

清华大学教材 张三慧 主编

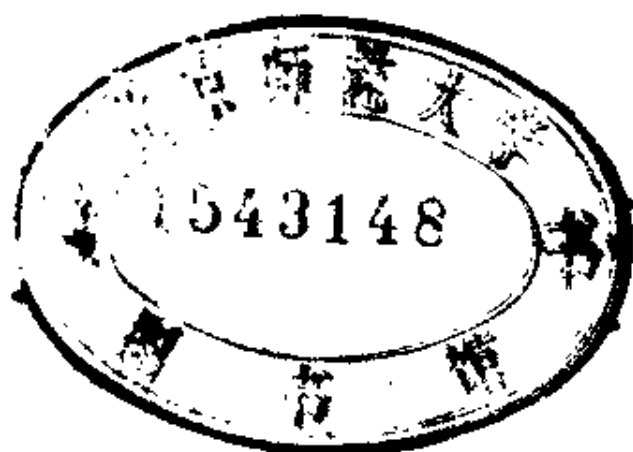
大学物理学

第一册

力学

张三慧 王虎珠 编著

511/245/31



清华大学出版社

内 容 简 介

本书是清华大学新编教材《大学物理学》的第一册,讲述了物理学基础理论的力学部分,包括质点力学,刚体的定轴转动和狭义相对论。书中特别着重于守恒定律的讲解,对势能概念作了清晰的说明。内容的选择上除包括经典基本内容外,还注意引进现代物理知识与物理思想。为此还特别写了基本粒子,奇妙的对称性,弯曲的时空等今日物理趣闻和物理学与现代技术等附加栏目作为选讲或选读内容,以扩大学生的现代物理知识领域。

本书是作为各类工科院校的物理学教材而编写的。但也可作其他高等院校师生和中学物理教师教学或自学参考书。

清华大学教材 张三慧 主编

大学物理学

第 一 册

力 学

张三慧 王虎珠 编著

清华大学出版社出版

北京 清华园

人民教育出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

开本: 850×1168 1/32 印张: 7.5 字数: 245 千字

1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷

印数: 0001-8000

ISBN 7-302-00540-7/O·101

定价: 2.15 元

前 言

摆在你面前的这部《大学物理学》，是根据编者们在清华大学长期讲授大学物理学课程的经验编写的。前此曾以讲义的形式在校内多次使用过。

物理学是工科大学生必修的基础理论课。随着工业技术和物理科学本身的发展，物理学内容和讲授方法应有相应的更新。但是，在我国，近几十年来的物理教学，特别反映在物理教材上，并没有很好地适应这种时代的变化。这主要表现在：① 内容基本未变，近代物理的基本概念与方法没有得到应有的反映。② 讲述方法基本未变，某些重要物理现象与规律相对孤立，没有反映出现代物理对自然规律的深刻的系统化的理解。③ 与目前我国中学物理教学衔接不好，不少内容是简单重复。这就破坏了学生学习物理的兴趣，妨碍了他们学习积极性的发挥。

针对这些我们认为的缺点，本书编写时力求体现以下的特点。

首先是起点较高，凡是中学教学大纲已列内容，我们都认为学生已基本掌握。除了本书的讲述系统所需要的以外，一般不再做简单的重复。

其次是着重加强了讲述的系统性。阐述物理学的内容可以按照两种逻辑进行，一种是遵循历史发展的顺序——历史逻辑，从古到今依次讲述。另一种是遵循已知的物理规律自身的相互联系所确定的主从顺序——结构逻辑或教学逻辑，从最基本的规律逐渐展开。虽然在不少地方这两种逻辑是一致的，但二者确有明显的不同。为了使工科大学生在较短的时间内对大学物理课程的内

容有一个尽可能整体的理解，我们在本书中基本上采取了后一逻辑。

力学部分当然是以牛顿定律为基础展开的。书中着重阐述了守恒定律，就中势能的概念作了清晰的解说。在刚体转动部分还特别指明定轴转动定律与一般角动量定理的关系，狭义相对论内容重点是时空观的更新。这应该是现代物理学的基础。为了体现这一点，我们把狭义相对论放在力学后面讲授。

尊重我国教师的习惯，电磁学部分讲述的主线仍是“经典”式的，即把电场、磁场和电磁感应的规律分别建立在不同的实验基础上作为相互独立的规律加以介绍。这基本上是 1873 年已形成的体系。狭义相对论出现不久，就有人以相对论为基础建立电磁学的新体系。目前除在杂志上不断有人发表完善这一体系的文章外，从 60 年代 E. M. 帕塞尔的《电磁学》开始，在大学物理课程中也引入了这一新体系。我们认为这一体系，至少其基本思想，是有可能在中国大学物理课程中为学生所接受的。因此，我们在电磁学部分作为副线讲了电场的变换、运动点电荷的电场，磁场是从哪里来的？匀速运动点电荷的磁场以及从电磁场变换看位移电流和电磁感应等章节。如果按照这一副线讲述（我们就是这样作的），可以使学生更深刻地理解电磁场的统一性，并且可在讲述过程中大大提高内容的系统性与启发性。此外电磁学的内容我们没有讲到麦克斯韦方程就结束，而是又介绍了加速电荷的辐射场、电磁场的动量与能流等。这对理解电磁场的普遍性质是重要的。

热学部分可以说是以统计概念、统计规律为基础加以讲述的。分子运动论当然是这样。对热力学第一定律也说明了其微观意义。特别是对热力学第二定律，我们没有局限于历史上对热机发展的依赖，而是从更普遍的自然过程的方向性开始讲起，在总结关于宏观过程方向性的基础上提出热力学第二定律并指出它的微观意

义。熵的概念就是这样从统计的角度引入的。

振动与波是牛顿力学的延伸。物理光学实际上是作为波的基本规律在电磁现象中的应用而讲述的。在量子物理部分我们也大胆地采用了教学逻辑：以波粒二象性为基础，以薛定谔方程为基本公式展开讲述有关基本内容。并没有把热辐射作为引入量子概念的课题加以讲解，而是作为谐振子能量量子化的实例讲述的。

第三是在保证基本经典内容的基础上，大力使内容现代化。书中着重介绍了现代物理学的观点，如守恒定律与对称性，相对论的时空观，原子观点、统计观点，微观粒子的二象性与量子性等。关于现代物理包括的物理学前沿知识介绍，除了散见于各章的实例、例题或习题外，本书特辟了两类特殊内容：“今日物理趣闻”和“物理学与现代技术”。前者介绍当今物理学前沿的发展，例如粒子理论、广义相对论、超导、等离子体、大爆炸、耗散结构理论等。后者介绍物理学的某些现代应用，如同步卫星的发射、等离子体发电、热泵、隧穿扫描显微镜等。这些内容很难有时间在课堂上讲授。我们热切地希望读者们都能在课余阅读这些材料。这对于提高学习物理的兴趣，扩大科学视野以及在各自的专业范围内开阔自己的思路一定是有帮助的。

本书还写了十几篇“科学家介绍”，简要地介绍了重要的物理学家的生平与贡献。这样做，一方面是为了向学生提供必要的物理学史知识，另一方面也希望学生能从这些科学家的开创精神、治学态度以及思想境界方面获得教益。

关于习题，我们并不赞同那种越多越好的观点。考虑到学生的全面发展以及理解和掌握物理基本概念和定律的实际需要，本书中只编选了比在规定学时内能完成的稍多的思考题与习题。我们希望大学生在做题时不要贪多，而要求精、要真正把做过的每一道题从概念原理上搞清楚，并且用尽可能简洁明确的语言、公式、图

象表示出来。需知,对一个科技工作者来说,正确地用书面表达自己的科学思维过程也是一项重要的基本功。

本书每章都列有“本章要求”和“本章提要”。我们希望通过这些来发挥学生学习的主动性和帮助他们进行自我检查。

本书在清华大学各工科系使用时,是在规定的120学时内授完的(其中包括20—30学时的习题讨论课)。讲课有粗有细。有些属于要求的章节也未在课堂上讲授而留给学生自学。学生中的大多数都是怀着很大的兴趣阅读这部教材的。若干兄弟院校也用此书作为教材,师生反应均好。

本书编写时也吸收了本校物理系其他物理教师的宝贵经验。在编写和试用过程中,李恭亮、许崇桂、邓新元、高炳坤、黄天麟、王以炳、陈惟蓉等老师曾提出过许多宝贵的意见;刘凤英、谢起成等老师参加了本书核算习题答案的工作;张礼教授、李兴中教授审阅了部分文稿;韩晓东同志提供了许多照片,程远老师为本书绘制了全部科学家的肖像,郭奕玲老师提供了部分物理学史资料。对以上这些热情的帮助,我们表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中,我们还借鉴了国外的许多教材,特别是帕塞尔的《电磁学》(E. M. Purcell; Electricity and Magnetism)和奥哈尼安的《物理学》(H. C. Ohanian; Physics)。对于这两本书的作者,我们也特别致以谢意。

我们曾经以“更新内容,为编写一部第一流的物理教材而努力”作为我们的奋斗纲领。目前这部教材虽然离“第一流”尚远,但我们也愿意把它献给广大的物理教师 and 大学生们。如果它能对他们的教学更新和学习提高有所帮助,我们将十分高兴。同时,我们也热切地盼望着他们对本书各方面的批评。

本书初版曾以《工科大学物理学》为名由北京科技出版社于1987年12月出版。现经较大增补更名为《大学物理学》改由清华

大学出版社出版。对清华大学出版社对本书的关照与帮助，我们也表示衷心的感谢。

编者 1990年4月

数 值 表

真空中的光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$
普朗克常数	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
引力常数	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
玻耳兹曼常数	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
阿佛伽德罗常数	$N_A = 6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$
电子的静止质量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
等价能量	$E_e = 0.511 \text{ MeV}$
质子的静止质量	$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
等价能量	$E_p = 0.938 \text{ GeV}$
中子的静止质量	$m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
1 电子伏特能量	$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
质子电量	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
已知的宇宙	
核子数	10^{80}
半径	$10^{10} \text{ 光年} \approx 10^{26} \text{ m}$
星系数	10^{11}
我们的银河系	
质量	10^{42} kg
半径	$10^5 \text{ 光年} \approx 10^{21} \text{ m}$
恒星数	1.6×10^{11}
太阳	
质量	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
半径	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
平均密度	1410 kg/m^3
表面重力加速度	274 m/s^2

自转周期	~26 天
总辐射功率	$4 \times 10^{26} \text{W}$
地球	
质量	$5.98 \times 10^{24} \text{kg}$
赤道半径	$6.378 \times 10^6 \text{m}$
极半径	$6.357 \times 10^6 \text{m}$
平均密度	5520kg/m^3
表面重力加速度	9.81m/s^2
自转周期	1 恒星日 = $8.616 \times 10^4 \text{s}$
自转角动量	$0.331 MR^2 = 8.05 \times 10^{37} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
到太阳的平均距离	$1.50 \times 10^{11} \text{m}$
公转周期	1 年 = $3.16 \times 10^7 \text{s}$
公转速度	29.8km/s
月球	
质量	$7.35 \times 10^{22} \text{kg}$
半径	$1.74 \times 10^6 \text{m}$
平均密度	3340kg/m^3
表面重力加速度	1.62m/s^2
自转周期	27.3 天
到地球的平均距离	$3.84 \times 10^8 \text{m}$
运行周期	1 恒星月 = 27.3 天

目 录

第一章 质点运动学	1
§ 1.1 质点的运动函数	1
§ 1.2 位移和速度	4
§ 1.3 加速度	6
§ 1.4 匀加速运动	10
§ 1.5 匀加速直线运动	12
§ 1.6 抛体运动	15
§ 1.7 圆周运动	19
§ 1.8 相对运动	24
思考题	29
习题	30
科学家介绍 伽里略	34
第二章 牛顿运动定律	38
§ 2.1 牛顿运动定律	38
§ 2.2 SI单位和量纲	42
§ 2.3 技术中常见的几种力	46
§ 2.4 基本的自然力	50
§ 2.5 应用牛顿定律解题	54
§ 2.6 惯性系与非惯性系	60
*§ 2.7 惯性力	62
思考题	66
习题	68
科学家介绍 牛顿	74

今日物理趣闻 A. 基本粒子	78
----------------	----

第三章 动量与角动量 89

§ 3.1 冲量与动量定理	89
---------------	----

§ 3.2 质点系的动量	93
--------------	----

§ 3.3 动量守恒定律	95
--------------	----

§ 3.4 质心	99
----------	----

*§ 3.5 质心运动定理	102
---------------	-----

§ 3.6 质点的角动量	107
--------------	-----

§ 3.7 角动量守恒定律	110
---------------	-----

思考题	113
-----	-----

习题	115
----	-----

物理学与现代技术 I. 火箭	118
----------------	-----

第四章 功和能 122

§ 4.1 功	122
---------	-----

§ 4.2 动能定理	127
------------	-----

§ 4.3 一对力的功	130
-------------	-----

§ 4.4 保守力	132
-----------	-----

§ 4.5 势能	134
----------	-----

§ 4.6 万有引力势能	136
--------------	-----

§ 4.7 弹簧的弹性势能	139
---------------	-----

*§ 4.8 由势能求保守力	140
----------------	-----

§ 4.9 机械能守恒定律	142
---------------	-----

§ 4.10 守恒定律的意义	149
----------------	-----

思考题	152
-----	-----

习题	154
----	-----

物理学与现代技术 II. 同步卫星的发射	160
----------------------	-----

今日物理趣闻 B. 奇妙的对称性	163
------------------	-----

第五章 刚体的定轴转动	178
§ 5.1 刚体的运动	178
§ 5.2 刚体定轴转动定律	182
§ 5.3 转动惯量的计算	185
§ 5.4 刚体定轴转动定律的应用	190
§ 5.5 转动中的功和能	193
§ 5.6 刚体的角动量和角动量守恒定律	197
*§ 5.7 进动	204
思考题	209
习题	211
第六章 狭义相对论基础	217
§ 6.1 牛顿相对性原理和伽里略变换	218
§ 6.2 爱因斯坦相对性原理和光速不变	222
§ 6.3 同时性的相对性和时间膨胀	225
§ 6.4 长度缩短	231
§ 6.5 洛仑兹变换	235
§ 6.6 相对论速度变换	240
§ 6.7 相对论质量	243
§ 6.8 相对论动能	247
§ 6.9 相对论能量	249
*§ 6.10 相对论动量—能量变换	254
*§ 6.11 相对论动量变化率的变换	255
思考题	258
习题	259
科学家介绍 爱因斯坦	263
今日物理趣闻 C. 弯曲的时空	267
习题答案	281

第一章 质点运动学

本章要求

1. 正确地应用矢量概念理解质点的运动函数的意义和运动的叠加以及位移、速度和加速度等概念。
2. 复习巩固中学学过的一维匀加速运动、自由落体运动及抛射体运动的规律。
3. 正确理解切向加速度和法向加速度的意义,并能正确地进行计算。
4. 正确理解和应用伽里略速度变换。

§ 1.1 质点的运动函数

力学是研究物体的机械运动规律的。物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。位置总是相对的,这就是说任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。这个其他物体或物体系就叫做确定物体位置时用的参照系。例如,确定交通车辆的位置时,我们用固定在地面上的一些物体,如房子或路牌作参照系,这样的参照系通常叫地面参照系。在物理实验中,确定某一物体的位置时,我们就用固定在实验室内的物体,如周围墙壁或固定的实验桌作参照系,这样的参照系就叫实验室参照系。

经验告诉我们,相对于不同的参照系,同一物体的同一运动,会表现为不同的形式。例如,一个自由下落的石块的运动,在地面

参照系中观察,它是直线运动。如果在近旁驰过的车厢内观察,即以行进的车厢为参照系,则石块将作曲线运动。物体运动的形式随参照系的不同而不同,这个事实叫**运动的相对性**。由于运动的相对性,当我们描述一个物体的运动时,就必须指明是相对于哪个参照系来说的。

确定参照系之后,为了定量地说明一个质点相对于此参照系的位置,就在此参照系上建立固定的坐标系。最常用的坐标系是笛卡尔直角坐标系。这个坐标系以参照系中某一固定点为原点 O ,

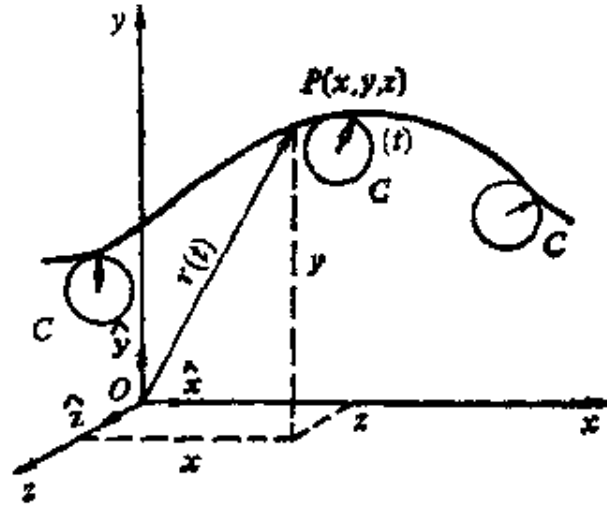


图 1.1 质点的位置表示

从此原点沿三个相互垂直的方向引三条固定的直线做为坐标轴,通常分别叫做 x, y, z 轴(图 1.1)。在这样的坐标系中,一个质点在任意时刻的位置,如 P 点,就可以用三个坐标值 (x, y, z) 来表示。

质点的运动就是它的位置随时间的变化。力学中只描述质点的位置如何随时间变化的这一部分内容,叫**质点运动学**,为了描述质点的运动,需要指出质点到达各个位置 (x, y, z) 的时刻 t 。这时刻 t 是由在坐标系中各处配置的许多同步的钟给出的。质点在运动中到达各处时,都有近旁的钟给出它到达相应各处的时刻 t 。这样,质点的运动,也就是它的位置随时间的变化,就可以用数学函数的形式表示出来。作为时间的函数的三个坐标值可以一般表示为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad (1.1)$$

这样的一组函数叫做质点的运动函数(有的书上叫运动方程)。

质点的位置可以用矢量的概念更简洁清楚地表示出来。为了

表示质点在时刻 t 的位置 P ，我们从原点向此点引一有向线段 OP ，并记作矢量 \mathbf{r} 。 \mathbf{r} 的方向说明了 P 点相对于坐标轴的方位， \mathbf{r} 的大小（即它的模）表明了原点到 P 点的距离。方位和距离都知道了， P 点的位置也就确定了。用来确定质点位置的这一矢量 \mathbf{r} 叫做质点的**位置矢量**，简称**位矢**，也叫**矢径**。质点在运动时，它的位矢是随时间改变的。这一改变可以一般地用下述函数形式来表示，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1.2)$$

这就是质点的运动函数的矢量表示式。

由于空间的几何性质，位置矢量总可以用它的沿三个坐标轴的分量表示。位置矢量 \mathbf{r} 沿三个坐标轴的分量分别是 x, y, z 。以 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正方向的单位矢量（即大小都是 1 个单位的矢量，有的书上分别用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示），则位矢 \mathbf{r} 和它的三个分量的关系就可以用下面的矢量合成公式表示

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.3)$$

式中等号右侧各项分别是位矢 \mathbf{r} 沿各坐标轴的分矢量，它们的大小分别等于各坐标值的大小，方向依各坐标值的正负而沿各该坐标轴的正向或负向。根据此式，(1.1)和(1.2)式表示的运动函数就有如下的关系

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \quad (1.4)$$

(1.1)式中各函数表示质点位置的各坐标值随时间的变化情况，可以看作是质点沿各坐标轴的分运动的表示式。质点的实际运动是由(1.1)式中三个函数的总体或(1.2)式表示的。(1.4)式表明：质点的实际运动是各分运动的矢量合成，这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系叫**运动的叠加(或合成)原理**。

§ 1.2 位移和速度

质点在一段时间内位置的改变叫做它在这段时间内的位移。设质点在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻分别通过 P 和 P_1 点(图 1.2), 其位矢分别是 $r(t)$ 和 $r(t + \Delta t)$, 则由 P 引到 P_1 的矢量表示位矢的增量, 即

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

这一位矢的增量就是质点在 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间内的位移。

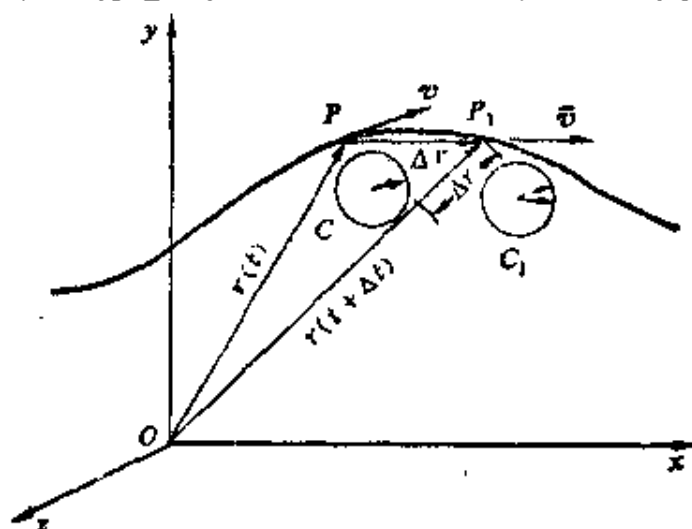


图 1.2 位移矢量和速度矢量

应该注意的是, 位移 Δr 是矢量, 即有大小又有方向。其大小(即它的模)用 Δr 矢量的长度表示, 记做 $|\Delta r|$ 。这一数量不能简写为 Δr , 因为 $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$, $|\Delta r|$ 是位矢的大小在 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间的增量。一般地说, $|\Delta r| \approx \Delta r$ 。

位移 Δr 和发生这段位移所经历的时间的比叫做质点在这一段时间内的平均速度。以 \bar{v} 表示平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1.5)$$

平均速度也是矢量,它的方向就是位移的方向,如图(1.2)所示。

当 Δt 趋于零时, (1.5) 式的极限, 即质点位矢对时间的变化率, 叫做质点在时刻 t 的**瞬时速度**, 简称**速度**。用 \boldsymbol{v} 表示速度, 就有

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (1.6)$$

速度的方向, 就是 Δt 趋于零时, $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向。如图 1.2 所示, 当 Δt 趋于零时, P_1 点向 P 点趋近, 而 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向最后将与质点运动轨道在 P 点的切线一致。因此, 质点在时刻 t 的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方。

速度的大小叫**速率**, 以 v 表示, 则有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} \quad (1.7)$$

用 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程。当 Δt 趋于零时, $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 和 Δs 趋于相同。因此可以得到

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.8)$$

这就是说速率的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率。

根据位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 的区别可以知道, 一般地,

$$v = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| \neq \frac{dr}{dt}$$

将(1.4)式代入(1.6)式, 由于沿三个坐标轴的单位矢量都不随时间改变, 所以有

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad (1.9)$$

等号右面三项分别表示沿三个坐标轴方向的分速度。速度沿三个坐标轴的分量 v_x, v_y, v_z 分别为

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.10)$$

这些分量都是代表数量,可正可负。

(1.9)式表明:质点的速度 \boldsymbol{v} 是各分速度的矢量和,这一关系是(1.4)式的直接结果,也是由空间的几何性质所决定的。这一关系叫速度的叠加(或合成)。(一般地讲,各分速度不一定相互垂直)。

由于(1.9)式中各分速度相互垂直,所以速率

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.11)$$

在国际单位制即 SI 制(参看 § 2.2)中速度的单位是米/秒(m/s)。表 1.1 给出了一些实际的平均速率的数值。

表 1.1 某些速率(m/s)

光在真空中	3.0×10^8
北京正负电子对撞机中的电子	99.999998% 光速
类星体的退行(最快的)	2.7×10^8
太阳在银河系中运动	3.0×10^6
地球公转	3.0×10^4
人造地球卫星	7.9×10^3
现代歼击机	$\sim 9 \times 10^3$
步枪子弹离开枪口时	$\sim 7 \times 10^3$
由于地球自转在赤道上一点的速率	4.6×10^3
空气分子热运动(大量分子平均)(0°C)	4.5×10^2
空气中声速(0°C)	3.3×10^2
机动赛车(最大)	1.0×10^2
猎豹(最快动物)	2.8×10
人跑步(最大)	1.1×10
大陆板块移动	$\sim 10^{-2}$

§ 1.3 加 速 度

当质点的运动速度随时间改变时,常常需要了解速度变化的情况。速度变化的情况用加速度表示。以 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t + \Delta t)$ 分别表示质点在时刻 t 和时刻 $t + \Delta t$ 的速度(图 1.3), 则在这段时间

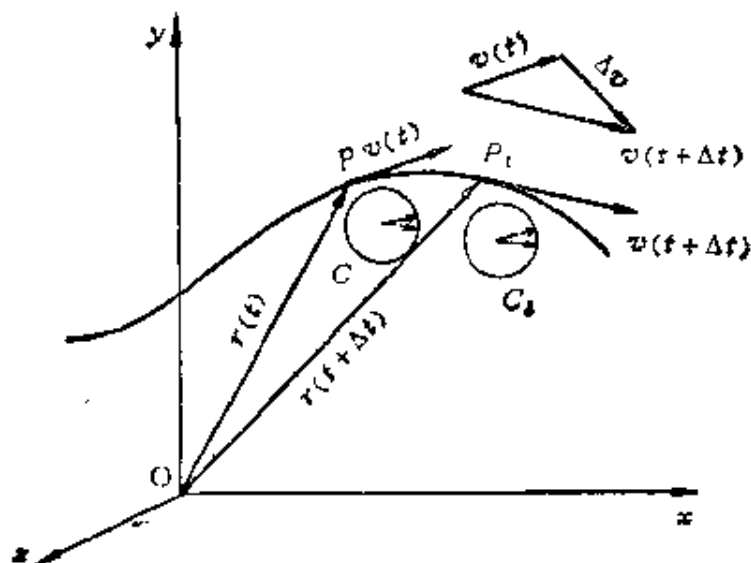


图 1.3 加速度矢量

内的平均加速度 \bar{a} 由下式定义:

$$\bar{a} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.12)$$

当 Δt 趋于零时, 此平均加速度的极限, 即速度对时间的变化率, 叫质点在时刻 t 的瞬时加速度, 简称加速度, 以 a 表示加速度, 就有

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.13)$$

应该明确的是, 加速度也是矢量。由于它是速度对时间的变化率, 所以不管是速度的大小发生变化, 还是速度的方向发生变化, 都有加速度。利用(1.6)式, 还可得

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (1.14)$$

将(1.9)式代入(1.13)式, 可得加速度的分量表示式如下:

$$a = \frac{dv_x}{dt} \hat{x} + \frac{dv_y}{dt} \hat{y} + \frac{dv_z}{dt} \hat{z} = a_x + a_y + a_z \quad (1.15)$$

加速度沿三个坐标轴的分量分别是

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

这些分量和加速度的大小的关系是

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.17)$$

加速度的 SI 单位是米/秒²(m/s²)。

表 1.2 给出了一些实际的加速度的数值。

表 1.2 某些加速度(m/s²)

超速离心机中粒子的加速度	3×10^5
步枪子弹在枪膛中的加速度	$\sim 5 \times 10^6$
使汽车撞坏的加速度(以27m/s车速撞到墙上)	1×10^4
使人发晕的加速度	7×10
地球表面的重力加速度	9.8
汽车制动的加速度	~ 8
月球表面的重力加速度	1.7
由于地球自转在赤道上一点的加速度	3.4×10^{-2}
地球公转的加速度	6×10^{-3}
太阳绕银河系中心转动的加速度	$\sim 3 \times 10^{-6}$

[例] 一质点在 xy 平面内运动, 其运动函数为 $x = R \cos \omega t$ 和 $y = R \sin \omega t$, 其中 R 和 ω 为正值常量。求质点的运动轨道以及任一时刻它的位矢, 速度和加速度

解: 对 x 、 y 两个函数分别取平方, 然后相加, 就可以消去 t 而得轨道方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

这是一个圆心在原点, 半径为 R 的圆的方程(图 1.4)。它表明质点沿此圆周运动。

质点在任一时刻的位矢可表示为

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = R \cos \omega t \hat{x} + R \sin \omega t \hat{y}$$

此位矢的大小为

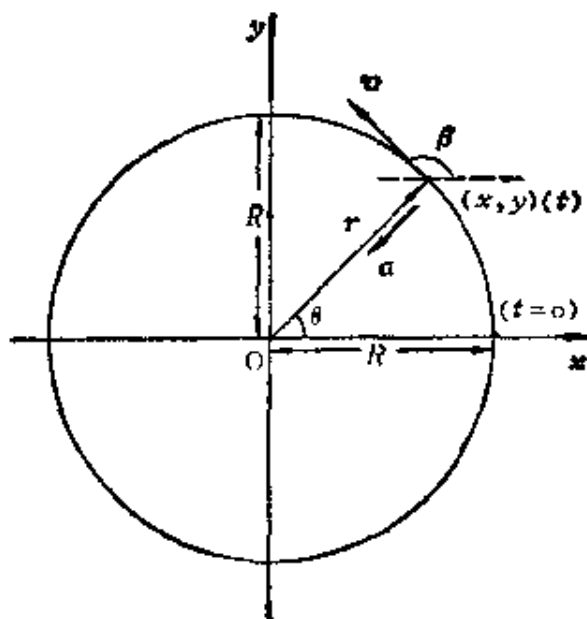


图 1.4

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

以 θ 表示此位矢和 x 轴的夹角, 则

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t$$

因而

$$\theta = \omega t$$

质点在任一时刻的速度可由位矢表示式求出为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -R\omega \sin \omega t \hat{x} + R\omega \cos \omega t \hat{y}$$

它沿两个坐标轴的分量分别为

$$v_x = -R\omega \sin \omega t, \quad v_y = R\omega \cos \omega t$$

速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

由于 v 是常量, 表明质点作匀速圆周运动。

以 β 表示速度方向与 x 轴之间的夹角, 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} = -\operatorname{ctg} \omega t$$

从而有

$$\beta = \omega t + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2}$$

这说明, 速度在任何时刻总与位矢垂直, 即沿着圆的切线方向。质点在任一

时刻的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R\omega^2 \cos\omega t \hat{\mathbf{x}} - R\omega^2 \sin\omega t \hat{\mathbf{y}}$$

而 $a_x = -R\omega^2 \cos\omega t, a_y = -R\omega^2 \sin\omega t$

此加速度的大小为 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$

又由上面的位矢表示式还可得

$$\mathbf{a} = -\omega^2 (R\cos\omega t \hat{\mathbf{x}} + R\sin\omega t \hat{\mathbf{y}}) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

这一负号就表示在任一时刻质点的加速度的方向总和位矢的方向相反,也就是匀速率圆周运动的加速度总是沿着半径指向圆心的。

也许大家还记得,本题给出的 x, y 两个函数式,实际上表示的是沿 x 和 y 两个方向的两个简谐振动。本题的分析结果指出,这两个振动的叠加是一个匀速圆周运动,它有一个向心加速度,其大小为 $\omega^2 R$ 。

从以上例题可以看出,如果知道了质点的运动函数,我们就可以根据速度和加速度的定义用求导数的方法求出质点在任何时刻(或经过任意位置)时的速度和加速度。然而,在许多实际问题中,往往可以先求质点的加速度,而且要求在此基础上求出质点在各时刻的速度和位置。求解这类问题需要用积分的方法。下面我们以匀加速运动为例来说明这种方法。

§ 1.4 匀加速运动

加速度的大小和方向都不随时间改变即加速度 \mathbf{a} 为常矢量的运动,叫做匀加速运动。由加速度的定义 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, 可得

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$$

对此式两边积分,即可得出速度随时间变化的关系。设已知某一时刻的速度,例如 $t=0$ 时,速度为 \mathbf{v}_0 , 则任意时刻 t 的速度 \mathbf{v} , 就可以由下式求出

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

利用 a 为常矢量的条件, 可得

$$v = v_0 + at \quad (1.18)$$

这就是匀加速运动的速度公式。

由于 $v = dr/dt$, 所以有 $dr = v dt$

将上式代入此式, 可得

$$dr = (v_0 + at) dt$$

设已知某一时刻的位矢, 例如 $t=0$ 时, 位矢为 r_0 , 则任意时刻 t 的位矢 r 可通过以 r_0 表示质点在时刻 t 的位矢。对上式两边进行积分求得, 即

$$\int_{r_0}^r dr = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

由此得

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1.19)$$

这就是匀加速运动的位矢公式。

在实际问题中, 常常利用(1.18)式和(1.19)式的分量式, 它们是

速度公式:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \\ v_z &= v_{0z} + a_z t \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

位置公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

这两组公式具体地说明了质点的匀加速运动沿三个坐标轴方

向的分运动,质点的实际运动就可由这三个分运动的叠加确定。

以上各公式中的加速度和速度沿坐标轴的分量均可正可负,这要由各分矢量相对于坐标轴的正方向而定:相同为正,相反为负。

质点在时刻 $t=0$ 时的位矢和速度 (r_0, v_0) 叫做运动的起始条件。由(1.18)式和(1.19)式可知,在已知加速度的情况下,给定了起始条件,就可以求出质点在任意时刻的位置和速度。这个结论在上面的匀加速运动的诸公式中看得最明显。实际上它对质点的任意运动都是成立的。

§ 1.5 匀加速直线运动

匀加速直线运动,即质点沿一条直线的匀加速运动是一维匀加速运动。如果将质点运动的轨道取做 x 轴(图 1.5),则质点的速度和位置随时间变化的关系就

可以分别用(1.20)式的第一式和(1.21)式的第一式表示。在明确是一维运动的情况下,可以去掉脚标写成

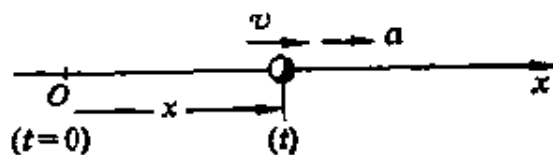


图 1.5 匀加速直线运动

$$v = v_0 + at \quad (1.22)$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1.23)$$

式中设 $x_0=0$ 。从这两式中消去 t ,可以得到速度随位置变化的关系

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad (1.24)$$

以上三个公式都是大家在中学课程中最常见的公式。

最常见的匀加速直线运动是自由落体运动。它是在空气阻力

可以忽略的条件下, 一个物体由于重力的作用从静止开始下落的运动。这一运动的轨道就是一条竖直线。如大家已经知道的, 在地球上同一地点, 所有物体, 不管它们的形状、大小和化学成份等等如何, 自由下落的加速度都一样*。这一加速度就叫自由落体加速度或重力加速度。在不同地点, 重力加速度略有不同。重力加速度通常用 g 表示。地面附近的重力加速度的值**大约是

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

对自由落体运动进行数量分析时, 通常取竖直向下的方向作为 y 轴的方向, 而以释放物体的地点做原点(图 1.6)。这样, 自由落体的速度和位置随时间变化的关系就可以分别用(1.20)式的第二式和(1.21)式的第二式表示, 其中 $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, $a_y = g$, 原式去掉脚标, 可得

$$v = gt \quad (1.25)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.26)$$

消去 t , 可得 $v^2 = 2gy \quad (1.27)$

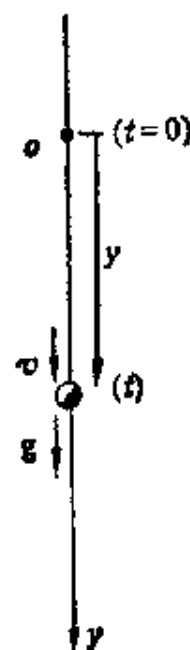


图 1.6 自由落体运动

• 所有物体的自由落体加速度都一样, 做为事实首先被伽里略在十七世纪初期肯定下来。它的重要意义被爱因斯坦注意到, 作为他在1915年提出的广义相对论的出发点。正是由于这个十分重要的意义, 所以有许多人多次做实验来验证这一点。牛顿所做的各种物体自由落体加速度都相等的实验曾精确到 10^3 分之一。近代, 这方面的实验精确到 10^{10} 分之一, 在某些特殊情况下甚至精确到 10^{12} 分之一。

* 测量地面上不同地点的 g 值通常是用单摆进行的。但近年来国际度量衡局采用了一种特别精确的方法。它是在一个真空容器中将一个特制的小物体向上抛出, 测量它上升一段给定的距离接着又回落到原处所经过的时间。由这距离和时间就可以算出 g 来。用光的干涉仪可以把测定距离的精度提高到 $\pm 10^{-9} \text{ m}$ 。这样测定的 g 的值就可以准确到 $\pm 3 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2$ 。用这样精确的方法测量的结果发现 g 值随时间有微小的浮动, 浮动值可以达到 $4 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ 。这一浮动的原因目前还不清楚, 大概和地球内部物质分布的改变有关。

这些公式都是大家熟知的。

应该指出，以上关于自由落体运动的公式只有在地面上不太高的范围内忽略空气的阻力时才是正确的。实际上，在空气中运动的物体都会受到空气阻力，而且这阻力随物体运动的速率增大而增大。在空气中下落的物体，随着它的速率的增大，所受阻力也要增大，速率增大到一定程度时，阻力将和物体所受的重力平衡。此后物体将做匀速运动。这匀速运动的速率叫做收尾速率。下落到地面附近的雨点就是以收尾速率运动的。收尾速率的值和物体的质量、大小和形状有关。雨点的收尾速率约为 10 m/s 。一个跳伞员张开伞下落时收尾速率约为 5 m/s 。如果他不打开伞，下落的收尾速率可达 50 m/s 。

关于匀加速直线运动和自由落体运动，大家在中学已做过很多练习题了。本章习题中再列几个题供大家复习巩固用。下面举一个例题：

[例] 有若干个光滑斜面 A_1, A_2, A_3, \dots 。它们有共同的底端 B 和底边 b ，其顶端都在同一竖直线上。它们的倾角分别为 $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots$ (图 1.7)。当从各斜面顶端同时释放物体时，试问沿哪个斜面下滑的物体最先到达底端？

解：选沿倾角为 θ 的斜面下滑的物体来研究。它的运动是匀加速直线运动。取此斜面顶端为坐标原点，而 x 轴沿斜面向下。沿 x 方向物体下滑的加速度 a 应是重力加速度沿 x 方向的分量，即

$$a = g \sin \theta$$

利用初始条件： $t=0$ 时， $x_0=0, v_0=0$ ，则(1.23)式给出

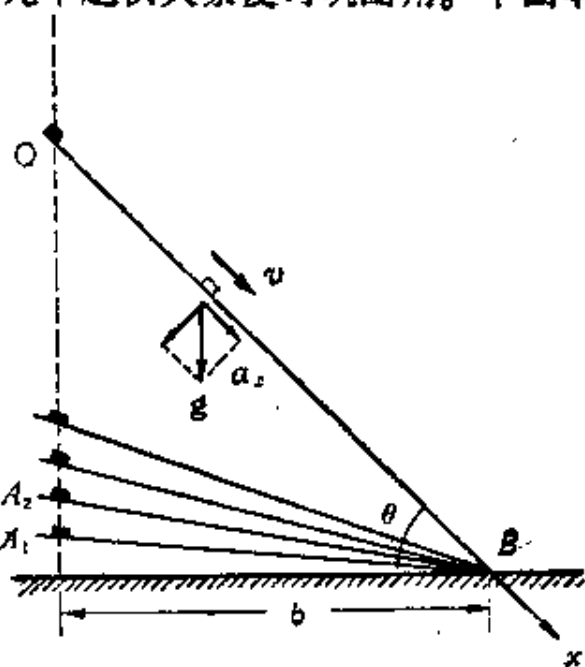


图 1.7

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(g \sin \theta)t^2$$

物体从顶端下滑到底端经过的距离是

$$x = b / \cos \theta$$

将此 x 值代入上式, 可得物体下滑所用的时间为

$$t = \left[\frac{2b}{g \sin \theta \cos \theta} \right]^{1/2} = \left[\frac{4b}{g \sin 2\theta} \right]^{1/2}$$

很明显, 当 $2\theta = \pi/2$, 也就是 $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ 时, t 有最小值。这就是说, 沿倾角为 45° 的斜面下滑的物体最先到达底端。

这里还可以指出的是, 在说明本例中物体的运动以及上面关于自由落体的运动时, 不言自明地都是相对于地面参照系来说的。但是原点的位置和坐标轴的方向不同。一般地说, 对于每个实际问题, 在明确参照系后, 坐标系的原点和坐标轴的方向是可以按问题的方便而任意选择的。

§ 1.6 抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体, 它在空中的运动就叫**抛体运动**。物体被抛出后, 忽略风的作用, 它的运动轨道总是被限制在通过抛射点的由抛出速度方向和竖直方向所确定的平面内, 因而, 抛体运动一般是二维运动。一个物体在空中运动时, 在空气阻力可以忽略的情况下, 它在各时刻的加速度都是重力加速度 g 。一般视 g 为常矢量, 所以这种运动又是二维匀加速运动。因此这种运动的速度和位置随时间的变化就可以分别用(1.20)式的前二式和(1.21)式的前二式表示。描述这种运动时, 可以选抛出点为坐标原点, 而沿水平方向和竖直向上的方向分别引 x 轴和 y 轴 (图 1.8)。从抛出时刻开始计时, 则 $t=0$ 时, 物体的初始位置在原点, 即 $r_0=0$, 以 v_0 表示物体的初速度, 以 θ 表示抛射角, 即初速度与

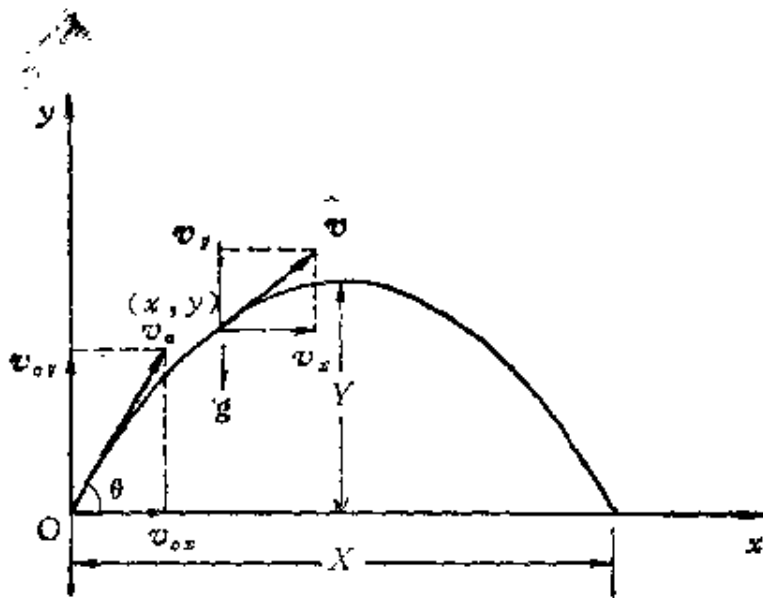


图 1.8 抛体运动

x 轴的夹角, 则 v_0 沿 x 轴和 y 轴上的分量分别是

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

物体在空中的加速度为

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

其中负号表示加速度的方向与 y 轴的方向相反。利用这些条件, 由 (1.20) 式可以得出物体在空中任意时刻的速度为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \theta \\ v_y &= v_0 \sin \theta - gt \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

由 (1.21) 式可以得出物体在空中任意时刻的位置为

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos \theta \cdot t \\ y &= v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

(1.28) 式和 (1.29) 式也是大家在中学都已熟悉的公式。由它们就可以求出 (请读者复习自证) 物体在空中的飞行回落到抛出点高度所用的时间 T 为

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

飞行中的最大高度(即高出抛出点的距离) Y 为

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

飞行的射程(即回落到与抛出点的高度相同时所经过的水平距离) X 为

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

由这一表示式还可以证明:当初速度大小相同时,在抛射角 θ 等于 45° 的情况下射程最大。

在(1.29)式的两式中消去 t ,可得抛体的轨道函数为

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

对于一定的 v_0 和 θ ,这一函数表示一条通过原点的二次曲线。这曲线在数学上叫“抛物线”。这个名字就是由这里来的。

应该指出,以上关于抛体运动的公式,都是在忽略空气阻力的情况下得出的。只有在初速比较小的情况下,它们才比较符合实际。实际上子弹或炮弹在空中飞行的规律和上述公式是有很大差别的。例如,以550米/秒的初速沿 45° 抛射角射出的子弹,按上列公式计算的射程在30000米以上。实际上,由于空气阻力,射程不过8500米,不到前者的三分之一。子弹或炮弹飞行的规律,在军事技术中由专门的《弹道学》进行研究。再者对于射高与射程都很大的抛体,例如现在的洲际弹道导弹,弹头在大部分时间内都在大气层以外飞行,所受空气阻力是很小的。但是由于在这样大的范围内,重力加速度的大小和方向都有明显的变化,因而以上公式也都不能应用。

[例] 有一学生在体育馆阳台上以投射角 $\theta=30^\circ$ 和速率 $v_0=20$ m/s向台前操场投出一垒球。球离开手时距离操场水平面的高度为 $h=10$ m。试问球投出后何时着地?在何处着地?着地时速度的大小和方向各如何?

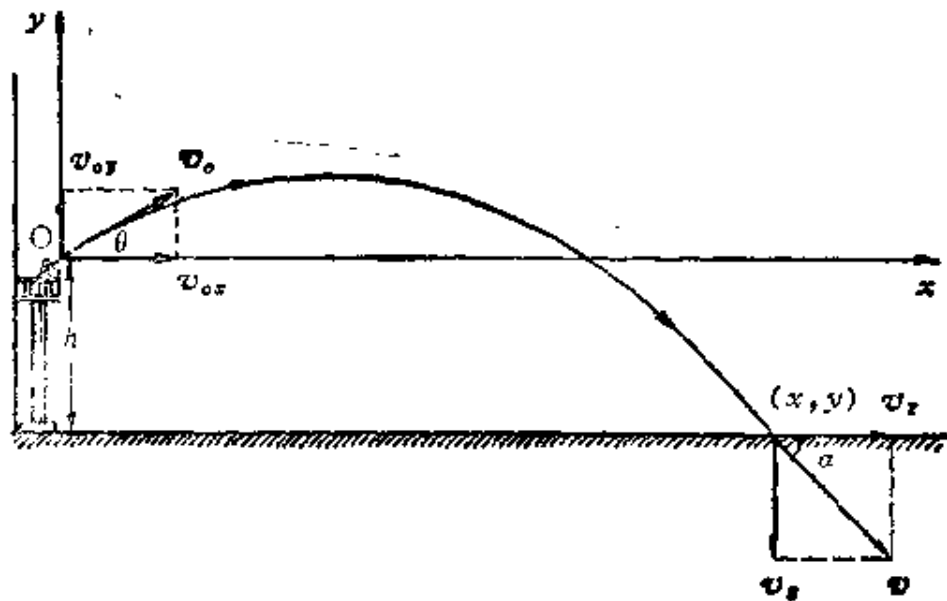


图 1.9

解：以投出点为原点，建 x, y 坐标轴如图 1.9。引用(1.29)式

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

以 (x, y) 表示着地点坐标，则 $y = -h = -10\text{m}$ 。将此值和 v_0, θ 值一并代入第二式得

$$-10 = 20 \times \frac{1}{2} \times t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

解此方程，可得 $t = 2.78\text{s}$ 和 -0.74s 。取正数解，即得球在出手后 2.78 秒着地。

着地点离投射点的水平距离为

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t = 20 \times \cos 30^\circ \times 2.78 = 48.1 \text{ m}$$

引用(1.28)式得

$$v_x = v_0 \cos \theta = 20 \times \cos 30^\circ = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - g t = 20 \sin 30^\circ - 9.8 \times 2.78 = -17.2 \text{ m/s}$$

着地时速度的大小为 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17.3^2 + 17.2^2} = 24.4 \text{ m/s}$ ，此速度和水平面的夹角 $\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \text{tg}^{-1} \frac{-17.2}{17.3} = -44.8^\circ$ 如图 1.9 所示。

作为抛体运动的一个特例，令抛射角 $\theta = 90^\circ$ ，我们就得到上

抛运动。这是一个匀加速直线运动。它在任意时刻的速度和位置可以分别用(1.28)式第二式和(1.29)式第二式求得,只是将式中 θ 用 90° 代入。它们是

$$v_y = v_0 - gt \quad (1.30)$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.31)$$

这也是大家所熟悉的公式。应该再次明确指出的是, v_y 和 y 的值都是代数值, 可正可负。 $v_y > 0$ 表示该时刻物体正向上运动; $v_y < 0$ 表示该时刻物体已回落并正向下运动。 $y > 0$ 表示该时刻物体的位置在抛出点之上, $y < 0$ 表示物体的位置已回落到抛出点以下。

§ 1.7 圆周运动

质点沿圆周运动时, 它的速率通常叫线速度。如以 s 表示从圆周上某点 A 量起的弧长(图 1.10), 则线速度 v 就可用(1.8)式表示为

$$v = \frac{ds}{dt}$$

以 θ 表示半径 R 从 OA 位置开始转过的角度, 则 $s = R\theta$ 。将此关系代入上式, 由于 R 是常数, 可得

$$v = R \frac{d\theta}{dt}$$

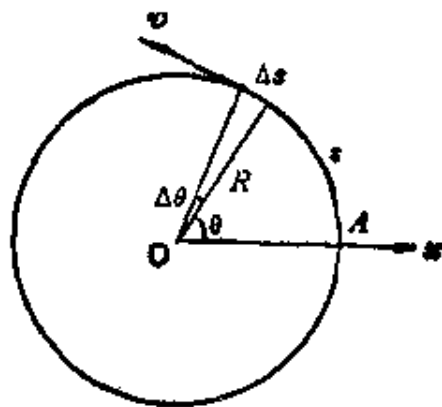


图 1.10 线速度与角速度

式中 $\frac{d\theta}{dt}$ 叫做质点运动的角速度, 它的 SI 单位是弧度/秒或 1/秒 (1/s)。常以 ω 表示角速度, 即

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.32)$$

这样就有

$$v = R\omega \quad (1.33)$$

质点做圆周运动时, 它的线速度可以随时间改变或不改变。但是由于其速度矢量的方向总是在改变着, 所以总是有加速度。下面我们来求变速圆周运动的加速度。

如图 1.11(a) 所示, 分别以 $v(t)$ 和 $v(t+\Delta t)$ 表示质点沿圆周运动经过 B 点和 C 点时的速度矢量。由加速度的定义 (1.13) 式可得

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

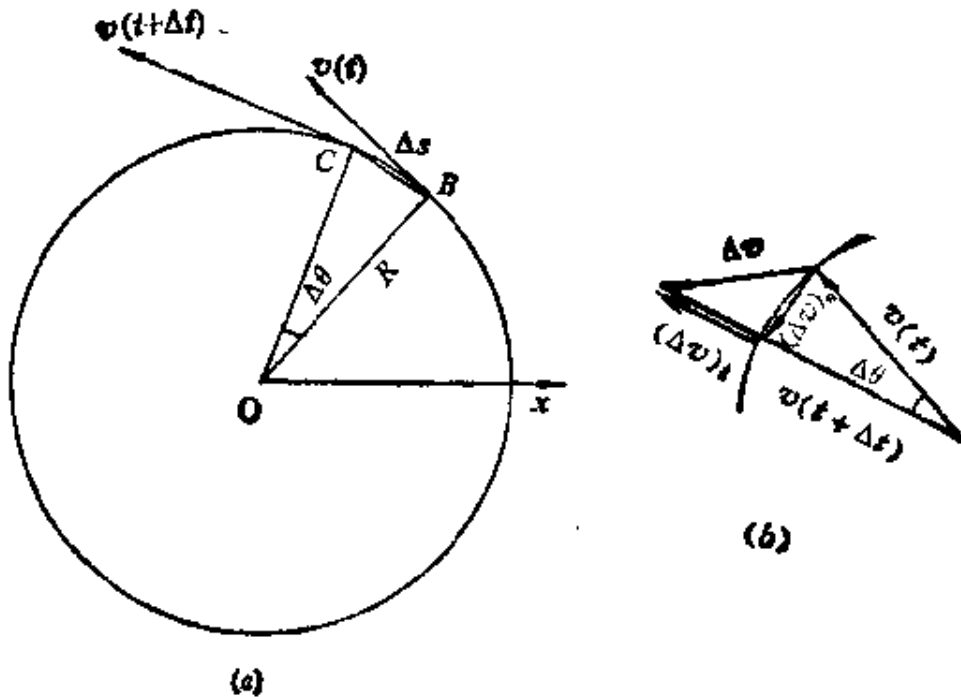


图 1.11 变速圆周运动的加速度

在矢量 $v(t+\Delta t)$ 上截取一段, 使其长度等于 $v(t)$ 。作矢量 $(\Delta v)_n$ 和 $(\Delta v)_t$, 如图 1.11(b) 所示, 就有

$$\Delta v = (\Delta v)_n + (\Delta v)_t$$

因而上式可写成

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{v})_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{v})_t}{\Delta t} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t \quad (1.34)$$

其中
$$\mathbf{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{v})_n}{\Delta t}, \quad \mathbf{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{v})_t}{\Delta t}$$

这就是说, 加速度 \mathbf{a} 可以看成是两个分加速度的合成。

先求分加速度 \mathbf{a}_t 。由图 1.11(b) 可知, $(\Delta \mathbf{v})_t$ 的数值为

$$v(t + \Delta t) - v(t) = \Delta v$$

即等于速率的变化。于是 \mathbf{a}_t 的数值为

$$\mathbf{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.35)$$

即等于速率的变化率。由于 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $(\Delta \mathbf{v})_t$ 的方向趋于和 \mathbf{v} 在同一直线上, 因此 \mathbf{a}_t 的方向也沿着轨道的切线方向。这一分加速度就叫切向加速度。切向加速度表示质点速率变化的快慢。 \mathbf{a}_t 为一代数量, 可正可负。 $\mathbf{a}_t > 0$ 表示速率随时间增大, 这时 \mathbf{a}_t 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向相同; $\mathbf{a}_t < 0$ 表示速率随时间减小, 这时 \mathbf{a}_t 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向相反。

利用(1.33)式还可以得到

$$\mathbf{a}_t = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

$\frac{d\omega}{dt}$ 表示质点运动角速度对时间的变化率, 叫做角加速度。它的SI单位是 $1/\text{秒}^2 (1/\text{s}^2)$ 。以 α 表示角加速度, 则有

$$\mathbf{a}_t = R\alpha \quad (1.36)$$

即切向加速度等于半径与角加速度的乘积。

下面再来求分加速度 \mathbf{a}_n 。比较图 1.11(a) 和(b) 中的两个相似的三角形可知

$$\frac{|(\Delta \mathbf{v})_n|}{v} = \frac{BC}{R}$$

或
$$|(\Delta \boldsymbol{v})_n| = \frac{v \overline{BC}}{R}$$

式中 \overline{BC} 为弦的长度。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，这一弦长趋近于和对应的弧长 Δs 相等。因此， a_n 的大小为

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|(\Delta \boldsymbol{v})_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta s}{R \Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

由于
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

可得
$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.37)$$

利用(1.33)式，还可得

$$a_n = \omega^2 R \quad (1.38)$$

至于 a_n 的方向，从图 1.11 中可以看到，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $\Delta \theta \rightarrow 0$ 而 $(\Delta \boldsymbol{v})_n$ 的方向趋向于垂直于速度 \boldsymbol{v} 的方向而指向圆心。因此， a_n 的方向在任何时刻都垂直于圆的切线方向而沿着半径指向圆心。这个分加速度就叫**向心加速度**或**法向加速度**。法向加速度表示由于速度方向的改变而引起的速度的变化率。在圆周运动中，总有法向加速度。在直线运动中，由于速度方向不改变，所以 $a_n = 0$ 。在这种情况下，也可以认为 $R \rightarrow \infty$ ，而(1.37)式也给出 $a_n = 0$ 。

由于 a_n 总是与 a_t 垂直，所以圆周运动的总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \quad (1.39)$$

以 β 表示加速度 \boldsymbol{a} 与速度方向之间的夹角(图 1.12)，则

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_n}{a_t} \quad (1.40)$$

应该指出，以上关于加速度的讨论及结果，也适用于任何二维的(即平面上的)曲线运动。这时有关公式中的半径应是曲线上所涉及点处的曲率半径(即该点曲线的密接圆或曲率圆的半径)。还

应该指出的是, 曲线运动中加速度的大小

$$a = |\mathbf{a}| = \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| \neq \frac{dv}{dt} = a_t$$

也就是说, 曲线运动中加速度的大小并不等于速率对时间的变化率, 这后一变化率只是加速度的一个分量, 即切向加速度。

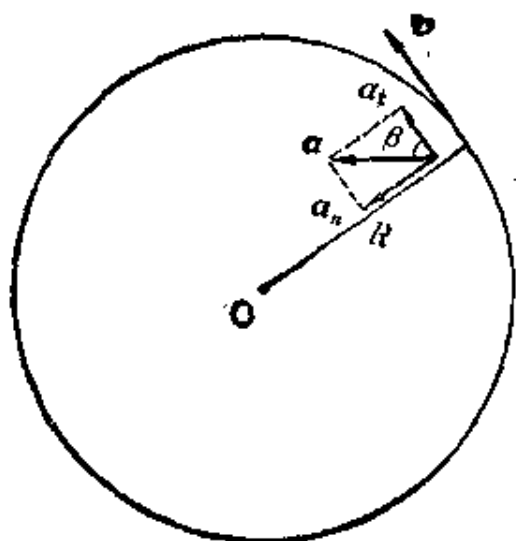


图 1.12 加速度的方向

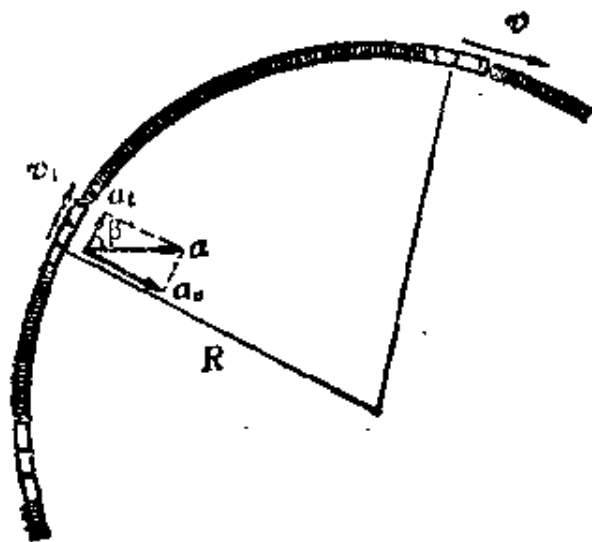


图 1.13

[例] 列车出站时, 由静止开始速率均匀增大。其轨道为半径 $R=800\text{ m}$ 的圆弧 (图 1.13)。已知离开车站后 $t=3\text{ min}$ 时列车的速率为 $v=20\text{ m/s}$ 求离开车站后 $t_1=2\text{ min}$ 时, 列车的切向加速度、法向加速度和总加速度。

解: 在这个问题中, 列车不能看成质点, 但可以用车厢上任一点的运动表示列车的运动而应用前面的公式。因为速率均匀增大, 所以任何时刻的切向加速度的大小都相等。由 (1.35) 式,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{v}{t} = \frac{20}{3 \times 60} = 0.111\text{ m/s}^2$$

欲求 t_1 时刻的法向加速度, 需要先求出这一时刻的速率 v_1 。因为初速为 0, 所以 $v_1 = a_t t_1$, 法向加速度为

$$a_n = \frac{v_1^2}{R} = \frac{(a_t t_1)^2}{R} = \frac{(0.111 \times 120)^2}{800} = 0.222\text{ m/s}^2$$

t_1 时刻的总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0.222^2 + 0.111^2} = 0.248\text{ m/s}^2$$

α 和 v_1 的夹角为

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_n}{a_t} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{0.222}{0.111} = 63.4^\circ$$

§ 1.8 相对运动

研究力学问题时常常需要从不同的参照系来描述同一物体的运动。对于不同的参照系,同一质点的位移、速度和加速度都可能不同。如图 1.14 所示,以 xOy 表示固定在水平地面上的坐标系,其 x 轴与一条平直马路平行。以 E 代表此坐标系。设有一辆平板车 V 沿马路开行。 $x'O'y'$ 表示固定在这个行进的平板车上的坐标系。在 Δt 时间内,车在地面上由 V_1 移到 V_2 位置,其位移为 Δr_{VE} 。设在同一 Δt 时间内,一个小球 S 在车内由 A 点移到 B 点,其位移为 Δr_{SE} 。在这同一时间内,在地面上观测,小球是从 A_0 点移到 B 点的。相应的位移是 Δr_{SE} 。(在这三个位移符号的脚标中,前一字母表示运动的物体,后一字母表示参照系)。很明显,同一小球在同一时间内的位移,相对于地面和车这两个参照系来说,是不相同的。这两个位移和车厢对于地面的位移有下述关系

$$\Delta r_{SE} = \Delta r_{SE} + \Delta r_{VE} \quad (1.41)$$

以 Δt 除此式,并令 $\Delta t \rightarrow 0$,可以得到相应的速度之间的关系,即

$$\boldsymbol{v}_{SE} = \boldsymbol{v}_{SE} + \boldsymbol{v}_{VE} \quad (1.42)$$

以 \boldsymbol{v} 表示质点相对于参照系 xOy 的速度,以 \boldsymbol{v}' 表示同一质点相对于参照系 $x'O'y'$ 的速度,以 \boldsymbol{u} 表示参照系 $x'O'y'$ 相对于参照系 xOy 平动的速度,则上式可以一般地表示为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \quad (1.43)$$

同一质点相对于两个相对作平动的参照系的速度之间的这一关系

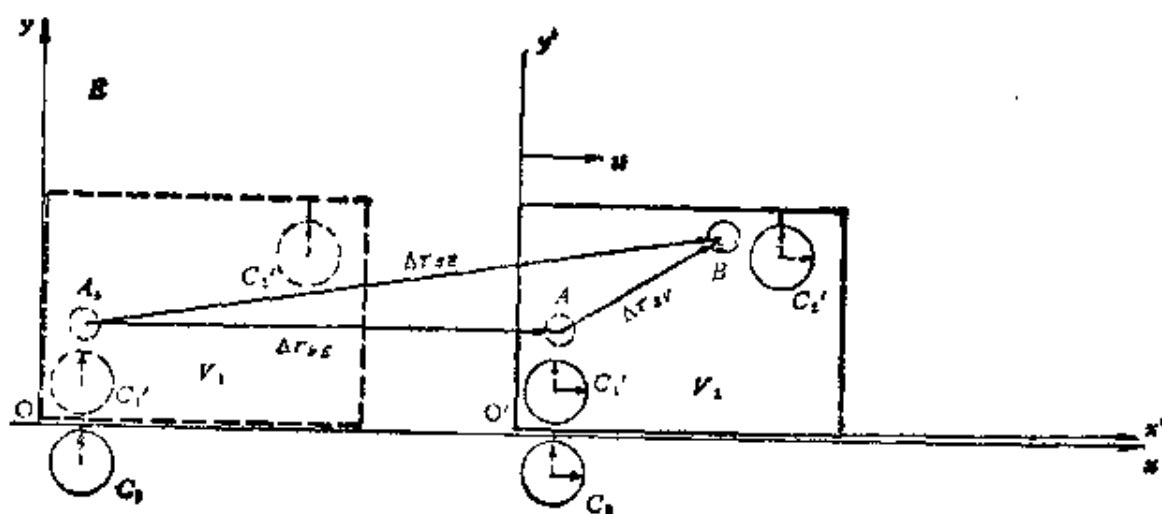


图 1.14 相对运动

叫做伽里略速度变换。

如果质点运动速度是随时间变化的,则求上式对 t 的导数,就可得到相应的加速度之间的关系。以 a 表示质点相对于参照系 xOy 的加速度,以 a' 表示它相对于参照系 $x'O'y'$ 的加速度,以 a_0 表示参照系 $x'O'y'$ 相对于参照系 xOy 平动的加速度,则由(1.43)式可得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{du}{dt}$$

$$\text{即} \quad a = a' + a_0 \quad (1.44)$$

如果两个参照系相对作匀速直线运动,即 u 为常量则

$$a_0 = \frac{du}{dt} = 0$$

于是有 $a = a'$

这就是说,在相对作匀速直线运动的参照系中观察同一质点的运动时,所测得的加速度是相同的。

这里,可以指出的是,你可能已认为(1.41)式表示了位移的叠加关系,它和伽里略速度变换都是“显然正确”的。但仔细追究起

来,并非如此。这是因为,首先, Δr_{SE} 和 Δr_{VE} 是地面上的观察者测量的,而 Δr_{SV} 是车上的观察者测量的,它们是相对于不同的参照系测得的距离。位移的矢量叠加是相对于同一参照系的位移来说的。因此(1.41)式要成立,就要求 Δr_{SV} 这段位移无论是由地面上的观察者测量,还是由车上的观察者测量,其结果都是一样的。同一段长度的测量结果与参照系的相对运动无关这一事实叫做**长度测量的绝对性**。因此,(1.41)的成立是基于长度测量的绝对性。再者,从(1.41)式得出(1.42)式,要涉及时间的测量。 v_{SE} 和 v_{VE} 是地面上的观察者根据用它们的钟(如 C_1, C_2)所测出的时间计算出来的,而 v_{SV} 是车上的观察者根据由他们自己的钟(如 C'_1, C'_2)测出的时间计算出来的。要(1.42)式成立,还要求这两套钟对同一段时间(此处是小球从 A_0 或 A 运动到 B 所经过的时间)测出的结果是相同的。同一段时间的测量结果与参照系的相对运动无关这一事实叫做**时间测量的绝对性**。因此伽里略速度变换的成立也还要基于时间测量的绝对性。

长度测量和时间测量的绝对性,它使人们形成绝对空间和绝对时间的概念,长期被认为是普遍正确的客观真理,因为人们在实验和技术中未曾观察到与它们不相符的现象。但是,随着人们的实践范围的不断扩大和深入,当所涉及的速度非常大,大得和光在真空中的速度相近时,发现了长度和时间的测量并不是绝对的而是相对的。这就是说,同一段长度或同一段时间的测量结果有赖于参照系,它们在相对作高速运动的不同参照系中测量的结果是不同的。只是在相对速度比较小的参照系中测量,才近似地或十分近似地相等。因而伽里略速度变换也只有对相对速度远小于光速的参照系才成立。关于时间和长度的概念以及更为普遍的变换关系式将在后面第六章《狭义相对论基础》中详细讲述。在下面四章的讨论中,我们将都假定长度和时间测量的绝对性,也就是

说,只讨论相对于光速来说是低速的运动。

要注意,速度的叠加和速度的变换是两个不同的概念。速度的叠加是指在同一参照系中一个质点的速度和它的各分速度的关系。相对于任何参照系,它都可以表示为矢量合成的形式,如(1.9)式。速度的变换涉及有相对运动的两个参照系,其公式的形式和相对速度的大小有关,而伽里略速度变换只适用于速度较小的情形。

〔例〕雨天一辆客车 V 在水平马路上以 20 m/s 的速度向东开行,雨滴 R 在空中以 10 m/s 的速度竖直下落。求雨滴相对于车厢的速度的大小与方向。

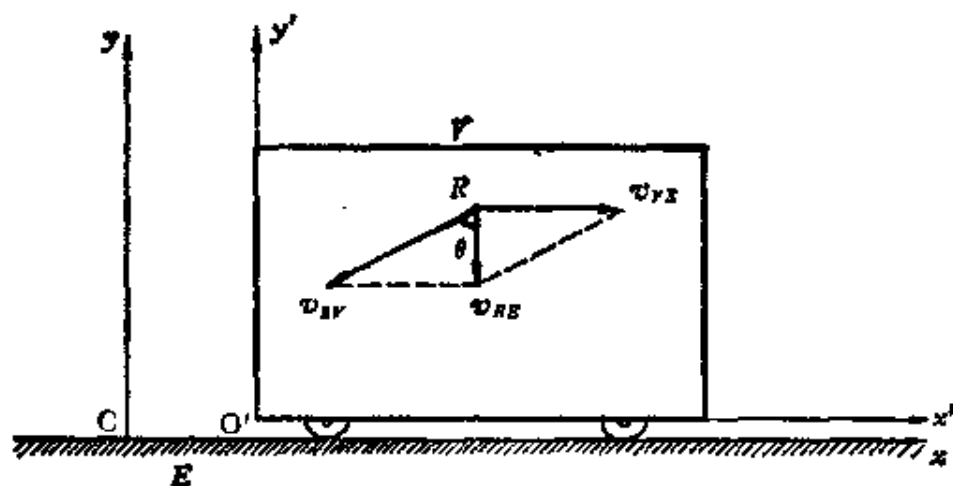


图 1.15

解:以 xoy 表示地面(E)参照系,以 $x'o'y'$ 表示车厢参照系(图1.15),则 $v_{VE}=20\text{ m/s}$, $v_{RE}=10\text{ m/s}$ 。以 v_{RV} 表示雨滴对车厢的速度,则根据伽里略速度变换 $v_{RE}=v_{RV}+v_{VE}$,这三个速度的矢量关系如图1.15所示。由图形的几何关系可得雨滴对车厢的速度的大小为

$$v_{RV}=\sqrt{v_{RE}^2-v_{VE}^2}=\sqrt{10^2+20^2}=22.4\text{ m/s}$$

这一速度的方向用它与竖直方向的夹角 θ 表示,则

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v_{VE}}{v_{RE}}=\frac{20}{10}=2$$

得

$$\theta=63.4^\circ$$

即向下偏西 63.4°

本章提要

1. 参照系: 描述物体运动时用作参考的其他物体和一套同步的钟。

2. 运动函数: 表示质点位置随时间变化的函数。

位置矢量和运动叠加: $\mathbf{r} = r(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$

位移矢量: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

一般地 $|\Delta\mathbf{r}| \approx \Delta r$

3. 速度和加速度:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

速度叠加: $\mathbf{v} = v_x + v_y + v_z$

4. 匀加速运动: $\mathbf{a} = \text{常矢量}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

初始条件: $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$

5. 匀加速直线运动: $v = v_0 + at$, $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$,

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

6. 抛体运动: $a_x = 0$, $a_y = -g$

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

7. 圆周运动: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$

法向加速度: $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$

切向加速度: $a_t = \frac{dv}{dt}$

8. 伽里略速度变换: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$

思 考 题

1.1 回答下列问题:

- (1) 位移和路程有何区别?
- (2) 速度和速率有何区别?
- (3) 瞬时速度和平均速度的区别和联系是什么?

1.2 回答下列问题并举出符合你的答案的实例:

- (1) 物体能否有一不变的速率而仍有一变化的速度?
- (2) 速度为零的时刻, 加速度是否一定是零? 加速度为零的时刻, 速度是否一定是零?
- (3) 物体的加速度不断减小, 而速度却不断增大, 可能吗?
- (4) 当物体具有大小、方向不变的加速度时, 物体的速度方向能否有改变?

1.3 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度的方向垂直? 任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直?

1.4 质点沿圆周运动, 且速率随时间均匀增大, 问 a_n 、 a_t 、 a 三者的大小是否随时间改变? 总加速度 a 与速度 v 之间的夹角如何随时间改变?

1.5 设质点的运动函数为 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 。在计算质点的速度和加速度时, 有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 然后根据:

$$v = \frac{dr}{dt} \quad \text{及} \quad a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

而求出结果; 又有人先计算出速度和加速度的分量, 再合成求得结果, 即

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{及} \quad a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

你认为两种方法哪一种正确? 两者差别何在?

1.6 行星轨道为椭圆, 已知任一时刻行星的加速度方向都指向椭圆的一个焦点 (太阳所在处)。分析行星在通过图中 M 、 N 两位置时, 它的速率分别应正在增大还是正在减小 (图 1.16)?

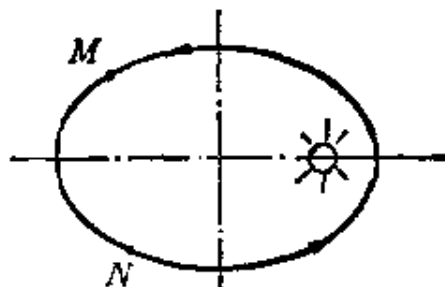


图 1.16

1.7 一斜抛物体的水平初速度是 v_{0x} , 它的轨道的最高点处的曲率圆的

半径是多大?

1.8 速度的叠加和速度的变换有何区别?

1.9 自由落体从 $t=0$ 时刻开始下落。用公式 $h=gt^2/2$ 计算, 它下落的距离达到 19.6 m 的时刻为 +2s 和 -2s。这 -2 秒有什么物理意义? 该时刻物体的位置和速度各如何?

*1.10 如果使时间反演, 即把时刻 t 用 $t'=-t$ 取代, 质点的速度、加速度、运动学公式(以(1.22)式和(1.23)式为例)等将会有何变化?

习 题

1.1 在木星的卫星之一, 爱奥上面的珞玑火山喷发出的岩块上升高度可达 $h=200$ km。这些石块的喷出速度是多大? 已知爱奥上的重力加速度 $g=1.80\text{m/s}^2$, 而且在爱奥上没有空气。

1.2 大马哈鱼总是要逆流而上游到乌苏里江上游产卵, 游程中有时还要跃上瀑布。这种鱼跃出水面的速度可达 32 km/h。它最高可以跃上多高的瀑布? 和人的跳高记录相比如何?

1.3 由消防水龙带的喷嘴喷出的水的流量是 $q=280$ l/min。水的流速 $v=26$ m/s。若这喷嘴竖直向上喷射, 水流上升的高度是多少? 在任一瞬间空中有多少升水?

1.4 在以初速率 $v=15.0$ m/s 竖直向上扔一块石头后,

(1) 在 1.0 秒末又竖直向上扔出第二块石头。后者在 $h=11.0$ m 高度处击中前者。求第二块石头扔出时的速率。

(2) 若在 1.30 秒末竖直向上扔出第二块石头, 它仍在 $h=11.0\text{m}$ 高度处击中前者。求这一次第二块石头扔出时的速率。

1.5 一只在星际空间飞行的火箭, 当它以恒定速率燃烧它的燃料时, 其运动可以用下述函数表示 $x=ut+u\left(\frac{1}{b}-t\right)\ln(1-bt)$ 其中 u 是喷出气流相对于火箭体的喷射速度, 是一个常量; b 是与燃烧速率成正比的一个常量。

(1) 求此火箭的速度表示式。

(2) 求此火箭的加速度表示式,

(3) 设 $u=3.0\times 10^3$ m/s, $b=7.5\times 10^{-3}$ /s, 并设燃料在 120 s 内燃烧完, 求 $t=0\text{s}$ 和 $t=120$ s 时的速度。

(4) 求在 $t=0\text{s}$ 和 $t=120$ s 的加速度。

1.6 一质点在 xy 平面上运动, 运动函数为 $x=2t, y=19-2t^2$, (SI)。

(1) 求质点运动的轨道方程并画出轨道曲线。

(2) 求 $t_1=1\text{ s}$ 和 $t_2=2\text{ s}$ 时, 质点的位置、速度和加速度。

1.7 在离水面高度为 h 的岸边上, 有人用绳子拉船靠岸, 收绳的速率恒定, 为 v_0 (图 1.17)。求船在离岸边的距离为 s 时的速度和加速度。

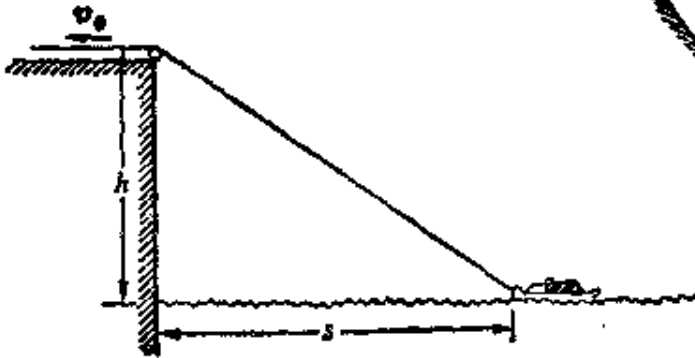


图 1.17

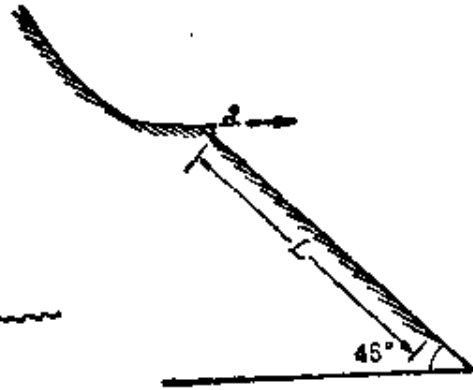


图 1.18

1.8 滑雪运动员离开水平滑雪道飞入空中时的速率 $v=110\text{ km/h}$, 着陆的斜坡与水平面成 $\theta=45^\circ$ 角 (图 1.18)。

(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移 L 是多大? (忽略起飞点到斜面的距离)。

(2) 在实际的跳跃中, 滑雪运动员所达到的距离 $L=165\text{ m}$, 这个结果为什么与计算结果不符?

1.9 一个人扔石头的最大出手速率为 $v=25\text{ m/s}$, 他能击中一个与他的手水平距离为 $L=50\text{ m}$, 高 $h=13\text{ m}$ 处的一个目标吗? 在这个距离上他能击中的目标的最高高度是多少?

1.10 在生物物理实验中用来分离不同类型的分子的超级离心机的转速是 $6 \times 10^4\text{ rev/min}$ 。在这种离心机的转子内, 离轴 10 cm 远的一个大分子的向心加速度是重力加速度的几倍?

1.11 北京正负电子对撞机的储存环的周长为 240 m , 电子要沿环以非常接近光速的速率运行。这些电子运动的向心加速度是重力加速度的几倍?

1.12 汽车在半径 $R=400\text{ m}$ 的圆弧弯道上减速行驶。设在某一时刻, 汽车的速率为 $v=10\text{ m/s}$, 切向加速度的大小为 $a_t=0.2\text{ m/s}^2$ 。求汽车的法

向加速度和总加速度的大小和方向?

1.13 一个半径为 $R=1.0\text{m}$ 的圆盘, 可以绕一水平轴自由转动。一根轻绳绕在盘子的边缘, 其自由端拴一物体 A (图 1.19)。在重力作用下, 物体 A 从静止开始匀加速地下降, 在 $\Delta t=2.0\text{s}$ 内下降的距离 $h=0.4\text{m}$ 。求物体开始下降后 3 秒末, 边缘上任一点的切向加速度与法向加速度。

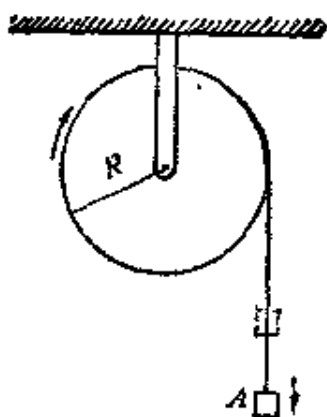


图 1.19

1.14 一升降机以加速度 $a=1.22\text{ m/s}^2$ 上升, 当上升速度为 $v=2.44\text{ m/s}$ 时, 有一螺帽自升降机的天花板上松落, 天花板与升降机的底面相距 $d=2.71\text{ m}$, 计算:

- (1) 螺帽从天花板落到底面所需的时间 t 。
- (2) 螺帽相对于地面下降的距离 h 。

1.15 一个人以 2.0 km/h 的速率自东向西行时, 看见雨点垂直下落, 当他的速率增加至 4.0 km/h 时看见雨点与人前进的方向成 $\alpha=45^\circ$ 角下落, 求雨点对地的速度。

1.16 飞机 A 以 $v_A=1000\text{ km/h}$ 的速率(相对地面)向南飞行。同时另一架飞机 B 以 $v_B=800\text{ km/h}$ 的速率(相对地面)向东偏南 30° 角方向飞行。求 A 机相对于 B 机的速度与 B 机相对于 A 机的速度。

1.17 一架飞机从 A 处向北飞到 B 处, 然后又向南飞回到 A 处。飞机相对于空气的速度为 v , 而空气相对于地面的速度为 u , A, B 之间的距离为 L , 飞机相对于空气的速率 v 保持不变。

(1) 如果空气是静止的(即 $u=0$), 试证明来回的飞行时间为 $t_0=\frac{2L}{v}$

(2) 如果空气的速度由南向北, 试证明来回飞行时间为

$$t_1 = t_0 / \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)$$

(3) 如果空气的速度由东向西, 试证明来回飞行时间为

$$t_2 = t_0 / \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}$$

伽里略 (Galileo Galilei, 1564—1642)

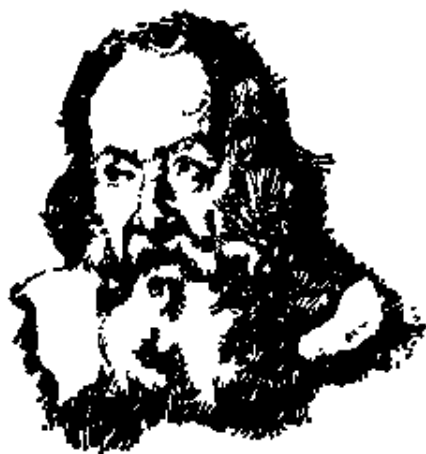
DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze

Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana

Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.



伽里略



IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

〈两种新科学〉一书的扉页

伽里略 1564 年出生于意大利比萨城的一个没落贵族家庭。他从小表现聪颖, 17 岁(1581)时被父亲送入比萨大学学医, 但他对

医学不感兴趣。由于受到一次数学演讲的启发，开始热衷于数学和物理学的研究。1585年辍学回家。此后曾在比萨大学和帕多瓦大学任教，在此期间他在科学研究上取得了不少成绩。由于他反对当时统治知识界的亚里士多德世界观和物理学，同时又由于他积极宣扬违背天主教教义的哥白尼太阳中心说，所以不断受到教授们的排挤以及教士们和罗马教皇的激烈反对。最后终于在1633年被罗马宗教裁判所强迫在写有“我悔恨我的过失，宣传地球运动的邪说”的“悔罪书”上签字，并被判刑入狱（后不久改为在家监禁）。这使他的身体和精神都受到很大的摧残。但他仍致力于力学的研究工作。1637年双目失明。1642年他由于寒热病在孤寂中离开了人世，时年78岁。（间隔347年，罗马教皇多明尼于1980年宣布承认对伽里略的压制是错误的，并为他“恢复名誉”。）

伽里略的主要传世之作是两本书。一本是1632年出版的《关于两个世界体系的对话》，简称《对话》，主旨是宣扬哥白尼的太阳中心说。另一本是1638年出版的《关于力学和局部运动两门新科学的谈话和数学证明》，简称《两门新科学》，书中主要陈述了他在力学方面研究的成果。伽里略在科学上的贡献主要有以下几方面：

1. 论证和宣扬了哥白尼学说，令人信服地说明了地球的公转、自转以及行星的绕日运动。他还用自制的望远镜仔细地观测了木星的四个卫星的运动，在人们面前展示了一个太阳系的模型，有力地支持了哥白尼学说。

2. 论证了惯性运动，指出维持运动并不需要外力。这就否定了亚里士多德的“运动必须推动”的教条。不过伽里略对惯性运动理解还没有完全摆脱亚里士多德的影响，他也认为“维持宇宙完善秩序”的惯性运动“不可能是直线运动，而只能是圆周运动。”这个错误理解被他的同代人笛卡尔和后人牛顿纠正了。

3. 论证了所有物体都以同一加速度下落。这个结论直接否定了亚里士多德的重物比轻物下落得快的说法。两百多年后，从这个结论萌发了爱因斯坦的广义相对论。

4. 用实验研究了匀加速运动。他使小球沿斜面滚下，通过实验测量验证了他推出的公式：从静止开始的匀加速运动的路程和时间的平方成正比。他还把这一结果推广到自由落体运动，即倾角为 90° 的斜面上的运动。

5. 提出运动合成的概念，明确指出平抛运动是相互独立的水平方向的匀速运动和竖直方向的匀加速运动的合成，并用数学证明合运动的轨迹是抛物线。他还根据这个概念计算出了斜抛运动在仰角 45° 时射程最大而且比 45° 大或小同样角度时射程相等。

6. 提出了相对性原理的思想。他生动地叙述了大船内的一些力学现象，并且指出船以任何速度匀速前进时这些现象都一样的进行，从而无法根据它们来判断船是否在动。这个思想后来被爱因斯坦发展成相对性原理而成了狭义相对论的基本假设之一。

7. 发现了单摆的等时性并证明了单摆振动的周期和摆长的平方根成正比。他还解释了共振和共鸣现象。

此外，伽里略还研究过固体材料的强度、空气的重量、潮汐现象、太阳黑子、月亮表面的隆起与凹陷等等问题。

除了具体的研究成果外，伽里略还在研究方法上为近代物理学的发展开辟了道路。是他首先把实验引进物理学并赋予重要的地位，革除了以往只靠思辨下结论的恶习。他同时也很注意严格的推理和数学的运用，例如他用消除摩擦的极限情况来说明惯性运动，推论大石头和小石块绑在一起下落应具有的速度来使亚里士多德陷于自相矛盾的困境，从而否定重物比轻物下落快的结论。这样的推理就能消除直觉的错误，从而更深入地理解现象的本质。爱因斯坦和英费尔德《在物理学的进化》一书中曾评论说：“伽里略

的发现以及他所应用的科学的推理方法，是人类思想史上最伟大的成就之一，而且标志着物理学的真正开端。”

伽里略一生和传统的错误观念进行了不屈不挠的斗争，他对权威的态度也很值得我们学习。他说过：“老实说，我赞成亚里士多德的著作，并精心地加以研究。我只是责备那些使自己完全沦为他的奴隶的人，变得不管他讲什么都盲目地赞成，并把他的话一律当作丝毫不能违抗的圣旨一样，而不深究其他任何依据。”

第二章 牛顿运动定律

本章要求

1. 在中学学习的基础上,进一步全面深入地理解牛顿运动定律的意义以及惯性系的概念。
2. 熟练掌握重力、弹性力、摩擦力及万有引力的规律和计算方法。
3. 了解基本的自然力,知道为什么它们是基本的力。
4. 熟练地、科学地、表达清晰地应用牛顿定律分析和解答基本力学题目,包括涉及弹簧和静摩擦力的题目。
5. 理解量纲的意义。
- *6. 理解惯性力的意义并能利用它来解答简单的力学问题。

§ 2.1 牛顿运动定律

在上一章中我们学习了质点运动学。那里只涉及运动的描述,并未研究质点为什么做这样或那样的运动。在本章中将要进一步研究物体为什么做这样或那样的运动。力学的这一部分内容叫**动力学**。牛顿首先在他的1687年出版的名著《自然哲学的数学原理》一书中,提出了三条定律做为动力学的基础,这三条定律统称**牛顿运动定律**。以牛顿运动定律为基础建立起来的力学理论叫做**牛顿力学**。牛顿所叙述的三条定律的中文译文如下:

第一定律 任何物体都保持静止的或沿一条直线作匀速运动

的状态,除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。

第二定律 运动的变化与所加的动力成正比;并且发生在这力所沿的直线的方向上。

第三定律 对于每一个作用,总有一个相等的反作用与之相反;或者说,两个物体之间对各自对方的相互作用总是相等的,而且指向相反的方向。

这三条定律大家在中学已经相当熟悉了,下面再用近代科学的语言对它们做一些解释和说明。

牛顿第一定律和两个力学基本概念相联系。一个是物体的惯性。它指物体本身要保持运动状态不变的性质,或者说是物体抵抗运动变化的性质。另一个是力,它指迫使一个物体运动状态改变,即使它产生加速度的别的物体对它的作用。

由于运动只有相对于一定的参照系来说明才有意义,所以牛顿第一定律也定义了一种参照系。在这种参照系中观察,一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态不变。这样的参照系叫惯性参照系,简称惯性系。并非任何参照系都是惯性系。实验指出,对一般力学现象说来,地面参照系是一个足够精确的惯性系。

牛顿第一定律只定性地指出了力和运动的关系。牛顿第二定律进一步给出了力和运动的定量关系。牛顿叙述中的“运动”一词,他定义为物体(应理解为质点)的质量和速度的乘积。现在把这一乘积称做物体的动量。以 p 表示质量为 m 的物体以速度 v 运动时的动量,则动量也是矢量,它的定义式就是

$$p = mv \quad (2.1)$$

根据牛顿在他的书中对其它问题的分析,知道在他的第二定律的叙述中的“变化”一词应该理解为“对时间的变化率”。因此牛顿第二定律用现代语言应表述为

物体的动量对时间的变化率与所加的外力成正比，并且发生在这外力的方向上。

以 F 表示作用在物体(质点)上的外力，则第二定律用数学公式表达就是(各量要选取适当的单位，见下一节)

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2.2)$$

牛顿当时认为，一个物体的质量是一个与它的运动速度无关的常量。因而由(2.2)式可得

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

由于 $dv/dt = a$ 是物体的加速度，所以有

$$F = ma \quad (2.3)$$

即物体所受的力等于它的质量和加速度的乘积。这一公式是大家早已熟知的牛顿第二定律公式，在牛顿力学中它和(2.2)式完全等效。但需要指出，(2.2)式应该看做是牛顿第二定律的基本的普遍形式。这一方面是因为在物理学中动量这个概念比速度、加速度等更为普遍和重要；另一方面还因为，现代实验已经证明，当物体速度达到接近光速时，其质量已经明显地和速度有关，因而(2.3)式不再适用。但是(2.2)式却被实验证明仍然是成立的。

(2.2)式原是对物体只受一个力的情况说的。在一个物体同时受到几个力的作用时，它们和物体的加速度有什么关系呢？实验证明：这几个力的作用效果跟等于它们矢量和的那一个力的作用效果一样。这一结论叫力的叠加原理。在图 2.1 中以 F_1, F_2, \dots 表示同时作用在物体上的几个力，以 F 表示它们的矢量和，则力的叠加原理可表示为

$$F = F_1 + F_2 + \dots \quad (2.4)$$

而且

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2.5)$$

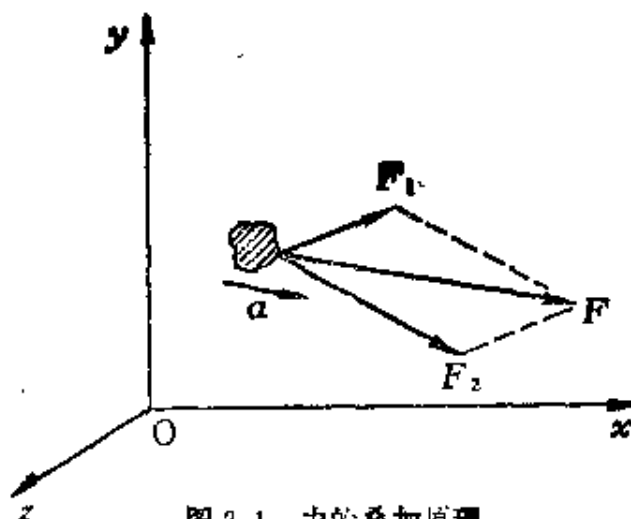


图 2.1 力的叠加原理

或者,当 m 为常量时

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.6)$$

上两式是在实际问题中常用的牛顿第二定律公式,其中 \mathbf{F} 表示物体所受的合力,当只有一个力作用时,它们和(2.2)式、(2.3)式的意义就完全一样了。

根据(2.6)式可以比较物体的质量。用同样的外力作用在两个质量分别是 m_1 和 m_2 的物体上,以 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 分别表示它们由此产生的加速度,则由(2.6)式可得

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

即在相同外力的作用下,物体的质量和加速度成反比,质量大的物体产生的加速度小。这意味着质量大的物体抵抗运动变化的性质强,也就是它的惯性大。因此可以说,质量是物体惯性大小的量度。正因为这样,(2.5)式和(2.6)式中的质量叫做物体的**惯性质量**。

(2.5)式和(2.6)式都是矢量式。实际应用时常用它们的分量式。在直角坐标系中,这些分量式是

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F_z = \frac{dp_z}{dt} \quad (2.7)$$

或

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z \quad (2.8)$$

对于平面曲线运动,常用沿切向和法向的分量式,即

$$F_t = ma_t, \quad F_n = ma_n$$

关于牛顿第三定律,若以 F_{12} 表示第一个物体受第二个物体的作用力,以 F_{21} 表示第二个物体受第一个物体的作用力,则这一定律可用数学形式表示为

$$F_{12} = -F_{21} \quad (2.9)$$

应该再次明确的是,这两个力总是沿着一条直线,而且分别作用在不同的物体上。

最后应该指出, 牛顿第二定律和第三定律只适用于惯性参照系。关于这一点后面 § 2.6 还将做较详细的论述。

§ 2.2 SI 单位和量纲

应用牛顿定律进行数量计算时,各物理量的单位必须“配套”。相互配套的一组单位称为“单位制”。目前国内外通用的单位制叫国际单位制,代号为 SI。

在确定各物理量的单位时,总是根据它们之间的相互联系选定少数几个物理量做为**基本量**,并人为地规定它们的单位。这样的单位叫**基本单位**。其它的物理量都可以根据一定的关系从基本量导出,这些物理量叫**导出量**。导出量的单位都是基本单位的组合,叫**导出单位**。由于基本单位的选择不同,就组成了不同的单位制。SI 的力学基本单位是秒(s),米(m)和千克(kg)。

“秒”是 SI 时间单位。以前曾规定 1 秒是平均太阳日的 $1/86400$ 。为了提高时间测量的精度,现在 SI 的 1 秒的定义是:铯的一种同位素 (^{133}Cs) 原子发出的一个特征频率光波周期的

9 192 631 770 倍。

时间的概念对我们是很重要的，不同的过程所经历的时间可能很不相同。表 2.1 给出了一些时间的实际例子，请注意最长和最短的巨大差别。

表 2.1 时间实例(s)

宇宙的年龄	$\sim 4 \times 10^{17}$
地球的年龄	1.2×10^{17}
万里长城的年龄	7×10^{11}
人的平均寿命	2.2×10^9
地球公转周期(1年)	3.2×10^7
地球自转周期(1日)	8.6×10^4
自由中子寿命	9.2×10^2
人的脉搏周期	~ 0.9
说话声波的周期	$\sim 1 \times 10^{-3}$
无线电广播电磁波周期	$\sim 1 \times 10^{-8}$
π^+ 粒子的寿命	2.6×10^{-8}
可见光波的周期	$\sim 2 \times 10^{-15}$
最短的粒子寿命	$\sim 10^{-23}$

“米”是 SI 长度单位。以前把保存在巴黎国际度量衡局中的“米原器”上两刻线之间的距离规定为 1 米。为了提高长度的测量精度和保证标准的稳定性和易于复制，后来规定氪的一种同位素 (^{86}Kr) 原子发出的一个特征频率的光波长的 1 650 763.73 倍为 1 米。由于激光的出现使长度测量的精度进一步提高了，1983 年起国际上又采用了下面的 (“最后”的) 规定：1 米是光在真空中在 $1/299\,792\,458$ 秒内所经过的距离。表 2.2 给出了一些长度的实际例子，其中最长和最短的差别也是巨大的。

“千克”是 SI 质量单位。现在仍规定“千克标准原器”的质量是 1 千克。千克标准原器是用铂铱合金制造的一个金属圆柱体，保存在巴黎度量衡局的地窖中。为了比较方便起见，许多国家都有它的精确的复制品。

表 2.2 长度实例(m)

目前可观察到的宇宙的半径	$\sim 1 \times 10^{26}$
银系之间的距离	$\sim 2 \times 10^{22}$
我们的银河系的直径	7.6×10^{20}
地球到最近的恒星(半人马座比邻星)的距离	4.0×10^{16}
光在一年内走的距离(1光年)	0.95×10^{17}
地球到太阳的距离	1.5×10^{11}
地球的半径	6.4×10^6
珠穆朗玛峰的高度	8.9×10^3
人的身高	~ 1.7
无线电广播电磁波波长	$\sim 3 \times 10^2$
说话声波波长	$\sim 4 \times 10^{-1}$
人的红血球直径	7.5×10^{-6}
可见光波波长	$\sim 6 \times 10^{-7}$
原子半径	$\sim 1 \times 10^{-10}$
质子半径	1×10^{-16}
电子半径	1×10^{-18}
夸克半径	1×10^{-20}

表 2.3 质量实例(kg)

可观察到的宇宙	$\sim 10^{53}$
我们的银河系	4×10^{41}
太阳	2.0×10^{30}
地球	6.0×10^{24}
满载大油轮	2×10^8
大宇宙飞船	1×10^4
人	$\sim 6 \times 10^1$
一个馒头	1×10^{-1}
雨点	1×10^{-3}
尘粒	1×10^{-10}
红血球	9×10^{-14}
最小的病毒	4×10^{-21}
铂原子	4.0×10^{-28}
质子(静止的)	1.7×10^{-27}
电子(静止的)	9.1×10^{-31}
光子, 中微子(静止的)	0

“克”是常用的 SI 辅助单位,它等于 1 千克的 1/1000。

宇宙万物都有质量。表 2.3 给出了一些质量的实际例子。

在实际工作中,为了方便起见,常用基本单位的倍数或分数作单位来表示物理量的大小。这些单位叫辅助单位。它们的名称都由基本单位加上一个表示倍数或分数的词冠构成。SI 词冠如表 2.4 所示

表 2.4 SI 词冠

因 数	外文词冠	代 号		因 数	外文词冠	代 号	
		中文	国际			中文	国际
10^{18}	exa	艾	E	10^{-1}	deci	分	d
10^{15}	peta	拍	P	10^{-2}	centi	厘	c
10^{12}	tera	太	T	10^{-3}	milli	毫	m
10^9	giga	吉	G	10^{-6}	micro	微	μ
10^6	mega	兆	M	10^{-9}	nano	纳	n
10^3	kilo	千	k	10^{-12}	pico	皮	p
10^2	hecto	百	h	10^{-15}	fermto	飞	f
10^1	deca	十	da	10^{-18}	atto	阿	a

例: 1 千米(km) = 10^3 米(m), 1 微克(μ g) = 10^{-6} 克(g), 1 纳秒(ns) = 10^{-9} 秒(s)

有了基本单位,就可以由它们构成导出量的单位。如速度的 SI 单位是“米/秒”(或 m/s),加速度的 SI 单位是“米/秒²”(或 m/s²),而力的 SI 单位是“千克·米/秒²”(或 kg·m/s²),这个单位又叫牛顿(或 N),等等。

以 T, L 和 M 分别表示基本量的时间、长度和质量。如果单考虑某一导出量是如何由这些基本量组成的,则一个导出量可以用 T, L 和 M 的幂次的组合表示出来。例如速度、加速度、力、动量等量可以这样来表示。

$$[v] = LT^{-1} \quad [a] = LT^{-2}$$

$$[F] = MLT^{-2} \quad [p] = MLT^{-1}$$

这样的表示式(或其中的幂次)叫做各该物理量的量纲。应该指出的是, 这些量纲的表示式是它们的SI表示式。对于不同的单位制, 如果基本量的选择不同, 则同一物理量的量纲也不同。

量纲的概念在物理学中很重要。由于只有量纲相同的项才能进行加减或用等式联接, 所以它的一个简单而重要的应用是检验文字结果的正误。例如, 如果得出了一个结果是 $F = mv^2$, 则左边的量纲为 MLT^{-2} , 右边的量纲为 ML^2T^{-2} 。由于两者不相符合, 所以可以判定这一结果一定是错误的。在作题时对于每一个文字结果都应该这样检查一下量纲, 以免出现原则性的错误。当然, 只是量纲正确, 并不能保证结果就一定正确, 因为还可能出现数字系数的错误。

§ 2.3 技术中常见的几种力

要应用牛顿定律解决问题, 首先必须能正确分析物体的受力情况。在日常生活和工程技术中经常遇到的力有重力、弹力、摩擦力等。这些力产生的原因和它们的特征, 大家在学习中学物理时已经很熟悉了。下面再简单地叙述一下关于这些力的知识。

一、重力

地球表面附近的物体都受到地球的吸引作用, 这种由于地球吸引而使物体受到的力叫做重力。在重力作用下, 任何物体产生的加速度都是重力加速度 g 。所以以 \bar{P} 表示物体受的重力, 以 m 表示物体的质量, 则根据牛顿第二定律就有

$$\bar{P} = mg \quad (2.10)$$

即: 重力的大小等于物体的质量和重力加速度大小的乘积, 重力的

方向和重力加速度的方向相同,即竖直向下。

二、弹力

发生形变的物体,由于要恢复原状,对与它接触的物体会产生力的作用。这种力叫弹力。弹力的表现形式有很多种,下面只讨论三种表现形式。

一种是两个物体通过一定面积相接触的情况。这时互相压紧的两个物体都会发生形变(这种形变常常十分微小以致难于观察到),因而产生对对方的弹力作用。这种弹力通常叫做**正压力**或**支持力**。它们的大小取决于相互压紧的程度,它们的方向总是垂直于接触面而指向对方。

另一种是绳或线对物体的拉力。这种拉力是由于绳发生了形变(通常也十分微小)而产生的。它的大小取决于绳被拉紧的程度,它的方向总是沿着绳而指向绳要收缩的方向。

绳产生拉力时,绳的内部各段之间也有相互的弹力作用。这种内部的弹力叫做**张力**。很多实际问题中,绳的质量往往可以忽略。在这种情况下,对其中任意一段(如图 2.2 中的 ab 段)应用牛顿第二定律就有

$$T_1 - T_2 = ma = 0 \cdot a = 0$$

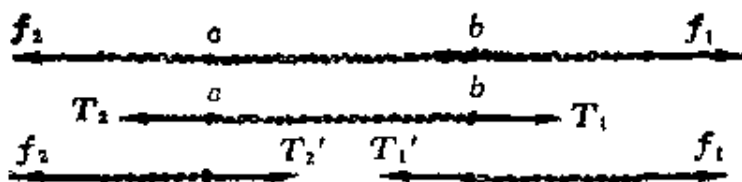


图 2.2 绳的拉力和绳中张力

由此可得 $T_1 = T_2$ 。再由牛顿第三定律可知相邻各段的相互作用力相等(即 $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$), 因此, $T_1' = T_1 = T_2 = T_2'$ 。这就是说, 忽略绳的质量时, 绳内各处的张力都相等, 而且用同样的方法可以

证明, 这张力也等于它对连结体的拉力 f_1, f_2 。

还有一种在力学中常讨论的力是弹簧的弹力。当弹簧被拉伸或压缩时, 它就会对联结体有弹力的作用(图2.3), 这种弹力总是要使弹簧恢复原长。 弹力遵守胡克定律: 在弹性限度内, 弹力和形变成正比。 以 f 表示弹力, 以 x 表示形变, 即弹簧的长度相对于原长的变化, 则根据胡克定律就有

$$f = -kx \quad (2.11)$$

式中 k 叫弹簧的倔强系数, 决定于弹簧本身的结构。式中负号表示弹力的方向; 当 x 为正, 也就是弹簧被拉长时, f 为负, 即与被拉长的方向相反; 当 x 为负, 也就是弹簧被压缩时, f 为正, 即与被压缩的方向相反。总之, 弹簧的弹力总是指向要恢复它原长的方向的。

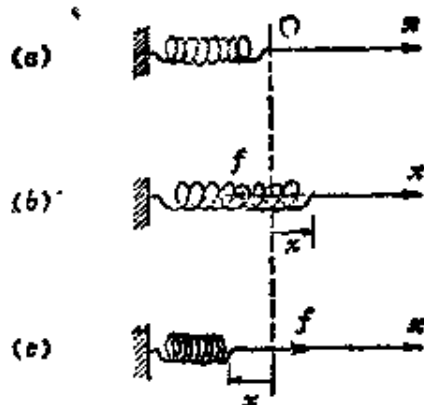


图 2.3 弹簧的弹力

(a) 弹簧的自然伸长 (b) 弹簧被拉伸
(c) 弹簧被压缩

三、摩擦力

两个物体有一接触面, 而且沿着这接触面的方向有相对滑动时, 一般由于接触面粗糙(实际原因比这要复杂得多), 每个物体在接触面上都受到对方作用的一个阻止相对滑动的力, 如图 2.4。这种力叫滑动摩擦力, 它的方向总是与相对滑动的方向相反。实验证明当相对滑动的速度不是太大或太小时, 滑动摩擦力 f_s 的大小和滑动速度无关而和正压力 N 成正比, 即

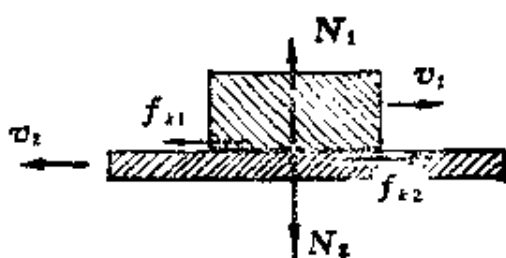


图 2.4 滑动摩擦力

$$f_k = \mu_k N \quad (2.12)$$

式中 μ_k 为滑动摩擦系数，它与接触面的材料和表面的状态(如光滑与否)有关。 μ_k 的数值可以从有关手册中查到。

实际上有接触面的两个物体，不但在相对滑动时，相互间有摩擦力的作用，而且即使没有相对滑动，而只是有相对滑动的趋势时，它们之间也有摩擦力产生。用力推停在地板上的重木箱，没有推动(图 2.5a)，就是由于木箱底面受到了地板的摩擦力。砖块所以能停在运输机皮带上被带到高处(图 2.5b)，也是因为砖块下面受到皮带的摩擦力的缘故。

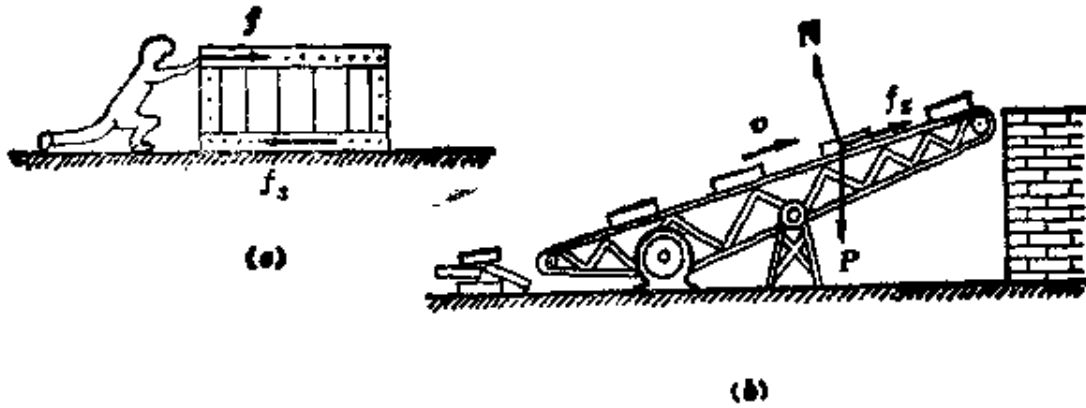


图 2.5 静摩擦力

当有接触面的两个物体相对静止但有相对滑动的趋势时，它们之间产生的摩擦力叫静摩擦力。

由图 2.5 可以看到一个物体受到另一个物体的静摩擦力 f_s 的方向，是和它相对于后者的可能的运动方向相反的。所谓可能的运动方向是指如果没有摩擦力存在时它将要运动的方向。例如在图 2.5 中如果没有静摩擦力，木箱将向右移动，而砖块将在皮带上向下滑。这就是它们可能的运动方向。

由图 2.5 (a) 还可以理解到静摩擦力的大小是可以改变的。在人推木箱的例子中，由于木箱是静止的，所以静摩擦力 f_s 一定等于人的推力 f ，因而静摩擦力随着人的推力的变化而变化。当然，

静摩擦力的大小有个限度,因为事实上,当人的推力大到一定程度时,木箱就要被推动了。这个静摩擦力的限度叫做**最大静摩擦力**。实验证明,最大静摩擦力 $f_{s,max}$ 与两物体之间的正压力 N 成正比,即

$$f_{s,max} = \mu_s N \quad (2.13)$$

式中 μ_s 叫静摩擦系数,它也取决于接触面的材料与表面的状态。对同样的两个接触面,静摩擦系数 μ_s 总是大于滑动摩擦系数 μ_k 。各种接触面的静摩擦系数也可以从有关手册中查出。

§ 2.4 基本的自然力

上一节我们介绍了几种力的特征。实际上,在日常生活和工程技术中,遇到的力还有很多种。例如皮球内空气对球胆的压力,江河海水对大船的浮力,空气对运动车辆的阻力,胶水使两块木板固结在一起的粘接力,两个带电小球之间的吸力或斥力,两个磁铁之间的吸力或斥力等等。除了这些宏观世界我们能观察到的力以外,在微观世界中也存在这样或那样的力。例如分子或原子之间的引力或斥力,原子内的电子和核之间的引力,核内粒子和粒子之间的斥力和引力等。看来如此复杂。但近代科学已经证明,自然界中只存在四种基本的力,其它的力都是这四种力的不同表现,这四种力是万有引力、电磁力、强力、弱力。下面分别做一简单介绍。

一、万有引力

这是存在于任何两个物质质点之间的吸引力。它的规律首先由牛顿发现,就叫万有引力定律,这个定律说:任何两个质点都互相吸引,这引力的大小与它们的质量的乘积成正比,和它们的距离的平方成反比。用 m_1 和 m_2 分别表示两个质点的质量,以 r 表示

它们的距离,则万有引力定律的数学表示式就是

$$f = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (2.14)$$

式中 f 就是两个质点的相互吸引力, G 是一个比例恒量,叫万有引力恒量,在国际单位制中它的数值经测定为

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \quad (2.15)$$

(2.14)式中的质量反映了物体的引力性质,是物体与其它物体相互吸引的性质的量度。因此又叫引力质量。它和反映物体抵抗运动变化性质的惯性质量在意义上是不同的。但是实验证明(上一章 § 1.4 中提到精确地测定任何物体的重力加速度都相等的实验就是这方面的实验),同一个物体的这两个质量是相等的,因此可以说它们是同一质量的两种表现,也就不必加以区分了。

(2.14)式适用于两个质点。对于两个有限大的物体,它们之间的引力应是组成此物体的各个质点和组成另一物体的各个质点之间的所有引力的矢量和。对于两个均匀球体之间的引力,计算表明,(2.14)式仍然适用。这时 m_1 和 m_2 分别表示两球体的质量, r 则表示它们的球心的距离。例如地球对于其表面上一个质量为 m 的物体的吸引力就可以表示为

$$f = \frac{GMm}{R^2} \quad (2.16)$$

其中 M 为地球的质量, R 为地球的半径。

重力就是地球对它表面上的物体的引力引起的。忽略地球自转的影响(这一忽略引起的误差不超过千分之四),物体所受的重力就等于它所受的万有引力。由于重力 $P = mg$, 所以由(2.16)式可求得

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

消去两边的 m (注意,这里用到了惯性质量和引力质量相等这一事

实),可以得到一个关于地面上的重力加速度的理论公式

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (2.17)$$

地面上物体之间的万有引力是非常小的。例如相隔 1 米的两个人之间的万有引力不过约 10^{-7}N 。这对人的活动不会产生任何影响。地面上的物体受到地球的引力如此明显是因为地球的质量非常大的缘故。在宇宙天体之间,万有引力起着主要作用,也是因为天体质量非常大的缘故。

二、电磁力

这是指带电的粒子或带电的宏观物体间的作用力。两个静止的带电粒子之间的作用力由一个类似于万有引力定律的库仑定律支配着。库仑定律说,两个静止的点电荷相斥或相吸,这斥力或吸力的大小 f 与两个点电荷的电量 q_1 和 q_2 的乘积成正比,而与两电荷的距离 r 的平方成反比。写成公式是

$$f = \frac{kq_1q_2}{r^2} \quad (2.18)$$

式中比例系数 k 在国际单位制中的值为

$$k = 9 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

这种力比万有引力要大得多。例如两个相邻质子之间的电力按上式计算可以达到 10^2N , 比它们之间的万有引力(10^{-34}N)大到 10^{36} 倍。

运动的电荷相互间除了有电力作用外,还有磁力相互作用。磁力实际上是电力的一种表现,或者说,磁力和电力具有同一本源。(关于这一点,本《大学物理学》电磁学分册有较详细的讨论)。因此电力和磁力统称电磁力。

由于分子或原子都是由电荷组成的系统,所以它们之间的作

用力基本上就是它们的电荷之间的电磁力。上一节所提到的相互接触的物体之间的弹力和摩擦力，以及气体压力、浮力、粘结力等等都是相互靠近的原子或分子之间的作用力的宏观表现，因而从根本上说也是电磁力。

三、强力

我们知道，在绝大多数原子核内不止有一个质子。质子之间的电磁力是排斥力。但事实上核的各部分并没有自动飞离，这说明在质子之间还存在一种比电磁力还要强的自然力。正是这种力把原子核内的质子以及中子紧紧地束缚在一起。这种存在于质子、中子(还有介子……,及其它质量较大的粒子)之间的作用力称为强力(或一般地称为强相互作用)。两个相邻的质子之间的强力可以达到 10^4 牛顿。强力的力程，即作用可及的范围非常短。粒子之间的离距超过约 10^{-16} 米时，强力就变得很小而可以忽略不计。小于 10^{-16} 米时，强力占主要的支配地位。而且直到距离减小到大约 0.4×10^{-16} 米时，它都表现为吸引力。距离再减小，则强力就表现为斥力。

四、弱力

弱力一般称弱相互作用。它也存在乎许多粒子之间，但仅在粒子间的某些反应(如 β -衰变)中才显示出它的重要性。弱力的力程比强力还要短，而且力很弱。两个相邻的质子之间的弱力大约仅有 10^{-2} 牛顿。

为了在一起进行比较，在表 2.5 中列出了四种基本力的特征。其中力的强度是指两个质子的中心相距等于它们直径时的相互作用力。

从复杂纷云、多种多样的力中，人们认识到基本的自然力只有

表 2.5 四种基本自然力的特征

力的种类	相互作用的物体	力的强度	力程
万有引力	一切质点	10^{-34}N	无限远
弱力	大多数粒子	10^{-2}N	小于 10^{-17}m
电磁力	电荷	10^2N	无限远
强力	核子、介子等	10^4N	10^{-15}m

四种,这已是物理学的很大成就。这是本世纪三十年代的事。自那以后,人们就企图发现这四种力之间的联系。爱因斯坦就曾企图把万有引力和电磁力统一起来,但没有成功。六十年代,温伯格和萨拉姆在杨振宁等提出的理论基础上,提出了一个把电磁力和弱力统一起来的理论,并且在七十年代和八十年代初期得到了实验上的证明。这种“弱电统一理论”的建立是物理学发展史上的又一个里程碑。现在,人们期望有朝一日,将建立起弱电强的“大统一理论”,以致最后(?)将建立起把四种基本力都统一起来的……“超统一理论”。

§ 2.5 应用牛顿定律解题

利用牛顿定律求解力学问题时,最好按下述思路分析:

一、认物体

在有关问题中选定一个物体(当成质点)作为分析对象。如果问题涉及几个物体,那就一个一个地作为对象进行分析,认出每个物体的质量。

二、看运动

分析所认定的物体的运动状态,包括它的轨迹、速度和加速

度。问题涉及几个物体时,还要找出它们运动学的联系,即它们的速度或加速度之间的关系。

三、查受力

找出被认定的物体所受的所有的外力。这些力可能是重力、弹力、摩擦力等等。而弹力又常常表现为接触面的压力或绳子的拉力。画简单的示意图表示物体受力情况与运动情况。这种图叫示力图。

四、列方程

把上面分析出的质量,加速度和力用牛顿第二定律联系起来列出方程式。在方程式足够的情况下就可以求解未知量了。

动力学问题一般有两类,一类是已知力的作用情况求运动;另一类是已知运动情况求力。这两类问题的分析方法都是一样的,都可以按上面的步骤进行,只是未知数不同罢了。

下面举几个例子:

[例1] 如图 2.5(b) 所示的皮带运输机,设砖块与皮带间的静摩擦系数为 μ_s , 砖块的质量为 m , 皮带的倾斜角为 α 。求皮带向上匀速输送砖块时,它对砖块的静摩擦力多大?

解: 认定砖块进行分析。它向上匀速运动,因而加速度为零。在上升过程中,它受力情况如图 2.6 所示。

选 x 轴沿着皮带方向,则对砖块用牛顿第二定律,可得 x 方向的分量式为

$$-mg \sin \alpha + f_s = ma_x = 0$$

由此得砖块受的静摩擦力为

$$f_s = mg \sin \alpha$$

注意,此题不能用公式 $f_s = \mu_s N$ 求静摩擦力,因为这一公式只对最大静

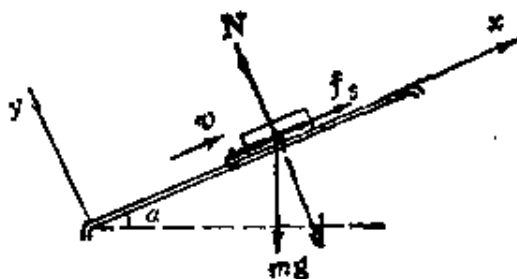


图 2.6

摩擦力才适用。在静摩擦力不是最大的情况下,只能根据牛顿定律的要求求出静摩擦力。

[例 2] 一个可以水平运动的斜面,倾角为 α 。斜面上放一物体,质量为 m ,物体与斜面间的静摩擦系数为 μ_s 。如果要使物体在斜面上保持静止,斜面的水平加速度如何?

解: 认定斜面上的物体 m 进行分析。它在斜面上保持静止,因而具有和斜面相同的加速度 a 。可以直观地看出,如果斜面的加速度太小,则物体将向下滑;如果斜面的加速度过大,则物体会向上滑。

先假定物体静止在斜面上但是有向下滑的趋势。它受力的情况如图 2.7(a) 所示,静摩擦力 f_s 沿斜面向上。选直角坐标如图,则对物体 m 用牛顿第二定律可得下面的分量式

$$x \text{ 向: } f_s \cos \alpha - N \sin \alpha = m(-a)$$

$$y \text{ 向: } f_s \sin \alpha + N \cos \alpha - mg = 0$$

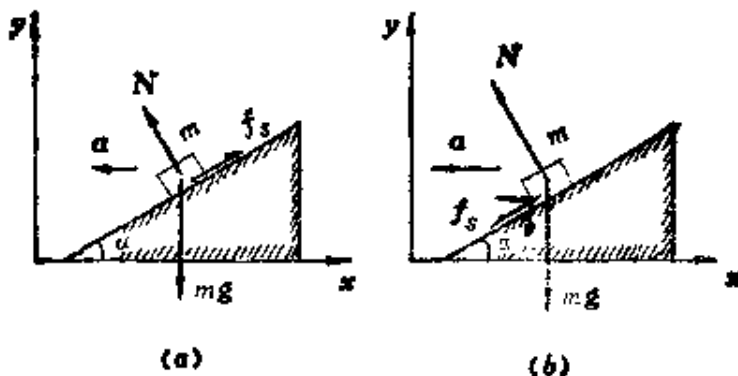


图 2.7

还有静摩擦力公式 $f_s \leq \mu_s N$

解这三个方程式可得

$$a \geq \left(\frac{\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha} \right) g$$

再假定物体静止在斜面上但是有向上滑的趋势。它受力的情况如图 2.7(b) 所示,静摩擦力 f_s 沿斜面向下。参考所选的直角坐标,对 m 用牛顿第二定律可得

$$x \text{ 向: } -f_s \cos \alpha - N \sin \alpha = m(-a)$$

$$y \text{ 向: } -f_s \sin \alpha + N \cos \alpha - mg = 0$$

再用静摩擦力公式 $f_s \leq \mu_s N$ 可得

$$a \leq \left(\frac{\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} \right) g$$

把上面的两个结果联合起来,可以得出:要使物体在斜面上静止,斜面的水平加速度 a 应在下述范围内。

$$\left(\frac{\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha} \right) g \leq a \leq \left(\frac{\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_s \sin \alpha} \right) g$$

[例 3] 一个质量为 m 的珠子系在线的一端,线的另一端绑在墙上的钉子上,线长为 l 。先拉动珠子使线保持水平静止,然后放手使珠子下落。求线摆下 θ 角时这个珠子的速率和线的张力。

解:这是一个变加速问题,求解要用到微积分,但物理概念并没有什么特殊。如图 2.8 所示,珠子受的力有线对它的拉力 T 和重力 mg 。由于珠子沿圆周运动,所以我们按切向和法向来列牛顿第二定律分量式。

对珠子,在任意时刻,牛顿第二定律的切向分量式为

$$mg \cos \theta = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

以 ds 乘以此式两侧,可得

$$mg \cos \theta \cdot ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv$$

由于 $ds = l d\theta$, $\frac{ds}{dt} = v$,所以上式可写成

$$gl \cos \theta \cdot d\theta = v dv$$

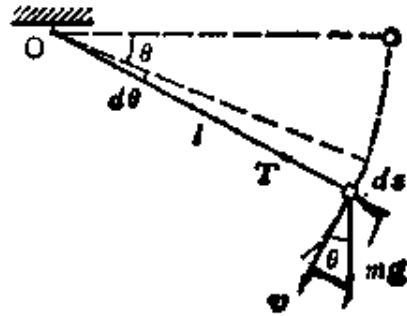


图 2.8

两侧同时积分,由于摆角从 0 增大到 θ 时,速率从 0 增大到 v ,所以有

$$\int_0^\theta gl \cos \theta \cdot d\theta = \int_0^v v dv$$

由此得

$$gl \sin \theta = \frac{1}{2} v^2$$

从而

$$v = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

对珠子,在任意时刻,牛顿第二定律的法向分量式为

$$T - mg \sin \theta = ma_n = m \frac{v^2}{l}$$

将上面 v 值代入,可得线对珠子的拉力为

$$T = 3mg \sin \theta$$

这也就等于线中的张力。

[例 4] 一个滑轮组如图 2.9(a) 所示, 其中 A 为定滑轮。一根不能伸长的绳绕过两个滑轮, 上端固定于梁上, 下端挂一重物, 其质量为 $m_1 = 1.5 \text{ kg}$ 。动滑轮 B 轴上悬另一重物, 质量为 $m_2 = 2 \text{ kg}$ 。滑轮的质量和轴上的摩擦以及绳的质量均忽略不计。

- (1) 求两重物的加速度及绳中的张力。
- (2) 求定滑轮 A 的固定轴上受的轮子的压力。

解: 分别就两重物 m_1 和 m_2 (m_2 看作和动滑轮结成一体) 进行分析。设其加速度分别为 a_1 和 a_2 。它们受力的情况如图 2.9(b) 所示。由于滑轮和绳的质量以及轴上的摩擦均忽略不计, 所以绳中各处张力相等, 设为 T 。

(1) 分别对 m_1 和 m_2 应用牛顿第二定律, 可得沿 y 方向的分量式为

对 m_1 ,
$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

对 m_2 ,
$$-2T_2 + m_2 g = m_2 (-a_2)$$

在绳子不伸长的条件下, 两重物的加速度应有下列关系

$$a_1 = 2a_2$$

关于张力有

$$T_1 = T_2 = T$$

联立解上面四个方程式就可得出

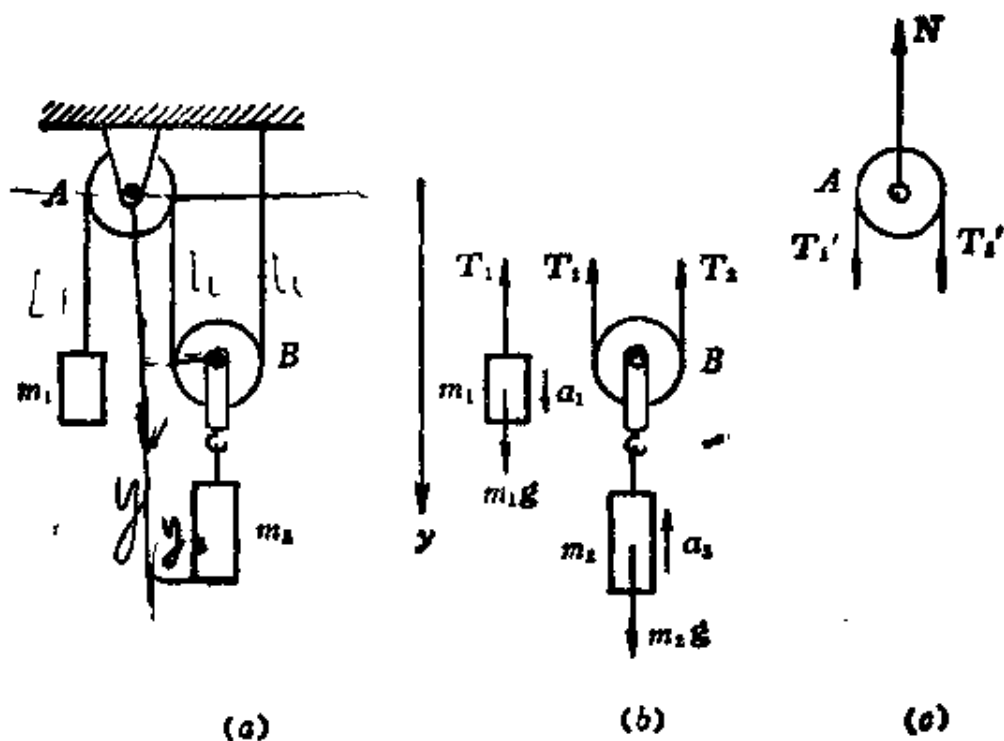


图 2.9

$$a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g = \frac{2(2 \times 1.5 - 2)}{4 \times 1.5 + 2} \times 9.8 = 2.45 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g = \frac{2 \times 1.5 - 2}{4 \times 1.5 + 2} \times 9.8 = 1.23 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g = \frac{3 \times 1.5 \times 2}{4 \times 1.5 + 2} \times 9.8 = 11.0 \text{ N}$$

由于 a_1 和 a_2 均为正数, 可知原设 a_1 和 a_2 的方向是正确的, 即都如图 2.9(b) 所示的方向。

(2) 滑轮 A 的受力情况如图 2.9(c) 所示。其中 N 为固定轴对滑轮的作用力。由于滑轮的质量忽略不计, 所以对它应用牛顿第二定律就应该有

$$T'_1 + T'_2 - N = 0$$

再利用

$$T'_1 = T'_2 = T$$

可得
$$N = 2T = \frac{6m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g = \frac{6 \times 1.5 \times 2}{4 \times 1.5 + 2} \times 9.8 = 22.1 \text{ N}$$

再根据牛顿第三定律, 可得轴所受的压力为

$$N' = N = 22.1 \text{ N}$$

方向向下。

[例 5] 一个水平的木制圆盘绕其中心竖直轴匀速转动。在盘上离中心 $r = 20 \text{ cm}$ 处放一小铁块, 如果铁块与木板间的静摩擦系数为 $\mu_s = 0.4$ 。求圆盘转速增大到多少(以每分转数表示)时, 铁块开始在圆盘上移动?

解: 认定铁块进行分析。它在盘上不动时, 是作半径为 r 的匀速圆周运动, 具有法向加速度 $a_n = r\omega^2$ 。它受力情况如图 2.10 所示。 f_s 为静摩擦力。

对铁块用牛顿第二定律, 得法向分量式为

$$f_s = ma_n = mr\omega^2$$

由于

$$f_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

所以

$$\mu_s mg \geq mr\omega^2$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu_s g}{r}} = \sqrt{\frac{0.4 \times 9.8}{0.2}} = 4.43 \text{ 1/s}$$

而

$$n = \omega / 2\pi \leq 42.3 \text{ rev/min}$$

这一结果说明, 圆盘转速达到 42.3 转/分时, 铁块开始在盘上移动。

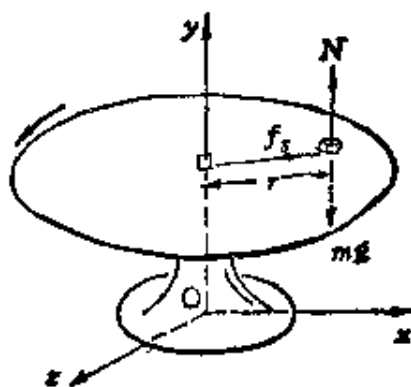


图 2.10

§ 2.6 惯性系与非惯性系

我们已经指出过,运动的描述是相对的。对于不同的参照系,同一物体的运动形式可以不同。尽管如此,相对于任意参照系,运动的描述都是有意义的。因而如果问题只涉及运动的描述,那是完全可以根据研究问题的方便任意选择参照系的。但是,如果问题涉及运动和力的关系,即要应用牛顿定律时,是否也可以任意选择参照系呢?

先看两个例子。站台上停着一辆小车,相对于地面参照系进行分析,小车在停着,加速度为零。这是因为作用在它上的力相互平衡,即合力为零的缘故,这符合牛顿定律。如果从加速起动的列车车箱内观察这辆小车,即相对于作加速运动的车厢参照系来分析小车的运动,将发现小车向车尾方向作加速运动。它受力的情况并无改变,合力仍然是零。合力为零而有了加速度,这是违背牛顿定律的。因此,相对于作加速运动的车厢参照系,牛顿定律不成立。

再看上节例5中所提到的水平转盘。从地面参照系看来,铁块作圆周运动,有法向加速度。这是因为它受到盘面的静摩擦力作用的缘故,这符合牛顿定律。但是相对于转盘参照系来说,即站在转盘上观察,铁块总保持静止,因而加速度为零。可是这时它依然受着静摩擦力的作用。合力不为零,可是没有加速度,这也是违背牛顿定律的。因此,相对于转盘参照系,牛顿定律也是不成立的。

这样我们就知道,对有些参照系牛顿定律成立,对另一些参照系牛顿定律不成立。实际上,牛顿定律只有在惯性参照系中才成立。惯性参照系就是用牛顿第一定律定义的参照系,在此参照系中,一个不受力作用的物体将保持静止或做匀速直线运动。

惯性系有一个重要的性质，即：如果我们确认了某一参照系为惯性系，则相对于此参照系做匀速直线运动的任何其它参照系也一定是惯性系。这是因为如果一个物体不受力作用时相对于那个原始惯性系静止或做匀速直线运动，则在任何相对于这“原始”惯性系做匀速直线运动的参照系中观测，也必然做匀速直线运动（尽管速度不同）或静止。这也是在不受力作用的情况下发生的。因此根据定义，后者也是惯性系。

反过来我们也可以说，相对于一个已知惯性系做加速运动的参照系，一定不是惯性参照系，或者说是一个非惯性系。

具体判断一个实际的参照系是不是惯性系，只能根据实验观察。太阳参照系，即原点固定在太阳中心而各坐标轴指向固定方向（以恒星为基准）的参照系（图 2.11 中 $Oxyz$ 坐标系）是个很好的惯性系。这就是因为通过天文观测或宇宙飞行器的发射与控制，人们知道了行星和宇宙飞行器的运动完全由牛顿定律支配的缘故（这里的作用力主要是万有引力或火箭的推进力）。

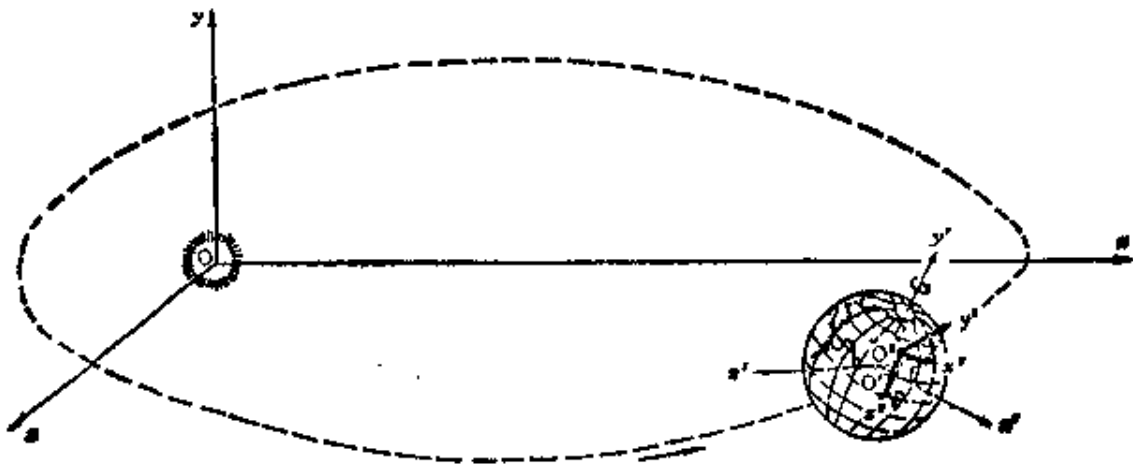


图 2.11 参照系示意图

地心参照系是原点固定在地球中心而坐标轴指向空间固定方向（以恒星为基准）的参照系（如图 2.11 中的 $O'x'y'z'$ ）。由于地球绕太阳公转，所以这个参照系不是惯性系，但地球相对于太阳参照

系的法向加速度甚小,约 $6 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$,不到地球上重力加速度的千分之一,所以地心参照系可以近似地当惯性系看待。初步研究人造地球卫星运动时,就可以应用地心参照系。

地面参照系是坐标轴固定在地面上的参照系(如图 2.11 的 $O'x'y'z'$)。由于地球围绕自己的轴相对于地心参照系不断地自转,所以地面参照系也不是惯性系。但由于地面上各处相对于地心参照系的法向加速度最大不超过 $3.40 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ (在赤道上),所以地面参照系也可以近似地当惯性系看待。在一般工程技术问题中,都相对于地面参照系描述物体的运动和应用牛顿定律,得出的结论也都足够准确地符合实际,就是因为这个缘故。

至于前面提到的加速运动的车厢或旋转的圆盘,由于它们相对于地面参照系有明显的加速度,所以不能再当惯性系看待,相对于它们,也就不能直接运用牛顿定律了。

*§ 2.7 惯性力

在实际问题中常常需要在非惯性系中观察和处理物体的运动现象。如上节所述,在这种参照系中,牛顿定律是不成立的。但是为了方便起见,我们也常常形式地利用牛顿第二定律分析问题,为此我们引入惯性力这一概念。

首先让我们讨论加速平动参照系的情况。设有一质点,质量为 m ,相对于某一惯性系 S ,它在实际的外力 F 作用下产生加速度 a ,根据牛顿第二定律有:

$$F = ma$$

设想另一参照系 S' ,相对于惯性系 S 以加速度 a_0 平动。在 S' 参照系中,质点的加速度是 a' 。由运动的相对性可知:

$$a = a' + a_0$$

将此式代入上式可得 $F = m(a' + a_0) = ma' + ma_0$

或者写成

$$F + (-ma_0) = ma' \quad (2.19)$$

此式说明,质点受的合外力 F 并不等于 ma' , 因此牛顿定律在参照系 S' 中不成立。但是如果我们认为在 S' 系中观察时,除了实际的外力 F 外,质点还受到一个大小和方向由 $(-ma_0)$ 表示的力,并将此力也计入合力之内,则(2.19)式就可以形式上理解为:在 S' 系内观测,质点所受的合外力也等于它的质量和加速度的乘积。因而,也就可以在形式上应用牛顿第二定律了。

为了在非惯性系中形式地应用牛顿第二定律而必须引入的力叫做惯性力。由(2.19)式可知,在加速平动参照系中,它的大小等于质点的质量和此非惯性系相对于惯性系的加速度的乘积,而方向与此加速度的方向相反。以 F_0 表示惯性力,则有

$$F_0 = -ma_0 \quad (2.20)$$

引进了惯性力,在非惯性系中我们就有了下述牛顿第二定律的形式

$$F + F_0 = ma' \quad (2.21)$$

其中 F 是实际存在的各种力,它们是物体之间的相互作用的表现,其本质都可以归结为四种基本的自然力。惯性力 F_0 只是参照系的非惯性运动的表现显示,或者说是物体的惯性在非惯性系中的表现。它不是物体间的相互作用,也没有反作用力。因此惯性力又称做虚拟力。

[例] 在水平轨道上有一节车厢以加速度 a_0 行进,在车厢中看到有一质量为 m 的小球静止地悬挂在天花板上,试以车厢为参照系求出悬线与竖直方向的夹角。

解: 在车厢参照系内观察小球是静止的,即 $a' = 0$ 。它受的力除重力和线的拉力外,还有一惯性力 $F_0 = -ma_0$,如图 2.12 所示。

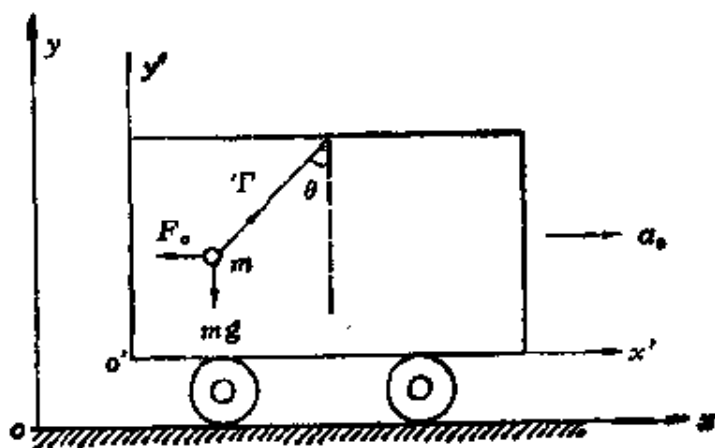


图 2.12

相对于车厢参照系,对小球用牛顿第二定律,则有

$$x' \text{ 向: } T \sin \theta - F_0 = ma'_{x'} = 0$$

$$y' \text{ 向: } T \cos \theta - mg = ma'_{y'} = 0$$

将 $F_0 = ma_0$ 代入上式,消去 T 即可得

$$\theta = \text{tg}^{-1}(a_0/g)$$

读者可以相对于地面参照系(惯性系)再解一次这个问题,并与上面的解法相比较。

下面让我们再讨论转动参照系。我们这里只讨论一种简单的情况。仍用 § 2.5 例 5 的例子,一个铁块静止在一个转盘上,如图 2.13 所示。对于铁块相对于地面参照系的运动,牛顿第二定律给出

$$f_s = ma_n = -mr\omega^2 \hat{r}$$

式中 \hat{r} 为由圆心沿半径向外的单位矢量,此式也可以写成

$$f_s + mr\omega^2 \hat{r} = 0 \quad (2.22)$$

站在圆盘上观察,即相对于转动的圆盘参照系,铁块是静止的,加速度 $a' = 0$ 。如果还要套用牛顿第二定律,则必须认为铁块除了受到静摩擦力这个“真实的”力以外,还受到一个惯性力或虚拟力 F_0 和它平衡。这样,相对于圆盘参照系,应该有

$$f_s + F_0 = 0$$

将此式和(2.22)式对比,可得

$$F_0 = mr\omega^2 \hat{r} \quad (2.23)$$

这个惯性力的方向与 \hat{r} 的方向相同,即沿着圆的半径向外。因此它叫惯性离心力。这是在转动参照系中观察到的一种惯性力。

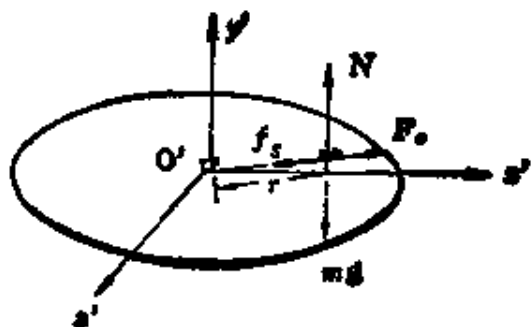


图 2.13 在转盘参照系上观察

实际上当我们乘坐汽车拐弯时,我们体验到的被甩向弯道外侧的“力”,就是这种惯性离心力。

由于惯性离心力和在惯性系中观察到的向心力大小相等,方向相反,所以常常有人(特别是那些把惯性离心力简称为离心力的人们)把惯性离心力认为是向心力的反作用力,这是一种误解。首先,向心力作用在运动物体上使之产生向心加速度。惯性离心力,如上所述,也是作用在运动物体上。既然它们作用在同一物体上,因而不是相互作用,所以谈不上作用和反作用。再者,向心力是真实力(或它们的合力)作用的表现,它可能有真实的反作用力。图 2.13 中的铁块受到的向心力(即盘面对它的静摩擦力 f_s)的反作用力就是铁块对盘面的静摩擦力。(在向心力为合力的情况下,各个分力也都有相应的真实的反作用力,但因为这些反作用力作用在不同物体上,所以向心力谈不上有一个合成的反作用力。)但惯性离心力是虚拟力,它只是运动物体的惯性在转动参照系中的表现,它没有反作用力,因此也不能说向心力和它是一对作用力和反作用力。

本章提要

1. 牛顿运动定律:

第一定律 惯性和力的概念,惯性系的定义。

第二定律 $F = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}$

当 m 为常量时, $F = ma$

第三定律 $F_{12} = -F_{21}$

力的叠加原理 $F = F_1 + F_2 + \dots$

2. 技术中常见的几种力:

重力 $\mathbf{p} = m\mathbf{g}$

压力和张力

弹簧的弹力 $f = -kx$

摩擦力 滑动摩擦力 $f_k = \mu_k N$

静摩擦力 $f_s \leq \mu_s N$

3. 基本自然力: 万有引力, 弱力, 电磁力, 强力(弱、电已经统一)。

4. 用牛顿定律解题的基本思路: 认物体, 看运动, 查受力(画示力图), 列方程(一般用分量式)。

5. 国际单位制(SI)。

量纲: 表示导出量是如何由基本量组成的幕次式。

*6. 惯性力(虚拟力):

在平动加速参照系中: $F_0 = -ma_0$

在转动参照系中: 惯性离心力 $F_0 = mr\omega^2 \hat{r}$

思 考 题

2.1 有人说:“人推动了车是因为推车的力大于车反推人的力。”这话对吗? 为什么?

2.2 粗糙的木板上放有三角形的木块 B , 铁块 A 沿木块的一边滑下。如图 2.14 所示。 A, B 各受哪些力? 这些力中哪些是作用力和反作用力? 哪些是相互平衡的力(设木块 B 不动),

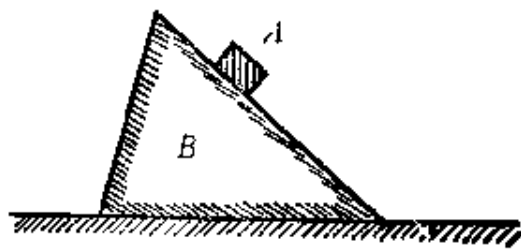


图 2.14

2.3 绳的一端系着一个金属小球，以手握其另一端使其作圆周运动。

(1) 当每秒的转数相同时，长的绳子容易断还是短的绳子容易断？为什么？

(2) 当小球运动的线速度相同时，长的绳子容易断还是短的绳子容易断？为什么？

2.4 摩擦力是否一定阻碍物体的运动？

2.5 没有动力的小车通过弧形桥面（图 2.15）时受几个力？它们的反作用力作用在哪里？若 P 为车的重量，车对桥面的压力是否等于 $P \cos \theta$ ？小车能否作匀速率运动？

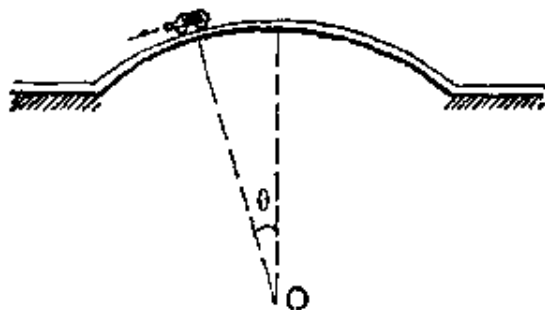


图 2.15

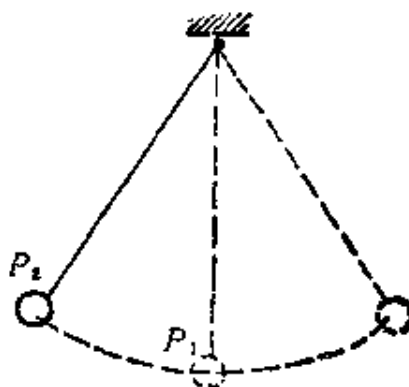


图 2.16

2.6 有一单摆如图 2.16 所示。试在图中画出摆球到达最低点 P_1 和最高点 P_2 时所受的力。在这两个位置上，绳中张力是否等于摆球重力或重力在绳子方向的分力？

2.7 给你一个弹簧，其一端连有一小铁球，你能否做一个在汽车内测量汽车加速度的“加速度计”？根据什么原理？

2.8 当飞机由爬升转为俯冲时（图 2.17a），飞行员会由于脑充血而“红



图 2.17

视”(现场变红)。当飞行员由俯冲拉起时(图 2.17b), 飞行员由于脑失血“黑晕”(眼睛失明), 为什么? 飞行员穿上一种G 套服(把身躯和四肢肌肉缠得紧紧的一种衣服)时, 飞行员由俯冲拉起时, 他能经得住 $5g$ 而避免黑晕, 但飞行开始俯冲时, 最多经得住 $-2g$ 而仍免不了红视。为什么?(定性分析。)

*2.9 设想在高处用绳子吊一块重木块, 板面沿竖直方向, 板中央有一颗钉子, 钉子上悬挂一单摆, 今使单摆摆动起来。如果当摆球超过最低点时, 砍断吊木板的绳子, 在木板下落过程中, 摆球相对于木板的运动形式如何? 如果当摆球到达极端位置砍断绳子, 摆球相对于木板的运动形式又将如何?(忽略空气阻力)。

*2.10 在门窗都关好的开行的汽车内, 漂浮着一个氢气球, 当汽车向左转弯时, 氢气球在车内将向左运动还是向右运动?

*2.11 设想在地球北极装置一个单摆(图 2.18)。令其摆动后, 则会发现其摆动平面, 即摆线所扫过的平面按顺时针方向旋转。摆球受到垂直于这平面的作用力吗? 为什么这平面会旋转? 试用惯性系和非惯性系概念解释这个现象。

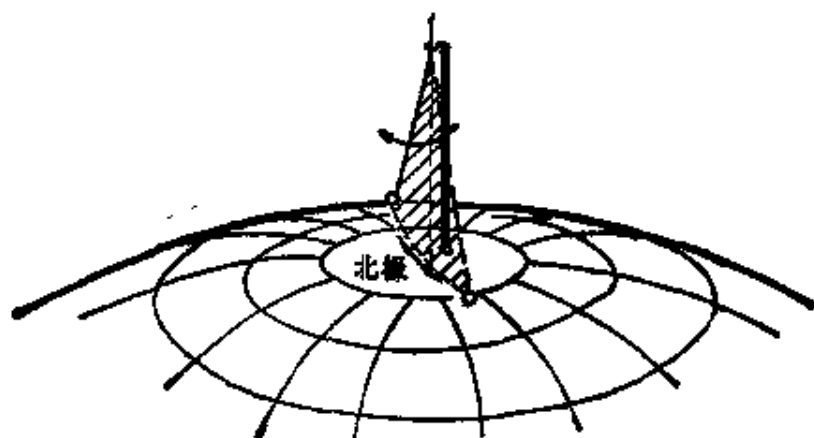


图 2.18

习 题

2.1 用力 F 推水平地面上—质量为 M 的木箱(图 2.19)。设力 F 与水平面的夹角为 α , 木箱与地面间的滑动摩擦系数和静摩擦系数分别为 μ_s 和 μ_0 。

- (1) 要推动木箱, F 至少应多大? 此后维持木箱匀速前进, F 应需多大?
- (2) 证明当 α 角大于某一值时, 则无论用多大的力 F 也不能使木箱前

进。此 α 角是多大?

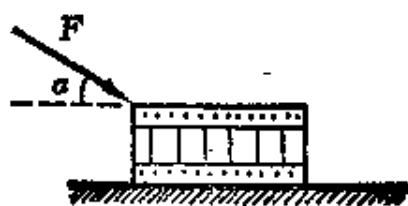


图 2.19

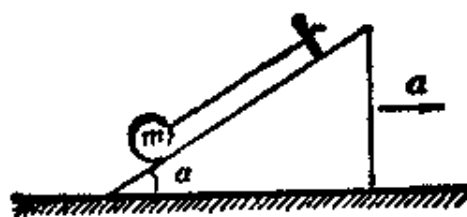


图 2.20

2.2 设质量 $m=10\text{kg}$ 的小球挂在倾角 $\alpha=30^\circ$ 的光滑斜面上。如图 2.20 所示。

(1) 当斜面以加速度 $a=\frac{1}{3}g$ 沿如图所示的方向运动时,绳中的张力及小球对斜面的正压力各是多大?

(2) 当斜面的加速度至少为多大时,小球对斜面的正压力为零?

2.3 质量为 M 的三角形木块,放在光滑的水平面上,另一质量为 m 的方木块放在斜面上,如图 2.21 所示。如果两木块间的摩擦可忽略不计,求 m 相对于 M 的加速度。

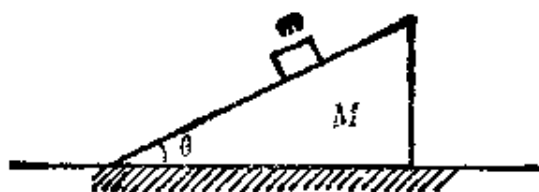


图 2.21

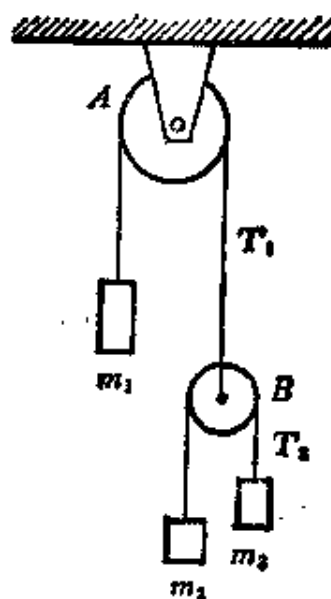


图 2.22

2.4 图 2.22 中 A 为定滑轮, B 为动滑轮, 三个物体的质量分别为: $m_1=200\text{g}$, $m_2=100\text{g}$, $m_3=50\text{g}$ 。求:

(1) 每个物体的加速度。

(2) 两根绳中的张力 T_1 和 T_2 。假定滑轮和绳的质量以及绳的伸长和摩擦力均可忽略。

2.5 物体 A 和 B 的质量分别为 $m_A = 8 \text{ kg}$, $m_B = 16 \text{ kg}$, 它们之间用绳子联结, 在倾角 $\alpha = 37^\circ$ 的斜面上向下滑动, 如图 2.23 所示。A 和 B 与斜面间的滑动摩擦系数分别为 $\mu_{kA} = 0.2$, $\mu_{kB} = 0.4$ 。求:

- (1) 物体 A 和 B 的加速度。
- (2) 绳子的张力。
- (3) 如果将物体 A 和 B 互换位置, (1) 和 (2) 的结果又如何?

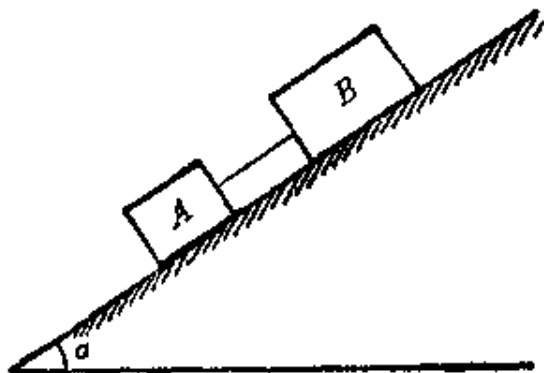


图 2.23

2.6 桌上有一质量 $M = 1 \text{ kg}$ 的板, 板上放一质量 $m = 2 \text{ kg}$ 的另一物体, 设物体与板、板与桌面之间的滑动摩擦系数均为 $\mu_k = 0.25$, 静摩擦系数均为 $\mu_s = 0.30$ 。

(1) 今以水平力 F 拉板, 使两者一起以 $a = 1 \text{ m/s}^2$ 的加速度运动, 试计算物体与板及板与桌面间的相互作用力。

(2) 要将板从物体下面抽出, 至少需要多大的力?

2.7 在一水平直路上, 一辆车速 $v = 90 \text{ km/h}$ 的汽车的刹车距离为 $s = 35 \text{ m}$ 。如果路面相同, 只是有 1:10 的下降斜度, 这辆汽车的刹车距离将变为多少?

2.8 两根弹簧的倔强系数分别为 k_1 和 k_2 。求证:

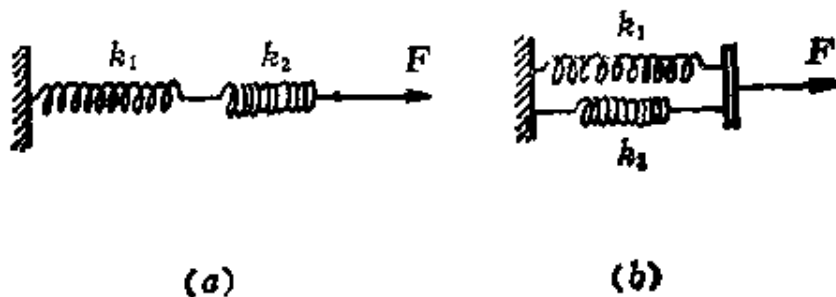


图 2.24

(1) 它们串联起来时(图 2.24a), 总的倔强系数 k 由下式给出

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

(2) 它们并联起来时(图 2.24b), 总的倔强系数 k 由下式给出

$$k = k_1 + k_2$$

2.9 在水平面上—辆汽车以速率 v 行驶, 当汽车与前面—堵墙相距为 d 时, 司机才发现自己必须制动或拐弯。设车辆与地面之间的静摩擦系数为 μ_s 。问若司机制动停车(不拐弯), 他需要的最小距离 d_1 为多大? 若他作 90° 拐弯(不制动)他需要的最小距离 d_2 又是多大? 哪种办法最安全? (图 2.25)。

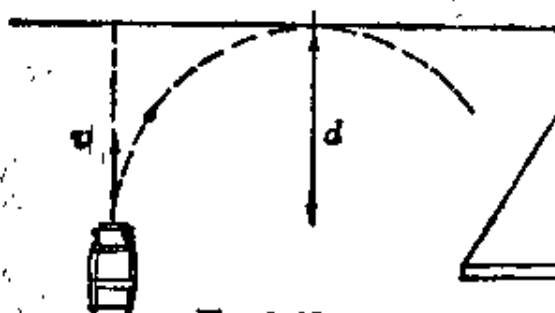


图 2.25

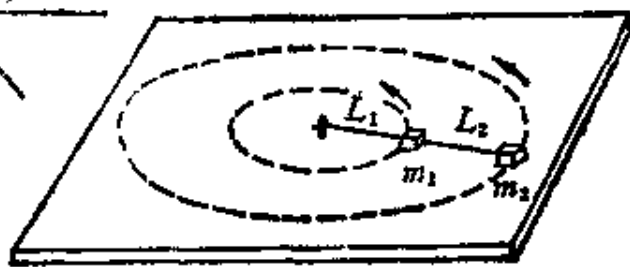


图 2.26

2.10 一个质量为 m_1 的物体拴在长为 L_1 的轻绳上。绳的另一端固定在一个水平光滑桌面的钉子上。另一物体质量为 m_2 , 用长为 L_2 的绳与 m_1 联接。二者均在桌面上做匀速圆周运动, 如图 2.26 所示。假设 m_1, m_2 的角速度为 ω , 求各段绳子上的张力。

2.11 如图 2.27 所示, 一小物体放在—绕竖直轴匀速转动的漏斗壁上, 漏斗每秒转 n 圈, 漏斗壁与水平面成 θ 角, 小物体和壁间的静摩擦系数为 μ_s , 小物体中心与轴的距离为 r 。为使小物体在漏斗壁上不动, 转速 n 应满足什么条件(以 r, θ, μ_s 等量表示)?

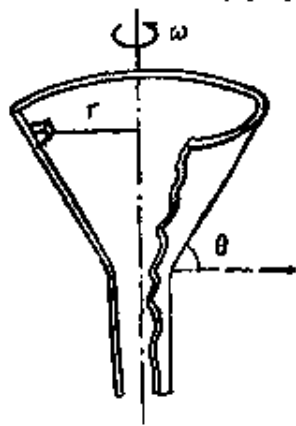


图 2.27



图 2.28

2.12 (1) 质量 $m=1200\text{ kg}$ 的汽车, 在一弯道上行驶, 速率 $v=25\text{ m/s}$ 。弯道的水平半径 $R=400\text{ m}$, 路面外高内低, 倾角 $\theta=6^\circ$, 如图 2.28 所示, 求作用于汽车上的水平法向力与摩擦力。

(2) 如果汽车轮与轨道之间的静摩擦系数为 $\mu_s=0.9$, 要保证汽车无侧向滑动, 汽车在此弯道上行驶的最大允许速率应是多大?

2.13 双星 PSR1 913+16 是两个绕共同圆心做圆周运动的中子星。转动周期为 7.75 h 。设两星的质量相等而轨道半径为 $8.67\times 10^8\text{ m}$, 求每个中子星的质量。和太阳相比如何?

2.14 设想一个三星系统: 三个质量都是 M 的星球沿同一个圆形轨道运行, 轨道半径为 R , 三星在轨道上等距离地配置。求此系统的运行周期。

2.15 一小石块沿一弯曲光滑轨道上由静止滑下 h 高度时 (图 2.29)。它的速率多大? (用牛顿第二定律积分求解)。

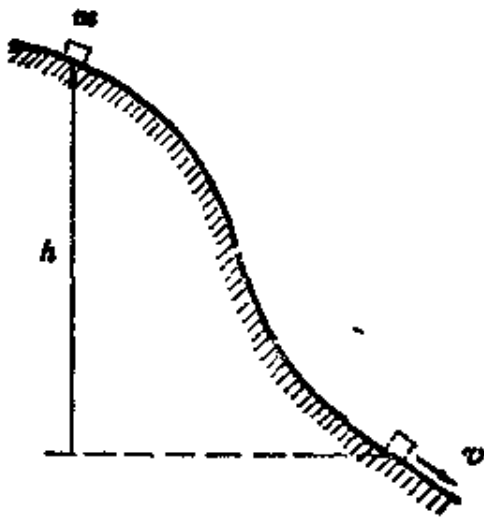


图 2.29

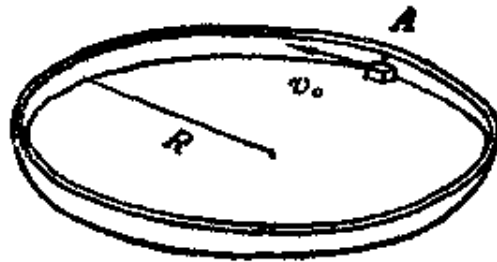


图 2.30

2.16 在与速率成正比的阻力影响下, 一个质点具有加速度 $a=-0.2v$ 。求需多长时间才能使质点的速率减少到原来速率的一半。

2.17 光滑的水平桌面上放置一固定的圆环带, 半径为 R 。一物体贴着环带内侧运动 (图 2.30)。物体与环带间的滑动摩擦系数为 μ_s 。设物体在某时刻经 A 点时速率为 v_0 。求此后 t 时刻物体的速率以及从 A 点开始所经过的路程。

2.18 直升飞机上升的螺旋桨由两个对称的叶片组成。每一叶片的质量 $m=136\text{ kg}$, 长 $l=3.66\text{ m}$ 。求当它的转速 $n=320\text{ rev/min}$ 时, 两个叶片根

部的张力。(设叶片是宽度一定厚度均匀的薄片)。

*2.19 在刹车时卡车有一恒定的减速度 $a=7.0 \text{ m/s}^2$ 。刹车一开始,原来停上面的一个箱子就开始滑动,它在卡车车厢上滑动了 $l=2\text{m}$ 后撞上了卡车的前帮。问此箱子撞上前帮时相对卡车的速率多大? 设箱子与车箱底板之间的滑动摩擦系数 $\mu_k=0.50$ 。

2.20 一种围绕地球运行的空间站的设计是一个环状密封圆筒,象一个充气的自行车胎,环的半径是 1.8km 。如果想在环内产生大小等于 g 的人造重力加速度,则环应绕它的轴以多大的角速度旋转? 这人造重力方向如何?

*2.21 一半径为 R 的金属光滑圆环可绕其竖直直径旋转。在环上套有一珠子,为图 2.31 所示。今逐渐增大圆环的转速 ω 。试求在不同转速下珠子能静止在环上的位置,以珠子所停处的半径与竖直直径的夹角 θ 表示。这些位置分别是稳定的,还是不稳定的? (珠子稍微偏离静止位置 $d\theta$ 时,如果能自动回到该静止位置,则该停止位置是稳定的,否则是不稳定的。这可由珠子偏离 $d\theta$ 时所受的沿环的切向的合力和 $d\theta$ 的方向相同或相反判断出来)。

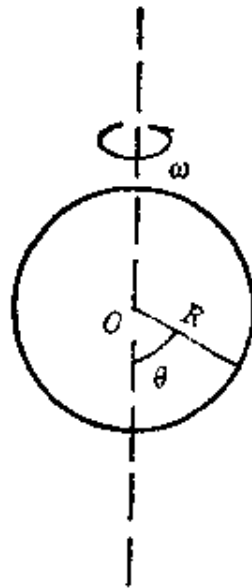
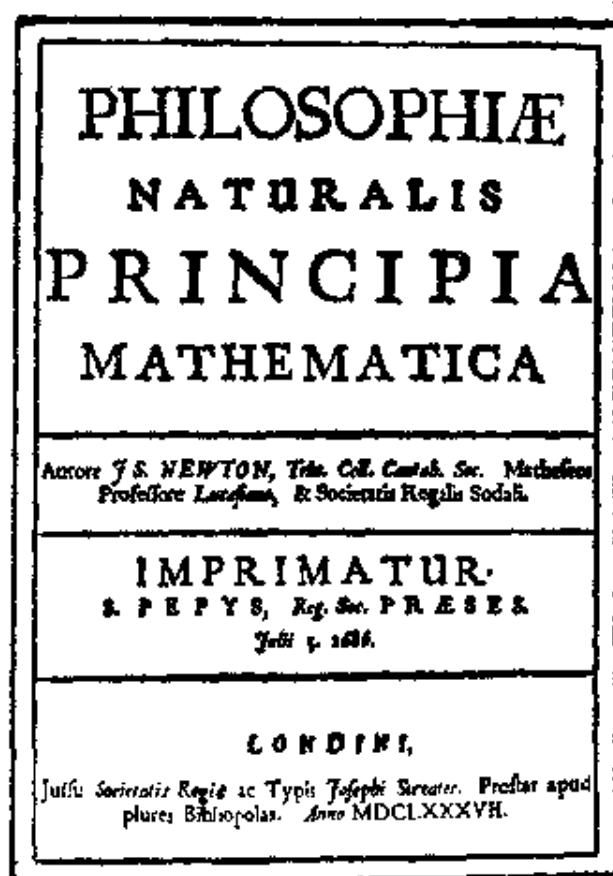


图 2.31

牛顿 (Isaac Newton, 1642—1727)



牛顿



《原理》一书的扉页

牛顿在伽里略逝世那年出生于英格兰林肯郡伍尔索普的一个农民家里。小时上学成绩一般，但爱制作机械模型，而且对问题爱追根究底。1661年18岁时考入剑桥大学“三一”学院。学习踏实认真，三年后被选为优等生，1665年毕业后留校研究。这年六月剑桥因瘟疫的威胁而停课，他回家乡一连住了二十个月。这二十

个月的清静生活使他对在校所研究的问题有了充分的思考时间，因而成了他一生中创造力最旺盛的时期。他一生中最重要的科学发现，如微积分，万有引力定律、光的色散等在这一时期都已基本上孕育成熟。在以后岁月里他的工作都是对这一时期研究工作的

发展、完善和介绍。

1667年牛顿回到剑桥，翌年获硕士学位。1669年开始当数学讲座教授，时年26岁。此后在力学方面的深入研究使他在1687年出版了伟大的科学著作《自然哲学的数学原理》，简称《原理》，在这部著作中：

他把伽里略提出、笛卡尔完善的惯性定律写下来做为第一运动定律；

他定义了质量、力和动量，提出了动量改变与外力的关系并把它做为第二运动定律；

他写下了作用和反作用的关系做为第三运动定律。这一定律是在研究碰撞规律的基础上建立的，而在他之前华里士，雷恩和惠更斯等人都仔细地研究过碰撞现象，实际上已发现了这一定律。

他还写下了力的独立作用原理，伽里略的相对性原理、动量守恒定律。

他还写下了他对空间和时间的理解，即所谓绝对空间和绝对时间的概念，等等。

牛顿三大运动定律总结提炼了当时已发现的地面上所有力学现象的规律。它们形成了经典力学的基础，在以后的二百多年里几乎统治了物理学的各个领域。对于热、光、电现象人们都企图用牛顿定律加以解释，而且在有些方面，如热的动力论，居然取得了惊人的成功。这种理论上的成功甚至导致机械自然观的建立，最后曾从思想上束缚过自然科学的发展。在实践上，牛顿定律至今仍是许多工程技术，例如机械、土建、动力等的理论基础，发挥着从

不衰退的作用。

在《原理》一书中，牛顿还继续了哥白尼、开普勒、伽里略等对行星运动的研究，在惠更斯的向心加速度概念和他自己的运动定律基础上得出了万有引力定律。实际上牛顿的同代人胡克、雷恩、哈雷等人也提出了万有引力定律(万有引力一词出自胡克)，但他们只限于说明行星的圆运动，而牛顿用自己发明的微积分还解释了开普勒的椭圆轨道，从而圆满地解决了行星的运动问题。牛顿(还有胡克)正确地提出了地球表面物体受的重力和地球月球之间以及太阳行星之间的引力具有相同的本质。这样，再加上他原来是把用于地球上的三条定律用于行星的运动而得出的正确结果，就宣告了天上地下的物体都遵循同一规律，彻底否定了亚里士多德以来人们认为的天上和地下不同的思想。这是人类对自然界认识的第一次大综合，是人类认识史上的一次重大的飞跃。

除了在力学上的巨大成就外，牛顿在光学方面也有很大的贡献。例如，他发现并研究了色散现象。为了避免透镜引起的色散现象，他设计制造了反射式望远镜(这种设计今天还用于大型天文望远镜的制造)，并为此在1672年被接受为伦敦皇家学会会员。1703年出版了《光学》一书，记载了他对光学的研究成果以及提出的问题。书中讨论了颜色、色光的反射和折射、虹的形成，现在称之为“牛顿环”的光学现象的定量的研究，光和物体的相互“转化”问题、冰洲石的双折射现象等。关于光的本性，他曾谈论过“光微粒”。但他也并非光的微粒说的坚持者，因为他也曾提到过“以太的振动”。

1689年和1701年他两次以剑桥大学代表的身份被选入议会。1696年被任命为皇家造币厂监督。1699年又被任命为造币厂厂长，同年被选为巴黎科学院院士。1703年起他被连选连任皇家学会会长直到逝世。由于他在科学研究和币制改革上的功绩，

1705年被女王授于爵士爵位。他终生未婚，晚年由侄女照顾。1727年3月20日病逝，享年85岁。在他一生的后二、三十年里，他转而研究神学，在科学上几乎没有什么贡献。

牛顿对他自己所以能在科学上有突出的成就以及这些成就的历史地位有清醒的认识。他曾说过：“如果说我比多数人看得远一些的话，那是因为我站在巨人们的肩上。”在临终时，他还留下了这样的遗言：“我不知道世人将如何看我，但是，就我自己看来，我好象不过是一个在海滨玩耍的小孩，不时地为找到一个比通常更光滑的卵石或更好看的贝壳而感到高兴，但是，有待探索的真理的海洋正展现在我的面前”。

A. 基本粒子

A.1 粒子的发现与特征

物质是由不可分割的基本微粒组成的。这种思想可以追溯到古代希腊,当时德谟克利特(公元前460—370)就认为物质都是由“原子”(古希腊语本意就是“不可分”)组成的。但是物质是由原子组成的这一概念成为科学认识是迟到十九世纪才确定的,当时认识到原子是化学反应所涉及的物质的最小基本单元。1897年,汤姆逊发现了电子,它带有负电,电量与一个氢离子所带的电量相等。它的质量大约是氢原子质量的 $1/1800$,它存在于各种物质中,这是人类发现的第一个更为基本的粒子。其后1911年卢瑟福实验证实原子是由电子和原子核组成的。1932年又确认了原子核是由带正电的质子(即氢原子核)和不带电的中子(它和质子的质量差不多相等)组成的。这种中子和质子也成了“基本粒子”。1932年还发现了正电子,其质量和电子相同但带有等量的正电荷。由于很难说它是由电子、质子或中子构成的,于是正电子也加入了“基本粒子”的行列。之后,人们制造了大能量的加速器来加速电子或质子,企图用这些高能量的粒子作为炮弹轰开中子或其它的质子来理解其内部结构,从而确认它们是否是“真正的”“基本粒子”。但是,令人惊奇的是在高能粒子轰击下,中子或质子不但不碎成更小的碎片,而且在剧烈的碰撞过程中还产生许多新的粒子,有些粒子的质量比质子的质量还要大(多余的质量由入射粒子的动质量转

化而来)因而显得更为复杂。近年来通过这样的实验(以及从宇宙射线中)已经发现了三百多种不同的粒子。它们的质量大小不同,性质互异,且能相互转化。这就很难说这种粒子比那种粒子更基本。所以现在就把“基本”二字取消,统称它们为**粒子**。本篇的题目仍用“基本粒子”,只具有习惯上的意义。

在粒子的研究中,发现描述粒子特征所需的物理量随着人们对粒子的性质的认识逐步深入而增多。常见的这种物理量可以举出以下几个。

1. **质量**——粒子的质量是指它的静止质量,在粒子物理学中常用 MeV(百万电子伏特)做单位。这是一个能量单位, $1\text{MeV}=1.602\times 10^{-13}\text{J}$ 。由爱因斯坦质能公式 $E=mc^2$ 可以求得,以 kg 为单位,与 1MeV 相当的质量是

$$1.602\times 10^{-13}/(3\times 10^8)^2=1.78\times 10^{-30}\text{ kg}$$

2. **电荷**——粒子所带的电荷都是量子化的,都是质子电荷的倍数。因而粒子电荷就用质子电荷 e 作单位

$$1e=1.602\times 10^{-19}\text{ C}$$

3. **自旋**——每个粒子都有自旋运动,好象永不停息地旋转着的陀螺那样。它们的自旋角动量(简称自旋)也是量子化的,通常用 \hbar 作单位

$$1\hbar=1.05\times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$$

4. **寿命**——在已发现的数百粒子中,除电子、质子和中微子以外,实验上确认它们都是不稳定的。它们都要在或长或短的时间内衰变为其它的粒子,粒子在衰变前平均存在的时间叫做粒子的寿命。例如一个自由中子的寿命约 15 分钟,有的粒子的寿命为 10^{-10} 秒或 10^{-14} 秒,很多粒子的寿命仅为 10^{-23} 秒甚至 10^{-26} 秒。

对各种粒子的研究比较发现,它们都是**配成对的**。配成对的粒子称为正、反粒子。正、反粒子的一部分性质完全相同,另一部

分性质完全相反。例如：电子和正电子就是一对正、反粒子，它们的质量和自旋完全相同，但它们的电荷和磁矩完全相反。又例如中子和反中子也是一对正、反粒子，它们的质量、自旋、寿命完全相同，但它们的磁矩完全相反。有些正、反粒子的所有性质完全相同，因此就是同一种粒子。光子和 π^0 介子就是两种这样的粒子。

A.2 各类粒子

粒子间的相互作用，一般地说，有四种基本的形式。即万有引力，电磁力，强相互作用力和弱相互作用力(参看本章 §2.4)。实际上，在现今研究的粒子现象中，万有引力总是可以忽略不计的。按现代理论，各种相互作用都分别由不同的粒子做为传递的媒介。光子是传递电磁作用的媒介。 W^+ 、 W^- 、 Z^0 中间玻色子是传递弱相互作用的媒介。胶子是传递强相互作用的媒介。这些都已被实验所证实。由于光子、中间玻色子和胶子都是现代“规范理论”中预言的粒子，所以这些粒子统称为规范粒子。它们的已被实验证实的特征物理量如表 A.1 所示

表 A.1 规范粒子

粒子种类		自旋(\hbar)	质量(MeV)	电荷(e)
光子	γ	1	0	0
中间玻色子	W^+	1	0.1×10^6	1
	W^-	1	8.1×10^4	-1
	Z^0	1	9.4×10^4	0
胶子	g	1	0	0

除规范粒子外，所有在实验中已发现的粒子可以按照其是否参与强相互作用而分为两大类：一类不参与强相互作用的称为轻

子；另一类参与强相互作用的称为**强子**。

现在已发现的轻子共三代，六种，它们分别用下面的符号表示

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

它们分别称作**电子**(e)， **μ 子**(μ)， **τ 子**(τ)及相应的**中微子**(ν_e, ν_μ, ν_τ)。它们的特征物理量如表 A.2 所示。在目前实验误差范围内，三种中微子的质量为零。但是由于这些实验还不很精确，中微子的质量是否等于零，还有待于更精确的实验证实。

表 A.2 轻 子

粒子种类	自旋(\hbar)	质量(MeV)	电荷(e)
e	1/2	0.511	-1
ν_e	1/2	0	0
μ	1/2	1.0×10^3	-1
ν_μ	1/2	0	0
τ	1/2	1.78×10^3	-1
ν_τ	1/2	0	0

从表 A.2 中可以看出 τ 子的质量是电子质量的 3600 倍，差不多是质子质量的两倍。它实际上一点也不轻。这六种“轻子”都有自己的反粒子，所以实际上有十二种轻子。 μ 子和中微子虽然不是一般原子的组成部分，但在自然界中是大量存在的。宇宙射线在大气高层能产生大量的 μ 子和中微子，这些粒子就作为次级宇宙射线射向地球表面。太阳内部的核反应也产生大量的中微子，这些中微子也射向地球，并能穿过整个地球。天然的 μ 子和中微子的射线都能穿过人体，但由于剂量很小，对人体并无伤害。

实验上已发现的成百种粒子绝大部分是强子。强子又可按其自旋的不同分为两大类：一类自旋为半整数，统称为**费米子**；另一类

自旋为整数或零,统称为**介子**。最早发现的**重子**是**质子**,最早发现的**介子**是 **π 介子**。 π 介子的质量是电子质量的270倍,是质子质量的 $1/7$,介于二者之间。后来实验上又发现了许多介子,其质量大于质子的质量甚至超过10倍。这样,早年提出的名词:“**重子**”、“**轻子**”和“**介子**”等已经不合适,但由于习惯,仍然一直沿用到今天。表A.3列出了一些强子的特征物理量。

表A.3 一些强子

重子				介子			
粒子种类	自旋(\hbar)	质量(MeV)	电荷(e)	粒子种类	自旋(\hbar)	质量(MeV)	电荷(e)
P	1/2	939	1	π^+	0	140	1
n	1/2	939	0	π^0	0	140	0
N	3/2	1520	1	π^-	0	140	-1
N	5/2	1680	1	ω	1	783	0
Δ^{++}	3/2	1700	2	ω	3	1670	0
Δ^+	3/2	1700	1	η	4	2030	0
Δ^0	3/2	1700	0	J/ψ	1	3100	0
Δ^-	3/2	1700	-1	ρ	2	3555	0
Λ	7/2	2100	0	K^+	0	494	1
Λ	9/2	2350	0	K^0	0	498	0
Σ^+	1/2	1193	1	K^-	0	494	-1
Σ^0	1/2	1193	0	D^+	0	1869	1
Σ^-	1/2	1193	-1	D^0	0	1865	0
Ω^-	3/2	1672	-1	D^-	0	1869	-1

A.3 粒子的转化与守恒定律

研究各种粒子的行为时,发现的另一个重要事实是:没有一种粒子是不生不灭、永恒不变的。在一定的条件下都能产生和消灭,都能相互转化,毫无例外。例如,电子遇上正电子,就会双双消失而转化为光子。反过来高能光子在原子核的库仑场中又能转化为

一对电子和正电子。在缺中子同位素中，质子会转化为中子而放出一个正电子和一个中微子。质子遇上反质子就会相互消灭而转化为许多介子。 π 介子和原子核相互碰撞，只要能量足够高，就能转化为一对质子和反质子。前面所提到的粒子衰变也是一种粒子转化的方式。因此，产生和消灭是粒子相互作用过程中非常普遍的现象。

实验证明，在粒子的产生和消灭的各种反应过程中，有一些物理量是保持不变的。这些守恒量有：能量、动量、角动量、电荷，还有轻子数、重子数、同位旋、奇异数等。例如对于中子衰变为质子的下述 β 衰变反应中



所涉及的粒子，中子 n 和反中微子 $\bar{\nu}$ 的电荷都是零，质子 p 的电荷为1，电子 e 的电荷为-1，显然衰变前后电荷(的代数和)是守恒的。又 n 和 p 的重子数都是1，轻子数都是零。 e 和 $\bar{\nu}$ 的重子数都是零，前者的轻子数为1，后者的轻子数为-1。也很容易看出这一衰变的前后的重子数和轻子数也都是守恒的。同位旋和奇异数的概念比较抽象，此处难以介绍。但可以指出的是它们有的只有在强相互作用引起的反应(这种反应一般较快)中才守恒，而在弱相互作用或电磁相互作用引起的反应(这种反应一般较慢)中不一定守恒。它们不是绝对的守恒量。

A.4 夸克

强子种类这样多，很难想象它们都是“基本的”。它们很可能都有内部结构。前面已讲过，利用高能粒子撞击质子使之破碎的方法考查质子的结构是不成功的。但有些精确的实验还是给出了一些质子结构的信息。1955年，霍夫斯塔特曾用高能电子束测出

了质子和中子的电荷和磁矩分布，这就显示了它们有内部结构。1968年，在斯坦福直线加速器实验室中用能量很大的电子轰击质子时，发现有时电子发生大角度的散射，这显示质子中有某些硬核的存在。这正象当年卢瑟福在实验中发现原子核的结构一样，质子或其他强子似乎都由一些更小的颗粒组成。与此相反，电子或轻子似乎无任何内部结构可言。在最近的一些实验中曾用能量非常高的粒子束探测电子，这些粒子曾接近到离电子中心 10^{-18}m 以内，也未发现电子有任何内部结构，轻子似乎是不可分了(\dagger)。

实际上在用实验探求质子的内部结构的同时，物理学家已经尝试提出了强子由一些更基本的粒子组成的模型。这些理论中最成功的是1964年盖尔曼和茨威格提出的，他们认为所有的强子都由更小的粒子叫做“夸克”(在中国有人叫做“层子”)所组成。将强子按其性质分类，发现强子形成一组一组的三重态，就象化学元素可以按照周期表形成一族一族一样。从这种规律性质可以推断：现在实验上发现的强子都是由三代、六种夸克以及相应的反夸克组成的。这三代、六种夸克分别用下列符号表示

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

它们分别叫做上夸克 u ，下夸克 d ，粲夸克 c ，奇异夸克 s ，顶夸克 t ，底夸克 b 。它们的特征物理量如表 A.4 所示。值得注意的是它们的自旋都是 $1/2$ ，而电荷量是基本电荷 e 的 $-1/3$ 或 $2/3$ 。

在强子中，重子都由三个夸克组成，而介子则由一个夸克和一个反夸克组成。例如，质子由两个 u 夸克和一个 d 夸克组成，中子由两个 d 夸克和一个 u 夸克组成， Σ^+ 粒子由两个 u 夸克和一个奇异夸克组成；而 π^+ 介子由一个 u 夸克和一个反 d 夸克组成， k^+ 介子由一个 u 夸克和一个反 s 夸克组成， J/ψ 粒子由正、反粲夸克 (c, \bar{c}) 组成，等等。

表 A.4 夸克

夸克种类	自旋(\hbar)	质量(MeV)	电荷(e)
d	1/2	9	-1/3
u	1/2	5	2/3
s	1/2	1.75×10^2	-1/3
c	1/2	1.25×10^3	2/3
b	1/2	4.50×10^3	-1/3
t	1/2	$\sim 3 \times 10^4 \sim 5 \times 10^4$	2/3

如果引进“夸克数”这个量子数，并令正夸克的夸克数为+1，反夸克的夸克数为-1，则可发现一个非常有趣的规律，即所有强子和原子核的夸克数均为3的倍数。如介子的夸克数为 0×3 ，重子的夸克数为 1×3 ，反重子的夸克数为 -1×3 ，氦核的夸克数为 2×3 ，氧核的夸克数为 4×3 ，金核的夸克数为 197×3 等等。

关于夸克的大小，现有实验证明它们的大小和轻子一样，其半径估计都小于 $10^{-20}m$ 。我们知道核或强子的大小比原子或分子的大小小五个数量级，即 $10^{-16}m$ 。因此，夸克或轻子的大小比强子还要小五个数量级。

A.5 色

自从夸克模型提出后，人们就曾用各种实验方法，特别是利用它们具有分数电荷的特征来寻找单个夸克，但至今这类实验都没有成功。好象夸克是被永久囚禁在强子中似的(因此之故，表A.4给出的夸克的质量都是根据强子的质量值用理论估计的处于束缚状态的夸克的质量值)。这说明在强子内部，夸克之间存在着非常强的相互吸引力。这种相互作用力叫做“色”力。

对于强子内部夸克状态的研究，使理论物理学家必须设想每

一种夸克都可能三种不同的状态。由于原色有红、绿、蓝三种，所以将“色”字借用过来，说每种夸克都可以有三种“色”，例如：红夸克，绿夸克，蓝夸克。“色”这种性质也是隐藏在强子内部的，所有强子都是“无色”的，因而必须认为每个强子都是由三种颜色的夸克等量地组成的。例如组成质子的三个夸克中，就是一个是红的，一个是绿的，一个是蓝的。色在夸克的相互作用的理论中起着十分重要的作用。夸克之间的吸引力随着它们之间的距离的增大而增大，距离增大到强子的大小时，这吸引力就非常大，以致不能把两个夸克分开。这就是目前对夸克囚禁现象的解释。这种相互作用力就是色力，即两个有色粒子之间的作用力。它是强相互作用力的基本形式。如果说万有引力起源于质量，电磁力起源于电荷，那么强相互作用力就起源于色。理论指出，色力是由被称为胶子的粒子做为传递媒介的。

按以上的说法，三代，六种夸克，加上它们的反粒子，再加上它们都可以有三种色，这样就共有 36 种不同状态的夸克。似乎还不止这么多，有些新理论已经提出可能有更多的夸克。为什么有这么多种夸克和轻子？它们之间相互作用的基本规律是什么？它们有没有内部结构？有没有真正的“基本粒子”？……还有许许多多的问题摆在粒子科学家的面前有待研究、发现、解决。

A.6 粒子研究与技术

最后说一下粒子研究与实验技术的关系。对粒子研究的进展是和粒子加速技术、探测技术以及实验数据的获取和处理技术的迅速进展分不开的。在欧洲核子研究中心(CERN)已经建成的质子、反质子对撞机(在这种装置中，两个反向运动的高能粒子对撞比用一个高能粒子去轰击静止的靶粒子可以实现更剧烈的碰撞)

的质心能量已经高达 $2 \times 270 \text{ GeV}$ ($1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV}$)。这个对撞机中粒子在其中运行的超高真空环形管道的周长达 2.7 千米。在这样的管道中质子和反质子在碰撞前要飞行超过冥王星轨道的直径那样长的路程而不丢失。发现 W^+ 、 W^- 和 Z^0 中间色子的两个实验中的一个实验所用的探测器重达 2000 吨。这样高能量的质子和反质子相碰撞平均产生几十个粒子，它们的径迹和动量都要标准测量。在一亿次碰撞过程中才能产生一个实验中观察到的 W^+ 和 W^- 粒子的事例。在十亿次碰撞过程中，才能产生一个实验中观察到的 Z^0 的粒子事例。这不仅需要非常灵敏和精确的探测技术，也需要非常强大和快速的数据获取和处理能力。没有自动控制、电子学、计算技术等等一系列非常高、精、尖技术的支持，就不可能有今天的对粒子的认识。在许多情况下，工业所能提供的最高水平的技术还不足以满足粒子物理实验的要求，这又反过来对工业技术起促进作用。

我国从 1984 年 10 月开始建造北京正负电子对撞机 (BEPC)，设计能量为 $2 \times 2.8 \text{ GeV}$ 。该设备于 1988 年 10 月建成并一次对撞成功，正、负电子的能量分别为 1.6 GeV 。BEPC 由四个部分组成，即注入器，束流输运线和储存环，探测器和同步辐射实验区 (图 A. 1)。注入器是一台电子直线加速器。正、负电子在这里被加速到 $1.1\text{--}1.4 \text{ MeV}$ 。正负电子束经输运线的两支分别沿相反方向注入储存环。储存环是由偏转磁铁、聚焦磁铁、高频腔、超高真空系统等组成的一个周长约 240m 的环。在环内正负电子由高频腔供给能量而被加速到高于 1 GeV 。正负电子束流在储存环内绕行可具有 5—6h 的寿命。探测器安装在碰撞点附近。它能记录、分析碰撞时产生的粒子的种类、数目、飞行时间、动量、能量等数据，探测立体角接近 4π 。同步辐射是电子在储存环中做曲线运动时沿切线方向向前发出的电磁波。BEPC 的同步辐射在紫外和软

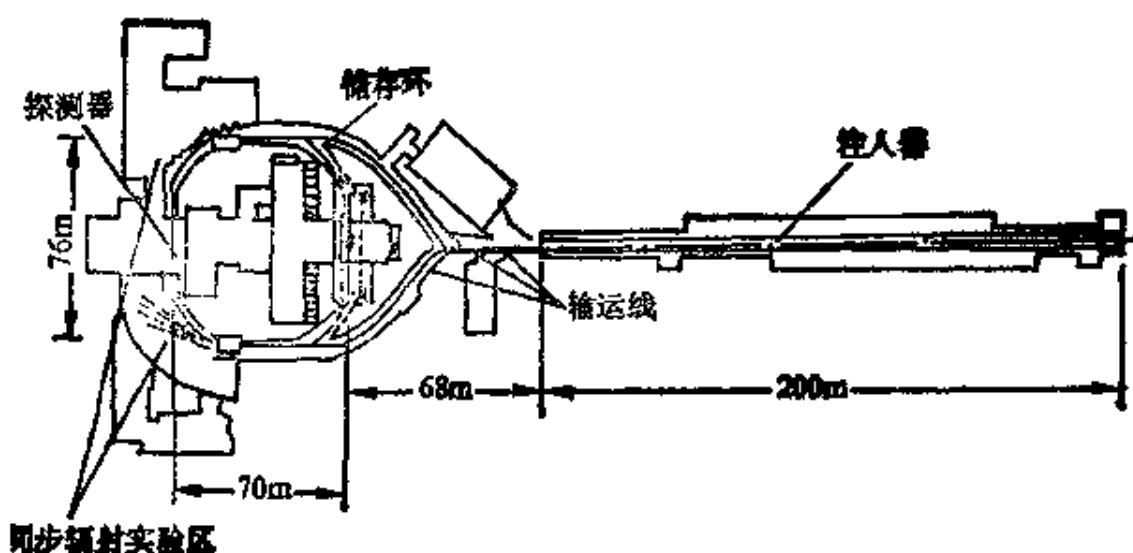


图 A.1 BEPC 的总体布局

X光范围,可用于生物物理,固体物理,表面物理,计量标准,光刻和医学等方面。

目前,在国外的高能加速器最大的有美国的 1000GeV 的质子加速器,其环道周长 6km 。欧洲核子研究中心正在建造周长 27km 、能量为 $2 \times 50\text{GeV}$ 的正负电子对撞机。苏联正在建造能量为 3000GeV 的质子加速器,美国也已开工建造超导质子对撞机,其中正、反质子对撞能量可达 $2 \times 20000\text{GeV}$,环道周长 86km 。我们期望这些高能加速器的顺利建成,并利用它们有更多的发现,从而使人们对自然界的认识更加深入一步。

第三章 动量与角动量

本章要求

1. 在中学学习的基础上,进一步掌握动量和冲量的概念及动量定理,特别是它们的矢量性。
2. 进一步掌握动量守恒定律,特别是二维问题。
3. 理解质心的概念及质心运动定理。
4. 理解质点的角动量的意义,特别是所涉及的矢量关系。
5. 理解质点的角动量守恒定律,并能用它解决简单的实际问题。

§ 3.1 冲量与动量定理

力作用到质点上,可以使质点的动量或速度发生变化。牛顿第二定律[(2.2)式或(2.3)式]给出了力和它的作用效果的定量关系,这一关系是瞬时关系,即它给出了力在任意时刻的作用效果(指动量或速度的变化率)和该时刻的力的关系。在很多实际情况下,我们需要考虑力按时间累积的效果。这一效果可以直接地由牛顿第二定律得出。为此可以把牛顿第二定律写成微分形式,即

$$F dt = dp \quad (3.1)$$

式中乘积 $F dt$ 就表示力在时间 dt 内的累积量,叫做在 dt 时间内质点所受合外力的冲量。此式表明在 dt 时间内质点所受合外力的冲量等于在同一时间内质点的动量的增量。这一关系叫做动量

定理的微分形式。实际上它是牛顿第二定律的变形。

如果将(3.1)式对 t_1 到 t_2 这段有限时间积分,即考虑力在某段有限时间内的累积效果,则有

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 \quad (3.2)$$

左侧积分表示在 t_1 到 t_2 这段时间内合外力的冲量。以 I 表示此冲量,即

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

则上式可写成

$$I = p_2 - p_1 \quad (3.3)$$

(3.2)式或(3.3)式是动量定理的积分形式,它表明质点在 t_1 到 t_2 这段时间内所受的合外力的冲量等于质点在同一时间内的动量的增量。后者是效果,它取决于力在这段时间内的累积。值得注意的是,要产生同样的效果,即同样的动量增量,力大力小都可以:力大时间短些;力小时间长些。只要力的时间累积即冲量一样,就产生同样的动量增量。

动量定理常用于碰撞过程。碰撞一般泛指物体间相互作用时间很短的过程。在这一过程中,相互作用力往往很大而且随时间改变。这种力通常叫冲力。例如一个重 0.58 千克的篮球从 2 米的高度竖直下落撞到试验台面上时,仪器显示它对台面的冲力(也等于台面对它的冲力)如图 3.1 所示。它与台面的接触时间不过 0.019 秒,而冲力的峰值 (F_m) 则可达到 575 牛顿,这要比篮球自身的重力(5.7 牛顿)大一百倍。

因为冲力很大,所以由于碰撞而引起的质点的动量的改变基本上就由冲力在整个碰撞过程中的冲量来决定。为了对冲力的大小有个估计,通常引入平均冲力的概念。它是冲力对碰撞时间的

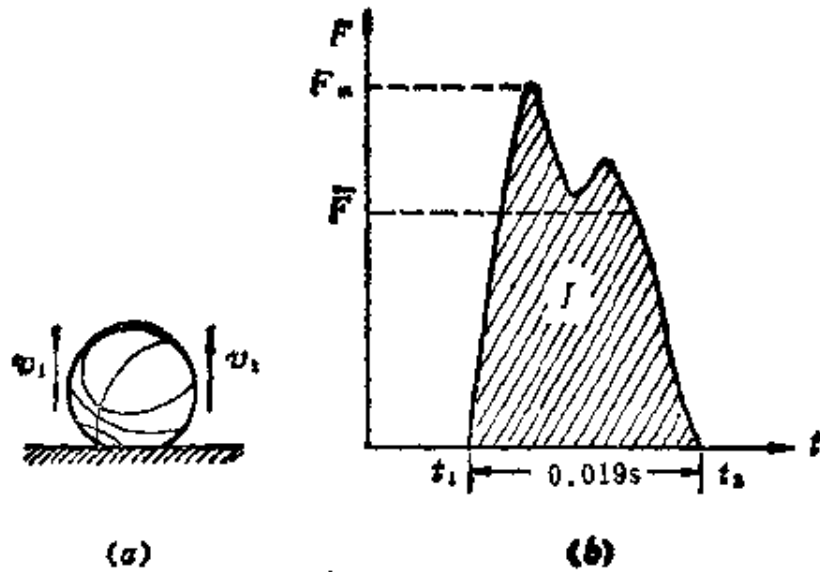


图 3.1 篮球撞击台面的冲力

(a) 撞击过程图示

(b) 冲力与时间的关系

平均。以 \bar{F} 表示平均冲力, 则

$$\bar{F} = \int_{t_1}^{t_2} F dt / (t_2 - t_1) \quad (3.4)$$

结合(3.2)式, 可得

$$\bar{F} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} \quad (3.5)$$

应当指出的是, 上述动量定理的表达式(3.1)式或(3.2)式都是矢量公式, 它们表明合外力的冲量的方向应和受力质点的动量的增量的方向一致, 而并不一定和质点的初动量或末动量的方向相同。此外由于它们是矢量式, 所以在应用动量定理时可以直接用作图法, 按几何关系求解; 也可以用沿坐标轴的分量式求解。例如在直角坐标系中, 沿各坐标轴的分量式就是

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = p_{x2} - p_{x1} \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = p_{y2} - p_{y1} \\ I_z &= \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = p_{z2} - p_{z1} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

这些公式说明，质点所受外力的冲量在某一方向上的分量，等于质点的动量在该方向的分量的增量。

[例1] 一个质量 $m=60\text{g}$ 的网球以 $v=40\text{m/s}$ 的速率被垂直地抛向墙面，如图 3.2 所示。其后它以相同的速率沿相反的方向被弹回来。求小球对墙的平均的撞击力。设小球和墙的接触时间 $\Delta t=0.1\text{s}$ 。

解：选如图的坐标。设小球碰撞前后的速度为 v_1 和 v_2 ，墙对小球的平均撞击力为 F_x 。用(3.5)式的分量式有

$$F_x = \frac{p_{x2} - p_{x1}}{\Delta t} = \frac{mv_{x2} - mv_{x1}}{\Delta t}$$

由于 $v_{x1} = -v$ $v_{x2} = v$ (其中 $v = v_1 = v_2$)

$$\text{所以 } F_x = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2 \times 0.06 \times 40}{0.1} = 48\text{N}$$

根据牛顿第三定律，球对墙的撞击力 $F'_x = -F_x$ ，所以

$$F'_x = -48\text{N}$$

负号的意义是指小球对墙的撞击力与所选的坐标的正方向相反，即垂直指向墙内。

[例2] 逆风行舟 “好船家会使八面风”。有经验的水手能够利用风力逆风前进。试解释其中的道理。

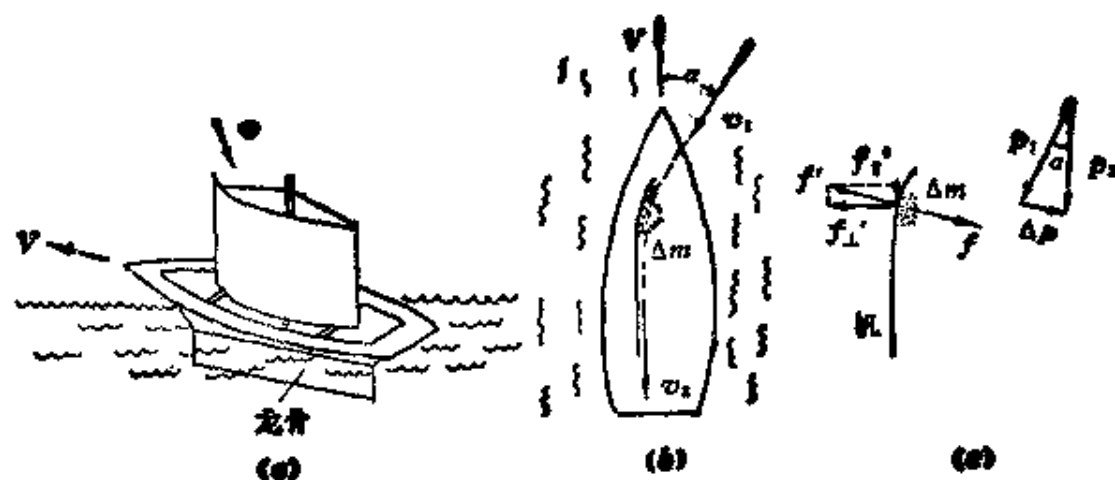


图 3.3

解：我们可以用动量定理来解释这一现象。如图(3.3)所示，以 V 表示船的中心线方向，也就是它的航向。设风沿与航向成 α 角的方向从右前方

吹来。为了说明船受到了风的推进力,我们先以风中一小块沿帆面吹过的空气为研究对象。以 Δm 表示这块空气的质量,以 v_1 和 v_2 分别表示它吹向帆面和离开帆面时的速度,如图 3.3 (b)。近似地说。由于帆面比较光滑,风速的大小基本不变,即 $v_1 = v_2$, 而且沿帆面掠过。但由于 Δm 的速度方向即动量方向改变了,所以它一定是受到了帆的作用力。根据动量定理, Δm 的动量增量 Δp 与帆对 Δm 的作用力 f 的方向如图 3.3 (c) 所示。注意,由于 $p_1 = p_2$, 此冲力 f 的方向是偏向船的后方的。根据牛顿第三定律, Δm 必然同时对帆有一个反作用力 f' 。此力的方向偏向船前进的方向。将 f' 分解为两个量,其垂直于船体的分量 f'_1 与水对船的龙骨的阻力相平衡,而与船的航向平行的分量 f'_2 就是推动帆及整个船体前进的作用力。

这个例子突出显示了动量定理的矢量性。

§ 3.2 质点系的动量

由有相互作用的若干个质点组成的系统,一般简称质点系。系统内各质点间的相互作用力称为内力。系统以外的其它物体对系统内任意一质点的作用力称为外力。例如,把地球与月球看作一个系统,则它们之间的相互作用力称为内力,而系统外的物体如太阳以及其它行星对地球或月球的引力都是外力。

把牛顿定律(或动量定理)应用于质点系中的每一个质点,就可以得到用于整个系统的牛顿定律(或动量定理)。

我们先讨论由两个质点组成的质点系统。设这两个质点的质量分别为 m_1 、 m_2 。它们除分别受到相互作用力(内力) f 和 f' 外,还受到系统外其它物体的作用力(外力) F_1 、 F_2 , 如图 3.4 所示。分别对两质点写出牛顿第二定律公式,得

$$F_1 + f = \frac{dp_1}{dt}, \quad F_2 + f' = \frac{dp_2}{dt}$$

将这二式相加,可以得

$$F_1 + F_2 + f + f' = \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt}$$

由于系统内力是一对作用力和反作用力, 根据牛顿第三定律, $f = -f'$, 或 $f + f' = 0$, 因此上式给出



图 3.4 两个质点的系统

$$F_1 + F_2 = \frac{d}{dt}(P_1 + P_2)$$

如果系统包含两个以上的质点, 可仿照上述步骤对各个质点写出牛顿定律公式, 再相加。由于系统的各个内力总是以作用力和反作用力的形式成对出现的, 所以它们的矢量总和等于零。因此, 又可得到

$$\sum_i F_i = \frac{d}{dt} \sum_i P_i$$

其中 $\sum_i F_i$ 为系统受的合外力, $\sum_i P_i$ 为系统的总动量。以 F 和 P 分别表示此合外力和总动量, 则上式可写成

$$F = \frac{dP}{dt} \quad (3.7)$$

这就是用于质点系的牛顿第二定律公式。它表明, 系统的总动量随时间的变化率等于该系统所受的合外力。内力能使系统内各质点的动量发生变化, 但它们对系统的总动量没有影响。

把(3.7)式写成微分的形式, 就有

$$F dt = dP \quad (3.8)$$

这就是质点系的动量定理, 它表明系统所受的合外力的冲量等于系统总动量的增量。

[例] 一辆装煤车以 $v=3 \text{ m/s}$ 的速率从煤斗下面通过(图 3.5)。每秒钟落入车厢的煤为 $\Delta m=500 \text{ kg}$ 。如果使车厢的速率保持不变, 应用多大的

牵引力拉车厢？（车厢与钢轨间的摩擦忽略不计）。

解：以 m 表示在时刻 t 煤车和已经落进煤车的煤的总质量。在此后 dt 时间内又有质量为 dm 的煤落入车厢。取 m 和 dm 为研究的系统（质点系），则这一系统在时刻 t 的水平总动量为

$$mv + dm \cdot 0 = mv$$

在时刻 $t + dt$ 的水平总动量为

$$mv + dm \cdot v = (m + dm)v$$

在 dt 时间内水平总动量的增量为

$$dP = (m + dm)v - mv = dm \cdot v$$

此系统所受的水平外力为牵引力 F ，由动量定理，

$$Fdt = dP = dm \cdot v$$

由此得

$$F = \frac{dm}{dt}v$$

将 $dm/dt = 5000 \text{ kg/s}$ 和 $v = 3 \text{ m/s}$ 代入得

$$F = 5000 \times 3 = 1.5 \times 10^4 \text{ N}$$

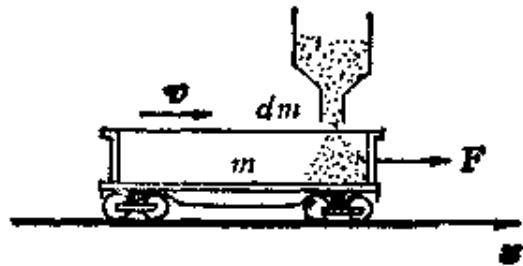


图 3.5

§3.3 动量守恒定律

如果质点系所受的合外力为零，即 $F = 0$ ，则由 (3.7) 式可得：

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

则有 $P = \text{常矢量}$

亦即 $\sum_i p_i = \sum_i m_i v_i = \text{常矢量} \quad (3.9)$

这就是说当一个质点系所受的合外力为零时，这一质点系的总动量就保持不变。这一结论叫做动量守恒定律。

应用动量守恒定律分析解决问题时，应该注意以下几点：

1. 系统动量守恒的条件是合外力为零，即 $F = 0$ 。但在外力

比内力小得多的情况下,外力对质点系的总动量变化影响甚小。这时可以认为近似满足守恒条件,也就可以近似地应用动量守恒定律。例如两物体的碰撞过程,由于相互撞击的内力往往很大,所以此时即使有摩擦或重力等外力,也常可忽略它们,而认为系统的总动量守恒。又如爆炸过程也属于内力远大于外力的过程,也可以认为在此过程中系统的总动量守恒。

2. 动量守恒表示式(3.9)式是矢量关系式。在实际问题中,常应用其沿坐标轴的分量式:

$$\begin{aligned} \text{当 } F_x=0 \text{ 时, } \sum_i m_i v_{ix} &= P_x = \text{常量}; \\ \text{当 } F_y=0 \text{ 时, } \sum_i m_i v_{iy} &= P_y = \text{常量}; \\ \text{当 } F_z=0 \text{ 时, } \sum_i m_i v_{iz} &= P_z = \text{常量}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

由此可见,如果质点系沿某坐标方向所受的合外力为零,则沿此坐标方向的总动量的分量守恒。例如:一个物体在空中爆炸后碎裂成几块,在忽略空气阻力的情况下,这些碎块受到的外力只有竖直向下的重力,因此它们的总动量在水平方向的分量是守恒的。

3. 由于我们是用牛顿定律导出动量守恒定律的,所以它只适用于惯性系。

在上面我们从牛顿定律出发导出了以(3.9)式表示的动量守恒定律。应该指出,更普遍的动量守恒定律并不依靠牛顿定律。动量概念不仅适用于以速度 v 运动的质点或粒子,而且也适用于电磁场,只是对于后者,其动量不再能用 $m\mathbf{v}$ 这样的形式表示。考虑包括电磁场在内的系统发生的过程时,其总动量必须也把电磁场的动量计算在内。不但对可以用作用力和反作用力描述其相互作用的质点系所发生的过程,动量守恒定律成立,而且对其内部的相互作用不能用力学的概念描述的系统所发生的过程,如光子和电子

的碰撞,光子转化为电子,电子转化为光子等等过程,只要系统不受外界影响,它们的动量都是守恒的,动量守恒定律实际上是关于自然界的一切过程的一条最基本的定律。

[例 1] 冲击摆。如图 3.6 所示,一质量为 M 的物体被静止悬挂着。今有一质量为 m 的子弹沿水平方向以速度 v 射中物体并停留在其中。求子弹刚停在物体内部时物体的速度。

解: 由于子弹射入物体到停在其中所经历的时间很短,所以在此过程中物体基本上未动而停在原来的平衡位置。于是对子弹和物体这一系统,在子弹射入这一短暂过程中,它们所受的水平方向的外力为零,因此水平方向的动量守恒。设子弹刚停在物体中时物体的速度为 V ,则有

$$mv = (m + M)V$$

由此得

$$V = \frac{m}{m + M}v$$

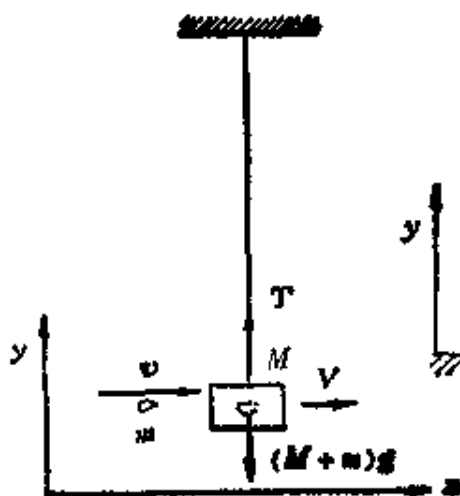


图 3.6

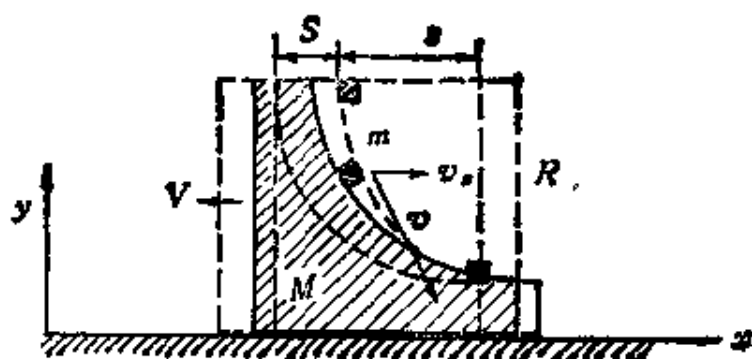


图 3.7

[例 2] 如图 3.7 所示,一个有四分之一圆弧滑槽的大物体的质量为 M ,停在光滑的水平面上。另一质量为 m 的小物体自圆弧顶点由静止下滑。求当小物体 m 滑到底时,大物体 M 在水平面上移动的距离。

解: 选如图所示的坐标系,取 m 和 M 为系统。在 m 下滑过程中,在水平方向上,系统所受的合外力为零,因此水平方向上的动量守恒。由于系统的初动量为零,所以,如果以 v 和 V 分别表示下滑过程中任一时刻 m 和 M 的速度,则应该有

$$0 = mv_x + M(-V)$$

因此对任一时刻都应该有

$$mv_x = MV$$

就整个下落的时间 t 对此式积分, 有

$$m \int_0^t v_x dt = M \int_0^t V dt$$

以 s 和 S 分别表示 m 和 M 在水平方向移动的距离, 则有

$$s = \int_0^t v_x dt \quad S = \int_0^t V dt$$

因而有

$$ms = MS$$

又因为位移的相对性 $s = R - S$, 将此式代入上式即可得:

$$S = \frac{m}{m - M} R$$

值得注意的是此距离值与弧形槽面是否光滑无关, 只要 M 下面的水平面光滑就行了。

[例3] α 粒子散射 在一次 α 粒子散射过程中, α 粒子和静止的氧原子核发生“碰撞”, 如图 3.8 所示。实验测出碰撞后 α 粒子沿与入射方向成 $\theta = 72^\circ$ 角的方向运动, 而氧原子核沿与 α 粒子入射方向成 $\beta = 41^\circ$ 角的方向“反冲”。求 α 粒子碰撞后与碰撞前的速率之比。

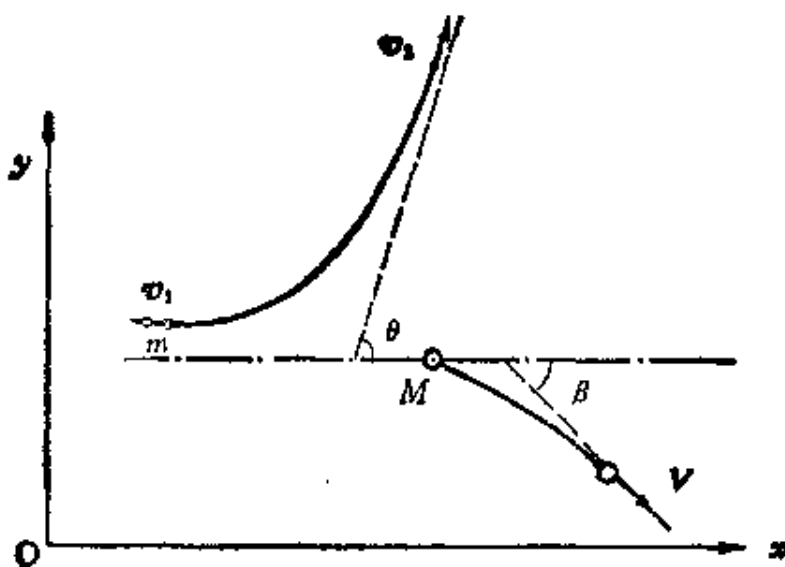


图 3.8

解: 粒子的这种碰撞“过程, 实际上是它们在运动中相互靠近, 继而由于

相互斥力的作用又相互分离的过程。考虑由 α 粒子和氧原子核组成的系统,由于整个过程中仅有内力作用,所以系统的动量守恒。设 α 粒子质量为 m ,碰撞前、后速度分别为 v_1, v_2 。氧核质量为 M ,碰撞后速度为 V 。选如图坐标系,令 x 轴平行于 α 粒子的入射方向。根据动量守恒的分量式有

$$x \text{ 向: } \quad mv_2 \cos \theta + MV \cos \beta = mv_1$$

$$y \text{ 向: } \quad mv_2 \sin \theta - MV \sin \beta = 0$$

这两式联立可解出

$$v_1 = v_2 \cos \theta + \frac{v_2 \sin \theta}{\sin \beta} \cos \beta = \frac{v_2}{\sin \beta} \sin (\theta + \beta)$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \beta}{\sin (\theta + \beta)} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin (72^\circ + 41^\circ)} = 0.71$$

即 α 粒子碰撞后的速率约为碰撞前速率的71%。

§ 3.4 质 心

在讨论一个质点系的运动时,我们常常引入质量中心(简称质心)的概念。设一个质点系由 N 个质点组成,以 $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$ 分别表示各质点的质量。以 $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_N$ 分别表示各质点对某一坐标原点的位矢(图3.9)。我们用下一公式定义这一质点系的质心的位矢,即

$$\underline{r}_c = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{m} \quad (3.11)$$

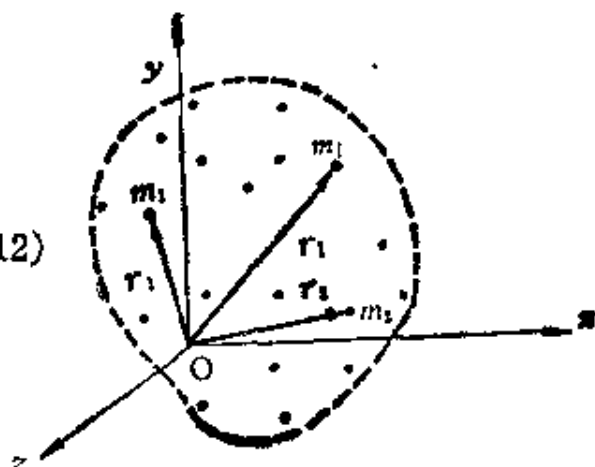
式中 $m = \sum_i m_i$ 是质点系的总质量。作为位置矢量,质心位矢与

坐标系的选择有关。但可以证明质心相对于质点系内各质点的相对位置是不会随坐标系的选择而变化的,即质心是相对于质点系本身的一个特定位置。

利用位矢沿直角坐标系各坐标轴的分量,由(3.11)式可以得

到下面的质心坐标表示式

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_i m_i x_i}{m} \\ y_c &= \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \\ z_c &= \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$



一个大的连续物体，可以认

为是有许多质点(或叫质元)组成

的,以 dm 表示其中任一质元的质量,以 \mathbf{r} 表示其位矢,则大物体的质心位置可用积分法求得为

图 3.9 质心的位置矢量

$$\mathbf{r}_c = \int \mathbf{r} dm / \int dm = \int \mathbf{r} dm / m \quad (3.13)$$

它的三个直角坐标分量式分别为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \int x dm / m \\ y_c &= \int y dm / m \\ z_c &= \int z dm / m \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

利用上述公式,可求得均匀直棒,均匀圆环,均匀圆盘,均匀球体等形体的质心就在它们的几何对称中心上。

力学上还常应用重心的概念。重心是一个物体各部分所受重力的合力作用点。可以证明尺寸不十分大的物体,它的质心和重心的位置重合。

[例 1] 地球质量 $M_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg, 月球质量 $M_m = 7.35 \times 10^{22}$ kg, 它们的中心的距离 $l = 3.84 \times 10^5$ km。如图 3.10 所示。求地-月系统的质心位置。

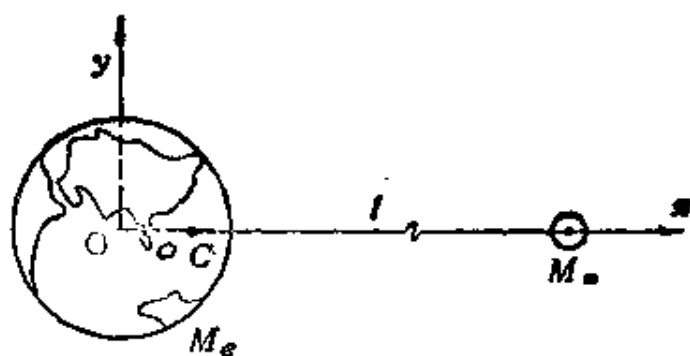


图 3.10

解：地球和月球都可看作均匀球体，它们的质心都在各自的球心处。这样就可以把地-月系统看作地球与月球质量分别集中在各自的球心的两个质点。选择地球中心为原点， x 轴沿着地球中心与月球中心的连线，则系统的质心坐标：

$$x_0 = \frac{M_e \cdot 0 + M_m \cdot l}{M_e + M_m} \approx \frac{M_m l}{M_e}$$

$$x_0 = \frac{7.35 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \times 3.84 \times 10^8 = 4.72 \times 10^3 \text{ km}$$

这就是地-月系统的质心到地球中心的距离。由于地球半径为 $6.37 \times 10^3 \text{ km}$ ，这一距离约为地球半径的 0.7 倍。

[例 2] 一段均匀铁丝弯成圆形，其半径为 R ，求此半圆形铁丝的质心。

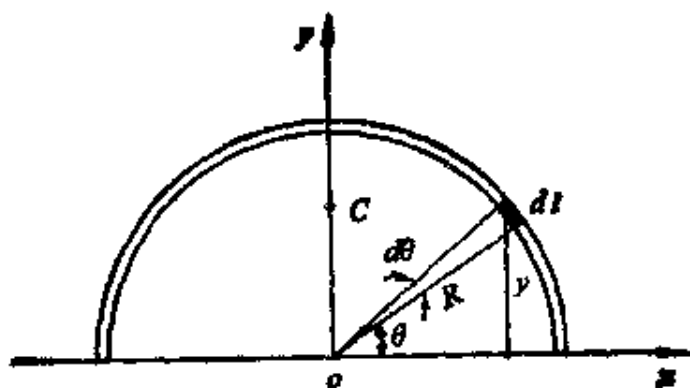


图 3.11

解：选如图 3.11 所示的坐标系，坐标原点就在圆心。由于半圆对 y 轴对称，所以质心应该在 y 轴上，任取一小段铁丝，其长度为 dl ，质量为 dm 。以 λ 表示铁丝的线密度，即单位长度铁丝的质量，则有

$$dm = \lambda dl$$

根据(3.14)式可得

$$y_c = \frac{\int y \lambda dl}{m}$$

由于 $y = R \sin \theta$, $dl = R d\theta$, 所以

$$y_c = \int_0^\pi R \sin \theta \cdot \lambda \cdot R d\theta / m = \frac{2\lambda R^2}{m}$$

由于铁丝的总质量为

$$m = \pi R \lambda$$

代入上一结果就可得

$$y_c = \frac{2}{\pi} R$$

即质心在 y 轴上离圆心 $2R/\pi$ 处。注意这一弯曲铁丝的质心并不在铁丝上。但它相对于铁丝的位置是确定的。

*§ 3.5 质心运动定理

将(3.11)式中的 r_c 对时间 t 求导, 可得出质心运动的速度为

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} / m = \sum_i m_i v_i / m \quad (3.15)$$

由此可得

$$m v_c = \sum_i m_i v_i$$

由于后者就是质点系的总动量 P , 所以有

$$P = m v_c \quad (3.16)$$

即质点系的总动量等于它的总质量与它的质心的运动速度的乘积。这一总动量的变化率为

$$\frac{dP}{dt} = m \frac{dv_c}{dt} = m a_c$$

式中 a_c 是质心运动的加速度。由(3.7)式可得质心运动和外力的关系为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\mathbf{a}_o \quad (3.17)$$

这一公式叫做**质心运动定理**。它表明一个质点系的质心的运动，就如同这样一个质点的运动，该质点质量等于整个质点系的质量并且集中在质心，而此质点所受的力是质点系所受的所有外力之和(实际上可能在质心位置处既无质量，又未受力)。

质心运动定理表明了“质心”这一概念的重要性。这一定理告诉我们，一个质点系内各个质点由于内力和外力的作用，它们的运动情况可能很复杂。但相对于此质点系有一个特殊的点，即质心，它的运动可能相当简单，只由质点系所受的合外力决定。例如，一颗手榴弹可以看作一个质点系。

投掷手榴弹时，将看到它一面翻转，一面前进，其中各点的运动情况相当复杂。但由于它受的外力只有重力(忽略空气阻力的作用)，它的质心在空中的运动却和一个质点被抛出后的运动一样，其轨道是一个抛物线。又如高台跳水运动员离开跳台后，他的身体可以做各种优美的翻滚伸缩动作，但是他的质心却只能是沿着一条抛物线运动(图 3.12)。

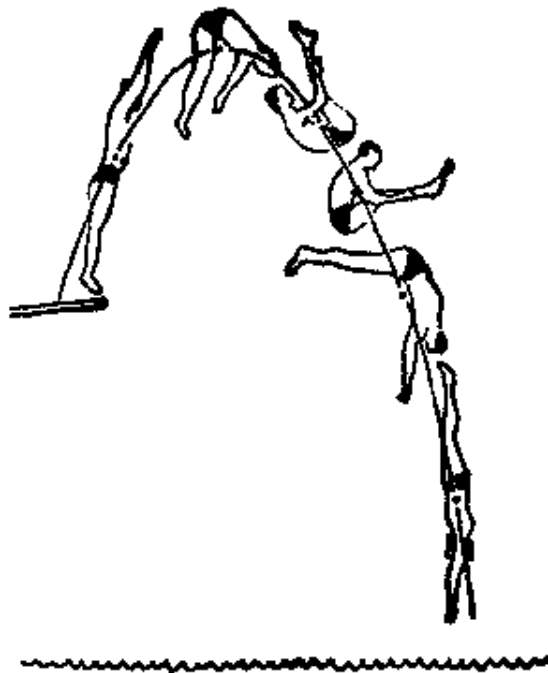


图 3.12 跳水运动员的运动

此外我们知道，当质点系所受的合外力为零时，该质点系的总动量保持不变。由(3.16)式可知，该质点系的质心的速度也将保持不变。因此系统的动量守恒定律也可以说成是：当一质点系所受的合外力等于零时，其质心速度不变。

可以指出的是，在这以前我们常常用“物体”一词来代替“质

点”。在有的问题中，物体并不太小，因而并不能当成质点看待。但在那里我们还是用了牛顿定律来分析研究它们的运动。现在可以明白，严格地说，我们是对物体用了(3.17)式那样的质心运动定理，而所分析的运动实际上是物体的质心的运动。在物体作平动的条件下，又是可以用质心的运动来代替整个物体的运动的。

[例1] 一质量为 $m_1=50\text{ kg}$ 的人站在一条质量为 $m_2=200\text{ kg}$ ，长度 $l=4\text{ m}$ 的船的船头上。开始时船静止。试求人走到船尾时船移动的距离。假定水的阻力不计。

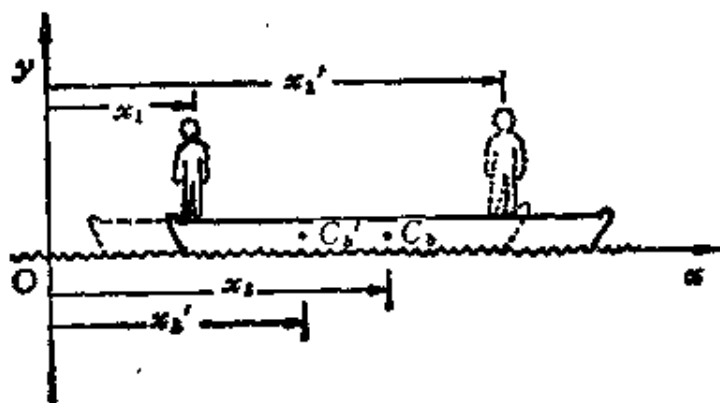


图 3.13

解：对船和人这一系统，在水平方向上不受外力，因而在水平方向的质心速度不变。又因为原来质心静止，所以在人走动过程中质心始终静止，因而质心的坐标值不变。如图 3.13 所示， C_2 表示船本身的质心，即它的中点。选如图所示的坐标系。当人站在船的左端时，人和船这个系统的质心坐标为：

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

当人移到船的右端时，船的质心如图中 C_2' 所示，它向左移动的距离为 d 。这时系统的质心为

$$x_0' = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m_1 + m_2}$$

由于

$$x_0 = x_0'$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 x_2'$$

$$m_2(x_2 - x_2') = m_1(x_1' - x_1)$$

由图可知 $x_2 - x_2' = d$ $x_1' - x_1 = l - d$

代入上式, 可解得船移动的距离为

$$d = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l = \frac{50}{50 + 200} \times 4 = 0.8 \text{ m}$$

[例 2] 一枚炮弹在它飞行的最高点炸裂成质量相等的两部分。每一部分的质量都为 m 。一部分在炸裂后竖直下落, 另一部分则继续向前飞行。求这两部分的着地点以及质心的着地点。已知炮弹发射的初速度为 v_0 , 发射角为 θ 。忽略空气阻力。

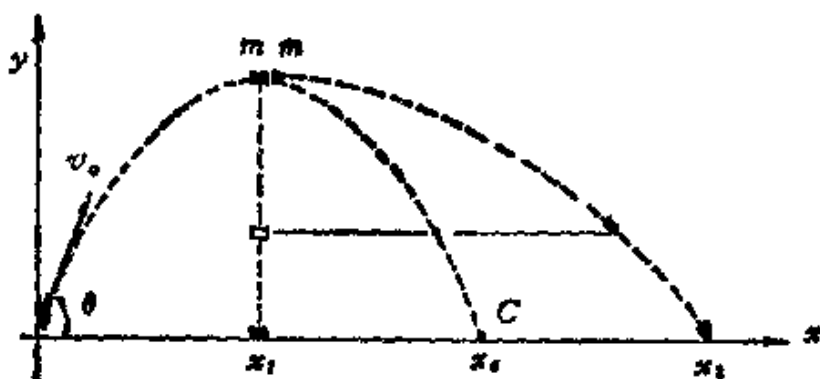


图 3.14

解: 选如图 3.14 所示的坐标系。如果炮弹没有炸裂, 则它的着地点的横坐标就应该等于它的射程, 即

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

最高点的 x 坐标为 $X/2$ 。由于第一部分在最高点竖直下落, 所以着地点应为

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

炮弹炸裂时, 内力使两部分分开, 但因外力是重力始终保持不变, 所以质心的运动仍将和未炸裂的炮弹一样, 它的着地点的横坐标仍是 X , 即

$$x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

第二部分的着地点 x_2 又可根据质心的定义由同一时刻第一部分和质心的坐标求出。由于第二部分与第一部分同时着地, 所以着地时,

$$x_0 = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

由此得

$$x_2 = 2x_0 - x_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

[例3] 水平桌面上铺一张纸，纸上放一个均匀球，球的质量为 $M=0.5$ kg。将纸向右拉时会有 $f=0.1$ N 的摩擦力作用在球上，如图 3.15 所示。求该球的球心加速度 a_0 以及在从静止开始的 2 秒内，球心相对桌面移动的距离 S_0 。

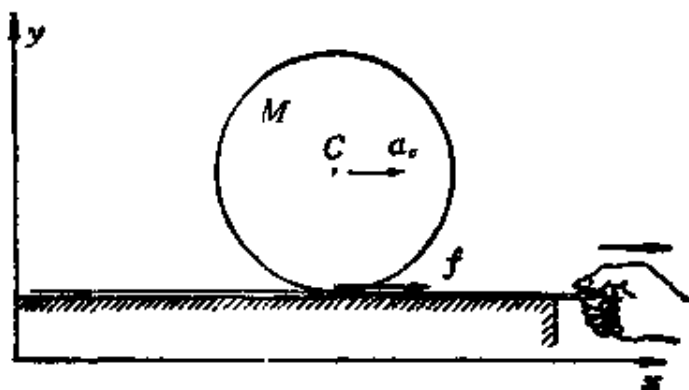


图 3.15

解：如大家熟知的，当拉动纸时，球体除平动外还会转动。它的运动比一个质点的运动复杂。但它的质心的运动比较简单，可以看作质点的运动而用质心运动定理求解。均匀球体的质心就是它的球心。把整个球体看作一个系统，它在水平方向只受到一个外力，即摩擦力 f 。选如图 3.15 所示坐标系，对球用质心运动定理，可得水平方向的分量式为

$$f = Ma_0$$

由此得球心的加速度为

$$a_0 = \frac{f}{M} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \text{ m/s}^2$$

从静止开始 2 秒内球心运动的距离为

$$S_0 = \frac{1}{2} a_0 t^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 2^2 = 0.4 \text{ m}$$

注意，本题中摩擦力的方向和球心位移的方向都和拉纸的方向相同。读者可自己通过实验证实这一点。

§ 3.6 质点的角动量

本节将介绍描述质点运动的另一个重要物理量——角动量。这一概念在物理学上经历了一段有趣的演变过程。18世纪在力学中才定义和开始利用它，直到十九世纪人们才把它看成为力学中的最基本的概念之一，到20世纪它加入了动量和能量的行列，成为力学中最重要的概念之一。角动量之所以能有这样的地位，是由于它也服从守恒定律。这一点我们很快就会证明。在近代物理中它的运用是极为广泛的。

一个动量为 \boldsymbol{p} 的质点，它对惯性参照系中某一固定点 O 的角动量 \boldsymbol{L} 用下述矢量叉积定义

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \quad (3.18)$$

式中 \boldsymbol{r} 为质点相对于固定点的矢径(图 3.16)。根据叉积的意义，可知角动量大小为

$$L = rp \sin \varphi = mrv \sin \varphi$$

其中 φ 是 \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{p} 两矢量之间的夹角。 \boldsymbol{L} 的方向垂直于 \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{p} 所决定的平面，其指向可用右手螺旋法则确定，即用右手四指从 \boldsymbol{r} 经小于 180° 角转向 \boldsymbol{p} ，则姆指的指向为 \boldsymbol{L} 的方向。

按(3.18)式，质点的角动量还取决于它的矢径，因而取决于固定点位置的选择。同一质点，相对于不同的点，它的角动量有不同的值。因此，在说明一个质点的角动量时，必须指明是对哪一个固定点说的。

一个质点沿半径为 r 的圆周运动(图 3.17)，其动量为 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 时，它对于圆心 O 的角动量的大小为

$$L = r p = mrv \quad (3.19)$$

这个角动量的方向用右手螺旋定则判断如图 3.17 所示。



图 3.16 质点的角动量

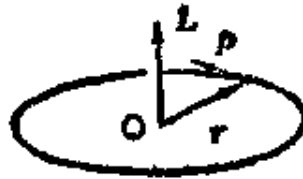


图 3.17 圆周运动的角动量

在国际单位制中,角动量的量纲为 ML^2T^{-1} ,单位是千克·米²/秒 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$),也可写作焦耳·秒 ($\text{J}\cdot\text{s}$)

[例1] 地球绕太阳的运动可以近似地看作匀速圆周运动,求地球对太阳中心的角动量。

解: 已知从太阳中心到地球的距离为 $r=1.5\times 10^{11}\text{ m}$ 。地球的公转速度为 $v=3.0\times 10^4\text{ m/s}$,而地球的质量为 $m=6.0\times 10^{24}\text{ kg}$ 。代入(3.19)式,即可得地球对于太阳中心的角动量的大小为

$$\begin{aligned} L &= mrv = 6.0\times 10^{24}\times 1.5\times 10^{11}\times 3.0\times 10^4 \\ &= 2.7\times 10^{40}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

[例2] 根据玻尔假设,氢原子内电子绕核运动的角动量只可能是 $\hbar/2\pi$ 的整数倍,其中 \hbar 是普朗克常数,它的大小是 $6.63\times 10^{-34}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ 。已知电子圆形轨道的最小半径为 $r=0.529\times 10^{-10}\text{ m}$ 。求在此轨道上运动时电子的速率。

解: 由于是最小半径,所以有

$$\begin{aligned} L &= mrv = \frac{\hbar}{2\pi} \\ v &= \frac{\hbar}{2\pi mr} = \frac{6.63\times 10^{-34}}{2\pi\times 9.1\times 10^{-31}\times 0.529\times 10^{-10}} = 2.2\times 10^6\text{ m/s} \end{aligned}$$

我们知道,一个质点的线动量(即 $p=mv$)的变化率是由质点受的合外力决定的。质点的角动量又如何呢?

让我们来求角动量对时间的导数:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (r \times p) = r \times \frac{dp}{dt} + \frac{dr}{dt} \times p$$

由于 $dr/dt=v$,而 $p=mv$,所以后一项又积为零。又由于线动量

的变化率等于质点所受的合外力, 所以有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

此式后一叉积叫做合外力对固定点(即计算 \mathbf{L} 时用的那个固定点)的力矩, 以 \mathbf{M} 表示力矩, 就有

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.21)$$

这样, (3.20) 式就可以写成

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3.22)$$

这一等式的意义是: 质点所受的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率(力矩和角动量都是对于惯性系中同一固定点说的)。这个结论叫质点的角动量定理。

力矩的概念, 大家并不生疏。中学已学过: 力 F 对一个支点 O 的力矩的大小等于此力和力臂 r_0 的乘积。力臂指的是从支点到力的作用线的垂直距离。如图 3.18 所示, 力臂 $r_0 = r \sin \alpha$ 。因此, 力 F 对支点 O 的力矩的大小就是

$$M = r_0 F = r F \sin \alpha \quad (3.23)$$

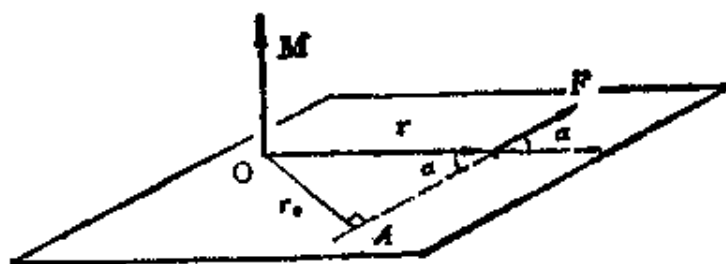


图 3.18 力矩的定义

根据(3.21)式, 由叉积的定义可知, 这正是由该式定义的力矩的大小。至于力矩的方向, 在中学只指出它有两个“方向”, 即“顺时针方向”和“逆时针方向”。其实这种说法只是一种表面的直观的说法, 并不具有矢量方向的那种确切的含意。(3.21)式则给出了力

矩的一般的确切的定义,它是一个矢量,它的方向垂直于矢径 r 和力 F 所决定的平面,其指向用右手螺旋法则由姆指的指向确定。

在国际单位制中,力矩的量纲为 ML^2T^{-2} , 单位是米·牛顿($m \cdot N$)。

§ 3.7 角动量守恒定律

根据(3.22)式,如果 $M=0$, 则 $dL/dt=0$, 因而

$$L = \text{常矢量} \quad (3.24)$$

这就是说,如果对于某一固定点,质点所受的合外力矩为零,则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变。这一结论叫做角动量守恒定律。

可以指出,角动量守恒定律和动量守恒定律一样,是自然界的一条最基本的定律。

关于外力矩为零这一条件,应该指出的是由于力矩 $M = r \times F$, 所以它既可能是由于质点所受的外力为零,也可能是外力并不为零,但是在任意时刻外力总是与质点对于固定点的矢径平行或反平行。下面我们分别就这两种情况各举一个例子。

[例1] 证明:一个质点运动时,如果不受外力作用,则它对于任一固定点的角动量矢量保持不变。

解:根据牛顿第一定律,不受外力作用时,质点将作匀速直线运动。以 v 表示这一速度,以 m 表示质点的质量,则质点的线动量为 mv 。如图 3.19 所示,以 SS' 表示质点

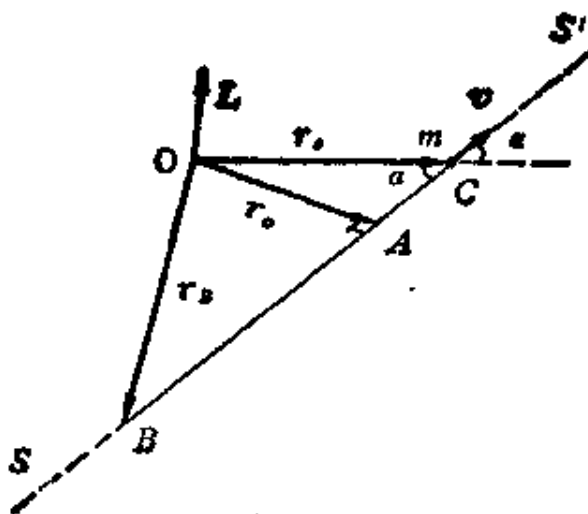


图 3.19

运动的轨迹直线，质点运动经过任一点 C 时，它对于任一固定点 O 的角动量为

$$L = r_c \times mv$$

这一矢量的方向垂直于 r_c 和 v 所决定的平面，也就是固定点 O 与轨迹直线 SS' 所决定的平面。质点沿 SS' 直线运动时，它对于 O 点的角动量在任一时刻总垂直于这同一平面，所以它的角动量的方向不变。这一角动量的大小为

$$L = r_c mv \sin \alpha = r_c mv$$

其中 r_c 是从固定点到轨迹直线 SS' 的垂直距离。它只有一个值，与质点在运动中的具体位置无关。因此，不管质点运动到何处，角动量的大小也是不变的。

角动量的方向和大小都保持不变，也就是角动量矢量保持不变。

[例 2] 证明关于行星运动的开普勒第二定律；行星对太阳的矢径在相等的时间内扫过相同的面积。

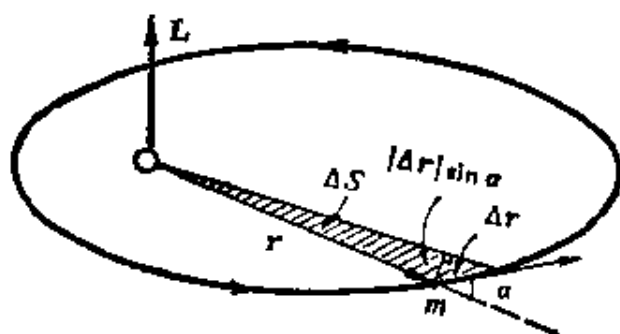


图 3.20

解：我们知道，行星是在太阳的引力作用下沿着椭圆轨道运动的。由于引力的方向在任何时刻总与行星对于太阳的矢径方向反平行，所以行星受到的引力对太阳的力矩等于零。因此，行星在运动过程中，它对太阳的角动量将保持不变。我们来看这个不变意味着什么。

首先，由于角动量 L 的方向不变，就表明 r 和 v 所决定的平面的方位不变。这就是说，行星总在一个平面内运动。它的轨道是一个平面轨道（图 3.20）。

其次，行星对太阳的角动量的大小为

$$L = mrv \sin \alpha = mr \left| \frac{dr}{dt} \right| \sin \alpha = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r |\Delta r| \sin \alpha}{\Delta t}$$

由图 3.20 可知，乘积 $r |\Delta r| \sin \alpha$ 等于阴影三角形的面积（忽略那个小角的面积）的两倍。以 ΔS 表示这一面积，就有

$$r|\Delta r|\sin\alpha = 2\Delta S$$

将此式代入上式可得

$$L = 2m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = 2m \frac{dS}{dt}$$

此处 dS/dt 为行星对太阳的矢径在单位时间内扫过的面积，叫做行星运动的面积速度。行星运动的角动量守恒又意味着这一面积速度保持不变。由此，我们可以直接得出行星对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积的结论。

本章提要

1. 动量定理：合外力的冲量等于质点(或质点系)动量的增量。

$$F dt = p_2 - p_1$$

或对质点系, $F dt = P_2 - P_1$ $P = \sum_i p_i$

2. 动量守恒定律：系统所受合外力为零时，

$$P = \sum_i p_i = \text{常矢量}$$

3. 质心的概念：质心的位矢 $r_o = \frac{\sum_i m_i r_i}{m}$ 或 $r_o = \int r dm / m$

- 4*. 质心运动定理：质点系所受的合外力等于其总质量乘以质心的加速度。

$$F = ma_o$$

5. 质点的角动量：对于某一定点

$$L = r \times p = mr \times v$$

$$L = 2m \frac{dS}{dt} \quad \left(\frac{dS}{dt}: \text{面积速度} \right)$$

角动量定理: $M = \frac{dL}{dt}$

其中 M 为合外力矩, $M = r \times F$, 它和 L 都是对同一定点说的。

6. 角动量守恒定律: 对某定点, 质点受的合外力矩为零时, 则对于同一定点的 $L = \text{常矢量}$ 。

思考题

3.1 小力作用在一个静止的物体上, 只能使它产生小的速度吗? 大力作用在一个静止的物体上, 一定能使它产生大的速度吗?

3.2 一人躺在地上, 身上压一块重石板, 另一人用重锤猛击石板, 但见石板碎裂, 而下面的人毫无损伤。何故?

3.3 如图 3.21 所示, 一重球的上下两面系同样的两根线, 而用一根线将球吊起, 今用手向下拉另一根线, 如果向下猛一拖, 则下面的线断而球未动。如果用力慢慢拉线, 则上面的线断开, 为什么?

3.4 两个质量相同的物体从同一高度自由下落, 与水平地面相碰, 一个反弹回去, 另一个却黏在地上, 问哪一个物体给地面的冲量大?

3.5 利用帆的控制作用, 能否使船正好顶风前进?

3.6 在系统的动量变化中内力起什么作用? 有人说: 因为内力不改变系统的总动量, 所以不论系统内各质点有无内力作用, 只要外力相同, 则各质点的运动情况就相同, 这话对吗?

3.7 汽车发动机内气体对活塞的推力以及各种传动部件之间的作用力能使汽车前进吗? 使汽车前进的力是什么力?

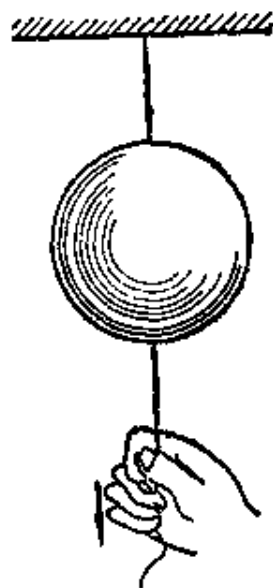


图 3.21

3.8 我国东汉时学者王充在他所著《论衡》(公元 28 年)一书记有;“驽(ò)育,古之多力者,身能负荷千钧,手能决角伸钩,使之自举,不能离地”。说的是古代大力士自己不能把自己举离地面。这个说法正确吗?为什么?

3.9 在冲击摆实验中,如果子弹从进入摆到停在里面所经过的时间不是很短(例如摆对子弹的阻力较小,它在摆内停止前要走一段较长的距离),问 § 3.3 例 1 的解法还正确吗?为什么?

3.10 你自己身体的质心是固定在身体内某一点吗?你能把你的身体的质心移到身体外面吗?

3.11 天安门前放烟火时,一朵五彩缤纷的烟火的质心的运动轨迹如何?(忽略空气阻力与风力)。

3.12 在自行车后架的一边挂上重物,人骑上车后总要使自己向相反的方向歪斜,为什么?

3.13 人造地球卫星是沿着一个椭圆轨道运行的,地心是这一轨道的一个焦点(图 3.22)。卫星经过近地点 P 和远地点 A 时的速率一样吗?它们和从地心到 P 和 A 的距离 r_1 和 r_2 有什么关系?



图 3.22

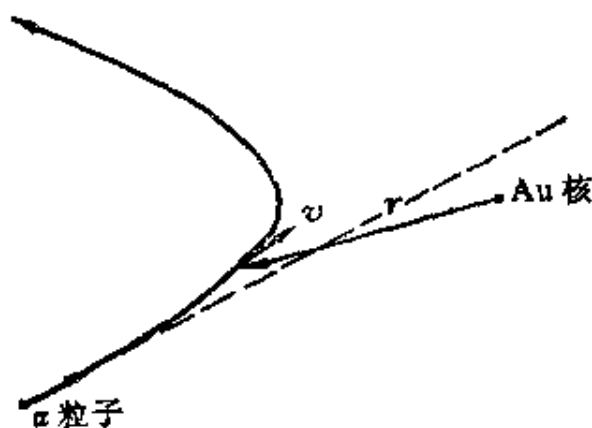


图 3.23

3.14 作匀速圆周运动的质点,对于圆周上某一定点,它的角动量是否守恒?对于哪一个定点,它的角动量守恒?

3.15 一个 α 粒子飞过一金原子核而被散射,金核基本上未动(图 3.23)。在这一过程中,对金核中心来说, α 粒子的角动量是否守恒?为什么? α 粒子的动量是否守恒?

习 题

3.1 一小球在弹簧的作用下做振动(图 3.24)。弹力 $F = -kx$ ，而位移 $x = A \cos \omega t$ 。其中， k, A, ω 都是常量。求在 $t=0$ 到 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 的时间间隔内弹力施于小球的冲量。



图 3.24

3.2 一个质量 $m = 50 \text{ g}$ ，以速率 $v = 20 \text{ m/s}$ 作匀速圆周运动的小球，在 $1/4$ 周期内向心力加给它的冲量是多大？

3.3 一个质量 $m = 0.14 \text{ kg}$ 的垒球沿水平方向以 $v_1 = 50 \text{ m/s}$ 的速率投来，经棒打击后，沿仰角 $\alpha = 45^\circ$ 的方向向回飞出，速率变为 $v_2 = 80 \text{ m/s}$ 。求棒给球的冲量的大小与方向。如果球与棒接触的时间为 $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ ，求棒对球的平均冲力的大小。它是垒球本身重量的几倍？

3.4 自动步枪连发时每分钟射出 120 发子弹，每颗的质量为 $m = 7.90 \text{ g}$ ，出口速率为 735 m/s 。求射击时(以分钟计)枪托对肩部的平均压力。

3.5 水力采煤时是用高压水枪喷出的强力水柱冲击煤层。设水柱直径为 $D = 30 \text{ mm}$ ，水速 $v = 56 \text{ m/s}$ ，水柱垂直地射到煤层表面上，冲击煤层后速度变为零。求水柱对煤层的平均冲力。

3.6 证明图 3.3 中逆风对船的推进力为 $(\Delta m v_1 \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \cos \frac{\pi - \alpha}{2}) / \Delta t$ ，其中 Δt 为 Δm 掠过帆面的时间。

3.7 一个原来静止的原子核，放射性蜕变时放出一个动量为 $p_1 = 9.22 \times 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ 的电子，同时还在垂直于此电子运动的方向上放出一个动量为 $p_2 = 5.33 \times 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ 的中微子。求蜕变后原子核的动量的大小和方向。

3.8 设停在水平轨道上的炮车以仰角 α 向前发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为 M 和 m ，炮弹的出口速度(相对地面)为 v 。求炮车的反冲速度？车轮与轨道间的摩擦力忽略不计。

3.9 一辆停在直轨道上质量为 M 的平板车上站着两个人, 当他们从车上沿水平同方向跳下后, 车获得了一定的速度。设两个人的质量相同, 均为 m , 跳下时相对于车的速度也相同均为 u 。试比较在下列两种情况下车所获得的速度的大小:

- (1) 两人同时跳下。
- (2) 两人依次跳下。

3.10 一炮弹以速率 v_0 沿仰角 θ 的方向发射出去后, 在轨道的最高点爆炸为相等的两块, 一块沿 45° 仰角上飞, 一块沿 45° 的俯角下冲, 求刚爆炸后这两块碎片的速率各为多少?

3.11 两辆质量相等的汽车在十字路口的垂直相撞, 撞后二者扣在一起又沿直线滑动了 $s=25\text{ m}$ 才停下来。设滑动时地面与车轮之间的摩擦系数为 $\mu_k=0.80$, 撞后两个司机都声明在撞车前自己的车速未超限制 (14 m/s)。他们的话都可信吗?

3.12 两球质量分别是 $m_1=20\text{ g}$, $m_2=50\text{ g}$, 在光滑桌面上运动, 速度分别为 $v_1=10\hat{x}\text{ cm/s}$, $v_2=(3.0\hat{x}+5.0\hat{y})\text{ cm/s}$, 碰撞后合为一体。求碰撞后的速度。

3.13 质量 $m=6000\text{ kg}$ 的卡车停在质量为 $M=8000\text{ kg}$ 的渡船的甲板上。最初渡船静止, 卡车停在渡船前面一端。当卡车沿直线向渡船后端移动 $s=15\text{ m}$ 时, 渡船相对于水移动了多少距离? 忽略水对渡船的作用力。

3.14 如图 3.25 所示的浮吊, 质量 $M=20\text{ t}$, 由岸上吊起 $m=2\text{ t}$ 的重物后, 再将吊杆与竖直方向的夹角 θ 由 60° 转到 30° 。设吊杆长 $L=8\text{ m}$, 水的阻力与杆重忽略不计, 求浮吊在水平方向移动的距离。

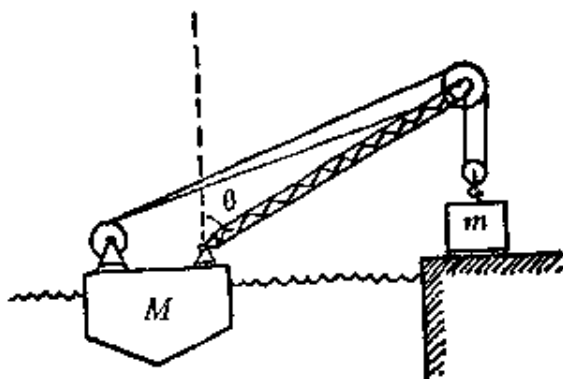


图 3.25



图 3.26

3.15 水分子的结构如图 3.26 所示。两个氢原子与氧原子的中心距离

都是 0.958\AA , 它们与氧原子中心的连线的夹角为 105° 。求水分子的质心。

3.16 求半圆形均匀薄板的质心。

3.17 一座塔高 $h=25\text{ m}$ 。当一个质量为 $m=75\text{ kg}$ 的人从底层爬到顶上时, 地球将移动多大距离?

*3.18 在楼顶释放一质量 $m=20\text{ g}$ 的石子后, 1 秒末又自同一点释放另一质量为 $m=50\text{ g}$ 的石子。求在前者释放后 $t(>1)$ 秒末, 这两个石子系统的质心的速度和加速度。

3.19 一质量 $m=2200\text{ kg}$ 的汽车以 $v=60\text{ km/h}$ 的速度沿一平直公路开行。求汽车对公路一侧距公路 $d=50\text{ m}$ 的一点的角动量是多大? 对公路上任一点的角动量又是多大?

3.20 哈雷彗星绕太阳运动的轨道是一个椭圆。它离太阳最近的距离是 $r_1=8.75\times 10^{10}\text{ m}$, 其时它的速率是 $v_1=5.46\times 10^4\text{ m/s}$ 。它离太阳最远时的速率是 $v_2=9.08\times 10^3\text{ m/s}$, 这时它离太阳的距离 r_2 是多少?

3.21 求月球对地球中心的角动量及面积速度。将月球轨道看作是圆, 其转动周期按 27.3 日计算。

3.22 我国 1988 年 12 月发射的通信卫星在到达同步轨道之前, 先要在一个大的椭圆形“转移轨道”上运行若干圈。此转移轨道的近地点高度为 205.5 km , 远地点高度为 35835.7 km 。卫星越过近地点时的速率为 10.2 km/s 。求

(1) 卫星越过远地点时的速率。

(2) 卫星在此轨道上运行的周期。[提示: 注意用椭圆的面积公式]

3.23 用绳系一小球使之在光滑水平面上作圆周运动(图 3.27), 圆半径为 r_0 , 速率为 v_0 。今缓慢地拉下绳的另一端, 使圆半径逐渐减小。求圆半径缩短至 r 时, 小球的速率 v 是多大。

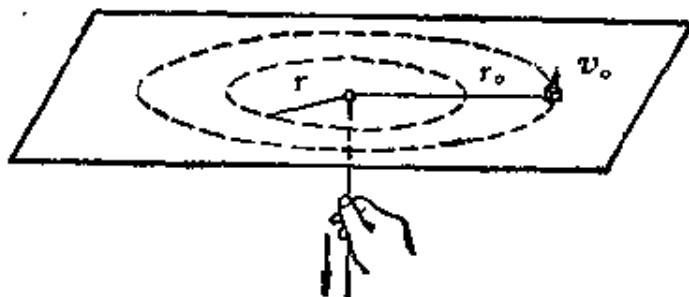


图 3.27

I. 火 箭

火箭是一种利用燃料燃烧后喷出的气体产生的反冲推力的发动机。它自带燃料与助燃剂，因而可以在空间任何地方发动。火箭技术在近代有很大的发展。火箭炮以及各种各样的导弹都利用火箭发动机作动力。空间技术的发展更以火箭技术为基础。各式各样的人造地球卫星、飞船和空间探测器都是靠火箭发动机发射并控制航向的。

火箭飞行原理如下。为简单起见，设火箭在自由空间飞行，即它不受引力或空气阻力等任何外力的影响。如图 I.1 所示，把某时刻 t 的火箭（包括火箭体和其中尚存的燃料）作为研究的系统，其总质量为 M ，以 v 表示此时刻火箭的速度，则此时刻系统的总动量为 Mv （沿 x 轴正向）。此后经过 dt 时间，火箭喷出质量为 dm 的气体，其喷出速度相对于火箭体为 u 。在 $t+dt$ 时刻，火箭体的速度增为 $v+dv$ 。在此时刻系统的总动量为

$$dm \cdot (v-u) + (M-dm)(v+dv)$$

由于喷出气体的质量 dm 等于火箭质量的减小，即 $-dM$ ，所以上式可写为

$$-dM \cdot (v-u) + (M+dM)(v+dv)$$

由动量守恒定律可得

$$-dM \cdot (v-u) + (M+dM)(v+dv) = Mv$$

展开此等式，略去二阶无穷小量 $dM \cdot dv$ ，可得

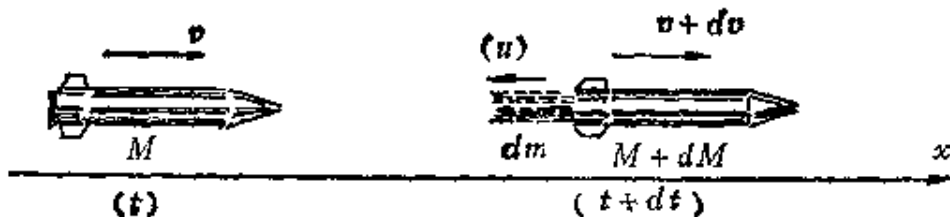


图 1.1 火箭飞行原理

$$u dM + M dv = 0$$

或者
$$dv = -u \frac{dM}{M}$$

设火箭点火时质量为 M_i , 初速为 v_i , 燃料烧完后火箭质量为 M_f , 达到的末速度为 v_f , 对上式积分则有

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

由此得

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (1.1)$$

此式表明, 火箭在燃料燃烧后所增加的速度和喷气速度成正比, 也与火箭的始末质量比的自然对数成正比。

如果以喷出的气体 dm 为所考虑的系统, 它在 dt 时间内的动量变化率为

$$dm \cdot [(v-u) - v] / dt = -u \frac{dm}{dt}$$

根据牛顿第二定律, 这就等于喷出气体受火箭体的推力。再由牛顿第三定律, 可得喷出气体对火箭体的推力 F 与此力大小相等方向相反, 即

$$F = u \frac{dm}{dt} \quad (1.2)$$

此式表明, 火箭发动机的推力与燃料燃烧速率 $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ 以及喷出气体的相对速度 u 成正比。例如, 一种火箭的发动机的燃烧速率为

1.38×10^4 千克/秒, 喷出气体的相对速度为 2.94×10^3 米/秒, 它所产生的推力的理论值为

$$F = 2.94 \times 10^3 \times 1.38 \times 10^4 = 4.06 \times 10^7 \text{ N}$$

这相当于 4000 吨海轮所受的浮力!

只有一个发动机的火箭叫单级火箭。由(I.1)式可知, 要想增大单级火箭的末速度可以采用两个方法: 一是增大喷出气体的相对速度; 二是增大火箭的质量比。近代高能推进剂如液氧加液氢的喷气速度可达 4.1 千米/秒。考虑到火箭体本身的结构和必要的载荷, 火箭质量比增大有限制。目前单级火箭的质量比可做到 15。因此在目前最好的情况下, 单级火箭从静止开始可获得的末速度约为 11 千米/秒。由于实际上从地面发射时, 火箭要受到地球引力和空气阻力, 所以末速度只可能达到 7 千米/秒左右。这一速度小于第一宇宙速度(7.9 千米/秒), 所以用单级火箭不能把人造地球卫星或其他航天器送入轨道。

为了发射人造地球卫星或其他航天器, 人们制造了由若干单级火箭串联形成的多级火箭如图(图 I.2)。发射时, 第一级火箭先点火, 火箭即开始加速上升。等这一级火箭所储存的燃料燃烧完后, 整个这一级就自动脱落, 以便增大此后火箭的质量比。然后第二级点火使火箭继续加速, 它的燃料用完后又自动脱落。然后又第三级点火, 这样一级一级地使火箭的有效载荷加速而最后达到需要的速度。设各级火箭工作时, 火箭的质量比分别为 N_1, N_2, \dots, N_n , 并设各级火箭的喷气速度分别是 u_1, u_2, \dots, u_n , 则由(I.1)式可得多级火箭发射后的最终速度为

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = u_1 \ln N_1 + u_2 \ln N_2 + \dots + u_n \ln N_n \quad (\text{I.3})$$

由于技术上的原因, 多级火箭一般是三级的。以美国发射“阿波罗”登月飞船的“土星五号”火箭为例, 起飞时质量约 2800 吨, 高约 85 米, 第一级喷气速度为 2.9 千米/秒, 产生 3500 吨力的推力。它

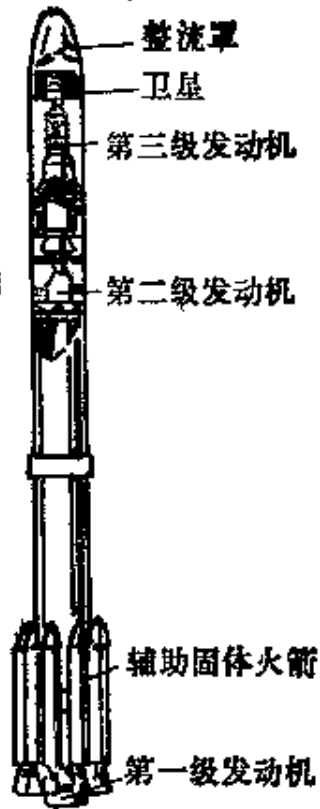


图 I.2 多级火箭示意图

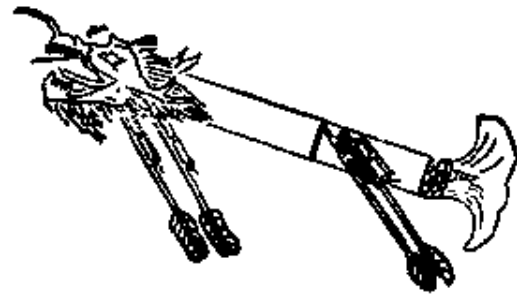


图 I.3 “火龙出水”火箭

此时的质量比为 16。第二级燃料喷气速度约为 4 千米/秒。质量比为 14。第三级燃料与第二级相同，质量比为 12。这种火箭的末速度的理论值按 (I.3) 式计算可得约为 28 千米/秒。由于空气阻力和重力的影响，末速度要比这小得多。

火箭最早是中国发明的。我国南宋时出现了作烟火玩物的“起火”。其后就出现了利用起火推动的翎箭。明代茅元仪著的《武备志》(1628) 中记有利用火药发动的“多箭头”(十到一百支)的火箭，以及用于水战的叫做“火龙出水”的二级火箭(图 I.3。第二级藏在龙体内)。我国现在的火箭技术也已达世界先进水平。例如长征三号火箭是三级大型运载火箭，全长 43.25 米，最大直径 3.35 米，起飞质量约 202 吨，起飞推力为 280 吨力。它已经被用来成功地发射了我国的人造地球卫星。1986 年我国已开始向国际提供航天发射服务。不久我们也将发射自己的载人宇宙飞船。

第四章 功 和 能

本章要求

1. 掌握功的定义及变力做功的计算方法。
2. 理解质点的动能定理的意义及其应用。
3. 理解一对力做功的特点及其计算方法。
4. 掌握保守力和由之定义的势能的概念。掌握重力势能、万有引力势能和弹簧的弹性势能的概念及其计算方法，特别注意势能零点的选择。
5. 熟练掌握机械能守恒定律，并能联系动量守恒定律以及角动量守恒定律解决简单的问题。
6. 了解守恒定律的一般特点及其深刻根基。

§ 4.1 功

在很多的实际情况中，一个质点受的力随它的位置而改变，而且力和位置的关系事先可以知道。分析在这种情况下质点的运动时，我们常常研究质点位置发生一定的变化时，力对它的作用会产生什么效果。这就是要研究力按空间(或路径)的累积效果。为了表示力的空间积累，我们引入功的概念。

一质点在力 F 的作用下，发生一无限小的位移 dr 时(图4.1)此力对它做的功定义为力在位移方向上的分量与该位移大小的乘积。以 dW 表示功，则

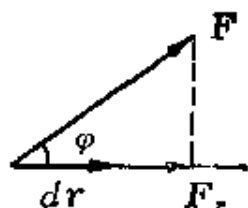


图 4.1 功的定义

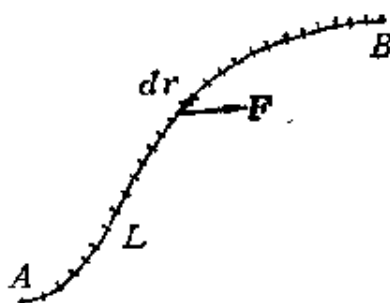


图 4.2 力沿一段曲线做的功

$$dW = F_r |dr| = F |dr| \cos \varphi \quad (4.1)$$

式中 F_r 为力 F 沿 dr 方向亦即轨道切线方向的分量, φ 为力 F 与位移 dr 之间的夹角。按矢量点积的定义, (4.1) 式又可写成

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

这就是说, 功等于质点受的力和它的位移的点积。

注意, 按 (4.2) 式定义的功是标量。它没有方向, 但有正负。当 $0 \leq \varphi < \pi/2$ 时, $dW > 0$, 力对质点做正功。当 $\varphi = \pi/2$ 时, $dW = 0$, 力对质点不做功。当 $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ 时, $dW < 0$, 力对质点做负功。对于这最后一种情况, 我们也常说成是质点在运动中克服力 F 做了功。

如果质点沿一曲线运动从 A 点到达 B 点(图 4.2), 沿这一路径力对质点做的功可计算如下: 把路径分成许多小段, 任取一小段位移, 用 dr 表示。在这段位移上质点受的力 F 可视为恒力, 在这段位移上力对质点做的元功可以用 (4.2) 式求出。然后把沿整个路径的所有元功加起来就得到沿整个路径力对质点做的功。当 dr 趋于零时, (4.2) 式的求和就变成了积分。因此, 质点沿路径 L 从 A 到 B , 力 F 对它做的功 W_{AB} 就是

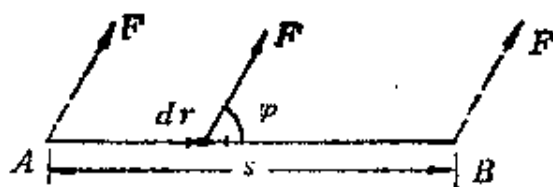
$$W_{AB} = \int_L^B dW = \int_L^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.3)$$

这一积分在数学上叫做力 F 沿路径 L 从 A 到 B 的线积分。

(4.3) 式中的力可以是随质点位置改变的力。在最简单的情

况下,如果力 F 不随质点位置而改变,而且质点沿一直线运动,如图 4.3 所示,则力 F 在长 s 的一段直线路径上对质点做的功为

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F |d\mathbf{r}| \cos\varphi \\ &= F \cos\varphi \int_A^B |d\mathbf{r}| \end{aligned}$$



由于后一积分即整个路径的长度 s , 所以有

图 4.3 恒力沿直线做的功

$$W_{AB} = F s \cos\varphi \quad (4.4)$$

这就是大家在中学已熟悉的恒力沿直线做功的公式。

当质点同时受到几个力,如 F_1, F_2, \dots, F_N 的作用而沿路径 L 由 A 运动到 B 时,合力 F 对质点做的功应为

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_A^B \mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r} \\ &= W_{1AB} + W_{2AB} + \dots + W_{NAB} \end{aligned} \quad (4.5)$$

这一结果表明合力的功等于各分力沿同一路径所做的功的代数和。

在国际单位制中,功的量纲是 ML^2T^{-2} , 单位是焦耳(Joule, J)。1 焦耳是和位移方向相同的 1 牛顿的力在位移 1 米的过程中所做的功,即

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

其它的功的单位有

$$1 \text{ erg(尔格)} = 10^{-7} \text{ J}$$

$$1 \text{ eV(电子伏特)} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

[例 1] 有一水平放置的弹簧,其一端固定,另一端系一小球,如图 4.4 所示。求小球的位置由 A 移到 B 的过程中,弹力对它做的功。设弹簧的恒

强系数为 k 。

解：这是一个路径为直线而力随位置改变的例子。取 x 轴与小球运动的直线平行，而原点对应于小球的平衡位置。这样，小球在任一位置 x 时，弹力就可以表示为

$$f_x = -kx$$

小球的位置由 A 移到 B 的过程中，弹力做的功为

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_A}^{x_B} f_x dx = \int_{x_A}^{x_B} (-kx) dx$$

演算此简单的积分，可得

$$W_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

这一结果说明，如果 $x_B > x_A$ ，即弹簧伸长时，弹力对小球做负功；如果 $x_B < x_A$ ，即弹簧缩短时，弹力对小球做正功。

值得注意的是，这一弹力的功只和弹簧的始末伸长量有关，而和伸长的中间过程无关。

[例 2] 在水平桌面上的一个小物体，质量为 m ，它在外力的作用下，沿半径为 R 的圆由 A 到 B 移动了半个圆周（图 4.5）。求在这一过程中桌面对它的摩擦力所做的功。设物体与桌面间的滑动摩擦系数为 μ_k 。

解：这是一个物体沿曲线运动但力的大小不变的例子。物体在桌面上发生任一元位移 $d\mathbf{r}$ 的过程中，它受的摩擦力的大小为

$$f = \mu_k N = \mu_k mg$$

由于此摩擦力的方向总与位移 $d\mathbf{r}$ 的方向相反（图 4.5），所以功应为

$$dW = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -f |d\mathbf{r}|$$

以 $ds = |d\mathbf{r}|$ 表示元位移的大小，即相应的路程，则

$$dW = -f ds = -\mu_k mg ds$$

物体从 A 移到 B 的过程中，摩擦力对它做的功就是

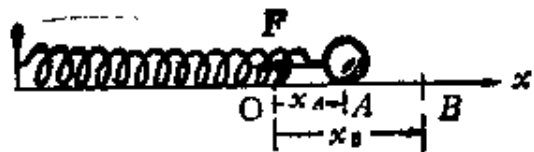


图 4.4

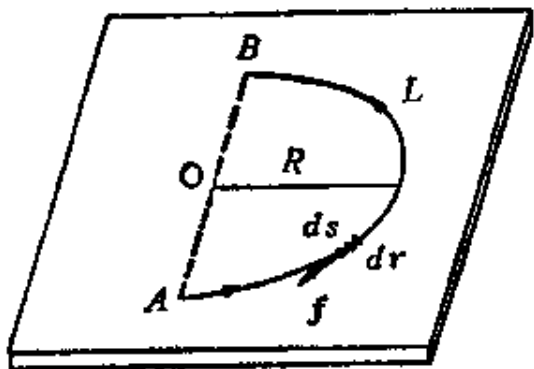


图 4.5

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \mu_k mg ds = - \mu_k mg \int_A^B ds$$

此式中最后的积分为从 A 到 B 物体实际经过的路程。在本题中,这一路径为半圆周 πR , 所以

$$W_{AB} = -\pi \mu_k mg R$$

此结果中的负号表示相对于桌面的移动来说, 这摩擦力总做负功, 此功的大小显然和物体经过的路程有关。如果沿直线从 A 到 B , 则摩擦力做的功将是 $-2\mu_k mg R$ 。

〔例 3〕滑雪运动员的质量为 m , 沿滑雪道下滑了高度 h , 忽略他所受的摩擦力, 求在这一过程中他受的合外力做的功。

解: 如图 4.6 所示在下滑过程中, 在任一位置, 运动员受的力有重力 mg 和滑雪道的支持力 N , 合力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$$

此合力的功为

$$W_{AB} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$$

等式右侧第一项为支持力 N 对运动员做的功。由于在下滑过程中, 滑雪道对运动员的支持力 N 总与元位移 $d\mathbf{r}$ 的方向垂直, 所以此力做的功为零。上式右侧第二项为重力对运动员做的功, 如图 4.6 所示, 由于

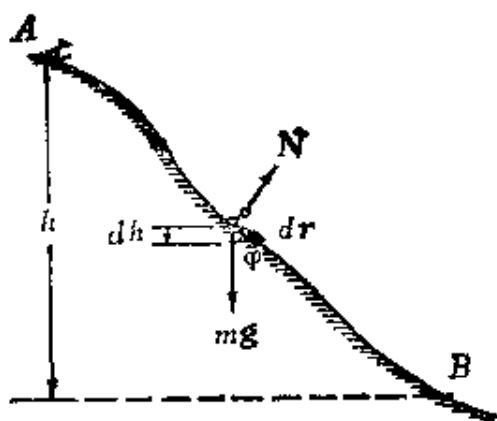


图 4.6

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = g |d\mathbf{r}| \cos \varphi = g dh$$

其中 $dh = |d\mathbf{r}| \cos \varphi$ 为与 $d\mathbf{r}$ 相应的运动员下降的高度, 所以

$$\int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = mg \int_A^B dh$$

式中最后的积分为运动员下降的总高度, 应为 h 。因此重力对运动员做的功应为

$$\int_A^B m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = mgh$$

这也就等于合外力对运动员做的总功, 即

$$W_{AB} = mgh$$

§ 4.2 动能定理

力的空间积累,即力对物体做功会产生什么效果呢?

将牛顿第二定律公式代入功的定义(4.3)式和(4.1)式,可得

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F_r |d\mathbf{r}| = m \int_A^B a_t |d\mathbf{r}|$$

由于 $a_t = \frac{dv}{dt}$, $|d\mathbf{r}| = v dt$,

所以 $W_{AB} = m \int_{v_A}^{v_B} \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_A}^{v_B} v dv$

此简单的积分给出

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (4.6)$$

其中 v_A 和 v_B 分别是质点经过 A 点和 B 点时的速率。这一式子说明:力对物体做功能改变质点的运动,在数量上和功相应的是 $\frac{1}{2} m v^2$ 这个量的改变。这个量是由各时刻质点的运动状态(以速率表征)决定的。我们定义这个量为质点的动能。以 E_K 表示质点的动能,就有

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.7)$$

这样(4.6)式就可以写成

$$W_{AB} = E_{KB} - E_{KA} \quad (4.8)$$

(4.8)式或(4.6)式叫做动能定理。它说明:合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。这也是一个在中学已熟悉的公式,不过在这里是对质点的普遍运动用牛顿第二定律导出的。由(4.6)式可知,动能和功的量纲相同,也是 ML^2T^{-2} , 单位也是焦耳(J)。表 4.1 给出了一些物体的动能的数值。

表 4.1 某些物体的动能(J)

地球公转	2.6×10^{33}
地球自转	2.1×10^{28}
汽车(车速为25m/s)	$\sim 5 \times 10^4$
步枪子弹(出膛时)	$\sim 4 \times 10^4$
步行的人	~ 60
宇宙射线粒子(已发现的最高能量)	$50(3 \times 10^{11} \text{GeV})$
下落的雨滴	$\sim 4 \times 10^{-6}$
大加速器中出来的质子	$1.6 \times 10^{-7}(1 \times 10^8 \text{GeV})$
北京正负电子对撞机中的电子	$4 \times 10^{-10}(2.5 \text{GeV})$
铀235核的裂变碎片	$2.6 \times 10^{-11}(0.2 \text{GeV})$
原子核中的质子	$3 \times 10^{-13}(20 \text{MeV})$
氢原子中的电子	$2.2 \times 10^{-18}(14 \text{eV})$
室温下的空气分子(平均值)	$6.2 \times 10^{-21}(4 \times 10^{-2} \text{eV})$

[例] 利用动能定理重解 § 2.5 例 3, 求线摆下 θ 角时珠子的速率。

解: 如图 4.7 所示, 珠子从 A 落到 B 的过程中, 合外力 $(T+mg)$ 对它做的功为

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B (T+mg) \cdot dr = \int_A^B mg \cdot dr \\ &= \int_A^B mg |dr| \cos\theta \end{aligned}$$

由于 $|dr| = l d\theta$, 所以

$$W_{AB} = \int_0^\theta mg \cos\theta l d\theta = mgl \sin\theta$$

对珠子, 用动能定理, 由于 $v_A = 0, v_B = v$,

$$mgl \sin\theta = \frac{1}{2}mv^2$$

由此得

$$v = \sqrt{2gl \sin\theta}$$

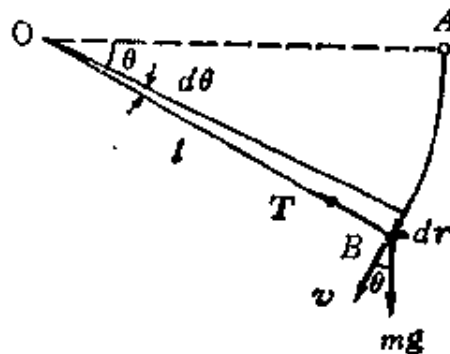


图 4.7

这和 § 2.5 中所得结果相同。§ 2.5 中的解法是应用牛顿第二定律进行单纯的数学运算。这里的解法是应用了两个新概念: 功和动能。在 § 2.5 中, 我们对牛顿第二定律的两侧都进行了积分。在这里, 用动能定理, 只需对力的一侧进行积分求功。另一侧, 即运动一侧就可以直接写动能之差而不需进行积分了。这就简化了解题过程。

现在考虑由两个有相互作用的质点组成的质点系的动能变化和它们受的力所做的功的关系。

如图 4.8 所示。以 m_1, m_2 分别表示两质点的质量，以 f_1, f_2 和 F_1, F_2 分别表示它们受的内力和外力，以 v_{1A}, v_{2A} 和 v_{1B}, v_{2B} 分别表示它们在起始状态和终了状态的速度。

由动能定理，可得

$$\text{对 } m_1, \quad \int_{A_1}^{B_1} F_1 \cdot dr_1 + \int_{A_1}^{B_1} f_1 \cdot dr_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2,$$

$$\text{对 } m_2, \quad \int_{A_2}^{B_2} F_2 \cdot dr_2 + \int_{A_2}^{B_2} f_2 \cdot dr_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2$$

两式相加可得

$$\begin{aligned} & \int_{A_1}^{B_1} F_1 \cdot dr_1 + \int_{A_2}^{B_2} F_2 \cdot dr_2 + \int_{A_1}^{B_1} f_1 \cdot dr_1 + \int_{A_2}^{B_2} f_2 \cdot dr_2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 \right) \end{aligned}$$

此式中等号左侧前两项是外力对质点系所做功之和，用 $W_{\text{外}}$ 表示。左侧后两项是质点系内力所做功之和，用 $W_{\text{内}}$ 表示。等号右侧是质点系总动能的增量，可写为 $E_{KB} - E_{KA}$ 。这样我们就有

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_{KB} - E_{KA} \quad (4.9)$$

这就是说，所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量。这一结论很明显地可以推广到由任意多个质点组成的质点系。它就是用于质点系的动能定理。

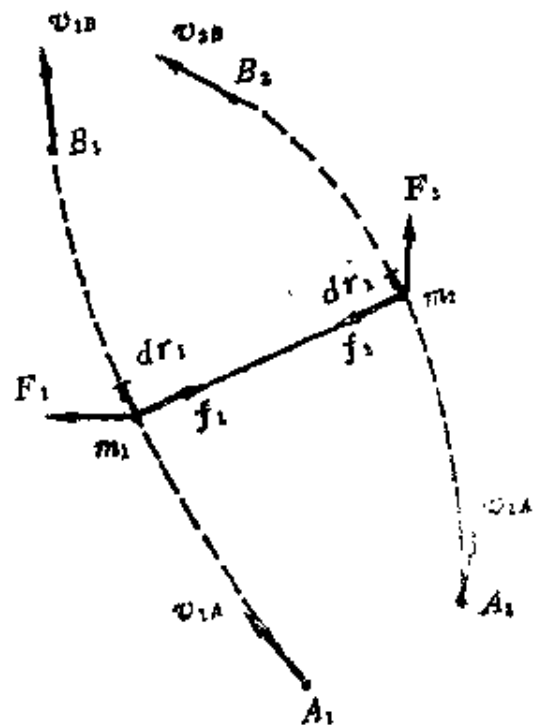


图 4.8 质点系的动能定理

这里应该注意的是,系统内力的功之和可以不为零,因而可以改变系统的总动能。例如,地雷爆炸后,弹片四向飞散,它们的总动能显然比爆炸前增加了。这就是内力(火药的爆炸力)对各弹片作正功的结果。又例如,两个都带正电荷的粒子,在运动中相互靠近时总动能会减少。这是因为它们之间的内力(相互的斥力)对粒子都做负功的结果。内力能改变系统的总动能,但不能改变系统的总动量,这是需要特别加以区别的。

§ 4.3 一对力的功

在上一节中,我们指出了质点系的动能的变化与内力的功有关。由于系统的内力总是成对出现的,因此需要计算一对作用力与反作用力的功。下面我们来研究一对力的功的特点并给出一种求一对力的功的计算方法。

令 m_1, m_2 分别代表两个有相互作用的质点,它们相对于某一坐标系原点的位矢分别是 r_1 和 r_2 (图 4.9)。在某一段时间内,二者分别发生了位移 dr_1 和 dr_2 。以 f_1 和 f_2 分别表示 m_1 和 m_2 的相互作用力。在这一段时间内,这一对力做的功之和为

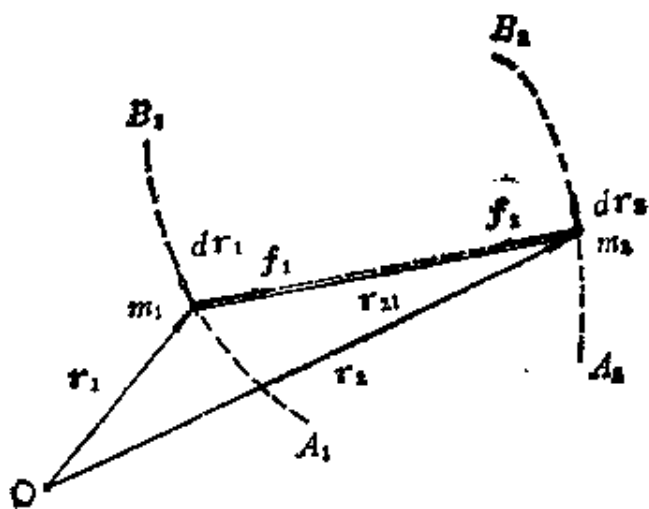


图 4.9 一对力的功

$$dW = f_1 \cdot dr_1 + f_2 \cdot dr_2$$

由于
所以

$$f_1 = -f_2$$

$$dW = f_2 \cdot (dr_2 - dr_1) = f_2 \cdot d(r_2 - r_1)$$

由于 $r_2 - r_1 = r_{21}$ 是 m_2 相对于 m_1 的位矢, 所以

$$dW = f_2 \cdot dr_{21}$$

其中 dr_{21} 为 m_2 相对于 m_1 的元位移。这一结果说明两个质点间的相互作用力所做的元功之和等于其中一个质点所受的力和此质点相对于另一质点的元位移的点积。

如果我们把上述两个质点的初始位置状态 (m_1 在 A_1 , m_2 在 A_2) 记作初位形 A , 经过一段时间以后二者的位置状态 (m_1 在 B_1 , m_2 在 B_2) 记作末位形 B , 则它们从初位形 A 运动到末位形 B 时, 它们之间的相互作用力做的总功就是

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B f_2 \cdot dr_{21} \quad (4.10)$$

这一结果说明, 两质点间的“一对力”所做功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一质点所移动的路径所做的功。这就是说, 一对力所做的功只决定于两质点的相对路径, 因而也就和确定两质点的位置时所选的参照系无关。这是任何一对作用力和反作用力所做的功之和的重要特点。

根据这一特点, 就可以按下述方法计算一对力的功: 认为一个质点 (如图中的 m_1) 静止而以它所在的位置为坐标原点, 再计算另一质点在此坐标系中运动时它所受的力所做的功。这样用一个力计算出来的功, 也就等于相应的一对力所做的功的和。

§ 4.4 保 守 力

下面计算一对万有引力所做的功。以 m_1 , m_2 分别表示两个质点的质量, 它们之间有万有引力作用。 m_2 受 m_1 的作用力为

$$\mathbf{f} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

其中 r 为两质点间的距离, $\hat{\mathbf{r}}$ 为由 m_1 指向 m_2 的单位矢量(图 4.10)。这两个质点相对于某一参照系可能都在运动, 但是, 如上节所述, 运动过程中它们之间的一对万有引力所做功之和只取决于它们的相对运动。为了计算这一对力的功, 我们取 m_1 的位置为原点而计算 m_2 受的万有引力做的功就可以了。以 r_A 和 r_B 分别表示 m_2 相对于 m_1 的始末位矢。当 m_2 沿任意路径 L 由 A 到达 B 的过程中, 万有引力对 m_2 做的功为

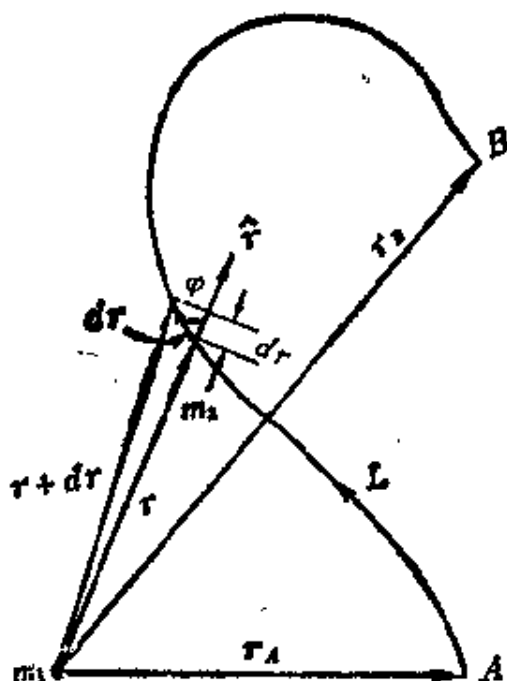


图 4.10 一对万有引力的功

$$W_{AB} = \int_L^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$$

由于 $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = 1 \cdot |d\mathbf{r}| \cos \varphi = dr$, 其中 dr 为发生位移 $d\mathbf{r}$ 时 m_2 的位矢的大小的增量, 所以上式又可写成

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2} dr$$

演算此简单积分, 可得

$$W_{AB} = \frac{Gm_1m_2}{r_B} - \frac{Gm_1m_2}{r_A} \quad (4.11)$$

这一结果只决定于两质点的始末距离，并不显示和路径形状有任何联系。因此，可以说，一对万有引力所做的功之和与质点移动的路径无关，只决定于两质点的始末相对位置。

两个点电荷 q_1 和 q_2 之间的静电力公式和万有引力公式具有相同的形式。所以一对点电荷运动时，它们之间的静电力所做功之和也同样具有上述与路径无关的特点。

如果一对力所做的功与相对路径的形状无关，而只决定于相互作用的质点的始末相对位置，这样的一对力就叫保守力。由于在计算一对力的功时，如上所述，常常选一个质点所在位置为原点，这时一对力的功就表现为一个力的功。因此在上述保守力定义中的一对力也常常说成是“一个力”。在很多书中，正是这样写的。

保守力也可以用另一种方式来定义：一质点相对于另一质点沿闭合路径移动一周时，它们之间的保守力做的功必然是零。这是因为如图 4.11 所示，以 m_1 所在位置为原点， m_2 从 A 点沿任一路径 L 到 B 点，然后再沿另一路径 L' 回到 A 点时，力 f 所作的功为

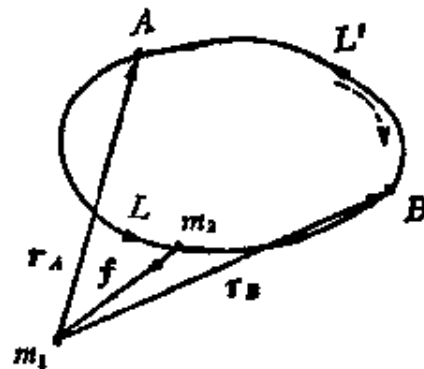


图 4.11 保守力的定义

$$\begin{aligned} \oint f \cdot dr &= \int_L^B f \cdot dr + \int_{L'}^A f \cdot dr \\ &= \int_L^B f \cdot dr - \int_{L'}^B f \cdot dr \end{aligned}$$

其中后一积分为 m_2 由 A 沿路径 L' 到达 B 时力 f 做的功。由于力 f 做的功与路径无关，所以上式中最后两个积分大小相等，而其差应为零。因此保守力又可以用下式定义

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4.12)$$

符号 \oint 表示沿闭合路径一周进行积分的意思。保守力的这一定义和与路径无关的定义是完全等价的。

由以上的讨论可知,万有引力,静电力都是保守力。弹簧的弹力也是保守力。因为根据 § 4.1 [例1] 计算的结果,弹力的功只决定于弹簧的始末伸长量而与伸长的具体过程无关。

有的力是非保守力。最明显的是滑动摩擦力。根据 § 4.1 [例2] 的计算结果,滑动摩擦力的功显然和物体移动的路径有关,路程经历的越长,滑动摩擦力做的负功越多。

这里值得提出的是,在 § 2.4 中已指出,摩擦力是微观上的分子或原子间的电磁力的宏观表现。这些微观上的电磁力是保守力,为什么在宏观上就变成非保守力呢? 这就是因为滑动摩擦力的非保守性是根据宏观物体的运动来判定的。一个金属块在桌面上滑动一圈,它的宏观位置复原了,但摩擦力做了功。这和微观上分子或原子间的相互作用是保守力并不矛盾。因为即使金属块回到了原来的位置,金属块中以及桌面上它滑动过的部分的所有分子或原子并没有回到原来的状态(包括位置和速度),实际上是离原来的状态更远了。因此它们之间的微观上的保守力是做了功的。这个功在宏观上就表现为摩擦力做的功。在技术中我们总是采用宏观的观点来考虑问题,因此滑动摩擦力就是一种非保守力。与此类似,碰撞中引起永久变形的冲力以及爆炸力等都是非保守力。

§ 4.5 势 能

保守力的功与路径无关的性质,大大简化了保守力做功的计算,并由此引入了势能的概念。

由于两个质点间的保守力做的功与路径无关，而只决定于两质点的始末相对位置，或者一般地说决定于系统的始末位形，所以对于这两质点系统，存在着一个由它们的位形决定的函数。相应于某两个位形的这一函数的差就给出系统从这一位形改变到另一位形时保守力做的功。这个由位形决定的函数叫系统的势能函数，简称势能(也叫位能)。以 E_P 表示势能，并以 E_{PA} 和 E_{PB} 分别表示相应于位形 A 和 B 的系统的势能，则它们和保守力做的功 W_{AB} 的关系可用下式表示

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_P \quad (4.13)$$

这一势能的定义公式表示：系统由位形 A 改变到位形 B 的过程中，保守内力的功等于系统势能的减少(或势能增量的负值)。这个关于势能的定义虽然是从两质点系统说起的，它显然也适用于任意的多质点系统，只要这些质点间的内力是保守力。

应当指出，(4.13)式只给出了势能差。要确定质点系在任一给定位形时的势能值，就必须选定某一位形作为参考位形，而规定此参考位形的势能为零。通常把这一参考位形就叫做势能零点。在(4.13)式中，如果我们取位形 B 为势能零点，并记作 R ，即规定 $E_{PB} = E_{RB} = 0$ ，则任一其它位形 A 的势能就是

$$E_{PA} = W_{AB} \quad (4.14)$$

这一公式说明：系统在任一位形时的势能等于它从此位形改变至势能零点时保守内力所做的功。

势能零点可以根据问题的需要任意选择。很明显，对于不同的势能零点，系统在某同一位形的势能值是不同的。这就是说，某一位形的势能值总是相对于选定的势能零点来说的。但根据(4.13)式，某两个位形的势能差是一定的，与势能零点的选择无关。

此外，可以附带说一下，我们常常谈到能量的“所有者”。对于动能，很容易而且很合理地就认为它属于运动的质点。对于势能，

由于是以研究一对保守内力的功引进的，所以它应属于以保守力相互作用着的整个质点系统。它实质上是一种相互作用能。对一个两质点系统，我们无法在这两个质点间按某种比例分配这一势能，更不能说势能只属于某一个质点。*

最后，应该特别强调的是，对保守内力才能引进势能的概念。对非保守内力，谈不上势能概念。例如，不存在“摩擦势能”等。

§ 4.6 万有引力势能

由于两质点间的万有引力是保守力，所以可以引进万有引力势能。由(4.11)式可知，当两个质点 m_1 和 m_2 从相距为 r_A 运动到相距为 r_B 时，它们之间的万有引力做的功为

$$W_{AB} = \frac{Gm_1m_2}{r_B} - \frac{Gm_1m_2}{r_A}$$

再根据势能定义公式(4.13)式，可得

$$E_{PA} - E_{PB} = G \frac{m_1m_2}{r_B} - G \frac{m_1m_2}{r_A} \quad (4.15)$$

选两质点相距无限远时为势能零点，即规定 $r_B \rightarrow \infty$ 时， $E_{PB} = 0$ ，则由上式可得两质点相距任意距离 r 时，它们的万有引力势能为(去掉上式的脚标 A)

$$E_P = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (4.16)$$

由于 m_1, m_2 都是正数，所以此公式中的负号表示：两质点从相距 r 的位形改变到势能零点的过程中，万有引力总做负功。根据这一公式画出的 $E_P \sim r$ 曲线如图 4.12 所示。这样的曲线叫势能曲线。

* 以后我们会讲到，质点间相互作用可以通过引进场的概念加以描述。这时，势能应该合理地认为储存在场中。

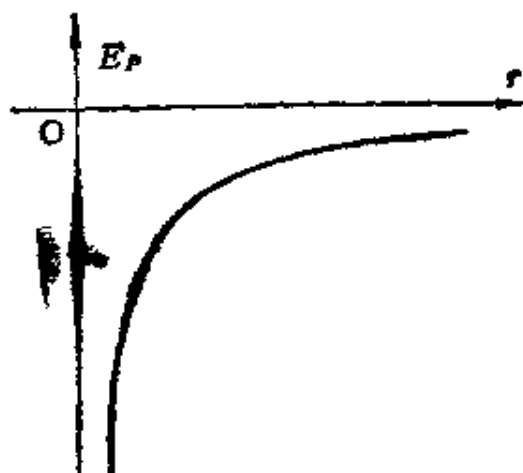


图 4.12 万有引力势能曲线

[例] 一颗重 5 吨的陨石从天外落到地球上, 它和地球间的万有引力做功多少? 已知地球质量为 6×10^{24} 吨, 半径为 6.4×10^6 米。

解: “天外”可当作陨石和地球相距无限远。利用保守力的功和势能变化的关系可得

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$$

再利用 (4.16) 式可得

$$W_{AB} = -\frac{GmM}{r_A} - \left(-\frac{GmM}{r_B}\right)$$

以 $m = 5 \times 10^3$ kg, $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg², $r_A = \infty$, $r_B = 6.4 \times 10^6$ m。代入此式, 可得

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \frac{GmM}{r_B} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^3 \times 6.0 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6} \\ &= 3.1 \times 10^{11} \text{ J} \end{aligned}$$

这一例子说明, 在已知势能公式的条件下, 求保守力的功时, 可以不管路径如何, 也可以不积分。这当然简化了计算过程。

万有引力势能的一个特例是地球表面附近的一个物体和地球这一系统的势能。由于在地面附近物体所受的万有引力等于重力, 所以这一势能又叫重力势能。中学已学过, 重力势能的公式是 $E_p = mgh$ 。那时是根据重力做功与路径无关的特点和势能的定义

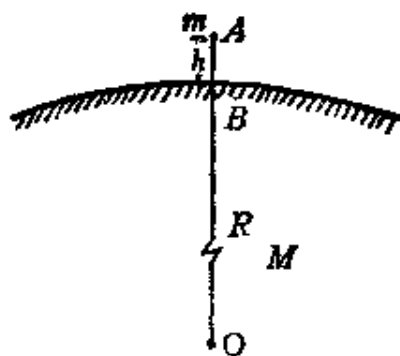


图 4.13 重力势能的推导

导出的。下面我们将证明，它实际上是万有引力势能公式(4.15)式的一种特例。

让我们求质量为 m 的物体在地面上某一高度 h 时，它和地球系统的万有引力势能。如图 4.13 以 M 表示地球的质量，以 r 表示物体到地心的距离，则由(4.15)式可得

$$E_{PA} - E_{PB} = \frac{GmM}{r_B} - \frac{GmM}{r_A}$$

以物体在地球表面上时为势能零点。即规定 $r_B = R$ (地球半径) 时， $E_{PB} = 0$ ，则由上式可得物体在地面以上其它高度时的势能为

$$E_{PA} = \frac{GmM}{R} - \frac{mGM}{r_A}$$

物体在地面以上的高度为 h 时， $r_A = R + h$ ，这时

$$\begin{aligned} E_{PA} &= \frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{R+h} = GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \\ &= GmM \frac{h}{R(R+h)} \end{aligned}$$

由于 $h \ll R$ ，所以 $R(R+h) \approx R^2$ 因而有

$$E_{PA} = \frac{GmMh}{R^2}$$

由于在地面附近，重力加速度 $g = GM/R^2$ [第二章(2.17)式] 所以最后得到物体在地面上高度 h 处时重力势能为(去掉脚标 A)

$$E_P = mgh \quad (4.17)$$

这正是大家熟知的公式。请注意它和万有引力势能公式(4.16)式在势能零点选择上的不同。

附带提一下，我们常说某一物体的重力势能，好象重力势能是

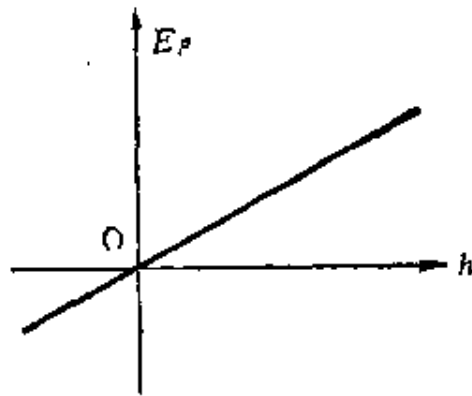


图 4.14 重力势能曲线

属于这个物体似的。其实,这只是物体和地球系统的重力势能(也叫物体在重力场中的势能)的一种简化说法。

重力势能的势能曲线如图 4.14 所示,它实际上是图 4.12 中万有引力势能曲线的一小段的放大(加上势能零点的改变)。

§ 4.7 弹簧的弹性势能

在§4.4已经指出,由于弹簧长度改变时,弹力做的功只决定于弹簧的始末伸长量而与伸长的具体过程无关,所以弹簧的弹力也是保守力。因此也可以引入势能概念。这一势能就叫弹簧的弹性势能。由§4.1例1的计算可知,弹簧的伸长量从 x_A 变化到 x_B 时,弹力做的功为

$$W_{AB} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

利用势能的定义公式(4.13)式可得

$$E_{PA} - E_{PB} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

以弹簧处于自然长度时为弹性势能零点,即规定 $x_B = 0$ 时, $E_{PB} = 0$, 则弹簧在任意伸长 x 时的弹性势能为(去掉脚标 A)

$$E_P = \frac{1}{2} kx^2 \quad (4.18)$$

应该指出,弹簧的弹性势能属于整个弹簧。一根弹簧可以看作由许多质元组成。弹性势能实际上是这些质元间的相互作用能的总和。*

* 可以证明,以上面公式表示的弹力的功 W_{AB} , 就等于弹簧长度改变时,它内部各质元间的所有各对内力做功的总和,即使弹簧本身是弯曲的也是这样。这个功也等于在弹簧两端的弹力做的功之和。在弹簧伸直的情况下,它两端的弹力大小相等,方向相反。它们做的功之和也可以用求一对力的功的方法来计算。§4.1例1正是这样计算的。

弹簧的弹性势能曲线如图 4.15 所示。它是一条以纵轴为对称轴的抛物线。

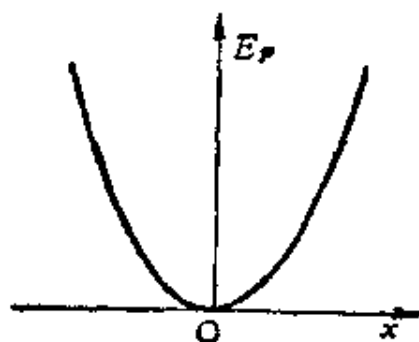


图 4.15 弹性势能曲线

*§ 4.8 由势能求保守力

我们在前面用保守力的功定义了势能。从数学上说，是用保守力对路径的线积分定义了势能。反过来，我们也应该能从势能函数对路径的导数求出保守力来。下面就来说明这一点。

如图 4.16 所示，以 dl 表示质点在保守力 F 作用下沿某一给定的 \hat{l} 方向从 A 到 B 的微分位移。以 dE_p 表示从 A 到 B 的势能增量。根据势能定义 (4.13) 式，有

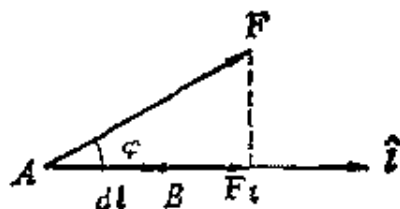


图 4.16 由势能求保守力

$$-dE_p = W_{AB} = F \cdot dl = F \cos \varphi dl$$

由于 $F \cos \varphi = F_l$ 为力 F 在 \hat{l} 方向的分量，所以上式可写作

$$-dE_p = F_l dl$$

由此可得

$$F_l = -\frac{dE_p}{dl} \quad (4.19)$$

此式说明：保守力沿某一给定的 \hat{l} 方向的分量等于与此保守力相应的势能函数沿 \hat{l} 方向的空间的变化率（即经过单位距离时的变化）的负值。

可以用万有引力势能公式验证 (4.19) 式。这时取方 \hat{l} 向为从此一质点到另一质点的矢径 \hat{r} 的方向。万有引力沿 \hat{r} 方向的投影应为

$$F_r = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{Gm_1m_2}{r}\right) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

这实际上就是万有引力公式。

对于弹簧的弹性势能, 可取 \hat{l} 方向为伸长 \hat{x} 的方向。这样弹力沿伸长方向的投影就是

$$F_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

这正是关于弹簧弹力的胡克定律公式。

在势能曲线图上, (4.19) 式给出保守力应等于势能曲线斜率的负值。例如, 在图 4.15 所画的弹性势能曲线图中, 在 $x > 0$ 的范围内, 曲线的斜率为正, 弹力即为负, 这表示弹力与 \hat{x} 方向相反。在 $x < 0$ 的范围内, 曲线斜率为负, 弹力即为正, 表示弹力与 \hat{x} 方向相同。这也与胡克定律完全一致。

一般来讲, E_P 可以是位置坐标 (x, y, z) 的多元函数。这时 (4.19) 式中的 \hat{l} 方向可依次取 \hat{x} , \hat{y} 和 \hat{z} 方向而得到

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

上式中的导数分别是 E_P 对 x, y 和 z 的偏导数。这样, 保守力就可表示为

$$\begin{aligned} F &= F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} \\ &= -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\hat{z}\right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

这是在直角坐标系中由势能求保守力的最一般的公式。

§ 4.9 机械能守恒定律

在 § 4.2 中我们已求出了质点系的动能定理公式(4.9)式

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_{KB} - E_{KA}$$

内力中可能既有保守力,也有非保守力,因此内力的功可以写成保守内力的功 $W_{\text{内保}}$ 和非保守内力的功 $W_{\text{内非}}$ 之和。因而有

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内保}} + W_{\text{内非}} = E_{KB} - E_{KA}$$

在 § 4.5 中我们对保守内力定义了势能,

$$W_{\text{内保}} = E_{PA} - E_{PB}$$

因此上式可写做

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内非}} = (E_{KB} + E_{PB}) - (E_{KA} + E_{PA})$$

系统的总动能和势能之和叫做系统的机械能,通常用 E 表示。以 E_A 和 E_B 分别表示系统初末状态时的机械能,则上式又可写做

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内非}} = E_B - E_A \quad (4.21)$$

此式表明:质点系在运动过程中,它所受的外力的功与系统内非保守力的功的总和等于它的机械能的增量。

在物理学中常讨论的一种重要情况是:在质点系运动过程中,只有保守内力做功,也就是外力的功和非保守内力的功都是零或可以忽略不计。这样,(4.21)式就直接给出

$$E_B = E_A = \text{常量} \quad (4.22)$$

这就是说:在只有保守内力做功的情况下,质点系的机械能保持不变。这一结论叫机械能守恒定律。在经典力学中,它是牛顿定律的一个推论,因此也只适用于惯性系。

一个不受外界作用的系统叫做封闭系统(或孤立系统)。对于封闭系统,外力的功当然为零。如果系统状态发生变化时,有非保守内力做功,它的机械能当然就不守恒了。例如地雷爆炸增加了

系统的机械能，汽车制动减少了系统的机械能。但在这种情况下对更广泛的物理现象，包括电磁现象、热现象、化学反应以及原子内部的变化等的研究表明，如果引入更广泛的能量概念，例如电磁能，内能，化学能或原子核能等，就可用大量实验证明：一个封闭系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不改变的，它只能从一种形式变化为另一种形式或从系统内的此一物体传给彼一物体。这就是普遍的能量守恒定律，它是自然界的一条普遍的最基本的定律，其意义远远超出了机械能守恒定律的范围。后者只不过是前者的一个特例。

为了对能量有个量的概念，表 4.2 列出了一些典型的能量值。

表 4.2 一些典型的能量值(J)

太阳的总核能	1×10^{46}
超新星爆发	1×10^{44}
地球公转	2.6×10^{33}
地球自转	2.1×10^{28}
美国一年的消耗(平均)	6.3×10^{12}
1988年我国生产能源(煤,石油等)总量折合	2.8×10^{12}
1988年我国全年发电量	1.95×10^{12}
1976年唐山大地震	1×10^{12}
1kg物质一反物质湮灭	9.0×10^{10}
1kg氢聚变	3.4×10^{14}
1kg铀裂变	8.2×10^{13}
一次闪电	1×10^9
1kg汽油燃烧	1.3×10^8
1人每日需要(3000kcal)	1.3×10^7
1kgTNT爆炸	4.6×10^6
1个馒头提供	2×10^6
地球表面每 m^2 每秒接受太阳能	1×10^3
一次引体向上	3×10^2

[例 1] 利用机械能守恒定律再解 § 2.5 例 3，求线摆下 θ 角时珠子的速度。

解：如图 4.17 所示，取珠子和地球作为被研究的系统。以线的悬点 O 所在高度为重力势能零点并相对于地面参照系（或实验室参照系）来描述珠子的运动。在珠子下落过程中，绳拉珠子的外力 T 总垂直于珠子的速度 v ，所以此外力不做功。因此对所讨论的系统来说，只有保守力——重力做功。所以系统的机械能守恒。此系统的初态的机械能为

$$E_A = mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = 0$$

线摆下 θ 角时系统的机械能为

$$E_B = -mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

由于 $h_B = -l \sin \theta$, $v_B = v$, 所以

$$E_B = -mgl \sin \theta + \frac{1}{2}mv^2$$

机械能守恒给出 $E_B = E_A$

$$\text{或} \quad -mgl \sin \theta + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$\text{由此得} \quad v = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

与以前得出的结果相同。

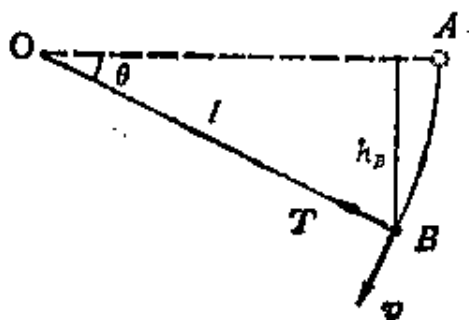


图 4.17

这个题大家在中学就是这么解的。但仔细分析起来，这个解法有以下两方面的问题。一是既然选珠子和地球作为研究的系统，为什么表示系统的机械能的式子里没有地球的动能一项。二是既然选珠子和地球作为系统，就不能同时再把地球或固定在地球上的实验室作为描述它们运动的参照系，而且考虑到地球的运动时，地面参照系也不再是惯性参照系，上述分析当然就不正确了。严格讲来，应该相对于另外的某个惯性系来分析珠子和地球这一系统的运动。但由于地球的质量远远大于珠子的质量，所以在珠子下落的时间段内，它和珠子的相互引力引起的它的速度是非常小的。这样就可以十分近似地把地球看成是静止于惯性参照系中。珠子相对于那个惯性参照系的速度也就可以用它相对于地球（或实验室）的速度代替。同时由于地球相对于那个惯性系的速度很小，而动能

又和速度的平方成正比,所以和珠子的动能相比,地球的动能可以忽略不计。这就是系统的机械能公式中不出现地球的动能的原因。由此可知,上述解题分析只是一种近似处理。当然,由于地球质量与地面物体相比非常大,所以这种近似是足够精确的。实际上在一般讨论地球和物体系统的能量问题时都是这样处理的。

读者可能已经注意到,我们已经用三种不同的方法来解此题了,现在可以清楚地比较三种解法的不同;在第一种解法中,我们直接应用牛顿第二定律本身,牛顿第二定律公式的两侧,“力侧”和“运动侧”,都用纯数学方法进行积分运算。在第二种方法中,我们应用了功和动能的概念,这时还需要对力侧进行积分来求功,但是运动侧已简化为只需要计算动能增量了。这一简化是由于对运动侧用积分进行了预处理的结果。现在,我们用了第三种解法,没有用任何积分,只是进行代数的运算,因而计算又大大简化了。这是因为我们又用积分预处理了力侧,也就是引入了势能的概念,并用计算势能差来代替用线积分去计算功的结果。大家可以看到,即使基本定律还是一个,但是引入新概念和建立新的定律形式也能使我们在解决实际问题时获得很大的益处。以牛顿定律为基础的整个牛顿力学理论体系的大厦可以说都是在这种思想的指导下建立的。

[例2] 如图 4.18,一辆实验小车可在光滑水平桌面上自由运动。车的质量为 M ,车上装有长度为 L 的细杆,质量不计;杆的一端可绕固定于车架上的光滑轴 O 在竖直面内摆动,杆的另一端固定一钢球,球质量为 m 。把钢球托起

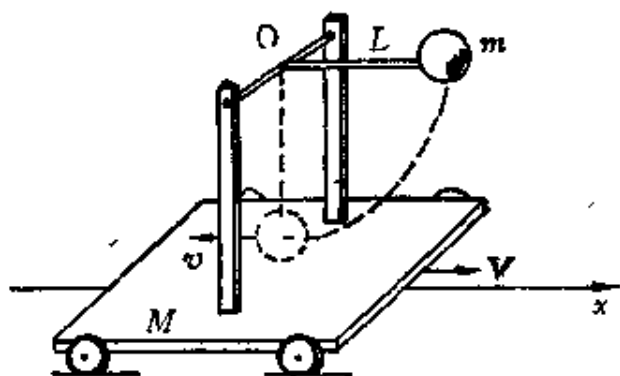


图 4.18

使杆处于水平位置。这时车保持静止,然后放手,使球无初速地下摆。求当杆

摆至竖直位置时,钢球及小车的运动速度。

解: 设当杆摆至竖直位置时钢球与小车的速度分别为 v 与 V (相对于桌面), 如图所示。因这两个速度都是未知的, 所以必须找到两个方程式才能求解。

先看功能关系。把钢球, 小车, 地球看作一个系统。此系统所受外力为光滑水平桌面对小车的作用力, 此力和小车运动方向垂直, 所以不做功。有一个内力为杆与小车在光滑轴 O 处的相互作用力。由于这一对作用力与反作用力没有相对位移, 所以它们做功之和为零。因此在钢球小车运动过程中只有保守内力——重力做功, 所以系统的机械能应守恒。以球的最低位置为重力势能的势能零点, 则钢球的最初势能为 mgL 。由于小车始终在水平桌面上运动, 所以它的重力势能不变, 因而可不考虑。这样, 系统的机械能守恒就给出

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgL$$

再看动量关系。这时取钢球和小车为系统, 因桌面光滑, 此系统所受的水平合外力为零, 因此系统在水平方向的动量守恒。列出沿图示水平 x 轴的分量式, 可得

$$MV - mv = 0$$

以上两个方程式联立, 可解得

$$v = \sqrt{\frac{M}{M+m} 2gL}$$

$$V = \frac{m}{M}v$$

$$= \sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)} 2gL}$$

上述结果均为正值, 这表明所设的速度方向是正确的。

[例3] 用一个轻弹簧把一个金属盘悬挂起来, 如图 4.19 所示。这时弹簧伸长了 $l_1 = 10$ cm。一个质量和盘相同的泥球, 从高于盘 $h = 30$ cm 处由静止下落到盘上。求此盘向下运动的最大距离 l_2 。

解: 本题可分为三个过程进行分析。

首先是泥球自由下落过程。它落到盘上时的速度为

$$v = \sqrt{2gh}$$

接着是泥球和盘的碰撞过程。把盘和泥球看做一个系统。因二者之间

的冲力远大于它们所受的外力(包括弹簧的拉力和重力), 所以可以认为系统的动量守恒。设泥球与盘的质量都是 m , 它们碰撞后刚粘合在一起时的共同速度为 V , 按图写出沿 y 方向的动量守恒的分量式, 可得

$$mv = (m + m)V$$

由此得

$$V = \frac{v}{2} = \sqrt{gh/2}$$

最后是泥球和盘共同下降的过程。选弹簧、泥球和盘以及地球为系统。以泥球和盘开始共同运动时为系统的初态, 二者到达最底点时为末态。在此过程中只有保守内力做功, 所以系统的机械能守恒。以弹簧的自然伸长为它的弹性势能的零点, 以盘的最低位置为重力势能零点, 则系统的机械能守恒应由下式表示

$$\frac{1}{2}(2m)V^2 + (2m)gl_2 + \frac{1}{2}kl_1^2 = \frac{1}{2}k(l_1 + l_2)^2$$

此式中弹簧的倔强系数可以通过最初盘的平衡状态求出, 结果是

$$k = mg/l_1$$

将此值以及 V^2 的值 $(gh/2)$ 和 $l_1 = 10\text{cm}$ 代入上式, 化简后可得

$$l_2^2 - 20l_2 - 300 = 0$$

解此方程得

$$l_2 = 30, -10$$

取前一正数解, 即得盘向下运动的最大距离为 $l_2 = 30\text{cm}$

[例 4] 求物体从地面出发的逃逸速率, 即逃脱地球引力所需要的从地面出发的最小速率。地球半径取 $R = 6.4 \times 10^6\text{m}$

解: 选地球和物体作为被研究的系统。当物体离开地球飞去时, 只有保守内力做功, 所以这一系统的机械能守恒。以 v 表示物体离开地面时的速率, 以 v_∞ 表示物体远离地球时的速率(相对于地面参照系)。由于将无穷远分离当作了万有引力势能的势能零点, 所以机械能守恒定律给出

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + 0$$

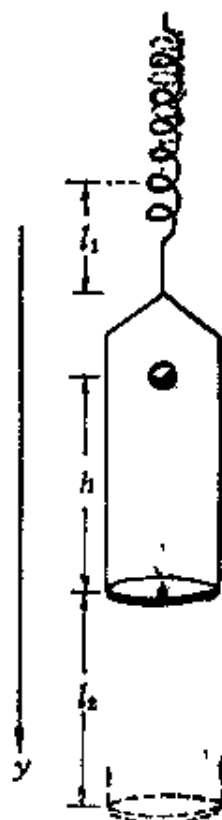


图 4.19

逃逸速率应为 v 的最小值, 这和在无穷远时物体的速率 $v_{\infty}=0$ 相对应, 而由上式得出逃逸速率为

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

由于在地面上 $\frac{GM}{R^2} = g$,

所以 $v_e = \sqrt{2Rg}$

代入已知数据可得

$$v_e^* = \sqrt{2 \times 6.4 \times 10^6 \times 9.8} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

当物体以 v_e 的速率离开地球表面到无穷远的过程中, 它的动能逐渐减小到零, 它的势能(负值)大小也逐渐减小到零, 在任意时刻机械能总等于零。这种情况都显示在图 4.20 中。

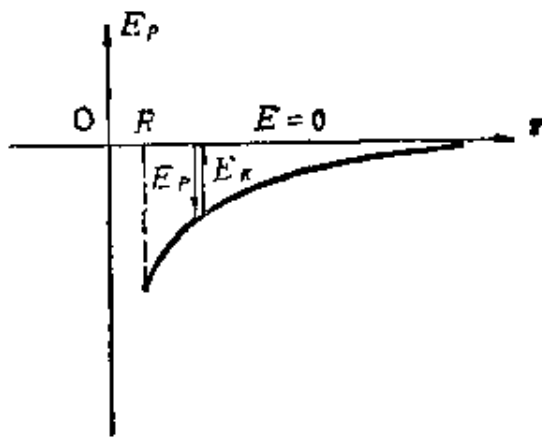


图 4.20

以上计算出的 v_e 又叫做第二宇宙速度。第一宇宙速度是使物体可以环绕地球表面运行所需的最小速度。其值可以用牛顿第二定律直接求得, 为

$7.90 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。第三宇宙速度则是使物体脱离太阳系所需的最小速度, 这个计算过程较为复杂, 这里仅给出其数值为 $1.67 \times 10^4 \text{ m/s}$ 。

【例 5】 水星绕太阳运行轨道的近日点到太阳的距离为 $r_1 = 4.59 \times 10^7 \text{ km}$, 远日点到太阳的距离为 $r_2 = 6.98 \times 10^7 \text{ km}$ 。求水星越过近日点和远日点时的速率 v_1 和 v_2 。

解: 分别以 M 和 m 表示太阳和水星的质量, 由于在近日点和远日点处水星的速度方向与它对太阳的矢径方向垂直, 所以它对太阳的角动量分别为 mr_1v_1 和 mr_2v_2 。由角动量守恒可得

$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

又由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

联立解上面两个方程可得

$$v_1 = \left[2GM \frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)} \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30} \times \frac{6.98}{4.59 \times (4.59 + 6.98) \times 10^{10}} \right]^{1/2} \\
&= 5.91 \times 10^4 \text{ m/s} \\
v_2 &= v_1 \frac{r_1}{r_2} = 5.91 \times 10^4 \times \frac{4.59}{6.98} = 3.88 \times 10^4 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

§ 4.10 守恒定律的意义

我们已介绍了动量守恒定律，角动量守恒定律和能量守恒定律。自然界中也还存在着其它的守恒定律。例如质量守恒定律，电磁现象中的电荷守恒定律，粒子反应中的重子数、轻子数、奇异数、宇称守恒定律等等。守恒定律都是关于变化过程的规律，它们都说的是只要过程满足一定的整体条件，就可以不必考虑过程的细节而对系统的初、末状态的某些特征下结论。不究过程细节而能对系统的状态下结论，这是各个守恒定律的特点和优点。在物理学中分析问题时常常用到守恒定律。对于一个待研究的物理过程，物理学家总是首先用已知的守恒定律出发来研究其特点，而先不涉及其细节，这是因为很多过程的细节有时还不知道，有时太复杂而难以处理。只是在守恒定律都用过之后，还未能得到所要求的结果时，才对过程的细节进行细致而复杂的分析。这就是守恒定律在方法论上的意义。

正是由于守恒定律的这一重要意义，所以物理学家们总是想方设法找出在所研究的现象中存在着哪些量的守恒。一旦发现了某种守恒现象，他们就首先用以整理过去的经验并总结出定律。尔后，在新的事例或现象中对它进行检验，并且借助于它作出有把握的预见。如果在新的现象中发现某一守恒定律不对，人们常是更精确地或更全面地对现象进行观察研究，以便寻找那些被忽视了的因素，从而恢复守恒定律的应用。在有些看来守恒定律失效的

情况下，人们还千方百计地寻求“补救”的办法，这就要扩大守恒量的概念，引进新的形式，从而使守恒定律更加普遍化。但这也并非都是可能的。曾经有物理学家看到有的守恒定律无法“补救”时，便大胆地宣布了这些守恒定律不是普遍成立的，它们是有缺陷的守恒定律。不论是哪种情况，都能使人们对自然界的认识进入一个新的更深入的阶段。事实上，守恒定律的发现，推广和修正，在科学史上的确对人对自然的认识起过巨大的推动作用。

在前面我们都是从牛顿定律出发来导出动量，角动量和机械能守恒定律的。也曾指出过这些守恒定律都有更广泛的适用范围。的确，在牛顿定律已不适用的物理现象中，这些守恒定律仍然保持正确，这说明这些守恒定律有更普遍更深刻的根基。现代物理学已确定地认识到这些守恒定律是和自然界的更为普遍的属性——时空对称性相联系着的。任一给定的物理实验(或物理现象)的发展过程和该实验所在的空间位置无关，即换一个地方做，该实验进展的过程完全一样。这个事实叫**空间平移对称性**，也叫**空间的均匀性**。动量守恒定律就是这种对称性的表现。任一给定的物理实验的发展过程和该实验装置在空间的取向无关，即把实验装置转一个方向该实验进展的过程完全一样。这个事实叫**空间转动对称性**，也叫**空间的各向同性**。角动量守恒定律就是这种对称性的表现。任一给定的物理实验的进展过程和该实验开始的时间无关，即：例如，迟三天开始做实验，还是现在就开始做，该实验的进展过程也完全一样。这个事实叫**时间平移对称性**，也叫**时间均匀性**。能量守恒定律就是时间的这种对称性的表现。在现代物理理论中，可以由上述对称性导出相应的守恒定律，而且可进一步导出牛顿定律来。这种推导过程已超出我们现在讨论的水平。但可以进一步指出的是，除上述三种对称性外，自然界还存在着其他的对称性。而且，相应于每一种对称性，都存在着一个守恒定律。多么美妙的自

然规律啊！

本章提要

1. 功:

$$dW = F \cdot dr, \quad W_{AB} = \int_A^B F \cdot dr$$

2. 动能定理:

$$W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

3. 一对力的功:

两个质点间一对内力的功之和为

$$W_{AB} = \int_A^B f \cdot dr_{21},$$

它只决定于两质点的相对路径。

4. 保守力: 做功与相对路径形状无关的一对力, 或者说沿相对的闭合路径移动一周做功为零的一对力。

5. 势能: 对保守内力可引进势能概念, 它决定于系统的位形

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = -\Delta E_P$$

$$E_{PA} = W_{AR}, \quad E_{PR} = 0$$

万有引力势能: $E_P = -\frac{Gm_1m_2}{r}$, 以两质点无穷远分离为势能零点。

重力势能: $E_P = mgh$, 以物体在地面为势能零点。

弹簧的弹性势能: $E_P = \frac{1}{2}kx^2$, 以弹簧的自然伸长为势能零点。

*6. 由势能函数求得保守力:

$$F_i = -\frac{dE_p}{dt}$$

7. **机械能守恒定律**: 在只有保守内力做功的情况下, 系统的机械能保持不变。它是普遍的能量守恒定律的特例。
8. **守恒定律的意义**: 不究过程的细节而对系统的初末状态下结论; 相应于自然界的每一种对称性, 都存在着一个守恒定律。

思 考 题

4.1 行星绕日 S 运行时(图 4.21), 从近日点 P 向远日点 A 运行的过程中, 太阳对它的引力做正功还是做负功? 从远日点 A 向近日点 P 运动的过程中, 太阳对它的引力做正功还是做负功? 由这个功来判断, 行星的动能以及行星和太阳系统的引力势能在这两阶段运动中各是增加还是减少?

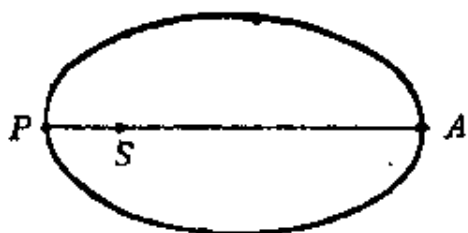


图 4.21

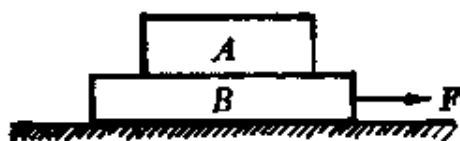


图 4.22

4.2 如图 4.22 所示。木块 A 放到木块 B 上, B 又放到桌面上, 今用力 F 拉木块 B 使二者一同作加速运动。在运动过程中, 两个木块都受到哪些力? 这些力各自做功否? 做正功还是做负功?

4.3 如图 4.23 所示, 物体 A 放在木制斜面 B 上, 斜面放在一光滑水平面上。当物体 A 下滑时, 物体 B 也将运动。试根据一对力的功的特点说明, 在运动过程中 A 、 B 间的一对摩擦力做功之和是正还是负? A 、 B 间的一对正压力做功之和又如何?

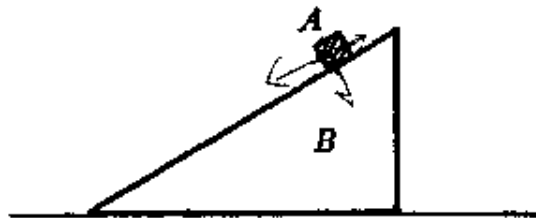


图 4.23

4.4 某一个力做的功, 例如你在运动的卡车上拉木箱时你的拉力做的

功与参照系的选择有关吗?

4.5 判断下述说法的正误,并说明理由。

(1) 不受外力作用的系统,它的动量和机械能必然同时都守恒。

(2) 内力都是保守力的系统,当它所受的合外力为零时,它的机械能必然守恒。

(3) 只有保守内力作用而不受外力作用的系统,它的动量和机械能必然都守恒。

4.6 忽略其他所有外力,考虑一个物体和地球组成的系统。当物体自由下落时,这一系统的动量守恒吗?这时还能把地球作为参照系来计算系统的总动量吗?

4.7 对比万有引力定律和库仑定律,你能直接写出两个电荷(q_1, q_2)相距 r 时的静电势能吗?这个势能可能有正值吗?

4.8 如图 4.24 所示物体 B (质量为 m) 放在光滑斜面 A (质量为 M) 上。二者最初静止于一个光滑水平面上。有人以 A 为参照系,写下确定 B 下落高度 h 时的速率 u 的公式为

$$mgh = \frac{1}{2} mu^2$$

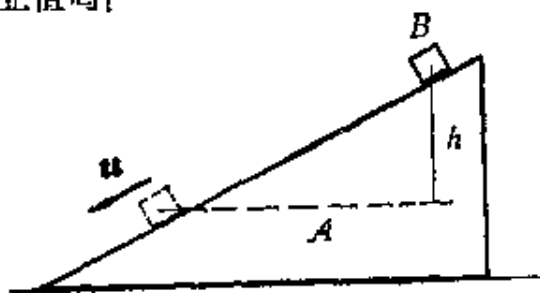


图 4.24

其中 u 是 B 相对于 A 的速度。这一公式为什么错了?正确的公式应如何写?

4.9 如图 4.25 所示的两个由轻质弹簧和小球组成的系统,都放在水平光滑平面上,今拉长弹簧然后松手。在小球来回运动的过程中,两系统的动量是否都改变?两系统的动能是否都改变?两系统的机械能是否都改变?

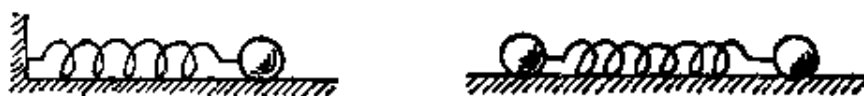


图 4.25

4.10 在匀速水平开行的车厢内悬吊一个单摆。相对于车厢参照系,摆球的机械能是否保持不变?相对于地面参照系,摆球的机械能是否也保持不变?

4.11 现在已制造出一种船只,其基本结构如图 4.26 所示。它有一根动力轴。轴的前端有螺旋桨,迎头吹来的逆风吹动叶片旋转。通过动力轴的

带动，船后的螺旋桨推动器就旋转起来。此推进器向后推水时，船本身就逆风前进了。试用动量守恒与机械能守恒分析这种真正的逆风行船现象。能用类似的装置使陆地上的车辆逆风行驶吗？

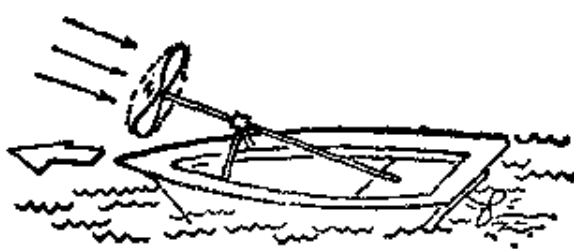


图 4.26

习 题

4.1 电梯由一个起重间与一个配重组成。它们分别系在一根绕过定滑轮的钢缆的两端(图 4.27)。起重间(包括负载)的质量为 $M=1200\text{kg}$ ，配重的质量为 $m=1000\text{kg}$ 。此电梯由和定滑轮同轴的电动机所驱动。假定起重间由低层从静止开始加速上升，加速度 $a=1.5\text{m/s}^2$

(1) 这时滑轮两侧钢缆中的拉力各是多少？

(2) 加速时间为 $t=1.0\text{s}$ ，在此时间内电动机所做功是多少？(忽略滑轮与钢缆的质量)。

(3) 在加速 $t=1.0\text{s}$ 以后，起重间匀速上升。求它再上升 $\Delta h=10\text{m}$ 的过程中，电动机又做多少功？



图 4.27

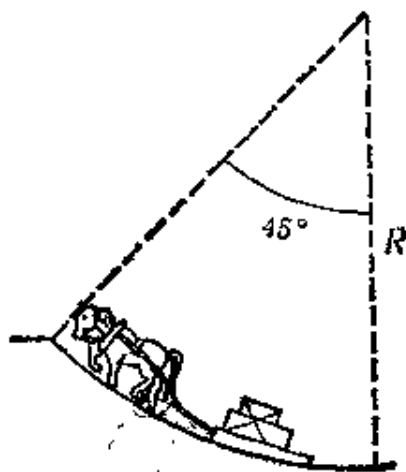


图 4.28

4.2 一匹马拉着雪橇沿着冰雪覆盖的弧形路面极缓慢地匀速移动，这

圆弧路面的半径为 R , 如图 4.28 所示。设马对雪橇的拉力总是平行于路面。雪橇的质量为 m 。它与路面的滑动摩擦系数为 μ_k 。当把雪橇由底端拉上 45° 圆弧时, 马对雪橇做功多少? 重力和摩擦力各做功多少?

4.3 一长方体蓄水池, 面积为 $s=50\text{m}^2$, 贮水深度为 $h_1=1.5\text{m}$ 。假定水平面低于地面的高度是 $h_2=5\text{m}$ 。问要将这池水全部抽到地面上来, 抽水机需做功多少? 若抽水机的效率为 80% , 输入功率为 $P=35\text{kW}$, 则抽完这池水需要多长时间?

4.4 矿砂由料槽均匀落在水平运动的传送带上, 落砂量 $q=50\text{kg/s}$ 。传送带匀速移动, 速率为 $v=1.5\text{m/s}$ 。求电动机拖动皮带的功率, 这一功率是否等于单位时间内落砂获得的动能? 为什么?

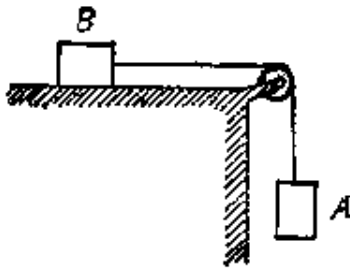


图 4.29

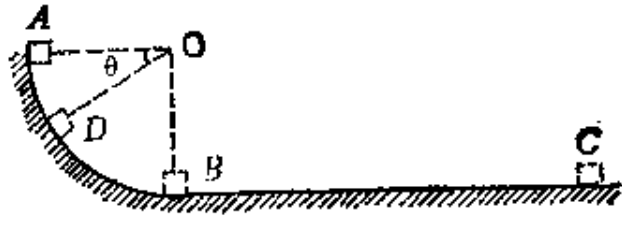


图 4.30

4.5 如图 4.29 所示, $m_A=m_B=50\text{g}$, 物体 B 与桌面间的滑动摩擦系数 $\mu_k=0.10$ 。试分别用动能定理和牛顿第二定律求物体 A 自静止落下 $h=1\text{m}$ 时的速度。

4.6 一质量 $m=2\text{kg}$ 的物体, 由 A 点在一铅直平面内沿半径为 1m 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧轨道滑到 B 点, 又经过一段水平距离 $BC=3\text{m}$ 后停了下来(图 4.30)。假定物体到达 B 点时的速率 $v_B=4\text{m/s}$, 摩擦系数处处相同。

- (1) 求从 A 滑到 B 和从 B 滑到 C 的过程中, 摩擦阻力各做了多少功?
- (2) BC 与物体间的摩擦系数 μ_k 是多少?
- (3) 如圆弧轨道 AB 与物体间为光滑接触, 则在 D 点处物体的速度, 加速度和物体对圆弧轨道的压力各是多少? 假定 OD 与水平面间的夹角 $\theta=30^\circ$ 。

4.7 一弹簧倔强系数为 k , 一端固定在 A 点, 另一端连一质量为 m 的物体, 靠在光滑的半径为 a 的圆柱体表面上, 弹簧原长为 AB , 如图 4.31。在变力 F 作用下, 物体极缓慢地沿表面从位置 B 移到 C , 求力 F 所做的功。

- (1) 用积分方法作。

(2) 用动能定理作。

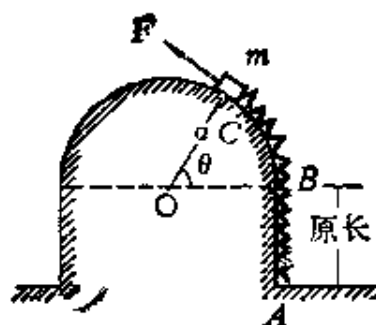


图 4.31

4.8 如图 4.32 所示, 一木块 M 静止在光滑水平面上。一子弹 m 沿水平方向以速度 v 射入木块内一段距离 S' 而停在木块内。求:

(1) 在这一过程中子弹和木块的动能变化各是多少? 子弹和木块间的摩擦力对子弹和木块各做了多少功?

(2) 证明子弹和木块的总机械能的增量等于一对摩擦力之一沿相对位移 S' 做的功。



图 4.32

4.9 一质量为 m 的人造地球卫星沿一圆形轨道运动, 离开地面的高度等于地球半径的二倍(即 $2R$)。试以 m, R, G , 地球质量 M 表示出:

- (1) 卫星的动能;
- (2) 卫星在地球引力场中的引力势能;
- (3) 卫星的总机械能。

4.10 一竖直悬挂的弹簧(倔强系数为 k) 下端挂一物体。平衡时弹簧已有一伸长。若以物体的平衡位置为竖直 y 轴的原点, 相应位形作为弹性势能和重力势能的零点。试证: 当物体的位置坐标为 y 时, 弹性势能和重力势能之和为 $\frac{1}{2}ky^2$ 。

4.11 一轻质弹簧原长 l_0 , 倔强系数为 k , 上端固定, 下端挂一质量为 m 的物体, 先用手托住, 使弹簧保持原长。然后突然将物体释放, 物体达最低位置时弹簧的最大伸长和弹性力是多少? 物体经过平衡位置时的速率多大?

4.12 如图 4.33 所示, 物体 A 的质量 $m=0.5\text{kg}$, 静止于光滑斜面上。它与固定在斜面底 B 端的弹簧 M 相距 $s=3\text{m}$ 。弹簧的倔强系数 $k=400\text{N/m}$ 。斜面倾角为 45° , 求当物体 A 由静止下滑时, 能使弹簧长度产生的最大压缩量是多大?

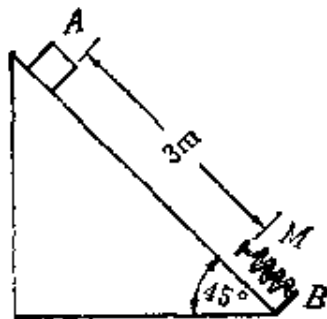


图 4.33

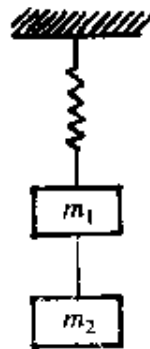


图 4.34

4.13 如图 4.34 所示, 弹簧下面悬挂着质量分别为 m_1, m_2 的两个物体, 开始时它们都处于静止状态。突然把 m_1 与 m_2 的连线剪断后, m_1 的最大速率是多少? 设弹簧的倔强系数 $k=8.9\text{N/m}$, 而 $m_1=500\text{g}$, $m_2=300\text{g}$ 。

4.14 m_1 与 m_2 可沿光滑表面 PQR 滑动, 如图 4.35 所示。开始将 m_1 压紧弹簧 (m_1 与弹簧未联接), 然后放手, 让 m_1 与静止在 Q 处的 m_2 作完全弹性碰撞。假定弹簧的倔强系数为 k , 开始压缩的距离为 x_0 。

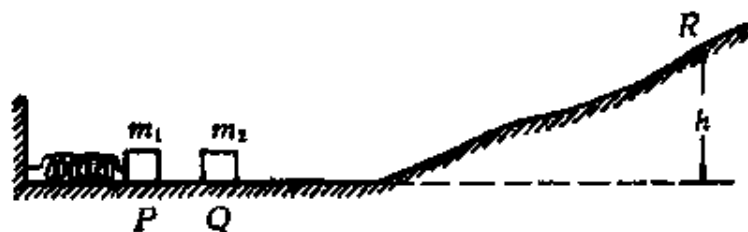


图 4.35

- (1) 如 $m_1 < m_2$, 问碰撞后 m_1 能再将弹簧压缩的距离 x 为多大?
- (2) 如 $m_1 = m_2$, x 又为多大?
- (3) 如仍有 $m_1 < m_2$, 而 m_2 到达 R 点时正好停止, 问原来压缩弹簧的距离 x_0 为多少?

4.15 一质量为 m 的物体, 从质量为 M 的圆弧形槽顶端由静止滑下, 设圆弧形槽的半径为 R , 张角为 $\pi/2$, 如图 4.36 所示。如所有摩擦都可忽略, 求:

- (1) 物体刚离开槽底端时,物体和槽的速度各是多少?
 (2) 在物体从 A 滑到 B 的过程中,物体对槽所做的功 W 。
 *(3) 物体到达 B 时对槽的压力。

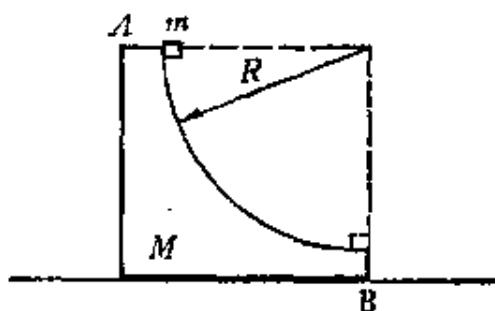


图 4.36

4.16 证明:在光滑的克朗棋盘面上,一个棋子撞击另一个静止的棋子后,二者总沿互成直角的方向离开,设棋子的质量相同。

4.17 一个星体的逃逸速率为光速时,亦即由于万有引力的作用光子也不能从该星体表面逃离时,该星体就成了一个“黑洞”,理论证明,对于这种情况,逃逸速率公式 ($v_e = \sqrt{2GM/R}$) 仍然正确,试计算太阳要是成为黑洞,它的半径应是多大(目前半径为 $R = 7 \times 10^8 \text{m}$)? 质量密度是多大?

4.18 在实验室内观察到相距很远的一个质子(质量为 m_p)和一个氦核(质量为 $4m_p$)沿一直线相向运动,速率都是 v_0 。求二者能达到的最近距离。

4.19 如图 4.37 所示,在水平光滑面上有一轻质弹簧,它的一端固定,另一端系一质量为 m 的滑块。弹簧的倔强系数为 k ,最初静止于其自然长度 l_0 ,今用力猛击滑块,使之获得一垂直于弹簧轴线的水平速度 v_0 。求此后当弹簧长度为 l 时,滑块的速度的大小和它的方向与弹簧轴线间的夹角。[提示:还要考虑滑块的角动量]

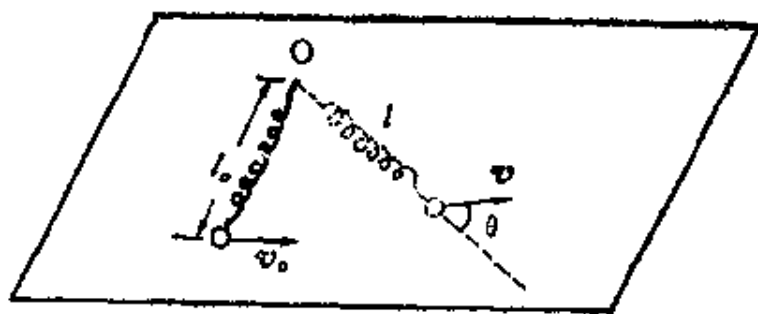


图 4.37

*4.20 证明:行星在轨道上运动的总能量为

$$E = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}$$

式中 M, m 分别为太阳和行星的质量, r_1, r_2 分别为太阳到行星轨道的近日点和远日点的距离。

*4.21 我国第一颗人造地球卫星的质量是 173kg, 其近地点高度是 439km, 远地点高度是 2384km, 求它的轨道总能量。

4.22 一质量为 3500kg 的铝制人造地球卫星绕地球作圆周运动, 轨道高度为 100km。由于空气阻力它逐渐减速最后撞回地面, 求

(1) 它在 100km 高处运行时的总能量和落到地上后的总能量以及它们的差。

(2) 如果减少的能量都被此人造卫星以热量形式吸收, 它会被全部熔化吗? 它会被全部蒸发吗? 已知铝的熔解热是 $3.98 \times 10^5 \text{J/kg}$, 铝的蒸发热是 $1.05 \times 10^7 \text{J/kg}$ 。

*4.23 已知某双原子分子的原子间相互作用的势能函数为

$$E_p(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}$$

其中 A, B 为常量, x 为两原子间的距离。

试求原子间作用力的函数式及原子间相互作用力为零时的距离。

II. 同步卫星的发射

1957年，苏联成功地发射了第一颗人造地球卫星，使卫星通讯（即在某地将信号发向卫星，然后再由卫星转发世界其他地区）及其它应用由设想进入了实验阶段。以后美国等其他国家也都成功地发射了地球卫星。我国的第一颗人造地球卫星是在1970年成功

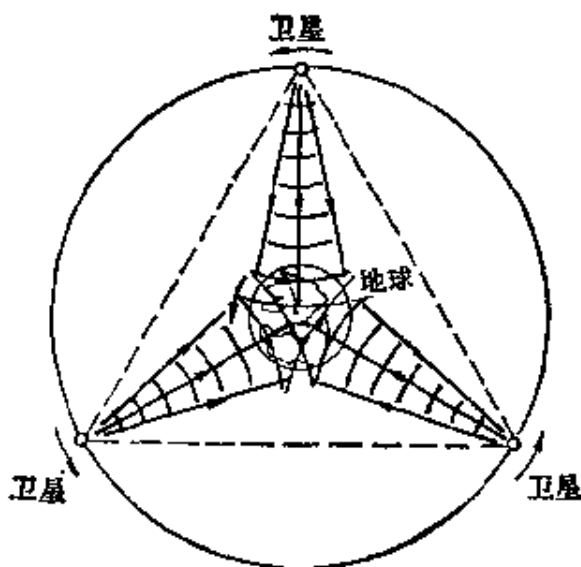


图 II.1 同步卫星示意图

地发射的。由于这些早期卫星都是在离地面不高的地方以相对于地面较大的速度运行，所以不能利用它们进行远距离连续长时间的通讯。

早在1945年一位英国科学家克拉克就曾在一篇科学幻想小说中设想把卫星发射到36000千米高空，使它相对地面静止。这种卫星就叫地球同步卫星。如果在赤道上空每隔 120° 各放置这样一颗卫星，有三颗这样的卫星，就能实现全球24小时通讯(图 II.1)。20多年之后，这个设想实现了。1964年美国成功地发射了一颗定点在赤道上空的同步卫星。我国也在1984年4月8日19时20分首次发射试验通信卫星成功，并在4月16日18时27分57秒成功地使它定

点于东经 125 度的赤道上空。目前已有几十颗同步卫星在赤道上空运行。全球的电视转播就是靠这些卫星实现的。

同步卫星的发射成功是近代尖端科学技术的伟大成就之一。同步卫星是利用运载火箭发射的。为了节省发射能量，在卫星进入同步轨道前，总是使它先经过若干中间轨道。目前发射的同步卫星一般用一个中间轨道，也有用两个或三个中间轨道的。

用一个中间轨道的同步卫星发射过程大致如下。如图 II.2 所示，运载火箭点火后，就带着卫星离开地面。先是进入停泊轨道依惯性飞行。在这一轨道上运行不久，火箭就把卫星推上一个大的椭圆轨道。这一轨道叫霍曼轨道（即转移轨道），其远地点和近地点均在赤道平面上，而且在远地点和同步轨道相交。在霍曼轨道上运行几周后，当卫星经过远地点时，其上的远地点发动机点火，改变卫星的航向，使之进入地球赤道平面，同时增大卫星速度，使之达到同步运行速度（ 3.07km/s ）。但是由于远地点发动机各种工程参数的偏差，卫星不能一下子就进入对地球静止的同步轨道，而是在这种轨道附近漂移。此后还需要通过遥控调整，使卫星定点于赤道上空某处。

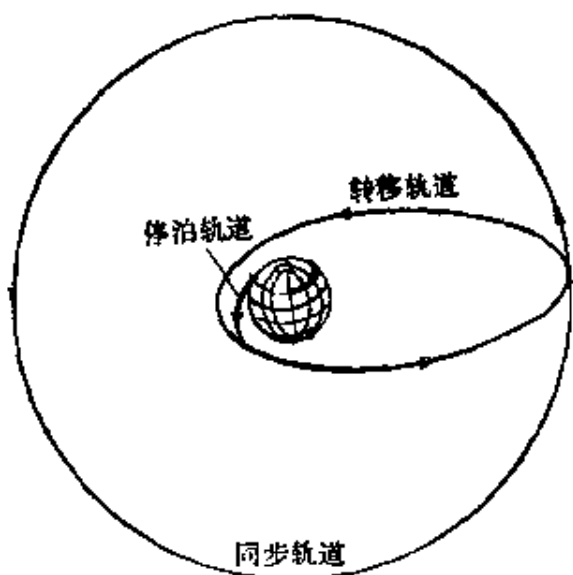


图 II.2 同步卫星发射轨道示意图 (1)

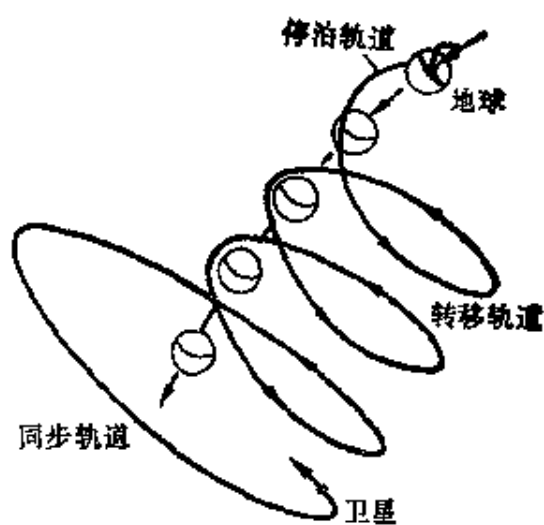


图 II.3 同步卫星发射轨道示意图 (2)

图 II.2 画的是相对于地球同步卫星发射过程中所经历的轨道。II.3 画出了相对于太阳系的同步卫星发射轨道。这都是些多么奇妙而美丽的曲线啊！从这里也可以看出当人们掌握了自然界的规律时，能创造出多么神奇的事迹！据说，当阿波罗飞船从月球向地球回飞时，地面站问宇航员：“现在谁在驾驶？”回答说：“我想主要是牛顿在驾驶！”这句话的确象征性地道出了实情。

B. 奇妙的对称性

B.1 对 称 美

人类和自然界都很喜欢对称。

对称是形象美的重要因素之一。远古时期人类就有这种感受了。我国西安半坡遗址出土的陶器(5000年前遗物)不但具有轴对称性,而且表面还绘有许多优美的对称图案。图B.1的鱼纹就是



图 B.1 半坡鱼纹

这种图案之一。当今世界利用对称给人以美感的形体到处都可看到。故宫的每座宫殿都是以中线为界左右对称的,而整个建筑群也基本上是以南北中心线为界按东西对称分布的。天坛的祈年殿(图B.2)则具有严格的对于竖直中心线的轴对称性。这样的设计都给人以庄严、肃穆、优美的感觉。近代建筑群也不乏以对称求美的例子。除建筑外,人们的服饰及其上的图样也常常具有对称性从而增加了体态美。我国古诗中有一种“回文诗”,顺唸倒唸(甚至横、斜、绕圈唸或从任一字开始唸)都成章。这可以说是文学创作中表现出的对称性。宋朝大诗人苏东坡的一首回文诗《题金山寺》是这样写的:

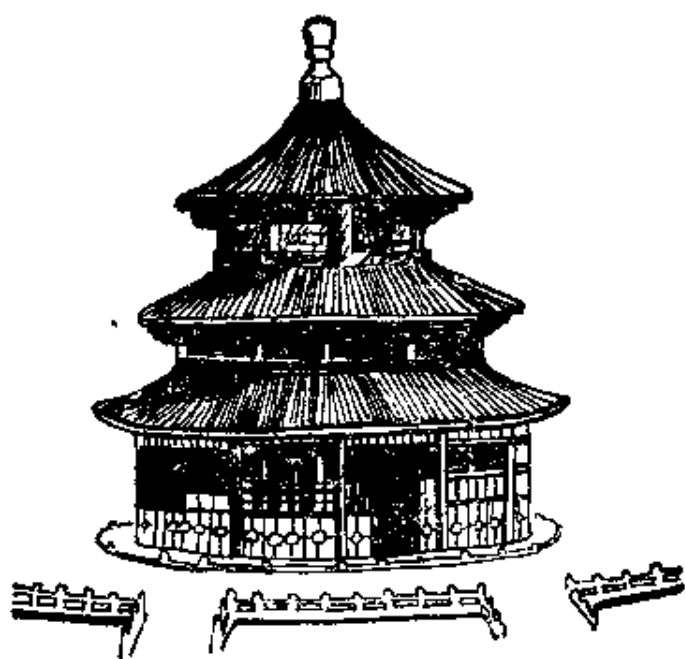


图 B.2 天坛祈年殿

潮随暗浪雪山倾， 远浦渔舟钓月明。
 桥对寺门松径小， 巷当泉眼石波清。
 迢迢远树江天晓， 蔼蔼红霞晚日晴。
 遥望四山云接水， 碧峰千点数鸥轻。

大自然的对称表现是随处可见的。植物的叶子几乎都有左右对称的形状(图B.3)。花的美丽和花瓣的轴对称或左右对称的分布有直接的关系。动物的形体几乎都是左右对称的。蝴蝶的美丽

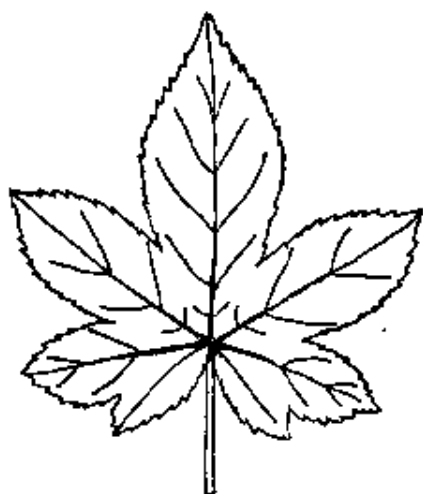


图 B.3 树叶的对称形状



图 B.4 蝴蝶的对称体形

和它的体态花样的左右对称分不开(图B.4)。在无机界最容易看到的是雪花的对称图象(图B.5)。这种对称外观是其中水分子排列的严格对称性的表现。分子或原子的对称排列是晶体的微观结构的普遍规律。图B.6是铂针针尖上原子对称排列在场离子显

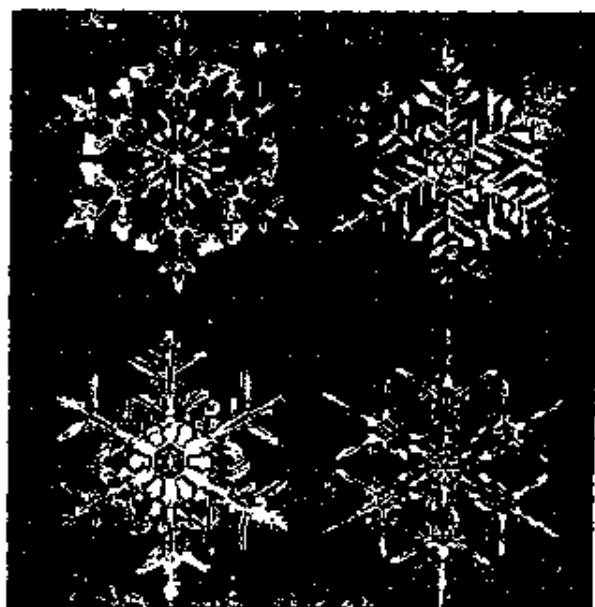


图 B.5 雪花的六角形花样



图 B.6 场离子显微镜显示的铂针针尖图形

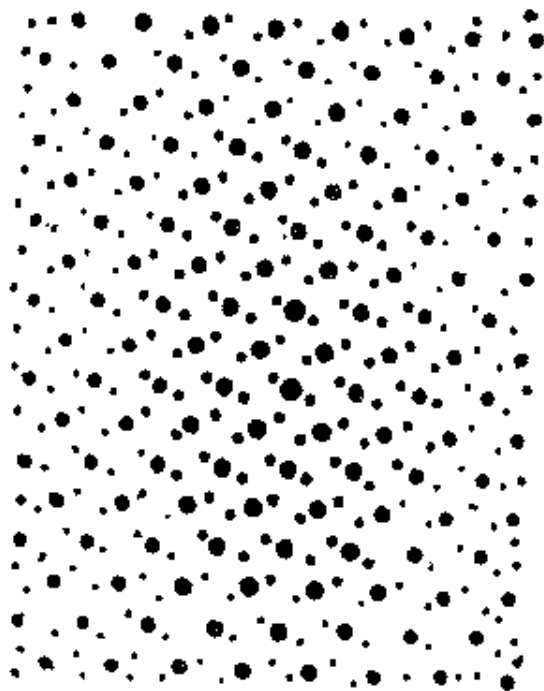


图 B.7 电子显微镜拍摄的 Fe_2S_2 分子的对称排列

显微镜下显示出的花样。图B.7是用电子显微镜拍摄的白铁矿晶体中 FeS_2 分子的排列图形。

B.2 对称性种种

上面我们多次谈到对称性，大家好象都理解其含义。但实际上也还都是一些直观的认识。关于对称性的普遍的严格的定义是德国数学家魏尔 1951 年给出的：**对一个事物进行一次变动或操作；如果经此操作后，该事物完全复原，则称该事物对所经历的操作是对称的；而该操作就叫对称操作。**由于操作方式的不同而有若干种不同的对称性。下面介绍几种常见的对称性。

1. **镜象对称。**也就是通常说的**左右对称**。图B.1到图B.5都具有这种对称性。它的特点是如果把各图中的中心线设想为一个

垂直于图面的平面镜与图面的交线，则各图的每一半都分别是另一半在平面镜内的象。用魏尔对称性的定义来说，是这样的：设 x 轴垂直于镜面，原点就在镜面上。将一半图形的坐标值 x 变成 $-x$ ，就得到了另一半图形(图B.8)。这 x 坐标的变号就叫镜象对称操作，也叫**空间反射操作**。左手图象经过这一操作就变成了右手图象，所以这种对称性又叫左右对称性。日常生活中的对称性常常指的是这种对称性。回文诗所表现的对称性可以认为是文学创作中的“镜象对称”。

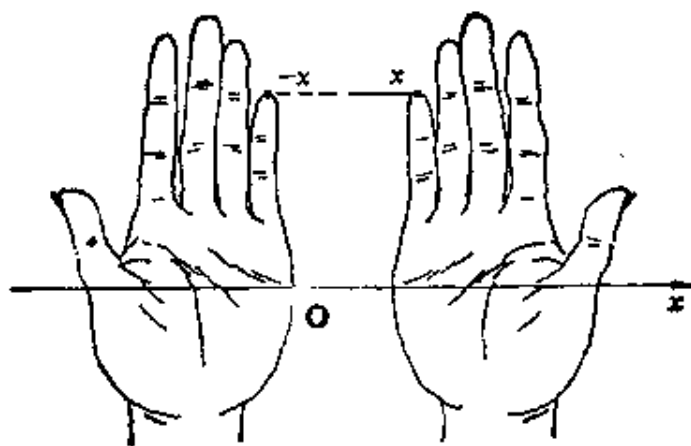


图 B.8 镜象对称操作

2. **转动对称**。如果使一个形体绕某一固定轴转动一个角度(转动操作)，它又和原来一模一样的话，这种对称叫转动对称或**轴对称**。轴对称有级次之别。图B.3中的树叶图形绕中心线转 180° 后可恢复原状，而雪花图形绕垂直于纸面的中心轴转动 60° 就可恢复原状。后者比前者的对称性级次高。祈年殿的外形绕其中心竖直轴几乎转过任意角度时都和原状一样，所以它具有更高级次的转动对称性。

如果一个形体对通过某一定点的任意轴都具有转动对称性，则该形体就具有**球对称性**，而那个定点就叫对称中心。具有球对称性的形体，从对称中心出发，各个方向都是一样的，这叫做**各向**

同性。

3. 空间平移对称。使一个形体发生一平移后它也和原来一模一样的话，该形体就具有空间平移对称性。平移对称性也有高低之分。一条无穷长直线对沿自身方向任意大小的平移都是对称的。一个无穷大平面对沿面内的任何平移都是对称的。但晶体

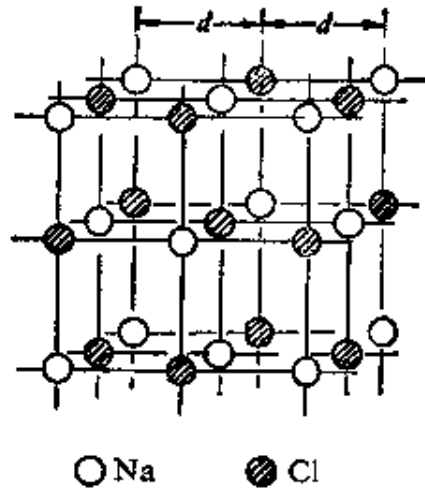


图 B.9 食盐晶体的平移对称性

(如食盐)只对沿确定的方向(如沿一系列离子的方向)而且一次平移的“步长”具有确定值(如图 B.9 中的 $2d$)的平移才是对称的。

以上是几种简单的空间对称性。事物对时间也有对称性。量子力学研究的微观对象还具有更抽象的对称性。这些在下文都有涉及。

B.3 物理定律的对称性

上节所讨论的对称性都是几何形体的对称性。研究它的规律对艺术、对物理学都有重要的意义。例如，晶体结晶点阵的对称性研究是研究晶体微观结构及其宏观性质的很重要的方法和内容。除了这种几何形体的对称性外，在物理学中具有更深刻意义的是物理定律的对称性。量子力学的发展特别表明了这一点。

物理定律的对称性是指经过一定的操作后，物理定律的形式保持不变。因此物理定律的对称性又叫**不变性**。

设想我们在空间某处做一个物理实验。然后将该套实验仪器(连同影响该实验的一切外部因素)平移到另一处。如果给以同样的起始条件，实验将会以完全相同的方式进行。这说明物理定律

没有因平移而发生变化。这就是物理定律的空间平移对称性。由于它表明空间各处对物理定律是一样的，所以又叫做**空间的均匀性**。

如果在空间某处做实验后，把整套仪器(连同影响实验的一切外部因素)转一个角度，则在相同的起始条件下，实验也会以完全相同的方式进行。这说明物理定律并没有因转动而发生变化。这就是物理定律的转动对称性。由于它表明空间的各个方向对物理定律是一样的，所以又叫**空间的各向同性**。

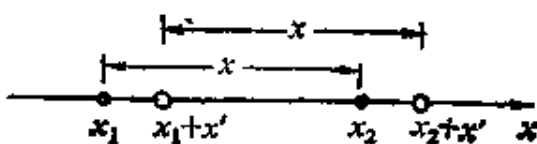
还可以举出一个物理定律的对称性，即物理定律对于匀速直线运动的对称性。这说的是如果我们先在一个静止的车厢内做物理实验。然后使此车厢做匀速直线运动。这时将发现物理实验和车厢静止时完全一样地发生。这说明物理定律不受匀速直线运动的影响。(更具体地说，这种对称性是指物理定律在洛仑兹变换下保持形式不变)。

在量子力学中还有经过更抽象的对称操作而物理定律保持形式不变的对称性，如经过全同粒子互换、相移、电荷共轭变换(即粒子与反粒子之间的相互转换)等操作所表现出的对称性等。

关于物理定律的对称性有一条很重要的定律，就是：**对应于每一种对称性都有一条守恒定律**。例如，对应于空间均匀性的是动量守恒定律；对应于空间的各向同性的是角动量守恒定律；对应于空间反射对称的是宇称守恒定律(见下节)；对应于量子力学相移对称的是电荷守恒定律等等。

关于空间的均匀性导致动量守恒可用下例作简单说明。设体系有两个相互作用的粒子组成而且只限于在 x 轴上运动(图B.10)。当两粒子之间的距离 $x=x_2-x_1$ 时，体系的势能为 $U=U(x_1, x_2)$ 。当体系发生一平移 x' 时，二粒子的坐标变为 x_1+x' 和 x_2+x' 。但二者间的距离仍为 $x=x_2-x_1$ 。空间的均匀性意味着势能应与 x'

无关(即平移下保持不变)。这只有在势能 U 只是两粒子的间距 x 的函数时才有可能。因此



$$U=U(x)=U(x_2-x_1)$$

图 B.10 两粒子系统

在这样的条件下,粒子 1 受的力为

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

粒子 2 受的力为

$$F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

两式对比可知, $F_1 + F_2 = 0$,

根据牛顿第二定律,有

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt}, \quad F_2 = \frac{dp_2}{dt}$$

由上式可得 $\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$

即二粒子体系的总动量 $(p_1 + p_2)$ 不随时间改变。这就是动量守恒。

其他的对称性和守恒定律的联系也可用类似的方法说明或严格证明。但因推证复杂,我们就省去了。

B.4 宇称守恒与不守恒

物理定律具有空间反射对称性吗?可以这样设想:让我造两只钟,它们所用的材料都一样,只是内部结构和表面刻度做得使一只钟和另一只钟的镜像完全一样(图B.11)。然后将这两只钟的发条拧得同样紧并且从同一对应位置开始走动。直觉告诉我们这两只钟将会完全按互为镜像的方式走动。这表明把所有东西从“左”式的换成“右”式的,物理定律保持不变。实际上大量的宏观现象和微

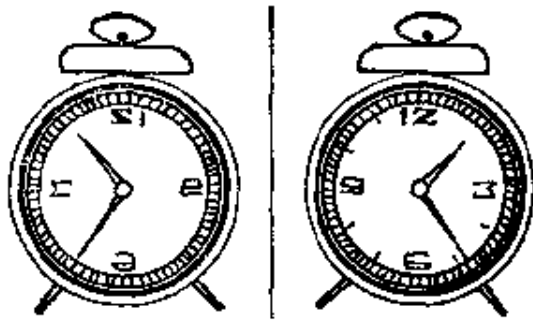


图 B.11 空间反射对称

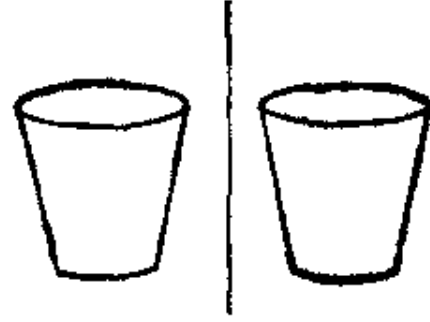


图 B.12 偶宇称

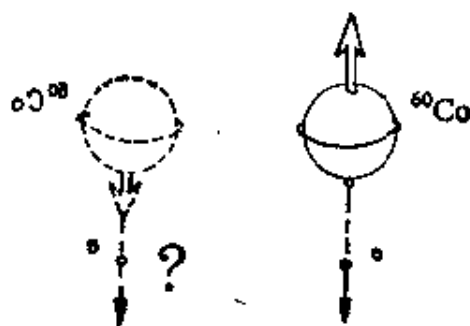
观过程都表现出这种物理定律的空间反射对称性。

和空间反射对称性相对应的守恒量叫宇称。在经典物理中不曾用到宇称的概念。在量子力学中宇称概念的应用给出关于微观粒子相互作用的很重要的定律——宇称守恒定律。下面我们用宏观的例子来说宇称这一比较抽象的概念。

对于某一状态的系统的镜象和它本身的关系只可能有两种情况。一种是它的镜象和它本身能完全重合或完全一样。一只正放着的圆筒状茶杯和它的镜象(图B.12)的关系就是这样。这样的系统(实际上是指处于某一状态的基本粒子)我们说它有偶宇称,其宇称值为+1。另一样情况是系统的镜象有左右之分,因而不能完全重合。右手的镜象成为左手,就是这种情况(图B.8)。钟和它的镜象也是这样(图B.11)。这样的系统(实际上也是指处于某一状态的基本粒子)我们说它具有奇宇称,其宇称值为-1。对应于粒子的轨道运动状态(如氢原子中电子的轨道运动)有轨道宇称值。某些粒子还有内禀宇称(对应于该粒子的内部结构),如质子的内禀宇称为+1, π 介子的内禀宇称是-1,等等。宇称具有可乘性而不是可加性,一个粒子或一个粒子系统的“总”宇称是各粒子的轨道宇称和内禀宇称的总乘积。宇称守恒定律指的就是在经过某一相互作用后,粒子系统的总宇称和相互作用前粒子系统的总宇称相等。

宇称守恒定律原来被认为和动量守恒定律一样是自然界的普遍定律。但是后来发现它并不是这样，事情是这样的：1956年夏天李政道和杨振宁在审查粒子相互作用中宇称守恒的实验根据时，发现并没有关于弱相互作用（发生在一些衰变过程中）服从宇称守恒的实验根据。为了说明当时已在实验中发现的困难，他们大胆地提出可能弱相互作用不存在空间反射对称性，因而也不服从宇称守恒定律的假定，并建议作验证这个假定的实验。当年吴健雄等就做了这样的实验，证明李、杨的假定是符合事实的。吴等的实验是在0.01K的温度下使 ^{60}Co 核在强磁场中排列起来，观察这种核衰变时在各方向上放出的电子的数目。实验结果是放出电子的数目并不是各向相同的，而是沿与 ^{60}Co 自旋方向相反的方向放出的电子数最多（图B.13）。这样的结果不可能具有空间反射对称性。

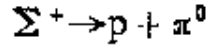
因为如图B.13中所示，实际发生的情况的镜象如图中虚线所示， ^{60}Co 核自旋的方向反过来了。因此，将是沿与 ^{60}Co 核自旋相同的方向放出的电子数最多。这是与实际发生的情况相反的。因而不会发生，也因此这一现象不具有



图B.13 证明空间反射不对称的实验

空间反射对称性因而不服从宇称守恒定律。宇称不守恒现象的发现在物理学发展史上有重要的意义。这也可由第二年（1957）李、杨就获得了诺贝尔物理奖看出。这样人们就认识到有些守恒定律是“绝对的”，如动量守恒、角动量守恒、能量守恒等，任何自然过程都要服从这些定律；有些守恒定律则有局限性，只适用于某些过程。如宇称守恒定律只适用于强相互作用和电磁相互作用引起的变化，而在弱相互作用中则不成立。

作为弱相互作用的例子，可以看下述衰变



实验测得反应前后轨道宇称无变化。粒子 Σ^+ 和质子 p 的内禀宇称为 $+1$ ， π^0 介子的内禀宇称为 -1 。此反应前后的总宇称符号明显相反，因而宇称不守恒。

B.5 自然界的不对称现象

宇称不守恒是物理规律的不对称的表现。在自然界还存在着一些不对称的事物。最重要的不对称事物是生物界的不对称性和粒子-反粒子不对称性。

动物和植物的外观看起来大都具有左右对称性。但是构成它们的蛋白质的分子却只有“左”的一种。我们知道生命的基本物质是蛋白质。蛋白质是由多种氨基酸组成的。每种氨基酸都有两种

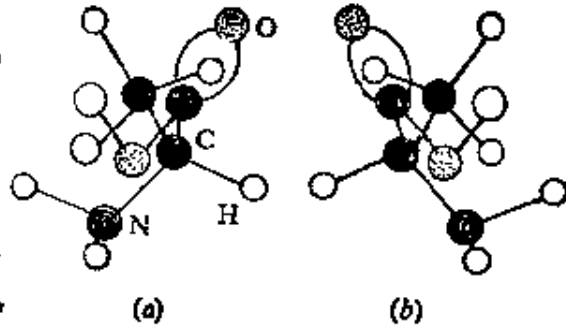


图 B.14 丙氨酸的两种异构体：

(a) L(左)型 (b) D(右)型

互为镜象的异构体。图 B.14 中画出了丙氨酸(alanine)的两种异构

体的模型。利用二氧化碳、乙烷和氨等人工合成的氨基酸，L(左)型和 D(右)型的异构体各占一半。可是，现代生物化学实验已确认：生物体内的蛋白质几乎都是由左型氨基酸组成的。对高等动物尤其如此。已经查明，人工合成的蔗糖也是由等量的左、右两型分子组成，但用甘蔗榨出的蔗糖则只有左型的。有人做过用人工合成的糖培养细菌的实验。当把剩下的糖水加以检验，竟发现其中的糖分子都是右型的。这说明细菌为了实现自己的生命，也只吃那种与自身型类对路的左型糖，所有生物的蛋白质分子几乎都是左型的，这才使那些以生物为食的生物能补充自己而维持生命。

在物理规律上并不阻碍右型生物的存在。如果由于某种原因产生了一只右型猫，虽然按物理规律的空间反射对称性它可以和通常的左型猫一样活动，但由于现实的自然界不存在它能够消化的右型食物，如右型老鼠，这只右型猫很快非饿死不可。饿死的右型猫腐烂后，复归自然，蛋白质就解体成为无机物了。为什么生物界在分子水平上有这种不对称存在，至今还是个谜。

自然界的另一不对称事实是关于基本粒子的。我们知道，在我们的地球（以及我们已能拿到其岩石的月球）上所有物质都是由质子和中子组成的原子核和核外电子构成的。按照20年代狄拉克提出的理论，每种粒子都有自己的反粒子，如反质子（带负电），反中子、反电子（带正电）等。30年代后各种反粒子的存在已被实验证实。根据对称性的设想（狄拉克理论指出）在自然界内粒子和反粒子数应该一样。虽然地球、月球甚至整个太阳系中粒子占绝对优势，几乎没有反粒子存在，但宇宙的其他地方“应该”存在着反物质的世界（物质、反物质相遇时是要湮灭的！）由于物质和反物质构成的星体光谱一样，当初的天文学观测手段很难下定论。因此许多人相信物质和反物质对称存在的说法。但现在各种天文观测则不利于粒子反粒子对称存在的假定。例如，可以认定宇宙射线中反质子和质子数目的比不超过 10^{-4} 数量级。为什么有这种粒子反粒子的不对称的存在？有人把它归因于宇宙大爆炸初期的某种机遇。但实际上到今天并没有完全令人信服的解释。

大自然是喜欢对称的。不对称（无论是物理定律还是具体事物）的存在似乎表明，上帝不愿意大自然十全十美。这正象人们的下述心态一样：绝大多数人喜欢穿具有对称图样的衣服；但在大街上也能看到有的人以他们的衣服的图案不对称为美。

B. 6 关于时间的对称性

如果我们用一套仪器做实验，该实验进行的方式或秩序是和开始此实验的时刻无关的。今天 12:00 开始做和推迟一周开始做，我们将得到完全一样的结果。这个事实表示了物理定律的时间平移对称性。可以证明，这种对称性导致能量守恒定律的成立。到目前为止，这种对称性和守恒定律还被认为是“绝对的”。

和空间反射类似，我们可以提出时间反演的操作。它的直观意义是时间倒流。现实中时间是不会倒流的，所以我们不可能直接从事时间反演的实验。但借助于电影我们可以“观察”时间倒流的结果从而理解时间反演的意义。理论分析对，时间反演操作就是把物理定律或某一过程的时间参量变号，即把 t 换成 $-t$ 。这一操作的结果如何呢？

先看时间反演对个别物理量的影响。在力学中，在时间反演操作下，质点的位置不受影响，但速度是要反向的。正放时物体下落的电影，倒放时该物体要上升。但加速度的方向不变。正放电影时看到物体下落时越来越快，加速度方向向下。同一影片倒放时会看到物体上升，而且越来越慢，加速度方向也是向下。物体的质量与时间反演无关。由于牛顿第二定律是力等于质量乘以加速度，所以经过时间反演操作，力是不变的。这也就是说牛顿定律具有时间反演对称性，电磁学中电荷是时间反演不变的，电流要反向；电场强度 E 是时间反演不变的，而磁场 B 要反向。实验表明，电磁学的基本规律——麦克斯韦方程具有时间反演对称性。量子力学的规律也具有时间反演对称性。

由于上述“第一级定律”的时间反演对称性，受这些规律所“直接”支配的自然过程（指单个粒子或少数粒子参与的过程）按“正”

或“倒”的次序进行都是可能发生的。记录两个钢球碰撞过程的电影，正放倒放，你看起来都是“真”的现象，即时序相反的现象在自然界都可能实际发生。与此类似，少数几个分子的相互碰撞与运动过程，也是可以沿相反方向实际发生的。这些事实表明了自然过程的可逆性。由于这种可逆性，我们不能区别这些基本过程进行方向的正或倒。这也就是说，上述第一级定律没有时间定向的概念，甚至由此也可以说，没有时间的概念。

可是，实际上我们日常看到的现象几乎没有一个是可逆的。所有现象都沿确定方向进行，绝不会按相反方向演变。人只能由小长大，而不能返老还童。茶杯可以摔碎，但那些碎片不会自动聚合起来复原为茶杯。如果你把一滴红水滴入一杯清水后发生的过程拍成电影，然后放映。当你看到屏幕上有一杯淡红色的水逐渐红，清分开最后形成清水中有一滴红水的图象时，你一定会马上呼叫“电影倒放了”，因为自然界实际上不存在这种倒向的过程。这些都说明自然界的实际过程是有一定方向的，是不可逆的，不具有时间反演对称性。

我们知道，宏观物体是由大量粒子组成的。我们所看到的宏观现象应是一个个粒子运动的总体表现。那么为什么由第一级规律支配的微观运动(包括粒子的各种相互作用)是可逆的，具有时间反演对称性，而它们的总体所表现的行为却是不可逆的呢？这是因为除了第一级规律外，大量粒子的运动还要遵守“第二级规律”即统计规律，更具体地说就是热力学第二定律。这一定律的核心思想是大量粒子组成的系统总是要沿着越来越无序或越来越混乱的方向发展。这一定律的发现对时间概念产生了巨大的影响：不可逆赋予时间以确定的方向。自然界是沿确定方向发展的。宇宙有了历史。时间是单向地流着因而也才有真正的时间概念。

宏观现象是不可逆的，微观过程都是可逆的。但1964年发

现了有的微观过程(K_L^0 介子的衰变过程)也显示了时间反演的不对称性,尽管十分微弱。看来,上帝在时间方面也没有给自然界以十全十美的对称。这一微观过程的不对称性会带来什么后果,是尚待研究的问题。

第五章 刚体的定轴转动

本章要求

1. 掌握描述刚体定轴转动的角位移、角速度和角加速度等概念,以及它们和有关线量的关系。
2. 掌握力对固定转轴的力矩的计算方法。
3. 掌握转动惯量的意义及计算方法,会利用平行轴定理。
4. 掌握刚体定轴转动定律,并能应用它求解定轴转动刚体和质点联动的问题。
5. 会计算力矩的功,刚体的转动动能,刚体的重力势能。能在有刚体做定轴转动的问题中正确地应用机械能守恒定律。
6. 能正确理解和计算刚体对固定轴的角动量,并能对含有定轴刚体在内的系统正确应用角动量守恒定律。
- *7. 理解进动现象,特别是外力方向和自旋轴方向的改变之间的关系。
8. 通过复习总结,理解刚体定轴转动的规律和质点运动的规律之间的联系。

§ 5.1 刚体的运动

刚体是固体物件的理想化模型。实际的固体在受力作用时总是要发生或大或小的形状和体积的改变。如果在讨论一个固体的

运动时，这种形状或体积的改变可以忽略，我们就把这个固体当做刚体处理。这就是说，刚体是受力时不改变形状和体积的物体。

刚体可以看成由许多质点组成，每一个质点叫做刚体的一个质元，刚体的这个质点系的特点就在于在外力作用下各质元之间的相对位置保持不变。既然是一个质点系，所以以前讲过的关于质点系的基本定律就都可以应用。当然，由于刚体这一质点系有其特点，所以这些基本定律就表现为更适合于研究刚体运动的特殊形式。

刚体的运动可以是平动、转动或二者的结合。如果刚体在运动中，联结体内两点的直线在空间的指向总保持平行，这样的运动就叫平动。在平动时，刚体内各质元的运动轨迹都一样，而且在同一时刻的速度和加速度都相等。因此在描述刚体的平动时，就可以用一点的运动来代表。通常就用刚体质心的运动来代表整个刚体的平动。

转动的最简单情况是定轴转动。在这种运动中各质元均做圆周运动，而且各圆的圆心都在一条固定不动的直线上，这条直线叫转轴。转动是刚体的基本运动形式之一。刚体的一般运动都可以认为是平动和绕某一转轴转动的结合。作为基础，本章只讨论刚体的定轴转动。

刚体绕某一固定转轴转动时，各质元的线速度、加速度一般是不同的(图 5.1)。但由于各质元的相对位置保持不变，所以描述各质元运动的角量，如角位移、角速度和角加速度都是一样的。因此描述刚体整体的运动时，用角量最为方便。如在第一章讲圆周运动时所提出过的，以 $d\theta$ 表示刚体在 dt 时间内转过的角位移，则刚体的角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

310
 $\int dt$
 (5.1)
 $\frac{d\theta}{dt}$
 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$
 • 179 •
 $\frac{2 \times 7 \times 2}{9}$
 $\frac{160 \times 7}{9 \times 2}$

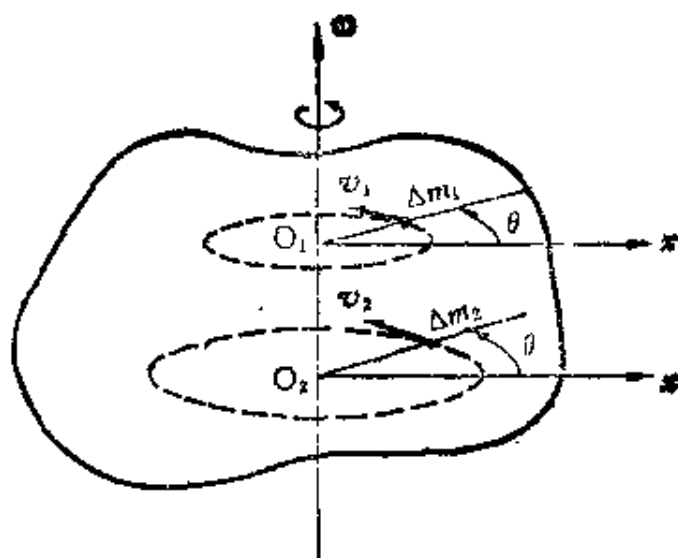


图 5.1 刚体的定轴转动

角速度 ω 可以定义为矢量，以 ω 表示。它的方向规定为沿轴的方向，其指向用右手螺旋法则确定(图 5.1)。

刚体的角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.2)$$

离转轴的距离为 r 的质元的线速度和加速度与刚体的角速度和角加速度的关系为

$$v = r\omega \quad (5.3)$$

$$a_t = r\alpha \quad (5.4)$$

$$a_n = r\omega^2 \quad (5.5)$$

定轴转动的一种简单情况是匀加速转动。在这一转动过程中，刚体的角加速度 α 保持不变。以 ω_0 表示刚体在时刻 $t=0$ 时的角速度，以 ω 表示它在时刻 t 时的角速度，以 θ 表示它在从 0 到 t 时刻这一段时间内的角位移，则仿照匀加速直线运动公式的推导可得匀加速转动的相应公式如下

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (5.6)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (5.7)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \quad (5.8)$$

[例] 一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机(图5.2)。滑轮半径 $r = 0.5\text{m}$, 如果升降机从静止开始以加速度 $a = 0.4\text{ m/s}^2$ 匀加速上升, 求:

- (1) 滑轮的角加速度。
- (2) 开始上升后, $t = 5\text{s}$ 末滑轮的角速度。
- (3) 在这 5 秒内滑轮转过的圈数。
- (4) 开始上升后, $t' = 1\text{s}$ 末滑轮边缘上一点的加速度(假设缆索和滑轮之间不打滑)。

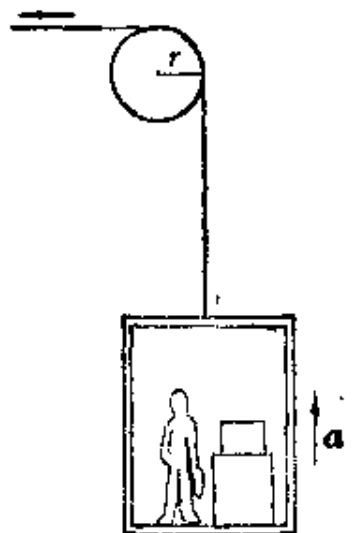


图 5.2

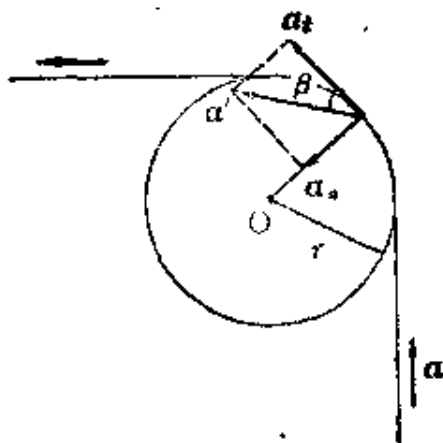


图 5.3

解

(1) 由于升降机的加速度和轮缘上一点的切向加速度相等, 所以滑轮的角加速度, 根据(5.4)式, 为:

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \text{ rad/s}^2$$

(2) 利用匀加速转动公式(5.6)式, 由于 $\omega_0 = 0$, 所以 5 秒末滑轮的角速度为:

$$\omega = \alpha t = 0.8 \times 5 = 4 \text{ rad/s}$$

(3) 利用公式(5.7)式, 滑轮转过的角度为:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 = 10 \text{ rad}$$

与此相应的圈数是 $\frac{10}{2\pi} = 1.6$ 圈。

(4) 参考图(5.3), 已知 $a_t = a = 0.4 \text{ m/s}^2$, 又由(5.6)式:

$$\omega' = \alpha t' = 0.8 \times 1 = 0.8 \text{ rad/s}$$

所以 $a_n = r\omega^2 = 0.5 \times 0.8^2 = 0.32 \text{ m/s}^2$

由此得轮缘上一点的加速度 a' 的大小为:

$$a' = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0.32^2 + 0.4^2} = 0.51 \text{ m/s}^2$$

这个加速度的方向与轮缘切线方向的夹角:

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{a_n}{a_t} = \text{tg}^{-1} \frac{0.32}{0.4} = 38.7^\circ$$

§ 5.2 刚体定轴转动定律

绕定轴转动的刚体的运动, 也可以用牛顿定律从理论上加以分析研究。下面我们就来推导绕定轴转动的刚体的角加速度和外力的关系。

考虑如图 5.4 所示的刚体的转动。它的转轴固定在惯性系中。我们就取这转轴为 z 轴, 设想此刚体由许多质元组成。先考虑第 i 个质元的运动。以 Δm_i 表示这一质元的质量, 以 r_i 表示它到转轴的距离。刚体转动时, 这一质元沿垂直于轴、圆心在轴上一点 O_i 、半径为 r_i 的圆周运动。以 \mathbf{a}_i 表示此质元的加速度, 以 \mathbf{F}_i 表示它所受的外力的合力, 以 \mathbf{f}_i 表示它所受内力的合力, 则由牛顿第二定律可得:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \Delta m_i \mathbf{a}_i$$

由于只是质元的切向加速度 a_{it} 和刚体的角加速度 α 有关, 所以我们取这一矢量式的切向分量式:

$$F_{it} + f_{it} = \Delta m_i a_{it}$$

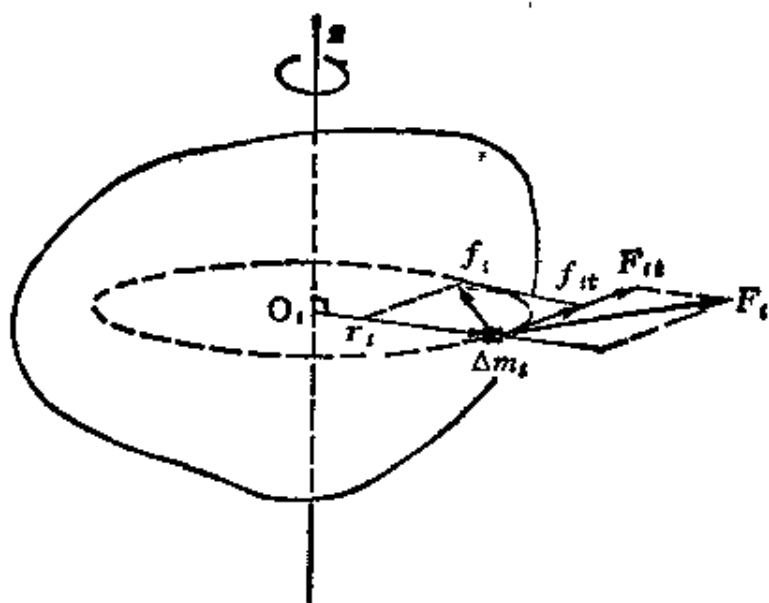


图 5.4 刚体内一个质元的运动和它的受力

利用关系式 $a_{ti} = r_i \alpha$, 此式可写成

$$F_{it} + f_{it} = \Delta m_i r_i \alpha$$

注意, 由于 Δm_i 限制在垂直于转轴的平面内作圆周运动, 所以此式中的切向分力不但垂直于圆半径 r_i , 而且还垂直于转轴。为了消去上式中的内力, 我们用 r_i 乘式中各项, 得:

$$F_{it} r_i + f_{it} r_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha \quad (5.9)$$

对照图 5.4, 可以看出 $F_{it} r_i$ 是 Δm_i 所受外力的垂直于转轴的分量对 O_i 点的力矩, $f_{it} r_i$ 是 Δm_i 所受内力的垂直于转轴的分量对 O_i 点的力矩, 其中 r_i 是力的作用点到转轴的垂直距离。它们分别叫做外力和内力对于转轴的力矩(区别于对于某定点的力矩)。当 F_{it} 或 f_{it} 的方向与 z 轴的方向符合右手螺旋法则时, 取正值; 否则, 取负值。

对刚体的所有质元都写下类似(5.9)式的式子, 然后把这些式子相加, 可得

$$\sum_i F_{it} r_i + \sum_i f_{it} r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \alpha \quad (5.10)$$

此式第一项是刚体所受的外力对转轴的力矩之和，又叫合外力矩。第二项为刚体的各质元所受的内力对转轴的力矩的总和。我们来证明这第二项应等于零。

由于内力总是成对出现的，我们先考虑在同一垂直于转轴的平面上的两个质元 Δm_i 和 Δm_j 之间的一对内力 f_{ij} 和 f_{ji} (图 5.5)。由于这两个力沿同一直线作用，所以它们对 O_i 点的力臂是一样的。又因为它们的大小相等，所以它们的力矩的大小是相等的。又由于它们的方向相反，所以它们对转轴的力矩的方向也相反。因此它们的力矩之和必为零。对于不在同一个垂直于转轴的平面上的两个质元之间的内力，它们垂直于转轴的分量也是大小相等方向相反的，因而也可以用类似的方法证明它们对转轴的力矩之和为零。既然内力总是成对出现的，因此，所有内力对转轴的力矩之和，即 (5.10) 式中的第二项，必然等于零。根据这个结果，(5.10) 式可以写成：

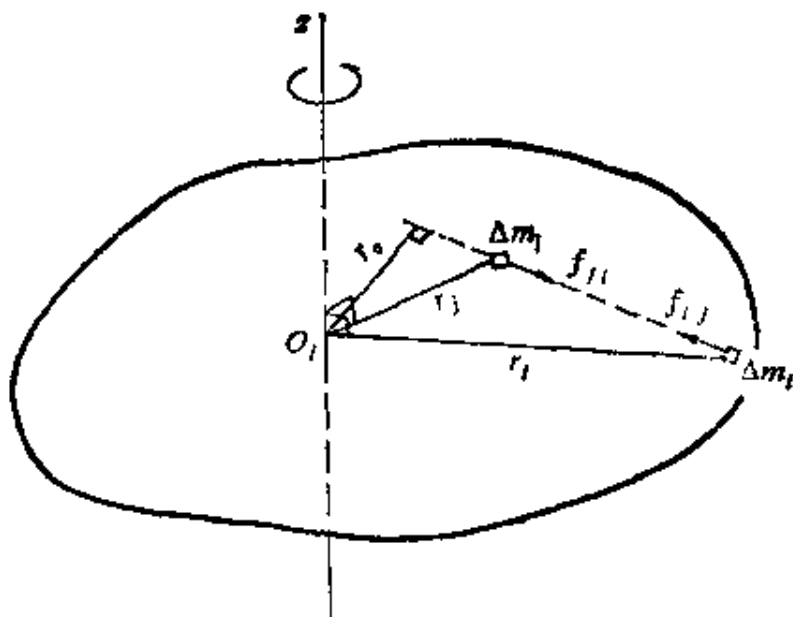


图 5.5 一对内力的力矩之和为零

$$\sum_i P_{i,t} r_i = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \alpha \quad (5.11)$$

在此式中由于各质元的角加速度是一样的，所以可将 α 提到求和

号外面。

(5.11)式中括号内的物理量,即 $\sum_i \Delta m_i r_i^2$,是由刚体的各质元相对于固定转轴的分布所决定的,与刚体的运动以及所受的外力无关。这个表示刚体本身特征的物理量叫做刚体对于转轴的转动惯量。通常用 J 表示转动惯量,就有

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (5.12)$$

如果再以 M 表示合外力矩,(5.11)式就可简写成

$$M = J\alpha \quad (5.13)$$

此式表明,刚体所受的对于某一固定转轴的合外力矩等于刚体对此转轴的转动惯量与刚体在此合外力矩作用下所获得的角加速度的乘积。这就是我们要求的刚体的角加速度和外力的关系。这一关系叫做刚体定轴转动定律。

将(5.13)式和牛顿第二定律公式 $F = ma$ 加以对比是很有启发性的。前者中的合外力矩相当于后者中的合外力,前者中的角加速度相当于后者中的加速度,而刚体的转动惯量 J 则和质点的惯性质量 m 相对应。可以说,转动惯量表示刚体在转动过程中表现出的惯性。“转动惯量”这一词正是这样命名的。

§ 5.3 转动惯量的计算

应用转动定律(5.13)式时,我们需要先求出刚体对固定转轴的转动惯量。按(5.12)式,转动惯量由下式定义

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

对于质量连续分布的刚体,上述求和应以积分代替,为

$$J = \int r^2 dm \quad (5.14)$$

式中 r 为刚体质元 dm 到转轴的垂直距离。

由上面两公式可知，刚体的转动惯量等于刚体中各质元的质量和它们各自离转轴的垂直距离的平方的乘积的总和，它的大小不仅与刚体的总质量有关，而且和质量相对于轴的分布有关。其关系可以概括为以下三点：

1. 形状、大小相同的均匀刚体总质量越大，转动惯量越大。
2. 总质量相同的刚体，质量分布离轴越远，转动惯量越大。
3. 同一刚体，转轴不同，质量对轴的分布就不同。因而转动惯量就不同。

在国际单位制中，转动惯量的量纲为 ML^2 ，单位是千克·米² ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)。

下面举几个求刚体的转动惯量的例子。

[例 1] 求质量为 m ，半径为 R 的均匀薄圆环的转动惯量，轴与圆环平面垂直并且通过其圆心。

解： 如图 5.6 所示，环上各质元到轴的垂直距离都相等，而且等于 R ，所以

$$J = \int R^2 dm = R^2 \int dm$$

后一积分的意义是环的总质量 m ，所以有

$$J = mR^2 \quad (5.15)$$

由于转动惯量是可加的，所以一个质量为 m ，半径为 R 的薄壁圆筒对其轴的转动惯量也是 mR^2 。

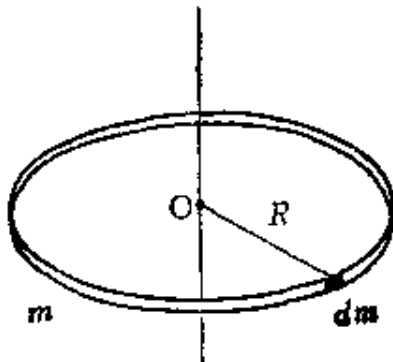


图 5.6

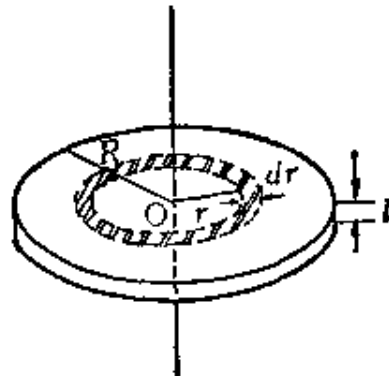


图 5.7

[例 2] 求质量为 m , 半径为 R , 厚为 l 的均匀圆盘的转动惯量, 轴与盘面垂直并通过盘心。

解: 如图 5.7 所示圆盘可以认为是许多薄圆环组成。取任一半径为 r , 宽度为 dr 的薄圆环。它的转动惯量按[例1]计算出的结果为

$$dJ = r^2 dm$$

其中 dm 为薄圆环的质量。以 ρ 表示圆盘的密度, 则有:

$$dm = \rho 2\pi r l dr$$

代入上式可得

$$dJ = 2\pi r^3 l \rho dr$$

因此
$$J = \int dJ = \int_0^R 2\pi r^3 l \rho dr = \frac{1}{2} \pi R^4 l \rho$$

由于
$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 l}$$

所以
$$J = \frac{1}{2} m R^2 \quad (5.16)$$

由于例中对 l 并不限制, 所以一个质量为 m , 半径为 R 的均匀实心圆柱对其轴的转动惯量也是 $\frac{1}{2} m R^2$ 。

[例 3] 求长度为 L , 质量为 m 的均匀细棒 AB 的转动惯量,

- (1) 对于通过棒的一端与棒垂直的轴;
- (2) 对于通过棒的中点与棒垂直的轴。

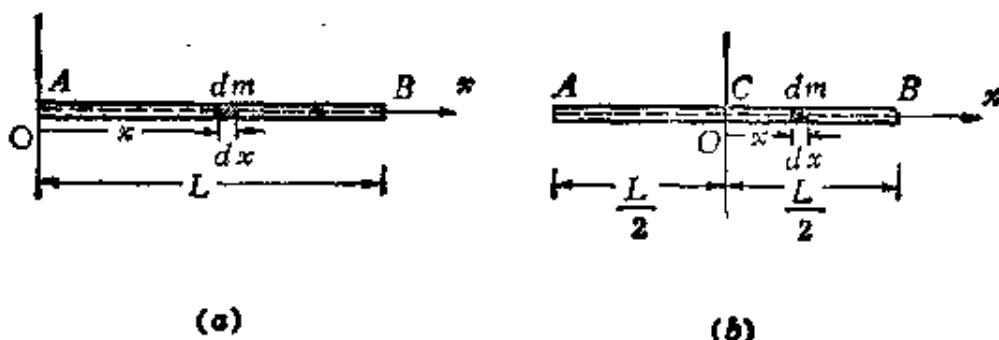


图 5.8

解 (1) 如图 5.8(a) 所示, 沿棒长方向取 x 轴。取任一长度元 dx 。以 λ 表示单位长度的质量, 则这一长度元的质量为 $dm = \lambda \cdot dx$ 。对于在棒的一端的轴来说:

$$J_A = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} \lambda L^3$$

将 $\lambda = m/L$ 代入, 可得:

$$J_A = \frac{1}{3} mL^2 \quad (5.17)$$

(2) 对于通过棒的中点的轴来说, 如图 5.8(b) 所示, 棒的转动惯量应为

$$J_O = \int x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} \lambda L^3$$

以 $\lambda = m/L$ 代入, 可得:

$$J_O = \frac{1}{12} mL^2 \quad (5.18)$$

例 3 的结果明显地表示, 对于不同的转轴, 同一刚体的转动惯量不同。我们可以导出一个对不同的轴的转动惯量之间的一般关系。以 m 表示刚体的质量, 以 J_O 表示它对于通过其质心 C 的轴的转动惯量。另一个轴与此轴平行并且相距为 d (图 5.9)。则此刚体对于后一轴的转动惯量为:

$$J = J_O + md^2 \quad (5.19)$$

这一关系叫做平行轴定理。其证明如下。

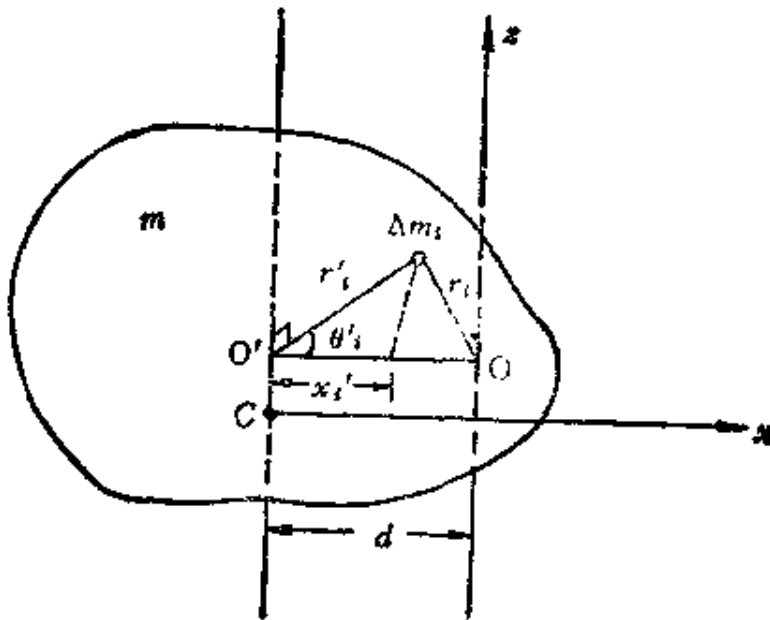


图 5.9 平行轴定理的证明

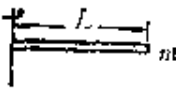
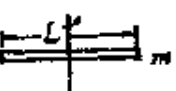
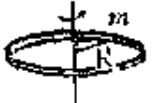
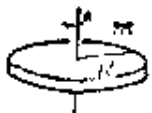
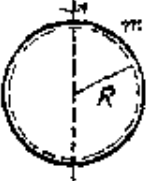
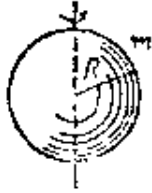
如图 5.9 所示, 取 x 轴垂直于两平行转轴并和它们相交。质元 Δm_i 到两个转轴的距离分别用 r'_i 和 r_i 表示。由余弦定理可得

$$r_i^2 = r'_i{}^2 + d^2 - 2d \cdot r'_i \cos \theta'_i = r'_i{}^2 + d^2 - 2d \cdot x'_i$$

式中 $x'_i = r'_i \cos \theta'_i$ 是 Δm_i 相对于质心的 x 坐标值。由转动惯量定义公式(5.12)式, 刚体对于 z 轴的转动惯量为

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i r'_i{}^2 + \left(\sum_i \Delta m_i \right) d^2 - 2d \sum_i m_i x'_i$$

表 5.1 一些均匀刚体的转动惯量

刚体形状	轴的位置	转动惯量
细杆 	通过一端垂直于杆	$\frac{1}{3}mL^2$
细杆 	通过中点垂直于杆	$\frac{1}{12}mL^2$
薄圆环 (或薄圆筒) 	通过环心垂直于环面(或中心轴)	mR^2
圆盘 (或圆柱体) 	通过盘心垂直于盘面(或中心轴)	$\frac{1}{2}mR^2$
薄球壳 	直径	$\frac{2}{3}mR^2$
球体 	直径	$\frac{2}{5}mR^2$

按质心的定义, $\sum_i \Delta m_i x'_i = m x'_c$, 而此 x'_c 为质心相对于质心的 x 坐标值, 当然应等于零。上式右侧第一项就是 J_c 。因此上式可表示为

$$J = J_c + md^2$$

这正是(5.19)式。

读者可以自己证明, 例3中的两个结果符合此公式。作为另一个例子, 利用例2的结果, 可以求出一个均匀圆盘对于通过其边缘一点且垂直于盘面的轴的转动惯量为:

$$J = J_c + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

§ 5.4 刚体定轴转动定律的应用

应用刚体定轴转动定律(5.13)式还是比较容易的。不过要特别注意转动轴的位置和指向。也要注意力矩、角速度和角加速度的正负。下面举几个例题

[例1] 一个飞轮的质量为 $m=60\text{ kg}$, 半径为 $R=0.25\text{ m}$, 正在以每分钟1000转的转速转动(图5.10)。现在要制动飞轮, 要求在 $t=5.0\text{ s}$ 内使它均匀减速而最后停下来。求闸瓦对轮子的压力 N 为多大? 假定闸瓦与飞轮之间的摩擦系数为 $\mu=0.4$, 而飞轮的质量可以看作全部均匀分布在轮的外周上。

解: 飞轮在制动时一定有角加速度, 这一角加速度可以用下式求出

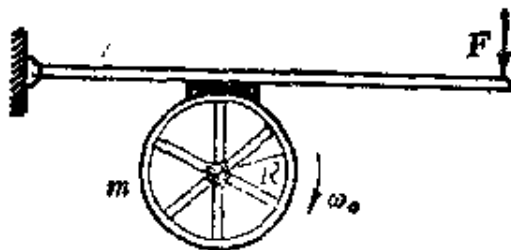


图 5.10

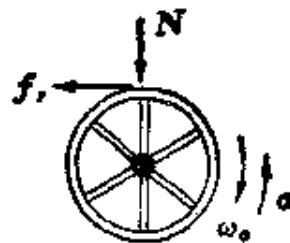


图 5.11

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

以 $\omega_0 = 1000 \text{ r/min} = 104.7 \text{ rad/s}$, $\omega = 0$, $t = 5 \text{ s}$ 代入可得:

$$\alpha = \frac{0 - 104.7}{5} = -20.9 \text{ rad/s}^2$$

负值表示 α 与 ω_0 的方向相反, 和减速转动相对应。

飞轮的这一负加速度是外力矩作用的结果, 这一外力矩就是当闸瓦压紧到轮缘上时对轮缘产生的摩擦力的力矩(图5.11), 以 ω_0 方向为正, 则此摩擦力矩应为负值。以 f 表示摩擦力的数值, 则它对轮的转轴的力矩为

$$M = -fR = -\mu NR$$

根据刚体定轴转动定律 $M = J\alpha$, 可得

$$-\mu NR = J\alpha$$

将 $J = mR^2$ 代入可解得:

$$N = -\frac{mR\alpha}{\mu}$$

代入已知数值, 可得:

$$N = -\frac{60 \times 0.25 \times (-20.9)}{0.4} = 784 \text{ N}$$

[例 2] 一个质量为 M , 半径为 R 的定滑轮(当作均匀圆盘)上面绕有细绳, 绳的一端固定在滑轮边上, 另一端挂一质量为 m 的物体而下垂。忽略轴处摩擦, 求物体 m 由静止下落 h 高度时的速度和此时滑轮的角速度。

解 如图 5.12 所示。图中二拉力 T_1 和 T_2 的大小相等, 以 T 表示。

对定滑轮 M , 由转动定律, 对于轴 O , 有

$$RT = J\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

对物体 m , 由牛顿第二定律, 沿 y 方向, 有

$$mg - T = ma$$

滑轮和物体的运动有一个关系 $a = R\alpha$

联立解以上三式, 可得物体下落的加速度为

$$a = \frac{m}{m + M/2}g$$

物体下落高度 h 时的速度为

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

此时滑轮转动的角速度为

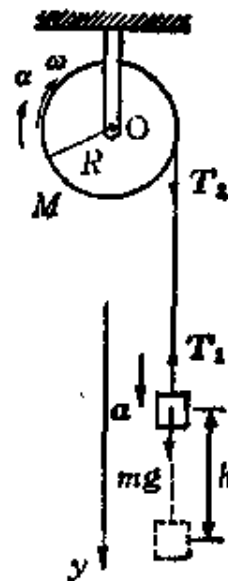


图 5.12

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}} / R$$

[例 3] 一根长 l , 质量为 m 的均匀细直棒, 其一端有一固定的光滑水平轴, 因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置。求它由此下摆 θ 角时的角加速度和角速度。

解 讨论此棒的下摆运动时, 不能再把它看成质点, 而应作为刚体转动来处理。这需要转动定律。

棒的下摆是一加速转动, 所受外力矩即重力对转轴 O 的力矩。取棒上一小段, 其质量为 dm (图 5.13)。在棒下摆任意角度 θ 时, 它所受重力对轴 O 的力矩是 $x dm g$, 其中 x 是 dm 对轴 O 的水平坐标。整个棒受的重力对轴 O 的力矩就是

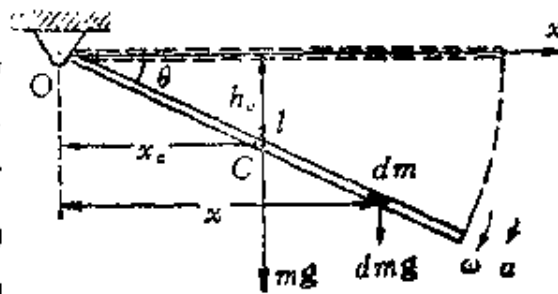


图 5.13

$$M = \int x dm \cdot g = g \int x dm$$

由质心的定义, $\int x dm = m x_c$ 其中 x_c 是质心对于轴 O 的 x 坐标。因而可得

$$M = m g x_c$$

这一结果说明重力对整个棒的合力矩就和全部重力集中作用于质心所产生的力矩一样。

由于
$$x_c = \frac{1}{2} l \cos \theta$$

所以有
$$M = \frac{1}{2} m g l \cos \theta$$

代入转动定律公式可得棒的角加速度为

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2} m g l \cos \theta}{\frac{1}{3} m l^2} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

为求棒的角速度, 我们仍用转动定律

$$M = J \alpha = J \frac{d\omega}{dt}$$

由此
$$M dt = J d\omega$$

两边都乘以 ω , 并利用上面力矩 M 的表示式, 可得

$$\frac{1}{2}mgl \cos\theta \cdot \omega dt = J\omega d\omega$$

由于 $\omega dt = d\theta$, 所以有

$$\frac{1}{2}mgl \cos\theta \cdot d\theta = J\omega d\omega$$

两边积分:

$$\int_0^\theta \frac{1}{2}mgl \cos\theta \cdot d\theta = \int_0^\omega J\omega d\omega$$

得
$$\frac{1}{2}mgl \sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

由此得
$$\omega = \sqrt{mgl \sin\theta / J} = \sqrt{3g \sin\theta / l}$$

§ 5.5 转动中的功和能

在刚体转动时, 作用在刚体上某点的力做的功仍用此力和受力作用的质元的位移的点积来定义。但对于刚体这个特殊质点系, 在转动中力做的功可以用一个特殊形式表示, 下面来导出这个特殊表示式。

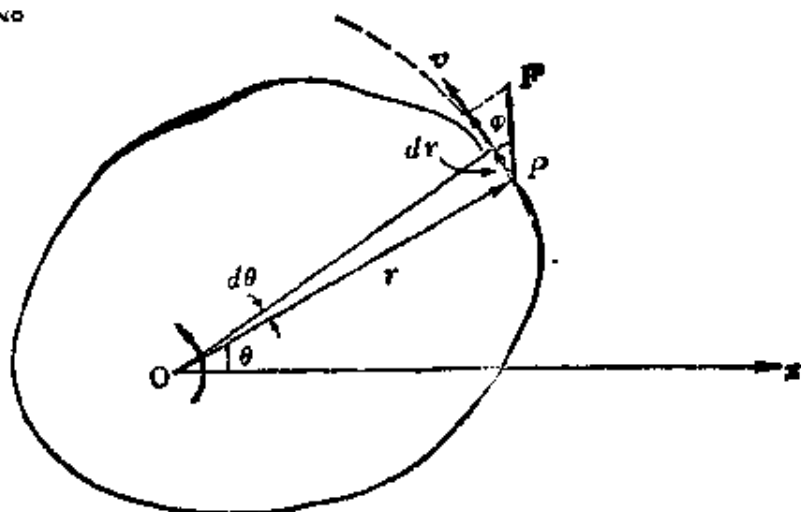


图 5.4 外力矩对刚体做的功

以 F 表示作用在刚体上 P 点的外力 (图 5.14)。当物体绕固定轴 O (垂直于纸面) 有一角位移 $d\theta$ 时, 力 F 做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos\varphi |d\mathbf{r}| = F \cos\varphi r d\theta$$

由于 $F \cos\varphi$ 是力 F 沿 $d\mathbf{r}$ 方向的分量, 因而垂直于 \mathbf{r} 的方向, 所以 $F \cos\varphi r$ 就是力对转轴的力矩 M 。因此有

$$dW = M d\theta \quad (5.20)$$

即力对转动刚体做的元功等于相应的力矩和角位移的乘积。

对于有限的角位移, 力做的功应该用下一积分来求

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (5.21)$$

这一表示式常叫力矩的功。它就是力做的功在刚体转动中的特殊表示形式。

力矩做的功对刚体运动的影响可以通过转动定律导出。将转动定律两侧乘以 $d\theta$ 并积分, 可得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega$$

演算后一积分, 可得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

等式左侧是合外力矩对刚体做的功 W 。对于右侧两项, 我们定义刚体的转动动能为

$$E_K = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (5.22)$$

这样上式就可写成

$$W = E_{K2} - E_{K1} \quad (5.23)$$

这一公式与质点的动能定理类似, 我们可称之为定轴转动的动能定理。它说明, 合外力矩对一个绕固定轴转动的刚体所做的功等于它的转动动能的增量。

[例 1] 某一冲床利用飞轮的转动动能通过曲柄连杆机构的传动, 带动冲头在铁板上穿孔。已知飞轮的半径为 $r=0.4\text{m}$, 质量为 $m=600\text{kg}$, 可以

看成均匀圆盘。飞轮的正常转速是 $n_1 = 240 \text{ r/min}$ ，冲一次孔转速减低 20%。求冲一次孔，冲头作了多少功？

解 以 ω_1 和 ω_2 分别表示冲孔前后飞轮的角速度，则：

$$\omega_1 = 2\pi n_1 / 60, \quad \omega_2 = (1 - 0.2)\omega_1 = 0.8\omega_1$$

由转动动能定理 (5.23) 式，可得冲一次孔铁板阻力对冲头-飞轮做的功为

$$\begin{aligned} W = E_{K2} - E_{K1} &= \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} J \omega_1^2 (0.8^2 - 1) = \frac{1}{4} m r^2 \omega_1^2 (0.8^2 - 1) \\ &= \frac{1}{3600} \pi^2 m r^2 n_1^2 (0.8^2 - 1) \end{aligned}$$

将已知数值代入，可得：

$$W = \frac{1}{3600} \times \pi^2 \times 600 \times 0.4^2 \times 240^2 (0.8^2 - 1) = -5.45 \times 10^3 \text{ J}$$

这是冲一次孔铁板阻力对冲头做的功，它的大小也就是冲一次孔冲头克服此阻力做的功。

如果一个刚体受到保守力的作用，也可以引入势能的概念。例如在重力场中的刚体就具有一定的重力势能。它的重力势能就是它的各质元重力势能的总和。对于一个不太大，质量为 m 的刚体 (图 5.15)，它的重力势能为

$$E_P = \sum_i \Delta m_i g h_i = g \sum_i \Delta m_i h_i$$

根据质心的定义，此刚体的质心的高度应为：

$$h_C = \sum_i \Delta m_i h_i / m$$

所以上式可以写成

$$E_P = m g h_C \quad (5.24)$$

这一结果说明，一个不太大的刚体的重力势能和它的全部质量集中在质心时所具有的势能一样。

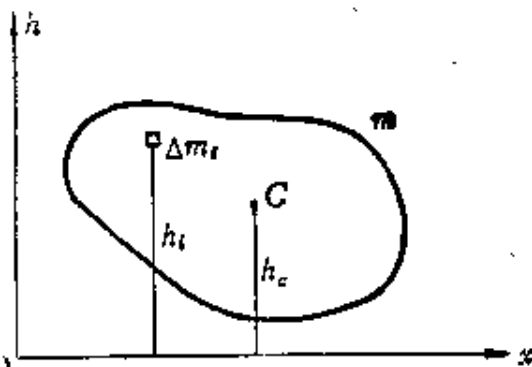


图 5.15 刚体的势能

对于包括有刚体的系统,如果在运动过程中,只有保守内力做功,则这系统的机械能也应该守恒。下面举两个这方面的例子。

[例 2] 利用机械能守恒定律重解上节例 2, 求物体 m 下落 h 高度时的速度。

解 仍参看图 5.12。以滑轮、物体和地球做为研究的系统。在物体 m 下落的过程中, 滑轮随同转动。滑轮轴对滑轮的支持力(外力)不做功(因为无位移)。 T_1 拉动物体做负功, T_2 拉动轮缘做正功。由于物体下落距离与轮缘转过的距离相等,所以这一对外力做的功之和为零。因此,对于所考虑的系统只有重力这一保守力做功,所以机械能守恒。

滑轮的重力势能不变,可以不考虑。取物体的初始位置为重力势能零点,则系统的初态的机械能为零。末态的机械能为

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-h)$$

机械能守恒给出

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$$

将关系式 $J = \frac{1}{2}MR^2$, $\omega = v/R$ 代入上式,即可求得:

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

与上节得出的结果相同。

△ [例 3] 利用机械能守恒定律重解上节例 3, 求棒下摆 θ 角时的角速度。

解 仍参看图 5.13, 取棒和地球为研究的系统, 由于在棒下摆的过程中, 外力(轴对棒的支持力)不做功, 只有重力做功, 所以系统的机械能守恒。取棒的水平初位置为势能零点, 机械能守恒给出

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(-h_c)$$

利用公式 $J = \frac{1}{3}ml^2$, $h_c = \frac{1}{2}l \sin \theta$, 就可解得

$$\omega = \sqrt{3g \sin \theta / l}$$

也与前面结果相同。

§ 5.6 刚体的角动量和角动量守恒定律

我们在第三章 § 3.6 中曾引入了角动量的概念, 那是指一个质点对某一定点的角动量。它的定义是

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (5.25)$$

这个角动量对时间的变化率等于质点所受的外力对同一定点的力矩 \mathbf{M} , 即

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5.26)$$

这就是质点的角动量定理。

可以证明, 此角动量定理的形式同样适用于质点系 (包括刚体)。只是其中 \mathbf{M} 是质点系所受的合外力矩, 而 \mathbf{L} 是质点系的总角动量, 即其中各质点的角动量的矢量和 $(\sum_i \mathbf{L}_i)$ 。这里的力矩和角动量都是对同一定点说的。(5.26) 式是一矢量式, 它沿通过定点的某一固定的 z 轴方向上的分量式为

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad (5.27)$$

可以证明, 对刚体这种质点系来说, 它的总角动量对固定轴 z 轴的分量 L_z , 就等于它对于 z 轴的转动惯量 J_z (前文中都只用 J 表示) 与转动角速度 ω 的乘积, 即对于刚体,

$$\underline{L_z = J_z \omega} \quad (5.28)$$

这又叫做刚体对转轴的角动量。也可以证明, 合外力矩 \mathbf{M} 对固定的 z 轴的分量 M_z 就等于 (5.13) 式中的对于固定转轴的合外力矩 M 。因此, 如果将 (5.28) 式代入 (5.27) 式, 由于刚体对固定转轴的转动惯量是一常量, 就可得出:

$$M_z = \frac{d}{dt}(J_z \omega) = J_z \frac{d\omega}{dt}$$

或

$$M_z = J_z \alpha$$

去掉标脚 z , 这就是 (5.13) 式。由此可知刚体的定轴转动定律实际上是质点系的角动量定理沿固定轴方向的分量式的一种特殊形式。

在 (5.27) 式中, 如果 $M_z = 0$, 则 $L_z = \text{常量}$ 。这就是说, 对于一个质点系, 如果它受的对于某一固定轴的合外力矩为零, 则它对于这一固定轴的角动量保持不变。这个结论叫对定轴的角动量守恒定律。这里指的质点系可以不是刚体, 其中的质点也可以组成一个或几个刚体。一个刚体的角动量可以用 $J\omega$ (即 $J_z\omega$) 求出。应该注意的是一个系统内的各个刚体或质点的角动量必须是对于同一个固定轴说的。

定轴转动中的角动量守恒可以很容易地演示出来。例如让一个人坐在有竖直光滑轴的转椅上, 手持哑铃, 两臂伸平 (图 5.16a)。用手推他, 使他转起来。当他把两臂收回使哑铃贴在胸前时, 他的转速就明显地增大 (图 5.16b)。这个现象可以用角动量守恒解释如下。把人在两臂伸平时和收回以后都当成一个刚体, 分别以 J_1 和 J_2 表示他对固定竖直轴的转动惯量。以 ω_1 和 ω_2 分别表示两种状态时的角速度。由于人在收回手臂时对竖直轴并没有受到外力矩的作用, 所以他的角动量应该守恒, 即 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ 。很明显, $J_2 < J_1$, 因此 $\omega_2 > \omega_1$ 。

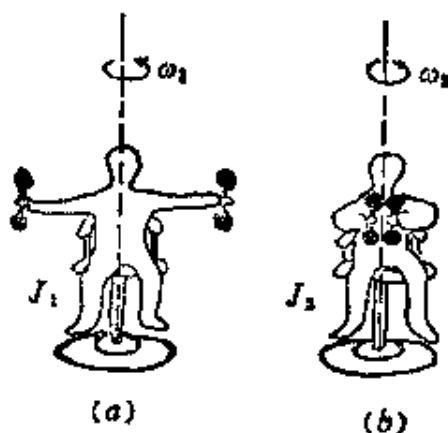


图 5.16 角动量守恒演示

(5.27) 式虽然是对定轴转动说的, 但可以证明, 在物体有整体

运动的情况下,如果考虑它绕通过其质心的轴的转动,这一公式仍然适用。因此,只要物体所受的对于通过其质心的轴的合外力矩为零,它对这根轴的角动量也保持不变。利用角动量守恒定律的这个意义,可以解释许多现象。例如运动员表演空中翻滚时,总是先纵身离地使自己绕通过自身质心的水平轴有一缓慢的转动。在空中时就尽量卷缩四肢,以减小转动惯量从而增大角速度,迅速翻转。待要着地时又伸开四肢增大转动惯量以便以较小的角速度安稳地落至地面。

刚体的角动量守恒在现代技术中的一个重要应用是惯性导航。所用的装置叫回转仪,也叫“陀螺”。它的核心部分是装置在常平架上的一个质量较大的转子(图 5.17)。常平架是套在一起,分别具有竖直轴和水平轴的两个圆环。转子装在内环上,其轴与内环的轴垂直。转子是精确地对称于其转轴的圆柱,各轴承均高度润滑。这样转子就具有可以绕其自由转动的三个相互垂直的轴。因此,不管常平架如何移动或转动,转子都不会受到任何力矩的作用。所以一旦使转子高速转动起来,根据角动量守恒定律,它将保持其对称轴在空间的指向不变。安装在船、飞机、导弹或宇宙飞船上的这种回转仪就能指出这些船或飞行器的航向相对于空间某一定向的方向从而起到导航的作用。在这种应用中,往往用三个这样的回转仪并使它们的转轴相互垂直,从而提供一套绝对的笛卡儿直角坐标系。读者可以想一下,这些转子竟能在浩瀚的太空中认准一个确定的方向并且使自己的转轴始终指向它而不改变。多么不可思议的自然界啊!

可以指出的是,上述惯性导航装置出现不过一百年,但常平架在我国早就出现了。那是西汉(公元一世纪)丁缓设计制造的后来失传的“被中香炉”(图 5.18)。他用两个套在一起的环形支架架住一个小香炉。香炉由于受有重力总是悬着。不管支架如何转动,

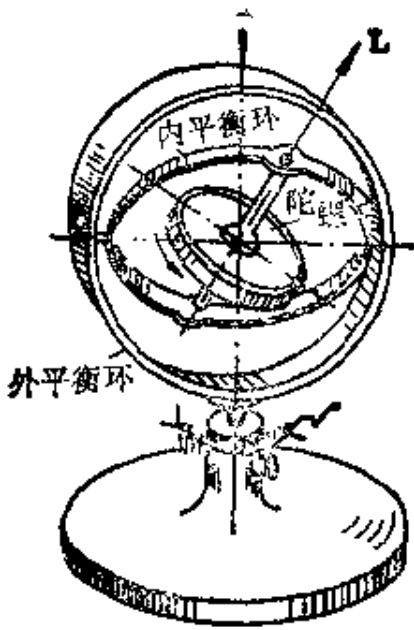


图 5.17 回转仪



图 5.18 被中香炉

香炉总不会倾倒。遗憾的是这种装置只是用来保证被中取暖时的安全,而没有得到任何技术上的应用。虽然如此,它也闪现了我们祖先的智慧之光。

为了对角动量的大小有个量的概念,表 5.2 列出了一些典型的角动量的数值。

表 5.2 典型的角动量的数值(J·s)

太阳系所有行星的轨道运动	3.2×10^{43}
地球公转	2.7×10^{38}
地球自转	5.8×10^{33}
直升飞机螺旋桨(320r/min)	5×10^4
汽车轮子(90km/h)	1×10^3
电扇叶片	1
玩具陀螺	1×10^{-3}
留声机转盘($33\frac{1}{3}$ r/min)	6×10^{-4}
步枪子弹的自旋	2×10^{-3}
基态的氢原子中电子的轨道运动	1.05×10^{-34}
电子的自旋	0.53×10^{-34}

【例 1】 一根长 l , 质量为 M 的均匀直棒, 其一端挂在一个水平光滑轴上而静止在竖直位置。今有一子弹, 质量为 m , 以水平速度 v_0 射入棒的下端而不复出。求棒和子弹开始一起运动时的角速度。

解: 由于从子弹进入棒到二者开始一起运动所经过的时间极短, 在这一过程中棒的位置基本不变, 即仍然保持竖直(图5.19)。因此, 对于木棒和子弹系统, 在子弹冲入过程中, 系统所受的外力(重力和轴的支持力)对于轴 O 的力矩都是零。这样, 系统对轴 O 的角动量守恒。以 v 和 ω 分别表示子弹和木棒开始一起运动时木棒端点的速度和角速度, 则角动量守恒给出

$$mlv_0 = mlv + \frac{1}{3}Ml^2\omega$$

再利用关系式 $v = l\omega$ 就可解得:

$$\omega = \frac{3m}{3m + M} \frac{v_0}{l}$$

将此题和第三章 § 3.3 例1 比较一下是很有启发性的。注意, 在这里, 在子弹冲入棒的过程中, 木棒和子弹系统的总动量并不守恒。

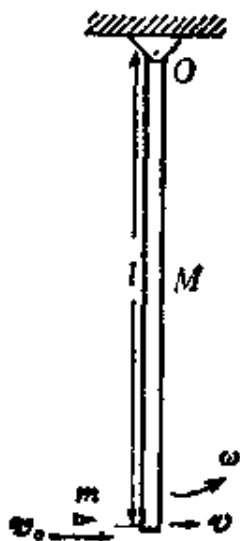


图 5.19

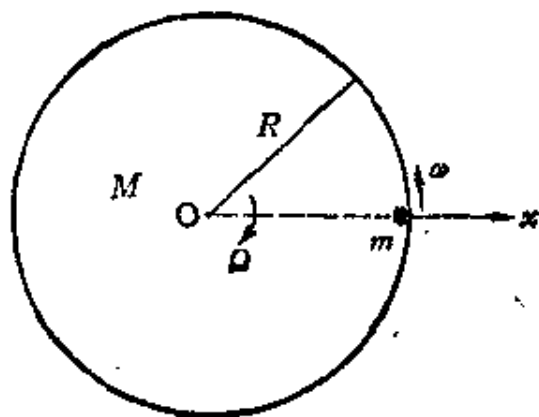


图 5.20

【例 2】 一个质量为 M , 半径为 R 的水平均匀圆盘可绕通过中心的光滑竖直轴自由转动。在盘缘上站着一个人, 二者最初都相对地面静止。求当人在盘上沿盘边走一周时, 盘对地面转过的角度多大?

解 如图5.20所示, 对盘和人组成的系统, 在人走动时系统所受的对竖直轴的外力矩为零, 所以系统对此轴的角动量守恒。以 j 和 J 分别表示人和盘对轴的转动惯量, 并以 ω 和 Ω 分别表示任一时刻人和盘绕轴的角速度。由于起始角动量为零, 所以角动量守恒给出

$$j\omega - J\Omega = 0$$

其中 $j = mR^2$, $J = \frac{1}{2}MR^2$, 以 θ 和 Θ 分别表示人和盘对地面发生的角位移, 则

$$\omega = d\theta/dt, \quad \Omega = d\Theta/dt$$

由上式得

$$mR^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\Theta}{dt}$$

两边都乘以 dt , 并积分

$$\int_0^\theta mR^2 d\theta = \int_0^\Theta \frac{1}{2}MR^2 d\Theta$$

由此得

$$m\theta = \frac{1}{2}M\Theta$$

人在盘上走一周时 $\theta = 2\pi - \Theta$

代入上式可解得

$$\Theta = \frac{2m}{2m+M} \cdot 2\pi$$

将此例题和第三章 § 3.3 例 2 比较一下, 也是很有启发性的。

[例 3] 如图 5.21 所示的宇宙飞船对于其中心轴的转动惯量为 $J = 2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 正以 $\omega = 0.2 \text{ rad/s}$ 的角速度绕中心轴旋转。宇航员想用两个切向的控制喷管使飞船停止旋转。每个喷管的位置与轴线距离都是 $r = 1.5 \text{ m}$ 。两喷管的喷气流量恒定, 共是 $\alpha = 2 \text{ kg/s}$ 。废气的喷射速率(相对于飞船周边) $u = 50 \text{ m/s}$, 并且恒定。问喷管应喷射多长时间才能使飞船停止旋转。

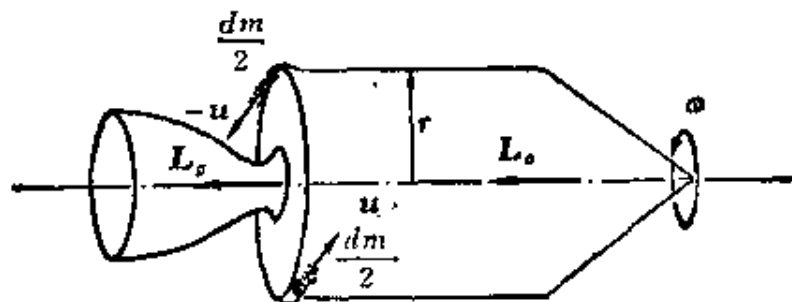


图 5.21

解 把飞船和排出的废气 m 当作研究系统。可以认为废气质量远小于飞船质量, 所以原来系统对于飞船中心轴的角动量近似地等于飞船自身的角动量, 即

$$L_0 = J\omega$$

在喷气过程中,以 dm 表示 dt 时间内喷出的气体,这些气体对中心轴的角动量为 $dm \cdot r(u+v)$, 方向与飞船的角动量方向相同。由于 $u=50 \text{ m/s}$ 比飞船周边的速率 $v(=cr)$ 大得多,所以此角动量近似地等于 $dm \cdot ru$ 。在整个喷气过程中喷出的废气的总的角动量 L_0 应为

$$L_0 = \int_0^m dm \cdot ru = mru$$

式中 m 是喷出废气的总质量。当宇宙飞船停止旋转时,它的角动量为零。系统的总角动量 L_1 就是全部排出的废气的总角动量,即

$$L_1 = L_0 = mru$$

在整个喷射过程中,系统所受的对于飞船中心轴的外力矩为零。所以系统对于此轴的角动量守恒,即 $L_0 = L_1$ 。由此得

$$J\omega = mru$$

$$m = \frac{J\omega}{ru}$$

而所求的时间为 $t = \frac{m}{\alpha} = \frac{J\omega}{\alpha ru} = \frac{2 \times 10^3 \times 0.2}{2 \times 1.5 \times 50} = 2.67 \text{ s}$

「例 4」一根长 l , 质量为 m 的均匀直棒静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴, 一个质量为 m' 的小球以水平速度 v_0 垂直于棒冲击其一端发生弹性碰撞。求碰撞后球的速度 v 和棒的角速度 ω 。

解 如图 5.22 所示, 对棒和球系统, 对于竖直光滑轴 O , 碰撞过程中外力矩为零, 因而角动量守恒, 即

$$m'lv_0/2 = m'lv/2 + \frac{1}{12}ml^2\omega$$

由于碰撞是弹性的, 所以动能守恒, 即

$$\frac{1}{2}m'v_0^2 = \frac{1}{2}m'v^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}ml^2\omega^2$$

解此两式可得

$$\omega = \frac{12m'v_0}{(m+3m')l}, \quad v = \frac{3m'-m}{3m'+m}v_0$$

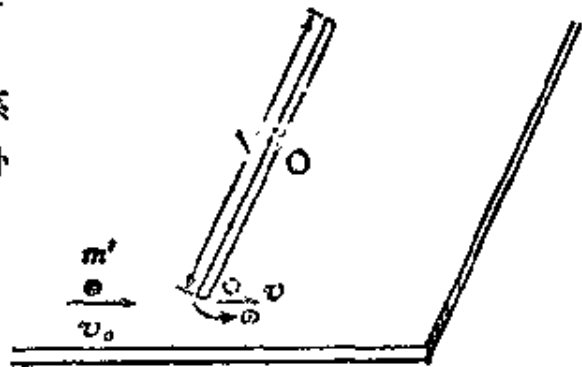


图 5.22

*§ 5.7 进 动

本节稍扩展一下本章讨论的内容，介绍一种刚体的转动轴不固定的情况。如图 5.23 所示，一个飞轮(实验室中常用一个自行车轮)的轴的一端做成球形，放在一根固定竖直杆顶上的凹槽内。先使轴保持水平，如果这时松手，飞轮当然要下落。如果使飞轮高速地绕自己的对称轴旋转起来(这种旋转叫自旋)，当松手后，则出乎意料地飞轮并不下落，但它的轴会在水平面内以杆顶为中心转动起来。这种高速自旋的物体的轴在空间转动的现象叫进动。表现这种现象的具有对称轴的物体叫回转仪。

为什么飞轮的自旋轴不下落而转动呢？这可以用角动量定理(5.26)式加以解释。根据(5.26)式，可得出在 dt 时间内飞轮的自旋角动量矢量 L 的增量为

$$dL = M dt \quad (5.29)$$

式中 M 为飞轮所受的外力矩。在飞轮轴为水平的情况下，以 m 表示飞轮的质量，则这一力矩的大小为

$$M = rmg$$

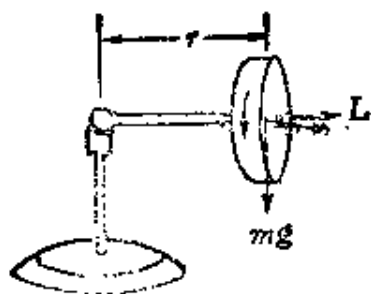


图 5.23 进动现象

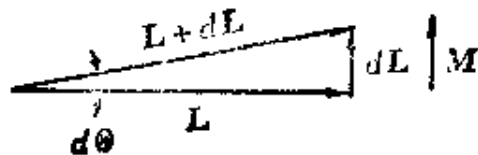


图 5.24 dL 总垂直于 L 水平向左，
而 $|L + dL| = |L|$

在图 5.23 所示的时刻， M 的方向为水平而且垂直于 L 的方向，顺着 L 方向看去指向 L 左侧(图 5.24)。因此 dL 的方向也水平向

左。既然这增量是水平方向的,所以 L 的方向,也就是自转轴的方向,就不会向下倾斜,而是要水平向左偏转了。继续不断地向左偏转就形成了自转轴的转动。这就是说进动现象正是自旋的物体在外力矩的作用下沿外力矩方向改变其角动量矢量的结果。

在图 5.23 中,由于飞轮所受的力矩的大小不变,方向总是水平地垂直于 L ,所以进动是匀速的。从图 5.24 可以看出,在 dt 时间内自转轴转过的角度为

$$d\Theta = \frac{|dL|}{L} = \frac{Mdt}{L}$$

而相应的角速度,叫进动角速度,为

$$\Omega = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{M}{L} \quad (5.30)$$

常见的进动实例是陀螺的进动。在不旋转时,陀螺就躺在地面上(图 5.25a)。当使它绕自己的对称轴高速旋转时,即使轴线已倾斜,它也不会倒下来(图 5.25b)。它的轴要沿一个圆锥面转动。

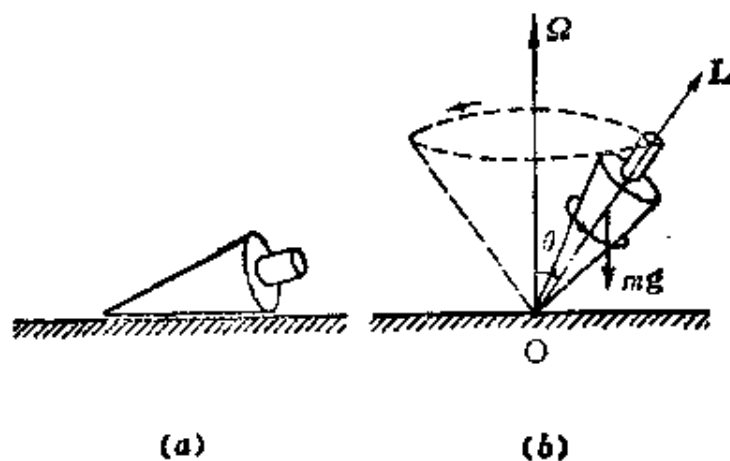


图 5.25 陀螺的进动

这一圆锥面的轴线是竖直的,锥顶就在陀螺尖顶与地面接触处。陀螺的这种进动也是重力矩作用的结果。虽然这时重力的方向与陀螺轴线的方向并不垂直,但不难证明,这时陀螺进动的角速度,即它的自转轴绕竖直轴转动的角速度可按下式求出

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \theta} \quad (5.31)$$

其中 θ 为陀螺的自旋轴与圆锥的轴线之间的夹角。

技术上利用进动的一个实例是炮弹在空中的飞行。炮弹在飞行时，要受到空气阻力的作用。阻力的方向总与炮弹质心的速度方向相反。但其合力不一定通过质心。阻力对质心的力矩就会使炮弹在空中翻转。这样，当炮弹射中目标时，就有可能是弹尾先触目标而不引爆，从而丧失威力。为了避免这种事故，就在炮筒内壁刻出螺旋线。这种螺旋线叫来复线。当炮弹由于发射药的爆炸被强力推出炮筒时，还同时绕自己的对称轴高速旋转。由于这种旋转，它在飞行中受到的空气阻力的力矩将不能使它翻转，而只是使它绕着质心前进的方向进动。

这样，它的轴线将会始终只与前进的方向有不大的偏离，而弹头就总是大致指向前方了(图5.26)。

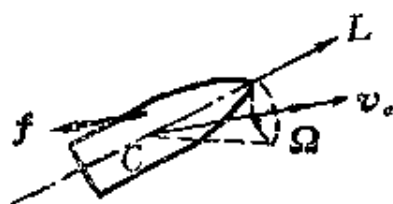


图 5.26 炮弹飞行时的进动

应该指出，在图 5.23 所示的实验中如果飞轮的自旋速度不是太大，则它的轴线在进动时，还会上上下下周期性地摆动。这种摆动叫章动。(5.30)式或(5.31)式并没有给出这种摆动的效果。这是因为我们在推导(5.30)式时做了一个简化，即认为飞轮的总角动量就是它绕自己的对称轴自旋的角动量。实际上它的总角动量 L 应该是自旋角动量和它的进动的角动量的矢量和。当高速旋转时，总角动量近似地等于飞轮的自旋角动量。这样就给出了上面的分析。更详尽的分析比较复杂，我们就不讨论了。

本章提要

1. 刚体的定轴转动:

角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

匀加速转动: $\omega = \omega_0 + \alpha t, \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

2. 刚体定轴转动定律: $M = J\alpha$

其中 M 为外力对转轴的力矩之和。 J 为刚体对转轴的转动惯量。

3. 刚体的转动惯量:

$$J = \sum m_i r_i^2, J = \int r^2 dm$$

平行轴定理: $J_z = J_C + md^2$

4. 力矩的功: $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$

转动动能: $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$

刚体的重力势能: $E_P = mgh_C$

机械能守恒定律: 只有保守力做功时,

$$E_K + E_P = \text{常量}$$

5. 刚体的角动量定理:

对于一定点: $M = \frac{dL}{dt}$

对于一固定轴: $M_z = \frac{dL_z}{dt}, L_z = J_z\omega$

由此也可得 $M = J\alpha$

6. 角动量守恒定律: 系统 (包括刚体) 所受的对某一固定轴的合外力矩为零时, 则系统对此轴的总角动量保持不变。

*7. 进动: 自旋物体在外力矩作用下, 自旋轴发生转动的现象。

8. 把质点的运动规律和刚体的定轴转动规律对比一下, 有助于从整体上系统地理解力学定律。现列表如下。读者还应了解它们之间的联系。

质点的运动	刚体的定轴转动
速度 $v = \frac{dr}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$	角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
质量 m	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
力 F	力矩 $M = r_{\perp} F$
运动定律 $F = ma$	转动定律 $M = Ja$
动量 mv	动量 $P = \sum_i \Delta m_i v_i$
角动量 $L = r \times p$	角动量 $L = J\omega$
动量定理 $F = \frac{d(mv)}{dt}$	角动量定理 $M = \frac{d(J\omega)}{dt}$
动量守恒 $\sum_i F_i = 0$ 时 $\sum_i m_i v_i = \text{恒量}$	角动量守恒 $M = 0$ 时 $\sum J\omega = \text{恒量}$
力的功 $W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	力矩的功 $W_{\theta A} = \int_{\theta_A}^{\theta B} M d\theta$
动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理 $W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$	动能定理 $W = \frac{1}{2}J\omega_B^2 - \frac{1}{2}J\omega_A^2$
重力势能 $E_p = mgh$	重力势能 $E_p = mgh_c$
机械能守恒 只有保守力做功时, $E_k + E_p = \text{恒量}$	机械能守恒 只有保守力做功时 $E_k + E_p = \text{恒量}$

思考题

5.1 把一本书放在桌子上(图5.27),先使它绕竖直 z 轴转动 90° ,再使它绕水平 y 轴转动 180° 。(z 轴和 y 轴的方向相对于桌子都是固定的)。记下此时书的放置方式。然后重新开始,先绕水平 y 轴转动 180° ,再使它绕竖直 z 轴转动 90° 。那时书的位移和刚才两次转动后书的放置方式相同吗?由此可知一个刚体发生几个角位移时,这些角位移发生的顺序可以交换吗?

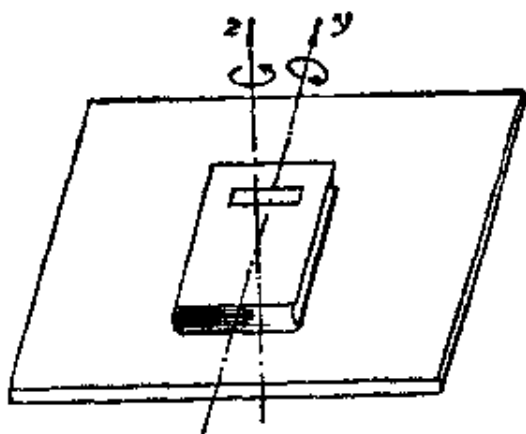


图 5.27

5.2 平行于 z 轴的力对 z 轴的力矩一定是零,垂直于 z 轴的力对 z 轴的力矩一定不是零。这种说法都对吗?

5.3 一个有固定轴的刚体,受有两个力的作用。当这两个力的合力为零时,它们对轴的合力矩也一定是零吗?当这两个力对轴的合力矩为零时,它们的合力也一定是零吗?举例说明之。

5.4 就自身来说,你作什么姿势和对什么样的轴,转动惯量最小?或最大?

5.5 刚体定轴转动时,它的动能的增量只决定于外力对它做的功而与内力的作用无关。对于非刚体也是这样吗?为什么?

5.6 如果一个刚体很大,它的重力势能还等不等于它的全部质量集中在质心时的势能?

5.7 一个系统的动量守恒和角动量守恒的条件有何不同?

5.8 两个半径相同的轮子,质量相同。但一个轮子的质量聚集在边缘附近,另一个轮子的质量分布比较均匀,试问

(1) 如果它们的角动量相同,哪个轮子转得快?

(2) 如果它们的角速度相同,哪个轮子的角动量大?

5.9 有些矢量是相对于一定点(或轴)而确定的,有些矢量是与定点(或轴)的选择无关的。请指出下面这些矢量各属于哪一类:(1)位置;(2)位移;(3)速度;(4)动量;(5)角动量;(6)力;(7)力矩。

5.10 假定时钟的指针是质量均匀的矩形薄片。分针长而细,时针短而粗。两者具有相等的质量。问哪一个指针有较大的转动惯量?哪一个有较大的动能与角动量?

5.11 一个站在水平转盘上的人,左手举一个自行车轮,使轮子的轴竖直(图5.28)。当他用右手拨动轮缘使车轮转动时,他自己会同时沿相反方向转动起来。解释其中的道理。

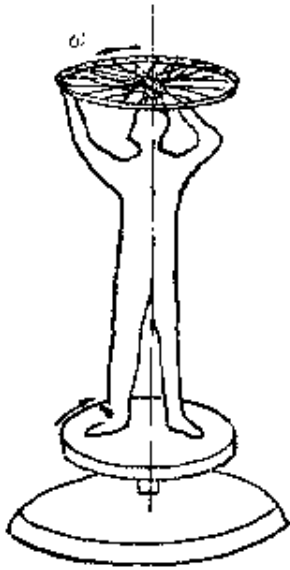


图 5.28

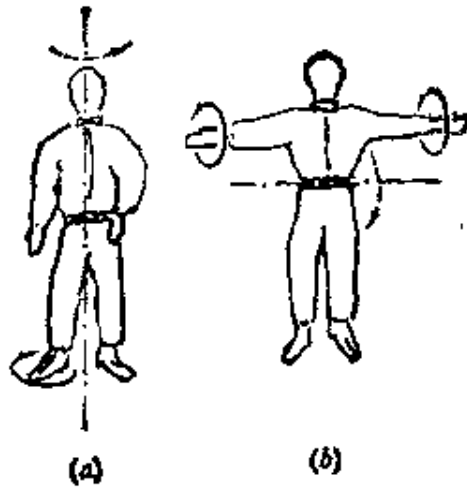


图 5.29

5.12 花样滑冰运动员想高速旋转时,她先把一条腿和两臂伸开,并用脚蹬冰使自己转动起来,然后她再收拢腿和臂。这时她的转速就明显地加快了。她这是利用了什麼原理?

5.13 宇航员悬立在飞船座舱内的空中时,不触按舱壁,只是用右脚顺时针划圈,身体就会向左转(图5.29a);当两臂伸直向后划圈时,身体又会向前转(图5.29b)。这是什麼道理?

*5.14 为了使小船稳定,就在小船中安装一个与船中心线垂直有水平轴的重飞轮(图5.30)。



图 5.30

(1) 当浪头打来要使船向左倾斜时(迎着船头看),船实际上将怎样运动?

(2) 当浪头推船头要使它左转时(迎着船头看),船实际上又怎样运动?

*5.15 你骑车前进时,车轮的角动量指向什么方向?你身体向左侧倾斜

时,对轮子加了什么方向的力矩? 试根据进动的原理说明这时你的车为什么要向左转弯。

习 题

5.1 掷铁饼运动员手持铁饼转动 1.25 周后松开,此刻铁饼的速度值达到 $v = 25 \text{ m/s}$ 。设转动时铁饼沿半径为 $R = 1.0 \text{ m}$ 的圆周运动,并设铁饼是均匀加速的。求:

- (1) 铁饼离手时的角速度。 25 rad/s
- (2) 铁饼的角加速度。 37.8 rad/s^2
- (3) 铁饼在手中加速的时间(把铁饼视为质点)。 0.63 s

5.2 汽车发动机的转速在 7.0 秒内由 200 转/分均匀地增加到 3000 转/分。

- (1) 求在这段时间内的初角速度和末角速度以及角加速度。 20.9 rad/s 314 41.9 rad/s^2
- (2) 求这段时间内转过的角度。 1171 rad

(3) 发动机轴上装有一半径为 $r = 0.2 \text{ m}$ 的飞轮。求它的边缘上一点在这第 7.0 秒末的切向加速度、法向加速度和总加速度。

5.3 地球自转是逐渐变慢的。在 1987 年完成 365 次自转比 1900 年长 1.14 秒。求在 1987 年到 1900 年这段时间内,地球自转的平均角加速度。

5.1 求地球表面上纬度为 λ 的 P 点,相对于地心参照系的线速度与加速度的数值与方向(图 5.31)。

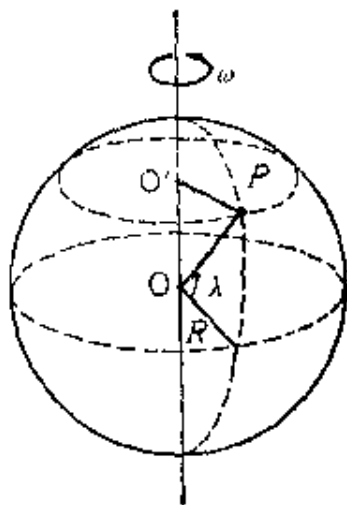


图 5.31

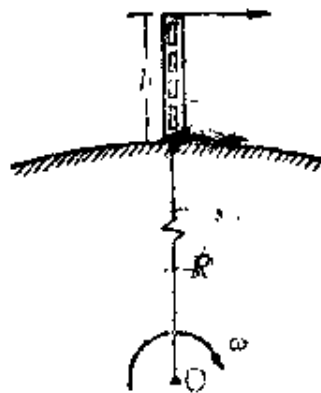


图 5.32

$$= \frac{16}{\text{m}^2}$$

5.5 赤道上有一高楼,楼高 h (图5.32)。由于地球自转,楼顶和楼根对地心参照系都有线速度。

(1) 证明:楼顶和楼根的线速度之差为 ωh ,其中 ω 为地球自转角速度。

(2) 证明:一物体由楼顶自由下落时,由于地球自转的影响,着地点将在楼根东侧约 $\omega h\sqrt{2h/g}$ 处。这就是落体偏东现象。计算 $h=30\text{ m}$ 时,着地点偏东的距离。[此结果利用了物体下落时“水平”速度不变这一近似处理。实际上物体下落时应该是地球自转轴的角动量保持不变。利用这一点,并取楼高对地球半径之比的一级近似,则可得更为准确的结果 $(2h\omega/3)\sqrt{2h/g}$ 。]

5.6 水分子的形状如图 5.33 所示。从光谱分析得知水分子对 AA' 轴的转动惯量是 $J_{AA'}=1.93\times 10^{-47}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$,对 BB' 轴的转动惯量是 $J_{BB'}=1.14\times 10^{-47}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 。试由此数据和各原子的质量求出氢和氧原子间的距离 d 和夹角 θ 。假设各原子都可当质点处理。

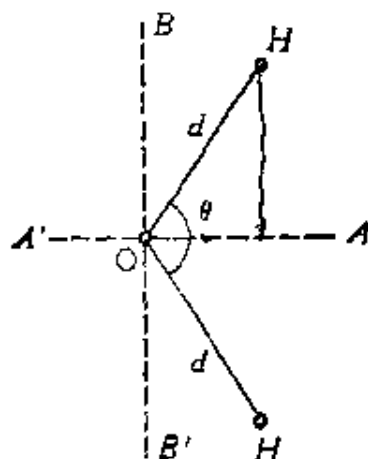


图 5.33

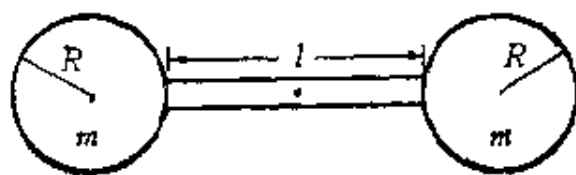


图 5.34

5.7 一个哑铃由两个质量为 m , 半径为 R 的铁球和中间一根长 l 的连杆组成(图5.34)。和铁球的质量相比,连杆的质量可以忽略。求此哑铃对于通过连杆中心并和它垂直的轴的转动惯量。它对于通过两球的连心线的轴的转动惯量又是多大?

5.8 从一个半径为 R 的均匀薄板上挖去一个直径为 R 的圆板。所形成的圆洞中心在距原薄板中心 $R/2$ 处(图5.35)。所剩薄板的质量为 m 。求此时薄板对于通过原中心而与板面垂直

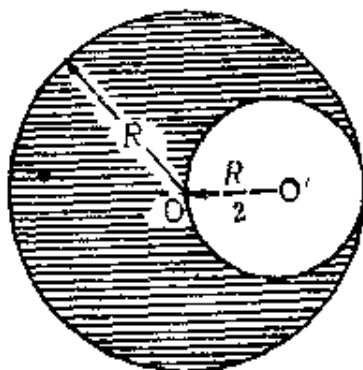


图 5.35

的轴的转动惯量。

5.9 一个半圆薄板的质量为 m ，半径为 R 。当它绕着它的直径边转动时，它的转动惯量多大？

5.10 如图5.36所示。两物体质量分别为 m_1 和 m_2 。定滑轮的质量为 m ，半径为 r ，可视作均匀圆盘。已知 m_2 与桌面间的滑动摩擦系数为 μ_k ，求 m_1 下落的加速度和两段绳子中的张力各是多少？设绳子和滑轮间无相对滑动，滑轮轴受的摩擦力忽略不计。

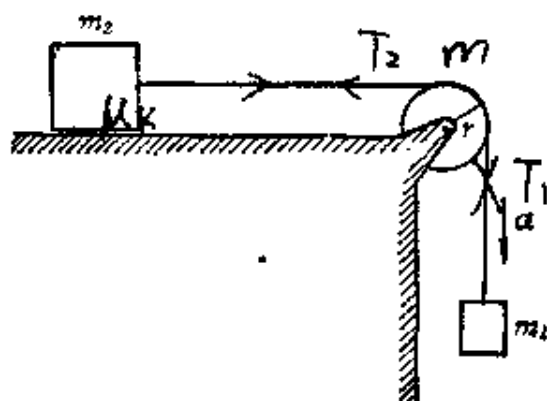


图 5.36

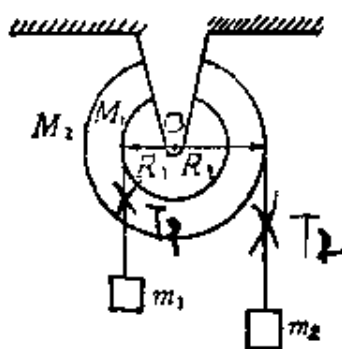


图 5.37

5.11 如图5.37所示。两个鼓轮的半径分别为 R_1 和 R_2 。质量分别为 M_1 和 M_2 。二者都可视为均匀圆柱体而且同轴固结在一起。鼓轮可以绕一水平固定轴自由转动。今在两鼓轮上各绕以细绳，绳端分别挂上质量是 m_1 和 m_2 的两个物体。求在重力作用下， m_2 下落时鼓轮的角加速度。

5.12 一根均匀米尺，用钉子在60厘米刻度处被钉到墙上，使它可以在竖直平面内自由转动。先用手使米尺保持水平，然后释放。求刚释放时米尺的角加速度和米尺到竖直位置时的角速度各是多大？

5.13 从质元的动能表示式 $\left(\frac{1}{2}\Delta m v^2\right)$ 出发，导出刚体绕定轴转动的动能表示式 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 。

$$U = WY$$

5.14 一质点质量为 m ，绕固定的 z 轴做圆周运动，半径为 r_{\perp} ，某一时刻速度为 v (图5.38)。此时它对于原点 O 的角动量矢量的方向和大小各如何？证明这一角动量矢量在 z 轴上的投影 L_z 等于质点对 z 轴的转动惯量与它的转动角速度的乘积，即 $L_z = J\omega$ (这个题目是 (5.28) 式的最简单的例子)。

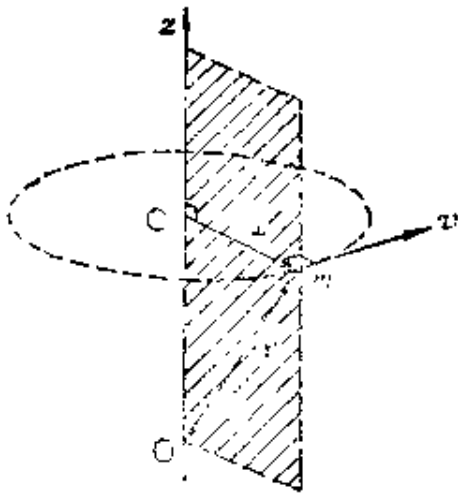


图 5.38

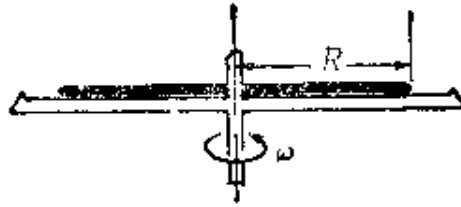


图 5.39

5.15 唱机的转盘绕着通过盘心的固定竖直轴转动。唱片放上去后将受转盘的摩擦力作用而随转盘转动(图5.39)。设唱片可以看成是半径为 R 的均匀圆盘, 质量为 m 。唱片和转盘之间的摩擦系数为 μ_k , 转盘原来以角速度 ω 匀速转动, 唱片刚放上去时它受到的摩擦力矩多大? 唱片达到角速度 ω 需要多长时间? 在这段时间内, 转盘保持角速度 ω 不变, 驱动力矩共做了多少功? 唱片获得了多大动能?

5.16 一个轻质弹簧的倔强系数为 $k=2.0\text{N/m}$ 。它一端固定。另一端通过一条细线绕过一个定滑轮和一个质量为 $m_1=80\text{g}$ 的物体相连(图5.40)。定滑轮可看做均匀圆盘, 它的半径为 $r=0.05\text{m}$, 质量为 $m=100\text{g}$ 。先用手托

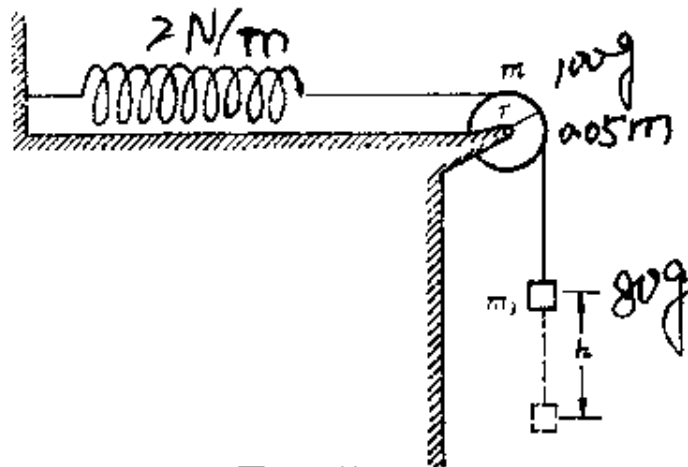


图 5.40

住物体 m_1 , 使弹簧处于其自然长度, 然后放手。求物体 m_1 下降 $h=0.5\text{m}$ 时的速度多大? 忽略滑轮轴上的摩擦, 并认为绳在滑轮边缘上不打滑。

5.17 坐在转椅上的人手握哑铃(图5.16)。两臂伸直时, 人、哑铃和椅系统对竖直轴的转动惯量为 $J_1=2\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。在外人推动后, 此系统开始以 $n_1=15\text{r/min}$ 转动。求当人的两臂收回, 使系统的转动惯量变为 $J_2=0.80\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 时, 它的转速 n_2 是多大? 设轴上摩擦忽略不计。两臂收回过程中, 系统的机械能是否守恒? 为什么?

5.18 一长 $L=0.40\text{m}$, 质量为 $M=1.0\text{kg}$ 的均匀细木棒, 由其上端的光滑水平轴吊起而处于静止 (图 5.41)。今有一质量 $m=8.0\text{g}$ 的子弹以 $v=200\text{m/s}$ 的速率水平射入棒中, 射入点在轴下 $d=3L/4$ 处。求:

- (1) 子弹停在棒中时棒的角速度;
- (2) 棒的最大偏转角。

5.19 一转台绕竖直固定轴转动, 每转一周所需时间为 $t=10\text{s}$, 转台对轴的转动惯量为 $J=1200\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。一质量为 $M=80\text{kg}$ 的人, 开始时

站在转台的中心, 随后沿半径向外跑去, 问当人离转台中心 $r=2\text{m}$ 时转台的角速度是多大?

5.20 两辆质量都是 200kg 的汽车在平直公路上都以 72km/h 的高速迎面并行。由于两车质心轨迹间距太小, 仅为 0.5m , 因而发生碰撞, 碰后二车扣在一起, 此残体对于其质心的转动惯量为 $2300\text{kg}\cdot\text{m}^2$, 求

- (1) 二车扣在一起时的旋转角速度;
- (2) 由于碰撞而损失的机械能。

5.21 宇宙飞船中有三个宇航员绕着船舱内壁按同一方向跑动以产生人造重力。

(1) 如果想使人造重力等于他们在地面上时受的自然重力, 则他们跑动的速率应多大? 设他们的质心运动的半径为 2.5m , 人体当质点处理。

(2) 如果飞船最初未动, 当宇航员按上面速率跑动时, 飞船将以多大角速度旋转? 设每个宇航员的质量为 70kg , 飞船体对于其纵轴的转动惯量为 $3\times 10^5\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。

(3) 要使飞船转过 30° , 宇航员需要跑几圈?

5.22 把太阳当成均匀球体, 试由本书开首的“数值表”给出的数据计算太阳的角动量。再由表 5.2 计算太阳的角动量是太阳系总角动量的百分之几?

5.23 脉冲星几乎全部由中子密聚形成, 所以又叫中子星。它的转速由于转动能量不断转化为其他形式的能量 (如辐射) 而不断减小。假设一个脉冲星质量为 $m=1.5\times 10^{30}\text{kg}$, 半径 $r=20\text{km}$ 。自转速率为 2.1r/s , 并以 $1.0\times 10^{-10}\text{r/s}^2$ 的变率减慢。它的转动动能以多大的变率 (以每秒焦耳或瓦

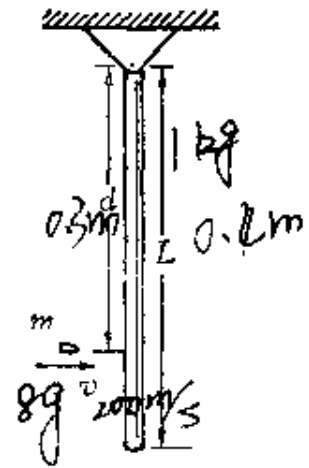


图 5.41

特计)减小? 如果这一变率保持不变, 这个脉冲星经过多长时间就要停止自旋? 设脉冲星可以当作均匀球体处理。

5.24 地球对自转轴的转动惯量是 $0.33 MR^2$, 其中 M 是地球的质量, R 是地球的半径。求地球的自转动能。由于潮汐对海岸的摩擦作用, 地球自转的速度逐渐减小。经过一年自转周期增加 3.5×10^{-5} 秒。求:

(1) 一年内地球自转动能减少多少(提示: $dE_K/E_K = 2d\omega/\omega = -2dT/T$)。

(2) 潮汐对地球的平均力矩多大?

*5.25 地球的自转轴与它绕太阳的轨道平面的垂线间的夹角是 23.5° (图 5.42)。由于太阳和月亮对地球的引力产生力矩, 地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动, 进动一周需时间约 26000 年。已知地球绕自转轴的转动惯量为 $J = 5.9 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。求地球自旋角动量矢量变化率的大小, 即

$\left| \frac{dL}{dt} \right|$ 。太阳和月亮对地球的合力矩多大?

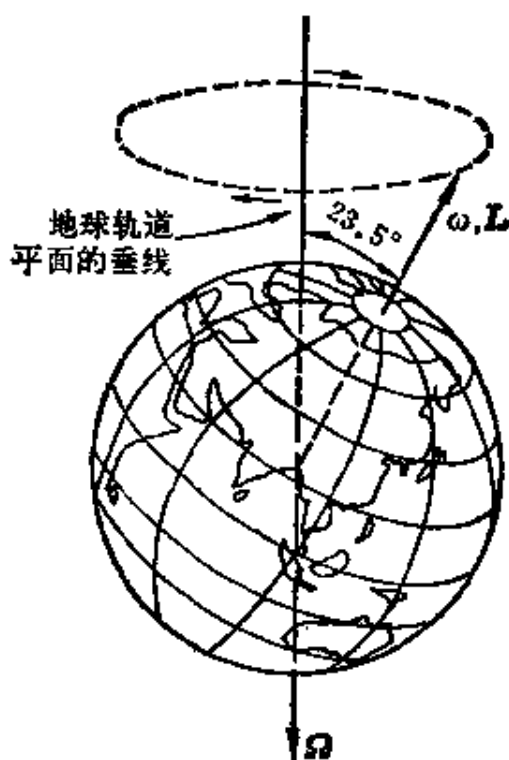


图 5.42

*5.26 一个中子的自旋角动量是 $h/4\pi \approx 5.3 \times 10^{-38} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。假设中子在某一磁场中时发生进动, 进动的角速度为 $\Omega = 2.4 \times 10^7 \text{ rad/s}$, 而进动的轴垂直于其自旋轴, 正好象图 5.21 所画的那样。求此中子受的磁力矩的大小。

第六章 狭义相对论基础

本章要求

1. 了解牛顿的绝对时空概念并能由之导出伽里略坐标变换和速度变换公式。
2. 理解爱因斯坦相对性原理和光速不变原理。
3. 理解同时性的相对性和相对论时间膨胀效应。会判断原时和非原时并能相互推算。
4. 理解长度的测量和同时性的相对性的关系,能正确应用相对论长度缩短公式。
5. 理解洛仑兹坐标变换公式并能正确用以进行坐标换算。了解相对论时空观和绝对时空观的不同以及洛仑兹变换与伽里略变换的关系。
6. 理解并能正确应用相对论速度变换公式。
7. 理解相对论质量、动量、动能、能量等概念和公式以及它们和牛顿力学中相应各量的关系。能正确利用这些公式进行计算。
- *8. 了解相对论动量——能量变换和力的变换公式。

以上各章介绍了牛顿力学最基本的内容。牛顿力学的基础就是以牛顿命名的那三条定律。这理论是在十七世纪形成的,在以后的两个多世纪里,牛顿力学对科学和技术的发展起了很大的推动作用而自身也得到了很大的发展。但是历史踏入本世纪时,物理学开始深入扩展到微观高速领域,这时发现牛顿力学在这些领

域不再适用。物理学的发展要求对牛顿力学以及某些长期认为是不言自明的基本概念作出根本性的改革。这种改革终于作出了，那就是相对论和量子力学的建立。本章介绍相对论的基础知识，量子力学将在本书第四分册《光学与近代物理》中加以简单介绍。

力学是研究物体的运动的。物体的运动就是它的位置随时间的变化。为了定量研究这种变化，必须选定适当的参照系，力学概念，如速度、加速度等，以及力学规律都是对一定的参照系才有意义的。在处理实际问题时，视问题的方便，我们可以选用不同的参照系。相对于任一参照系分析研究物体的运动时，都要应用基本力学定律。这里就出现了这样的问题，对于不同的参照系，基本力学定律的形式是完全一样的吗？

运动既然是物体位置随时间的变化，因此，无论是运动的描述或是运动定律的说明，都离不开长度和时间的测量。因此，和上述问题紧密联系而又根本的问题是：相对于不同的参照系长度和时间的测量结果是一样的吗？

物理学对于这些基础问题的解答，经历了从牛顿力学到相对论的发展。下面介绍牛顿力学是怎样理解这些问题的。然后再着重介绍狭义相对论的基本内容。

§ 6.1 牛顿相对性原理和伽里略变换

对于上面的问题，牛顿力学的回答是干脆的：对于任何惯性参照系，牛顿定律都成立。这也就是说，对于不同的惯性系，力学的基本定律——牛顿定律的形式都是一样的。因此，在任何惯性系中观察，同一力学现象将按同样的形式发生和演变。这个结论叫**牛顿相对性原理或力学相对性原理**，也叫做伽里略不变性。这个思想首先是伽里略表述的。在宣扬哥白尼的日心说时，为了解释

地球的表现上的静止,他曾以大船作比喻,生动地指出:在“以任何速度前进,只要运动是匀速的,同时也不这样那样摆动”的大船船舱内,观察各种力学现象,如人的跳跃,抛物,水滴的下落,烟的上升,鱼的游动,甚至蝴蝶和苍蝇的飞行等等,你会发现,它们都会和船静止不动时一样地发生。人们并不能从这些现象来判断大船是否在运动。无独有偶,这种关于相对性原理的思想,在我国古籍中也有记述,成书于西汉时代(比伽里略要早 1700 年!)的《尚书纬·考灵曜》中有这样的记述:“地恒动不止而人不知,譬如人在大舟中,闭牖而坐,舟行而不觉也”(图 6.1)。

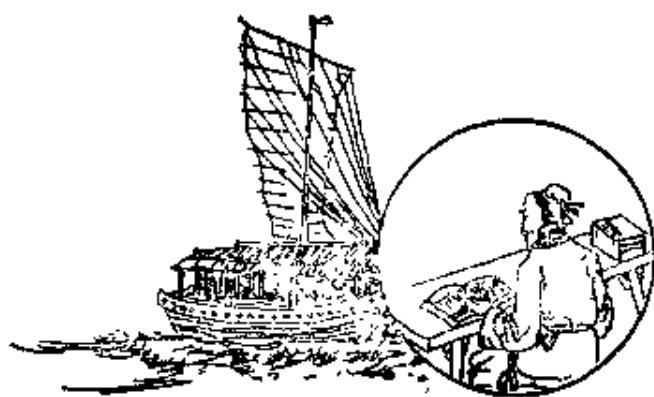


图 6.1 舟行而不觉

在做匀速直线运动的大船内观察任何力学现象,都不能据此判断船本身的运动。只有打开舷窗向外看,当看到岸上灯塔的位置相对于船不断地在变化时,才能判定船相对于地面是在运动的,并由此确定航速。即使这样,也只能作出相对运动的结论,并不能肯定“究竟”是地面在运动,还是船在运动。只能确定两个惯性系的相对运动速度,谈论某一惯性系的绝对运动(或绝对静止)是没有意义的。这是力学相对性原理的一个重要结论。

关于空间和时间的问题,牛顿有的是**绝对空间和绝对时间**概念。所谓绝对空间是指长度的量度与参照系无关,绝对时间是指

时间的量度和参照系无关。这也就是说，同样两点间的距离或同样的前后两个事件之间的时间，无论在那个惯性系中测量都是一样的。牛顿本人曾说过，“绝对空间，就其本性而言，与外界任何事物无关，而永远是相同的和不动的。”“绝对的、真正的和数学的时间自己流逝着，并由于它的本性而均匀地与任何外界对象无关地流逝着。”牛顿相对性原理和这样的时空概念是有直接联系的。下面我们来说明这种联系。

设想两个相对作匀速直线运动的参照系，分别以直角坐标系 $S(O, x, y, z)$ 和 $S'(O', x', y', z')$ 表示，两者的坐标轴分别相互平行，而且 x 轴和 x' 轴重合在一起。 S' 相对于 S 沿 x 轴方向以速度 $u = u\hat{x}$ 运动，如图 6.2。

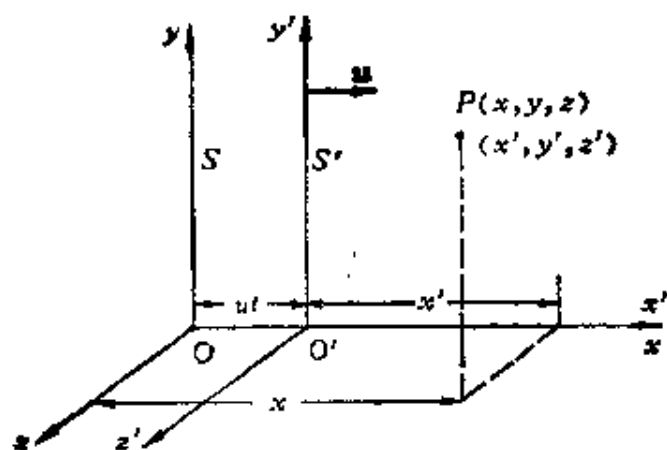


图 6.2 相对作匀速直线运动的两个参照系 S 和 S'

为了测量时间，设想在 S 和 S' 系中各处各有自己的钟，所有的钟结构完全相同，而且同一参照系中的所有的钟都是校准好而同步的，它们分别指示时刻 t 和 t' 。为了对比两个参照系中所测的时间，我们假定两个参照系中的钟都以原点 O' 和 O 重合的时刻作为计算时间的零点。让我们找出两个参照系测出的同一质点到达某一位置 P 的时刻以及该位置的空间坐标之间的关系。

由于时间量度的绝对性，质点到达 P 时，两个参照系中 P 点

附近的钟给出的时刻数值一定相等,即

$$t' = t \quad (6.1)$$

由于空间量度的绝对性,由 P 点到 xz 平面(亦即 $x'z'$ 平面)的距离,由两个参照系测出的数值也是一样的,即

$$y' = y \quad (6.2)$$

同理
$$z' = z \quad (6.3)$$

至于 x 和 x' 的值,由 S 系测量, x 应该等于此时刻两原点之间的距离 ut 加上 $y'z'$ 平面到 P 点的距离。这后一距离由 S' 系量得为 x' 。由 S 系测量,根据绝对空间概念,这后一距离应该一样,即也等于 x' 。所以,在 S 系中测量就应该有

$$x = x' + ut$$

或
$$x' = x - ut \quad (6.4)$$

把上面四个公式写到一起,就得到下面一组变换公式

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (6.5)$$

这组公式叫伽里略坐标变换。它是绝对时空概念的直接反映。

由公式(6.5)可进一步求得速度变换公式。将前三式对时间求导,考虑到 $t = t'$ 可得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}$$

式中:
$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = v'_y, \quad \frac{dz'}{dt'} = v'_z;$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

分别为 S' 系或 S 系中的各个速度分量,因此可得速度变换公式为

$$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \quad (6.6)$$

此三者可以合并成一个矢量式,即

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad (6.7)$$

这正是第一章中已导出的伽里略速度变换(1.43)式。由上面的

推导可以看出它是绝对的时空概念为基础的。

将(6.7)式再对时间求导,可得出加速度变换公式。由于 u 与时间无关,所以有

$$\frac{dv'}{dt'} = \frac{dv}{dt}$$

即
$$a' = a \quad (6.8)$$

这说明同一质点的加速度在不同的惯性系内测得的结果是一样的。

在牛顿力学里,质点的质量和运动速度没有关系,因而也不受参照系的影响。又牛顿力学中的力只跟质点的相对位置或相对运动有关,因而力也是和参照系无关的。因此,只要 $F = ma$ 在参照系 S 中是正确的,那么,对于参照系 S' 来说,由于 $F' = F$, $m' = m$ 以及(6.8)式,则必然有

$$F' = m'a' = \frac{d(m'v')}{dt'} = \frac{dp'}{dt'} \quad (6.9)$$

即对参照系 S' 说,牛顿定律也是正确的。一般地说,牛顿定律对任何惯性系都是正确的。

这样,我们就由牛顿的绝对时空概念(以及“绝对质量”概念)得到了牛顿相对性原理。

§ 6.2 爱因斯坦相对性原理和光速不变

在牛顿等对力学进行深入研究之后,人们对其它物理现象,如光和电磁现象的研究也逐步深入了。十九世纪中叶,已形成了比较严整的电磁理论——麦克斯韦理论。它预言光是一种电磁波,而且不久也为实验所证实。在分析与物体运动有关的电磁现象时,也发现有符合相对性原理的实例。例如在电磁感应现象中,只是

磁体和线圈的相对运动决定线圈内产生的感生电动势。因此，也提出了同样的问题，对于不同的惯性系，电磁现象的基本规律的形式是一样的吗？如果用伽里略变换对电磁现象的基本规律进行变换，发现这些规律对不同的惯性系并不具有相同的形式。就这样，伽里略变换和电磁现象的符合相对性原理发生了矛盾。

在这个问题中，光速的数值起了特别重要的作用。以 c 表示在某一参照系 S 中测得的光在真空中的速率，以 c' 表示在另一参照系 S' 中测得的光在真空的的速率，如果根据伽里略变换，就应该有

$$c' = c \pm u$$

式中 u 为 S' 相对于 S 的速度，它前面的正负号由 c 和 u 的方向相反或相同而定。但是麦克斯韦的电磁场理论给出的结果与此不相符。该理论给出的光在真空中的速率由下式决定

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (6.10)$$

其中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$, $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2$, 是两个电磁学常数。将这两个值代入上式, 可得

$$c = 2.99 \times 10^8 \text{m/s}$$

由于 ϵ_0, μ_0 与参照系无关, 因此 c 也应该与参照系无关。这就是说在任何参照系中测得的光在真空中的速率都应该是这一数值。这一结论还特别为后来的很多精确的实验和观察(最著名的是 1887 年迈克尔逊和莫菜作的实验)所证实。它们都明确无误地证明光速的测量结果与光源和测量者的相对运动无关, 亦即与参照系无关。光速的近代测定值为

$$c = (299792458 \pm 1.2) \text{m/s}$$

可见光或电磁波的运动不服从伽里略变换!

光速与参照系无关这一点是与人们的预计相违反的。日常经

验总是使人们确信伽里略变换是正确的。但是,要知道,日常遇到的物体运动的速率比起光速来是非常小的,炮弹飞出炮口的速率不过 10^3 米/秒,人造卫星的发射速率也不过 10^4 米/秒,不及光速的万分之一。我们本来不能,也不应该轻率地期望在低速情况下适用的规律在很高速的情况下也一定能适用。

伽里略变换和电磁规律的矛盾促使人们思考下述问题:是伽里略变换是正确的,而电磁现象的基本规律不符合相对性原理呢?还是已发现的电磁现象的基本规律是符合相对性原理的,而伽里略变换,实际上是绝对时空概念,应该修正呢?爱因斯坦对这个问题进行了深入的研究,并在 1905 年发表了《论动体的电动力学》这篇论文,对此问题作出了对整个物理学都有根本变革意义的回答。在该文中他把下述“思想”提升为“公设”即基本假设:

物理规律对所有惯性系都是一样的,不存在任何一个特殊的(例如“绝对静止”的)惯性系。

爱因斯坦称这一假设为相对性原理,我们称之为**爱因斯坦相对性原理**。和牛顿相对性原理加以比较,可以看出前者是后者的推广,使相对性原理不仅适用于力学现象,而且适用于所有物理现象,包括电磁现象在内。这样,我们就可以料到,在任何一个惯性系内,不但是力学实验,而且任何物理实验都不能用来确定本参照系的运动速度。绝对运动或绝对静止的概念,从整个物理学中被排除了。

在把相对性原理提升为基本假设的同时,爱因斯坦在那篇著名论文中还把下一论断,即**在任何惯性系中,光在真空中的速率都相等**,作为另一个基本假设提了出来。这一假设称为**光速不变原理**。就是在看来这样简单而且最一般的两个假设的基础上,爱因斯坦建立一套完整的理论——狭义相对论,而把物理学推进到了一个新的阶段。由于在这里涉及的只是无加速运动的惯性系。所

以叫狭义相对论,以别于后来爱因斯坦发展的广义相对论,在那里讨论到作加速运动的参照系。

既然选择了相对性原理,那就必须修改伽里略变换,爱因斯坦是怎样作的呢?

§ 6.3 同时性的相对性和时间膨胀

爱因斯坦对物理规律和参照系的关系进行考查时,不仅注意到了物理规律的具体形式,而且注意到了更根本更普遍的问题——关于时间和长度的测量问题,首先是时间的概念。他对牛顿的绝对时间概念提出了怀疑,并且,据他说,从十六岁起就开始思考这个问题了。经过十年的思考,终于得到了他的异乎寻常的结论:时间的量度是相对的!对于不同的参照系,同样的先后两个事件之间的时间间隔是不同的。

爱因斯坦的论述是从讨论“同时性”概念开始的。在1905年那篇著名论文中,他写道:

如果我们要描述一个质点的运动,我们就以时间的函数来给出它的坐标值。现在我们必须记住,这样的数学描述,只有在我们十分清楚懂得“时间”在这里指的是什么之后才有物理意义。我们应该考虑到:凡是时间在里面起作用的我们的一切判断,总是关于同时的事件的判断。比如我们说,“那列火车7点钟到达这里”,这大概就是说,“我的表的短针指到7同火车到达是同时的事件”。

注意到了同时性,我们就会发现,和光速不变紧密联系在一起的是:在某一惯性系中同时发生的两个事件,在相对于此惯性系运动的另一惯性系中观察,并不是同时发生的,这可由下面的理想实验看出来。

仍设如图 6.2 所示的两个参照系 S 和 S' , 设在坐标系 S' 中

的 x' 轴上的 A' 、 B' 两点各放置一个接收器，每个接收器旁各有一个静止于 S' 的钟，在 $A'B'$ 的中点 M' 上有一闪光光源(图 6.3)

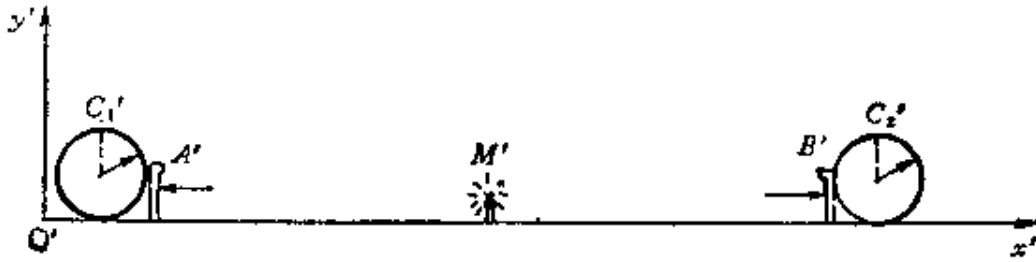


图 6.3 在 S' 系中观察，光同时到达 A' 和 B'

今设光源发出一闪光，由于 $M'A' = M'B'$ ，而向各个方向的光速是一样的，所以闪光必将同时传到两个接收器，或者说，光到达 A' 和到达 B' 这两个事件在 S' 系中观察是同时发生的。

在 S 系中观察这两个同样的事件，其结果又如何呢？如图 6.4 所示，在光从 M' 发出到达 A' 这一段时间内， A' 已迎着光线走了一段距离，而在光从 M' 出发到达 B' 这段时间内， B' 却背着光线走了一段距离。

显然，光线从 M' 发出到达 A' 所走的距离比到达 B' 所走的距离要短。因为这两个方向的光速还是一样的(光速与光源和观察者的相对运动无关)，所以光必定先到达 A' 而后到达 B' ，或者说，光到达 A' 和到达 B' 这两个事件在 S 系中观察并不是同时发生的。这就说明，同时性是相对的。

如果 M 、 A 、 B 是固定在 S 系的 x 轴上的一套类似装置，则用同样分析可以得出，在 S 系中同时发生的两个事件，在 S' 系中观察，也不是同时发生的。分析这两种情况的结果还可以得出下一结论：沿两个惯性系相对运动方向发生的两个事件，在其中一个惯性系中表现为同时的，在另一惯性系中观察，则总是在前一惯性系运动的后方的那一事件先发生。

由图 6.4 也很容易了解， S' 系相对于 S 系的速度越大，在 S

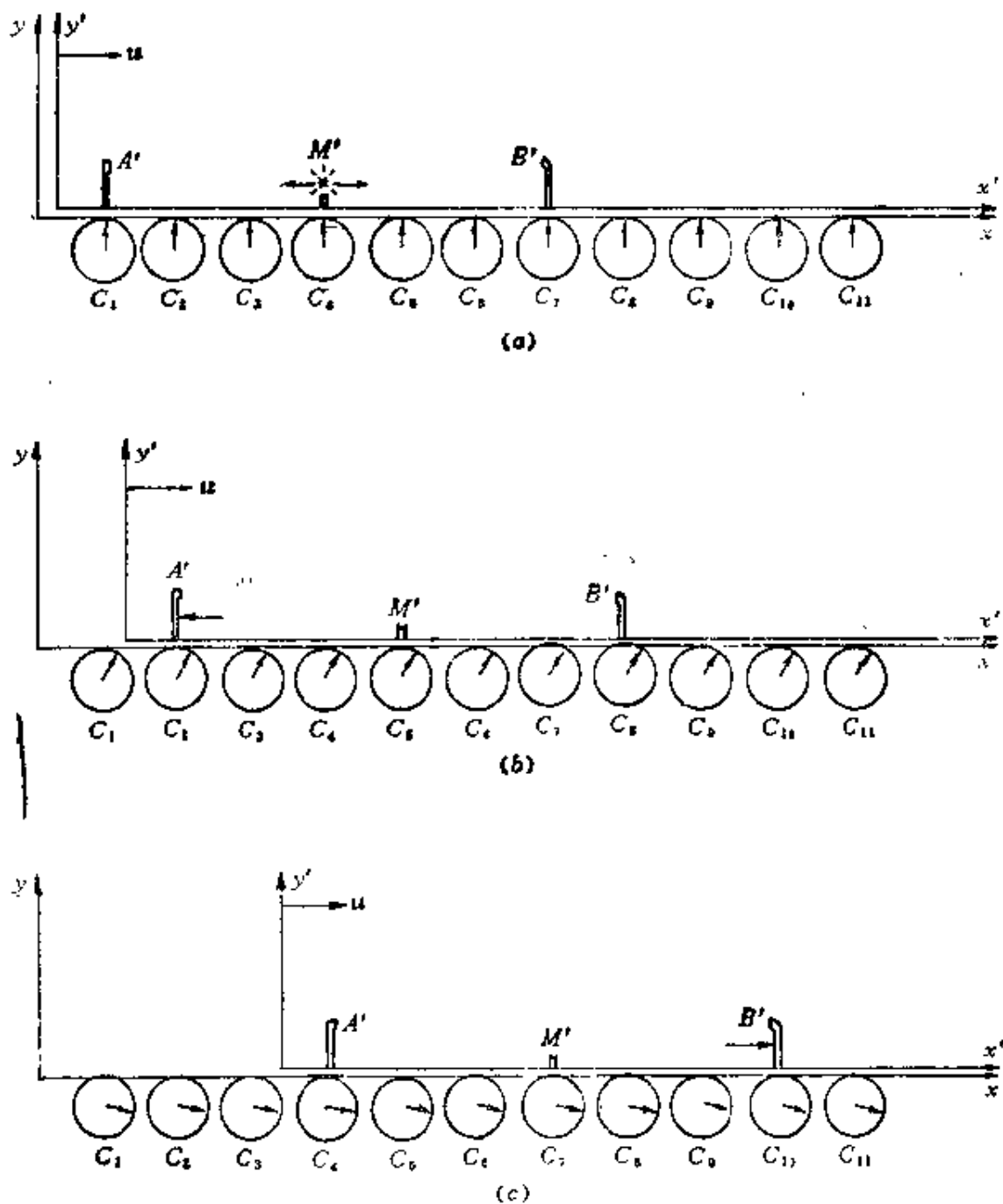


图 6.4 在 S 系中观察

(a) 光由 M' 发出; (b) 光到达 A'; (c) 光到达 B'

系中所测得的两事件之间的时间间隔就越长。这就是说,对不同的参照系,同样的两个事件之间的时间间隔是不同的。这也就是说,时间的量度是相对的。

下面我们来导出时间量度和参照系相对速度之间的关系。

如图 6.5(a) 所示, 设在 S' 系中 A' 点有一闪光光源, 它近旁有一只钟 C' 。在平行于 y' 轴方向离 A' 距离为 d' 处放置一反射镜, 镜面向 A' 。今令光源发出一闪光射向镜面又反射回 A' , 光从 A' 发出到再返回 A' 这两个事件相隔的时间由钟 C' 给出, 它应该是:

$$\Delta t' = \frac{2d'}{c} \quad (6.11)$$

在 S 系中测量, 光从 A' 发出再返回 A' 这两个事件相隔的时间又是多长呢? 首先, 我们看到, 由于 S' 系的运动, 这两个事件并不发生在 S 系中的同一地点。为了测量这一时间间隔, 必须利用沿 x 轴配置的许多静止于 S 系的经过校准而同步的钟 C_1 、 C_2 等等。而待测时间间隔由光从 A' 发出和返回 A' 时, A' 所邻近的钟 C_1 和 C_2 给出。我们还可以看到, 在 S 系中测量时, 光线由发出到返回并不沿同一直线进行, 而是沿一条折线。为了计算光经过这折线的时间, 需要算出在 S 系中测得的斜线 l 的长度。为此, 我们先说明, 在 S 系中测量, 沿 y 方向从 A' 到镜面的距离也是 d (这里应当怀疑一下牛顿的绝对长度的概念), 这可以由下述火车钻洞的假想实验得出。

设在山洞外停有一列火车, 车厢高度与洞顶高度相等。现在使车厢匀速地向山洞开去。这时它的高度是否和洞顶高度相等呢? 或者说, 高度是否和运动有关呢? 假设高度由于运动而变小了。这样, 在地面上观察, 由于运动的车厢高度减小, 它当然能顺利地通过山洞。如果在车厢上观察, 则山洞是运动的, 由相对性原理, 洞顶的高度应减小。这样车厢势必在山洞外被阻住。这就发生了矛盾。但车厢能否穿过山洞是一个确定的物理事实, 应该和参照系的选择无关。因而上述矛盾不应该发生。这说明上述假设是错误的。因此在满足相对性原理的条件下, 车厢和洞顶的高度不应因

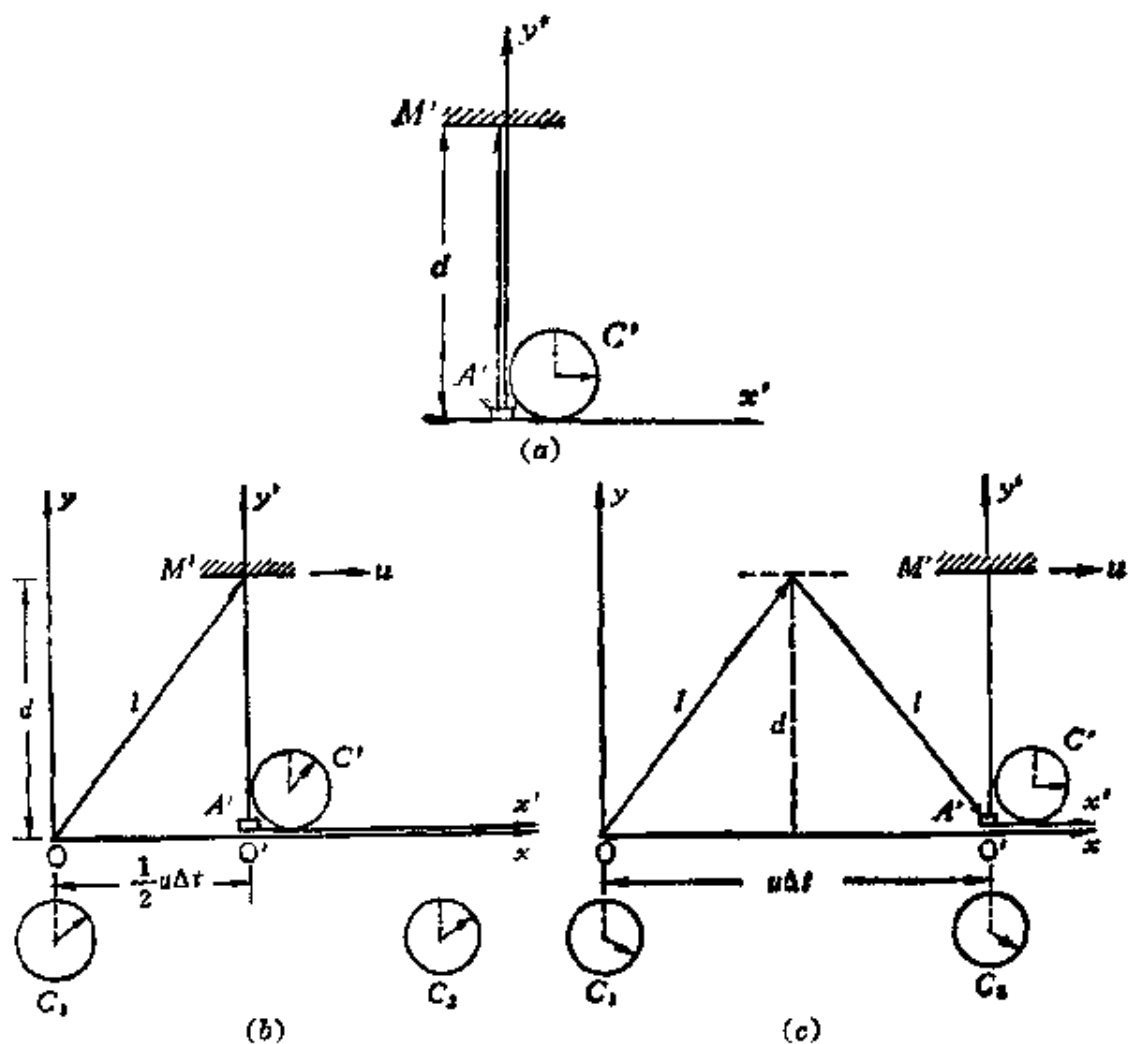


图 6.5 时间量度与参照系相对速度的关系

(a) 在 S' 系中测量 (b)、(c) 在 S 系中测量

运动而减小。这也就是说，垂直于相对运动方向的长度测量与运动无关，因而在图 6.5(c) 中，由 S 系观察， A' 和反射镜之间沿 y 方向的距离仍是 d 。

以 Δt 表示在 S 系中测得的闪光由 A' 发出到返回 A' 所经过的时间。由于在这段时间内， A' 移动了距离 $u\Delta t$ ，所以

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2} \quad (6.12)$$

由光速不变，所以又有

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}$$

由此式解出 Δt 可得

$$\Delta t = \frac{2d}{c} / \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

和公式(6.11)比较可得

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (6.13)$$

此式说明,如果在某一参照系 S' 中发生在同一地点的两个事件相隔的时间是 $\Delta t'$,则在另一参照系 S 中测得的这两个事件相隔的时间 Δt 总是要长一些。二者之间差一个 $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ 因子。这就从数量上显示了时间测量的相对性。

在某一参照系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔叫原时。它是静止于此参照系中的一只钟测出的。在上面的例子中, $\Delta t'$ 就是光从 A' 发出又返回 A' 所经历的原时。由(6.13)式可看出,原时最短。原时和在其它参照系中测得的时间的关系,如果用钟走的快慢来说明,就是 S 系中的观察者把相对于他运动的那只 S' 系中的钟和自己的许多同步的钟对比,发现那只钟慢了。那只运动的钟的1秒对应于这许多静止的同步的钟的好几秒。这个效应叫做运动的钟时间膨胀。

应注意,时间膨胀是一种相对效应。也就是说, S' 系中的观察者会发现静止于 S 系中而相对于自己运动的任一只钟比自己的参照系中的一系列同步的钟走得慢。这时 S 系中的一只钟给出原时, S' 系中的钟给出的不是原时。

由(6.13)式还可以看出,当 $u \ll c$ 时, $\sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 1$ 而 $\Delta t \approx \Delta t'$ 。这种情况下,同样的两个事件之间的时间间隔在各参照系中测得的结果都是一样的,即时间的测量与参照系无关。这就是牛顿的绝对时间概念。由此可知,牛顿的绝对时间概念实际上是相对论时间概念在参照系的相对速度很小时的近似。

「例 17」飞船以 $u=9 \times 10^8 \text{ m/s}$ 的速率相对于地面(我们假定为惯性系)匀速飞行。飞船上的钟走了 5 s 的时间,用地面上的钟测量是经过了多少时间?

解: $u=9 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\Delta t'=5 \text{ s}$, $\Delta t=?$

因为 $\Delta t'$ 为原时,所以

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(9 \times 10^8/3 \times 10^8)^2}} \\ &\approx 5 \left[1 + \frac{1}{2} (3 \times 10^{-5})^2 \right] = 5.0000000002 \text{ s} \end{aligned}$$

此结果说明对于飞船的这样大的速率来说,时间膨胀效应实际上是很难测量出来的。

「例 2」带正电的 π 介子是一种不稳定的粒子。当它静止时,平均寿命为 $2.5 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。过后即衰变为一个 μ 介子和一个中微子。今产生一束 π 介子,在实验室测得它的速率为 $u=0.99c$,并测得它在衰变前通过的平均距离为 52 m。这些测量结果是否一致?

解: 如果用平均寿命 $\Delta t'=2.5 \times 10^{-8} \text{ s}$ 和速率 u 相乘,得

$$0.99 \times 3 \times 10^8 \times 2.5 \times 10^{-8} \approx 7.4 \text{ m}$$

这和实验结果明显不符。若考虑相对论时间膨胀效应, $\Delta t'$ 是静止 π 介子的平均寿命,是一个原时,当 π 介子运动时,在实验室测得的平均寿命应是

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 1.8 \times 10^{-7} \text{ s}$$

在实验室测得它通过的平均距离应该是

$$u \Delta t = 0.99 \times 3 \times 10^8 \times 1.8 \times 10^{-7} = 53 \text{ m}$$

和实验结果很好地符合。

这是符合相对论的一个高能粒子的实验。实际上,近代高能粒子实验,每天都在考验着相对论,而相对论每次也都经受住了这种考验。

§6.4 长度缩短

现在讨论长度的测量。上节已说过,垂直于运动方向的长度测量是与参照系无关的。沿运动方向的长度测量又如何呢?

应该明确的是，长度测量是和同时性概念密切相关的。在某一参照系中测量棒的长度，就是要测量它的两端点在同一时刻的位置之间的距离。这一点在测量静止的棒的长度时并不明显地重要，因为它的两端的位置不变，不管是否同时记录两端的位置，结果总是一样的。但在测量运动的棒的长度时，同时性的考虑就带有决定性的意义了。如图 6.6 所示，要测量正在行进的汽车的长度 l ，就必须在同一时刻记录

车头的位置 x_2 和车尾的位置 x_1 ，然后算出来 $l = x_2 - x_1$ (图 6.6a)。如果两个位置不是在同一时刻记录的，例如在记了 x_1 之后过一会再记录 x_2 (图 6.6b)，则 $x_2 - x_1$ 就和两次记录的时间间隔有关系。它的数值显然不代表汽车的长度。

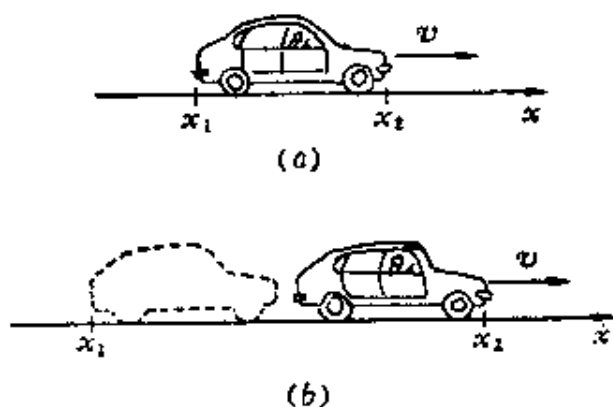


图 6.6 测量运动的汽车的长度

(a) 同时记录 x_1 和 x_2

(b) 不同时记录 x_1 和 x_2

根据爱因斯坦的观点，既然同时性是相对的，那么长度的测量也必定是相对的。长度测量和参照系的运动有什么关系呢？

仍假设如图 6.2 所示的两个参照系 S 和 S' 。有一根棒 $A'B'$ 固定在 x' 轴上。在 S' 系中测得它的长度为 l' ，为了求出它在 S 系中的长度 l ，我们假想在 S 系中某一时刻 t_1 ， B' 端经过 x_1 ，如图 6.7(a)，在其后 $t_1 + \Delta t$ 时刻 A' 经过 x_1 。由于棒的运动速度为 u ，在 $t_1 + \Delta t$ 这一时刻 B' 端的位置一定在 $x_2 = x_1 + u\Delta t$ 处如图 6.7(b)。根据上面所说长度测量的规定，在 S 系中棒长就应该是

$$l = x_2 - x_1 = u\Delta t \quad (6.14)$$

现在再看 Δt ，它是 B' 端和 A' 端相继通过 x_1 点这两个事件之间的时间间隔。由于 x_1 是 S 系中一个固定地点，所以 Δt 是这两

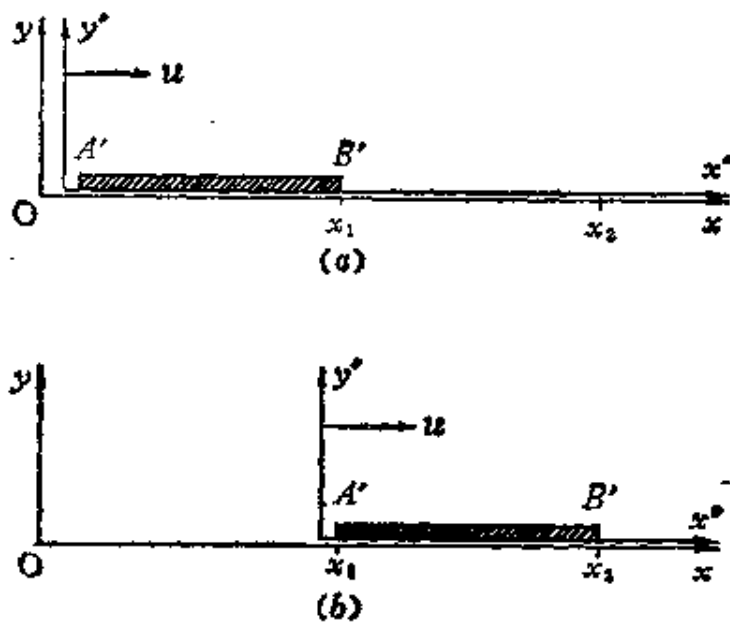


图 6.7 在 S 系中测量运动的棒 $A'B'$ 长度
(a) 在 t_1 时刻 $A'B'$ 的位置 (b) 在 $t_1 + \Delta t$ 时刻 $A'B'$ 的位置

个事件之间的原时。

从 S' 系看来,棒是静止的,由于 S 系向左运动, x_1 这一点相继经过 B' 和 A' 端(图 6.8)。由于棒长为 l' ,所以 x_1 经过 B' 和 A' 这两个事件之间的时间间隔 $\Delta t'$,在 S' 系中测量为

$$\Delta t' = l'/u \quad (6.15)$$

Δt 和 $\Delta t'$ 都是指同样两个事件之间的时间间隔,根据时间膨胀关系,有

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{l'}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

将此式代入(6.14)式即可得

$$l = l' \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (6.16)$$

此式说明,如果在某一参照系(S')中,一根静止的棒的长度是 l' ,则在另一参照系中测得的同一根棒的长度 l 总要短些,二者之间相差一个因子 $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ 。这就显示了长度测量的相对性。

棒静止时测得的它的长度叫棒的静长或原长。上例中的 l'

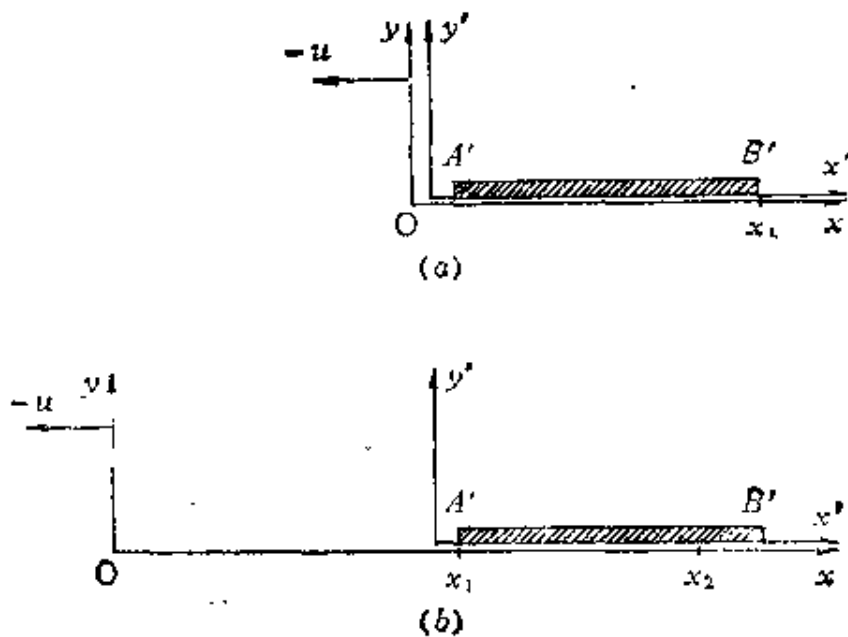


图 6.8 在 S' 系中观察的结果
(a) x_1 经过 B' 点 (b) x_1 经过 A' 点

就是原长。由(6.16)式给出,原长最长。这种长度测量值的不同显然只适用于棒沿着运动方向放置的情况。这种效应叫做运动的棒(纵向)的长度缩短。

也应该指出,长度缩短也是一种相对效应。静止于 S 系中沿 x 方向放置的棒,在 S' 系中测量,其长度也要缩短。此时, l 是原长,而 l' 不是原长。

由(6.16)式可以看出,当 $u \ll c$ 时, $l \approx l'$ 。这时又回到了牛顿的绝对空间的概念:空间的量度与参照系无关。这也说明,牛顿的绝对空间概念是相对论空间概念在相对速度很小时的近似。

[例 1] 原长为 5 m 的飞船以 $u = 9 \times 10^8$ m/s 的速率相对于地面匀速飞行时,从地面上测量,它的长度是多少?

解: $l' = 5$ m, $u = 9 \times 10^8$ m/s, $l = ?$

l' 即为原长,所以

$$l = l' \sqrt{1 - u^2/c^2} = 5 \sqrt{1 - (9 \times 10^8 / 3 \times 10^8)^2} \approx 5 \left[1 - \frac{1}{2} (3 \times 10^{-6})^2 \right] \\ = 4.999999998 \text{ m}$$

这个结果和静长 5 米的差别是难于测出的。

例 2. 试从 π 介子在其中静止的参照系来考虑 π 介子的平均寿命(参照 1.1 节例 2)。

解: 从 π 介子的参照系看来,实验室的运动速率为 $u=0.99c$,实验室中测得的距离是 $l=52\text{ m}$ 为原长。在 π 介子参照系中测量此距离应为

$$l' = l\sqrt{1 - u^2/c^2} = 52 \times \sqrt{1 - (0.99)^2} = 7.3\text{ m}$$

而实验室飞过这一段距离所用的时间为

$$\Delta t' = l'/u = 7.3/0.99c = 2.5 \times 10^{-8}\text{ s}$$

这正好就是静止 π 介子的平均寿命。

§ 6.5 洛仑兹变换

在 § 6.1 中我们根据牛顿的绝对时空概念导出了伽里略变换。现在让我们根据爱因斯坦的相对论时空概念导出相应的另一组坐标变换式——洛仑兹变换。

仍然设 S, S' 两个参照系如图 6.9, S' 以速度 u 相对于 S 运动,二者原点 O, O' 在 $t=t'=0$ 时重合。我们求由两个坐标系测出的在某时刻发生在 P 点的一个事件(例如一次爆炸)的两套坐标值之间的关系。在该时刻,在 S' 系中测量,时刻为 t' ,从 $y'z'$ 平面到 P 点的距离为 x' 。在 S 系中测量(图 6.9 a),该同一时刻为 t ,从 yz 平面到 P 点的距离 x 应等于此时刻两原点之间的距离 ut 加上 $y'z'$ 平面到 P 点的距离。但这后一段距离在 S 系中测量,其数值不再等于 x' ,根据长度缩短,应等于

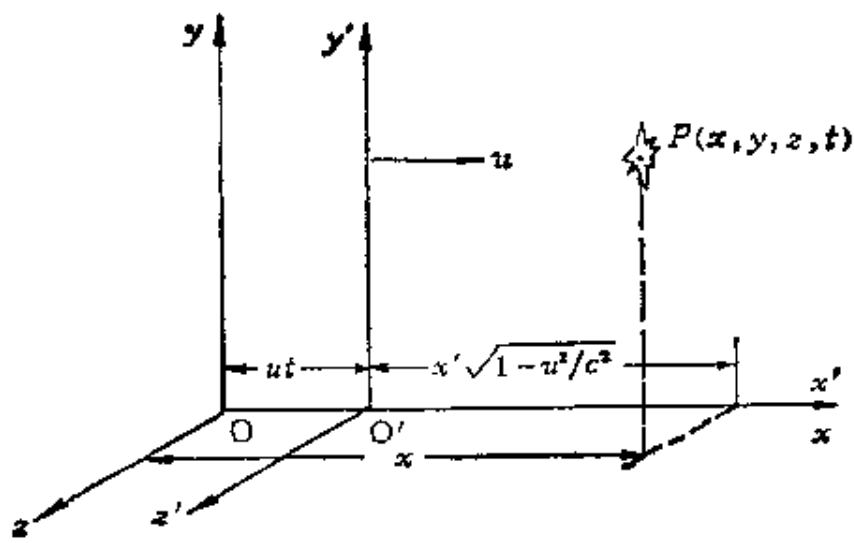
$$x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

因此在 S 系中测量的结果应为

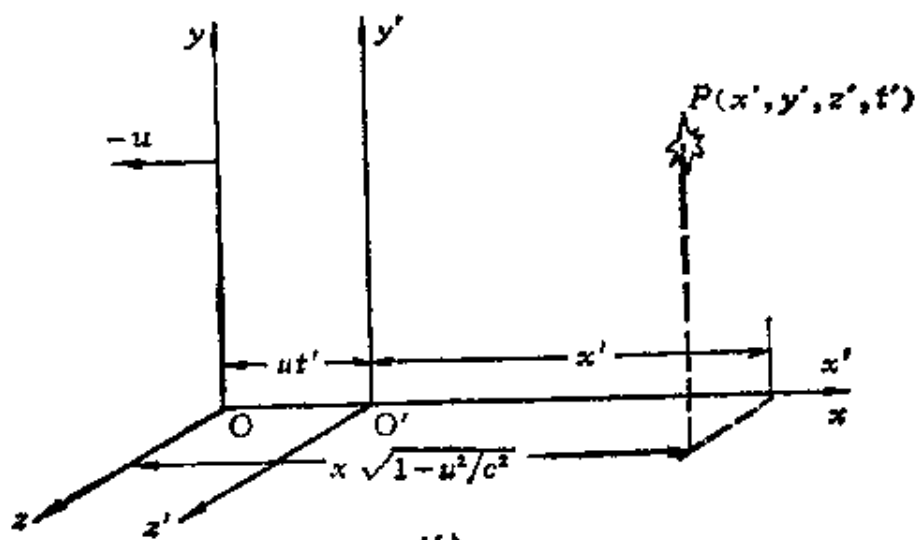
$$x = ut + x' \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (6.17)$$

或者

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (6.18)$$



(a)



(b)

图 6.9 洛伦兹变换的推导

(a) 在 S 系中测量 (b) 在 S' 系中测量

为了求得时间变换公式，可以先求出以 x 和 t' 表示的 x' 的表示式。在 S' 系中观察时（图 6.9 b）， yz 平面到 P 点的距离应为 $x\sqrt{1-u^2/c^2}$ ，而 OO' 的距离为 ut' ，这样就有

$$x' = x\sqrt{1-u^2/c^2} - ut' \quad (6.19)$$

在(6.17)、(6.19)式中消去 x' ，可得

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (6.20)$$

在 § 6.3 中已经指出, 垂直于相对运动方向的长度测量与参照系无关, 即 $y' = y, z' = z$, 将上述变换式列到一起, 有

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (6.21)$$

(6.21) 式称为洛仑兹变换式。

可以明显地看出, 当 $u \ll c$ 时, 洛仑兹变换式就约化为伽里略变换式。当然应该这样, 因为如已指出过的, 牛顿的绝对时空概念是相对论时空概念在参照系相对速度很小时的近似。

与伽里略变换相比, 洛仑兹变换中的时间坐标明显地和空间坐标有关。这说明, 在相对论中, 时间空间的测量互相不能分离。它们联系成一个整体了。因此在相对论中常把一个事件发生时的位置和时刻联系起来称为它的**时空坐标**。

在现代相对论文献中, 常用下面两个恒等符号

$$\beta \equiv u/c \quad \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad (6.22)$$

这样, 洛仑兹变换式就可写成

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \quad (6.23)$$

对此式解出 x, y, z, t , 可得**逆变换公式**

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \quad (6.24)$$

此逆变换公式也可以根据相对性原理, 在正变换式(6.23)中把带撇的量和不带撇的量相互交换, 同时把 β 换成 $-\beta$ 得出。

这里应指出一点, 在(6.21)式中, $t = 0$ 时,

$$x' = x/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

如果 $u \geq c$, 则对于各 x 值, x' 值将只能以无穷大值或虚数值和它对应, 这显然是没有物理意义的。因而两参照系的相对速度不可能等于或大于光速。由于参照系总是借助于一定的物体 (或物体组) 而确定的, 所以我们可以说, 根据狭义相对论的基本假设, 任何物体相对于另一物体的速度不能等于或超过真空中的光速, 即在真空中的光速 c 是一切实际物体运动速度的极限。其实这一点我们从 (6.13) 式已经可以看出来了。在后面 § 6.8 中还要介绍关于这一结论的直接实验验证。

[例 1] 用洛仑兹变换式验证长度缩短公式 (6.16)

解: 设在 S' 系中沿 x' 轴放置一根静止的棒, 它的长度为 $l' = x'_2 - x'_1$ 。由洛仑兹变换,

$$l' = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

遵照测量运动棒的长度时棒两端的位置必须同时记录的规定, 要使 $x_2 - x_1 = l$ 表示在 S 系中测得的棒长, 就必须 $t_2 = t_1$ 。这样上式就给出:

$$l' = l / \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad \text{或} \quad l = l' \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

这就是 (6.16) 式。

[例 2] 用洛仑兹变换式说明同时性的相对性

从根本上说, 洛仑兹变换式来源于爱因斯坦的同时性的相对性, 它自然也能反过来把这一相对性表现出来, 例如, 对于 S 系中的两个事件 $A(x_1, 0, 0, t_1)$ 和 $B(x_2, 0, 0, t_2)$, 在 S' 系中它的时空坐标将是 $A(x'_1, 0, 0, t'_1)$ 和 $B(x'_2, 0, 0, t'_2)$ 。由洛仑兹变换,

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

因此,

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (6.25)$$

如果在 S 系中, A, B 是在不同的地点 (即 $x_2 \neq x_1$), 但是在同一时刻 (即 $t_2 = t_1$) 发生, 则由上式可得 $t'_2 \neq t'_1$, 即在 S' 系中观察, A, B 并不是同时发生的。这就说明了同时性的相对性。

由(6.25)式还可以看出,如果 $t_2 > t_1$,即在 S 系中观察, B 事件迟于 A 事件发生,则对于不同的 $(x_2 - x_1)$ 值, $(t'_2 - t'_1)$ 可以大于、等于或小于零,即在 S' 系中观察, B 事件可能迟于、同时或先于 A 事件发生。这就是说,两个事件发生的时间顺序,在不同的参照系中观察,有可能颠倒。不过,应该注意,这只限于两个互不相关的事件。

对于有因果关系的两个事件,它们发生的顺序,在任何惯性系中观察,都是不应该颠倒的。所谓的 A, B 两个事件有因果关系,就是说 B 事件是 A 事件引起的。例如,在某处的枪口发出子弹算作 A 事件,在另一处的靶上被此子弹击穿一个洞算作 B 事件,这 B 事件当然是 A 事件引起的。又例如在地面上某雷达站发出一道雷达波算作 A 事件,在某人造地球卫星上接收到此雷达波算作 B 事件,这 B 事件也是 A 事件引起的。一般地说, A 事件引起 B 事件的发生,必然是从 A 事件向 B 事件传递了一种“作用”或“信号”,例如上面例子中的子弹或无线电波。这种“信号”在 t_1 时刻到 t_2 时刻这段时间内,从 x_1 到达 x_2 处,因而传递的速度是

$$v_s = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

这个速度就叫“信号速度”。由于信号实际上是一些物体或无线电波、光波等,因而信号速度总不能大于光速。对于这种有因果关系的两个事件,(6.25)式可改写成

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[1 - \frac{u}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \right] = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[1 - \frac{u}{c^2} v_s \right]$$

由于 $u < c, v_s \leq c$,所以 uv_s/c^2 总小于 1。这样, $(t'_2 - t'_1)$ 就总跟 $(t_2 - t_1)$ 同号。这就是说,在 S 系中观察,如果 A 事件先于 B 事件发生(即 $t_2 > t_1$),则在任何其它参照系 S' 中观察, A 事件也总是先于 B 事件发生,时间顺序不会颠倒。狭义相对论在这一点

上是符合因果关系的要求的。

[例 3] 北京和上海直线相距 1000 km。在某一时刻从两地同时各开出一列火车。现有一艘飞船沿从北京到上海的方向在高空掠过，速率恒为 $u=9 \text{ km/s}$ 。求宇航员测得的两列火车开出时刻的间隔，哪一列先开出？

解：取地面为 S 系，坐标原点在北京，以北京到上海的方向为 x 轴正方向。北京和上海的位置坐标分别是 x_1 和 x_2 。取飞船为 S' 系。

现已知两地距离是

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10^6 \text{ m}$$

而两列火车开出时刻的间隔是

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

以 t'_1 和 t'_2 分别表示在飞船上测得的从北京发车的时刻和从上海发车的时刻。则由洛仑兹变换可知

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{-\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{-\frac{9 \times 10^3}{(3 \times 10^8)^2} \times 10^6}{\sqrt{1 - \left(\frac{9 \times 10^3}{3 \times 10^8}\right)^2}} \approx -10^{-7} \text{ s} \end{aligned}$$

这一负的结果表示：宇航员发现从上海发车的时刻比从北京发车的时刻早 10^{-7} 秒。

§ 6.6 相对论速度变换

在讨论速度变换时，我们首先注意到，各速度分量的定义是：

$$\text{在 } S \text{ 系中, } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\text{在 } S' \text{ 系中, } v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

在洛仑兹变换公式(6.23)中，对 t' 求导，可得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt'}{dt/dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta dx}{c dt}}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt'}{dt/dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'/dt'}{dt/dt'} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}\right)}$$

利用上面速度分量定义公式, 这些式子可写作

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} = \frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} = \frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

这就是相对论速度变换公式, 可以明显地看出, 当 u 和 v 都比 c 小很多时, 它们就约化为伽里略速度变换式(6.6)。

对于光, 设在 S 系中一束光沿 x 轴方向传播, 其速率为 c , 则在 S' 系中, 按(6.26)式, 光的速率应为

$$\frac{c - u}{1 - \frac{cu}{c^2}} = c$$

仍然是 c 。这一结果和相对速率 u 无关。这也就是说, 光在任何惯性系中速率都是 c 。正应该这样, 因为这是相对论的一个出发点。

在(6.26)式中,将带撇的量和不带撇的量互相交换,同时把 u 换成 $-u$, 可得速度的逆变换式如下:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}} \\ v_y &= \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} v'_x\right)} = \frac{v'_y}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v_z &= \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} v'_x\right)} = \frac{v'_z}{1 + \frac{u v'_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

[例 1] 在地面上测到有两个飞船分别以 $+0.9c$ 和 $-0.9c$ 的速度向相反方向飞行。求此一飞船相对于另一飞船的速度多大?

解: 如图 6.10 设 S 为速度是 $-0.9c$ 的飞船在其中静止的参照系, 则地面对此参照系以速度 $u=0.9c$ 运动。以地面为参照系 S' , 则另一飞船相对于 S' 系的速度为 $v'_x=0.9c$, 由公式(6.27)可得所求速度为

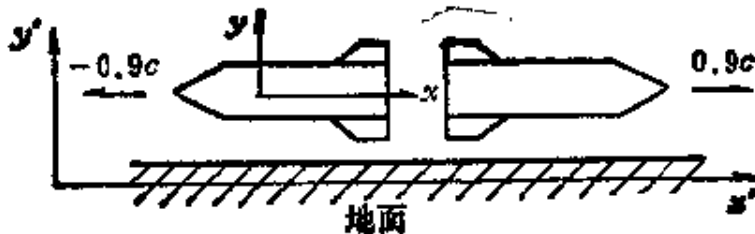


图 6.10

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + u v'_x / c^2} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} = \frac{1.80}{1.81} c = 0.994c$$

这和伽里略变换($v_x = v'_x + u$)给出的结果($1.8c$)是不同的, 此处 $v_x < c$ 。一般地说, 按相对论速度变换, 在 u 和 v' 都小于 c 的情况下, v 不可能大于 c 。

值得指出的是, 相对于地面来说, 上述两飞船的“相对速度”确是等于 $1.8c$, 这就是说, 由地面上的观察者测量, 两飞船之间的距离是按 $2 \times 0.9c$ 的速率增加的。但是, 就一物体来讲, 它对任何其它物体或参照系, 其速度的大小是不可能大于 c 的, 而这一速度正是速度这一概念的真正含意。

[例 2] 在太阳参照系中观察, 一束星光垂直射向地面, 速率为 c 。而地

球以速率 u 垂直于光线运动。求在地面上测量, 这束星光的速度的大小与方向各如何?

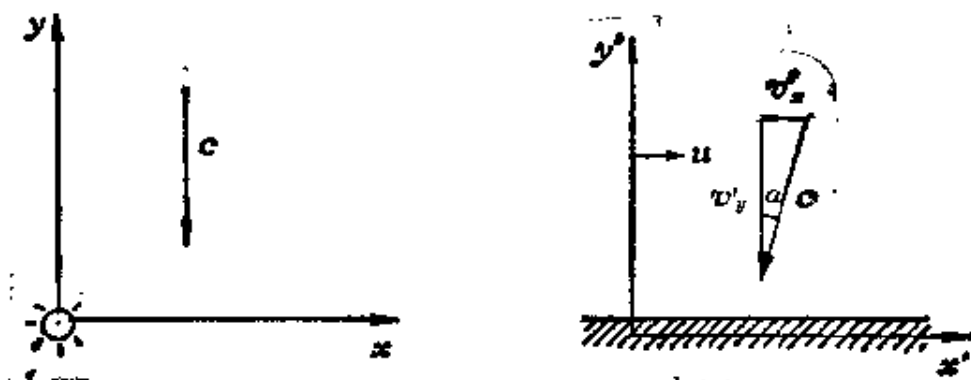


图 6.11

解: 以太阳参照系为 S 系, 以地面参照系为 S' 系。如图 6.11 所示, S' 系以速度 u 向右运动。在 S 系中, 星光的速度为 $v_y = -c, v_x = 0, v_z = 0$ 。在 S' 系中星光的速度根据 (6.26) 式, 应为

$$\begin{aligned} v'_x &= -u \\ v'_y &= v_y \sqrt{1 - u^2/c^2} = -c \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v'_z &= 0 \end{aligned}$$

由此可得这星光速度的大小为

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = \sqrt{u^2 + c^2 - u^2} = c$$

即仍为 c 。其方向用光线方向与竖直方向(即 y' 轴)之间的夹角 α 表示, 则有

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v'_x}{|v'_y|} = \frac{u}{c \sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

由于 $u = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$ (地球公转速率), 这比光速小得多, 所以可以有

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{u}{c}$$

将 u 和 c 值代入, 可得 $\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 10^{-4}$

$$\alpha \approx 20.6''$$

§ 6.7 相对论质量

下面介绍相对论动力学的基本内容。在牛顿力学中, 质点的

动量的定义为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (6.28)$$

一条关于动量的基本定律是动量守恒定律,在相对论力学中,动量守恒定律仍然被认为是一条基本的物理定律,而且质点的动量仍用(6.28)式定义。所不同的是,在牛顿力学中,质量被认为是与物体速率无关的恒量,而在相对论中,在洛伦兹变换的基础上,则必须认为物体的质量和自己的速率有关。下面我们来导出这一质量和速率的关系。

设在 S' 系中有一粒子,原来静止于原点 O' , 在某一时刻此粒子分裂为完全相同的两半 A 和 B , 分别沿 x' 轴的正向和反向运动。根据动量守恒定律,这两半的速率应该相等,我们都以 u 表示,如图 6.12。

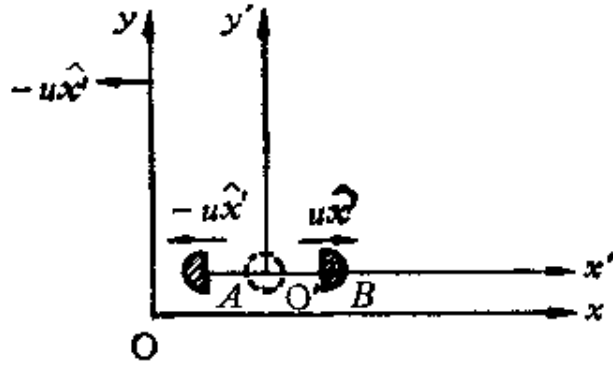


图 6.12 在 S' 系中观察粒子的分裂和 S 系的运动

设另一参照系 S , 以 u 的速率沿 $-x'$ 方向运动。在此参照系中, A 将是静止的, 而 B 是运动的。我们以 m_A 和 m_B 分别表示二者的质量。由于 O' 的速度为 $u\hat{x}$, 所以根据相对论速度变换, B 的速度应是

$$v_B = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \quad (6.29)$$

方向沿 x 轴正向。在 S 系中观察, 粒子在分裂前, 它的速度, 即 O' 的速度为 $u\hat{x}$, 因而它的动量为 $Mu\hat{x}$, 此处 M 为粒子分裂前的总质量。在分裂后, 两个粒子的总动量为 $m_B v_B \hat{x}$, 根据动量守恒,

应有

$$Mu\hat{x} = m_B v_B \hat{x} \quad (6.30)$$

我们合理地假定在 S 参照系中粒子在分裂前后质量守恒, 即 $M = m_A + m_B$, 由此, (6.30) 式改写成

$$(m_A + m_B)u = \frac{2m_B u}{1 + u^2/c^2} \quad (6.31)$$

如果用牛顿力学中质量的概念, 质量和速率无关, 则应有 $m_A = m_B$, 这样(6.30)式不能成立, 动量也不再守恒了。为了使动量守恒定律在任何惯性系中都成立, 而且动量定义仍然保持(6.28)式的形式, 就不能再认为 m_A 和 m_B 都和速率无关, 而必须认为它们都是各自速率的函数。这样 m_A 将不再等于 m_B , 由(6.31)式可解得

$$m_B = m_A \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

再利用(6.29)式, 可得

$$u = \frac{c^2}{v_B} \left[1 - \sqrt{1 - v_B^2/c^2} \right]$$

代入上式消去 u 可得 $m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}}$ (6.32)

这一公式说明, 在 S 系中观察, m_A 、 m_B 有了差别。由于 A 是静止的, 它的质量叫静止质量, 以 m_0 表示。粒子 B 如果静止时, 质量也一定等于 m_0 , 因为这两个粒子是完全相同的。 B 是以速率 v_B 运动的, 它的质量不等于 m_0 。以 v 代替 v_B 并以 m 代替 m_B 表示粒子以速率 v 运动时的质量, 则(6.32)式可写作

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.33)$$

这一质量 m 可以称为相对论质量。上式即给出一个物体的相对论质量和它的速率的关系。注意这一速率 v 是粒子相对于某一参

照系的速率，而不是某两个参照系的相对速率。同一粒子相对于不同的参照系有不同的速率时，在这些参照系中测得的这一粒子的质量也是不同的。

当 $v \ll c$ 时，(6.33) 式给出 $m \approx m_0$ ，这时可以认为物体的质量与速率无关，就等于其静止质量。这就是牛顿力学讨论的情况。从这里也可以看出牛顿力学的结论是相对论力学在速度非常小时的近似。

实际上，在一般技术中宏观物体所能达到的速度范围内，质量随速率的变化非常小因而可以忽略不计。例如，当 $v = 10^4 \text{ m/s}$ 时，物体的质量和静止质量相比的相对变化为

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \approx \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{10^4}{3 \times 10^8} \right)^2 = 5.6 \times 10^{-10}$$

在关于微观粒子的实验中，粒子的速率经常会达到接近光速的程度，这时质量随速率的改变就非常明显了。例如，当电子的速率达到 $v = 0.98c$ 时，按(6.33)式可以算出此时电子的质量为

$$m = 5.03 m_0$$

由(6.33)式也可以看到，当 $v > c$ 时， m 将成为虚数，而无实际意义，这也说明，在真空中的光速 c 是一切物体运动速度的极限。

利用相对论质量表示式(6.33)式，相对论动量可表示为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.34)$$

在相对论力学中仍然用动量变化率定义质点受的力，即

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (6.35)$$

仍是正确的。但由于 m 是随 v 变化，因而也是随时间变化的，所以它不再和下一表示式等效

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

这就是说，用加速度表示的牛顿第二定律公式，在相对论力学中不再成立。

§ 6.8 相对论动能

在相对论动力学中，力 F 对粒子做功使它的速率由 0 增大到 v 时，力所做的功仍然定义为和粒子最后的动能相等。以 E_K 表示粒子速率为 v 时的动能，则

$$E_K = \int_{(v=0)}^{(v)} F \cdot dr = \int_{(v=0)}^{(v)} \frac{d(mv)}{dt} \cdot dr = \int_{(v=0)}^{(v)} v \cdot d(mv)$$

由于 $v \cdot d(mv) = mv \cdot dv + v \cdot v dm = mv dv + v^2 dm$ ，又由 (6.33) 式，可得

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

两边求微分，有

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v dv = 0$$

即
$$c^2 dm = v^2 dm + mv dv$$

所以有
$$v \cdot d(mv) = c^2 dm$$

代入求 E_K 的积分式内可得

$$E_K = \int_{m_0}^m c^2 dm$$

由之得
$$E_K = mc^2 - m_0 c^2 \quad (6.36)$$

这就是相对论动能公式，其中 m 为相对论质量。

当 $v \ll c$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

这时又回到了牛顿力学的动能公式。

相对论动量公式(6.28)式, 和相对论动量变化率公式(6.35)式, 在形式上都和牛顿力学公式一样, 只是其中 m 要换成相对论质量。但相对论动能公式(6.36)式和牛顿力学动能公式形式上不一样, 只是把后者中的 m 换成相对论质量并不能得到前者。

由(6.36)式可以得到粒子的速率由其动能表示为

$$v^2 = c^2 \left[1 - \left(1 + \frac{E_K}{m_0 c^2} \right)^{-2} \right] \quad (6.37)$$

此式表明, 当粒子的动能 E_K 由于力对它做的功增多而增大时, 它的速率也逐渐增大。但无论 E_K 增到多大, 速率 v 都不能无限增大, 而有一极限值 c 。我们又一次看到, 对粒子来说, 存在着一个极限速率, 它就是光在真空中的速率 c 。

粒子速率有一极限这一结论, 已被贝托齐用实验直接证实(1962)。他的实验装置大致如图 6.13 所示。电子由静电加速器加速后进入一无电场区域, 然后打到铝靶上。电子通过无电场区

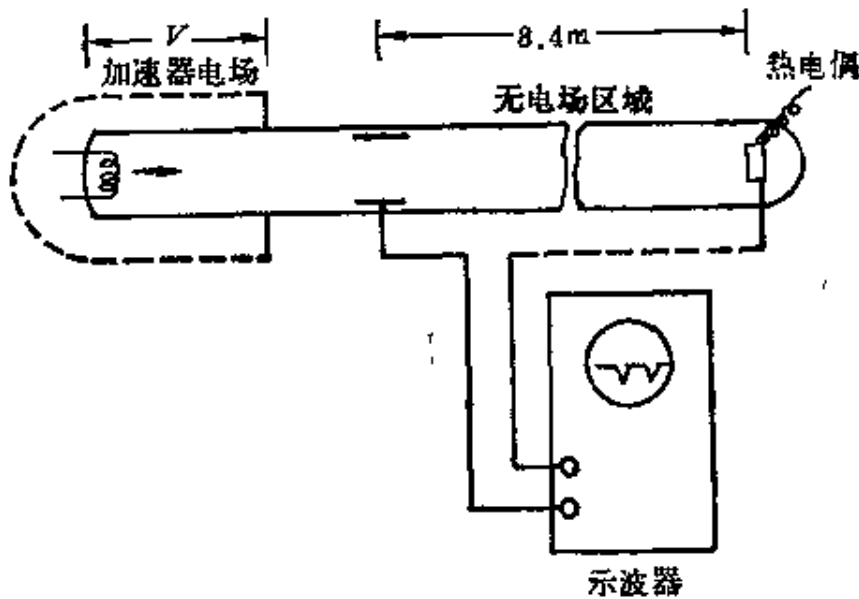


图 6.13 贝托齐极限速率实验装置

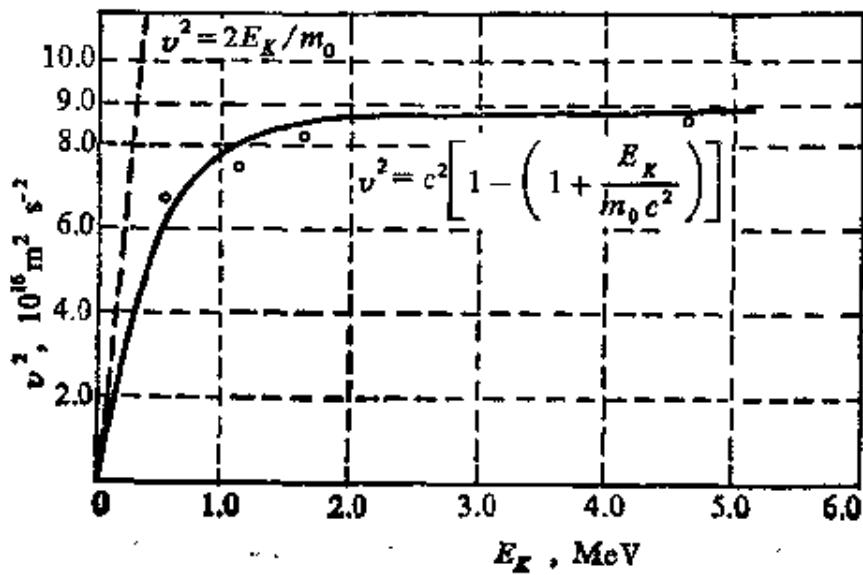


图 6.14 贝托齐极限速率实验结果

黑圈表示实验结果数据, 实线表示相对论理论, 虚线表示牛顿力学预言

域的时间可以由示波器测出, 因而可以算出电子的速率。电子的动能就是它在加速器中获得的能量, 它等于电子电量和加速电压的乘积。这一能量还可以通过测定铝靶由于电子撞击而获得的热量加以核算, 结果二者相符。贝托齐的实验结果如图 6.14 所示, 它明确地显示出电子动能增大时, 其速率趋近于极限速率 c 。而按牛顿公式电子速率是会很快地无限制地增大的。

§ 6.9 相对论能量

在相对论动能公式 $E_k = mc^2 - m_0c^2$ 中, 等号右端两项都具有能量的量纲, 可以认为 m_0c^2 表示粒子静止时具有的能量, 叫静止能量。而 mc^2 表示粒子以速率 v 运动时所具有的能量, 这个能量是在相对论意义上粒子的总能量, 以 E 表示此相对论能量, 则

$$E = mc^2 \quad (6.38)$$

在粒子速率等于零时, 总能量就是静止能量

$$E_0 = m_0 c^2$$

这样(6.36)式也可以写成

$$E_K = E - E_0 \quad (6.39)$$

即粒子的动能等于粒子该时刻的总能量和静止能量之差。

把粒子的能量 E 和它的质量 m (甚至是静止质量 m_0) 直接联系起来的结论是相对论最有意义的结论之一。一定的质量相应于一定的能量, 二者的数值只相差一个恒定的因子 c^2 。按相对论的概念几个粒子在相互作用(如碰撞)过程中, 最一般的能量守恒应表示为

$$\sum_i E_i = \sum_i (m_i c^2) = \text{常量} \quad (6.40)$$

由此公式, 马上可以得出, 在相互作用过程中

$$\sum_i m_i = \text{常量} \quad (6.41)$$

这表示质量守恒。在历史上能量守恒和质量守恒是分别发现的两条相互独立的自然规律。在相对论中二者完全统一起来了。应该指出, 在科学史上, 质量守恒只涉及粒子的静止质量, 它只是相对论质量守恒在粒子能量变化很小时的近似。一般情况下, 当涉及的能量变化比较大时, 以上守恒给出的粒子的静止质量也是可以改变的。爱因斯坦在 1905 年首先指出, “就一个粒子来说, 如果由于自身内部的过程使它的能量减小了, 它静止质量也将相应地减小。”他又接着指出, “用那些所含能量是高度可变的物体(比如用镭盐)来验证这个理论, 不是不可能成功的。”后来的事实正如他预料的那样, 在放射性蜕变、原子核反应以及高能粒子实验中, 无数事实都证明了(6.38)式所表示的质量能量关系的正确性。原子能时代可以说是随同这一关系的发现而到来的。

在核反应中, 以 m_{01} 和 m_{02} 分别表示反应粒子和生成粒子的

总的静止质量,以 E_{K1} 和 E_{K2} 分别表示反应前后它们的总动能。利用能量守恒定律(6.40)式可以有

$$m_{01}c^2 + E_{K1} = m_{02}c^2 + E_{K2}$$

由此得

$$E_{K2} - E_{K1} = (m_{01} - m_{02})c^2 \quad (6.42)$$

$E_{K2} - E_{K1}$ 表示核反应后与前相比,粒子总动能的增量,就是核反应所释放的能量,通常以 ΔE 表示; $m_{01} - m_{02}$ 表示经过反应后粒子的总的静止质量的减小,叫质量亏损,以 Δm_0 表示。这样(6.43)就可以表示成

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 \quad (6.43)$$

这说明核反应中释放一定的能量相应于一定的质量亏损。这个公式是关于原子能的一个基本公式。

[例1] 在参照系 S 中,有两个静止质量都是 m_0 的粒子 A 、 B 分别以速度 $v_A = v\hat{x}$, $v_B = -v\hat{x}$ 运动,相撞后合在一起为一个静止质量为 M_0 的粒子,如图 6.15,求 M_0 。

解:

以 M 表示合成粒子的质量,其速度为 V ,则根据动量守恒

$$m_B v_B + m_A v_A = M V$$

由于 A 、 B 的静止质量一样,速率也一样,所以 $m_A = m_B$,又因为 $v_A = -v_B$,所以上式给出 $V = 0$,即合成粒子是静止的,所以

$$M = M_0$$

根据能量守恒

$$M_0 c^2 = m_A c^2 + m_B c^2$$

$$\text{即 } M_0 = m_A + m_B = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

此结果说明, M_0 不等于 $2m_0$,而是较大。

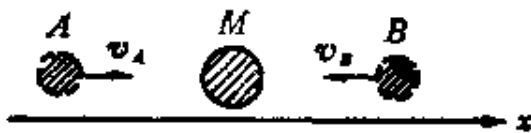


图 6.15

[例2] 在上题中,设有一参照系 S' ,以速度 $u = v\hat{x}$ 运动,试证明在此参照系中, A 、 B 在碰撞前后动量守恒。

解: 在 S' 系中,根据相对论速度变换,可知 A 的速度 $v'_A = 0$, B 的速度

$$v'_B = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \hat{x}'$$

而合成粒子的速度为 $V' = -v \hat{x}'$

碰撞前的总动量为

$$m'_A v'_A + m'_B v'_B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_B'^2/c^2}} \cdot \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \hat{x}'$$

由于

$$\sqrt{1 - v_B'^2/c^2} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

所以

$$m'_A v'_A + m'_B v'_B = \frac{-2m_0 v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \hat{x}'$$

碰撞后合成粒子的动量为 $M' V' = -M' v \hat{x}'$

M' 可通过能量守恒求出, 即

$$M' c^2 = m'_A c^2 + m'_B c^2 = m_0 c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_B'^2/c^2}} c^2$$

$$M' = m_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - v_B'^2/c^2}} \right) = \frac{2m_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

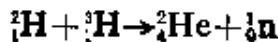
将此 M' 值代入上式, 即可得

$$M' V' = m'_A v'_A + m'_B v'_B$$

这就是在 S' 系中动量守恒的表示式。

此证明表明, 动量守恒和能量守恒的不变性是相互联系在一起的。

[例 3] 在一种热核反应



中, 各种粒子的静止质量分别是

氘核 (${}^2_1\text{H}$): $m_D = 3.3437 \times 10^{-27} \text{ kg}$

氚核 (${}^3_1\text{H}$): $m_T = 5.0049 \times 10^{-27} \text{ kg}$

氦核 (${}^4_2\text{He}$): $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$

中子 (n): $m_n = 1.6750 \times 10^{-27} \text{ kg}$

求这一热核反应释放的能量是多少?

解: 这一反应的质量亏损为

$$\begin{aligned}\Delta m_0 &= (m_D + m_T) - (m_{He} + m_n) \\ &= [(3.3437 + 5.0049) - (6.6425) + 1.6750] \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 0.0311 \times 10^{-27} \text{ kg}\end{aligned}$$

相应释放的能量为

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 0.0311 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 2.799 \times 10^{-12} \text{ J}$$

1 kg 的这种核燃料所释放的能量为

$$\frac{\Delta E}{m_D + m_T} = \frac{2.799 \times 10^{-12}}{8.3486 \times 10^{-27}} = 3.35 \times 10^{14} \text{ J/kg}$$

这一数值是优质煤燃烧所释放热量 (约 $7 \times 10^6 \text{ cal/kg} = 2.93 \times 10^7 \text{ J/kg}$) 的 1.15×10^7 倍, 即 1 千多万倍!

将相对论能量公式 $E = mc^2$ 和动量公式 $p = mv$ 相比, 可得

$$v = \frac{c^2}{E} p \quad (6.44)$$

将此 v 值代入能量公式 $E = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 中, 整理后可得

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (6.45)$$

这就是相对论动量能量关系式, 如果以 E , pc 和 $m_0 c^2$ 分别表示一个三角形三边的长度, 则它们正好构成一个直角三角形 (图 6.16)。

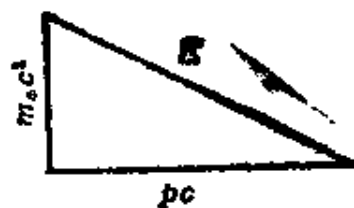


图 6.16 相对论动量能量三角形

对动能是 E_K 的粒子, 用 $E = E_K + m_0 c^2$ 代入 (6.45) 式可得 $E_K^2 + 2E_K m_0 c^2 = p^2 c^2$, 当 $v \ll c$ 时, 粒子的动能 E_K 要比其静止能量 $m_0 c^2$ 小得多, 因而上式中第一项与第二项相比, 可以略去, 于是得

$$E_K = \frac{p^2}{2m_0}$$

我们又回到了牛顿力学的动能表达式。

*§ 6.10 相对论动量—能量变换

仍如前设 S, S' 两参照系, 先看动量的 x' 方向分量

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

利用速度变换公式可先求得

$$\begin{aligned} \sqrt{1-v^2/c^2} &= \sqrt{1-(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)/c^2} \\ &= \sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)} \\ &= 1 - \frac{uv_x}{c^2} \end{aligned}$$

将此式和 v'_x 的变换式代入 p'_x , 并利用(6.33)式和(6.38)式

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{m_0(v_x - u)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}} \\ &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}} - \frac{m_0 u c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)} c^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[p_x - uE/c^2 \right] \end{aligned}$$

或写成 $p'_x = \gamma [p_x - \beta E/c]$

其中 $\gamma = (1-u^2/c^2)^{-1/2}$, $\beta = u/c$.

用类似的方法可得

$$p'_y = \frac{m_0 v'_y}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{m_0 v_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}} = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

即 $p'_y = p_y$

同理 $p'_z = p_z$

而 $E' = m'c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2 \left(1 + \frac{uv_x}{c^2}\right)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}}$
 $= \gamma [E - \beta c p_x]$

列在一起,可得相对论动量—能量变换式如下:

$$\left. \begin{aligned} p'_x &= \gamma[p_x - \beta E/c] \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma[E - \beta c p_x] \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

将带撇的和不带撇的量交换,并把 β 换成 $-\beta$,可得逆变换式如下:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \gamma[p'_x + \beta E'/c] \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \\ E &= \gamma[E' + \beta c p'_x] \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

值得注意的是,在相对论中动量和能量在变换时紧密地联系在一起了。这一点实际上是相对论时空量度的相对性及紧密联系的反映。

还可以注意到的是,(6.46)式所表示 \mathbf{p} 和 E/c^2 的变换关系和洛仑兹变换(6.23)式所表示的 r 和 t 的变换关系一样,即用 p_x, p_y, p_z 和 E/c^2 分别代替(6.23)式中的 x, y, z, t 就可以得到(6.46)式。

*§ 6.11 相对论动量变化率的变换

在相对论中,如在§6.7中已指出的,力仍等于动量变化率。导出了动量变化率的变换,也就是导出了力的变换公式。力和动量变化率的关系 $F = d\mathbf{p}/dt$ 的分量式是

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}$$

由公式(6.47)和洛仑兹变换式(6.24),可得

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{\frac{dp_x}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{\gamma \left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{u}{c^2} \frac{dE'}{dt'} \right)}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{F'_x + \frac{\beta dE'}{c dt'}}{1 + \frac{\beta v'_x}{c}} \quad (6.48)$$

为了求出 dE'/dt' , 我们利用公式(6.45)(在 S' 系中)

$$E'^2 = p'^2 c^2 + m_0^2 c^4 = c^2 \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' + m_0^2 c^4$$

将此式对 t' 求导, 可得

$$E' \frac{dE'}{dt'} = c^2 \mathbf{p}' \cdot \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = c^2 \mathbf{p}' \cdot \mathbf{F}'$$

再将 $E' = m' c^2$ 和 $\mathbf{p}' = m' \mathbf{v}'$ 代入可得

$$\frac{dE'}{dt'} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'$$

将此结果代入(6.48)式, 即可得

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{F'_x + \frac{\beta}{c} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'}{1 + \frac{\beta v'_x}{c}} \\ F_y &= \frac{F'_y}{\gamma \left(1 + \frac{\beta v'_x}{c} \right)} \\ F_z &= \frac{F'_z}{\gamma \left(1 + \frac{\beta v'_x}{c} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

以上三式即相对论力的变换公式, 式中 $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = u/c$

如果一粒子在 S' 系中静止, 即 $\mathbf{v}' = 0$, 它受的力为 \mathbf{F}' , 则上一变换式给出, 在 S 系中观测, 该粒子受的力将为

$$F_x = F'_x, \quad F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y, \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z \quad (6.50)$$

由于 $\mathbf{v}' = 0$, 所以在 S 系中观察, 粒子的速度 $\mathbf{v} = \mathbf{u} = u \hat{x}$, 这样上式又可以这样理解: 在粒子静止于其中的参照系内测得粒子受的

力是 F' , 则在粒子以速度 v 运动的参照系中测量时, 此力沿运动方向的分量不变, 而沿垂直于运动方向的分量减小到 $1/\gamma$, 其中

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

本章提要

1. **牛顿绝对时空观:** 长度和时间的测量与参照系无关。

伽里略坐标变换式: $x' = x - ut$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$

伽里略速度变换式: $v'_x = v_x - u$, $v'_y = v_y$, $v'_z = v_z$

2. **狭义相对论基本假设:**

(i) 爱因斯坦相对性原理。

(ii) 光速不变原理 $c = 3 \times 10^8$ m/s

3. **同时性的相对性:**

时间膨胀: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ ($\Delta t'$ 为原时)

长度缩短: $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - u^2/c^2}$ ($\Delta l'$ 为原长)

4. **洛伦兹变换:**

坐标变换式:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

速度变换式: $v'_x = \frac{v_x - u}{1 + \frac{uv_x}{c^2}}$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

5. 相对论质量:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (m_0 \text{ 为静止质量})$$

6. 相对论动量:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

7. 相对论能量: $E = mc^2$

相对论动能: $E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$

相对论动量能量关系式: $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

*8. 相对论动量—能量变换式:

$$p'_x = \gamma[p_x - \beta E/c], \quad p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z, \quad E' = \gamma[E - \beta cp_x]$$

*9. 相对论力的变换式:

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{\beta}{c} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x}$$

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} v'_x\right)}$$

$$F_z = \frac{F'_z}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} v'_x\right)}$$

思 考 题

6.1 什么是力学相对性原理? 在一个参照系内作力学实验能否测出这个参照系相对于惯性系的加速度?

6.2 同时性的相对性是什么意思?为什么会有这种相对性?如果光速是无限大,是否还会有同时性的相对性?

6.3 前进中的一列火车的车头和车尾各遭到一次闪电轰击。据车上的观察者测定这两次轰击是同时发生的。试问,据地面上的观察者测定它们是否仍然同时?如果不同时,何处先遭到轰击?

6.4 如果在 S' 系中两事件的 x' 坐标相同(例如把图 6.3 中的 M' 和 A' 、 B' 沿 y' 轴方向配置),那么当在 S' 系中观察到此两事件同时发生时,在 S 系中观察它们是否也同时发生?

6.5 什么是原时?为什么说原时最短?

6.6 在某一参照系中同一地点,同一时刻发生的两个事件,在任何其它参照系中观察都将是同时发生的,对吗?

6.7 长度的量度和同时性有什么关系?为什么长度的量度会和参照系有关?长度缩短效应是否因为棒的长度受到了实际的压缩?

6.8 相对论的时间和空间概念与牛顿力学的有何不同?有何联系?

6.9 在相对论中,在垂直于两个参照系的相对速度方向的长度的量度与参照系无关,而为什么在这方向上的速度分量却又和参照系有关了?

6.10 牛顿力学中的变质量问题(如火箭)和相对论中的质量变化有何不同?

6.11 能把一个粒子加速到光速吗?为什么?

6.12 什么叫质量亏损?它和原子能的释放有何关系?

习 题

6.1 一根直杆在 S 系中观察,其静止长度为 l ,与 x 轴的夹角为 θ ,试求它在 S' 系中的长度和它与 x' 轴夹角。

6.2 静止时边长为 a 的正立方体,当它以速率 u 沿与它的一个边平行的方向相对于 S' 系运动时,在 S' 系中测得它的体积将是多大?

6.3 S 系中的观察者有一根米尺固定在 x 轴上,其两端各装一手枪。固定于 S' 系中的 x' 轴上有另一根长刻度尺。当后者从前者旁边经过时, S 系的观察者同时扳动两枪,使子弹在 S' 系中的刻度上打出两个记号。求在 S' 尺上两记号之间的刻度值。在 S' 系中观察者将如何解释此结果。

6.4 宇宙射线与大气相互作用时能产生 π 介子衰变,此衰变在大气上

层放出叫做 μ 子的基本粒子。这些 μ 子的速度接近光速 ($v=0.998c$)。由实验室内测得的静止 μ 子的平均寿命等于 2.2×10^{-6} 秒, 试问在 8000 米高空由 π 介子衰变放出的 μ 子能否飞到地面。

6.5 在 S 系中观察到在同一地点发生两个事件, 第二事件发生在第一事件之后 2 秒钟。在 S' 系中观察到第二事件在第一事件后 3 秒钟发生。求在 S' 系中这两个事件的空间距离。

6.6 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上, 其间距离是 1 米。在 S' 系中观察这两个事件之间的距离是 2 米。求在 S' 系中这两个事件的时间间隔。

6.7 以 $l = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$ 表示两点 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 之间的距离, 证明, 此距离对伽里略变换是不变量, 即

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

以 $s = [(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]^{1/2}$ 表示两个事件 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2) 之间的时空间隔。证明: 此间隔对洛伦兹变换是不变量, 即

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

6.8 一宇宙飞船沿 x 方向离开地球 (S 系, 原点在地心), 以速率 $u = 0.80c$ 航行, 宇航员观察到在自己的参照系中 (S' 系, 原点在飞船上), 在时刻 $t' = -6.0 \times 10^8$ s, $x' = 1.80 \times 10^{17}$ m, $y' = 1.20 \times 10^{17}$ m, $z' = 0$ 处有一超新星爆发, 他把这一观测通过无线电发回地球, 在地球参照系中该超新星爆发事件的时空坐标如何? 假定飞船飞过地球时其上的钟与地球上的钟示值都指零。

6.9 在上题中, 由于光从超新星传到飞船需要一定的时间, 所以宇航员的报告并非直接测量的结果, 而是从光到达飞船的时刻和方向推算出来的, 试问:

(1) 在何时刻 (S' 系中) 超新星的光到达飞船?

(2) 假定宇航员在他看到超新星时立即向地球发报, 在什么时刻 (S 系中) 地球上的观察者收到此报告?

(3) 在什么时刻 (S 系中) 地球上的观察者看到该超新星?

6.10 天津和北京相距 120 千米。在北京于某日上午 9 时正有一工厂因过载而断电。同日在天津于 9 时 0 分 0.0003 秒有一自行车与卡车相撞。试求在以 $u = 0.8c$ 的速率沿北京到天津方向飞行的飞船中, 观察到的这两个事件之间的时间间隔。哪一事件发生在前?

6.11 地球上的观察者发现,一只以速率 $0.60c$ 向东航行的宇宙飞船将在 5 秒钟后同 一个以 $0.80c$ 速率向西飞行的彗星相撞。

(1) 飞船中的人们看到彗星以多大速率向他们接近。

(2) 按照他们的钟,还有多少时间允许他们离开原来航线避免碰撞。

6.12 一光源在 S' 系的原点 O' 发出一光线,其传播方向在 $x'y'$ 平面内并与 x' 轴夹角为 θ' ,试求在 S 系中测得的此光线的传播方向,并证明在 S 系中此光线的速率仍是 c 。

6.13 在什么速度下粒子的动量等于非相对论动量的两倍?又在什么速度下粒子的动能等于非相对论动能的两倍。

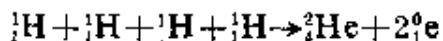
6.14 在北京正负电子对撞机中,电子可以被加速到动能为 $E_k = 2.8 \times 10^6 \text{ eV}$ 。这种电子的速率比光速差多少米/秒? 这样的 一个电子动量多大? (和电子静止质量相应的能量为 $E_0 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}$)。

6.15 最强的宇宙射线具有 50 焦耳的能量,如果这一射线是由一个质子形成的,这样一个质子的速率比光速差多少米/秒?

6.16 一个质子的静止质量为 $m_p = 1.67265 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个中子的静止质量为 $m_n = 1.67495 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个质子和一个中子结合成的氘核的静止质量为 $m_D = 3.34365 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。求结合过程中放出的能量是多少 MeV? 这能量叫氘核的结合能,它是氘核静止能量的百分之几?

一个电子和一个质子结合成一个氢原子,结合能是 13.58 eV , 这一结合能是氢原子静止能量的百分之几? 已知氢原子的静止质量为 $m_H = 1.67323 \times 10^{-27} \text{ kg}$

6.17 太阳发出的能量是由质子参与一系列反应产生的。其总结果相当于下述热核反应:



已知一个质子(${}^1_1\text{H}$)的静止质量是 $m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个氦核(${}^4_2\text{He}$)的静止质量是 $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。一个正电子(${}^0_1\text{e}$)的静止质量是 $m_e = 0.0009 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。问:

(1) 这一反应所释放的能量是多大?

(2) 消耗 1 千克质子所释放的能量是多少?

(3) 太阳发出能量的总功率为 $P = 3.9 \times 10^{23} \text{ W}$ 。它每秒钟消耗多少千克质子?

(4) 太阳约含有 $m = 1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ 质子。假定它继续以此速率消耗质

子, 这些质子可供消耗多长时间?

6.18 两个质子以 $\beta=0.5$ 的速率从一共同点反向运动, 求:

(1) 每个质子相对于共同点的动量和能量,

(2) 一个质子在另一个质子处于静止的参照系中的动量和能量。

6.19 实验测得电子自旋的角动量为 $0.53 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 。现在估计电子的“半径”小于 $1 \times 10^{-18} \text{ m}$, 把电子看成球形质点半径按 $1 \times 10^{-18} \text{ m}$, 质量按电子的静止质量算, “电子球”表面的最大线速度多大? 这一模型与相对论相符吗?

爱因斯坦 (Alber Einstein, 1879—1955)

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Aagnsetzen führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaffen scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden bis Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlingenen Versuche, die Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erhalten und außerdem die mit ihm nur scheinbar unvertägliche



爱因斯坦在瑞士专利局

《论动体的电动力学》一文的首页

爱因斯坦，犹太人，1879年出生于德国符腾堡的乌尔姆市。智育发展很迟。小学和中学学习成绩都较差。1896年进入瑞士苏黎世工业大学学习并于1900年毕业。大学期间在学习上也表现

出“离经叛道”的性格，颇受教授们责难。毕业后即失业。1902年到瑞士专利局工作，直到1909年开始当教授。他早期一系列最有创造性的具有历史意义的研究工作，如相对论的创立等，都是在专利局工作时利用业余时间进行的。从1914年起，任德国威廉皇家学会物理研究所所长兼柏林大学教授。由于希特勒法西斯的迫害，他于1933年到美国定居，任普林斯顿高级研究院研究员，直到1955年逝世。

爱因斯坦的主要科学成就有以下几方面：

1. 创立了狭义相对论 他在1905年发表了题为《论动体的电动力学》的论文(载德国《物理学杂志》第四编，17卷，1905)，完整地提出了狭义相对论，揭示了空间和时间的本质联系，引起了物理学的革命。同年又提出了质能相当性，在理论上为原子能时代开辟了道路。

2. 发展了量子理论 他在1905年同一本杂志上发表了题为《关于光的产生和转化的一个启发性观点》的论文，提出了光的量子论。就是由于这篇论文的观点使他获得了1921年的诺贝尔物理学奖。以后他又陆续发表文章提出受激辐射理论(1916)和发展了量子统计理论(1924)。前者成为60年代崛起的激光技术的理论基础。

3. 建立了广义相对论 他在1915年建立了广义相对论。它揭示了空间、时间、物质、运动的统一性，几何学和物理学的统一性，解释了引力的本质，也为现代天体物理学和宇宙学的发展打下了重要的基础。

此外，他对布朗运动的研究(1905)曾为分子运动论的最后胜利作出了贡献。他还开创了现代宇宙学，他努力探索的统一场论的思想，指出了现代物理学发展的一个重要方向。60~70年代在这方面已取得了可喜的成果。

爱因斯坦所以能取得这样伟大的科学成就，首先归因于他的勤奋刻苦的工作态度，其次是归因于他的求实，严谨的科学作风。此外，更重要地应归因于他那对一切传统和现成的知识所采取的独立的批判精神。他不因循守旧，别人都认为一目了然的结论，他会觉得大有问题，于是深入研究，非彻底搞清楚不可。他不迷信权威，敢于离经叛道，敢于创新。他提出科学假设的胆略之大，令人惊奇，但这些假设又都是他的科学作风和创新精神的结晶。除了他的非凡的科学理论贡献之外，这种伟大革新家的革命精神也是他对人类提供的一份宝贵的遗产。

爱因斯坦的精神境界高尚。在巨大的荣誉面前，他从不把自己的成就全部归功于自己，总是强调前人的工作为他创造了条件。例如关于相对论的创立，他曾讲过：“我想到的是牛顿给我们的物体运动和引力的理论，以及法拉第和麦克斯韦借以把物理学放到新基础上的电磁场概念。相对论实在可以说是对麦克斯韦和洛仑兹的伟大构思画了最后一笔。”他还谦逊地说：“我们在这里并没有革命行动，而不过是一条可以回溯几世纪的路线的自然继续。”

爱因斯坦不但对自己的科学成就这么看，而且对人与人的一般关系也有类似的想法。他曾说过：“人是为别人而生存的。”“人只有献身于社会，才能找出那实际上是短暂而有风险的生命的意义。”“一个获得成功的人，从他的同胞那里所取得的总无可比拟地超过他对他们所做的贡献。然而看一个人的价值，应当看他贡献什么，而不应当看他取得什么。”

爱因斯坦是这样说，也是这样做的。在他的一生中，除了孜孜不倦地从事科学研究外，他还积极参加正义的社会斗争。他旗帜鲜明地反对德国法西斯政权和它发动的侵略战争。战后，在美国他又积极参加了反对扩军备战政策和保卫民主权利的斗争。

爱因斯坦关心青年，关心教育，在《论教育》一文中，他根据自

自己的经验说了下面的十分有见解的话：“学校的目标应当是培养有独立行动和独立思考的个人，不过他们要把为社会服务看作是自己人生的最高目的。”“学校的目标始终应当是：青年人在离开学校时，是作为一个和谐的人，而不是作为一个专家。……发展独立思考和独立判断的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把专业知识放在首位。如果一个人掌握了他的学科的基础理论，并且学会了独立思考和独立工作，他必定会找到他自己的道路，而且比起那种主要以获得细节知识为其培训内容的人来，他一定会更好地适应进步和变化。”

爱因斯坦于1922年年底赴日本讲学的来回旅途中，曾两次在上海停留。第一次，北京大学曾邀请他讲学，但正式邀请信为邮程所阻，他以为邀请已被取消而未能成功。第二次适逢元旦，他曾作了一次有关相对论的演讲。巧合的是，正是在上海他得到了瑞典领事的关于他获得了1921年诺贝尔物理奖的正式通知。

C. 弯曲的时空

自 1687 年《自然哲学的数学原理》问世以来，牛顿力学取得了很大的成功与发展。很少有理论能和万有引力定律的预言的准确性相比拟。但即使如此，牛顿的理论也不是十分完善的。一个例子是水星的近日点的进动。水星轨道长轴的方向在空间不是固定的，在一世纪内会转动 5601 秒弧度。用牛顿理论计算出所有行星

对它的影响后，还差 43 秒弧度与观测不符(图 C.1)。另外，牛顿引力理论有一个很严重的缺陷，就是它认为引力的传播不需要时间。例如，如果太阳表面某处突然爆发日珥(喷出明亮的气团)，

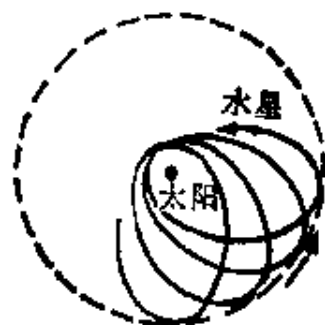


图 C.1 水星近日点的进动

按牛顿理论，其引力变化在地球上即时即可发现，这一点直接违反了狭义相对论，因为这一理论指出任何信号的传播速度是不能大于光速的。

建立狭义相对论之后，爱因斯坦即开始研究关于引力的新理论，并且终于在 1915 年创立了广义相对论。狭义相对论告诉我们，空间和时间不是绝对的，它们和参照系的运动有关。广义相对论则告诉我们，在引力物体的近旁，空间和时间要被扭曲。行星的轨道运动并不是由于什么引力的作用，而是由于这种时空的扭曲。引力就是弯曲时空的表现。

C.1 等效原理

关于引力作用的一个重要事实是：在地面上一个范围不大的空间内，所有物体都以同一加速度 g 下落。因此如果我们建造一个可以自由运动的小实验室，并在其中观察物体的运动，则当这个实验室自由下落时，会看到室内物体将处于完全失重的状态，即没有引力作用的状态。实际上，在绕地球的轨道上运行的太空船就是这样的实验室，它也具有加速度 g ，其中物体和宇航员都处于完全失重的状态(图 C.2)。从宇航员看来，所有飞船内的物体都好像没有受到引力一样。在飞船这样的参照系内，重力的影响消除了。静止的物体将保持静止，运动的物体将保持匀速直线运动。这样一个参照系就好像一个惯性系。一个在引力作用下自由下落的参照系叫**局部惯性系**。这样一个参照系只能是“局部的”。因为范围一大，其中各处 g 的方向和大小就可能有显著的不同，而通过参照系的运动同时对其中所有物体都消除重力的影响就是不可能的了。现代灵敏的加速度计甚至能测出飞船两端 g 的不同。但在下面的讨论中我们将忽略这个不同。

局部惯性系和真正的惯性系没有本质差别这一点说明：不仅匀速直线运动有相对性，而且加速运动也有相对性——在自由下落的飞船内，宇航员无法通过任何力学实验来查出飞船的加速度。1911年，在形成他的广义相对论之前，爱因斯坦就提出这一广义的运动相对性不仅适用于力学现象，而且适用于其它物理现象。他把这个关于引力的假设叫做**等效原理**。他写道：“在一个局部惯性系中，重力的效应消失了；在这样一个参照系中，所有物理定律和在一个在太空中远离任何引力物体的真正惯性系中的一样。反过来说，在一个在太空中加速的参照系中将会出现表现的引力。在

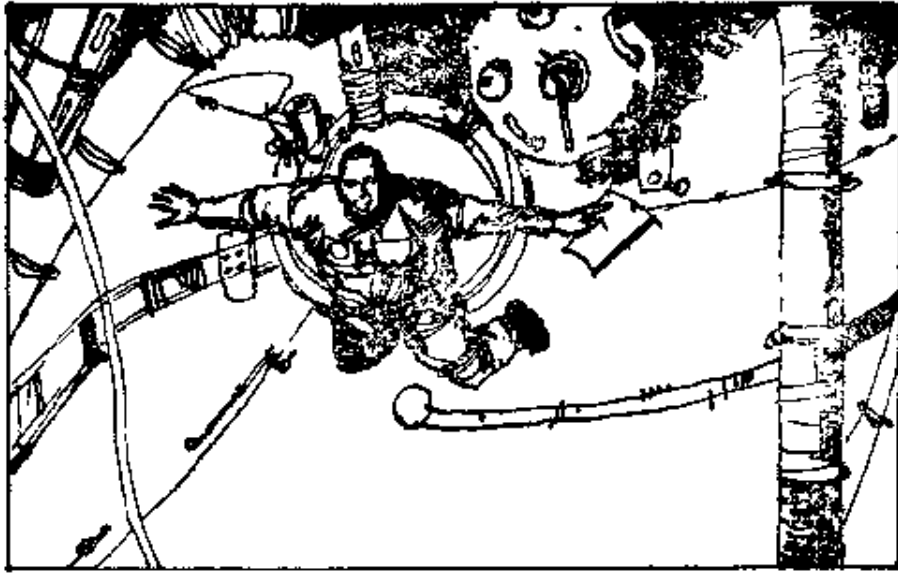


图 C.2 太空船——局部惯性系

这样的参照系中，物理定律就和该参照系静止于一个引力物体附近一样。”这个原理是广义相对论的基础。下面我们看从这一原理可以得出些什么结论。

C.2 光的偏折和空间弯曲

从等效原理可以得出的第一个结论是在引力场中各处光的速率应当相等。设想在太阳周围各处有许多太空船，他们都瞬时静止(对太阳)，但是已开始自由下落。在每一个太空船中，引力已消失。等效原理要求在这些太空船中光的速率都和真正惯性系中的一样，即 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ 。由于这些太空船是对太阳瞬时静止的，所以在它们内部测出的光速也等于在太阳引力场中各处的光速，因而它们也都应该相等。

从等效原理可以得出的另一结论是光线在引力场中要发生偏折。设想一太空船正向太阳自由下落。由于在船内引力已消失，在

太空船中和在惯性系中一样，从太空船一侧垂直船壁射向另一侧的光将直线前进(图 C. 3a)。但在太阳坐标系中观察，由于太空船加速下落，所以光线将沿曲线传播。因此，根据等效原理，光线将沿引力的方向偏折(图 C. 3b)。

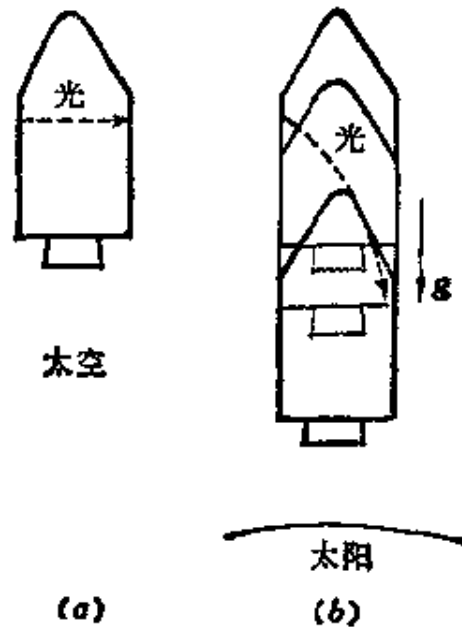


图 C. 3 光线在引力场中偏折

光线的引力偏折在自然界中应能观察到，例如，从地球上观察某一发光星体，当太阳移近光线时，从星体发的光将从太阳表面附近经过。太阳引力的作用将使光线发生偏折，从而星体的视位置将偏离它的正常位置(图 C. 4)。由于星光比太阳光弱得多，所以要观察这种星体的视位置偏离只可能在日全蚀时进行。事实上 1919 年日全蚀时，天文学家确实观察到了这种偏离。之后还进行了多次这种观察。星体位置偏离大致都在 1.5 到 2.0 秒弧度之间，和广义相对论的理论预言值 1.75 秒弧度符合得相当好。

近年来关于光线偏折的更可靠的验证是利用了类星体发射的无线电波。进行这种观察，当然要等到太阳、类星体和地球差不多在一条直线上的时候。可巧人们发现星体 3C 279 每年 10 月 8 日都在这样的位置上。利用这样的时机测得的天线电波经过太阳表面

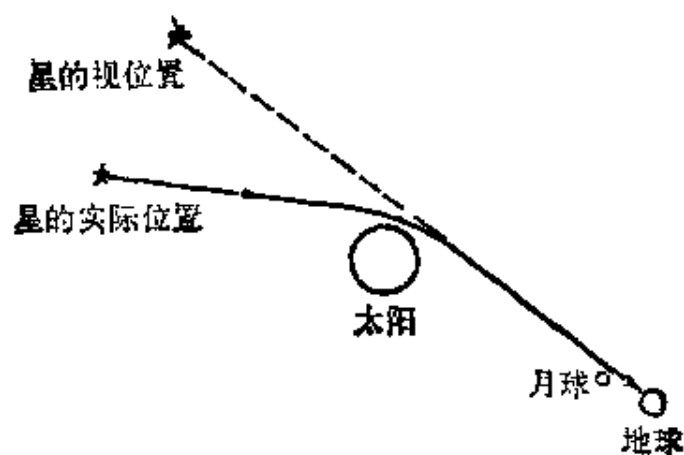


图 C.4 日全食时对星的观察

附近时发生的偏折为 1.7 或 1.8 秒弧度。

值得注意的是光线在太阳附近的偏折意味着光速在太阳附近要减小。为了说明这一点，参看图 C.5。其中画出了光波波面传播的情形。波面总是垂直于光线的，正象以横队前进的士兵的排面和队伍前进的方向垂直一样。从图中可以明显地看出光线的偏折就意味着波面的转向，而这又意味着波面靠近太阳那一侧的速率要减小。这正如前进中的横队向右转时，排面右部的士兵要减慢前进的速度一样。

光速在太阳附近要减小这一预言已经用雷达波(波长几厘米)直接证实了。人们曾向金星(以及水星、还有人造天体)发射雷达波并接收其反射波。当太阳行将跨过金星和地球之间时，雷达波在往返的路上都要经过太阳附近。实验测出，在这种情况下，雷达波往返所用的时间比雷达波不经过太阳附近时的确要长些，而且所长的数值和理论计算也符合得很好。这一现象叫**雷达回波延迟**。

光速在太阳附近要减小这一事实和前面提过的，根据等效原理，光速应不受引力影响的结论是相矛盾的。怎样解决这个矛盾呢？答案只能是这样：从地球到金星的距离，当经过太阳附近时，由于引力的作用而变长了，因而光所经过的时间要长些，并不是因为

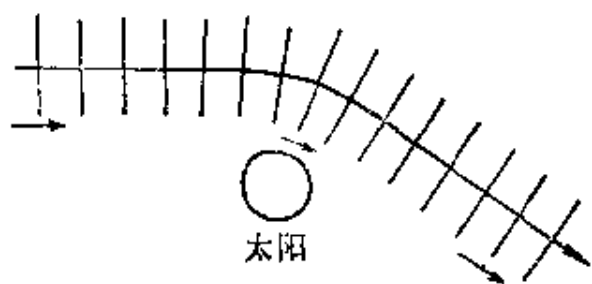


图 C.5 在太阳附近光波波面的转向

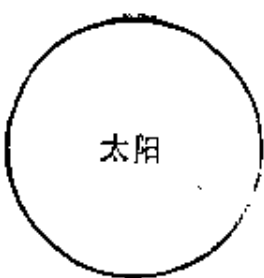
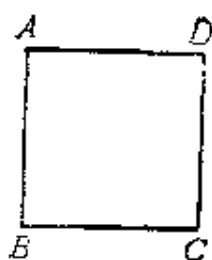


图 C.6 太阳附近的空问弯曲



光速变小了，而是因为距离变长了。这是和欧几里德几何学的推断不相同的。例如，考虑一个由相互垂直的四边组成的正方形(图 C.6)，靠近太阳那一边(AB)比离太阳远的那一边(CD)要长。欧几里德几何学在此失效了——空间不再是平展的，而是被引力弯曲或扭曲了的。

为了得到这种弯曲空间的直观形象，让我们设想二维空间的情形。图 C.7 画出一个平展的二维空间，C.8 画出了当一个“太阳”放入这二维空间时的情形：这二维空间产生了一个坑。在这畸

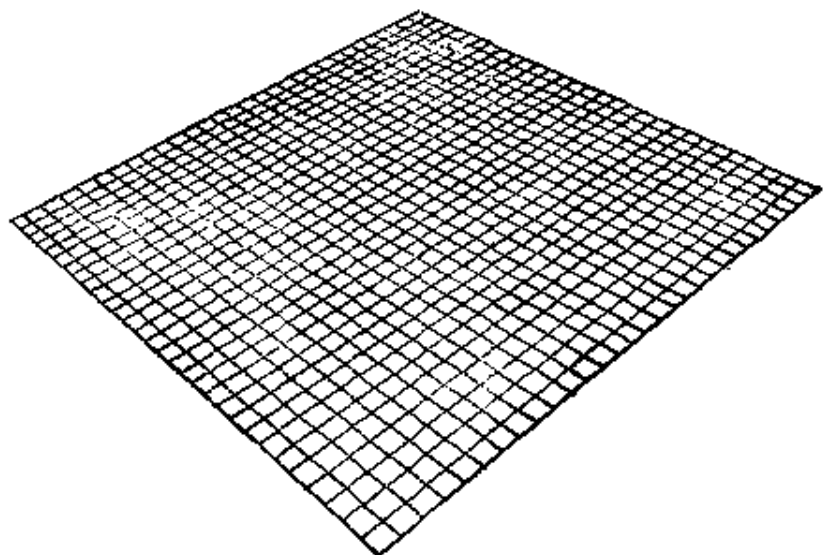


图 C.7 平展的二维空间

变的二维空间上两点 AB 之间的距离比它们之间的直线距离 (即平展时的距离) 要长些，由于光速不变，它从“太阳”附近经过时用

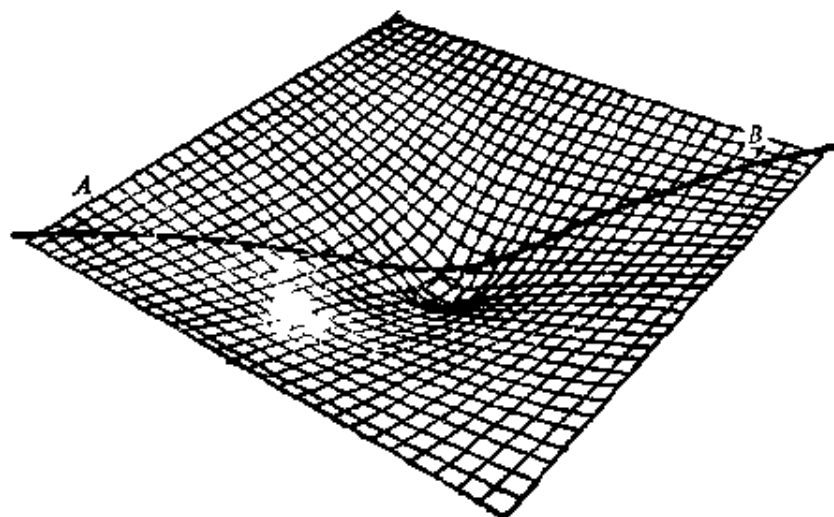


图 C. 8 弯曲的二维空间

的时间自然应该长些,这就解决了上述矛盾。计算表明,对于刚擦过太阳传播的光来说,从金星到地球的距离增加了约 30 千米(总距离为 2.6×10^8 千米)。

以上说明了如何由等效原理得到太阳附近空间是弯曲的结论。弯曲的空间是爱因斯坦广义相对论的出发点。

C. 3 广义相对论

广义相对论的基本论点是：**引力来源于弯曲**。太阳或其质量周围的空间发生弯曲,这种弯曲影响光和行星的运动,使它按照现在实际的方式运动。太阳对光和行星并没有任何力的作用。它只是使时空发生弯曲,而光或行星只是沿这一弯曲时空中的可能的“最短”的路线运动。因此爱因斯坦的广义相对论是一种**关于引力的几何理论**,有人把它称作“几何动力学”,即和物质有相互作用的动力学的、弯曲时空的几何学。

我们不可能想象出一个弯曲的三维空间图象,因为那需要事先想象出第四维或第五维,以便三维空间能弯曲到里面去。但幸

运的是，我们可以查知三维空间的弯曲而不要进入更高的维中从外面来看它。为此还利用二维空间模型。考虑一个小甲虫在一个二维空间即一个曲面上活动而不能离开它。如果曲面是一个西瓜的表面，球面，它可以通过下面的测量来知道它活动的空间是弯曲的。如图 C.9 所示，它可以测量一个圆的周长和它的半径，而发现周长小于半径的 2π 倍。它还可以测一个三角形（它的三个边都是三个顶点间的最短线）的三内角和，发现它大于 180° 。和欧几里德几何学的结论相比，甲虫就知道它所活动的空间是弯曲的，如果甲虫在一个双曲面上活动，它将发现圆的周长大于半径的 2π 倍，而三角形的三内角和将小于 180° （图 C.10）。

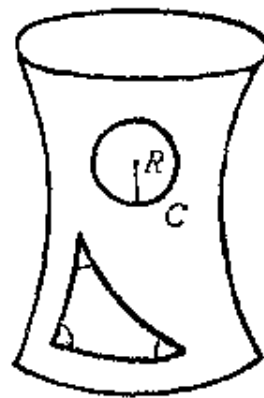
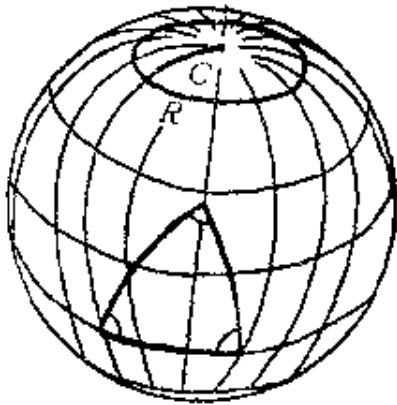


图 C.9 球面是弯曲的二维空间 图 C.10 双曲面也是弯曲的二维空间

根据广义相对论，在太阳或其它质量内部的空间具有类似于上述球面的特点，而外部的空间则具有类似于上述双曲面的特点。对于均匀球体，广义相对论给出下述结果，以 R 和 C 分别表示测出的球的半径和周长，对于平展空间，应有： $R - C/2\pi = 0$ ，由于空间弯曲，半径 R 要比 $C/2\pi$ 大一数值 ΔR

$$\Delta R = R - C/2\pi \quad (C.1)$$

广义相对论给出：

$$\Delta R \approx \frac{4GM}{3c^2} \quad (C.2)$$

式中 M 是球体质量， G 和 c 分别是万有引力恒量和光速。广

又相对论还给出球体内的三角形的三内角和比 180° 大的数值为

$$\Delta\theta \approx \frac{\sqrt{2}GM}{Rc^2} \quad (C.3)$$

把上述公式用于地球，可得地球周长比 $2\pi R$ 要小 5.9 毫米， $\Delta\theta \approx 2.0 \times 10^{-4}$ 秒弧度。对于太阳来说，其周长比 $2\pi R$ 约小 23 千米， $\Delta\theta \approx 0.62$ 秒弧度。

对于太阳和地球来说，广义相对论所预言的空间弯曲是太小了，根本不可能直接用测量来验证。空间弯曲只能通过它的影响

间接地显示出来，例如上面讲过的雷达回波延迟。另一个显示空间弯曲的就是水星近日点的进动。在平展空间中，牛顿理论给出水星将沿椭圆运动。

按照广义相对论，太阳周围的空间象“碗”一样地弯曲了，近似于一个“圆锥”。图 C.11(a) 画的是一个平展空间中的椭圆。要使此平面变成一个圆锥面从而近似碗状的弯曲空间，必须从面上切去一块(图 C.11b)，然后把切口接合起来，这样一来，在轨道的

接合处就出现了一个交叉。当行星运动到此交叉点时，它将不再进入原来的轨道，而要越过原来的轨道向前了(图 C.11c)。这就是广义相对论对水星近日点进动的解释的模拟说明。理论的计算结果在量上也是符合实际观察结果的。

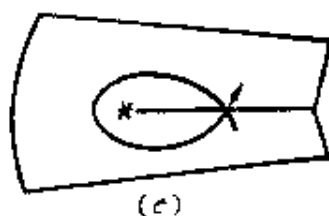
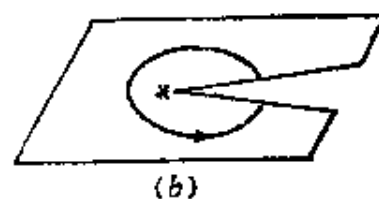
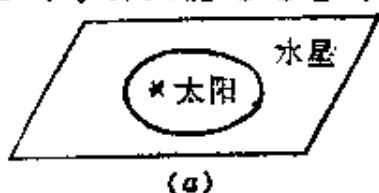


图 C.11 空间弯曲导致近日点的进动

C.4 引力时间膨胀

上面介绍了空间的弯曲。实际上，广义相对论给出的结论比

这要复杂得多。它指出不但空间弯曲，而且有与之相联系的时间“弯曲”。对于图 C.6 所示的情况，不但四边形靠近太阳那一边的长度比远离太阳那一边的长，而且靠近太阳的地方时间也要长些，或者说，靠近太阳的钟比远离太阳的钟走得要慢一些，这种效应叫引力时间膨胀。它也是等效原理的一个推论。

如图 C.12(a) 所示，设想在地面建造一间实验室，在室内地板和天花板上各安装一只同样的钟。为了比较这两只钟的快慢，我们设下面的钟和一个无线电发报机联动，每秒（或每几分之一秒）向上发出一信号，同时上面的钟附有一收报机，它可以把收到的无线电信号的频率与自己走动的频率相比较。现在应用等效原理，将此实验室用一太空船代替。如果此船以加速度 $-g$ 运动，则在船内发生的一切将和地面实验室发生的一样。为方便起见，设太空船在太空惯性系中从静止开始运动时，下面的发报机开始发报。由于太空船作加速度运动，所以当信号经过一定的时间到达上面的收报机时，这收报机已具有了一定的速度。又由于这速度的方向和信号传播的方向相同，所以收报机收到的连续两次信号之间的

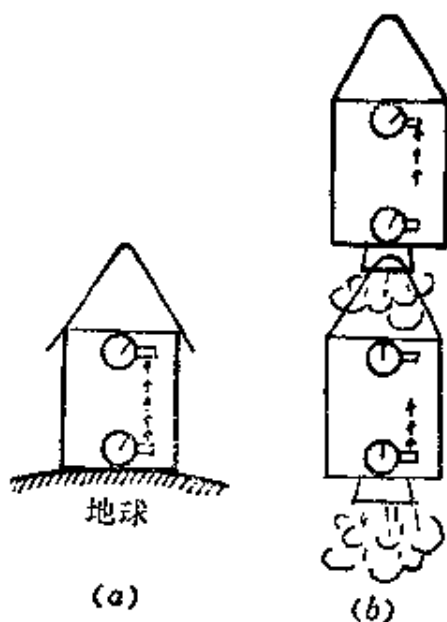


图 C.12 引力时间膨胀

的时间间隔一定比它近旁的钟所示的一秒的时间长。由于上下两只钟的快慢是通过这无线电信号加以比较的，所以下面的钟走得比上面的钟慢。用等效原理再回到地球上的实验室里，就得到靠近地面的那只钟比上面的钟慢。这就是引力时间膨胀效应。

引力时间膨胀效应是非常小的，地面上的钟因此比高空的

钟仅慢 10^9 分之一。但用现代非常精密的原子钟，还是能测出这微小的效应的。1972年有人曾做过这样的实验：用两组原子钟，一组留在地面上，另一组装入喷气客机作高空（约一万米）环球飞行。当飞行的钟返回原地与留下的钟相比时，扣除由于运动引起的狭义相对论时间膨胀效应，得到高空的钟快了 1.5×10^{-7} 秒，这和广义相对论引力时间膨胀计算结果相符合。

引力时间膨胀效应也可以用引力红移现象来证明。原子发出的光频率可以看作是一种钟的计时信号，振动一次好比秒针走一格，算做一“秒”。由于引力效应，在太阳表面上的钟慢，即在太阳表面上原子发出的光的频率比远离太阳的地方的同种原子发出的光的频率要低。因此，在地面上接收到的太阳上钾原子发出的光比地面上的钾原子发出的光的频率要低。由于在可见光范围内，从紫到红频率越来越低。所以这种光的频率减小的现象叫红移。因为这种红移是引力引起的，所以叫**引力红移**。根据广义相对论，太阳引起的引力红移将使频率减小 10^6 分之二，对太阳光谱的分析证实了这一预言。

引力红移在地面实验室也测到了。1960年在哈佛大学曾利用20米高的楼做了这一实验。在楼底安置一个 γ 射线源，在楼顶安装接收器，由于 γ 射线的吸收过程严格地和频率有关，所以可以测出 γ 射线由楼底到达楼顶上时频率的改变，广义相对论预言这一高度引起的引力红移只有 10^{18} 分之二，但实验还是成功了，准确度达到了1%。1976年还做了利用火箭把原子钟带到 10^4 千米高空来测定引力的时间效应的实验。在这一高度的钟比地面的钟要快 10^{10} 分之4.5。实验结果和这一理论值相符，误差小于0.01%。

C.5 黑 洞

在太阳系内爱因斯坦广义相对论效应是非常小的，牛顿理论和爱因斯坦理论的差别只有用非常精密的仪器才能测出来。为了发现明显的广义相对论效应，必须在宇宙中寻找引力特别强的地方。现代宇宙学指出，引力特别强的地方是黑洞。从理论上讲，黑洞是星体演化的“最后”阶段。这时星体由于其本身的质量的相互吸引而塌缩成体积“无限小”而密度“无限大”的奇态。在这种状态下星体只表现为非常强的引力场。任何物质，不管是电子、质子、原子、太空船等等，一旦进入黑洞就永远不可能再逃出了。甚至连光子也没有逃出黑洞的希望。因此在外面看不见黑洞，这也是它所以被叫做黑洞的原因。

我们已经知道，对于一个半径为 R 、质量为 M 的均匀球状星体，牛顿定律给出的逃逸速度是

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (\text{C. 4})$$

如果此星体的质量非常大以致于这一公式给出的速度比光速还大时，光就不能从中射出了。这个星体就变成了黑洞。用光速 c 代替此式中的 v ，可以得到

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{C. 5})$$

很凑巧，广义相对论也给了同样的公式。它给出质量为 M 的物体成为黑洞时所应该具有的最大半径，这一半径叫**史瓦西特半径**。对应于太阳的质量 (2×10^{30} 千克)，这一半径为 3.0 千米 (现时太阳半径为 7×10^5 千米)。对应于地球的质量 (6×10^{24} 千克)，这一半径为 9 毫米，即地球变成黑洞时它的大小和一个指头肚差不多！

在黑洞附近，空间受到极大的弯曲，这相当于图 C.8 中太阳的位置处出现了一个无底洞，在这个洞边上有一个单向壁，它的半径就是史瓦西特半径，任何物体跨过此单向壁后，只能越陷越深，永远不能再从洞口出来了。

在一个黑洞内部，空间和时间是能相互转换的。从单向壁向黑洞中心不是一段空间距离，而是一段间隔，黑洞的中心点不是一个空间点，而是一个时间的点。因此在黑洞中，引力场不是恒定的，而是随时间变化的。这引力场将演变到黑洞中各处引力场的强度都变成无限大为止。这种演变是很快的。例如对于一个具有太阳质量的黑洞，这段演变只需 10^{-5} 秒。但是从外面看，黑洞并没有任何演变，它将永远保持它的形态不变。这个看来是矛盾的结论根源在于引力时间膨胀。

前面说过引力能使时钟变慢，在黑洞附近引力时间膨胀效应很大。在到达单向壁时，这一时间膨胀效应是如此之大，以致此处的钟和远处同样的钟相比就慢的停下来了。如果我们设想一个宇航员驾驶飞船到了单向壁上，则从外面远离黑洞的人看来，他的一切生命过程（脉搏、呼吸、肌肉动作）几乎都停下来了。他好象被冻起来了一样。可是宇航员本身并未发现自己有什么变化。他自我感觉正常，只是周围远处的一切都加速了。与此相似，从外面看，黑洞中发生任何变化都需要无限长的时间。也就是说，看不出它有什么变化。

现在天文学家认为有些星体就是黑洞。其中最出名的是天鹅座 X-1，它是天鹅座内一个强 X 射线源。天文学家经过分析认为天鹅 X-1 是一对双星，它有两个星组成。一个是通常的发光星体，它有 30 倍于太阳的质量。另一个猜想就是黑洞，它大约 10 倍于太阳的质量，而直径小于 300 千米。这两个星体相距很近，都绕着共同的质心运动，周期大约 5.6 天，黑洞不断地从亮星拉出物质。

这些物质先是绕着黑洞旋转，在进入黑洞前要受黑洞的强大引力加速，并且由于被压缩而发热，温度可以高达1亿度。在这样高温下的物质中粒子发生碰撞时就能向外发射X射线，这就是地面上观察到的X射线。一旦这些物质进入单向壁，就什么也不能再向外发射了。因此，黑洞是黑的。但是它周围的物质由于发射X光而发亮。

有些天文学家认为我们的银河系以及河外星系中可能存在着许多黑洞。但在地球上能用我们的仪器看到的黑洞只有那些象上面所述的双星系统。孤立的黑洞都隐藏在宇宙空间。它们是看不见的，我们只能通过它们的引力来检测它们。

习 题 答 案

第 一 章

1. 1 849 m/s
1. 2 4.0 m
1. 3 (1) 34.5 m; (2) 24.7 升
1. 4 (1) 17.2 m/s; 51.5 m/s;
(2) 22.9 m/s
1. 5 (1) $-u \ln(1-bt)$; (2) $\frac{bu}{1-bt}$
(3) 6.91×10^3 m/s; (4) 22.5 m/s²; 225 m/s²
1. 6 (1) $y = 19 - x^2/2$
(2) $2\hat{x} + 17\hat{y}$, $4\hat{x} + 11\hat{y}$; $2\hat{x} - 4\hat{y}$, $2\hat{x} - 8\hat{y}$;
 $-4\hat{y}$, $-4\hat{y}$ (SI)
1. 7 $-\frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s}v_0$; $-v_0^2 \frac{h^2}{s^3}$
1. 8 (1) 269 m
1. 9 不能; 12.3 m
1. 10 4×10^5
1. 11 2.4×10^{14}
1. 12 0.25 m/s²; 0.32 m/s², 与 v 成 $128^\circ 40'$ 角
1. 13 0.2 m/s²; 0.36 m/s²
1. 14 (1) 0.705 s; (2) 0.715 m
1. 15 2.83 km/h, 竖直向下偏西 45°
1. 16 917 km/h, 西偏南 $40^\circ 52'$

917 km/h, 东偏北 $40^{\circ}52'$

第二章

- 2.1 (1) $\frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}$; $\frac{\mu_k Mg}{\cos\alpha - \mu_k \sin\alpha}$;
(2) $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\mu_k}$
- 2.2 (1) 77.3 N; 68.5 N; (2) 17.0 m/s²
- 2.3 $\frac{g\left(1 + \frac{m}{M}\right)\sin\theta}{1 + \frac{m}{M}\sin^2\theta}$
- 2.4 (1) $a_1 = 1.96 \text{ m/s}^2$ 向下; $a_2 = 1.96 \text{ m/s}^2$ 向下;
 $a_3 = 5.88 \text{ m/s}^2$ 向上
(2) $T_1 = 1.57 \text{ N}$; $T_2 = 0.784 \text{ N}$
- 2.5 (1) 3.29 m/s²; (2) 8.34 N;
(3) $T = 0$, $a_A = 4.33 \text{ m/s}^2$; $a_B = 2.77 \text{ m/s}^2$
- 2.6 (1) 19.6 N; 2N; 29.4 N; 7.35 N (2) 16.2 N
- 2.7 39.5 m_s
- 2.9 $d_1 = \frac{v^2}{2\mu_s g}$; $d_2 = \frac{v^2}{g\mu_s}$
- 2.10 $\omega^2 [m_1 L_1 + m_2 (L_1 + L_2)]$;
 $\omega^2 m_2 (L_1 + L_2)$
- 2.11 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(\sin\theta - \mu_s \cos\theta)g}{(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)r}} \leq n \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)g}{(\cos\theta - \mu_s \sin\theta)r}}$
- 2.12 (1) 1875 N; 635.5 N (2) 66.0 m/s
- 2.13 $1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$
- 2.14 $\sqrt[4]{48\pi R^{3/2} / \sqrt{GM}}$
- 2.15 $\sqrt{2gh}$
- 2.16 3.47 s

- 2.17 $\frac{v_0 R}{R + v_0 \mu_k t}; \quad \frac{R}{\mu_k} \ln \left[1 + \frac{v_0 \mu_k t}{R} \right]$
- 2.18 $2.79 \times 10^5 \text{ N}$
- *2.19 2.9 m/s
- 2.20 0.074 rad/s ; 沿环半径向外
- *2.21 π (不稳定); $0 (w \leq \sqrt{g/R}$ 时稳定, $w > \sqrt{g/R}$ 时不稳定); $\pm \cos^{-1}(g/w^2 R)$ (在 $w > \sqrt{g/R}$ 时稳定)

第三章

- 3.1 $-\frac{kA}{\omega}$
- 3.2 1.41 N(s)
- 3.3 $16.9 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$; 与入射方向成 $152^\circ 2'$ 角; 845 N , 616 倍
- 3.4 11.6 N
- 3.5 $2.22 \times 10^3 \text{ N}$
- 3.7 $1.07 \times 10^{-20} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$; 与 p_1 成 $149^\circ 58'$ 角
- 3.8 $\frac{mv \cos \alpha}{M}$
- 3.9 (1) $\frac{2mu}{2m+M}$; (2) $mu \left(\frac{1}{2m+M} + \frac{1}{M+m} \right)$
- 3.10 $v_1 = v_2 = \sqrt{2} v_0 \cos \theta$
- 3.11 必有一辆车速超过 14 m/s
- 3.12 6.15 m/s ; 与 x 轴夹角为 $35^\circ 32'$
- 3.13 6.43 m
- 3.14 向岸移动 0.266 m
- 3.15 在两氢原子张角的分角线上; 距氧原子中心 0.0648 \AA
- 3.16 对称半径上距圆心 $\frac{4}{3\pi}$ 半径处。
- 3.17 $3.14 \times 10^{-22} \text{ m}$

- 3.18 $g\left(t - \frac{5}{7}\right); g$
 3.19 $1.83 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}; 0$
 3.20 $5.26 \times 10^{12} \text{ m}$
 3.21 $2.89 \times 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}; 1.97 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}$
 3.22 $1.60 \text{ km/s}; 5.30 \text{ h}$
 3.23 $\frac{v_0 r_0}{r}$

第 四 章

- 4.1 (1) $1.36 \times 10^4 \text{ N}; 8.30 \times 10^3 \text{ N};$
 (2) $3.95 \times 10^3 \text{ J}; (3) 1.96 \times 10^4 \text{ J}$
 4.2 $mgR[(1 - \sqrt{2}/2) + \mu_k \sqrt{2}/2];$
 $mgR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right);$
 $-\frac{\sqrt{2}}{2}mgR\mu_k$
 4.3 $4.23 \times 10^6 \text{ J}; 151 \text{ s}$
 4.4 113 W
 4.5 2.97 m/s
 4.6 (1) $-3.60 \text{ J}; -15.0 \text{ J}; (2) 0.27;$
 (3) $3.13 \text{ m/s}; 13.0 \text{ m/s}^2; 29.4 \text{ N}$
 4.7 $amg \sin \theta + \frac{1}{2}k\alpha^2 \theta^2$
 4.8 (1) $\frac{1}{2}mv^2 \left[\left(\frac{m}{m+M} \right)^2 - 1 \right]; \frac{1}{2}M \left(\frac{mv}{m+M} \right)^2$
 4.9 (1) $\frac{1}{6} \frac{GmM}{R}; (2) -G \frac{mM}{3R};$
 (3) $-G \frac{mM}{6R}$

$$4.11 \quad \frac{2gm}{k}; 2mg; g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$4.12 \quad 0.23 \text{ m}$$

$$4.13 \quad 1.40 \text{ m/s}$$

$$4.14 \quad (1) \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} x_0; (2) 0;$$

$$(3) (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{gh}{2m_1 k}}$$

$$4.15 \quad (1) \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}; -m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}};$$

$$(2) \frac{m^2 g R}{M+m}; (3) \left(3 + \frac{2m}{M}\right) mg$$

$$4.17 \quad 2.96 \text{ km}; 1.84 \times 10^{19} \text{ kg/m}^3$$

$$4.18 \quad \frac{5ke^2}{4m_p v_0^2}$$

$$4.19 \quad \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(l-l_0)^2};$$

$$\sin^{-1} \left[\frac{v_0 l_0}{l} / \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(l-l_0)^2} \right]$$

$$4.21 \quad -4.43 \times 10^{12} \text{ J}$$

$$4.22 \quad (1) -1.1 \times 10^{11} \text{ J}; -2.2 \times 10^{11} \text{ J}; -1.1 \times 10^{11} \text{ J}$$

(2) 能; 能

$$4.23 \quad \frac{12A}{x^{13}} - \frac{6B}{x^7}; \sqrt{\frac{2A}{B}}$$

第五章

$$5.1 \quad (1) 25.0 \text{ rad/s}; (2) 39.8 \text{ rad/s}^2; (3) 0.628 \text{ s}$$

$$5.2 \quad (1) \alpha = 41.9 \text{ rad/s}^2; \omega_0 = 20.9 \text{ rad/s}; \omega = 314 \text{ rad/s}$$

(2) 187 圈

(3) $a = 1.97 \times 10^4 \text{ m/s}^2$; 与切向加速度夹角为 $89^\circ 59'$; $2999'$

• 285 •

187 入
2
375

314
314
1256
6316
156

- $\alpha_t = 8.37 \text{ m/s}^2; \alpha_n = 1.97 \times 10^4 \text{ m/s}^2$
 5.3 $-9.58 \times 10^{-22} \text{ rad/s}^2$
 5.4 $4.63 \times 10^2 \cos \lambda \cdot \text{m/s};$
 $3.37 \times 10^{-2} \cos \lambda \cdot \text{m/s}^2$
 5.5 (1) $\omega h; (2) 5.4 \times 10^{-2} \text{ m}$
 5.6 $d = 9.59 \times 10^{-11} \text{ m}; \theta = 104^\circ 54'$
 5.7 $m \left(\frac{14}{5} R^2 + 2Rl + \frac{l^2}{2} \right); \frac{4}{5} mR^2$
 5.8 $\frac{13}{24} mR^2$
 5.9 $\frac{1}{4} mR^2$
 5.10 $a = \frac{(m_1 - \mu_k m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m}$
 5.11 $\alpha = \frac{(m_2 R_2 - m_1 R_1) g}{\left(\frac{1}{2} M_1 + m_1 \right) R_1^2 + \left(\frac{1}{2} M_2 + m_2 \right) R_2^2}$
 5.12 $\alpha = 10.5 \text{ rad/s}^2; \omega = 4.58 \text{ rad/s}$
 5.15 $M_f = \frac{2}{3} \mu_k m g R; t = \frac{3}{4} \frac{R\omega}{\mu_k g};$
 $W = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2; \Delta E_k = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$
 5.16 $v = 1.48 \text{ m/s}$
 5.17 22.5 r/min
 5.18 (1) $\omega = 8.88 \text{ rad/s}; (2) \theta = 94^\circ 61'$
 5.19 $\omega = 0.496 \text{ rad/s}$
 5.20 (1) $4.8 \text{ rad/s}, (2) 4.5 \times 10^5 \text{ J}$
 5.21 (1) $5.0 \text{ m/s}; (2) 8.7 \times 10^{-3} \text{ rad/s}; (3) 19 \text{ 圈}$
 5.22 $1.1 \times 10^{42} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}; 3.3\%$
 5.23 $1.99 \times 10^{25} \text{ J/s}; 1.05 \times 10^{15} \text{ s}$

5. 24 $E_k = 2.12 \times 10^{28} \text{ J}$
 (1) $4.70 \times 10^{17} \text{ J}$ (2) $2.05 \times 10^{14} \text{ N} \cdot \text{m}$
- *5. 25 $1.31 \times 10^{18} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$; $1.31 \times 10^{18} \text{ N} \cdot \text{m}$
- *5. 26 $1.27 \times 10^{-27} \text{ N} \cdot \text{m}$

第 六 章

6. 1
$$l' = l \left[1 - \cos^2 \theta \frac{u^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta' = \text{tg}^{-1} \left[\text{tg} \theta \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$
6. 2
$$V' = a^3 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
6. 3
$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ m}$$
6. 4 μ 子在衰变前已到达地面。
6. 5 $6.71 \times 10^8 \text{ m}$
6. 6 $0.577 \times 10^{-8} \text{ s}$
6. 8 $x = 6.00 \times 10^{18} \text{ m}$; $y = 1.20 \times 10^{17} \text{ m}$
 $z = 0$; $t = -2.00 \times 10^8 \text{ s}$
6. 9 (1) $1.20 \times 10^8 \text{ s}$; (2) $3.60 \times 10^8 \text{ s}$; (3) $2.47 \times 10^8 \text{ s}$
6. 10 $\Delta t = -3.33 \times 10^{-5} \text{ s}$; 天津事件先发生
6. 11 (1) $0.95 c$; (2) 4.00 s
6. 13 $0.866 c$; $0.786 c$
6. 14 5.02 m/s ; $1.49 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
6. 15 $1.36 \times 10^{-15} \text{ m/s}$;
6. 16 2.22 MeV ; 0.12% ; $1.45 \times 10^{-6} \%$

- 6.17 (1) $4.15 \times 10^{-12} \text{ J}$; (2) $6.20 \times 10^{14} \text{ J}$;
(3) $6.29 \times 10^{11} \text{ kg/s}$; (4) $7.56 \times 10^{10} \text{ 年}$
- 6.18 (1) $0.58m_0c$; $1.15m_0c^2$
(2) $1.33m_0c$; $1.67m_0c^2$
- 6.19 $1.46 \times 10^{12} \text{ m/s}$