同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§8.2 λ-矩阵的余式定理

定理. 设

$$M(\lambda) = M_0\lambda^m + M_1\lambda^{m-1} + \cdots + M_{m-1}\lambda + M_m$$

是一个m次的n阶λ-方阵, A是一个n阶数字矩阵, 则存在唯一n阶λ-方阵$Q_l(\lambda)$ (或$Q_r(\lambda)$)和唯一的数字矩阵R_l(或R_r), 使得

$$M(\lambda) = (\lambda E - A)Q_l(\lambda) + R_l \quad 和 \quad M(\lambda) = Q_r(\lambda)(\lambda E - A) + R_r$$

并且

$$R_l = M_l(A) \quad 和 \quad R_r = M_r(A)$$

其中

$$\begin{aligned} M_l(A) &= A^m M_0 + A^{m-1}M_1 + \cdots + AM_{m-1} + M_m \\ M_r(A) &= M_0A^m + M_1A^{m-1} + \cdots + M_{m-1}A + M_m \end{aligned}$$

称$Q_l(\lambda)$与R_l为以$\lambda E - A$左除$M(\lambda)$的左商与左余, 同样称$Q_r(\lambda)$与R_r为以$\lambda E - A$右除$M(\lambda)$的右商与右余.

证明. 我们只讨论左的情形，对于右的情形请同学们完成.

(存在性)对$M(\lambda)$的次数进行数学归纳，当$M(\lambda)$的次数为0时，则$M(\lambda)$是数字矩阵，于是$M(\lambda)=(\lambda E-A)\mathbf{0}+M(\lambda)$，所以存在左商0与左余$M(\lambda)$.

当$M(\lambda)$的次数为m时，由于

$$\begin{aligned}&M(\lambda)-(\lambda E-A)\lambda^{m-1}M_0\\&=\lambda^{m-1}(M_1+AM_0)+\lambda^{m-1}M_2+\cdots+\lambda M_{m-1}+M_m\end{aligned}$$

是一个次数不超过$m-1$次的λ-矩阵，所以根据归纳假设存在左商$N(\lambda)$和左余R使得

$$M(\lambda)-(\lambda E-A)\lambda^{m-1}M_0=(\lambda E-A)N(\lambda)+R$$

于是

$$M(\lambda)=(\lambda E-A)(\lambda^{m-1}M_0+N(\lambda))+R$$

因此左商$Q_l(\lambda)=\lambda^{m-1}M_0+N(\lambda)$和左余$R_l=R$的存在.

(唯一性) 如果还有$M(\lambda)=(\lambda E-A)G(\lambda)+S$，则

$$(\lambda E-A)(G(\lambda)-Q_l(\lambda))=R_l-S$$

比较等式两边λ的次数，即得$G(\lambda)=Q_l(\lambda)$和$S=R_l$. 所以$Q_l(\lambda)$与R_l是唯一的.

设

$$Q_l(\lambda) = \lambda^{m-1}N_0 + \lambda^{m-2}N_1 + \cdots + \lambda N_{m-2} + N_{m-1}$$

其中$N_0 \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}&(\lambda E - A)Q_l(\lambda) + R_l\\&= \lambda^m N_0 + \lambda^{m-1}(N_1 - AN_0) + \lambda^{m-2}(N_2 - AN_1) + \cdots\\&+\lambda(N_{m-1} + AN_{m-2}) + (R_l - AN_{m-1})\end{aligned}$$

由于它等于$M(\lambda)$, 比较λ的同次幂的系数, 得

$$\begin{aligned}M_0 &= N_0\\M_1 &= N_1 - AN_0\\M_2 &= N_2 - AN_1\\\cdots & \quad \cdots\\M_{m-2} &= N_{m-2} - AN_{m-3}\\M_{m-1} &= N_{m-1} - AN_{m-2}\\M_m &= R_l - AN_{m-1}\end{aligned}$$

将上面的第一个式子左乘A^m, 第二个式子左乘A^{m-1}, 第三个式子左乘A^{m-2}, $\cdots$, 第$m-1$个式子左乘A^2, 第m个式子左乘A, 最后一个式子左乘E, 然后统统加起来, 就得到

$$A^m M_0 + A^{m-1}M_1 + A^{m-2}M_2 + \cdots + A^2 M_{m-2} + AM_{m-1} + M_m = R_l$$

即$R_l = M_l(A)$.

推论. [Hamilton-Cayley 定理] 设$\Delta_A(\lambda)=|\lambda E-A|$是$A$的特征多项式, 则$\Delta_A(A)=0$.

证明. 设$M(\lambda)=\Delta_A(\lambda)E$, 显然$M(\lambda)$是一个$\lambda$-矩阵, 如果

$$\Delta_A(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

则

$$M(\lambda)=\Delta_A(\lambda)E=E\lambda^n+c_1E\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}E\lambda+c_nE$$

设$(\lambda E-A)^*$是特征矩阵$(\lambda E-A)$的伴随矩阵, 它是一个λ-矩阵, 则

$$M(\lambda)=\Delta_A(\lambda)E=|\lambda E-A|E=(\lambda E-A)(\lambda E-A)^*=(\lambda E-A)(\lambda E-A)^*+\mathbf{0}$$

这说明, 用$(\lambda E-A)$去左除$M(\lambda)$时左余R_l为零. 于是

$$\mathbf{0}=R_l=M_l(A)=\Delta_A(A)$$

定理. $A \sim B$的充分必要条件$\lambda E - A \leftrightarrow \lambda E - B$.

证明. (必要性) 由于$A \sim B$, 所以存在可逆矩阵P, 使得$B = P^{-1}AP$, 于是

$$P^{-1}(\lambda E - A)P = \lambda E - B$$

由于P可以自然地看作可逆λ-矩阵, 所以

$$\lambda E - A \leftrightarrow \lambda E - B.$$

(充分性) 如果$\lambda E-A \leftrightarrow \lambda E-B$, 则存在可逆$\lambda$-矩阵$M(\lambda)$, $N(\lambda)$, 使

$$(\lambda E-A)=M(\lambda)(\lambda E-B)N(\lambda)$$

而$M(\lambda)$可逆, $M(\lambda)^{-1}$也为λ-矩阵, 于是

$$M(\lambda)^{-1}(\lambda E-A)=(\lambda E-B)N(\lambda) \tag{1}$$

令

$$M(\lambda)^{-1}=(\lambda E-B)Q(\lambda)+R,\ \ N(\lambda)=Q_1(\lambda)(\lambda E-A)+R_1$$

代入式(1), 化简后得

$$\begin{aligned}&(\lambda E-B)(Q(\lambda)-Q_1(\lambda))(\lambda E-A)\\&=(\lambda E-B)R_1-R(\lambda E-A)\\&=\lambda(R_1-R)+RA-BR_1\end{aligned}$$

比较等式两边λ的次数得: $Q(\lambda)=Q_1(\lambda)$, $R=R_1$和$RA=BR_1=BR$, 于是

$$R(\lambda E-A)=(\lambda E-B)R \tag{2}$$

令

$$M(\lambda)=(\lambda E-A)Q_2(\lambda)+R_2$$

于是

$$\begin{aligned}
E &= M(\lambda)^{-1}M(\lambda)\\
&= [(\lambda E-B)Q(\lambda)+R][(\lambda E-A)Q_2(\lambda)+R_2]\\
&= (\lambda E-B)[Q(\lambda)(\lambda E-A)Q_2(\lambda)+Q(\lambda)R_2]\\
&+ R(\lambda E-A)Q_2(\lambda)+RR_2
\end{aligned}$$

把(2)代入上式, 得

$$E=(\lambda E-B)[Q(\lambda)(\lambda E-A)Q_2(\lambda)+Q(\lambda)R_2+RQ_2(\lambda)]+RR_2$$

比较等式两边λ的次数, 得

$$E=RR_2$$

即R可逆, 于是

$$A=R^{-1}BR$$

即$A\sim B$.

推论. $A\sim B$的充分必要条件是$(\lambda E-A)$与$(\lambda E-B)$有相同的不变因子组.

注意. 以后, 我们把特征矩阵$\lambda E-A$的不变因子, 也称为数字矩阵A的不变因子

说明. 因为特征矩阵$\lambda E-A$的行列式$|\lambda E-A|$是A的特征多项式, 它总是一个非零多项式, 所以λ-阵$\lambda E-A$始终是满秩矩阵, 因此与它等价的标准形中, 没有零不变因子, 由于不变因子是首1多项式, 且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, 所以它的标准形为

$$\lambda E-A\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&d_1(\lambda)&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&d_s(\lambda)\end{pmatrix}$$

其中$s\leq n$ 且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda),(i=1,2,\cdots,s-1.)$.

对于给定的m次多项式

$$g(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

定义m阶方阵$R(g)$为

$$R(g) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

称$R(g)$为$g(\lambda)$的友阵

由于

$$|\lambda E - R(g)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

而且有一个$m-1$阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}$$

所以m阶方阵$R(g)$的不变因子是

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{m-1\text{个}}, g(\lambda).$$

一般, 如果矩阵A的不变因子组为;

$$1, 1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_s(\lambda)$$

则我们可构造矩阵

$$R = \begin{pmatrix} R(d_1) & & & \\ & R(d_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(d_s) \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中$R(d_i)$是多项式$d_i(\lambda)$的友阵$(i = 1, 2, \cdots, s)$.

由于

$$\lambda E - R = \begin{pmatrix} \lambda E - R(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda E - R(d_s) \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_1(\lambda) \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s(\lambda) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

所以矩阵R与矩阵A有相同不变因子组, 因此$A \sim R$, 我们称(4)给出的矩阵R是A的有理标准形.

例. 求

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

的有理标准形

解. 因为

$$\lambda E-A\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda-1&\\&&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

所以A的不变因子组是: $1; d_1(\lambda)=\lambda-1; d_2(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$. 这时,

$$R(d_1)=(1),\quad R(d_2)=\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

所以A相似于有理标准形

$$R=\begin{pmatrix}1&&\\&0&2\\&1&-1\end{pmatrix}$$

推论. [Frobenius定理] 设数域$\mathbb{F}$上n阶方阵A的不变因子组为: $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$, 则$A$的最小多项式$m_A(\lambda)=d_s(\lambda)$.

证明. 由于A相似的标准形$R=\operatorname{diag}\{R(d_1),\cdots,R(d_s)\}$, 所以$m_A(\lambda)=m_R(\lambda)$, 对于$i=1,2,\cdots,s$, 由于$d_i(\lambda)$是$R(d_i)$的特征多项式, 而且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, 所以

$$d_s(R)=\operatorname{diag}\{d_s(R(d_1)),\cdots,d_s(R(d_s))\}=\operatorname{diag}\{\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\}=\mathbf{0}$$

设

$$d_s(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+a_2\lambda^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$$

则

$$R(d_s)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

设$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_s$是$\mathbb{F}^m$的标准基, 则$R(d_s)\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2, R(d_s)^2\mathbf{e}_1=R(d_s)\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3,\cdots,R(d_s)^{m-1}\mathbf{e}_1=R(d_s)^{m-2}\mathbf{e}_2=\cdots=R(d_s)\mathbf{e}_{m-1}=\mathbf{e}_m$, 由此推出$E,R(d_s),R(d_s)^2,\cdots,R(d_s)^{m-1}$线性无关, 所以对于次数小于等于$m-1$的多项式$f(\lambda)$都有$f(R(d_s))\neq\mathbf{0}$, 从而$f(R)\neq\mathbf{0}$. 因此$m_A(\lambda)=m_R(\lambda)=d_s(\lambda)$.

练习. 习题8.2:2,3,4.