

中学物理思维方法丛书

顾 问 周培源 于光远
序 言 阎金铎
主 编 王溢然 束炳如
编 委 (按姓氏笔划为序)
王明秋 王溢然 刘宗贤
束炳如 岳燕宁 谢 凯
本册作者 许洪生 王溢然
插 图 朱 然

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表示状态,并且也表明过程:运动。

——恩格斯

序 言

在中学物理教学过程中,学生获取知识的同时,要重视从科学宝库中汲取思维营养,加强科学思维方法的训练。

思维方法是一个很大的范畴,有抽象思维、形象思维、直觉思维等。以抽象思维而言,又有众多的方法,在逻辑学中都有较严格的定义。对于以广大中学生为主的读者群,就思维科学意义上按照严格定义的方式去介绍这众多的思维方法,显然是没有必要的,也是不会收到成效的。由王溢然、束炳如同志主编的这套丛书,不追求思维科学意义上的完整,仅选取了在物理科学中最有影响、中学物理教学中最为常见的这些思维方法(包括研究方法)为对象,在较为宽泛的意义上去展开,立意新颖,构思巧妙。全套丛书共13册,各册彼此独立,都以某一二类思维方法为主线,在物理学史的恢宏长卷中,撷取若干生动典型的事例,先把读者引入到饶有兴趣的科学氛围中,向读者展示这种思维方法对人类在认识客观规律上的作用。然后,围绕这种思维方法,就其在中学物理教学中的

功能和表现、以及其在具体问题中的应用作了较为深入、全面的开掘,使读者能从物理学史和中学物理教学现实两方面较宽广的视野中,逐步领悟到众多思维方法的真谛。

这套丛书既不同于那些浩繁的物理学史典籍,也有别于那些艰深的科学研究方法论的专著,但却兼容了历史和方法、照顾了普及与提高、联系了中学教学实际、突出了对中学物理教学的指导作用和具体应用。文笔生动、图文并茂,称得上是一套融史料性、科学性、实用性、趣味性于一体的优秀课外读物。无论对广大中学生(包括中等文化程度的读者)还是中学物理教师、教学研究人员以及师范院校物理专业的大学生,都不无裨益。

科学研究是一项艰巨的创造性劳动。任何科学发现和科学理论都是在一定的背景下,经过科学家精心的实验观测、复杂的思维活动后的产物。在攀登道路上充满着坎坷和危机,并不是一帆风顺、一蹴而就的。科学家常常需及时地(有时甚至是痛苦地)调整自己的思维航向,才能顺利抵达成功的彼岸。因此,任何一项科学新发现、一种科学新理论的诞生,决不会仅是某种单一思维活动的结果。这也就决定了丛书各册在史料的选用上必然存在的某些重复和交叉。这是一个不足之处,但反过来却可转化为使读者的思维层次“多元化”的一个优点。不过,作为整套丛书来说,如果在史料的选用上搭配得更精细一些、思维活动的开掘上更为深刻一些,将会使全书更

臻完美。

我把这套丛书介绍给读者,一方面希望引起广大中学生的兴趣,能从前辈科学家思维活动轨迹中汲取智慧,活化自己的灵感,开发潜在的智能;另一方面希望中学物理教师在此基础上继续开展对学生思维方法训练的研究,致力于提高学生的素质,以适应新时期的需要。

我也真诚地希望这套丛书能成为图书百花园中一朵惹人喜爱的花朵。

阎金铎

1992年10月

引 言

分割与逼近方法是人类处理问题的最古老的一种思维方法。刘徽的割圆术宣告分割与逼近方法的诞生，牛顿和莱布尼兹创立的微积分标志着这一科学体系的建立，从而有力地推动了科学发展的进程，并由此建立起经典物理学的大厦。直到今天，在现代物理学的发展进程中，也无时不闪烁着它的思想光辉。

本书从分割与逼近的渊源谈起，进而探讨了它在科学发展中的指导作用，并结合中学物理教学介绍了常用的几种分割和逼近方法，指出了它对物理学习的指导意义。最后，通过对中学物理的许多具体问题的剖析、演解，介绍了分割与逼近在中学物理解题中的典型应用。

希望本书能有利于发展广大读者(尤其是广大中学生)的思维能力，并帮助广大读者突破物理学习中的难点，打开成功的大门。

作 者

1992年春—夏

目 录

序言

引言

一、分割思想的诞生与发展	(1)
1. 分割思想的萌芽	(1)
2. 分割与逼近方法的诞生	(1)
3. 分割与逼近思想的发展	(4)
二、分割与逼近思想在科学认识中的作用	(8)
1. 提供研究物理问题的有效方法	(8)
2. 深刻认识物质的无限可分性	(17)
3. 建立科学的度量体系	(28)
三、中学物理中常见的几种分割与逼近	(36)
1. 两种有限分割	(36)
2. 三种无限分割	(44)
3. 四种典型逼近	(50)
四、分割与逼近在中学物理学习中的指导作用	(56)
1. 帮助建立和理解概念	(56)
2. 指导认识和掌握规律	(66)
3. 解释现象和处理数据	(82)
五、分割与逼近在中学物理解题中的应用	(90)
1. 隔离法	(90)

2. 微元法	(95)
3. 逼近推理法	(117)
结束语	(128)
主要参考资料	(129)

一、分割思想的诞生与发展

1. 分割思想的萌芽

分割的方法是人类处理问题最古老的一种思维方法。分割思想的萌芽，可以追溯到人类诞生的远古时代。那时，由于生产力低下，原始人以狩猎为生，过着群居生活。在狩猎中，为了解决猎物与人数不等的矛盾，对猎物分割就成了原始人解决问题的最基本的方法。对于每一个人来说，为了解决大块猎物的吞食，也同样需要进行切块分割。因此，我们完全可以说，分割思想与人类的诞生一样古老。

在对猎物分割过程中，由于大人、小孩的需要不同，或者由于狩猎者所做的贡献不同，从而在随意分割的基础上逐步产生了按一定需要的有规律的分割。这种按照人们的意志进行分割的思想一经产生，度量便成了现实的需要。因此，度量是分割思想发展的必然产物。翻开物理学的发展史可以看到，物理量的量度一直是物理学研究的基本内容。从这个意义上说，分割思想也是研究物理学的一个基本的思想方法。

2. 分割与逼近方法的诞生

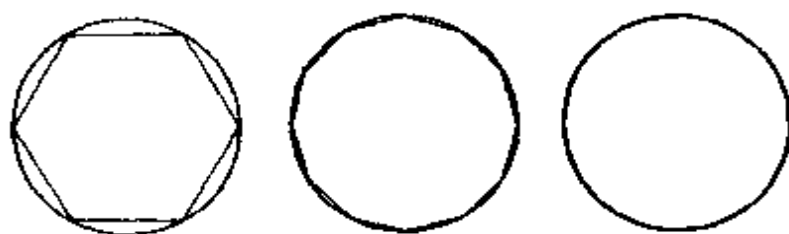
从最原始的分割思想到度量的产生，经历了漫长的岁月，其间，还只局限于对某一整体作若干次有限份的分割。直到公元前 3

世纪至 4 世纪,刘徽(魏晋时人)首创割圆术,突破了有限次分割的模式,才标志着分割与逼近方法的真正诞生.

在对自然的观察中,人们很早就形成了圆和正多边形的概念.正多边形的周长只需用其一边的长度乘以边数,而对圆周长的计算(确切地说是圆周长与半径的关系)却一直悬而未解.在建筑中一些工匠都沿袭着用“周三径一”的方法计算,也就是说,如果把圆的直径作为 1 个单位的话,那么其周长就是直径的 3 倍.不过,这仅是一种近似计算方法.

刘徽首创的割圆术,就是能精确地确定圆周长与其直径关系的一种方法.

刘徽首先从圆内接正六边形算起,然后令边数成倍地增加,依次构成圆内接正十二、二十四、四十八……的正多边形(图 1),并逐个算出它的边长.显然,随着圆内接正多边形边数的增加,其周长越来越接近圆周长,其面积也越来越接近于整个圆的面积.刘徽就是用这种逐步逼近的方法得出了圆周率.



圆内接正六边形

圆内接正十二边形

圆内接正二十四边形

图 1

刘徽的割圆术,用现代的数学语言可表述如下:

设一个半径为 r 的圆周,被分成 n 等份,作出圆内接正 n 边形,设每边长为 l_1 ,以每边为底作出的等腰三角形的高为 h_1 (图 2),这个等腰三角形的面积

$$S_1 = \frac{1}{2} l_1 h_1.$$

整个圆内接正 n 边形的面积为

$$nS_1 = n \cdot \frac{1}{2} l_1 h_1.$$

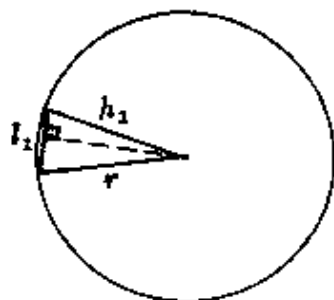


图 2

当圆的内接正多边形的边数越来越多时,这个内接正多边形的周长与面积也越来越接近于圆的周长和面积.当 $n \rightarrow \infty$ 时, nl_1 (内接正多边形周长) $\rightarrow l$ (圆周长), $nS_1 \rightarrow S$ (圆面积), h_1 (正多边形中每个等腰三角形的高) $\rightarrow r$ (圆半径), 因此圆面积也可表为

$$S = \frac{1}{2} lr.$$

刘徽用这个方法,根据对圆内接正九十八边形的计算,得到圆周长与直径的比值(即圆周率 π)并扩大 100 倍后为

$$314 \frac{64}{625} < 100\pi < 314 \frac{169}{625}.$$

亦即

$$3.141024 < \pi < 3.142704.$$

这个结果是十分了不起的,对后人也起了很大的影响.英国著名的中国科学技术史专家李约瑟(J. Needham)博士说:“在这个时期,中国不仅赶上了希腊人,并且在公元 5 世纪祖冲之父子的计算中又出现了跃进,从而使他们领先了 1 千年.”

刘徽的割圆术中所包含着的非常深邃的思想方法,概括起来是:

(1)无限分割的思想,或称为无穷小方法;

(2)在无限小条件下,圆内接正 n 边形的周长逼近圆周长,实现了“直”与“曲”的统一.

刘徽的割圆术突破了当时传统的思维框架,首创了科学的分割与逼近的方法,并将极限的初步概念引入到科学研究领域,开拓了科学研究的新途径.直到今天,分割与逼近仍然是研究数学与物理学的一种重要方法.

3. 分割与逼近思想的发展

在刘徽首创割圆术的 1 千多年后,随着生产力的发展和物理学研究的需要,经典物理学的奠基人——牛顿(I. Newton, 英国, 1642—1727),首先将分割与逼近的思想方法引入到变速运动的研究之中,并提出了“流数术”,即微分学.进一步发展了分割与逼近的思想,创造了微积分运算的一系列法则,从而使分割与逼近的思维方法纳入到严谨的科学体系之中*

牛顿在 1664—1665 年间,已认真学习了当时数学世界中的两大分支——几何与代数上的最新概念和成就,并加以综合和发展,做出了许多重大成就,例如,用极限法求作曲线的切线;提出二项式定理等.

牛顿仿效卡瓦列利(B. Cavalieri, 1598—1647)把线看作无数点、把面和体分别看作无数平行线和无数平面的观点,并加以发展,从运动的思想出发,把线看作点的运动轨迹,把面和体分别视为线和面的运动而形成,这样就产生了它们形成的速度问题.他把点、线和面叫做形成线、面和体的基本单元——流量(fluent),并把它们运动的速度称为流数(fluxion).

* 关于微积分发明权之争,在牛顿中年时期已开始,一直延续了 100~200 年,这段历史公案现在以牛顿和莱布尼兹(G. W. F. V. Leibniz, 德国, 1646—1716)先后独立发明告一段落.

例如,一质点从 a 点出发沿直线运动,经过 b 、 c 、 d 、 \dots 诸点(图 3).该质点就是形成直线轨迹的流量,它的运动速度就称为流数.

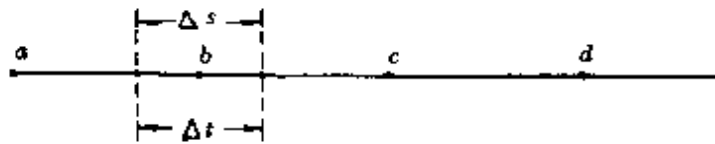


图 3

如果该质点在经过轨迹上某一点(如 b 点)附近 Δs 的位移内历时 Δt ,从运动学可知,这段位移(或这段时间)内的平均速度为

$$\bar{v}_b = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

所取的时间 Δt 越短,相应的位移 Δs 也越小.当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,根据上式算出的平均速度趋向于某个确定的值,它被称为 b 点的瞬时速度.用公式表示为

$$v_b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

在微分学中可表示为

$$v_b = \frac{ds}{dt} \quad \text{或} \quad v_b = \dot{s}.$$

这就是说,运动物体在某一位置(如 b 点)或某一时刻的瞬时速度,就是包含这个位置(或这个时刻)在内的、极短位移(或极短时间)内平均速度的极限.在微分学中可简单地称为“速度等于位移对时间的导数(或微商)”,即 $v = \frac{ds}{dt}$.

根据同样的道理,牛顿把物体运动的加速度称为“速度对时间的导数(或微商)”,即 $a = \frac{dv}{dt}$.或者,也可称为“位移对时间的二阶

导数(或二阶微商)”,即 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

显然,质点做匀速直线运动时, $v = \frac{ds}{dt} = \text{恒量}$;质点做匀加速直线运动时, $a = \frac{dv}{dt} = \text{恒量}$.

牛顿的流数术(包括一系列运算法则)给处理变量的问题提供了分析、研究的有力武器,从而极大地推动了物理学和数学的发展.

例如,物体做简谐运动时,我们只要根据它的位移方程

$$y = A \cos \omega t,$$

立即可以用求导数的方法算出它在任何时刻的速度和加速度,即

$$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega \sin \omega t,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t. *$$

牛顿的流数概念起初来自力学上的运动变量和速度的比较. 1736年科尔逊(J. Colson)把牛顿在1670—1671年间写的一篇重要文献《级数和流数方法论著》翻译发表时在序言中曾写道:“……流数法得以建立的主要原理,是取自理论力学的一个很简单的原理,这就是数学量,特别是将增量设想为由连续的轨迹运动产生的……”

后来,牛顿进一步发展了流数方法,他改变了以前以速度作为变量的流数观点,更加普遍化到以均匀的时间流量为自变量,并将其看作一系列其他变量的流数的一种量度. 牛顿在1714年间写的

* 微分运算方法已越出现行中学物理的要求,这里写出其运算结果仅是为了说明其作用. 其他部分偶尔出现的微分表达式目的同此.

论文中说道：“我把时间看作以连续的流动和增加的东西，并把其他量看作随时间连续增加的量，由时间的流动我才给速度起名流数，其他所有的量因速度这个流数而增加……”从而，使得流数术可以在更为宽广的领域内得到非常方便的应用。

牛顿的流数术是用动力学观点处理变量数学的结果，其内核建立在对变量无限分割和极限下逼近某确定值的基础上，这也是将不同学科的新成就相互渗透与结合的产物。所以，产生流数思想的恰恰是精通动力学和数学的牛顿，而不是当时著名的数学家费马(P. Fermat, 法国, 1601—1665)、笛卡儿(R. Descartes, 法国, 1596—1650)、瓦里斯(J. Wallis, 英国, 1616—1703)等，这决不是偶然的。

二、分割与逼近思想在科学认识中的作用

分割思想起源于生产实践,并随着科学技术的发展而发展,它给普遍存在于自然界中的宏观连续变化的问题提供了极为重要的思想方法.在物理学发展的漫长历程中,到处都可以发现分割思想闪耀的光辉.

下面,我们分几方面并结合典型史料加以阐释.

1. 提供研究物理问题的有效方法

(1) 瞬时加速度与牛顿第二定律

近代物理学的起点是动力学的出现,它是在批判亚里士多德(Aristotle, 希腊, 前 384—前 322)运动观中诞生并发展起来的.

早在欧洲文艺复兴运动的后期,意大利就出现怀疑和反对亚里士多德运动观的思潮.班内代蒂(G. B. Benedetti)曾用一块砖和十块捆在一起的砖做同时落下的实验,发现与亚里士多德的结论不符.伽利略(G. Galilei, 意大利, 1564—1642)正是受到这种思想的影响,才在 1590 年做了著名的比萨斜塔实验,以雄辩的事实否定了亚里士多德的运动观,并发现落体定律.伽利略也开始注意到产生加速度的原因问题.1590 年左右他在《论运动》一书中写道:“自然运动向终点前进时,自然运动的加速度的原因就显示出来,与亚里士多德所想的原因极不相同.”他又说,当重物受到强制的力升

高时,随着强制力的逐渐减弱而平衡和开始下降,并且运动越来越快,“这就是我考虑运动加速度的真正原因”.可以看出,伽利略已经有了加速度及其与力的关系的初步认识.

笛卡儿在力与加速度关系方面对牛顿也有着不可低估的影响,这种影响主要表现在圆周运动的分析上.

但是,在牛顿之前,没有一个科学家(包括伽利略在内)认真研究过和提出过运动第二定律.虽然伽利略提出过力与加速度的依赖关系,培根(F. Bacon, 英国, 1561—1626)也曾在《新工具》一书中提出了作用力依赖于质量的概念,但他们都没有也不可能发现作用力与质量和加速度之间的定量关系,并将其发展成科学的运动基本定律.这里的一个重要因素,就是缺乏处理变量问题的研究工具.物体做变速运动——无论是匀变速运动、匀速圆周运动、抛体运动等时,速度的大小、方向的变化如何表示是研究这种连续变化的量的一大障碍.

牛顿根据他的微积分的基本思想,通过对时间变量进行无限分割,然后采用对各微元进行累积运算的方法,顺利地突破了这一障碍.

伽利略和牛顿对速度和加速度的定义如下表所示:

物理量	伽利略的定义	牛顿的定义
速度	$v = \frac{s}{t} \quad \text{或} \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (速度是位移与时间的比值)	$v = \frac{ds}{dt}$ (速度是位移对时间的一阶微商)
加速度	$a = \frac{v_2 - v_1}{t} \quad \text{或} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (加速度是速度的变化与时间的比值)	$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{或} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$ (加速度是速度对时间的一阶微商或位移对时间的二阶微商)

对比这两种定义可以看出,牛顿的定义把伽利略对某段时间间隔内的运动变化过程推进到对每一瞬间的运动状态的变化,使原来只能研究均匀变化的运动推进到对非均匀变化的运动,这无疑是运动学研究的一大飞跃.

在这个基础上,牛顿进一步研究和总结了力与质量和加速度的关系,得出了运动第二定律.在牛顿的伟大著作《自然哲学的数学原理》中的正式说法是:

定 律 II

运动的变化与外加的动力成比例,并且运动的变化发生在外加力的直线方向上.

用现行中学物理的习惯说法就是:物体的加速度与它所受到的外力成正比,并且加速度的方向一定与外力的方向相同.

牛顿在原著中把第二定律表示为动量形式.对一段有限时间间隔,我们可把它写为

$$m\Delta v = F\Delta t.$$

用现行中学物理的习惯写法,就是

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = ma.$$

由于牛顿第二定律中的加速度是一个瞬时量(它的微分形式为 $F = m \frac{dv}{dt}$),它适用于运动过程中的每一瞬间,因此,可广泛应用于匀速圆周运动、抛体运动、机械振动等各种均匀变化和不均匀变化的运动,从而奠定了动力学的基础.

(2) 均匀球体对球外质点的引力

万有引力定律是牛顿最著名的科学发现之一.这个发现奠定了天体力学的基础.

法国著名的数学家和天体力学家拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749—1827)说:

用地球的运动去解释天体运动所表现的简单性,得到天文学家们一致的赞同,它被认为是万有引力原理的一种新的验证,使其达到物理科学可能达到的最高境界。

从牛顿于 1665—1666 年自称的“最佳年华”开始对引力的研究到万有引力定律的正式发表,经历了 20 年的曲折道路,他超越了同时代人,突破了几大障碍*,其中,用它所发明的微积分方法计算出均匀球体对球外质点的引力,便是一大成功的突破.这里也正折射出分割与逼近思想的光辉。

为了使读者领略这种思想方法,我们把这一计算的过程简单介绍如下。

设一半径为 R_0 、质量为 M_0 的均匀球体,其球心 O 与球外 P 处质量为 m 的质点相距 a . 计算它们之间相互作用力的主要步骤是:

①将整个球体分割成厚度很薄很薄的一系列球壳[图 4(a)];

②将球壳沿质点 m 与球心 O 连线垂直的面分割成许多很窄的圆环[图 4(b)];

③将圆环再分割成许多很小的弧段,并把每个弧段看成一个质点,它们的质量分别为

$$\Delta M_1, \Delta M_2, \dots, \Delta M_n,$$

如图 4(c)所示。

④根据两个质点间的引力公式算出每一小弧段对质点 m 的引力. 因为每一小弧段对质点 m 的距离

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(a + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta}, \end{aligned}$$

* 参见本丛书《猜想与假设》。

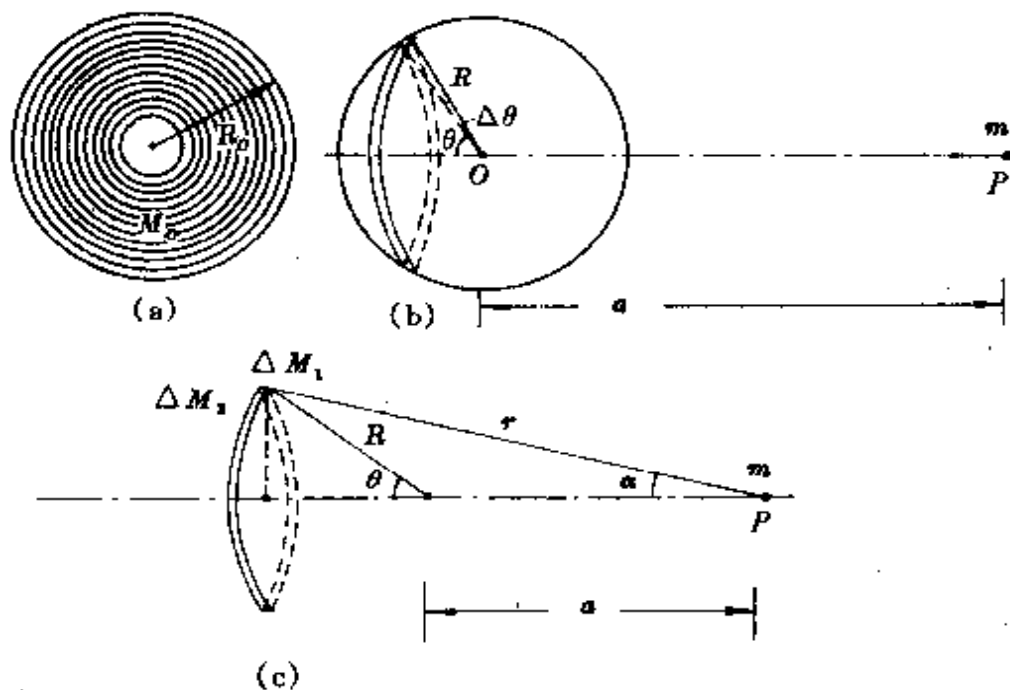


图 4

所以,每一小弧段对球外质点 m 的引力分别为

$$\Delta F_1 = G \frac{\Delta M_1 m}{r^2} = G \frac{\Delta M_1 m}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta},$$

$$\Delta F_2 = G \frac{\Delta M_2 m}{r^2} = G \frac{\Delta M_2 m}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta},$$

.....

$$\Delta F_n = G \frac{\Delta M_n m}{r^2} = G \frac{\Delta M_n m}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta},$$

它们的方向都沿着各小弧段与质点 m 的连线.

各小弧段对质点 m 的引力在 OP 方向上的分量之和便是整个圆环对质点 m 的引力,即

$$\begin{aligned} F' &= \Delta F_1 \cos \alpha + \Delta F_2 \cos \alpha + \cdots + \Delta F_n \cos \alpha \\ &= G \frac{M' m}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta} \cos \alpha, \end{aligned}$$

式中

$$M' = \Delta M_1 + \Delta M_2 + \cdots + \Delta M_n,$$

是整个圆环的质量；

$$\cos \alpha = \frac{a + R \cos \theta}{r} = \frac{a + R \cos \theta}{\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta}}.$$

代入上式后得

$$F' = G \frac{M' m (a + R \cos \theta)}{(a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta)^{3/2}}.$$

⑤ 整个球壳对质点 m 的引力就等于各个环带对质点 m 引力之和。

由于各环带对质点 m 的距离和张角不同(图 5), 牛顿借助积分方法算出它们的合力为

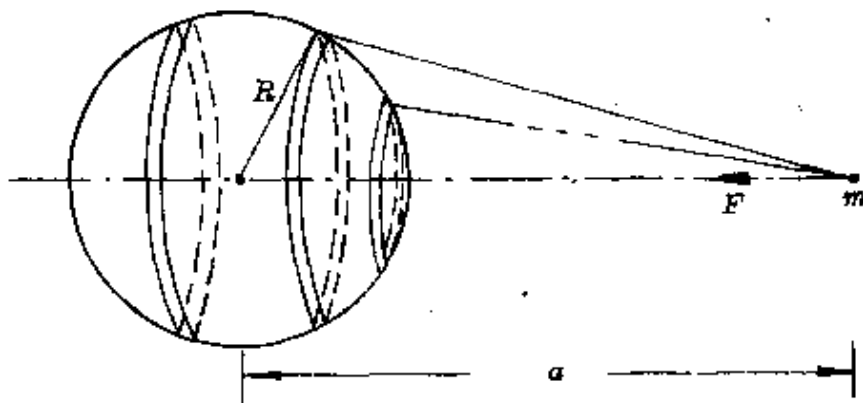


图 5

$$F = G \frac{4\pi R^2 \sigma m}{a^2} = G \frac{Mm}{a^2}.$$

式中 σ 为球壳的面密度, $M = 4\pi R^2 \sigma$ 为半径等于 R 的这个球壳的质量。

由上述计算结果可知, 一个质量均匀分布的球壳对球外质点的引力, 就像把整个球壳的质量集中于球心时一样。

⑥ 由于整个球体是由无数个球壳组成的, 整个球体对球外质

点的引力应该等于这无数个球壳对该质点引力之和,也就相当于把整个球体的质量集中于球心一样.

所以,一个质量为 M_0 、半径为 R_0 的均匀球体对离球心 a 处质点 m 的引力为

$$F_0 = G \frac{M_0 m}{a^2}.$$

这便是我们所熟知的公式.

从一个均匀球体对球外质点的引力也可推出两个均匀球体间的相互作用力.牛顿在他的《原理》的第一卷中写道:

“可想象其他的球由无数的粒子 p 组成,并因为每一个粒子被吸引的力,与微粒距第一个球中心的距离和同一个球共同成比例.所以,好像吸引力都是从位于这个球中心上的单个粒子发出来的一样,在第二个球中所有的微粒被吸引的力,就是整个球体被吸引的力,好像与这个球被第一个球中心上单个粒子发出的力所吸引是一样的,所以是与这些球之间的距离成比例.”

在这里,牛顿十分精辟地阐述了球与球之间吸引力的计算思想,即将球分割成许多小质点,通过求出各小质点对球外质点的引力的矢量和,就可算出两个球体间的引力.

(3)从质点到电流元

1820年7月21日,丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted, 1777—1851)向科学界宣布了“电流的磁效应”,轰动了整个欧洲,极大地震动了法国学术界.当时,在科学上极其敏感且善于接受他人成果的法国物理学家安培(A. M. Ampere, 1775—1836)对奥斯特的这一划时代的发现表现出异乎寻常的热情.他在听到阿拉果(F. Arago, 法国, 1786—1853)介绍后的第二天,就重复了奥斯特的实验,并加以发展,在不到一个月的时间内,安培通过实验总结出了关于磁针

的转动方向与电流方向之间关系的右手定则,即著名的安培定则。

接着,安培在奥斯特发现的启发下,想到两根通电导线之间也会有相互作用,同年9月25日他向法国科学院报告了他的实验结果:两根平行载流导线,通以同向电流时相互吸引,通以反向电流时相互排斥,安培又把导线绕成螺旋状,研究它们之间的相互作用。

与此同时,法国的许多物理学家也都展开了研究,同年10月30日,毕奥(J. B. Biot, 1774—1862)和萨伐尔(F. Savart, 1791—1841)报告了他们发现的直线电流对磁针作用的规律,指出这一作用正比于电流的强度,反比于它们之间的距离,作用力的方向则垂直于磁针到导线的连线(图6),用公式可表示为

$$F \propto \frac{I}{r}.$$

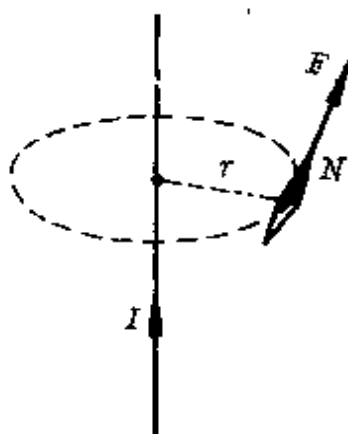


图 6

后来,拉普拉斯采用把直导线分割成许多元段(称为电流元)的方法,假设整个导线对磁针的作用,可以看作是许许多多电流元单独作用的总和,运用数学分析的方法给毕奥、萨伐尔的实验结果作出了证明(后来把这一结果称为毕奥—萨伐尔—拉普拉斯定律)。

安培从1820年10月开始,正集中力量研究电流之间的相互作用,他的想法与拉普拉斯的假设不谋而合,像牛顿把整个物体分割成无数质点一样,安培也想到了把电流看作无数电流元集合的方法,并且提出了一个假设:

“两个电流元之间的相互作用力沿着它们的连线。”

以后,他以精巧的实验技巧和高超的数学才能设计了四个所

谓“示零实验”。

第一个实验 安培用一个无定向秤(图7)检验对折通电导线的作用力[图8(a)],得到了零结果.从而证明:当电流反向时,它所产生的作用也反向.

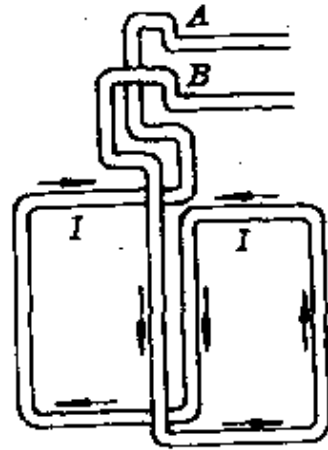


图7 无定向秤

第二个实验 安培仍用一个无定向秤检验一对折通电导线,只是对折导线的另一臂绕成螺旋线[图8(b)],实验指示也是零结果.从而证明:电流元之间的作用具有矢量性质,即

许多电流元的合作用等于各单个电流元所产生的作用的矢量和.

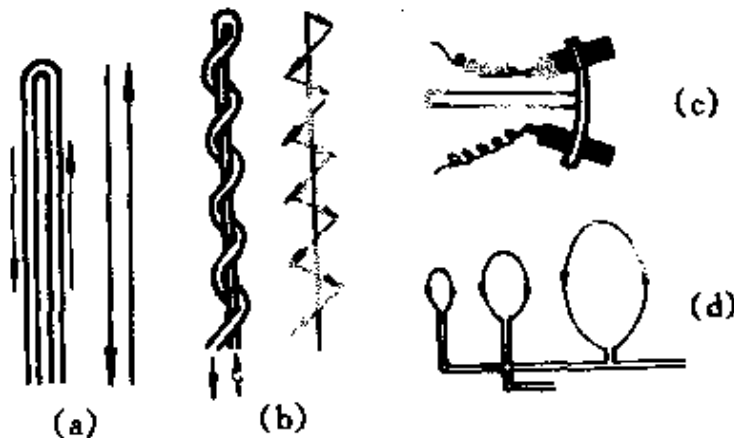


图8

第三个实验 安培用一个一端固定于圆心的绝缘柄固定连接一圆弧导体,再将圆弧导线架在两个通电的水银槽上,然后用各种线圈对它作用[图8(c)].实验结果发现,这个圆弧形导线并不沿其电流方向运动(也是零结果).从而证明:作用在电流元上的力是与它垂直的.

第四个实验 安培用三个相似的线圈[图8(d)],它们的线度之比与三个线圈的间距之比一致,通电后发现,两边线圈对中间线

圈的合作用为零.从而证明:各电流元的长度和相互距离增加同样倍数时,作用力不变.

安培在这四个实验的基础上,总结得出了两个电流元之间的相互作用力正比于它们的长度和电流,反比于它们间距离的平方的规律,即著名的安培定律.

1820年12月4日,安培向法国科学院报告了这个极其重要的成果.

从奥斯特发现电流的磁效应到安培得出安培定律,其间仅经历了短短的四个半月,但电磁学的发展却经历了从现象的总结到理论的归纳这个大飞跃,从而开创了电动力学理论.这里,除了一系列实验上的成功外,微积分运算法则给理论研究提供了极为有力的工具,而这正是分割与逼近思想的体现.

由于安培对创立电动力学作出了奠基性的工作,麦克斯韦(J. C. Maxwell, 英国, 1831—1879)把安培誉为“电学中的牛顿”,真是非常恰当.

2. 深刻认识物质的无限可分性

远在公元前5至3世纪,中国战国时《庄子》一书中已提出过“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的观点.“棰”是一种策马鞭上的短木棍.意思是说,一尺长的短木棍,每天分割一半,亿万年也分割不完.虽然对于木棍这样的具体物体进行机械分割是不可能“万世不竭”的*,但它朴素地道出了中国古人所具有的物质无限可分的

* “日取其半”地分割一尺长的木棍,经过30天,剩下的长度只有 $\frac{1}{10^9}$ 尺,变成了比木头纤维素更小的东西.用机械方法分割是不可能的,且以后继续无止境地分割出来的小粒子早已不具有木头的性质了.

思想,是符合科学事实的.

从古人设想的对物质的简单分割开始,发展至今已深入到基本粒子世界.在人们对物质结构认识的漫长历程的各个不同阶段,始终贯穿着分割的思想,人们用分割的思想去认识组成世界万物的基本单元.

(1)古代朴素的元素论、原子论和元气说

中国古代对物质世界的组成,先后出现过三种主要的观点.

大约在公元前 11 世纪,产生了把水、火、木、金、土五种具体的物质形态看成是世界物质本原的思想,称为五行说.

到了公元前 5 世纪春秋战国时代,孔子的孙子、著名的儒家学者孔伋(字子思,前 483—前 402)认为物质是可“破”的,“破”到“莫能破”.这里“破”的意思就是“分割”,“莫能破”就是“不可分割”.意思是说物质是可以分割的,最后可一直分割到“莫能破”的物质单元,这就是一种原子论的观点.著名学者严复(中国,1853—1921)最早将欧洲近代原子理论翻译介绍到国内来时就用了孔伋的话,将原子译成“莫能破”质点.

与孔伋同时代的思想家墨翟(约前 480—前 420)创立的墨家学派,提出以“端”的概念作为物质的最小单元.“端”的意思是种子萌发的芽尖.墨家认为,正如植物由芽尖长成那样,世界万物都由“端”构成.先由许多“端”串成线,称为“尺”;再由许多“尺”排成面,称为“区”;最后由许多“区”擦成体,称为“穴”.墨家的观点也是一种朴素的原子论,从本质上讲也是一种贯穿着分割思想的物质结构理论.

第三种观点就是元气说.很早,中国古人就提出看法,认为宇宙万物都是由“气”构成的.元气中又分为阴阳两性,阴阳两性的相互激励,形成了宇宙万物及其运动的多样性.

而在西方,作为古代科学文化活动中心的希腊,也较早提出过各种关于物质结构的学说,其中产生较大影响的有:

公元前 640 年,泰勒斯(Thales of Miletus, 古希腊,约前 624—前 547)认为“水”为万物之源,生命来源于水,并依赖于水。

公元前 6 世纪,阿那克西米尼(Anaximenes, 古希腊,约前 585—前 525)提出万物之源是气的主张。

公元前 6 至 5 世纪,赫拉克里特(Heraclitus of Ephesus, 古希腊,约前 540—前 475)提出万物之源是火的主张。他说:“这个世纪,对于一切存在物都是一样的,它不是任何神所创造的,也不是任何人所创造的;它过去、现在、未来永远是一团永恒的活火,在一定的分寸上燃烧,在一定的分寸上熄灭。”

公元前 4 世纪,亚里士多德提出四元素说,认为土、水、气、火四种元素是构成世界的物质原始,这四种元素是由干、冷、湿、热四性的不同组合得到的。如湿与冷结合形成水,湿与热结合形成气,热与干结合形成火,干与冷结合形成土(图 9),这四种元素的不同组合就构成了世界万物。

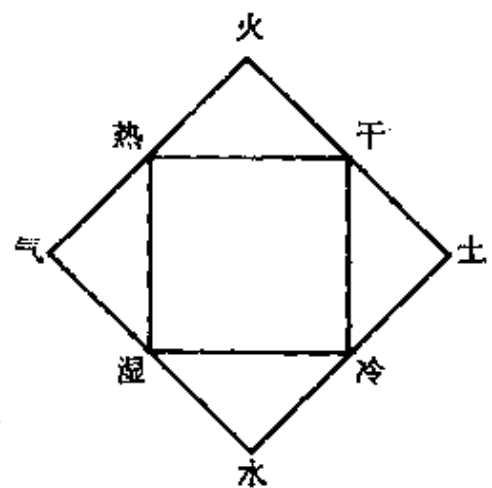


图 9

公元前 4 世纪,德谟克利特(Democritus of Abdera, 古希腊,前 460—前

370)发展了他的老师留基伯(Leucippus of Miletus, 古希腊,约前 500—前 440)的原子论思想,提出朴素的原子说,认为宇宙万物都是由大小和质量不同的、不可破的、运动不息的原子组成,并认为宇宙间除了原子和虚空,不存在其他任何东西;原子从亘古以来就已存在;原子在数量上是无限的,在形式上是多样的……德谟克利

特的原子论包含着丰富的内容,是对古希腊自然哲学成就的一次大综合,对以后自然科学的发展有着不可估量的影响。

以上东、西方古代哲人提出的种种看法,尽管观点不同,但指导思想是一致的,都主张把万物分割成某一个或某几个最小的单元。不过,这些主张都只是停留在哲学思辨上,缺乏必要的、充分的实验论据,且由于当时生产力低下,都没有得到发展。

(2)道尔顿的新原子论和阿伏加德罗的分子假设

对物质结构形成基本的认识归功于道尔顿的新原子论和阿伏加德罗的分子假设。

19世纪初,英国化学家道尔顿(J. Dalton, 1766—1844)通过对大气的成分、性质以及气体的扩散和混合现象的研究,提出了他的原子论(称为新原子论)。道尔顿认为,一切元素都是由不可分割的原子组成的;各种元素的原子有不同的形状、性质和质量;不同元素的原子以简单整数的比例相结合就形成各种化合物的原子(复杂原子)*。

道尔顿的新原子论,继承了古代朴素的原子论思想,把宏观的整个物体看成能分割开来的许多微小的独立的“原子”的集合。为了解释气体的压强随温度升高的现象,他设想气体原子是由一个硬核和包围着核的一层“热雾”所组成。由于这种热雾的作用使原子间相互排斥,温度升高,热雾增多,原子间的排斥作用增强,于是气体的压强就增大。道尔顿还根据同种物质的原子互相排斥、不同物质的原子不会互相排斥的假设,解释了混合气体的压强(称为道尔顿分压定律——混合气体的压强等于各种气体单独产生的压强之和)。不过,道尔顿的原子论在解释气体化合时的体积之比、确定

* 当时还没有“分子”的概念。

化合物中原子的组成以及原子量的测定等问题上遇到了不可克服的困难。

1811年,意大利物理学家阿伏加德罗(A. Avogadro, 1776—1856)针对道尔顿原子论出现的矛盾,引入了“分子”概念。他认为,任何物质都是由大量的能够独立存在的分子所组成的;分子是由原子组成的,同种元素的原子组成单质分子,不同元素的原子组成化合物分子;分子是保持物质性质的最小微粒,参与化学反应的最小微粒则是原子,他还提出了“任何气体,在同温同压同体积下含有相同的分子数”的假设。

阿伏加德罗的分子假设,开始受到包括道尔顿在内的化学权威们的反对。后来,随着分子动理论的发展和化学上拒绝分子假设所陷入的愈来愈严重的混乱状态,1860年后,阿伏加德罗的分子假设终于取得它应有的历史地位和普遍的承认。

现在,我们已能用简单的化学的或物理的方法,算出一定量物质中所含有的分子的数量、确定分子的质量和大小。在高倍电子显微镜下还能直接观察到某些分子的结构。物质是由分子组成的观点已确信无疑了。自然界中千姿百态、五光十色的物质,都是由各种各样的分子组成的。

所以,在保持物质性质的条件下,对某种具体物质的分割是有限度的。

(3) 汤姆生发现电子和卢瑟福提出原子结构模型

德谟克利特给组成物质的小颗粒取名原子,在希腊文中是“不可再分者”的意思,这就是说,原子是对物质进行分割的最终界限。它是组成物质的最小、最简单的单元。在他以后的两千多年中,基本上沿袭着这种观点。

直到1834年,法拉第(M. Faraday, 英国, 1791—1867)从实验中

得到电解定律,提出离子导电的概念,才动摇了原子不可被分割的观点.1881年,德国物理学家亥姆霍兹(H. Halmholtz, 1821—1894)在访问伦敦的一次演讲中,特别提到法拉第电解定律的意义.他说:

“法拉第最惊人的结论也许是如果我们接受了物质由原子组成的假说,就不可避免要作出结论:不论正电和负电,都可分成单元,其行为如同电的原子.”

以后,又有了两个偶然的重大发现.

1895年,德国物理学家伦琴(W. K. Röntgen, 1845—1923)在探索阴极射线性质的实验中,发现从阴极中会射出一种贯穿本领极强的射线,它能使荧光物质发光,使照相底片感光.伦琴在给孔特(A. Kundt, 1839—1894)的信中说:“我终于发现了一种光,我也不知道是什么光……无以名之,就把它叫做X光吧.”

1896年,法国物理学家贝克勒尔(H. A. Becquerel, 1852—1908)在研究荧光物质与X射线的产生时,发现从铀盐等矿物中会自发地放射出一种神秘的射线.当时称为“贝克勒尔射线”.后来,玛丽·居里(M. S. Curie, 波兰, 1867—1934)建议称这种现象为“放射性现象”.

X射线和贝克勒尔射线都来自原子本身,因此这两个发现无疑是又一次动摇了原子不可被分割的观点.

在原子的精细躯体上成功地切了第一刀的荣誉,归于著名的英国物理学家汤姆生(J. J. Thomson, 1856—1940).他通过对阴极射线的研究,终于在1897年证实了阴极射线是一束高速的带负电的粒子——电子,并测出了电子的荷质比.从而,原子不可被分割的神话被彻底粉碎了,这意味着:原子并不是组成物质的最小微粒,在原子中存在着更小的物质单元——电子.

X射线、放射性、电子等三大发现,已完全证实了恩格斯的预言:“原子决不能看作简单的东西或已知的最小的实物粒子。”对原子结构的研究已历史地推到了物理学家面前。

1911年,汤姆生的学生卢瑟福(E. Rutherford, 英国, 1871—1937)通过 α 粒子(从某些放射性元素中自行发出的高速粒子)散射实验,纠正了汤姆生提出的“面包夹葡萄干”式的原子模型,描绘出一幅原子核式结构的图景,使人们对物质结构的认识推进了一大步,更逼近了客观实在。

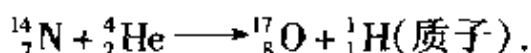
(4) 质子与中子的发现 原子核的组成

在卢瑟福的原子模型中,位居原子中央的核仅占整个原子体积极小一部分。原子直径的数量级约是 10^{-10} 米,原子核直径的数量级仅约 $10^{-15} \sim 10^{-14}$ 米,然而它却集中了原子的全部正电荷和几乎整个原子的质量。真有些使人不可思议!

原子核是否可再分割? 原子核内蕴藏着什么? 这些问题很自然地摆在物理学家面前。

由于原子核是如此的微小,要想实现核的分割,必须寻求新的手段。

1919年,卢瑟福巧妙地用天然放射性元素镭放射的 α 粒子去轰击氮原子核,发现能打出一种新的粒子,以后证明它就是氢原子核,卢瑟福把它称为质子。这是世界上最早实现的人工核反应,也是人类有史以来首次通过有意识的行为成功地改变了原子核。它的核反应方程是



卢瑟福在论文中写道:“……氮原子(核)由于在与快速 α 粒子相碰时所产生的巨大的力的作用而解体,而此时释放出的氢原子(核)乃是氮核的组成部分。”

似乎坚不可摧的原子核终于又被分割了,原子核中包含着质子的看法很快被物理学家所接受。

当时,不少物理学家认为,原子核是由带负电的电子和带正电的质子所组成.一个质量为 A 、核电荷数为 Z 的原子核,核内有 A 个质子、 $(A - Z)$ 个电子。

但是,人们很快就发现,原子核的“质子——电子”组成假设存在着严重的困难,使人们怀疑原子核内可能存在其他粒子。

1920年6月3日,卢瑟福在伯克利讲座的著名报告中最先提出了原子核内存在着中性粒子的假设.卢瑟福说:“这种原子的存在对于解释重元素的原子核的组成看来是必不可少的。”

1932年,查德威克(J. Chadwick, 英国, 1891—1971)终于从实验中发现了中子.*

同年,苏联科学家伊凡宁科(D. Ivanenko, 1904—)指出:“原子核仅由中子和质子所构成,不含电子。”海森伯(W. K. Heisenberg, 德国, 1901—1976)并预言了各种原子核的质量、电荷、自旋、磁矩、统计规律等。

这样,原子核由质子——中子构成的理论克服了质子——电子构成的理论的一系列困难而很快被物理学界所公认,并且一直延续至今还被人们成功地应用着。

(5) 基本粒子世界与夸克

从古代哲人对物质结构的哲学思辨开始,人们就一直在物质可分的思想指导下,企图通过不断分割的方法,找出组成物质世界的最基本的单元,探索着微观世界的奥秘。

1897年汤姆生发现的电子是人们认识的微观世界的第一个

* 参见本丛书《猜想与假设》一册。

基本粒子。以后,相继发现了一系列其他粒子,如质子(1919年)、中子(1932年)、正电子(1932年)、 μ 介子(1935年)、 π 介子(1947年)以及中微子等,组成一个名目众多的基本粒子世界。目前,已知的基本粒子有数百种。面对这些基本粒子,人们不禁要想,这些基本粒子都同样地“基本”吗?它们是否还有更精细的内部结构呢?

以史为镜,常可给人以有益的启发。

化学史上,当1869年门捷列夫(Д.И. Менделеев, 俄国, 1834—1907)排出元素周期表的时候,当时并不清楚是什么原因使元素性质呈现周期性的变化。直到发现了电子,提出原子中的电子壳层模型以后,才对元素性质的周期性变化有了明确的认识。

20世纪以来,发现了一千多种原子核,它们的性质千变万化,但也呈现出一些周期性的行为,好像在人们面前展现了“第二张周期表”。后来,发现了质子和中子,提出了原子核模型,根据核内这两种粒子(质子、中子)的运动变化规律,才又使“第二张周期表”得到圆满的解释。

人们从这两次成功中得到共识:只有当引入一种更深层次的粒子,由它们的运动变化才能说明原来那一层次的现象。

现在,人们通过对诸多基本粒子性质的研究,尤其是在强子(质子、中子、介子等能直接参与强相互作用的粒子)的许多特性上,似乎又出现了“第三张周期表”。应该怎样去破译这张周期表所蕴含的奥秘呢?人们自然想到了必须从强子的内部结构上去寻找。

1949年,费米(E. Fermi, 美籍意大利, 1901—1954)和杨振宁提出了第一个强子结构模型,虽然这一模型并不完善,但无疑是一个勇敢的尝试。

1955—1956年,日本的坂田昌一(S. Sakata, 1911—1970)提出

了著名的坂田模型,在对基本粒子性质的解释上取得某些成功,虽然后来在进一步发展中也遇到了困难,但坂田模型在粒子物理学上具有很重要的历史意义,它促进了后来对基本粒子对称性的研究。

在强子结构上取得重大进展的是“夸克”(Quark)模型,这是在1964年由美国物理学家盖尔曼(M. Gell-Mann, 1929—)提出的。

“夸克”原本是古代的象声词,意为海鸟的叫声,借用“夸克”这个名词还有一段趣闻。

盖尔曼通过对当时已发现的300种左右基本粒子的研究,他认为每种基本粒子有三个更为基本的微小粒子组成(分别用小写英文字母u、d、s表示)。这里的每一种粒子都有三种特殊的内部参数(盖尔曼用“色”表示),而每一种色又有三种特殊的内部区别(盖尔曼用“味”表示)。由于基本粒子的这种组成似乎与“三”字结下了不解之缘,具有幽默性格的物理学家盖尔曼想起了爱尔兰诗人詹姆士·乔伊斯在那首《芬尼根的彻夜祭》长诗中有“三声夸克”一句,于是他就把这种更为微小的粒子命名为“夸克”,现在人们已经普遍接受了这一称谓*。

中国的一些理论工作者,从60年代起系统研究了强子的构成问题,提出了层子——基本粒子下一层次的基础粒子的泛称——的概念,也取得了很大的成绩。

夸克(层子)模型提出以后,有力地推动了人们对基本粒子内部结构的深入研究,取得了很大成功,盖尔曼也因这一卓越贡献荣

* 在盖尔曼提出的三种色夸克、三种味夸克后,1974年,美籍中国物理学家丁肇中和利希特(B. Richter, 美国, 1931—)差不多同时独立地发现一种新粒子—— J/ψ 粒子,夸克家族中又增加了第四种“味”夸克。1977年,莱德曼(L. Lederman)发现了 $\bar{\nu}_\tau$ 粒子,据此,人们认为还应有第5、第6种“味”夸克。

获了 1969 年诺贝尔物理奖。

不过,目前无论在理论上和实验上仍存在着不少困难.所谓“夸克禁闭”就是疑难之一。

“夸克”的质量究竟是多少?如果一个质子由三个夸克组成,似乎每个夸克的质量约为 0.3~0.4 个质子质量.可是,迄今为止,人们无论是利用高能加速器或从宇宙线中,始终找不到自由夸克.这就使人们陷入了困境:一方面,现在的物理学家几乎一致相信基本粒子由夸克组成,并有大量的实验和理论依据;另一方面,夸克却又像幽灵一般,无法找到.形象地说,这三个小家伙像被关在一个半径很小而又很深的“陷阱”里,尽管它们显得相当自由,可就是跑不出来,始终不让人捉到.于是人们就用“夸克禁闭”来称谓这个不解之谜。

粒子物理学家对“夸克禁闭”主要有两种相反的观点。

一种观点认为:由于夸克结合成某些粒子时结合能太大,目前的加速器所提供的能量还不足以把夸克分离出来。

另一种观点认为:夸克永远被禁闭在强子内部.我们虽然能断定它的存在,却永远不能发现它单独存在.你可以打碎一个强子,但是强子的每一碎块并不是组成它的单个夸克,仍是由几个夸克组成的新粒子.正像一根条形磁铁从中央折断后,仍然集南、北极于一身一样。

夸克禁闭曾使一些人认为是对物质无限可分原理的一大挑战,意味着物质的可分性有一个限度。

但更多的人认为,夸克即使永远被禁闭,也丝毫不会动摇物质的无限可分原理.因为,一方面夸克禁闭启示人们,物质的无限可分包含着多种形式.对微观粒子再也不能按照传统的对于“分割”的理解去说明夸克层次的可分性.如果要求像从原子中分割出单

独的电子与原子核,在原子核中分割出单独的质子与中子一样,要求从强子中分割出单独的夸克来,这样就把物质的可分形式的多样性变得简单化、绝对化了.另一方面,夸克禁闭并没有阻碍人们对微观领域物质层次上的深入分析,夸克是否有内部结构的问题早已是近年来许多物理学家所关注和探讨的一个热点.

1990年瑞典皇家科学院宣布,把当年的诺贝尔物理奖授予23年前发现夸克的第一个证据的三位实验物理学家.他们是杰罗姆·弗里德曼(J. Friedman, 美国, 1930—),亨利·肯德尔(H. Kendall, 美国, 1926—)和理查德·泰勒(R. Taylor, 加拿大, 1929—).并且声称:“这一发现是物理学史中最引人注目的事件之一.”我们完全可以相信,像幽灵一样的夸克不久的将来就会真相大白了.

总之,分割的思想仍将永远指导我们对物质结构作出越来越深层次的认识.

3. 建立科学的度量体系

度量是科学发展的基础.物理学从早期的零星经验发展到如今门类齐全、分支众多、精密定量的一门科学,与度量的是分不开的.英国著名物理学家开尔文(威廉·汤姆生)(L. Kelvin, 即 W. Thomson, 1824—1907)说过:

“我经常说,当你能够量度你所讲到的东西,并且能够用数来表示它的时候,那你就对于它有所了解;如果你不能用数来表示它,那你的知识便是贫乏的和不能令人满意的;它可能是知识的开始,但无论如何,在你的思想上很难进入科学的阶段.”

为了进行度量,必须要选定单位和制作量具,它们都离不开分割.量具的制作就是按一定的物理原理在度量范围内作均匀或不均匀分割的结果(如杆秤是一种均匀分割,欧姆表刻度是一种不均

匀分割)。单位制的建立实质上就是标准量的选择和合理分割的过程。

随着科学技术的不断发展,标准量的选择越来越科学,对标准量的分割也越来越系统,越来越统一。

下面,我们从长度、时间、温度这三个基本物理量单位制的建立过程中领会一下分割在建立单位制中的作用。

(1) 长度单位的形成与发展

相传,古代英、法商人常为长短问题争吵不休,这件事被英国查理曼大帝知道后,他把自己的脚一伸说:“我的足长就是一呎。”于是,一个长度单位——英尺就形成了,人们再将英尺作等距分割,称其 $\frac{1}{12}$ 为1英寸,这样就构成了一套英制长度单位。

中国夏禹时代以自己身高定为一丈,一丈的 $\frac{1}{10}$ 定为一尺,也形成一套中国制长度单位。

由于科学技术的发展,对测量精确度的要求日益提高,英制和中国夏禹长度单位的随意性已不能满足需要,必须实现计量单位的国际标准化、通用化、精确化。

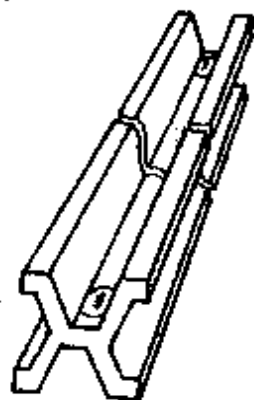
1790年,法国大革命后的国民会议责成巴黎科学院组成了计量改革临时委员会,准备采用“永远不变”的“自然”标准,后来根据拉普拉斯等人的建议,以经过巴黎的子午线自赤道到北极段的一千万分之一为基本长度单位——米,并决定组织测量队测量法国敦克尔克至西班牙巴塞罗那之间子午线的弧长,1799年6月完成测量工作后,铸成一个钝铂米原器(图10),上面镌有几个大字:

“永远为人类服务。”

这个米标准的不确定度为 $\pm 1 \times 10^{-6}$ 。

对米作等距分割,其 $\frac{1}{10}$ 为分米, $\frac{1}{100}$ 为厘米,
 $\frac{1}{1000}$ 为毫米……这样就得到一套国际单位制的
 长度单位.

显然,这套长度单位实际上是以赤道到北
 极的子午线长为标准量,然后通过对标准量作
 1000 万份的等距分割而形成的.



由于铂铱米原器存在着许多缺点,如长期
 保存不可避免的材料变形、刻度精度不高,一旦
 毁坏不易复制等,于是人们又设法寻找更为稳定可靠的长度标准.

随着原子结构理论的发展,科学家们发现,原子在两个不同的
 能量状态(能级)之间跃迁时所辐射或吸收的光的波长是严格确定
 的.例如,氢原子的核外电子从离核最近的轨道(基态轨道,半径
 $r_1 = 0.53 \times 10^{-10}$ 米)跃迁到离核较远的第二层轨道(半径 $r_2 = 2.12$
 $\times 10^{-10}$ 米)时,必须吸收的光子的波长为

$$\lambda = 1.2188 \times 10^{-7} \text{ 米.}$$

反过来,氢原子的核外电子从第二层轨道跃回基态轨道时,辐
 射的光子的波长也为

$$\lambda = 1.2188 \times 10^{-7} \text{ 米.}$$

其他各种不同物质的原子在两种不同能量状态之间跃迁时,
 都有同样严格的规律.

根据原子系统的这个特点,1960 年第 11 届国际计量大会通过
 决议,规定真空中的氪-86 原子在两个能级 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 之间跃迁
 时所辐射的橙红色光的波长 λ 的 1650763.73 倍的长度为 1 米,即

$$1 \text{ 米} = 1650763.73\lambda.$$

这个新标准,相当于把米作 1650763.73 个等距分割.采用这个标准,不确定度缩小到 $\pm 4 \times 10^{-9}$.但用它测量地球周长时仍会出现 16 厘米的误差,测量地球与月球的距离误差可达到 1.5 米.

1983 年 10 月在巴黎举行的第 17 届国际计量大会,对“米”的标准长度进行了第三次修正.确定 1 米等于 $\frac{1}{299,792.458}$ 秒的时间内光在真空中行程的长度.这样确定的“米”的标准长度与时间“秒”标准密切相关,不确定长度只有 1×10^{-10} .

米的标准长度的两次修正,虽然对日常生活不会产生任何明显影响,但对现代科学技术有重要意义.

(2) 时间单位的形成与发展

远古时代,人们过着“日出而作,日入而息”的不紧不慢的生活,时间的概念是不清楚的.随着生产的发展和生活的需要,人们开始要求对时间作简单的计量,时间的单位也就应运而生了.

人们首先想到的是用周而复始日出日落的时间为标准,记为一天.然后把一天的时间均分成若干份.中国古人曾用一天中日影的长短表示经过的时间,这种计时仪器称为日晷(图 11).



图 11 日晷

公元前 2 世纪,中国西汉时记载用漏壶(刻漏)计时.它是根据水从壶中小孔均匀滴落时,对一壶水作均匀分割表示时间长短的一种装置.伽利略(G. Galilei, 意大利, 1564—1642)作斜面实验时,也曾用类似的装置计时.

历史上也曾记载有燃香计时.这是因为无风时香燃烧的速度是均匀的,将香作等距分割,当香每烧过一段,就表示经过一段时

间。

直到 1886 年,为了统一时间的量度,规定“真太阳日”为时间标准.所谓“真太阳日”,就是指太阳连续两次通过地球表面某处的经线的时间.然后将“真太阳日”作等时分割,其 $\frac{1}{24}$ 等分为“1 小时”, $\frac{1}{60}$ 小时为“1 分”, $\frac{1}{60}$ 分为“1 秒”.这样,以“真太阳日”为标准量,通过等时分割的第一套严密的时间单位制就形成了.

后来人们发现,由于地球公转速度的不均匀等原因,“真太阳日”的长短并不相同.一年中最长和最短的一天相差达 51 秒.因此又提出以“平均太阳日”作为时间的标准.所谓“平均太阳日”就是设想地球的公转是均匀时,太阳连续两次经过同一子午线的时间.将“平均太阳日”作等时分割,其 $\frac{1}{86400}$ 称为 1 个“平均太阳秒”.

现在通用的计时系统有三种:世界时 UT,历书时 ET,原子时 AT.

世界时是根据地球自转以英国格林威治的地方时间为起点,按各地的经度向后推移,所用的单位是平均太阳时.这是一切民用时间的标准.

历书时是由日、月和行星的运动确定的,不依赖于地球的自转.1955 年第九届国际天文协会规定:采用 1900 年 1 月 1 日零时开始的回归年的长度作为时间的基本单位.1 历书时秒等于 1900 年开始的回归年的 $\frac{1}{31,556,925.9747}$.历书时常用于天文年历中.

原子时是由原子的振动频率确定的,与地球及太阳的运动无关.从 1955 年起,在精密的天文测量中和高科技中已经引用了原子时.它以铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应

辐射的 9,192,631,770 个周期的持续时间为 1 原子秒,人们称它为铯原子钟.它的稳定性极高,相对变化只有 $10^{-14} \sim 10^{-13}$.

(3) 温度单位的形成与发展

物体冷热程度的定量表示和测量,是热现象研究中首先遇到的问题.

历史上,伽利略首先制成了第一个温度计(图 12).它是根据球形玻璃容器中空气的热胀冷缩使细管中水的高度发生变化来反映环境的冷热程度的.不过,这个温度计没有实用意义,不仅因为气压的变化常会造成误判,而且没有必要的基准点.



图 12
伽利略温
度计

当时,制作温度计存在的主要问题有:

- ① 如何选择某些基准温度;
- ② 找寻合适的测温物质.

因为那时人们已知道物质的熔点是不变的,于是就以此作为基准点,譬如,1703 年,牛顿用亚麻子油作为测温物质,把雪的熔点作为他的亚麻子油温度计的 0° ,而把人体温度作为另一个基准点,记为 12° ,在 $0^\circ \sim 12^\circ$ 之间作均匀分割,表示相应的温度.

制成第一个实用的温度计并首先规定一套温标体系的是荷兰的吹玻璃工匠华伦海特(G. D. Fahrenheit, 1686—1736).他从 1709 年开始先制成以酒精为测温物质的酒精温度计,后又制成水银温度计.他把一个大气压下冰的熔点定为 32°F ,水的沸点定为 212°F ,其间等距分割成 180 等份,每 1 等份为 1° .这样的温度体系称华氏温标.*

1742 年,瑞典天文学家摄尔修斯(A. Celsius, 1701—1744)也用

* 华氏温标的零度,华伦海特规定为冰、水、氨水和盐按适当比例混合物的温度.

水银作为测温物质并引入百分刻度法,将 1 大气压下冰的熔点定为 0°C ,水的沸点定为 100°C ,这样的温标体系就是通用至今的摄氏温标.*

后来,随着热学研究的发展,人们发现,上述温标的建立都会受到温度计的材料和工作介质的影响,用不同的材料作为测温物质,除了 0°C 和 100°C 两点相同外,其他各点均不相同.

“有没有能够据以建立一种绝对温标的任何原则?”

1848 年,开尔文在一篇论文中提出了这样一个问题.也就是说,希望能确定一种原则,以此建立的温标可不受测温物质和工作介质的影响,具有更客观、更普遍的特性.

开尔文在卡诺(S. Carnot, 法国, 1797—1832)和克拉珀龙(B. P. E. Clapeyron, 法国, 1799—1864)对热机理论研究的基础上,进一步指出了这种温标应具有的特点:

“这一温标系统中的每一度都有同样的数值;也就是说,只要一单位热从温度为 T 的物体 A 传至温度为 $(T-1)$ 的物体 B ,不论 T 是什么数值,都将给出同样数量的机械效应.这样的温标应当称为绝对温标,因为这个温标的特点是它完全不依赖于任何特殊物质的物理性质.”

开尔文通过研究,根据当时所用的气体膨胀系数,确定 -272.85°C 为这种温标(绝对温标)的零度,他规定绝对温标的每一分度与摄氏温标的每一分度相同,因此绝对温度和摄氏温度数值间的换算关系为

$$T = t + 272.85(\text{K}).$$

1954 年国际计量大会决定以水的三相点(即冰、水、水汽共存

* 摄尔修斯当初把水的沸点定为 0°C 、冰的熔点定为 100°C ,后来他的学生把它们对调过来.

的温度)为测温的一个基准点,规定它的数值为 273.16K.换言之,规定了绝对温标的零度为 -273.16°C (图 13).于是,绝对温度(T)与摄氏温度(t)的换算关系为

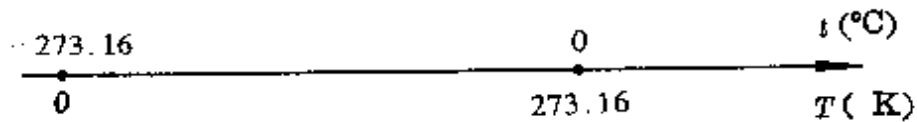


图 13

$$T = t + 273.16(\text{K}).$$

绝对温标又称热力学温标(或开氏温标).1960年国际计量大会把它作为物理学的基本单位之一.

三、中学物理中常见的几种分割与逼近

1. 两种有限分割

把一个整体分割成有限的几个部分,都可称为有限分割.力学中常用的隔离法、测量仪器仪表的分度等都属于有限分割,如果按被分割的各单元是否均匀来区分,可以有如下几种情况:

(1) 均匀分割

被分割的各单元均匀分布或具有一致的物理特性,称为均匀分割,这种均匀性往往是由具体问题的物理条件或事物本质特性所决定的.譬如,测量仪器仪表的分度均匀与否,决定于该仪器仪表的测量原理,如果随意分度就会造成错误测量(或产生较大误差),也会给使用带来不便.

例 1 试证明:杆秤的分度呈均匀分布.

证明 如图 14(a),设杆秤的秤杆、秤钩、提纽的公共重心在 C 点,重力为 G_0 .不称物体时,秤锤置于 A 点(称定星点或起花),秤杆呈水平平衡状态.设秤锤重为 W ,由力矩平衡条件得

$$W \cdot AO = G_0 \cdot CO.$$

若在秤钩上挂一重为 G_x 的物体,设需把秤锤移至 D 点时秤杆复呈水平平衡状态[图 14(b)],由力矩平衡条件又得

$$G_x \cdot BO = W \cdot DO + G_0 \cdot CO.$$

联立两式得

$$G_x \cdot BO = W \cdot DO + W \cdot AO = W \cdot AD,$$

或
$$G_x = \frac{W}{BO} AD.$$

对确定的杆秤, BO 和 W 都一定, 设 $AD = x$, 上式可写成

$$G_x = \frac{W}{BO} x = kx. \quad \left(k = \frac{W}{BO} \right)$$

这就是说, 被称物体的重力 G_x 与秤锤离开定星点 A 的距离 x 成正比, 所以, 秤的刻度以定星点 A 为起点均匀分度的.

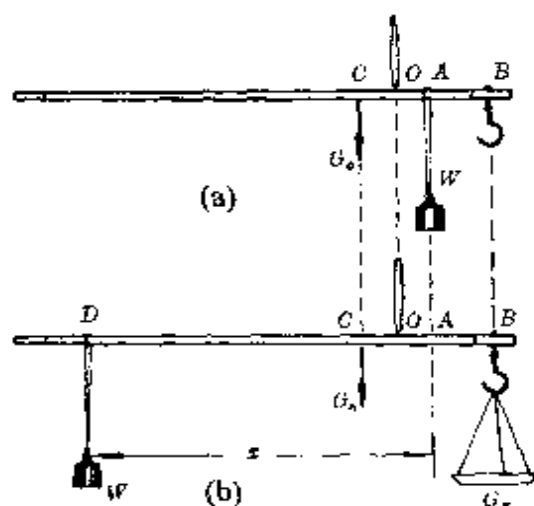


图 14



图 15

例 2 试证明: 常用的水银(或酒精)温度计的刻度是均匀分割的.

证明 常用的水银(或酒精)温度计是根据热胀冷缩原理制成

的。

如图 15 所示温度计,为方便起见,设 0°C 时水银(或酒精)恰好全部在玻泡内,玻泡的容积为 V_0 ,上部细管的截面为 S . 温度升高到 $t^{\circ}\text{C}$ 时,设水银(或酒精)膨胀后的体积为 V_t . 根据液体的热膨胀公式

$$V_t = V_0(1 + \beta t),$$

式中 β 称为液体的体膨胀系数,它在数值上等于每升高 1°C 时增加的体积与 0°C 时的体积之比,

即
$$\beta = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}.$$

由于固体(玻璃)的热膨胀甚小于液体的热膨胀,当温度变化不大时完全可忽略玻璃的膨胀. 因此,泡内水银由 0°C 升温至 $t^{\circ}\text{C}$ 时增加的体积为

$$\Delta V = V_t - V_0 = V_0 \beta t.$$

这一部分水银进入细玻璃管中所形成的液柱长度

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{S} = \frac{V_0 \beta}{S} t.$$

对于一个确定的温度计,玻泡容积 V_0 和细管截面 S 一定,选用的液体的体膨胀系数仅与物质性质有关,也是一个定值. 令 $k = \frac{V_0 \beta}{S}$, 于是上式就可以表示为

$$\Delta l = kt.$$

即温度升高时,细管内液柱长度变化与温度 t 成正比,所以,它的刻度呈均匀分布.

(2) 不均匀分割

被分割的各单元不均匀分布或具有不一致的物理特性,称为

不均匀分割.这种不均匀所表现的随意性,实际上是研究问题的需要或受物理原理本身制约(如多用电表的刻度)所造成的.譬如,力学中常用的隔离法往往是对整体的不均匀分割——按研究对象的需要把它从整体中分割出来.

例 1 如图 16(a)所示,在光滑水平地面上放有一根长 l 、质量为 M 的均质木棒,当受到水平推力 F 的作用沿水平面做加速运动时,要求确定棒各处横截面上的内力分布.

分析与解答 由于对整个棒而言,内力不出现在牛顿第二定律方程中,因此需用隔离法.

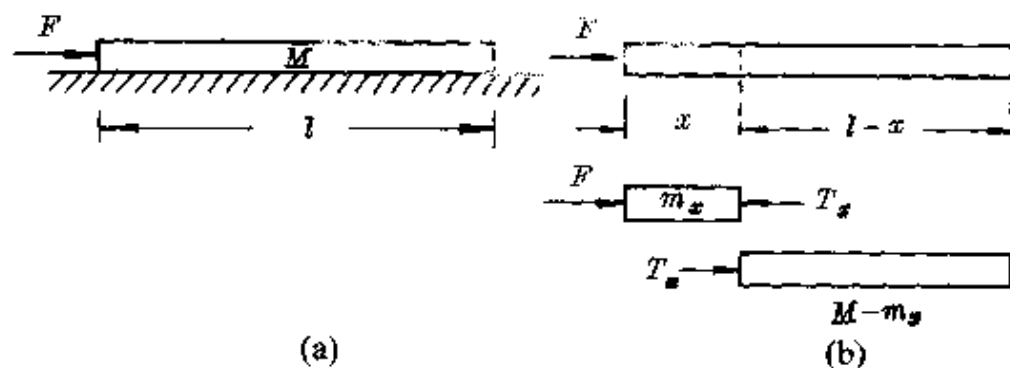


图 16

如图 16(b)所示,从离施力端任意值 x 处把棒分割成任意两部分,其质量分别为

$$m_x = \frac{x}{l}M, \quad M - m_x = \frac{l-x}{l}M.$$

根据牛顿第二定律,加速度相同时,各部分的合外力与其质量成正比,于是由

$$\frac{F}{F - T_x} = \frac{M}{m_x} = \frac{l}{x},$$

得棒中各横截面上的内力(即两部分间相互作用力)随离施力端距离 x 的分布规律为

$$T_x = \frac{l-x}{l}F.$$

在工程技术的桁架受力分析中也常用有限不均匀分割法(称为有限元法)较方便地求出各构件的受力。

例2 如图17所示,已知桁架各构件的关系是 $AD = BD = l$, $\angle DBC = \angle DAC = 30^\circ$, 当在 D 点受到一个方向竖直向下、大小为 $2P$ 的作用力时,求各杆件的内力(各杆件的质量不计)。

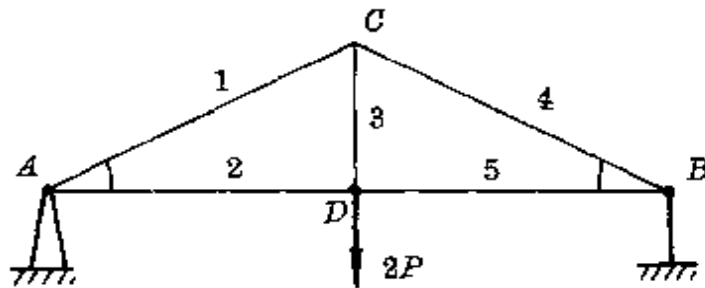


图 17

分析与解答 由于各杆件的内力是成对出现的,不出现在整个桁架的力平衡方程中,因此必须采用隔离法.具体步骤是:

①将桁架分割成5个单元,每个单元为一根杆并与两节点相连.编号为: AC 为1号, AD 为2号, CD 为3号, CB 为4号, DB 为5号.

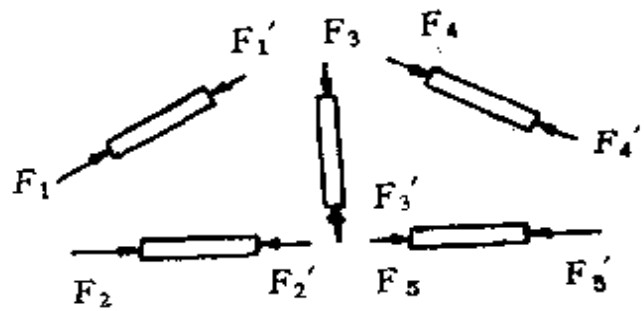


图 18(a)

②分别以各单元为研究对象分析.各杆的受力情况

见图18(a),各节点的受力见图18(b).

先分析单元3及其包含的两个节点 C 和 D .

节点 D 受力满足关系:

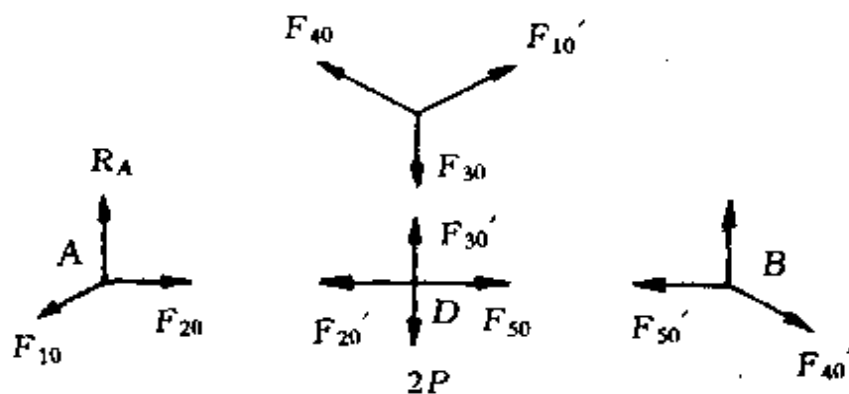


图 18(b)

$$F_{30}' = 2P,$$

$$F_{20}' = F_{50};$$

节点 C 受力满足关系:

$$F_{10}' = F_{40},$$

$$F_{30} = 2F_{40}\sin 30^\circ = F_{40};$$

杆件 3 受力满足关系:

$$F_3 = F_3'.$$

再分析单元 1 及其包含的节点 A.

节点 A 受力满足关系:

$$F_{10}\cos 30^\circ = F_{20},$$

$$R_A = F_{10}\sin 30^\circ = \frac{F_{10}}{2};$$

杆件 1 受力满足关系:

$$F_1 = F_1'.$$

③综合上面的等式,再根据对称原理和牛顿第三定律有:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{10} = F_1' = F_{10}' = F_4 = F_{40} = F_4' = F_{40}' \\ &= F_3 = F_{30} = F_3' = F_{30}' = 2P, \end{aligned}$$

$$F_2 = F_{20} = F_2' = F_{20}' = F_5 = F_{50} = F_5' = F_{50}'$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2P = \sqrt{3}P,$$

$$R_A = R_B = P.$$

至此杆的内力已经全部求出。

从上面两个问题的分析可以看出,用有限分割法解题的基本思想与步骤如下:

I. 离散化 将研究的对象根据问题要求分割成几个单元;

II. 单元特性分析 对分割后的各单元进行受力分析,列出相应的方程;

III. 整体组合分析 将各单元的方程联立求解,或与整体作比较分析、组合,求出结果。

类似于上述求解杆系结构的有限单元法,在流体力学、空气动力学等连续体力学问题中也有广泛的应用。

例3 黄金分割。

这是指把一根线段按某种特定比例作的一种不均匀分割。按这种比例分割的两线段作为矩形的长和宽,会使人感到格外的匀称、和谐、赏心悦目。它在数学、物理、工程技术和美学等领域都有广泛的应用。

相传,公元前6世纪至5世纪,古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras of Samos, 约前584—约前497)已知道黄金分割。

意大利著名数学家斐波那契(L. Fibonacci, 1170—1250)在他的著作《计算之书》中,对“一对兔子一年能繁殖多少只兔子”问题的研究中提出了著名的斐波那契数列:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, u_n, \dots$$

其通项公式为

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 3),$$

并有

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0.618.$$

这里的 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ 即为黄金分割中的大段与全长的比(图 19).

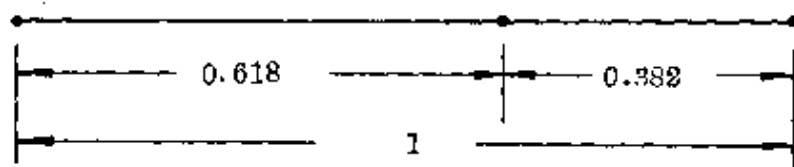


图 19 黄金分割

在中世纪的欧洲,对黄金分割常带有某种神秘的色彩.因为许多地方自然地符合这种比例关系.例如,对人体的研究表明,人站立时的重心位置约在身高的 0.618 处.

1953 年美国数学家基费(J. Kiefer, 1924—)提出优选法,用黄金分割寻求单因素试验最佳点(又称对折法),把黄金分割的应用推向新的高度.

对折法的具体用法如下:

以整个试验区 AB 为单位长作一线段,然后从 0.618 处选择试验点 B' ,把它与 0.382 处的试验点 A' 的结果相比较(A' 与 B' 对中点对称,如图 20 所示).如果 0.618 处较 0.382 处的结果为优,那么就从 0.382 处剪开,把剩下的 $A'B$ 作为新的试验区, B' 点成为新试验区的 0.382 处.将 $A'B$ 对折,找出与 B' 对称于中点的 B'' 点, B'' 点即为新试验区的 0.618 处,再对 B' 、 B'' 的试验结果作比较.如 B'' 点较 B' 点优,再从 B' 点处剪开,将剩下的区域 $B'B$ 作为新试验区.如此重复下去,直到获得最佳点.

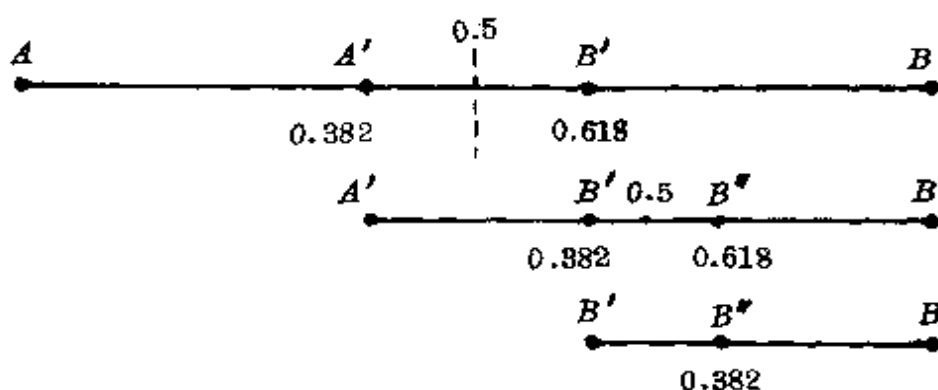


图 20 单因素对折法

2. 三种无限分割

如果被分割成的单元是一个无限小量,这种分割方法就是属于无限分割.根据分割成的单元所用的参数不同,可分成下列三种:

(1) 线分割

对线段进行分割称为线分割.分割出来的单元线段称为“线元”,用 Δl 表示.

应该注意,线分割并不只局限于运动中的路径.广义地说,所分割成的单元只需用一个参量表示,都可称为线分割.例如对一段时间 t ,可分割成许多元段,即

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots$$

在中学物理中有很多概念是根据线分割来定义的.例如:

匀速直线运动——质点沿直线运动,如果在任何相等的时间内通过的位移都相等,这种运动就叫做匀速直线运动.

匀速圆周运动——质点沿圆周运动,如果在任何相等的时间内通过的弧长都相等,这种运动就叫做匀速圆周运动.

显然,这两个定义中包含的最基本的思想方法是:对运动的时

间作均匀分割,如图 21(a)、(b)中, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots = \Delta t_n$,然后比较对应的位移或弧长 $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$ 的大小,如果满足条件

$$\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s_3 = \dots = \Delta s_n,$$

或 $\widehat{\Delta s_1} = \widehat{\Delta s_2} = \widehat{\Delta s_3} = \dots = \widehat{\Delta s_n},$

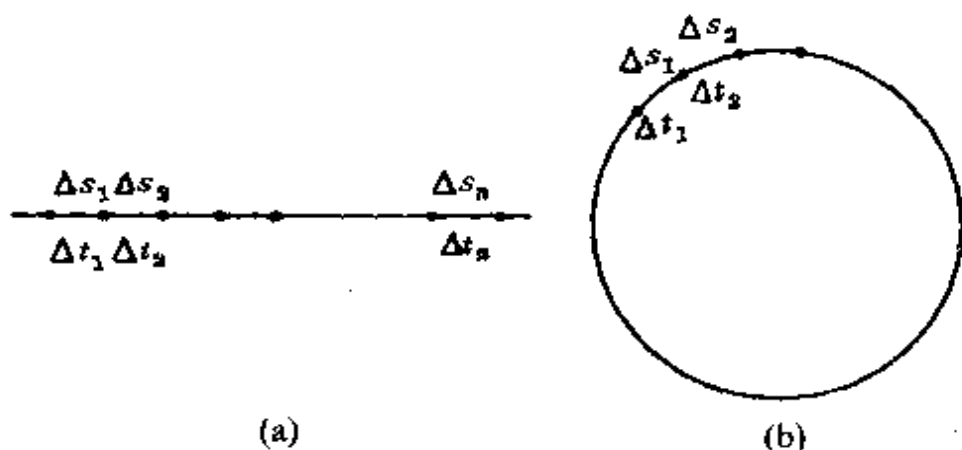


图 21

那么对应的运动就称为匀速直线运动或匀速圆周运动。

被分割的时间单元越短,所定义的运动越准确.当 Δt 趋于无限小时,得到的就是严格的匀速直线运动或匀速圆周运动。

又如,匀变速直线运动——质点沿直线运动,如果在相等的时间内速度的变化都相等,那么这种运动叫做匀变速直线运动。

定义中采用的基本思想方法,也是对时间进行均匀分割,然后比较各元段中速度的变化 $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3, \dots$ 的大小,如果满足条件:

$$\Delta v_1 = \Delta v_2 = \Delta v_3 = \dots = \Delta v_n,$$

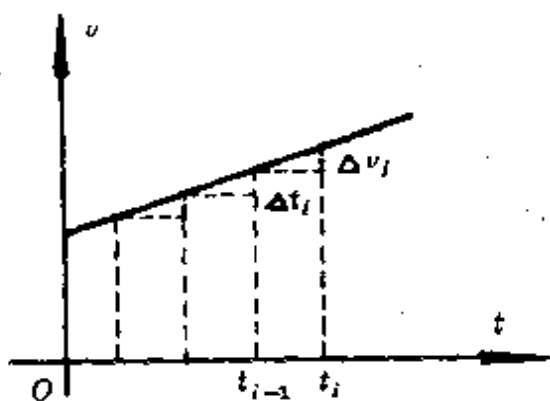


图 22

这个质点就做匀变速直线运动,反映在质点运动的 $v-t$ 图上,则如图 22 所示.

同样道理,当分割的时间单元越短,定义的运动越准确.当 Δt 趋于无限小时,得到的是严格的匀变速直线运动.

(2) 面分割

对面积进行分割,称为面分割.所分割出来的面积单元称为“面元”,用 ΔS 表示.一个面元通常需用两个参量表示.

根据面分割中所采用面元的不同,常见的有这样几种:

梯形(矩形)分割——用平行线将某个平面分割成许多曲边梯形(或矩形)的一种方法,如图 23 所示.

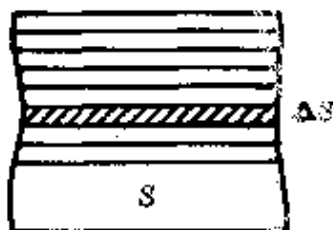


图 23

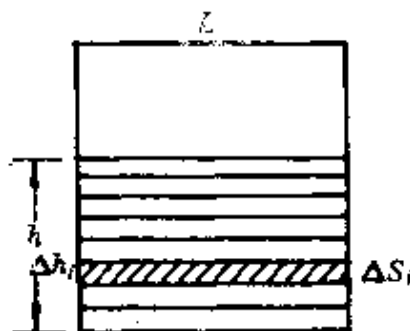


图 24

例如,计算竖立在水中的水闸闸门所受水的静压力时,由于闸门各处浸入水中的深度不同,水的静压强不同,我们可将闸门进行分割,见图 24.对于每一面积元 ΔS_i ,由于压强变化不大,我们可以看成压强恒定,因而对于面元 ΔS_i 所受压力可表示为

$$\Delta F_i = p_i \Delta S_i = \rho g h_i \Delta S_i,$$

其中 $\Delta S_i = \Delta h_i \cdot L$.

闸门所受压力 F 为各面元所受压力之和,即

$$F = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + \cdots + \Delta F_n$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho g h_1 \Delta h L + \rho g h_2 \Delta h L + \cdots + \rho g h_n \Delta h L \\
 &= \rho g \Delta h \Delta h L + \rho g 2 \Delta h \Delta h L + \cdots + \rho g n \Delta h \Delta h L \\
 &= \rho g \Delta h L (\Delta h + 2 \Delta h + 3 \Delta h + \cdots + n \Delta h) \\
 &= \rho g \Delta h L \frac{\Delta h + n \Delta h}{2} n.
 \end{aligned}$$

因 $n \Delta h = h$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta h \rightarrow 0$, 故得

$$F = \frac{1}{2} \rho g h^2 L \quad \text{或} \quad F = \frac{1}{2} p S = \bar{p} S.$$

式中 $S = hL$ 为浸入水中部分闸门面积, $p = \rho g h$ 为闸门浸入深度 h 处水的静压强. 上式表明: 直立在水中的一个平面 S 所受水的静压力, 等于这个平面浸入部分中心处的压强与浸入水中的面积的乘积.

环形分割——将平面分割成许多圆环. 如图 25 所示.

例如, 在研究环状圆板的热膨胀(或热应力)等问题时需对它作环形分割.

角分割——将角度进行分割, 如图 26 所示.

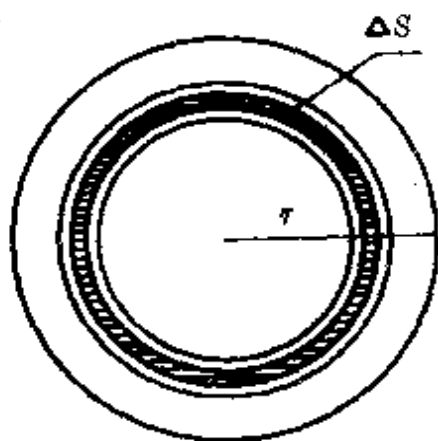


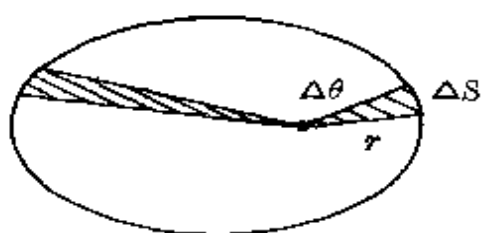
图 25



图 26

例如, 在研究行星的椭圆运动时, 可用椭圆轨道的焦点为顶

点,对行星运动的轨道平面进行角分割,如图 27 所示.若设连接焦点至行星的矢径 r 在 Δt 时间内扫过的面积 ΔS ,则得行星的面积速度



$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} r \cdot r \Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{1}{2} r v.$$

图 27

根据开普勒行星运动第二定律:行星绕太阳沿椭圆轨道运动时在相同的时间内连接行星和太阳的矢径扫过的面积相等.于是由上式可知:在近日点处(r 小),行星运动得快;在远日点处(r 大),行星运动得慢.

(3) 体分割

对体积进行分割称为体分割.分割出来的体积单元称为“体积元”,用 ΔV 表示.

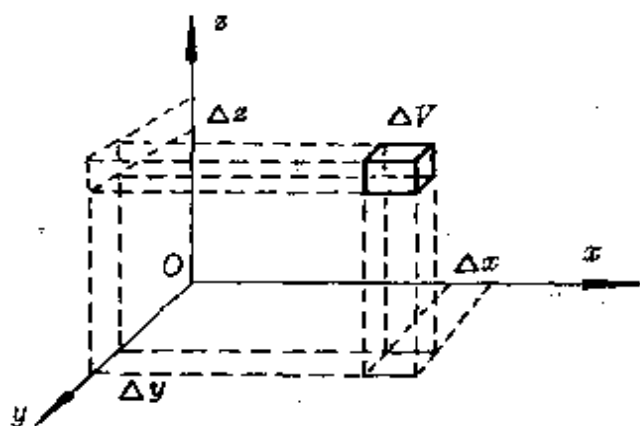


图 28

在实际问题中,所分割的体积元可以有多种形式,其中最常见的是正交体分割.如图 28 所示,分割出来的体积元在三维正交坐标系中可表示为

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z.$$

此外,还可以有球体分割、柱体分割等不同方法.它们的体积元的表示方法也不同.

例如,球体分割中,常在球面上取一面元 ΔS ,以它为底构成一球锥体,如图

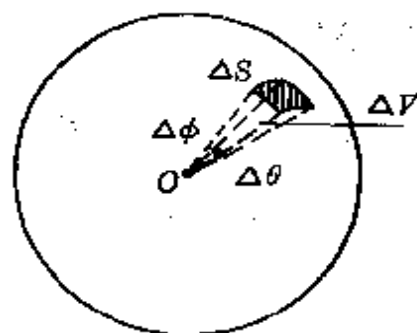


图 29

29所示.因此体积元 ΔV 可表示为

$$\Delta V = \frac{1}{3} r \Delta S,$$

或者
$$\Delta V = \frac{1}{3} r^3 \Delta\theta \Delta\phi.$$

在柱体分割中常采用如图 30 所示的几种方法,对应于(a)、(b)、(c)三种分割,其体积元 ΔV 分别为

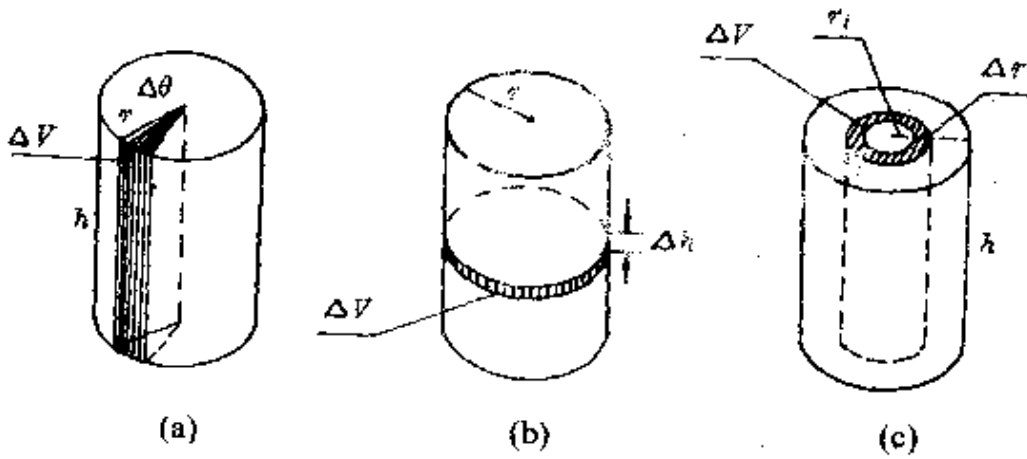


图 30

$$\Delta V = \frac{1}{2} r^2 h \Delta\theta,$$

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta h,$$

$$\Delta V = 2\pi r_i h \Delta r.$$

体分割适用于立体的研究对象.例如,在物体重心概念的引入中,我们可以把整个物体分割成许多小体积元 $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \dots, \Delta V_n$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时,每一个小体积元的体积趋向无限小,都可以看成

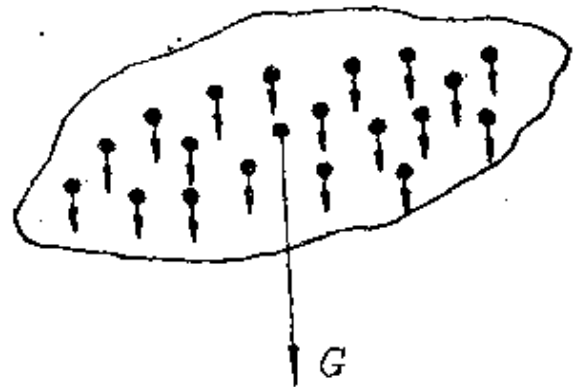


图 31

一个质点.每个质点所受重力的合力作用点,就称为物体的重心(图 31).

3. 四种典型逼近

逼近就是“靠拢”的意思,指的是在事物的发展变化过程中向某个确定值“靠拢”(或“趋近”).在研究和解决具体物理问题中常见的有这样几种逼近情况:

(1) 位置逼近

物体运动变化中不断靠拢某个位置,称位置逼近.

例如,一个物体从位置 A 出发以初速 v_0 沿直线运动,最终静止于 B ,如图 32 所示.在这一过程中,物体的位置不断逼近 B ,各个不同时刻对 B 点的距离 s_0 、 s_1 、 s_2 、 s_3 、 \dots 、 s_n 不断减小而逼近于零,物体的运动速度则由 v_0 逐渐减小逼近于零.

位置逼近可以是单一方向上的逼近,也可以是双向逼近.比如,对于一个有阻尼的单摆(图 33).从图中我们可以清楚地看到摆球的位置随时间的变化从两个不同的方向逼近于平衡位置.

(2) 直线逼近曲线

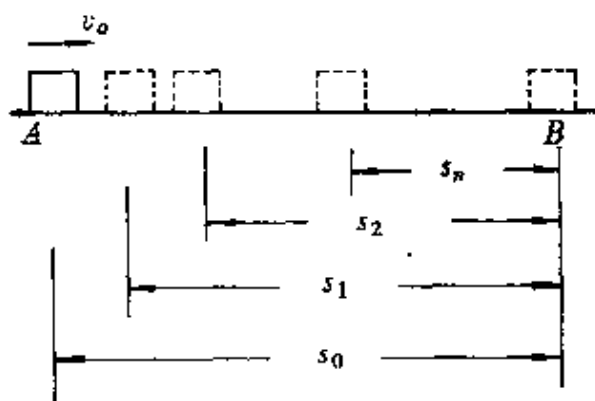


图 32 单向位置逼近

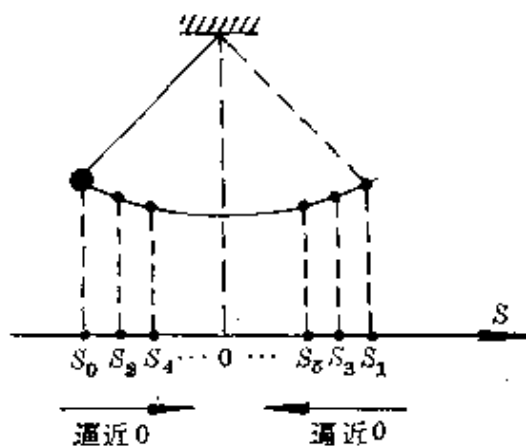


图 33 双向位置逼近

任意一条曲线,在无限分割的条件下,曲线上任意一微元 Δl ,都可以看成一条直线,称为直线逼近曲线,如图 34. 根据这个道理,对于任何一种曲线运动,在无限分割的情况下,曲线上任一微元上的运动,都可以用直线运动规律来描述.

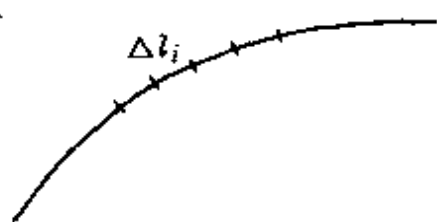


图 34

例如,当物体沿曲线从 A 运动到 B ,为了计算其外力 F 的功,我们可以应用曲线逼近直线的方法,将曲线 AB 分割成 n 等份.当 $n \rightarrow \infty$ 时,对于任意一微元 Δl_i ,可视为一直线.设在微元 Δl_i 中外力做功为 ΔW_i , 则 $\Delta W_i = F \cdot \Delta l_i \cos \alpha$.

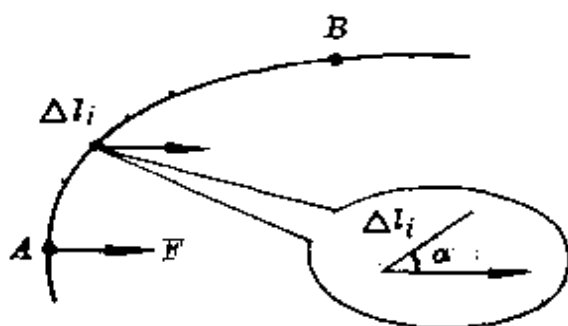


图 35

在 A 运动到 B 的过程中,外力 F 所做的总功为

$$W = \sum \Delta W_i = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n.$$

由此可见,在无限分割的条件下,应用直线逼近曲线的方法,可以将直线运动的规律应用于曲线运动之中,从而为曲线运动问题的解决铺平了道路.

(3) 割线逼近切线

对于弧线 AB ,在 B 点逼近 A 点的过程中,其割线 AB 与通过 A 点的切线 AB' 间的夹角 α 逐渐减小,当 B 进入 A 点时,割线 AB 与切线 AB' 重合,如图 36.我们称这一过程为割线逼近切线.

在物理图象中,曲线的割线和切线的斜率往往具有极其丰富的物理意义,割线逼近切线的过程往往与特定的物理过程相对应.

比如：

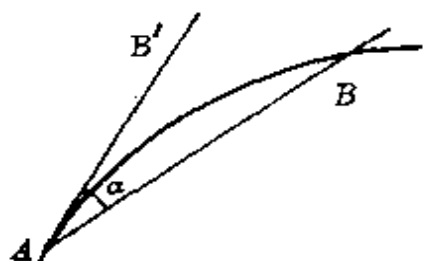


图 36

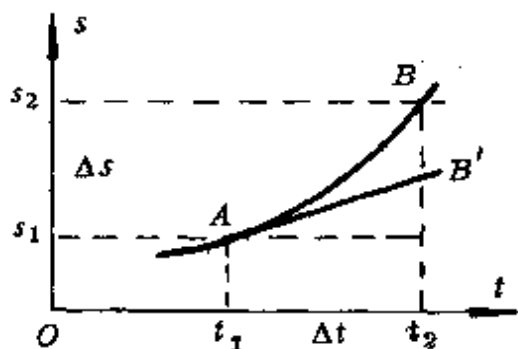


图 37

某物体运动的位移—时间图象如图 37 所示. 与图线上 A 、 B 两点所对应的时刻和位移分别为 t_1 、 t_2 和 s_1 、 s_2 . 过 A 点作割线 \overline{AB} , 其斜率

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

它表示了运动物体在时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内的平均速度.

如果令时间 Δt 逐渐减小, 则 B 点将逐渐靠近 A 点. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 无限逼近 A , 此时的割线 AB 就与过 A 点的切线 AB' 重合. 该切线的斜率就等于割线的斜率在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限. 在数学上可表示为

$$k' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

它的物理意义就是: 运动物体在某一时刻 t_1 (或某一位置 A) 的瞬时速度, 就是包括该时刻 (或该位置) 的极短时间 Δt (或极短位移 Δs) 内的平均速度.

由此可见, 图 37 中割线 AB 向切线 AB' 逼近的过程对应着平均速度向瞬时速度转化的过程.

又如,图 38 所示为晶体二极管的正向伏—安特性曲线,与图中 A 、 B 两状态对应的电压、电流值分别为 U_1 、 U_2 和 I_1 、 I_2 . 则割线 AB 的斜率

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{I_2 - I_1}{U_2 - U_1} = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{1}{R}.$$

它表示了在外加电压 U_1 至 U_2 (或对应的电流 I_1 至 I_2) 区间内这个晶体二极管的平均电阻的大小.

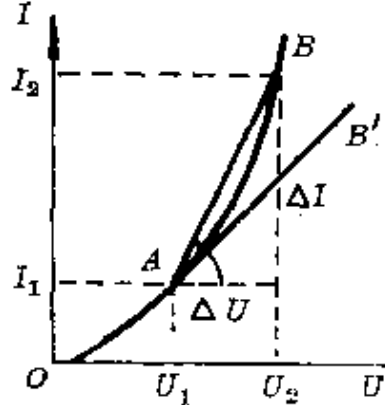


图 38

现在令外加电压的变化 ($U_2 - U_1$) 逐渐减小, 对应的电流强度的变化 ($I_2 - I_1$) 也逐渐减小. 反映在图线上, B 点将逐渐靠近 A 点. 当 $\Delta U \rightarrow 0$ 时, B 点无限逼近于 A 点, 割线 AB 将无限逼近于过 A 点的切线 AB' . 用数学式表示为

$$k' = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} k = \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{1}{R_A}.$$

它的物理意义就是: 晶体二极管的伏—安特性曲线上某点的斜率大小反映了晶体二极管在该状态时的电阻. 因为晶体二极管的伏—安特性曲线并非直线, 所以在不同的工作状态下有不同的电阻. 通常把具有这种电学特性的器件称为非线性元件.

(4) 矩形逼近曲边梯形

在无限分割的条件下, 曲边梯形向矩形的过渡, 我们把它称为矩形逼近曲边梯形.

例如, 某物理量 x 、 y 间的函数关系为

$$y = f(x).$$

函数图象如图 39. 为了确定在区间 $[x_1, x_2]$ 曲线与 x 轴之间所夹曲边梯形面积的值, 我们可将区间 $[x_1, x_2]$ 分成 n 等份. 以每

一部份长 Δx 为底作小矩形，如图 39 中斜线部分的图形。设各小矩形面积依次为 ΔS_1 、 ΔS_2 、 ΔS_3 、 \dots 。当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\Delta x \rightarrow 0$ ，小矩形的面积 ΔS_1 、 ΔS_2 、 ΔS_3 、 \dots 将分别逼近曲线与 x 轴之间所夹的小曲边梯形的面积 $\Delta S_1'$ 、 $\Delta S_2'$ 、 $\Delta S_3'$ 、 \dots 。各

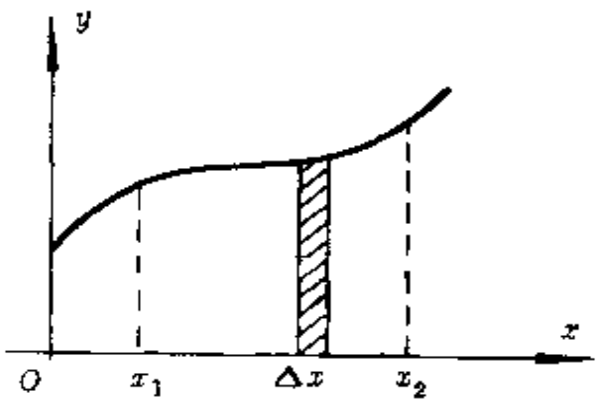


图 39

小矩形的面积之和将逼近在区间 $[x_1, x_2]$ 内曲线与 x 轴间所夹的面积 $S_{x_1 \rightarrow x_2}$ ，即

$$S_{x_1 \rightarrow x_2} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \dots + \Delta S_n.$$

矩形逼近曲边梯形的过程，常与多种特定的物理过程相对应。通过对时间（或其他参量）的无限分割，可以实现不均匀变化向均匀变化的转化。

例如，已知一物体做变速直线运动，速度随时间的变化用函数 $v = f(t)$ * 表示，其 $v-t$ 图象如图 40 中曲线 AB 所示。

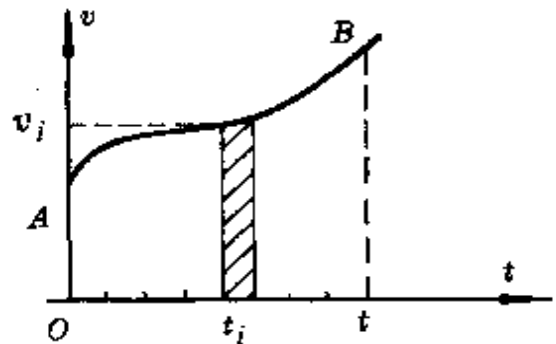


图 40

为了计算在 $0-t$ 时间内物体的位移，可以将时间 t 分割成 n 等份。在任意一个等分段 Δt_i 内，物体仍做变速运动，但速度的变化已

较小。当分割的份数 $n \rightarrow \infty$ 时，每一时间分段 $\Delta t_i \rightarrow 0$ ，在这极短时

* $f(t)$ 表示以 t 为自变量的函数，它可以有不同的形式，如 $v = kt$ 、 $v = kt^2$ 等。

间内物体的速度变化已极小,可以认为物体做匀速运动.

由于匀速直线运动在某段时间内的位移,等于相应时间内速度图线下方的一块面积(如图 41 中用斜线所示),所以上述变速运动在极短时间分段内的位移

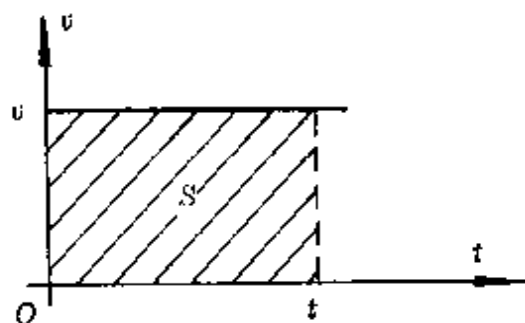


图 41

$$\Delta s_i = v_i \Delta t_i = f(t_i) \Delta t_i .$$

因而,在整个时间 t 内,这个变速运动物体的位移可表示为

$$\begin{aligned} s &= \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \cdots + \Delta s_n \\ &= f(t_1) \Delta t_1 + f(t_2) \Delta t_2 + f(t_3) \Delta t_3 \\ &\quad + \cdots + f(t_n) \Delta t_n . \end{aligned}$$

上述过程就是用 n 个小矩形面积之和去逼近曲边梯形的面积 S . 这一逼近的物理本质意味着:在时间区段 $\Delta t \rightarrow 0$ 的条件下,一个变速直线运动与匀速直线运动等价,从而实现了不均匀向均匀的转变.

四、分割与逼近在中学物理 学习中的指导作用

分割与逼近的思想方法在中学物理学习中具有十分重要的意义.它可以用来研究整体的各个部分以及各部分与整体间的联系;反映不均匀的状态或变化过程;实现从有限向无限的过渡等.它为概念的理解、规律的导出和实验现象的剖析与研究都提供了极为有力的武器.

下面,我们分几方面阐述分割与逼近的思想方法在物理学习中的指导作用.

1. 帮助建立和理解概念

(1) 一个难以理解的概念——瞬时速度

如果问你:什么叫瞬时速度?

也许你会根据书本上的定义流利地背诵出来:运动物体在某一时刻(或某一位置)的速度,叫做瞬时速度.

如果再问你:什么叫运动物体在某一时刻(或某一位置)的速度?

也许你会愣住了.

查阅一下书本,可以发现,它往往用一辆做变速运动的汽车(或其他运动物体)来引入.如图 42 所示,设汽车沿直线做变速运

动,为了确定汽车经过 A 点时的瞬时速度,从 A 点起取一小段位移 AA_1 ,求出这段位移上的平均速度,这个平均速度可以近似地表示汽车经过 A 点的快慢程度.从 A 起所取的位移越小,例如位移取 AA_2 、 AA_3 等,所得的平均速度用来表示汽车经过 A 点快慢程度就越精确.当位移足够小时,或者说时间足够短时,所得的平均速度就等于汽车经过 A 点的瞬时速度了.

还可用数学语言作更精确的说明:在图 42 中,从 A 点起取一小段位移 Δs ,求出这段位移内的平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度趋近于某个固定的值——极限值,这个极限值就是汽车经过 A 点的瞬时速度.

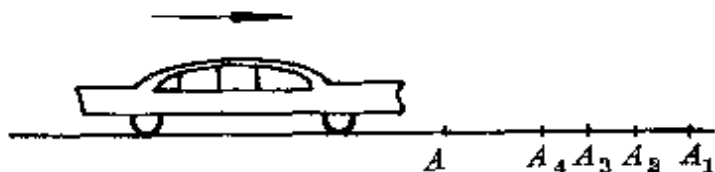


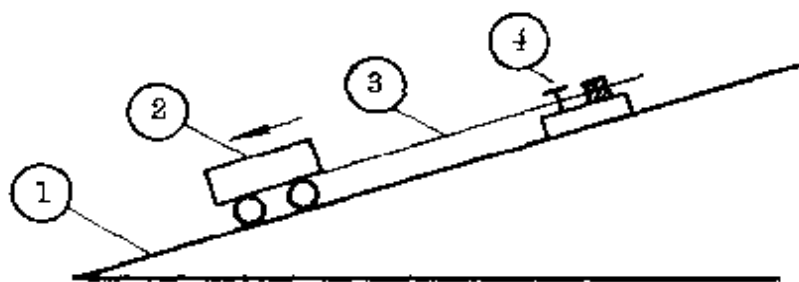
图 42

尽管一些书本中对瞬时速度的概念作了详尽的阐述,但是对于初学物理的中学生来说总是感到难以理解,思想上难以接受.究其原因,疑难之点主要有如下三条:

- ①为什么时间越短(或者位移越短)所得的瞬时速度越精确?
- ②为什么时间足够短时,所得的平均速度就是汽车经过 A 点的瞬时速度了? 足够短,究竟该多短?
- ③当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta s \rightarrow 0$,这时怎样去测量呢? 为什么 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 又趋近于一个确定值?

对于上述问题,我们可以通过如下实验,并应用逼近的方法结合实验去加以理解.

实验装置如图 43.



①斜面 ②小车 ③纸带 ④打点计时器

图 43

通过打点计时器,纸带记录了小车下滑过程中在位置 A 附近的运动情况(图 44).

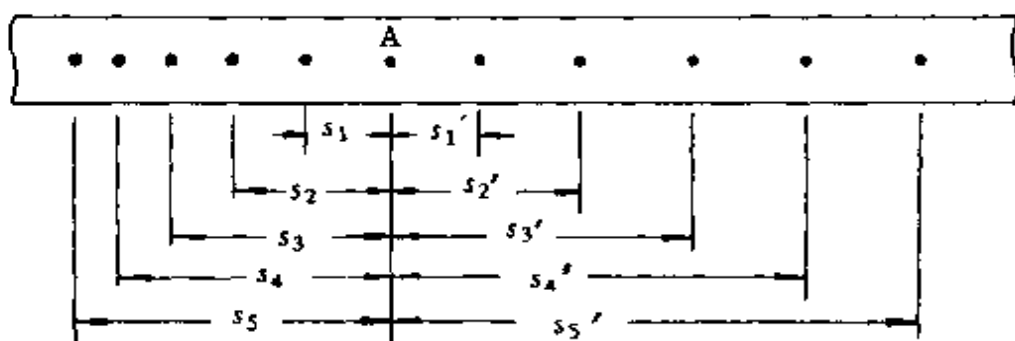


图 44

测量数据如下表所示,并计算出各位移段中的平均速度填入表中.

位移、速度 \ 时间	$5T$	$4T$	$3T$	$2T$	T
s_i (厘米)	5.90	4.91	3.83	2.62	1.37
s_i' (厘米)	7.93	6.20	4.55	2.92	1.40

续表

位移、速度 \ 时间	$5T$	$4T$	$3T$	$2T$	T
$\bar{v}_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t}$ (厘米/秒)	59.0	61.4	63.8	65.5	68.5
$\bar{v}_i' = \frac{\Delta s_i'}{\Delta t}$ (厘米/秒)	79.3	77.6	75.8	73.0	70.0
v_A (厘米/秒)	69.25				

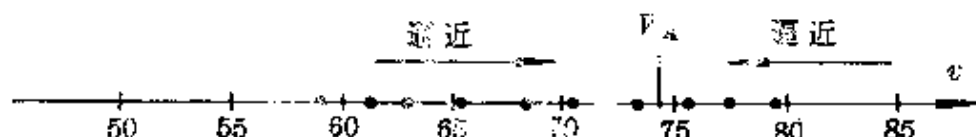


图 45

将 $v_1, v_2, \dots, v_5; v_1', v_2', v_3', \dots, v_5'$ 描述在数轴上, 如图 45.

从上述实验和计算结果中, 我们可以清楚地看到:

①当 Δt 从 $5T \rightarrow T$ 时, \bar{v}_i 从左边逼近 v_A , \bar{v}_i' 从右边逼近 v_A . 或者说, 当所取 Δt 越短时, 用这段内的平均速度来表示 A 点的瞬时速度也就越精确. 可以推理, 当 Δt 进一步减小时, \bar{v}_i 或 \bar{v}_i' 也就进一步逼近 v_A , 这正如书本中所说的, 当时间足够短时, 所得的平均速度就等于该时刻的瞬时速度了.

②时间足够短, 或用数学语言表述为 $\Delta t \rightarrow 0$, 在物理实验中, 只能是有限短. 如在上述实验中, 这足够短的时间决定于打点周期, 为: $T = 0.02$ 秒. 若要进一步使 $\Delta t \rightarrow 0$, 从而使 \bar{v}_i 或 \bar{v}_i' 进一步逼近 v_A , 则必须改善实验装置. 在上述实验中, 则必须提高电磁打点计时器的频率, 从而使纸带上两点间的时间间隔(或位移)进一步缩短, 以达到预定的实验目的.

③从上述测量中可以看出：当 Δt 足够短时， Δs 也将相应地变短，但不管怎样短，在物理实验精度可能达到的范围内， Δt 、 Δs 都将是一个有限小的值， $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 也将对应一个确定意义的值，即不断逼近于位置 A 的瞬时速度的真实值。

上述实验与数据处理告诉我们，逼近的过程，正是平均速度向瞬时速度的转化过程，在极限条件下，平均速度与瞬时速度也就等价了。

(2)为什么向心加速度的方向总是指向圆心

做匀速圆周运动的物体，其加速度的方向总是指向圆心，根据这一特征，把做匀速圆周运动的物体所具有的加速度命名为向心加速度。为什么做匀速圆周运动的物体，不论运动到什么位置，其加速度方向总是指向圆心？这也是许多中学生一直感到困惑的问题。但是，当我们应用逼近方法去揭示加速度的微观本质后，上面的困惑也就迎刃而解了。

设做匀速圆周运动的物体沿圆周从任意点 A 运动到 B (图 46)，速度的大小为 v 。在 A 点速度为 v_A ， B 点速度为 v_B 。从 A 点到 B 点速度的变化为 Δv 。

根据运动学中加速度的定义，物体由 A 运动到 B 的平均加速度为：

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

它的方向就是 Δv 的方向。显然，对应于不同的时间区段，平均加速度的方向也不同。

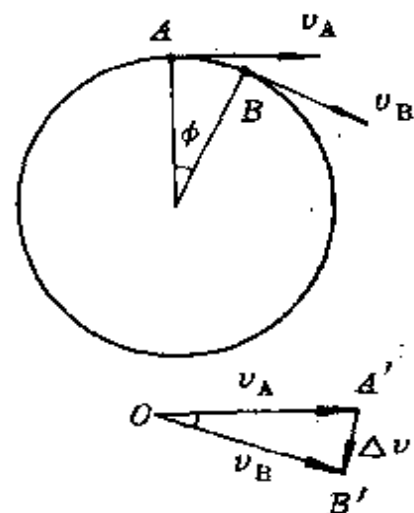


图 46

为了研究在 B 向 A 逼近的过程中, 平均加速度 \bar{a} 方向变化的情况, 可以作出相应的速度矢量三角形(图 46 下).

因物体做匀速圆周运动, 故 $v_A = v_B = v$, $\triangle OA'B'$ 为等腰三角形, $\angle OA'B' = \frac{\pi - \angle \phi}{2}$.

当 B 点向 A 点逼近的过程中, $\angle \phi \rightarrow 0$, 所以, $\angle O'A'B' \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

这就是说, 在极短时间内物体速度变化 Δv 的方向, 也就是加速度的方向逼近 v_A 的垂线方向. 所以, 在极限的条件下, 加速度的方向指向圆心.

由上述分析我们可以看到: 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 所对应的物理意义是:

物体由 A 运动到 B 时间内的平均加速度向 A 点的瞬时加速度转化, 即

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

加速度的方向不断逼近 v_A 的垂线方向, 在极限条件下, 即当 B 点进入 A 点时, A 点的加速度方向与 v_A 垂直, 即指向圆心.

(3) 如何理解简谐运动中的平均速度与瞬时速度

简谐运动是一种不均匀变化的变速运动, 对它的平均速度和瞬时速度的理解较困难. 它的瞬时速度的计算, 通常由振动方程借助微分运算得到. 现在, 我们利用逼近的方法, 也可以从振动图线上对简谐运动中的平均速度和瞬时速度得到直观的理解. 并可以通过初等极限运算得出瞬时速度值.

设一弹簧振子做简谐运动, 如图 47(a) 所示. 其位移与时间关系可表示为

$$x = A \cos \omega t,$$

其 $x-t$ 图象如图 47(b). 在时刻 t , 振子 M 距平衡位置的位移为 x , 在时刻 $t + \Delta t$, 振子 M 的位移为 $x + \Delta x$. 在图 47(b) 中对应于 C 、 D 两点.

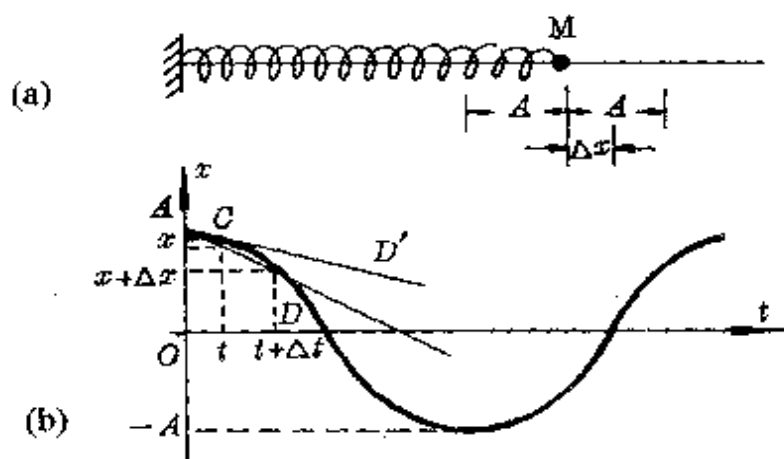


图 47

根据平均速度的定义, 在 Δt 时间内振子的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (1)$$

因为在图 47 中, 过 C 、 D 两点的割线斜率

$$k = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (2)$$

比较①②两式可知: 振动图线上与某段时间对应的两点(如 C 、 D 两点)的割线斜率 k 的值即为弹簧振子在这段时间中的平均速度值.

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 上述平均速度的极限就是瞬时速度, 即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

反映在图 47 中, D 点无限逼近 C 点, 割线 CD 逼近切线 CD' . 令切线的斜率为 k' , 则从数学上说, k' 就是 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 k 的极限, 即

$$k' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

它的物理意义表示：振动图线上过某点(如 C 点)的切线斜率 k' 的值等于振子 M 在该时刻 t 的瞬时速度值。

下面,我们通过极限运算进一步确定瞬时速度的大小:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A \cos \omega(t + \Delta t) - A \cos \omega t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A \cos \omega t \cos \omega \Delta t - A \sin \omega t \sin \omega \Delta t - A \cos \omega t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A \cos \omega t (\cos \omega \Delta t - 1)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A \sin \omega t \sin \omega \Delta t}{\Delta t} \\ &= A \cos \omega t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega}{2} \times 2 \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2}}{\omega \Delta t} - A \omega \sin \omega t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega \Delta t} \\ &= 0 - A \sin \omega t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t} = -A \omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

所以, $v = -A \omega \sin \omega t$.

这就是前面用微分运算得到的结果。

(4) 如何理解线圈在磁场中转动时,线圈中感应电动势的平均值 $\bar{\mathcal{E}}$ 与即时值 \mathcal{E}

为了研究方便,假设闭合线圈在一匀强磁场中绕垂直于磁感线的轴 OO' 匀速旋转(图 48), 磁场磁感应强度为 B , 线圈转动的角速度为 ω , 若以线圈平面经过平行于磁感线的位置开始计时, 则通过线圈的磁通量为

$$\phi = \phi_m \sin \omega t,$$

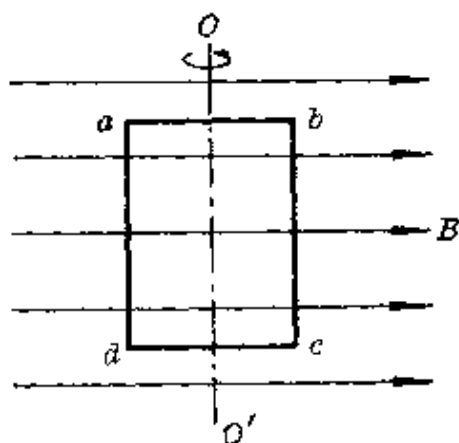


图 48

其中： $\phi_m = BS$. 作 $\phi-t$ 图象如图 49.

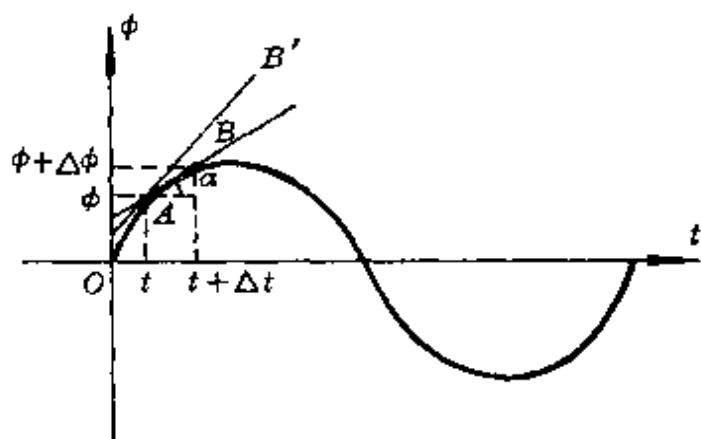


图 49

若在时刻 t 穿过线圈的磁通量为 ϕ , 经过 Δt 时间后磁通量为 $\phi + \Delta\phi$. 上述时刻分别对应于图 49 中 $\phi-t$ 图线中的 A 、 B 两点.

过 A 、 B 两点引割线 AB , 其斜率

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

显然, 割线斜率 k 即为线圈在 Δt 时间内产生的平均电动势 $\bar{\mathcal{E}}$.

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\bar{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$. 即

$$\mathcal{E} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathcal{E}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

上述情况反映在图 49 中, 我们可以看到: 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 点将逼近于 A 点, 割线 AB 将逼近过 A 点的切线 AB' . 设切线 AB' 的斜率为 k' , 则

$$k' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

显然, 过 A 点的切线斜率 k' 的值即为线圈在时刻 t 的感应电动势的瞬时值 \mathcal{E} .

下面,我们通过简单的运算,进一步确定瞬时感应电动势 \mathcal{E} 的大小.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \sin \omega(t + \Delta t) - \phi_m \sin \omega t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \sin \omega t \cos \omega \Delta t + \phi_m \cos \omega t \sin \omega \Delta t - \phi_m \sin \omega t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \sin \omega t (\cos \omega \Delta t - 1)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_m \cos \omega t \sin \omega \Delta t}{\Delta t} \\ &= \phi_m \sin \omega t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\Delta t} + \phi_m \omega \cos \omega t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega \Delta t}. \end{aligned}$$

因
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega}{2} \times 2 \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega \Delta t} = 1,$$

故
$$\mathcal{E} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \phi_m \omega \cos \omega t.$$

由上分析可以看到:在 $\phi - \omega t$ 图中,某段时间内曲线的割线逼近切线的过程,就相应于平均感应电动势 $\bar{\mathcal{E}}$ 逼近瞬时感应电动势 \mathcal{E} 的过程.

在 $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 时刻,通过线圈内的磁通量 $\phi = 0$. 过上述时刻点,作 $\phi - t$ 曲线的切线,如图 50 所示,它们与 t 轴成 45° 夹角,其斜率即为该时刻线圈的瞬时电动势,其值为

$$\mathcal{E} = \phi_m \omega \cos \omega t = \phi_m \omega.$$

对应于 $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 时刻,通过线圈内的磁通量 $\phi = \phi_m$.

过上述时刻点作切线,它与 t 轴平行,其斜率即为该时刻线圈的瞬时电动势,其值为

$$\mathcal{E} = \dot{\phi}_m \omega \cos \omega t = 0.$$

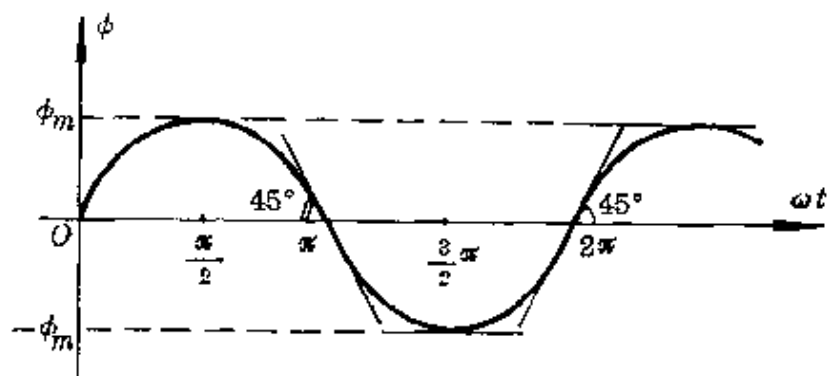


图 50

由以上分析我们不难发现：线圈的感应电动势 \mathcal{E} 与通过线圈的磁通量无关，而只与通过线圈的磁通量的变化率 $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 有关。

2. 指导认识和掌握规律

(1) 变速直线运动的位移

物体做匀速直线运动时，位移公式是

$$s = vt.$$

它可以用 $v-t$ 图象中速度图线与 t 轴之间所夹面积来表示(图 51)。

当物体做变速直线运动时，它的位移又怎样来计算呢？

我们先讨论匀变速直线运动。

根据速度公式

$$v_t = v_0 + at,$$

作出匀变速运动的 $v-t$ 图象，如图 52。

将 t 轴分成 n 等份，设各分点分别为 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t$ 。在

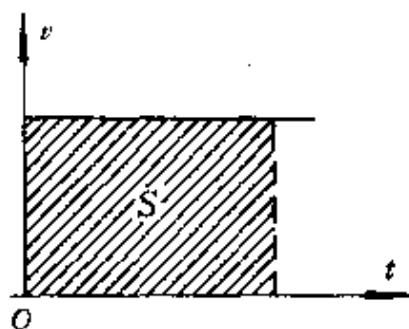


图 51

每一微小的时间间隔 Δt 中, 由于时间很短, 因而速度变化很小. 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 我们可以认为在这一微小段时间中, 物体做匀速直线运动. 因而在 Δt 时间内发生的位移 Δs 满足

$$\Delta s = v_i \Delta t.$$

在 $v-t$ 图象中, Δs 的值对应着一个小矩形面积的值.

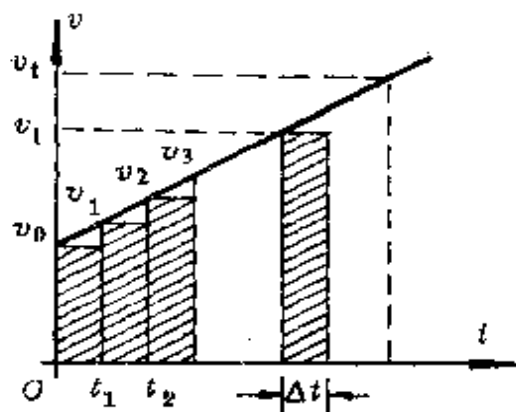


图 52

因为在 $0 \sim t$ 时间内, 物体发生的位移为各微小时间间隔所对应的小矩形面积之和. 即

$$\begin{aligned} s &= \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \cdots + \Delta s_n \\ &= v_0 \Delta t + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \cdots + v_{n-1} \Delta t, \end{aligned}$$

式中不同时刻的速度依次为:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + a\Delta t, \\ v_2 &= v_1 + a\Delta t = v_0 + 2a\Delta t, \\ v_3 &= v_2 + a\Delta t = v_0 + 3a\Delta t, \\ &\dots\dots \\ v_{n-1} &= v_0 + (n-1)a\Delta t, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} s &= v_0 \Delta t + (v_0 + a\Delta t)\Delta t + (v_0 + 2a\Delta t)\Delta t + \cdots \\ &\quad + [v_0 + (n-1)a\Delta t]\Delta t \\ &= \left(nv_0 + \frac{n^2 + n}{2} a\Delta t \right) \Delta t \\ &= n\Delta t v_0 + \frac{n^2}{2} a\Delta t^2 + \frac{n}{2} a\Delta t^2. \end{aligned}$$

因 $n\Delta t = t$, 即 $\Delta t = \frac{t}{n}$,

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{n}{2} a \Delta t^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} a t \Delta t = 0.$$

故 $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, 或 $s = \frac{v_0 + v_t}{2} t$.

上式表明:匀变速直线运动的位移 s , 可用图 52 中 $v-t$ 直线与 t 轴之间所包围的面积来表示.

上述推理过程,用数学语言可作如下表述:

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta t \rightarrow 0$, 此时在 $v-t$ 图象中小矩形面积将逼近于相同时间间隔对应的小梯形面积. 因而, 各小矩形面积之和也将逼近于整个大梯形的面积. 这种逼近过程的物理意义为: $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 一个匀变速直线运动可以转化为一个匀速直线运动. 由此可见, 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 匀速直线运动与匀变速直线运动符合一个统一的模式.

对于任意的变速直线运动, 我们可根据同样的道理推知, 它在某段时间 t 内的位移, 一定等于 $v-t$ 图中速度图线下方相应时间区段内的一块面积. 所以, 任何变速直线运动位移的计算实际上与匀速直线运动有着内在的一致性.

(2) 恒力的功与变力的功

物体在恒定的外力 F 作用下发生一段位移 s , 外力在这段位移上对物体做的功为

$$W = F s \cos \alpha.$$

其中 α 为 F 、 s 之间的夹角.

当 F 与 s 同方向时, 上式变为

$$W = F s.$$

由 $F-s$ 图象(图 53), 我们可以知道, 直线与 s 轴之间所夹面积即为外力做功的数值.

当物体做曲线运动或外力 F 随时间 (或位移) 发生变化时, 外力所做的功 W 又怎样确定呢? 这时必须作如下两方面的转化, 即曲与直的转化和变力与恒力的转化.

现就中学物理中典型的做功问题分述如下:

① 圆周运动中向心力做功特点

做圆周运动的物体, 其向心力可以是单一的外力, 也可以是几个外力的合力.

例如, 一辆汽车沿半径为 R 的水平圆弧道路转弯. 汽车所受静摩擦力 f 作为圆周运动的向心力, 如图 54. 在汽车转弯的过程中, 摩擦力的大小不变, 但方向在不断地变化. 因而, 对向心力做功的计算, 就是一个变力做功问题.

为了计算向心力的功, 我们把圆弧轨道分成 n 等份, 圆弧的各分点分别为 A 、 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_{n-1} 、 B . 对于每一小段圆弧, 由于长度很短, 因而弯曲很小, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 每小段圆弧 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 逼近对应的弦 $\overline{A_i A_{i+1}}$. 物体从 A_i 运动到 A_{i+1} 的过程中, 向心力 f 所做的功 ΔW_i 为

$$\Delta W_i = f \overline{A_i A_{i+1}} \cos \alpha,$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{\pi - \phi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}.$$

这里的 ϕ 为 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 所对的圆心角. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\widehat{A_i A_{i+1}} \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha \rightarrow 0$.

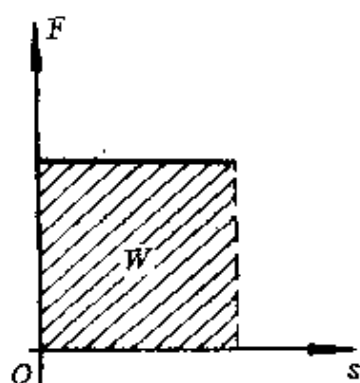


图 53

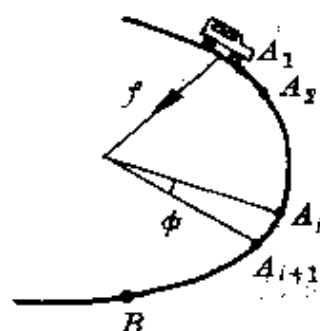


图 54

故 $\Delta W_i = f \overline{A_i A_{i+1}} \cos \alpha = 0$.

汽车在做圆周运动的整个过程中,向心力 f 所做的总功为

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \cdots + \Delta W_n = 0.$$

由此可得如下结论:

物体做圆周运动的过程中,向心力不做功.

对其他所有的匀速圆周运动,如圆锥摆运动、匀强磁场中带电粒子的匀速圆周运动等,我们可得出同样的结论.因此,所有匀速圆周运动中的向心力都不做功.

②重力做功的特点

在重力场中,一个质量为 m 的物体沿任意路径从位置 A 运动到 B (见图 55). 物体受到的重力 mg 为一恒力. 为了计算曲线型路径上重力的功,我们应用曲线逼近直线方法作如下处理.

首先,将曲线 AB 分成 n 等份,各分点分别为 A 、 A_1 、 A_2 、 A_3 、 \cdots 、 A_{n-1} 、 B . 当 $n \rightarrow \infty$ 时,各微段的路程 $\Delta s \rightarrow 0$,我们可以认为 Δs 为一直线,用直线运动中外力做功的规律来计算.

对于任意微段,物体从 A_i 运动到 A_{i+1} ,重力做功为

$$\Delta W_i = mg \overline{A_i A_{i+1}} \cos \alpha.$$

将 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 分解成平行于重力方向的分量 Δh_i 、垂直于重力方向上的分量 $\Delta h_i'$, 则

$$\overline{A_i A_{i+1}} \cos \alpha = \Delta h_i,$$

因而 $\Delta W_i = mg \Delta h_i$.

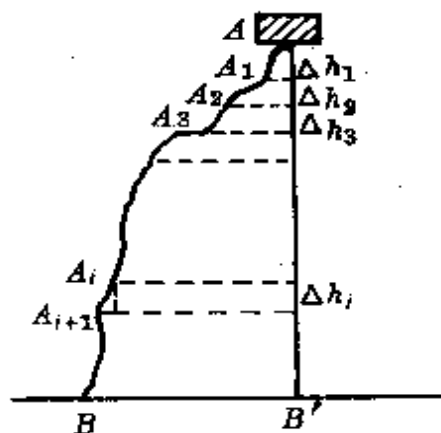


图 55

物体 m 从 A 沿任意路径运动到 B 的过程中,重力所做的总功为

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \cdots + \Delta W_n \\ &= mg\Delta h_1 + mg\Delta h_2 + \cdots + mg\Delta h_n \\ &= mg(\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \cdots + \Delta h_n) \\ &= mg\Delta h. \end{aligned}$$

或者表达为

$$W = mg(h_2 - h_1).$$

根据上述推导,我们可以得出如下结论:

重力做功只与始末位置有关,而与通过的路径无关.

③ 弹力做功的特点

根据胡克定律,弹簧形变时产生的弹力 F 与形变(伸长量或缩短量) x 成正比,用公式表示为 $F = kx$,因而在研究弹力做功(或外力克服弹力做功)时,必须首先实现变力与恒力的转化.

如图 56, O 点为弹簧振子的平衡位置,在外力作用下弹簧的伸长量从 x_1 增加到 x_2 .

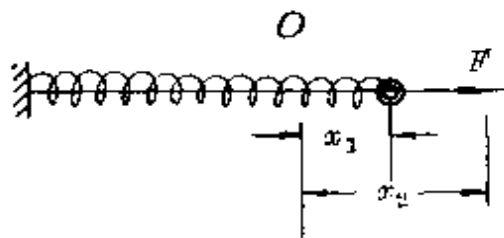


图 56

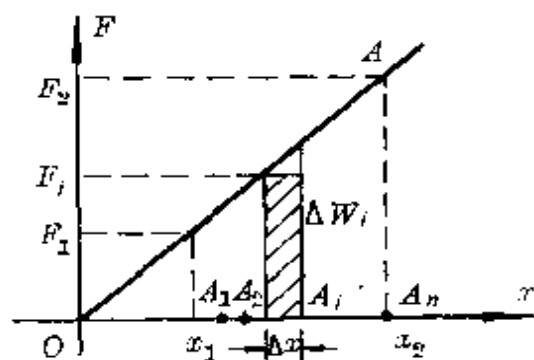


图 57

作出 $F-x$ 图线如图 57,将弹簧振子的位移 $(x_2 - x_1)$ 分成 n

等份,各分点分别为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$, 各相邻分点间位移为 Δx . 在各微段中, 由于位移很小, 可以认为在这一微段中弹力的变化很小. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$, 可以认为弹力为一恒力, 故可用恒外力做功的公式来计算.

在任意一微段上外力做功为

$$\Delta W_i = F_i \Delta x.$$

在 $F-x$ 图线中, ΔW_i 为一小矩形面积. 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 则小矩形面积逼近对应微段小梯形面积.

在 $x_2 - x_1$ 的整个位移中, 弹力 F 所做的总功为

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots + \Delta W_n,$$

式中 $(\Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots + \Delta W_n)$ 在 $F-x$ 图线中为各小段位移所对应的小矩形面积之和. 在 $n \rightarrow \infty$ 的条件下各小矩形面积之和逼近于它所对应的梯形的面积. 故可得

$$W = \frac{1}{2} (F_1 + F_2) (x_2 - x_1).$$

其中 $F_1 = kx_1, F_2 = kx_2$, 于是上式可写成

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (kx_1 + kx_2) (x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2). \end{aligned}$$

当 $x_1 = 0$ 时, 上式转化为更简单的形式

$$W = \frac{1}{2} kx_2^2,$$

或写成 $W = \frac{1}{2} kx^2$.

这就是说, 在弹簧的伸长或压缩过程中, 弹力的功与相对于弹簧原长的形变量 x 的平方成正比.

不计弹簧的质量和进行缓慢形变时,弹簧中的弹力 F 和使它形变的外力 F' 大小相等.因此,用外力拉伸或压缩弹簧时做的功也与弹簧的伸长量或压缩量的平方成正比.

用外力拉伸或压缩弹簧时的功转化为弹簧的弹性势能.因此,弹性势能可表述为

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

④引力做功的特点

根据万有引力定律,地球对物体的引力为

$$F = G \frac{Mm}{R^2}.$$

它的大小随物体离开地心的距离 R 的变化而变化.因此,对引力做功的计算,必须设法将变力转化为恒力.

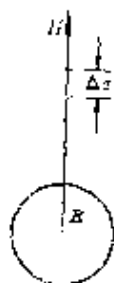


图 58

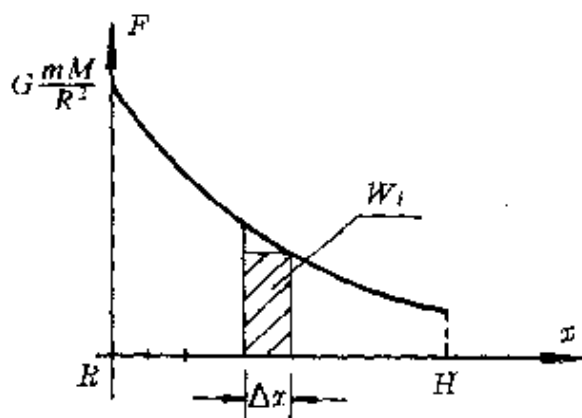


图 59

若一物体在外力作用下从地球表面移至离地球距离为 H 处, $H \ll R$ (图 58), 为了计算这一位移过程中地球引力所做的功, 可作地球引力 $F-x$ 图象, 见图 59. 将位移 H 分成 n 等份, 每一等份的位移为 Δx . 在每一等份 Δx 中, 因位移 Δx 很小, 因而引力变化不

大,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$, 我们可以认为在这一小段位移 Δx 中, 引力为一恒力, 因而引力所做的功 ΔW 可用恒力做功的公式来计算, 即

$$\Delta W_i = F_i \Delta x.$$

在 $F-x$ 图象中这一小段位移上引力的功为斜线部分小矩形面积.

因为从地球表面开始的各分点对地球中心的位移分别为

$$R,$$

$$R + \frac{H}{n} = R \left(1 + \frac{H}{nR} \right) \approx R \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{\frac{1}{n}},$$

$$R + 2 \frac{H}{n} = R \left(1 + \frac{2H}{nR} \right) \approx R \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{\frac{2}{n}},$$

.....

$$R + n \cdot \frac{H}{n} = R + H = R \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{\frac{n}{n}},$$

令 $q = \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{\frac{1}{n}}$, 显然 $q > 1$. 因为 $H \ll R$, 因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $q \rightarrow 1$, 上述各位移可分别写为

$$R, Rq, Rq^2, \dots, Rq^n.$$

每小段位移的长度为

$$R(q-1), R(q-1)q, R(q-1)q^2, \dots, R(q-1)q^{n-1},$$

因
$$\Delta W_i = F_i \Delta x = \frac{GmM}{(R+x)^2} \Delta x,$$

所以
$$W_{引} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots + \Delta W_n$$

$$= \frac{GmM}{R^2} R(q-1) + \frac{GmM}{R^2 q^2} Rq(q-1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{GmM}{R^2 q^4} Rq^2 (q-1) \\
& + \cdots + \frac{GmM}{R^2 q^{2n-2}} Rq^{n-1} (q-1) \\
& = \frac{GmM}{R} (q-1) \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots + \frac{1}{q^{n-1}} \right) \\
& = \frac{GmM}{R} (q-1) \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} \\
& = \frac{GmM}{R} \sqrt[n]{\frac{R+H}{R}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{H}{R}} \right) \\
& = GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right) \sqrt[n]{1 + \frac{H}{R}}.
\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{1 + \frac{H}{R}} \rightarrow 1$,

$$W_{引} = GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right).$$

在 $F-x$ 图象中, $W_{引}$ 的值即为曲线与 x 轴之间所夹的面积值.

同理, 在电量为 Q 的点电荷形成的电场中, 点电荷 q 从 r_1 运动到 r_2 (r_1, r_2 为 q 距 Q 的距离), 静电引力(或斥力)所做的功 W 可表示为

$$W_{电} = kQq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

有兴趣的读者可以自己推导一下.

⑤ 电场力做功的特点

假设在电场强度为 E 的匀强电场中, 一正电荷 q 从 A 沿任意

路径运动到 B , 如图 60.

电荷 q 在电场中所受电场力 $F = Eq$ 为一恒力, 为了计算电荷沿任意路径 AB 运动时电场力所做的功, 我们同样可以应用直线逼近曲线的方法, 实现“曲”向“直”的转化.

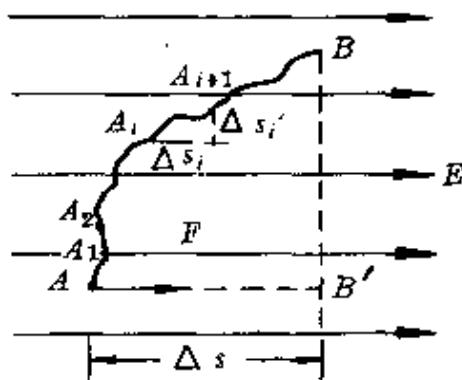


图 60

将任意路径 AB 分成 n 等份, 各分点分别为: $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, B$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 各微段可视为一直线. 因而, 可以应用直线运动的规律来处理.

对于任意微段 $A_i A_{i+1}$, 电场力做功为

$$\Delta W_i = Eq \overline{A_i A_{i+1}} \cos \alpha.$$

将位移 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 分解成平行于电场强度方向上的分量 Δs_i 和垂直于电场方向上的分量 $\Delta s_i'$. 其中 $\Delta s_i = \overline{A_i A_{i+1}} \cos \alpha$. 故可得

$$\Delta W_i = Eq \Delta s_i.$$

电荷 q 从 A 沿任意路径运动到 B , 电场力所做的总功为

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots + \Delta W_n \\ &= Eq \Delta s_1 + Eq \Delta s_2 + Eq \Delta s_3 + \dots + Eq \Delta s_n \\ &= Eq \Delta s. \end{aligned}$$

其中 Δs 为曲线 AB 在电场方向上的投影长度.

由上面的推导可知: 电场力做功只与始末位置有关, 而与通过的路径无关.

显然, 当 $\Delta s = 0$ 时, 即电荷 q 沿任意路径运动, 最终又回到原位置时, 电场力做功为零. 所以, 电荷在静电场中沿任意闭合路径运动一周, 电场力的功一定为零. 这是静电场的一个十分重要的特

性.

(3) 磁场中通电导体受力有效长度的确定

根据安培力公式,在磁感强度为 B 的匀强磁场中,垂直磁场放置一根长 l 的导体棒,当棒中通以电流强度为 I 的电流时,导体棒所受的磁场力(安培力)为

$$F = BIl.$$

若在匀强磁场中垂直磁场放置一根弯曲的通电导体,它所受的安培力又该怎样计算呢?

这时,就需要根据在无限小条件下,直线逼近曲线的道理,把弯曲的导体转化为直导线,然后再运用安培力公式进行计算.

为方便起见,我们先研究一根半径为 R 的半圆形导体棒的受力(假设导体棒受力时形状不变).

为了计算图 61 中半圆形通电导体所受磁场力的大小,我们作如下处理:

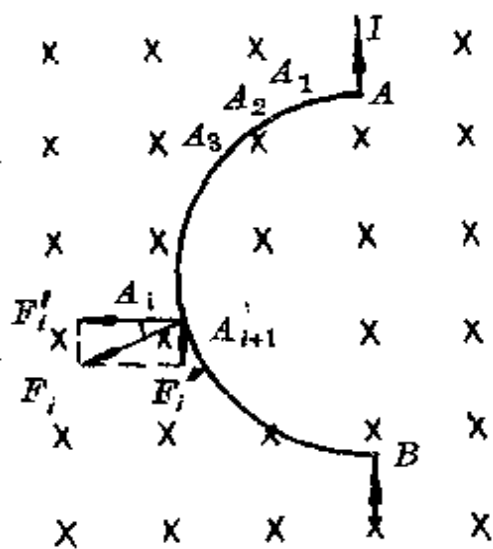


图 61

将半圆形导线分成 n 等份,各分点分别为 A 、 A_1 、 A_2 、 A_3 、 \dots 、 A_{n-1} 、 B .各微段导线的长为 Δl .由于 Δl 很短,因而 Δl 的弯曲程度很小.当 $n \rightarrow \infty$, $\Delta l \rightarrow 0$ 时, Δl 可视为一直线.

对于任意微段导线 $A_i A_{i+1}$,它所受磁场力为

$$F_i = BI \overline{A_i A_{i+1}}.$$

将 F_i 分解成垂直于导体两端点连线 AB 的磁场力分量 F'_i 与平行 AB 连线的磁场力分量 F''_i .

其中 $F_i' = F_i \cos \alpha = BI \Delta l \cos \alpha = BI \Delta h_i$,

$$F_i'' = F_i \sin \alpha = BI \Delta l \sin \alpha.$$

(Δh_i 为 Δl 在 AB 连线上投影的长)

半圆形导线 AB 所受磁场力的合力 F 为

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n,$$

在垂直于 AB 方向上导线受力

$$\begin{aligned} F' &= F_1' + F_2' + F_3' + \cdots + F_n' \\ &= BI \Delta l_1 \cos \alpha_1 + BI \Delta l_2 \cos \alpha_2 + BI \Delta l_3 \cos \alpha_3 \\ &\quad + \cdots + BI \Delta l_n \cos \alpha_n \\ &= BI (\Delta l_1 \cos \alpha_1 + \Delta l_2 \cos \alpha_2 + \Delta l_3 \cos \alpha_3 + \cdots + \Delta l_n \cos \alpha_n) \\ &= BI (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \cdots + \Delta h_n) \\ &= BI \cdot 2R. \end{aligned}$$

在平行 AB 方向上导线受力

$$F'' = F_1'' + F_2'' + F_3'' + \cdots + F_n''.$$

由图 62 可知

$$F_1'' = -F_n'',$$

$$F_2'' = -F_{n-1}'',$$

$$F_3'' = -F_{n-2}'',$$

.....

$$F_{\frac{n}{2}}'' = -F_{\frac{n}{2}+1}''.$$

故 $F'' = 0$.

因此, 半圆形导线所受磁场力的合力大小为

$$F = BI \cdot 2R.$$

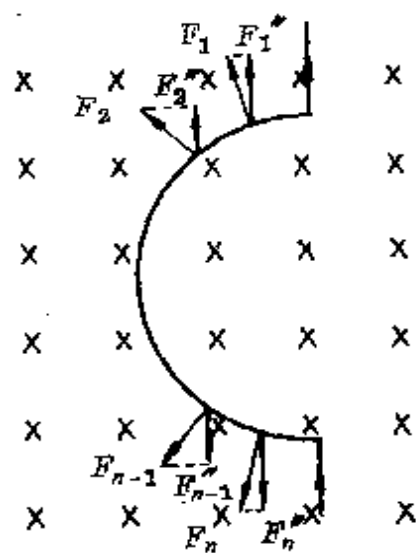


图 62

我们把导线两端点的连线 AB 的长(即 $2R$)称为通电导线在磁场中的等效受力长度. 上式表示, 垂直放置在匀强磁场中的一根半圆形通电导线, 它所受安培力的合力, 与一根长度等于其直径的通电导线等效.

现在, 我们进一步研究, 当导线大于半圆时的情况, 如图 63 所示.

为此, 作如下处理: 将圆弧形导线分成三部分: $\widehat{AA'}$ 、 $\widehat{A'B'}$ 、 $\widehat{B'B}$. 其中 $\overline{A'A} \perp \overline{AB}$ 、 $\overline{B'B} \perp \overline{AB}$.

根据上述结论, 可以得出

$$F_1 = BI \overline{A'A},$$

$$F_2 = BI \overline{A'B'},$$

$$F_3 = BI \overline{B'B}.$$

由对称性, 显然 $F_1 = -F_3$,

故导线所受磁场力的合力 F 为

$$F = F_2 = BI \overline{A'B'} = BI \overline{AB}.$$

其中 AB 连线的长即为通电导线在磁场中等效受力长度.

对于任意形状的导线(图 64), 当导线通有电流强度为 I 并垂直放置于磁感应强度为 B 的磁场中时, 它的等效受力长度均为导线两端点间的长

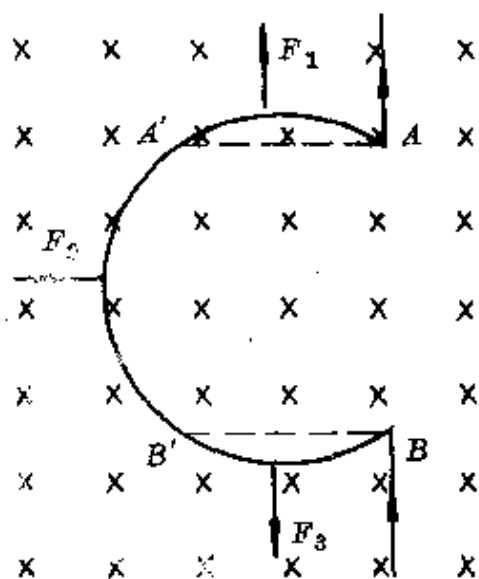


图 63



图 64

度,即

$$l = \overline{AB}.$$

如果当通电导线为一闭合曲线时,根据上述道理可知,它受力的有效长度为零,所以它所受磁场力的合力一定为零.

(4)有效切割长度的确定

当导线在磁场中做切割磁感线运动时,导线将产生感应电动势,其大小为

$$\mathcal{E} = Blv \sin \theta.$$

其中 l 为导体切割磁感线的有效长度.这里的有效切割长度 l 的意义是什么呢?我们看下面的问题:

在一匀强磁场中,导体 AB 长为 l ,以速度 v 在垂直于磁感线的平面内运动,如图 65.若 v 与 l 之间的夹角为 ϕ ,过 A 点作 v 、 B 组成的平面的垂线 OO' ,则 AB 在 OO' 上的投影 AB' 为

$$\overline{AB'} = l \sin \phi.$$

式中 $l \sin \phi$ 即为导体 AB 切割磁感线的有效切割长度 l .

由此可见,一段导线在磁场中运动时,它切割磁感线的有效长度就是导体在垂直于 B 、 v 所组成的平面上的投影长度.

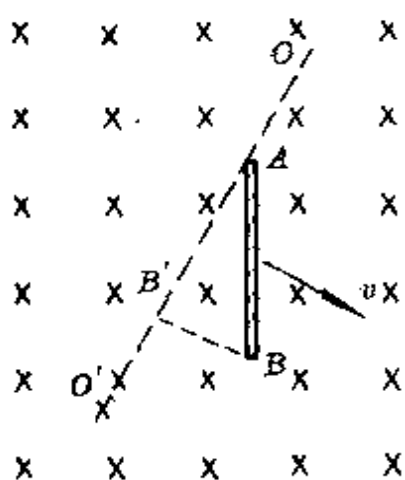


图 65

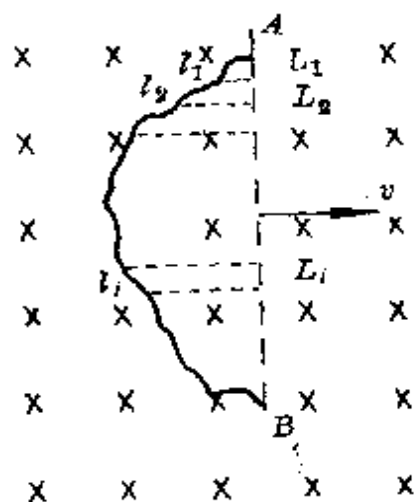


图 66

上述结论同样也适用于弯曲导线做切割运动的情况。

如图 66 所示, 设有一根任意形状的弯曲导线在匀强磁场中以速度 v 做切割磁感线的运动。

为了研究方便, 我们先讨论速度 v 与端点 AB 连线垂直的情况。

为此, 首先将曲线 AB 分成 n 等份, 则每一小段的长度 $l_1 = l_2 = \dots = l_i = \Delta l$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta l \rightarrow 0$, 此时的每一微段 Δl 可视为一直线。过 A 点作垂直于 B 、 v 所组成的平面的垂线 OO' , 显然 OO' 与 AB 重合。

设任一微段 l_i 在 OO' 上的投影为 L_i , 这里的 L_i 就是 l_i 的有效切割长度。因此曲线 AB 总的有效切割长度为:

$$l = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \overline{AB}.$$

若导线运动速度 v 与导线端点连线间的夹角为 ϕ , 如图 67, 导线的有效切割长度为

$$l = \overline{AB'} = \overline{AB} \sin \phi.$$

对于任意曲线形导线, 如图 68. 设导线在垂直于 v 、 B 组成的平面的直线 OO' 上的投影长度为 CD , 则导线在磁场中切割磁感线的有效切割长度即为 CD 的长。此时产生的感应电动势为

$$\mathcal{E} = B \overline{CD} v.$$

导线切割磁感线的过程中, 由于 C_0A 与 C_0A_0 、 D_0B 与 D_0B_0 (其中 C 、 A 、 B 、 D 分



图 67

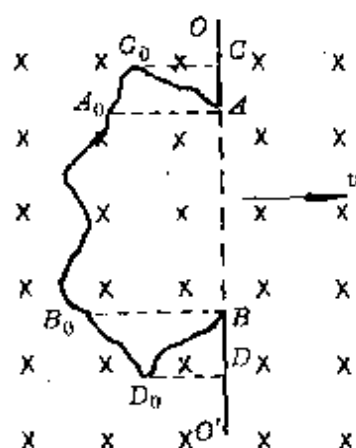


图 68

别是 C_0 、 A_0 、 B_0 、 D_0 在 OO' 上的投影)产生的感应电动势分别大小相等,方向相反,因而 A 与 A_0 、 B 与 B_0 电势分别相等,若经端点 A 、 B 与外电路连接输出时,整个导线相当于一个电源,它的电动势为

$$\mathcal{E} = Blv = B \overline{AB}v.$$

若 v 与 A 、 B 连线成夹角 ϕ 时,则 \mathcal{E} 为

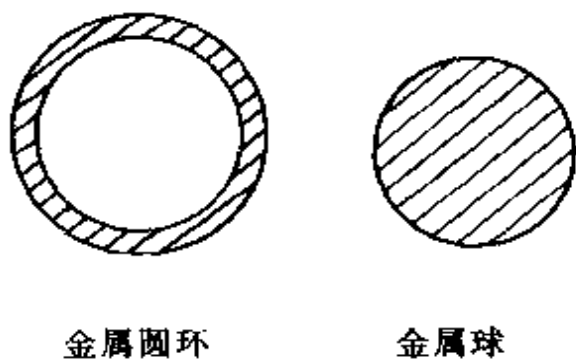
$$\mathcal{E} = B \overline{AB}v \sin\phi.$$

因而,我们有时也把导线端点连线在垂直于 B 、 v 组成的平面的直线上的投影长度称为导线在磁场中切割磁感线的有效切割长度.

3. 解释现象和处理数据

(1) 热膨胀佯谬

我们知道,当一个物体受热时将向各个方向膨胀. 现有一个金属圆环,如图 69. 在常温下,金属球刚好通不过金属圆环. 当金属环充分受热时,金属球是否能顺利通过呢?



金属圆环

金属球

图 69

对这个问题常见的有如下三种回答:

①根据热膨胀原理,金属环受热后将向各个方向膨胀. 由于圆环的径向伸长,从而使内径减小,因而金属球不能通过圆环.

②当金属圆环受热膨胀时,由于圆环的径向膨胀从而使金属圆环内径减小,外径增大. 又由于金属圆环的周向膨胀而使整个圆环的圆周伸长,从而金属圆环的内外径同时增大. 由于存在着这样

两种对立的因素,因此,热膨胀的结果,只有当周向膨胀大于径向膨胀时,内径增大,此时金属球能够通过金属圆环;当周长膨胀小于径向膨胀时,金属球不能通过金属圆环。

③金属圆环受热时,由于圆环的周向膨胀,内径和外径都总是增大,因而金属球总是能顺利通过金属圆环。

金属圆环受热膨胀后,内径究竟是增大还是缩小?通过实验验证,金属圆环在受热膨胀时内径与外径总是增大,这意味着金属圆环在径向上单向膨胀。上述关于热膨胀的前两种看法,似是而非,常使人觉得难辨真伪,很感兴趣,因此,常把这一问题称为“热膨胀佯谬”。

上述热膨胀佯谬,当我们应用分割与逼近方法去分析时,问题也就迎刃而解了。

我们可以认为整个金属圆环是由一系列的薄金属环所组成。对它作环状分割,设分割成 n 个金属圆环[图 70(a)],当 $n \rightarrow \infty$ 时,各个薄圆环可视为一系列只有长度而没有厚度的理想金属丝。将这一系列的金属丝展开,如图 70(b)所示。当这一系列的金属丝受热膨胀时其长度都将伸长。

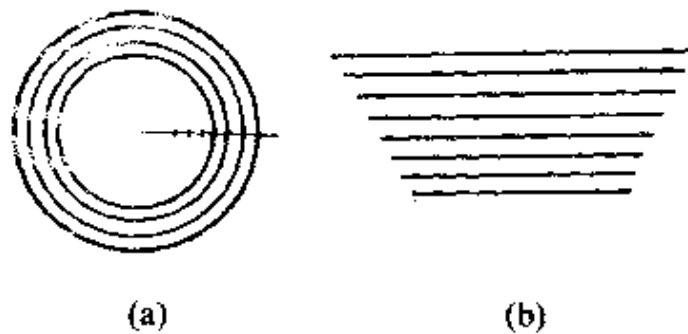


图 70

由于组成各金属丝的材料是相同的,在受热均匀的情况下,各金属丝的伸长也是均匀的。在 n 根金属丝中,最短的那根金属丝

的伸长决定着金属圆环内径的增大. 最长的那根金属丝的伸长决定金属圆环外径的增大. 因而, 当金属圆环受热膨胀时, 圆环内径也总是增大的. 所以金属球总是能通过金属圆环, 这与实验的事实完全吻合.

(2) 电磁阻尼的微观机理

电器中有一种电磁阻尼装置. 图 71 所示就是电能表中的一种电磁阻尼装置. A 为金属转盘, 当它转动时, 蹄形磁铁的磁场将产生一种阻碍转盘转动的作用. 这种阻尼作用是怎样产生的呢?

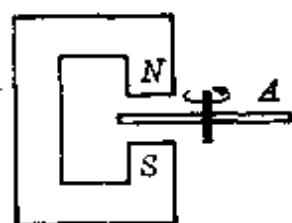
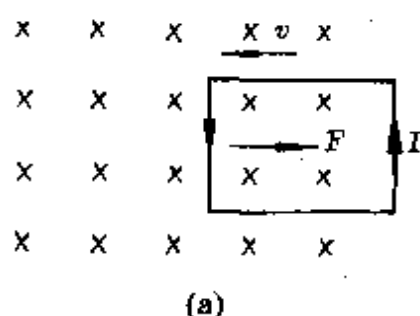


图 71

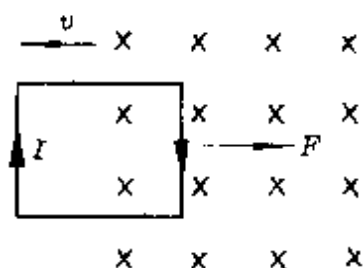
为了阐述方便起见, 我们先研究一下闭合线圈在进出磁场的过程中磁场对线圈的阻尼作用.

如图 72(a) 所示, 当线圈进入磁场时, 由于线圈内部磁通量增加, 闭合线圈内将产生感应电流. 其方向如图 72(a). 导线中通以电流后, 会受到磁场力作用, 根据左手定则, 感应电流所受到的磁场力的方向将阻碍线圈运动.



(a)

同理, 当线圈离开磁场时, 同样受到一个阻碍其运动的磁场力 F 的作用, 如图 72(b).



(b)

图 72

由此可见, 线圈进入和离开磁场的过程中, 都将受到一个阻碍其运动的力的作用, 这一阻碍作用称为磁场的阻尼作用, 简称磁阻尼.

现在,我们再回到图 71 的装置.

将金属转盘进入磁场的部分进行环状分割,见图 73(a).因此整块的金属平面可以看成是由 n 个线框的组合.这些线框进入磁场时,磁通量将增加,线框中将产生逆时针方向流动的电流(涡电流),使线框受到一个与金属转盘转动方向相反的磁场力的作用.同理,这些线框离开磁场时,将同样受到一个阻碍其运动的电磁力的作用.这种阻碍作用,就是电能表中金属转盘的阻尼作用.

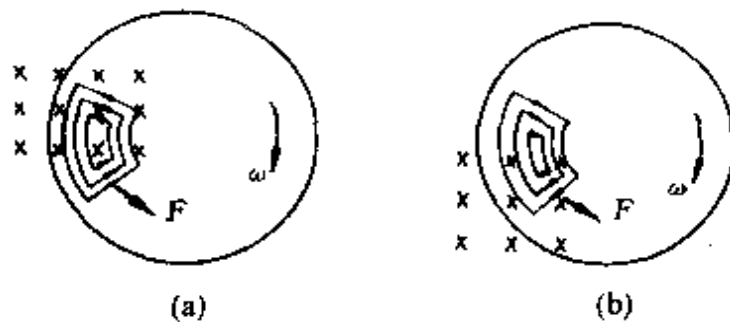


图 73

(3) 变压器铁心结构与涡电流

变压器是电力传输系统中不可缺少的关键设备,它的铁心是由硅钢片经绝缘处理后叠压而成的.采用这种结构的目的是,为了有效地减小铁心中涡电流产生的能耗.

如图 74(a)所示,当变压器线圈接上交变电源时,在线圈中将产生随时间变化的交变电流,因而在铁心中将产生随时间变化的交变磁通.

假设变压器的铁心是一个整体.根据分割的思维方法,我们可以设想把整块铁心分割成由内向外的 n 个薄金属桶.每一个金属桶又可以分割成自上而下的 n 个金属框,见图 74(b).由于这些金属框内通过的磁感线随时间而变化,框中将产生一个随时间变化的感应电流,称为涡电流.

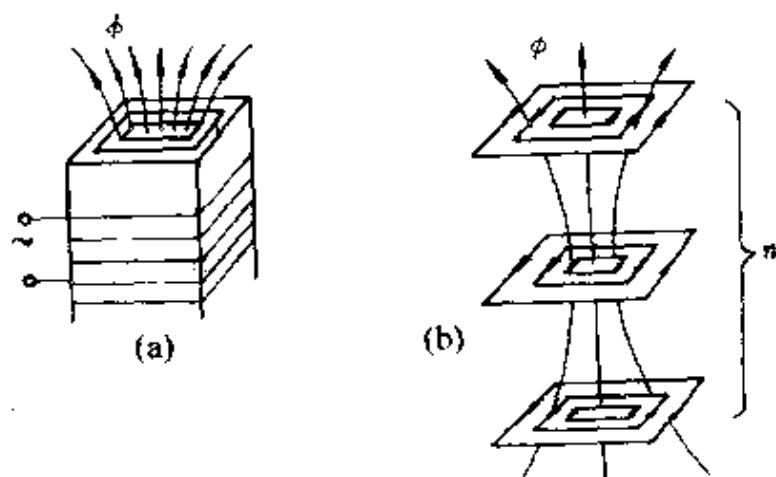


图 74

由于整块铁心对涡流回路的电阻很小,会形成很强的涡流,从而使铁心发热,会损耗很大一部分电能.为了减小损耗,提高电能传输效益,因此实际使用的变压器的铁心不是一个整体,而是用相互绝缘的硅钢片叠压而成.这样可以增大涡流回路的电阻,减小涡流,从而减少能量损失.

(4) 电容器带电量的测定与数据处理

在电压恒定的条件下,电容器的电容 C 与带电量 Q 之间存在如下关系:

$$Q = CU.$$

在中学实验中,测定电容器的电容,是通过测定电容器两端电压与带电量,然后根据上式计算出电容器的电容.上述实验中,电压值可以直接由电压表读出,电量却没有专门仪器测定.为了解决电量的测定,常用的方法是测定电容器放电电流与时间.

测量电路如图 75.

注:电容器标称值: $1000\mu\text{F}$ 16V,

充电电压: $U_p = 9.0\text{V}$,

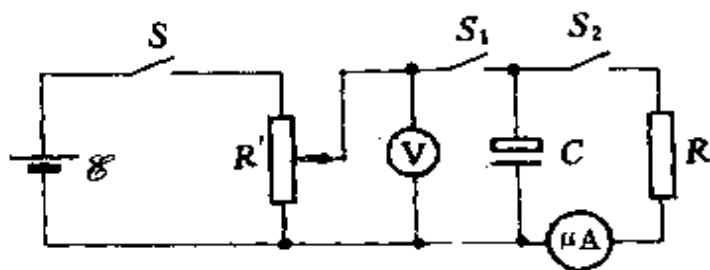


图 75

电阻标称值: $R = 24\text{k}\Omega$,

微安表量程: $500\mu\text{A}$.

实验步骤:先合上 S 、 S_1 ,打开 S_2 ,对电容器 C 充电.当电容器上达到稳定电压后,打开 S 、 S_1 ,合上 S_2 ,电容器 C 开始放电,并每隔 10 秒钟记录一次放电电流值.

实验所得数据如下表:

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t (秒)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
i (微安)	340	250	190	150	120	90	70	50	40	35	30	25	15	10

根据实验数据作出 $i-t$ 图象,见图 76.

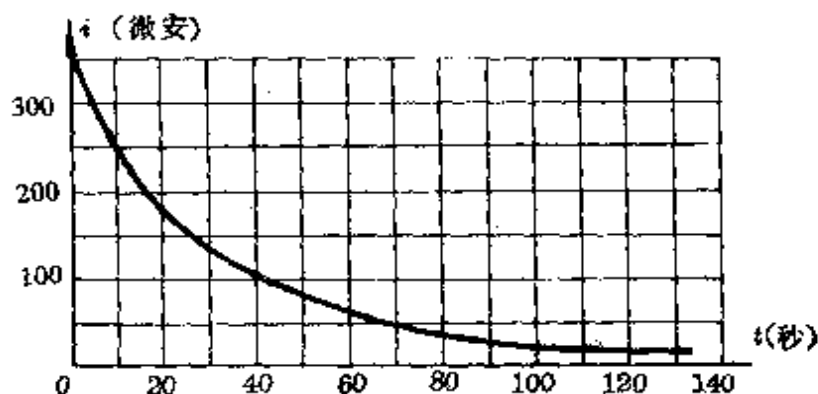


图 76

为了确定电容器所带电量 Q 的值,将整个放电时间分割成 n 等份,每一等份中放电曲线与时间轴间所夹的面积为一个曲边梯

形.当 $n \rightarrow \infty$ 时,它的任一微段 $\Delta t_i \rightarrow 0$,在 Δt_i 这一极短时间内,电流的变化极小,可以看作稳恒电流.也就是说,在 $\Delta t_i \rightarrow 0$ 时,放电曲线与时间轴间形成的许多曲边梯形可等价于许多小矩形.

由于稳恒电流的 $I-t$ 图象中,某段时间内 $I-t$ 图线与时间轴间所夹的面积,等于这段时间内通过的电量(图 77),即

$$Q = It,$$

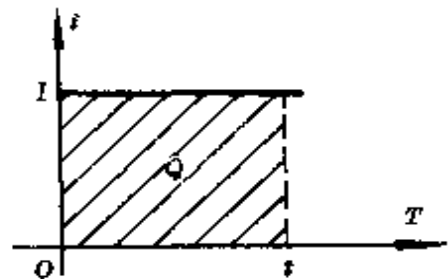


图 77

所以,在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的条件下,电容器在放电时间 t 内总的放电电量

$$\begin{aligned} Q &= \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \cdots + \Delta Q_n \\ &= I_1 \Delta t + I_2 \Delta t + \cdots + I_n \Delta t. \end{aligned}$$

数值上就等于放电曲线下相应时间内的面积.

在实验数据处理中, Δt 不可能真正趋近于零,而只能是一个有限小数,上面实验中取 $\Delta t = 10$ 秒.

显然,当 i 取 Δt 开始时刻的电流值 i_i ,根据公式 $\Delta Q = I \Delta t$ 算出的放电电量 ΔQ 偏大;当 i 取 Δt 末时刻的电流值 i'_i ,则 $\Delta Q'$ 偏小(图 78).故一般取二者的平均值,这样可以减小系统误差.

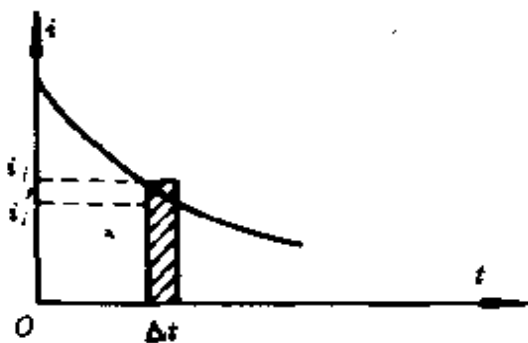


图 78

根据上面的实验数据,并考虑到尽量减小系统误差,可取各时间分段内的电流值依次为

$$I_1 = \frac{340 + 250}{2} \text{ 微安} = 295 \text{ 微安},$$

$$I_2 = \frac{250 + 190}{2} \text{微安} = 220 \text{微安},$$

.....

然后算出放电的总电量

$$\begin{aligned} Q &= I_1 \Delta t + I_2 \Delta t + \cdots + I_n \Delta t \\ &= (295 + 220 + \cdots) \times 10^{-6} \times 10 \text{库} \\ &= 1.24 \times 10^{-2} \text{库}. \end{aligned}$$

于是得被测电容器的电容

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1.24 \times 10^{-2}}{9.0} \text{法} \approx 1.4 \times 10^3 \text{微法}.$$

在许多实验数据处理中,为了简便地把理论上的逼近法转化为实际计算中的“估测法”,常常直接应用方格纸将曲线与 t 轴之间曲边梯形的面积相重叠比较,根据曲边梯形所占的方格数(对于不满一格的部分以四舍五入法取舍),直接可算出曲线下方面积所对应量的大小.这种估测方法明了、简洁,在实验中有很多应用.

上面分三方面阐述了分割与逼近在中学物理学习中的指导作用.实际上,作为一种处理问题的思维方法,总是互相交织着渗透在各个方面.这种思维方法的内核,就是通过选取一个微小单元或微小过程,实现变量与常量的转化.实际应用中,重要的是把握这个实质,不要拘泥于机械的划分.

五、分割与逼近在中学物理解题中的应用

分割与逼近在中学物理解题中的应用,从思想方法而言,主要体现在三个方面:隔离法、微元法与极端逼近法.

1. 隔离法*

把研究对象从整体中单独提取出来的方法,称为隔离法.它在物理解题(尤其是力学问题)中极为常用,也是分析和研究物理问题的一种基本方法.无论是只有几个物体组成的一个整体或是由无穷多质点组成的一个系统,隔离法都同样适用.从分割的意义上说,它往往是根据具体问题的需要,对整体所作的一种有限(不均匀)分割.

例 1 有 A 、 B 两物体,用一细线相连(线刚伸直),如图 79 所示.它们的质量分别为 $m_A = 10$ 千克, $m_B = 8$ 千克,物体与平面间动摩擦因数 $\mu = 0.4$. 物体 A 受水平拉力 $F = 50$ 牛的作用,求 A 、 B 两物体所受摩擦力 f_A 、 f_B .



图 79

* 由于丛书各册侧重点不同,本册对隔离法不多作介绍.

分析与解答 常见到一些学生这样解：物体所受最大静摩擦力满足：

$$\begin{aligned} f_m &= \mu(m_A + m_B)g \\ &= 0.4(10 + 8) \times 9.8 \text{ 牛} \\ &= 70.56 \text{ 牛} . \end{aligned}$$

由于 $f_m > F$ ，物体将处于静止状态，于是得出物体 A 、 B 所受的摩擦力分别是： $f_A = 50$ 牛， $f_B = 0$ 。

上述解答是错误的，其主要原因在于对 A 、 B 之间力的传递过程认识不清。

由于物体 A 受水平外力作用，且有： $F > f_A = \mu m_A g = 39.2$ 牛。若无 B 物体相连，则 A 将发生运动。由于 B 的影响， A 受到外力 F 后将使 A 、 B 之间连接的细线绷紧，产生张力 T 。物体 A 对 B 的作用由此传递给物体 B 。对于这样两个互有牵制的物体，我们应该用隔离法对 A 、 B 两物体水平方向的受力情况进行研究。

A 物体在水平方向受到的力有：拉力 F ；摩擦力 $f_A = 39.2$ 牛； B 物体对 A 物体的拉力 T 。如图 80(a) 所示。



图 80

因物体 A 处于静止状态，故有

$$F = f_A + T,$$

$$T = F - f_A = (50 - 39.2) \text{ 牛} = 10.8 \text{ 牛} .$$

B 物体水平方向受到的力有： A 对 B 的拉力 T' ；摩擦力 f_B ；如

图 79(b)所示.

因物体 B 处于静止状态,故有

$$f_B = T'.$$

因 $T' = T = 10.8$ 牛,

得 $f_B = 10.8$ 牛.

所以本题的答案是, A 物体受到的摩擦力等于 39.2 牛,恰达到最大静摩擦; B 物体受到的摩擦力等于 10.8 牛,小于其最大静摩擦力.

例 2 现有一圆柱形容器,内盛一定量水,当达到稳定状态时,试分析下列情况中液面的形状.

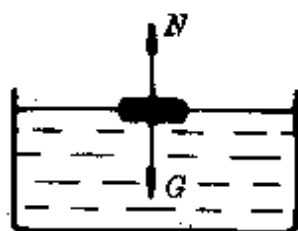
(1)容器处于静止状态;

(2)容器处于水平加速状态,加速度为 a ;

(3)容器绕中心轴线旋转,角速度为 ω .

分析与解答 (1)当容器处于静止状态时.

为了研究液面所呈现的形状,可以在液面上任取一个小液块,我们简称为液元.然后以它为隔离体对液元进行受力分析.



该液元在竖直方向受内部液体的弹力 N 、重力 G 作用,由平衡条件知

$$G - N = 0.$$

因液元是任意选取的,根据上式,可以认为液面上任一处的竖直方向都处于力平衡状态.故静止状态下液面呈水平状态.

当容器在水平方向做匀速运动时,液面也将呈现水平状态.有兴趣的读者可以自行推导.

(2)容器在水平方向做匀加速运动,设加速度为 a .

我们仍然在液面上任取一液元作为研究对象,对液元进行受

图 81

力分析.

不考虑液面间的相互作用力时,该液元受内部液体的弹力 N 和重力 G 的作用(图 82).

因容器在水平方向上做匀加速运动,故 N 与 G 的合力满足条件

$$N \cos \alpha = mg,$$

$$N \sin \alpha = ma.$$

解得 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}.$

由上式可知,液元所处的液面法线方向与竖直方向的夹角 $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{g}$. 由于液元是任意选取的,液面上各处的法线方向均与竖直方向成 α 角,也就是说,液面成一平面,且与水平方向成 α 角.

上述结论我们也可以从分析液体内部的液元受力情况而得到.

如图 83 所示,在容器的竖直方向上取一液柱(图中斜线部分),液柱两侧面高度差为 ΔZ ,宽度为 Δx . 在液体的任一深度取一侧面积为 ΔS 的液元,则此液元的体积为 $\Delta S \cdot \Delta x$. 该液元在水平方向上的压力差便是产生水平加速度的力.

即 $F_{\text{左}} - F_{\text{右}} = ma.$

其中 $F_{\text{左}} = p_{\text{左}} \Delta S = \rho g (Z + \Delta Z) \Delta S,$

$$F_{\text{右}} = p_{\text{右}} \Delta S = \rho g Z \Delta S,$$

$$m = \Delta S \cdot \Delta x \cdot \rho.$$

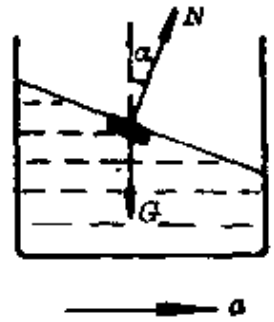


图 82

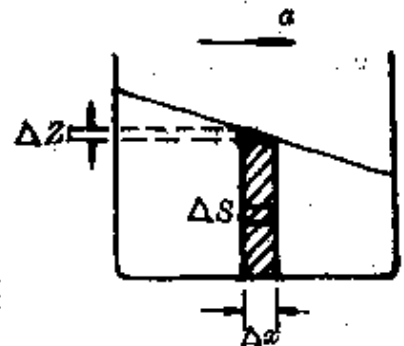


图 83

$$\therefore \rho g(Z + \Delta Z)\Delta S - \rho gZ\Delta S = \Delta S \cdot \Delta x \cdot \rho a.$$

$$\Delta Zg = \Delta xa,$$

$$\text{即 } \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \frac{a}{g}.$$

因 a 、 g 为常数, 故 $\frac{\Delta Z}{\Delta x}$ 为常数, 即液面为一平面, 且与水平方向夹角 α 满足关系式

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \text{tg}^{-1} \frac{a}{g}.$$

由上式可知, 当 $a = 0$ 时, 即容器处于静止或匀速直线运动状态时, $\alpha = 0$, 即容器中液面呈水平状态.

(3) 容器绕中心轴转动时

当盛水容器绕容器中心轴线旋转, 液面达稳定状态时, 液体中各液元均做匀速圆周运动, 其角速度处处相同. 取如图 84 所示直角坐标系. 在 xOy 平面的液面上任取一液元, 液元的坐标为 (x, y) . 该液元受到内部液体的弹力 N 和重力 G 的作用, 这两个力的合力提供了液元绕 y 轴旋转所需的向心力. 即

$$\begin{cases} N \cos \alpha - mg = 0, & \textcircled{1} \\ N \sin \alpha = m\omega^2 x. & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{因此, 有 } \text{tg} \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

α 为液元所在处液面法线方向与竖直方向间的夹角, 它与液元处液面的切线方向与水平方向间的夹角相等.

$$\therefore \text{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

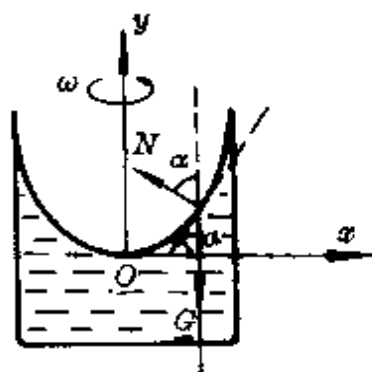


图 84

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\omega^2}{g} x.$$

$$\text{即} \quad \Delta y = \frac{\omega^2}{g} x \Delta x. \quad \textcircled{3}$$

为了确定③式所对应的 x 、 y 之间的函数关系,我们先讨论 $y = kx^2$ 的增量 Δy 所满足的关系.

$$\begin{aligned} \Delta y &= k[(x + \Delta x)^2 - x^2] \\ &= k[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2] \\ &= k[2x\Delta x + \Delta x^2]. \end{aligned}$$

因为 Δx 为一无穷小量, Δx^2 与 $x\Delta x$ 相比较可以忽略不计.

$$\text{所以} \quad \Delta y = 2kx\Delta x. \quad \textcircled{4}$$

比较③式与④式,显然两式具有完全相同的形式,且 k 满足

$$k = \frac{\omega^2}{2g}.$$

由此可知③式所对应的 x 与 y 的函数关系满足

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2. \quad \textcircled{5}$$

这是一个抛物线方程,表示液面在二维空间呈抛物线型,在三维空间呈一旋转抛物面.

2. 微元法

研究物理问题时,对于某个具体的研究对象(如某个物体、某个空间或某个过程),有时从整体上或宏观上无法求解时,我们常可以应用分割的方法,从微观上去探求,往往会收到意想不到的效果.这种以整体中某个(或某几个)特定的微元为研究对象的解题方法,我们称为微元法.这是本书中重点介绍的方法.

微元法解题主要步骤如下:

(1) 将所研究的对象进行无限分割, 或假设研究的对象发生了微小的变化, 例如可以是发生了一小段位移, 经历了一小段时间等;

(2) 取某个微元或微小变化过程作为研究对象, 找出所选取的这个微元或微小变化所遵循的物理规律或列出对应的物理方程;

(3) 根据对应规律或方程, 求解未知物理量, 或者找出揭示某种变化规律或特定的原理.

现举例说明如下:

例 1 试估测地球大气总质量.(保留一位有效数字)

分析与解答 把地球看成一个圆球体, 以球心为原点, 在圆锥角 $\Delta\phi$ 的区域中将大气层分割成 n 个微空气柱. 如图 85 所示. 由于大气层厚度 h 一般认为在 10 千米左右, 取地球半径 $R = 6400$ 千米, 故 $h \ll R$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 每一个小空气柱可以看成是一个微圆柱体. 设任意一个微圆柱体体积为 ΔV_i , 则

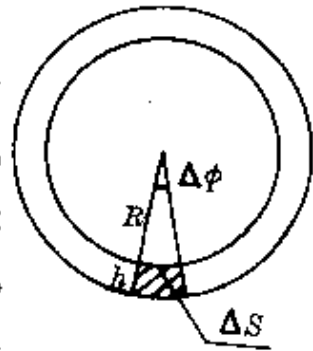


图 85

$$\Delta V_i = \Delta S_i h,$$

其中 ΔS_i 为微圆柱体底面积.

每一个微圆柱体所含空气质量为 Δm_i , 则

$$\Delta m_i = \rho \Delta S_i h,$$

ρ 为空气柱平均密度.

整个大气所含空气质量应为各微空气圆柱质量之和, 即

$$\begin{aligned} m &= \Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \cdots + \Delta m_n \\ &= \rho h \Delta S_1 + \rho h \Delta S_2 + \rho h \Delta S_3 + \cdots + \rho h \Delta S_n \\ &= \rho h (\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots + \Delta S_n) \end{aligned}$$

其中 $\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots + \Delta S_n$ 为地球表面积, 故有

$$\begin{aligned} S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots + \Delta S_n \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

作为估算, 可以设空气密度随高度变化是均匀的, 其平均密度 ρ 可以认为等于地面附近大气密度的一半, 即

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0 = \frac{1}{2} \times 1.29 \text{ 千克/米}^3.$$

由于每升高 12 米, 大气压下降 1 毫米汞柱, 故有

$$h : 760 = 12 : 1,$$

得大气层高 $h = 9120$ 米.

取 h 为 1.0×10^4 米, 所以地球大气的总质量约为

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\rho_0 hS \\ &= \frac{1}{2} \times 1.29 \text{ 千克/米}^3 \times 1.0 \times 10^4 \text{ 米} \\ &\quad \times 4\pi \times (6400 \times 10^3 \text{ 米})^2 \\ &= 3.0 \times 10^{18} \text{ 千克}. \end{aligned}$$

例 2 如图 86 所示, 用一钢绳牵引一条小船, 已知牵引速度为 v , 求船运动至图中位置时的速度. 此时钢绳与水平方向间的夹角为 α .

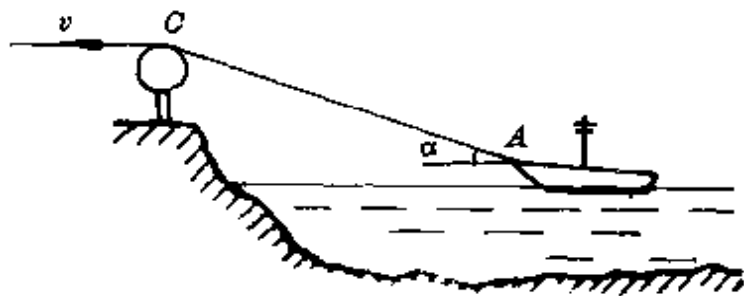


图 86

分析与解答 不少同学直接将 v 分解成水平速度 v_1 和垂直方向速度 v_2 , 如图 87. 认为船前进的速度就是牵引速度的水平分速度, 因此, 船前进速度 v_1 满足:

$$v_1 = v \cos \alpha,$$

仔细想一下就不难发现, 船前进时不应存在竖直向上的分速度, 那么, 船前进的速度究竟应该怎样求呢? 下面, 我们应用微元法来分析一下船前进速度与牵引速度之间的关系.

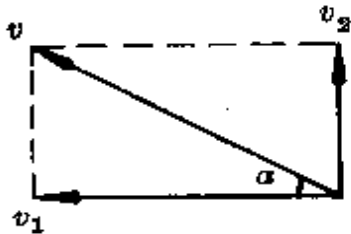


图 87

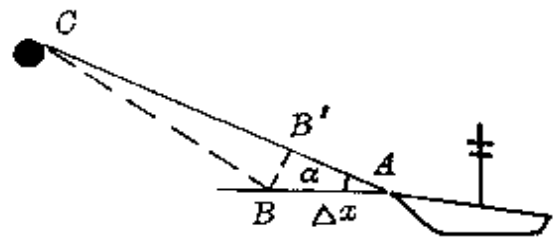


图 88

假设船从 A 点起在 Δt 时间内发生一微小位移 Δx , 如图 88, 船由 A 到达 B 点. 由 B 点作 AC 的垂线 BB' 交 AC 于 B' .

船在 Δt 时间内的平均前进速度为

$$\bar{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

它的极限值就是图中位置时的船速

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

绳在 Δt 内被拉过的距离

$$AB' = \Delta x \cos \alpha.$$

钢绳牵引速度的平均值为

$$\bar{v} = \frac{AB'}{\Delta t},$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 即得钢绳的瞬时牵引速度

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \cos \alpha \\ &= u \cos \alpha. \end{aligned}$$

故得
$$u = \frac{v}{\cos \alpha}.$$

这就是说, 船在水中的前进速度 v 总会大于钢绳的牵引速度 v . 这一似乎“反常”的现象, 在微元法中用图 88 就可得到较直观的理解.

例 3 质量为 m 、半径为 R 的均匀圆环放在水平面内, 绕过环中心的竖直固定轴做匀速转动, 见图 89(a), 其角速度为 ω . 求圆环内部的张力大小.

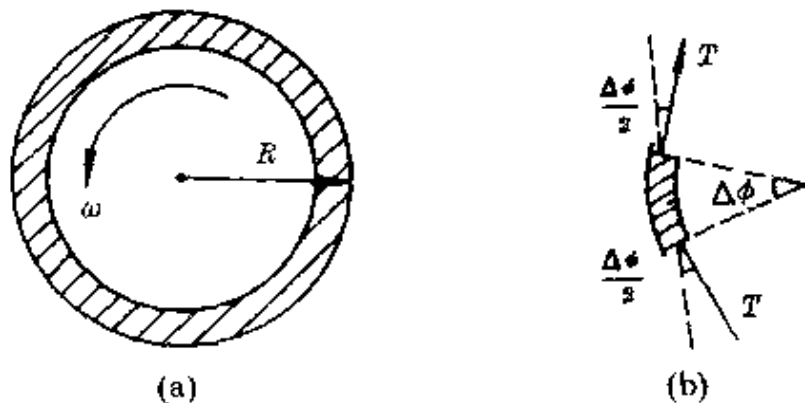


图 89

分析与解答 首先将圆环半径旋转一周扫过的圆心角进行分割, 每一小圆心角为 $\Delta\phi$. 对于每一小圆心角 $\Delta\phi$ 所对的一段圆环, 设其质量为 Δm , 如图 89(b). 当 $\Delta\phi \rightarrow 0$ 时, 每一小段圆环可视为质点, 这一段圆弧所受邻近部分张力 T 的法向分量即为质点做圆周运动的向心力.

即
$$2T \sin \frac{\Delta\phi}{2} = \Delta m \omega^2 R.$$

其中 $\Delta m = \frac{m}{2\pi} \Delta \phi$.

当 $\Delta \phi \rightarrow 0$ 时, 有 $\sin \frac{\Delta \phi}{2} \rightarrow \frac{\Delta \phi}{2}$.

故前式可转化为

$$2T \cdot \frac{\Delta \phi}{2} = \frac{m}{2\pi} \Delta \phi \omega^2 R.$$

解得 $T = \frac{m}{2\pi} \omega^2 R$.

例 4 一根均匀的、不能伸缩的软缆绳, 全长为 l , 质量为 M , 开始时绳两端都固定在邻近的挂钩上, 自由地悬着, 如图 90(a) 所示. 某瞬间缆绳的一端松开了, 缆绳开始下落, 如图 90(b) 所示. 已知每个挂钩的最大负荷为 N (大于缆绳重力 Mg). 为了使缆绳下落时其上端不会把挂钩拉断, Mg 与 N 必须满足什么条件? 假定在下落时, 缆绳到达最终位置之后停止不动.

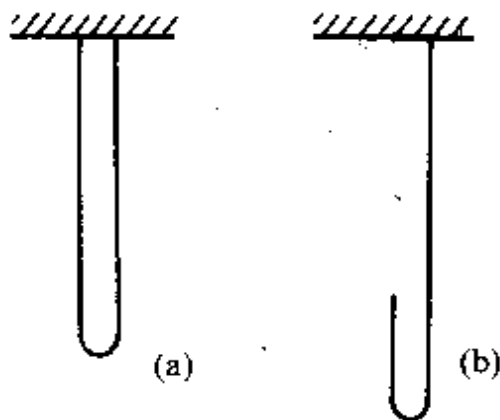


图 90

分析与解答 缆绳的下落与小球的下落有所不同, 因为绳子两部分的长度(质量)在发生变化, 但仍可借用单个小球下落时的规律进行研究. 为此, 我们可对缆绳这样一个连续的整体进行分割. 设将缆绳分割成 n 等份, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 任一微段 Δx 则可视为一质点, 如图 91. 此时任一微段的下落即可与小球的下落等同. 其下落速度满足

$$v = \sqrt{2gh}.$$

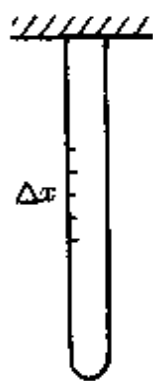


图 91

其中 h 为下落的高度。

缆绳下落时对挂钩会产生冲力, 设在下落的起始时刻后的 Δt 时间内, 下落缆绳长度为 Δx , 此时缆绳的挂钩所受拉力 N 由两部分组成: 一部分为 $(\frac{l}{2} + \Delta x)$ 长的缆绳的重力, 另一部分为 Δx 段缆绳产生的冲力 F . 即

$$N = \frac{M}{l}g\left(\frac{l}{2} + \Delta x\right) + F.$$

显然, 只有当缆绳的左端的最后一微段降落的瞬间, 冲力达最大值。

对于上述微段 Δx , 在最后 Δt 的时间内通过的位移为 $2\Delta x$ (图 92), 则

$$\Delta t = \frac{2\Delta x}{\sqrt{2gh}}.$$

此微段作用在挂钩上的冲力 F_m 满足

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{\Delta I}{\Delta t} \\ &= \frac{M}{l} \cdot \Delta x \sqrt{2gh} \cdot \frac{\sqrt{2gh}}{2\Delta x} \\ &= \frac{Mgh}{l}. \end{aligned}$$

对于所研究的微段有 $h = l$, 故

$$F_m = Mg.$$

$$N_m = Mg + Mg = 2Mg.$$

所以, 要使挂钩不断, 必须满足条件 $N \geq 2Mg$.

例 5 一个均匀的薄圆板, 质量为 m , 半径为 R , 在一个水平桌面上运动. 圆板中心的线速度为 v , 圆板对过其中心的垂直轴的

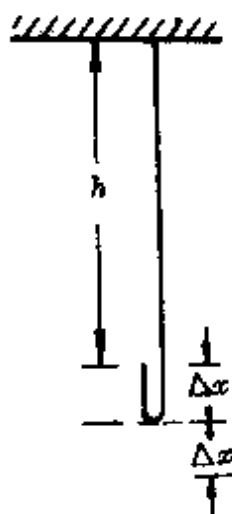


图 92

旋转角速度等于 ω , 如图 93 所示. 圆板与桌面间的动摩擦因数等于 μ , 它与速度没有关系. 试计算 $v \ll \omega r$ 时圆板受到的阻力.

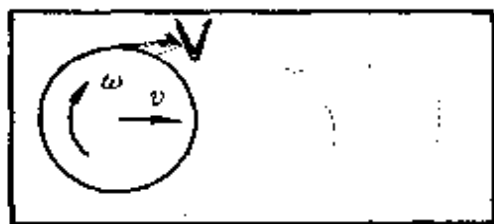


图 93

提示: 平板的平移和旋转运动, 可以看成是旋转轴移动的旋转运动. 假定圆板某部分所受摩擦力平行于 v 的分量等于零, 那时只须计算圆板其他部分摩擦力的和与 v 平行的分量即可.

分析与解答 瞬时转动轴穿过距圆盘中心 $d = \frac{v}{\omega}$ 的点 S , 如图 94 所示. 我们过点 S 引一条 v 的平行线, 并把圆盘在这条直线以下的部分对称地分开. 很容易发现, 对所述直线任意对称的点 A 和 B , 摩擦力的合力没有平行于 v 的分量, 因此, 阻力只来自由圆心 O 到 O' 相距 $2d$ 的两个圆盘生成的细月牙部分.

为了计算阻力的大小, 可将月牙所在的平面进行分割, 如图 94 所示. 对于 OO' 直线右边的月牙微元, 设其质量为 Δm . 则该月牙微元所受摩擦阻力为

$$\begin{aligned} \Delta f &= \mu g \Delta m \\ &= \mu g \frac{m}{\pi R^2} \Delta S. \end{aligned}$$

其中 ΔS 为月牙微元的面积,

$$\Delta S = R \Delta \alpha 2d \cos \alpha.$$

Δf 平行于 v 的分量为

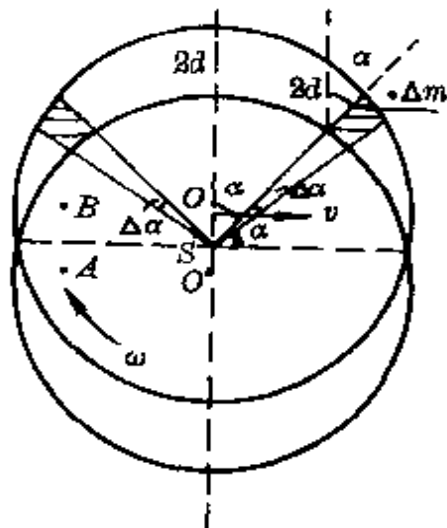


图 94

$$\Delta f' = \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \cos^2 \alpha \Delta \alpha.$$

我们再研究上述月牙微元向左 90° 处另一月牙微元所受摩擦力的平行于 v 的分量, 不难得出

$$\Delta f'' = \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \sin^2 \alpha \Delta \alpha.$$

$\Delta f'$ 和 $\Delta f''$ 的合力为

$$\begin{aligned} \Delta f'' &= \Delta f' + \Delta f'' \\ &= \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \Delta \alpha. \end{aligned}$$

圆盘平移的阻力 f 应为各月牙微元所受摩擦阻力平行于 v 分量的和, 即

$$f = (\Delta f'')_1 + (\Delta f'')_2 + (\Delta f'')_3 + \cdots + (\Delta f'')_n,$$

或

$$\begin{aligned} f &= \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \Delta \alpha_1 + \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \Delta \alpha_2 \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \Delta \alpha_3 + \cdots + \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} \Delta \alpha_n \\ &= \frac{2}{\pi} \mu g m \frac{v}{\omega R} (\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 + \cdots + \Delta \alpha_n). \end{aligned}$$

其中, $\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 + \cdots + \Delta \alpha_n$ 为 $\frac{1}{4}$ 圆弧所对圆心角之和, 即等于 $\frac{\pi}{2}$. 于是上式可简化为

$$f = \mu g m \frac{v}{\omega R}.$$

由上式可以看出: 转盘在平移方向上的摩擦力与 $\frac{v}{\omega R}$ 成正比.

当 ω 很大时, 阻力 f 很小.

例 6 一根长为 l 、质量为 m 的均质棒, 在水平面内以角速度

ω 绕竖直轴转动,轴通过棒的一端(图 95),求棒的转动动能.

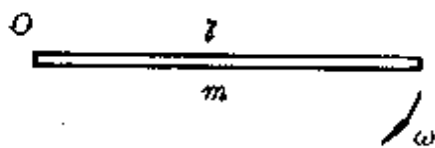


图 95

分析与解答 当物体平动时,因物体上各点的运动状态都相同,故物体可视为一质点,其动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

现在物体处于转动过程中,构成物体的各质点的运动状态不同,我们可以应用分割的方法先求出各微段的动能,然后把它们相加,即得整个棒所具有的动能.

设将长为 l 的棒分割成 n 等份,每一份的质量为 $\frac{m}{n}$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时,每一小段 Δl 可视为一质点. 此时,元段 Δl 的质量 $\Delta m = \frac{l}{n} m$. 同时,可以认为 Δl 具有相同的线速度,其值为

$$v_i = \omega i \frac{l}{n}.$$

因此,任意元段 Δl_i 的动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\omega i \frac{l}{n} \right)^2 \frac{ml}{n} = \frac{ml^3 \omega^2 i^2}{2n^3}.$$

整个棒所具有的动能为各元段动能之和,即

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} + \cdots + E_{kn} \\ &= \frac{ml^3 \omega^2 1^2}{2n^3} + \frac{ml^3 \omega^2 2^2}{2n^3} + \frac{ml^3 \omega^2 3^2}{2n^3} \\ &\quad + \cdots + \frac{ml^3 \omega^2 n^2}{2n^3} \\ &= \frac{ml^3 \omega^2}{2n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2). \end{aligned}$$

因 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$

故得 $E_k = \frac{ml^3 \omega^2}{2n^3} \times \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$

当 $n \rightarrow \infty$, 有 $(n+1)(2n+1) \rightarrow 2n^2.$

所以 $E_k = \frac{m\omega^2 l^3}{6}.$

例 7 一个带有塞子的容器里充有一定量的空气, 其压强 $p < p_0$ (外界大气压). 当把塞子拔掉时, 外界空气最初以多大的速率冲进容器里? 设外界空气的密度为 ρ .

分析与解答 这个题目初看会觉得很难, 题中给出的条件很少, 似乎无法下手. 仔细分析一下, 由于外界空气进入容器是个连续变化的过程, 最初只是靠近孔边的一薄层空气, 在内外压强差的作用下冲入容器, 因此可取靠近孔边的一薄层空气为研究对象进行分析.

如图 96 所示, 设小孔的截面积为 S , 最初冲进容器的这一薄层空气厚 Δx , 则其质量为

$$\Delta m = \rho S \Delta x.$$

作用在这一薄层空气上指向容器内的压力为

$$F = (p_0 - p)S.$$

设这一薄层空气刚冲进容器的速度为 v , 不计原来的初速度, 则由动能定理

$$F \Delta x = \frac{1}{2} \Delta m v^2,$$

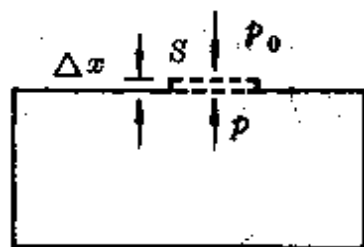


图 96

或
$$(p_0 - p)S \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \rho S \Delta x \cdot v^2.$$

得
$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}.$$

即拔掉塞子时最初冲进容器的空气的速度, 仅与容器内外气体的压强差和空气密度有关, 与瓶塞截面积大小无关.

例 8 在水平放置的、洁净的平玻璃板上倒一些水银, 由于重力和表面张力的影响, 水银呈球饼形状(侧面向外凸出), 过圆饼轴线的竖直截面如图 97 所示. 为了计算方便, 水银和玻璃的接触角可按 180° 计算.

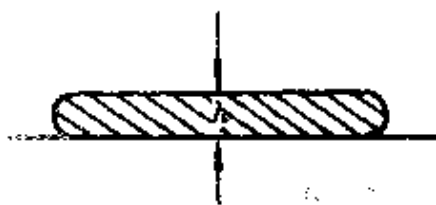


图 97

已知水银的密度 $\rho = 13.6 \times 10^3$ 千克/米³, 水银的表面张力系数 $\sigma = 0.49$ 牛/米. 当圆饼半径很大时, 试估算其厚度 h 的数值.(取一位有效数字)

分析与解答 在洁净的玻璃平板上的水银呈现圆饼形状, 此时水银所受重力对水银圆饼侧壁压力, 方向向外, 与指向圆饼内水银的表面张力相平衡.

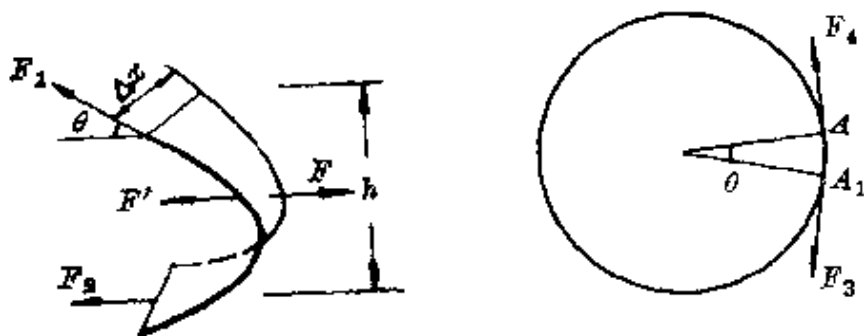


图 98

若以整个圆饼为研究对象, 我们很难列出对应的方程求解. 为此我们采用分割的方法, 将水银圆饼分成 n 个等份, 如图 98 所示.

在侧面处任取一小块, 设其宽度为 Δx , 高为 h , 侧面积为 ΔS .

侧壁的水平压力为 F , 则

$$F = \bar{p}\Delta S = \frac{1}{2}\rho gh \cdot h\Delta x = \frac{1}{2}\rho gh^2\Delta x.$$

压力 F 使水银侧壁具有增大的趋势. 水银的表面张力具有使水银尽量收缩的趋势. 其表面张力的法向分量, 上表面为 F_1 , 下表面为 F_2 . 其合力的水平分量为

$$\begin{aligned} F' &= F_1 \cos\theta + F_2 = \sigma\Delta x \cos\theta + \sigma\Delta x \\ &= \sigma\Delta x(1 + \cos\theta). \end{aligned}$$

水银表面张力的切线分量为 F_3, F_4 .

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, A 逼近于 A' , 此时 F_3 与 F_4 大小相等, 方向相反, 故合力为零.

在水银呈稳定状态时, $F = F'$.

即
$$\sigma\Delta x(1 + \cos\theta) = \frac{1}{2}\rho gh^2\Delta x.$$

解得
$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 + \cos\theta)}{\rho g}}.$$

因
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

所以
$$1 < \sqrt{1 + \cos\theta} < \sqrt{2}.$$

将数据代入, 得

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{2 \times 0.49(1 + \cos\theta)}{13.6 \times 10^3 \times 9.8}} \\ &= 0.0027 \sqrt{1 + \cos\theta}. \end{aligned}$$

h 取值范围为

$$2.7 \times 10^{-3} \text{米} < h < 1.4 \times 2.7 \times 10^{-3} \text{米}.$$

所以, 水银厚度估计值为 3×10^{-3} 米或 4×10^{-3} 米.

例 9 一无限长均匀带电细线弯成如图 99 所示的平面图形, 其中 \widehat{AB} 是半径为 R 的半圆弧, AA' 平行于 BB' , 试求圆心 O 处的电场强度.

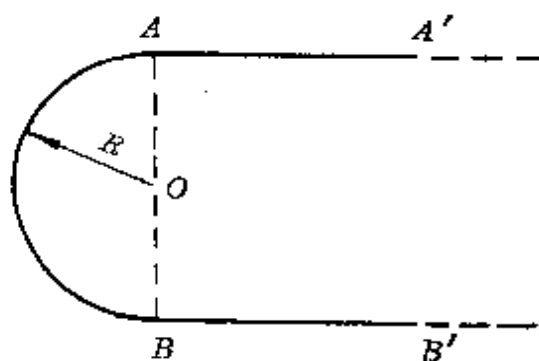


图 99

分析与解答 在无限延伸的平直导线 AA' 和 BB' 以及圆弧导线 \widehat{AB} 构成的区域中, O 点

的电场强度为无限长带电导线 AA' 、 BB' 以及半圆弧 \widehat{AB} 所带电荷产生的场强的矢量和. 为了便于用初等方法求解, 必须解决如下两个问题:

- ①线电荷转化成点电荷;
- ②无限向有限的转化.

我们采用平面分割法对整个系统所包围的区域进行分割, 见图 100. 对于张角 $\Delta\theta$ 所包围的区域 (斜线部分), 对应着圆弧 ab 和直导线上的 $a'b'$.

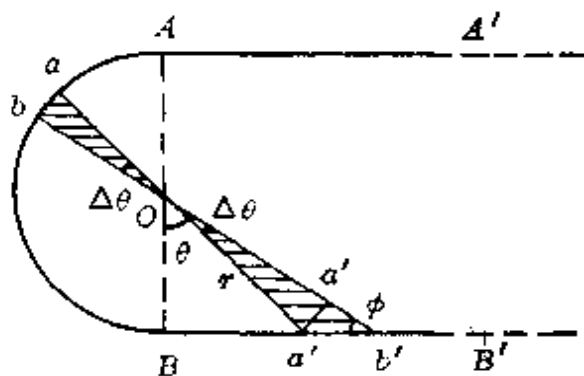


图 100

当 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 时, a 逼近于 b , a' 逼近于 b' . 此时我们可以认为 \widehat{ab} 所带电荷 ΔQ 集中于一点

(如 b 点), $a'b'$ 所带电荷 $\Delta Q'$ 集中于对应的另一点 (如 b' 点). 这样, 对于 $\Delta\theta$ 张角所包含的区域在 O 点所形成的场强, 我们可以认为是由两个点电荷所形成的.

设细线上单位长度所带电荷为 η , 则 \widehat{ab} 所带电荷为

$$\Delta Q = \eta R \Delta \theta.$$

ΔQ 在 O 点处形成的场强为 ΔE ,

$$\Delta E = k \cdot \frac{\eta \Delta \theta}{R}.$$

其中 ΔE 的方向指向 Ob' .

$a'b'$ 所带电荷为

$$\Delta Q' = \eta a'b'.$$

其中, $a'b' = \frac{a'a''}{\cos \phi}$, $\phi = \theta + \Delta \theta$.

当 $\Delta \theta \rightarrow 0$ 时, $\phi \rightarrow \theta$.

$$\cos \phi = \cos \theta = \frac{R}{r},$$

$$a'b' = a'a'' \cdot \frac{r}{R}, \quad \text{又} \quad a'a'' = r \Delta \theta,$$

因此, $a'b'$ 所带电荷在 O 点形成的电场强度为

$$\Delta E' = k \frac{\eta a'b'}{r^2} = k \frac{\eta}{r^2} r \Delta \theta \cdot \frac{r}{k} = k \frac{\eta \Delta \theta}{R}.$$

ΔE 的方向指向 Ob 方向.

显然, ΔE 与 $\Delta E'$ 在 O 点处的场强为零.

同理, 在任一对应的小区域中其电荷在 O 点产生的场强均为零, 因而该系统在 O 点产生的总场强也为零.

例 10 空间某一体积为 V 的区域内平均电场强度(\vec{E})定义为

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_1 \Delta V_1 + \vec{E}_2 \Delta V_2 + \vec{E}_3 \Delta V_3 + \cdots}{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \cdots}$$

$$\vec{E} = \frac{\sum_i \vec{E}_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i}$$

上式中 ΔV_i 为体积 V 内第 i 个体积元, \vec{E}_i 为第 i 个体积元内的场强(只要体积元足够小,可以认为其中各个点场强的大小和方向都相同), \sum_i 为累加号,例如

$$\sum_i \Delta V_i = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \cdots = V.$$

今有一半径为 a 、原来不带电的金属球,现使它处于电量为 q 的点电荷的电场中,点电荷位于金属球外,与球心的距离为 R . 试计算金属球表面的感应电荷所产生的电场在此球内的平均电场强度.

分析与解答 根据静电平衡条件,导体内部电场强度处处为零.根据场强叠加原理,可以通过求点电荷 q 的场强的办法得出感应电荷的场强.

设 \vec{E}_s 表示金属球表面上所有感应电荷单独产生的电场强度, \vec{E}_q 表示点电荷 q 单独产生的电场强度.根据导体静电平衡条件,在金属球内任一点 i 处,有

$$\vec{E}_s = -\vec{E}_q.$$

$$\text{所以 } (\vec{E}_s) = \frac{\sum_i \vec{E}_s \cdot \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i} = -\frac{\sum_i \vec{E}_q \cdot \Delta V_i}{\frac{4}{3}\pi a^3} = -(\vec{E}_q).$$

设想在金属球内密度为 ρ 的体电荷均匀分布,则总电量为

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho.$$

因为均匀带电球体对球外电荷作用力,与球体的电荷全部集中在球心的点电荷对球外电荷的作用力相同,因此, Q 对点电荷 q 的作用力可用库仑定律求得,即

$$\vec{F} = -k \frac{Qq}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}.$$

上式中 $\frac{\vec{R}}{R}$ 表示方向的单位矢量.

把带电球体分割成无数个体积为 ΔV_i 的体积元,如图 101 所示.每一个体积元所带电量为 $\rho \cdot \Delta V_i$,点电荷 q 对这一带电体积元

的作用力 \vec{F}_i 为

$$\vec{F}_i = \rho \Delta V_i \vec{E}_q.$$

点电荷 q 对整个带电体作用力 \vec{F}' 为各体积元所受作用力 \vec{F}_i 的和,即

$$\vec{F}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i.$$

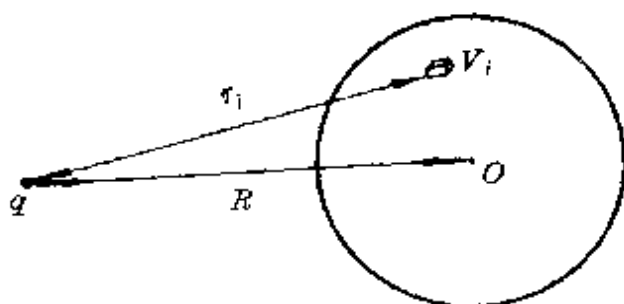


图 101

$$\vec{F}' = \sum_i \rho \Delta V_i \vec{E}_{qi}$$

根据牛顿第三定律,有

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

因此有 $\sum \rho \vec{E}_{qi} \Delta V_i = k \frac{qQ}{R^2} \cdot \frac{R}{R} = k \frac{q}{R^2} \cdot \frac{R}{R} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$,

即 $(\vec{E}_q) = \frac{\sum_i \vec{E}_{qi} \Delta V_i}{\frac{4}{3} \pi a^3} = k \frac{q}{R^2} \cdot \frac{R}{R}$

因此得

$$(\vec{E}_s) = -k \frac{q}{R^2} \cdot \frac{R}{R}$$

例 11 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,放置一个匝数为 N 、面积为 S 的不规则线圈,它可以绕着位于线圈同一平面内的某一根轴旋转.当线圈中通以恒定电流 I 时,线圈受到的最大磁力矩为多少(图 102)?

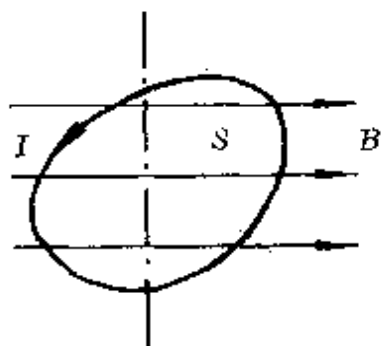


图 102

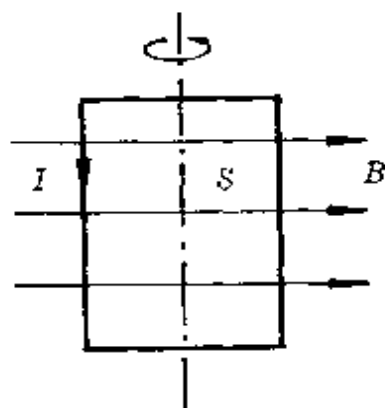


图 103

分析与解答 我们知道,一个通电矩形线圈在匀强磁场中受到的最大磁力矩出现在线圈平行于磁感线的位置上(图 103),其值为

$$M = NISB,$$

式中 S 为线圈面积, N 为匝数, I 与 B 分别为电流强度与磁感强度.

为了确定任意形状的通电线圈所受到的磁力矩,可以用一组平行线把原线圈分成许许多多极其狭的小线圈,如图 104 上所示.每一个小的“曲边四边形”线圈都可以看成一个矩形线圈.相邻两线圈的公共边里可以看作同时有方向相反的两个电流通过(图 104 下).因此,每个小矩形线圈里的电流就如同整个线圈里

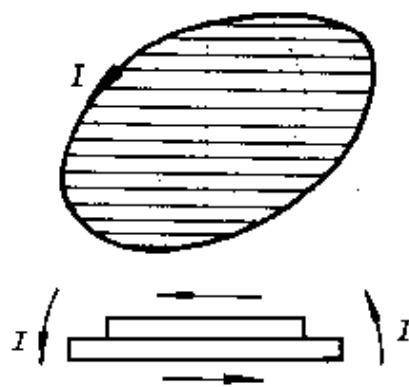


图 104

的电流一样.于是,整个线圈所受磁力矩等于一系列小矩形线圈所受磁力矩之和,即

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n.$$

设每个小矩形线圈的面积依次为 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n$, 每个小矩形线圈所受到的最大磁力矩依次为

$$M_1 = NIS_1 B,$$

$$M_2 = NIS_2 B,$$

.....

$$M_n = NIS_n B.$$

所以,整个线圈受到的最大磁力矩

$$M = NIB(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = NISB.$$

由此可见,一个确定的平面线圈在已知匀强磁场里所受的最大磁力矩只跟线圈的匝数、线圈面积、通入的电流强度及磁场有关,而与它的几何形状及同一平面内的转轴位置选择无关(图 105).

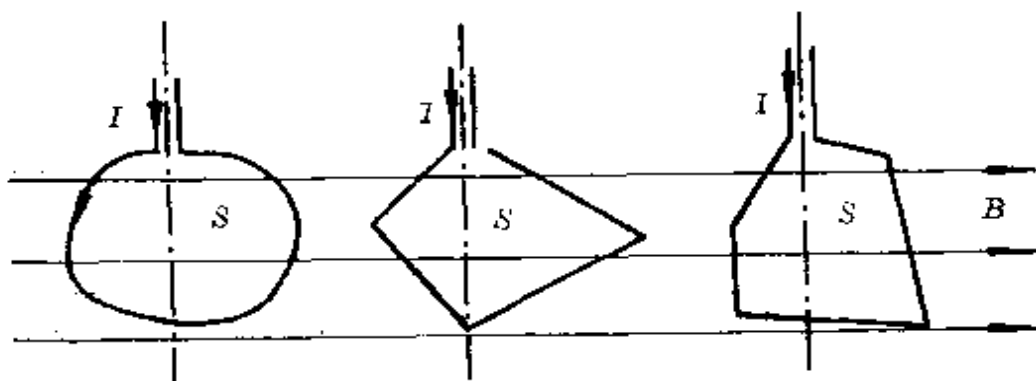


图 105

例 12 一金属转盘半径为 R , 在匀强磁场中以角速度 ω 旋转. 若磁感应强度为 B , 且磁感线垂直于转盘平面, 如图 106 所示. 求金属盘在旋转过程中产生的感应电动势的大小.

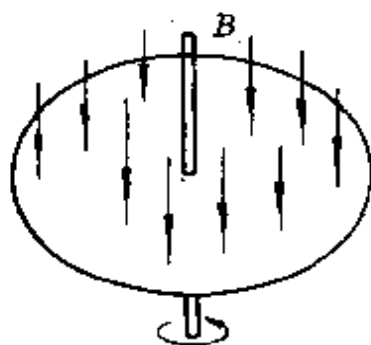


图 106

分析与解答 为了研究方便,我们先研究金属杆在磁场中的旋转情况.

假设金属杆长 l , 绕 O 点匀速旋转, 角速度为 ω . 磁感线垂直于杆旋转所在平面, 如图 107 所示.

假设在 Δt 时间内金属杆从 OA 旋转到 OB , 此时金属杆扫过的面积为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{2} l \omega \Delta t \\ &= \frac{1}{2} l^2 \omega \Delta t. \end{aligned}$$

根据法拉第电磁感应定律,金属杆所产生的感应电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} \\ &= \frac{B \cdot \frac{1}{2} l^2 \omega \Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2} Bl^2 \omega. \end{aligned}$$

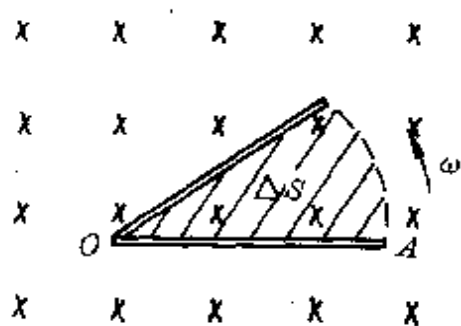


图 107

再回到原来的问题上.对于金属圆盘这样一个整体,我们可以采用微元法将金属转盘分成 n 等份,边缘各分点分别为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.对应于各微段的圆弧与圆心连线构成的条幅共 n 条,如图 108 所示.当 $n \rightarrow \infty$ 时,每根条幅可看成一根长为 R 的金属杆.根据前面的计算结果,对应于各金属杆在磁场中旋转所产生的感应电动势为

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} B\omega R^2.$$

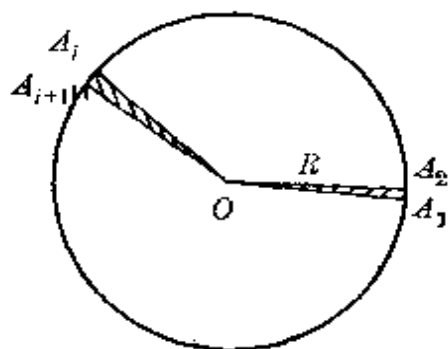


图 108

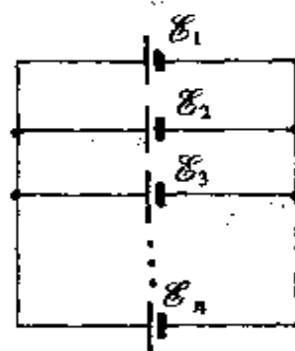


图 109

整个金属转盘产生的电动势应为 n 根金属杆所产生电动势的并联之和.其等效电路如图 109 所示.故得

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \dots = \mathcal{E}_n = \frac{1}{2} B\omega R^2.$$

例 13 光线从折射率为 n_A 的均匀介质射入一折射率均匀变化的介质 n , 然后进入折射率为 n_B 的均匀介质, 如图 110. 试证明折射角 r 与入射角 i 之间满足如下关系:

$$n_A \sin i = n_B \sin r.$$

分析与解答 当光线从一种均匀介质进入另一种均匀介质时, 根据折射定律的斯涅耳公式得

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

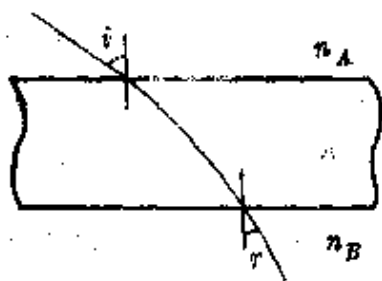


图 110

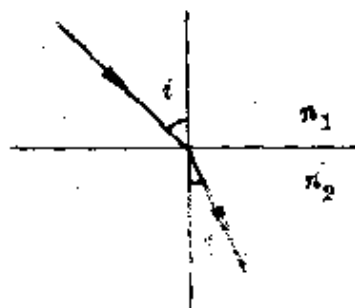


图 111

其中 n_1, n_2 为两种不同介质的折射率, i 为入射角, r 为折射角. 如图 111.

若光线从一种介质进入另一种不均匀介质中时, 又将发生什么现象呢?

为了解决介质折射率逐渐变化的矛盾, 我们将介质 n 所在区域分成 m 薄层, 如图 112 所示. 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 每一薄层中的介质折射率变化极小, 因而可视为一恒量. 故对于每一薄层可应用光的折射定律.

设每一薄层中的折射率依次为 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, 各薄层中光线入射角与折射角分别为:

$$i, r_1; r_1, r_2; r_2, r_3; \dots; r_n, r.$$

根据折射定律,有

$$n_A \sin i = n_1 \sin r_1,$$

$$n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2,$$

$$n_2 \sin r_2 = n_3 \sin r_3,$$

.....

$$n_n \sin r_n = n_B \sin r.$$

比较上述各式,有

$$n_A \sin i = n_B \sin r.$$



图 112

事实上,当光线通过不均匀变化的介质时,将发生弯曲,光线从均匀介质穿过不均匀介质后折射定律仍然适用.

为什么光线会发生弯曲呢? 根据光的电磁理论,光是一种电磁波. 因此,我们可以把一束光线看成是宽度远大于波长的一个平面波的片断. 当光波进入不均匀介质时,在不同区域,二次波以不同速度散开. 在 n 大的地方;

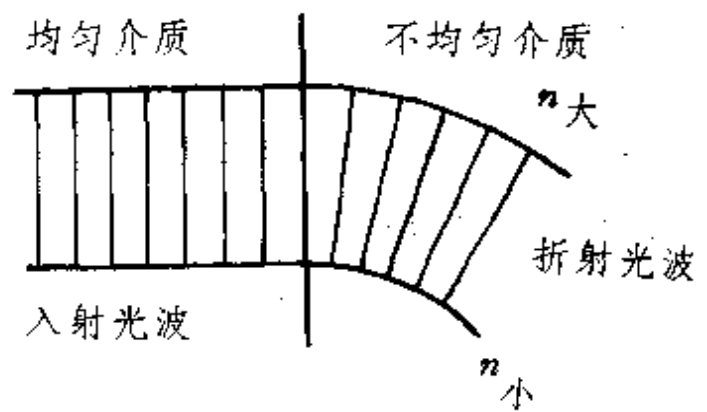


图 113

速度慢,在 n 小的地方速度快. 因此,折射波前,也就是二次波阵面必然发生弯曲. 如图 113 所示.

3. 逼近推理法

在许多具体的物理问题中,有时为了判断题设物理条件是否合理、过程能否发生、过程进展的限度及可能的扩展情况等,常可

先把有关条件或过程推向极端,然后把这个逼近极端情况下得出的结论与题中情况予以比较,从而根据推理作出判断或进一步推知其他可能发生的情况,或用以检验结果的合理性,我们把这种方法称为逼近推理法*。

例 1 图 114 中斜面的倾角 $\alpha = 30^\circ$, 质量分别为 m_1 、 m_2 的两物体用一轻线经定滑轮相连接. 若 $m_1 = 2$ 千克, $m_2 = 1.5$ 千克, m_1 与斜面间的摩擦因数 $\mu = 0.4$. 求 m_1 与斜面间的摩擦力的大小及方向.

分析与解答 物体 m_1 与斜面间的摩擦力是静摩擦还是滑动摩擦力, 摩擦力的方向是沿斜面向上还是向下, 均取决于 m_1 与 m_2 所处的状态. 现应用逼近推理法分析如下:

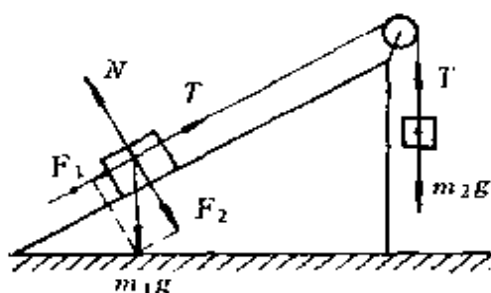


图 114

关于摩擦力 f 方向的判断——

假设 $f = 0$.

推理 若 m_1 处于静止状态, 且没有向上或向下运动的趋势, 则必须满足条件

$$\begin{aligned} T &= F_1 = m_1 g \sin \alpha \\ &= 2 \times 9.8 \times \sin 30^\circ \text{ 牛} = 9.8 \text{ 牛}. \end{aligned}$$

根据已知条件

$$m_2 g = 1.5 \times 9.8 \text{ 牛} = 14.7 \text{ 牛}.$$

* 逼近推理时, 往往要先作假设, 因此, 从假设的角度而言, 属于极端情况假设法 (参见本丛书《猜想与假设》一册). 同一个问题往往可从不同的角度着眼, 本丛书其他各册也有类似情况, 读者可加以综合比较.

显然 $m_2 g > T$.

结论 m_1 必然具有沿斜面上滑的趋势, 因而摩擦力 f 的方向将沿斜面向下.

关于摩擦力性质的判断——

假设 摩擦力 f 达最大值

$$\begin{aligned} f_m &= \mu N = \mu mg \cos 30^\circ \\ &= 0.4 \times 2 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{牛} = 6.79 \text{牛}. \end{aligned}$$

推理 将 f_m 与已知条件比较:

$$\begin{aligned} m_2 g - F_1 &= 14.7 \text{牛} - 9.8 \text{牛} \\ &= 4.9 \text{牛} < f_m. \end{aligned}$$

结论 m_1 将处于静止状态.

综合上述分析, 可作出如下判断:

m_1 与斜面间存在静摩擦力, 方向沿斜面向下, 大小为 $f = 4.9$ 牛.

例 2 有一组光滑的斜面 AB_1 、 AB_2 、 AB_3 、 \dots , 如图 115 所示. 小球从斜面顶端自由滑下, 已知 AB 长 1 米, 若有一小球从斜面顶端滑至底端的时间为 0.6 秒, 求对应斜面的倾角 α .

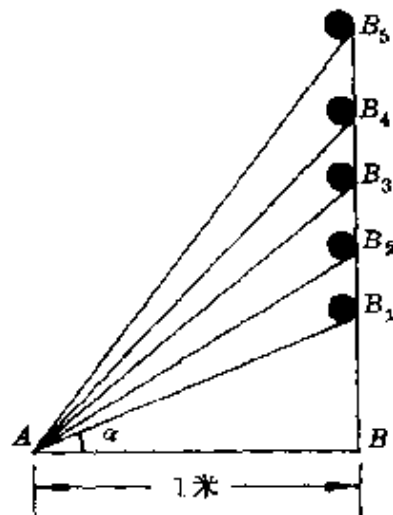


图 115

分析与解答 为了研究对应于小球滑至底端所需时间 t 为 0.6 秒的斜面是否存在或存在几个, 我们必须找出小球在斜面上

的运动时间 t 与倾角 α 的关系. 现应用逼近推理法将 α 推向极端情况予以比较.

假设与推理 若 $\alpha \rightarrow 0$, 即斜面与水平面重合. 因 $v_0 = 0$, $a = g \sin \alpha \rightarrow 0$, 显然小球从斜面顶端到达底端的时间 $t \rightarrow \infty$. 若 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 即斜面与水平面垂直. 斜面长度 $s \rightarrow \infty$, 因 $v_0 = 0$, $a = g \sin \alpha \rightarrow g$. 根据公式 $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$, 显然 $t \rightarrow \infty$.

比较 将上述推理所得结论与已知条件相比较, 可作出如下判断:

当 α 由 0° 逐渐增大时, t 由 ∞ 逐渐减小; 当 α 增大到一定值时, t 将随 α 增大而增大, 直至 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $t \rightarrow \infty$.

由此可粗略地得出 $t-\alpha$ 的关系, 如图 116. 可见本题存在着小球从斜面滚到底端所需时间为某一极小值 t_0 .

设与极小值 t_0 对应的斜面倾角为 α_0 , 由运动学公式

$$t_0 = \sqrt{\frac{2s}{a}},$$

其中, $s = \frac{1}{\cos \alpha}$ $a = g \sin \alpha$.

代入上式得

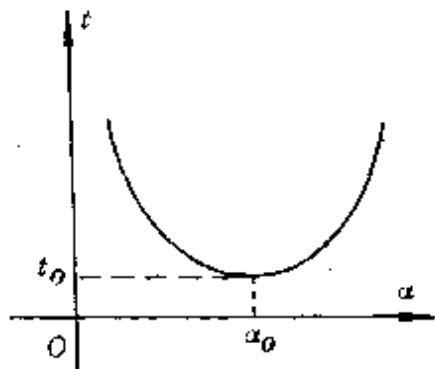


图 116

$$t = \sqrt{\frac{2}{\cos\alpha g \sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{g \sin 2\alpha}}$$

当 t 取极小值 t_0 时, $\sin 2\alpha$ 取最大值, 即

$$2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

此时对应于 α_0 的 t_0 值为

$$t_0 = \sqrt{\frac{4}{g}} \text{ 秒} = 0.64 \text{ 秒} > 0.6 \text{ 秒}$$

结论 对应于 $t = 0.6$ 秒的斜面是不存在的。

从上述结论中还可以看出:

当 $t = t_0$ 时, 对应的斜面倾角 $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$;

当 $t > t_0$ 时, 对应的斜面有两个, 且关于 $\frac{\pi}{4}$ 倾角所在的斜面对称。

例 3 一个质量为 1 千克的物体, 用绳子 a 、 b 系在一根直杆 A 、 B 两点处, 如图 117。若 A 、 B 两点的距离为 1.6 米, 线 a 、 b 均长 1 米, 求直杆旋转角速度 $\omega = 3$ 弧度/秒时, a 、 b 线上张力的大小。

分析与解答 直杆以角速度 ω 匀速转动时, 物体 m 将与直杆具有相同的转速。当 ω 较小时, a 对应较小的角, 此时线 b 松弛, 线中无张力。为了判断线 b 中是否有张力, 我们把条件推向临界状态。

假设 当线 b 恰好伸直但未张紧, 绳中无张力时的转速为 ω_0 。

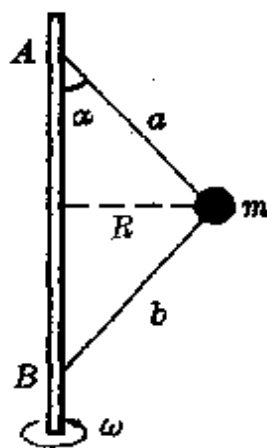


图 117

推理 设 m 的转动半径为 R , 则

$$R = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 - 0.8^2} \text{ 米} = 0.6 \text{ 米}.$$

令此时线 a 中张力为 T_a , 线 b 中张力 $T_b = 0$.

则有 $T_a \sin \alpha = m\omega_0^2 R,$

$$T_a \cos \alpha - mg = 0.$$

解得 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{R}} = 3.5 \text{ 弧度/秒}.$

将 ω_0 与已知条件相比较, 显然有

$$\omega = 3 \text{ 弧度/秒} < \omega_0.$$

结论 线 b 中张力为零.

例 4 图 118 所示为一系列完全相同的、间距相等的木块, 一颗子弹以 700 米/秒的速度击穿第一块后, 速度变为 600 米/秒. 问这颗子弹能击穿几块同样的木块? 设木块对子弹的阻力与子弹速度无关.

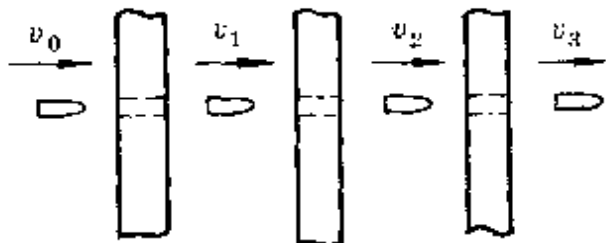


图 118

分析与解答 子弹击中

第一块木板后, 将受到木板阻力 f 的作用而做匀减速运动, 然后击中第二块木板. 子弹在穿过第二块木板的过程中将受到相同的阻力, 故做加速度相同的匀减速运动, 然后穿出第二块木板, ……直至最后静止. 子弹飞行的 $v-t$ 图象如图 119.

为了简化分析过程, 我们把木板的间距推向极端.

假设 各木板的间距 $d \rightarrow 0$, 即将所有木板靠紧, 如同一整块木板一样.

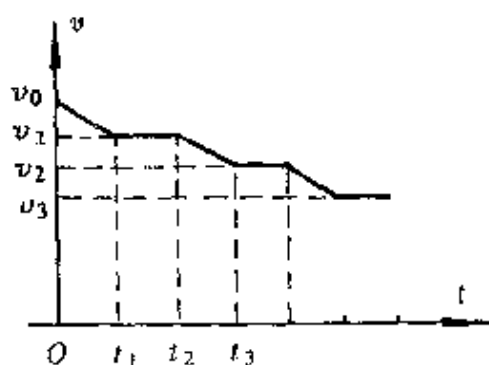


图 119

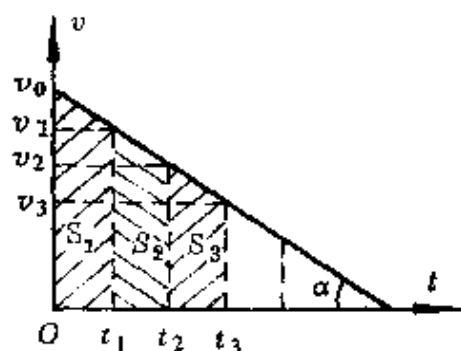


图 120

推理 当子弹击中木板后,将受到木板阻力 f 的作用而做匀减速运动,直至静止,其 $v-t$ 图象如图 120.

在图线上找出子弹穿过各木板所对应的速度 v_1, v_2, v_3, \dots , 则图中打斜线部分的面积即为第一块、第二块、第三块……木板的厚度 s_1, s_2, s_3, \dots . 直线与 t 轴所包围的总面积 S 即为子弹所能穿越的木板厚度.

设子弹所能穿过木板的总块数为 n , 则

$$n = \frac{S}{s_1}$$

其中 $s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\operatorname{tg}\alpha}$,

$$s_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{v_0 - v_1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

所以 $n = \frac{v_0^2/2\operatorname{tg}\alpha}{(v_0 + v_1)(v_0 - v_1)/2\operatorname{tg}\alpha}$

$$= \frac{v_0^2}{(v_0 + v_1)(v_0 - v_1)}$$

$$= \frac{700^2}{(700 + 600)(700 - 600)} (\text{块}) \approx 3.7 (\text{块}).$$

结论 子弹共能击穿 3 块木板.

例 5 半径为 $r = 1$ 米的圆形木板浮在水面上. 在木板圆心正下方、深度为 $h = 0.5$ 米的贮水池底上有一点光源 S . 求水面上方高 $H = 5$ 米的水平天花板上形成的影圈半径 R 是多少? 水的折射率 $n = \frac{4}{3}$.

分析与解答 点光源 S 射向圆形木板边缘的光线进入空气, 然后射到天花板上. 由于木板的遮挡而形成影圈. 图 121 中以直径 AB 为圆的区域就是点光源 S 照不到的影圈.

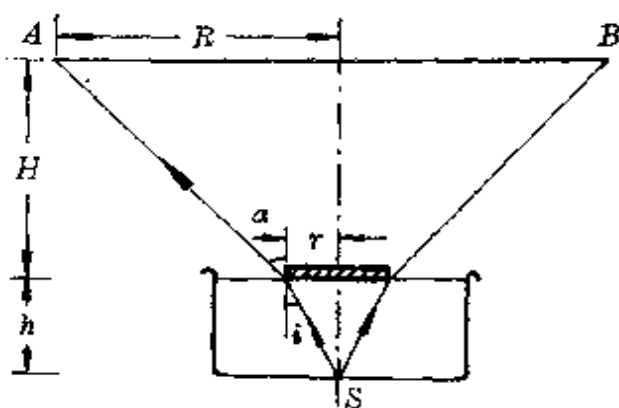


图 121

光线从水中射入空气时, 由折射定律

$$\frac{\sin \alpha}{\sin i} = \frac{4}{3},$$

$$\sin i = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{4}{3} \sin i \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}. \end{aligned}$$

因此, 影圈半径的大小为

$$\begin{aligned} R &= r + H \operatorname{tg} \alpha = r + H \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= r + H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \end{aligned}$$

$$= r + H \cdot \frac{4}{3} \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{9} \frac{r^2}{r^2 + h^2}}},$$

即
$$R = r + \frac{4Hr}{\sqrt{9h^2 - 7r^2}}.$$

代入有关数据,得 $R = 14.64$ 米.

我们应用逼近推理法作进一步的分析:

根据 R 的表达式,当 $9h^2 - 7r^2 \rightarrow 0$ 时,即 h 逼近于 $\frac{\sqrt{7}}{3}r$ 时,天花板上将没有光线照射,此时影圈半径逼近于无穷大.

当 $h > \frac{\sqrt{7}}{3}r$ 时,天花板上影圈为有限的量,圆板半径不变时, h 越大,影圈半径越小.

当 $h \leq \frac{\sqrt{7}}{3}r$ 时,天花板上影圈半径无限大.

例 6 如图 122 所示, A 、 B 两物体质量相等,均以速率 v_0 上升,当绳 DO 和 EO 均与竖直线成 30° 角时,求物体 C 的速度.

分析与解答 一些学生常用如下解法:

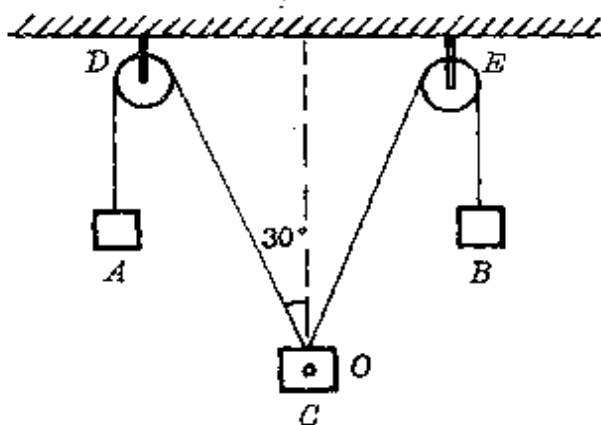


图 122

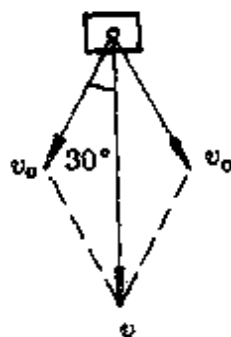


图 123

物体 C 的速度是物体 A 速度与物体 B 速度的合速度(图 123), 故有

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 + v_0^2 + 2v_0^2 \cos 60^\circ} \\ &= v_0 \sqrt{2 + 2\cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{3}v_0. \end{aligned}$$

这个结果是否正确, 我们应用逼近推理法予以检验.

将物体 C 的速度写成一般形式

$$v = v_0 \sqrt{2 + 2\cos\theta}.$$

并将 θ 逼近于极端位置, 即 $\theta \rightarrow 0$, 此时 $v \rightarrow 2v_0$. 与实际情况相比较, 当 $\theta \rightarrow 0$ 时, DO 与 EO 两绳将重合, 显然物体 C 的速度 v 应等于 v_0 . 故上述解法是错误的.

其正确解法如下:

物体 C 降落速度 v 具有两种效果: 一是沿绳 OD 、 OE 方向形成物体 A、B 上升的速度 v_0 , 二是形成绳绕滑轮转动的线速度 v' , 见图 124 所示. 因此, 速度 v 是 v_0 与 v' 的合速度, 即

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_0}{\cos\theta} \\ &= \frac{v_0}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}v_0. \end{aligned}$$

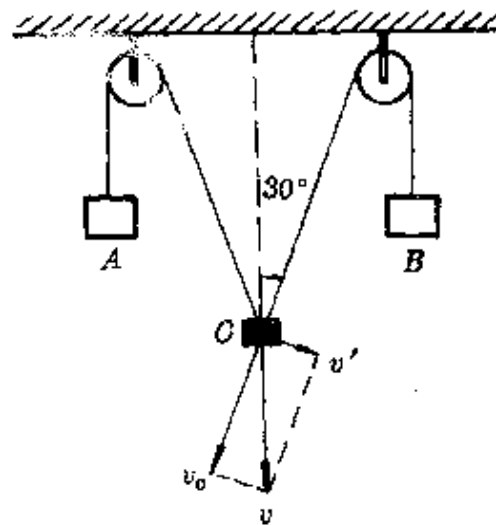


图 124

我们再用逼近推理法予以检验.

将 C 物体下降速度 v 写成一般形式

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta}.$$

将 θ 逼近于零, 此时, $v \rightarrow v_0$. 它符合实际情况, 可见这个答案是合理的.

必须注意, 通过对极端情况的逼近推理检验解题结果, 仅说明某一方面是否合理或是否可靠, 可能还存在其他方面的不合理或不可靠因素. 如果题解结果能经受多种解法的检验, 一定是正确无疑了.

结 束 语

用一把剪刀能剪出一个圆——虽然剪刀的每一剪口都是一小段直线,但许多小段直线累积起来就构成了圆,这就是本书的精髓,它所蕴含的思想内核就是微积分的基础.希望读者阅读这本小册子后,能对此有所领悟,并能把它应用于对实际问题的处理中.

本书初稿是许洪生在徐一山先生支持下完成的,胡金帮老师曾对初稿提供过素材和帮助,吴保证先生和倪汉彬教授审读了初稿,并提出了许多宝贵的意见,最后经王溢然同志作了改编和补充修改.限于作者水平,难免会有不妥和错误之处,希望能得到读者许多有益的指教.

作 者

1992年春节于大丰(初稿)

1992年夏于苏州烟雾楼(定稿)

主要参考资料

[1]胡乔木主编《中国大百科全书》力学卷,中国大百科全书出版社,1985年版.

[2]阎康年著《牛顿的科学发现与科学思想》,湖南教育出版社,1989年版.

[3]查有梁著《牛顿力学的定向研究》,四川教育出版社,1987年版.

[4]申先甲主编《物理学史教程》,湖南教育出版社,1987年版.

[5]朱新民主编《科学史上的重大争论集》,湖南科技出版社,1986年版.

[6]北京物理学会《物理学史专题讲座汇编》.

[7]徐克明著《少年百科丛书物理学传奇》,中国少年儿童出版社.

[8]程守洙、江之永主编《普通物理学》,人民教育出版社,1961年版.

[9]傅承义编著《地球十讲》,科学出版社,1976年版.

[10]朱学志编《数学史数学方法论》选讲.

[11]《中学物理教师手册》编写组编《中学物理教师手册》,上海教育出版社,1984年版.

[12]章达君、赵凯华编译《中学物理奥林匹克趣题选及解答》,

湖南教育出版社,1991年版.

[13]许洪生、王铮主编《中学物理问题思维方法》,陕西科技出版社,1990年版.