同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§9.3 正交子空间与最小二乘问题

定义. (1) 设V为内积空间, W是V的子空间, 向量$\alpha\in V$, 如果对于$w\in W$, 都有$(\alpha,w)=0$, 则称α与子空间W正交, 记为$\alpha\perp W$.

(2) 设V_1与V_2是V中的两个子空间, 如果对于$v_1\in V_1, v_2\in V_2$都有$(v_1,v_2)=0$, 则称V_1与V_2正交, 记为$V_1\perp V_2$.

(3) 设V_1与V_2是V中的两个子空间, 如果$V_1\perp V_2$而且$V=V_1+V_2$, 则称子空间V_2为V_1的正交补.

命题. 如果子空间$V_1,V_2,\cdots,V_s$两两正交, 则和$V_1+V_2+\cdots+V_s$是直和.

证明. 设

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=\mathbf{0}$$

其中$\alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$. 对于$i=1,2,\cdots,s$, 用$\alpha_i$分别与上面等式两端的向量作内积, 再利用正交关系. 得.

$$0=(\alpha_i,\mathbf{0})=(\alpha_i,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=(\alpha_i,\alpha_i)$$

于是$\alpha_i=\mathbf{0}$, 只就证明零向量的分解唯一, 所以$V_1+V_2+\cdots+V_s$是直和.

定理. 内积空间V的每一个子空间V_1都有唯一正交补.

证明. (存在性) 如果$V_1 = \{\mathbf{0}\}$, 则由正交补的定义可以看出V就是$\{\mathbf{0}\}$的正交补.

如果$V_1 \neq \{\mathbf{0}\}$, 则子空间V_1关于V的内积构成了一个内积空间, 在V_1中取一个正交基$e_1, e_2, \cdots, e_m$, 将它扩充成V的一个正交基$e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n$. 令$V_2 = \mathrm{Span}\{e_{m+1}, \cdots, e_n\}$. 则$V_1 \perp V_2$并且$V = V_1 + V_2$, 所以$V_2$是$V_1$的正交补.

(唯一性) 设V_2是V_1的一个正交补, 令$V_1^{\perp} := \{x \in V | x \perp V_1\}$, 由正交补的定义推出$V_2 \subseteq V_1^{\perp}$. 反之, 对于$\alpha \in V_1^{\perp} \subseteq V = V_1 + V_2$, 则

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

其中$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$. 于是

$$0 = (\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1)$$

所以$\alpha_1 = \mathbf{0}$, 即$\alpha = \alpha_2 \in V_2$, 由此推出$V_1^{\perp} = V_2$, 所以$V_1$的正交补唯一就等于$V_1^{\perp}$

定义. 设W是欧氏空间V的子空间, 则$V = W \oplus W^{\perp}$, 对于$\xi \in V$, 有

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

其中$\xi_1 \in W, \xi_2 \in W^{\perp}$, 称$\xi_1$称为向量$\xi$在子空间$W$上的正射影,称$\|\xi_2\|$为向量$\xi$到子空间$W$的距离.

定理(垂线最短定理). 设$\xi \in V, \xi_1$是ξ在W上的正射影, 则对W中任一向量δ, 有

$$\|\xi_2\| = \|\xi - \xi_1\| \leq \|\xi - \delta\|$$

且等号成立当且仅当$\xi_1 = \delta$.

证明. 因为$\xi_2 = (\xi - \xi_1) \perp W$, $\xi_1 - \delta \in W$, 因此$(\xi - \xi_1) \perp (\xi_1 - \delta)$, 从而由$\xi - \delta = (\xi - \xi_1) + (\xi_1 - \delta)$ 推出

$$\|\xi - \delta\|^2 = \|\xi_1 - \delta\|^2 + \|\xi - \xi_1\|^2$$

由于$\|\xi_1 - \delta\| \geq 0$而且等号成立当且仅当$\xi_1 = \delta$.

最小二乘问题.

设有线性方程组

$$AX = \beta$$

其中

$$A = (a_{ij})_{n\times s}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

而且$R(A) < R(\widetilde{A})$, 就是说$AX = \beta$是不相容方程组, 即对于任何$X = (x_1, \cdots, x_s)^t$, 总有

$$AX - \beta \neq \mathbf{0}$$

最小二乘问题是求以下恒正多元函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \|AX - \beta\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}x_j - b_i)^2 > 0$$

的最小解$z_1, z_2, \cdots, z_s$. 并称$Z = (z_1, \cdots, z_s)^t$为方程组$AX = \beta$的最小二乘解.

定理. Z是$AX=\beta$的最小二乘解的充分必要条件Z是方程组$A^tAX=A^t\beta$的解.

证明. 设$V=\mathbb{F}^n$, V上的内积为标准内积. 令

$$\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s \quad W=\mathrm{Span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\},$$

则对于$Y\in W$, 都有$Y=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=AX$. 所以求$AX=\beta$的最小二乘解就是求在$W$中求$\gamma=AZ$使得对$W$中任意向量$Y$, 有

$$\|\beta-\gamma\|\le\|\beta-Y\|$$

这等价于$\gamma=AZ$是β在W上的正射影, 因此当且仅当$(\beta-\gamma)\perp\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$, 即

$$A^t(\beta-\gamma)=A^t(\beta-AZ)=0$$

因而得Z是$AX=\beta$的最小二乘解的充分必要条件为Z是方程组$A^tAX=A^t\beta$.

练习. 习题9.3:1,2,3.