 600×10^{-6} m; (2) 1.50×10^{-6} m; (3) 8 级。
 9-30 (1) 6×10^{-2} m; (2) 5。
 9-31 $\frac{1}{4}I_0 \sin^2(2\alpha)$ 。
 9-32 $\frac{\pi}{4}$ 。
 9-33 (1) 45° ; (2) 45° 。
 9-34 54.7° 。

第 10 章

- 10-1 1.99×10^{-22} J; 1.20×10^2 J。
 10-2 3.21×10^{12} 个。
 10-3 71.3 K; 9.43×10^2 m/s。
 10-4 3.74×10^3 J; 2.94×10^3 J; 6.23×10^3 J。
 10-5 1.52×10^3 J; 7.79×10^2 J。
 10-6 3.90×10^2 m/s。
 10-7 4.92×10^2 m/s; 28×10^{-3} kg/mol。

第 11 章

- 11-1 (1) 250 J; (2) -292 J; (3) 209 J, 41 J。
11-2 (1) 2.08×10^2 J; (2) 1.48×10^2 J; (3) 59.4 J, 0。
11-3 (1) 3.27×10^3 J; 2.02×10^3 J; 1.25×10^3 J;
(2) 2.94×10^3 J; 1.69×10^3 J; 1.25×10^3 J。
11-4 (1) 5.90×10^3 J; (2) 3.02×10^3 J。
11-6 1.13×10^3 J; 1.13×10^3 J; 12.5%。
11-7 93.3 K。
11-8 -6.91×10^3 J; -6.91×10^3 J。

第 12 章

- 12-1 5.77×10^{-6} s。
12-2 $0.994c$ 。
12-3 $0.866c$ 。
12-4 $0.999\ 999\ 985c$ 。
12-5 3.21×10^5 eV, 5.71×10^{-31} kg。

第 13 章

- 13-1 (1) 1.33×10^{-19} J, 4.42×10^{-28} kg · m/s,
 1.47×10^{-36} kg;
(2) 3.99×10^{-19} J, 1.33×10^{-27} kg · m/s,
 4.41×10^{-36} kg;
(3) 1.33×10^{-15} J, 4.42×10^{-24} kg · m/s,
 1.47×10^{-32} kg。
13-2 2.85×10^{-11} m。
13-3 $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{3a}{4}$ 。

前言
目录

第 8 章 振动学和波动学基础

- 第 1 节 简谐振动
- 第 2 节 简谐振动的合成
- 第 3 节 简谐波
- 第 4 节 平面简谐波的定量分析
- 第 5 节 电磁波
- 第 6 节 波的叠加
- 思考题
- 习题

第 9 章 波动光学

- 第 1 节 光的相干性 获得相干光的两种方法
- 第 2 节 双缝干涉 薄膜干涉
- 第 3 节 光的衍射
- 第 4 节 迈克耳孙干涉仪 时间相干性
- 第 5 节 衍射光栅
- 第 6 节 光的偏振
- 思考题
- 习题

第 10 章 气体分子运动论

- 第 1 节 理想气体的状态方程
- 第 2 节 理想气体的压强、温度和内能
- 第 3 节 麦克斯韦速率分布律 玻耳兹曼分布律
- 思考题
- 习题

第 11 章 热力学基础

- 第 1 节 热力学第一定律
- 第 2 节 热力学第一定律应用于理想气体特征过程
- 第 3 节 循环过程 卡诺循环
- 第 4 节 热力学第二定律
- 思考题
- 习题

第 12 章 相对论基础

- 第 1 节 相对运动 伽利略变换
- 第 2 节 狭义相对论的两条基本假设 洛伦兹变换
- 第 3 节 狭义相对论的时空观
- 第 4 节 狭义相对论动力学基础
- 第 5 节 广义相对论简介
- 思考题
- 习题

第 13 章 量子论基础

- 第 1 节 黑体辐射 普朗克能量子假说

第2节 光电效应 爱因斯坦光量子理论

第3节 氢原子光谱 玻尔理论

第4节 物质波 测不准原理

第5节 波函数 薛定谔方程

思考题

习题

附录 部分习题答案

参考文献