同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

第七章线性变换与相似矩阵

§7.1 线性变换的定义与性质

- 线性变换的定义

定义. 设V, W 是域$\mathbb{F}$ 上的两个线性空间, $\varphi : V \longrightarrow W$ 是V 到W 的一个(单值)映射, 如果对任意的$\alpha, \beta \in V$ 及$k \in \mathbb{F}$, φ 满足条件:

(1) $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

(2) $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$

则称φ 是V 到W 的一个线性映射. 特别, 如果$W = V$, 则称φ 是V上的一个线性变换.

注意: 由线性映射的定义可以容易看出: 同构是一个线性映射, 一个可逆线性映射是一个同构.

例. 设$V=\mathbb{R}^2$是$\mathbb{R}$上的二维线性空间, $A=(a_{ij})$ 是一个2阶实方阵. 对于V的向量$\alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 定义$V$到$V$的映射$\varphi$如下:

$$\varphi(\alpha) := A\alpha = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

由φ的定义可以看出φ是V到V的一个单值映射.
对于$\alpha, \beta \in V$和$k \in \mathbb{R}$, 由矩阵乘法的性质得

$$\varphi(\alpha+\beta) = A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

$$\varphi(k\alpha) = A(k\alpha) = kA\alpha = k\varphi(\alpha)$$

所以φ 是V 上的一个线性变换.

例. 设V 是数域$\mathbb{F}$ 上的一个线性空间, $\lambda \in \mathbb{F}$是一个固定的数. 定义V到V的一个映射P_λ如下: 对任意向量$\alpha \in V$,

$$P_\lambda(\alpha) := \lambda\alpha$$

由P_λ的定义可以看出P_λ是V到V的一个单值映射.
对于$\alpha, \beta \in V$和$k \in \mathbb{F}$, 由向量运算的性质得

$$P_\lambda(\alpha+\beta) = \lambda(\alpha+\beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta = P_\lambda(\alpha) + P_\lambda(\beta)$$

$$P_\lambda(k\alpha) = \lambda(k\alpha) = (\lambda k)\alpha = (k\lambda)\alpha = k(\lambda\alpha) = kP_\lambda(\alpha)$$

所以P_λ 是V 上的一个线性变换.

定义. 我们将称P_λ为V上的数乘变换. 特别当$\lambda = 1$时, 称为V上的恒等变换, 用$\mathcal{E}$表示; 当$\lambda = 0$时, 称为V上的零变换, 用$\mathcal{O}$表示.

由数乘变换的定义可以看出: 对于任意$\alpha \in V$

$$\mathcal{E}(\alpha) = \alpha \quad \mathcal{O}(\alpha) = \mathbf{0}$$

下面的命题给出线性映射的一个等价定义

命题. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间,φ是V上的(单值)映射, 则φ是V上的线性变换充要条件为: 对于任意$\alpha, \beta \in V; k, l \in \mathbb{F}$都有

$$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$$

证明. (必要性)φ是V上的线性变换, 则对于对于任意$\alpha, \beta \in V; k, l \in \mathbb{F}$

$$\varphi(k\alpha + l\beta) = \varphi(k\alpha) + \varphi(l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$$

(充分性) 如果对于任意$\alpha, \beta \in V; k, l \in \mathbb{F}$都有

$$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$$

特别令$k = 1, l = 1$得

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(1\alpha + 1\beta) = 1\varphi(\alpha) + 1\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

令$l = 0$得

$$\varphi(k\alpha) = \varphi(k\alpha + 0\beta) = k\varphi(\alpha) + 0\varphi(\beta) = k\varphi(\alpha)$$

例. 设$M_n(\mathbb{F})$是数域$\mathbb{F}$上全体n阶方阵所组成的线性空间, $A \in M_n(\mathbb{F})$ 是一个固定的方阵. 对任意的$X \in M_n(\mathbb{F})$ 定义$M_n(\mathbb{F})$到$M_n(\mathbb{F})$的映射T 为

$$T(X) := AX - XA$$

证明T是$M_n(\mathbb{F})$上的一个线性变换.

证明. 由T的定义可以看出T是$M_n(\mathbb{F})$到$M_n(\mathbb{F})$的单值映射.
对于任意$B, C \in M_n(\mathbb{F}); k, l \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} T(kB + lC) &= A(kB + lC) - (kB + lC)A = (kAB + lAC) - (kBA + lCA) \\ &= (kAB - kBA) + (lAC - lCA) = k(AB - BA) + l(AC - CA) \\ &= kT(B) + lT(C) \end{aligned}$$

所以T是$M_n(\mathbb{F})$上的一个线性变换.

练习1. 在线性空间$\mathbb{F}[x]$ 或$\mathbb{F}[x]_n$ 中, 对任何一个多项式$f(x)$, 微商算子D 定义为:

$$D(f(x)) := f'(x)$$

请验证D 是$\mathbb{F}[x]$ 或$\mathbb{F}[x]_n$ 上的一个线性变换.

练习2. 设$c[a,b]$ 是闭区间$[a,b]$ 上全体连续函数所组成的线性空间, 对任意的$f(x) \in c[a,b]$, 积分算子I 定义为:

$$I(f(x)) := \int_a^x f(t)dt$$

请验证I 是$c[a,b]$ 上的线性变换.

练习3. 习题7.1: 1(1)(I),(2)(II),(3)(I),(5).

- 线性变换的简单性质

设V是$\mathbb{F}$上线性空间, φ是V上线性变换, 则

(1) $\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$
证明. $\varphi(\mathbf{0})=\varphi(0\mathbf{0})=0\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

(2)$\varphi(-\alpha)=-\varphi(\alpha)$.
证明. $\varphi(-\alpha)=\varphi(-1\alpha)=-1\varphi(\alpha)=-\varphi(\alpha)$.

(3) $\varphi(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s)=c_1\varphi(\alpha_1)+c_2\varphi(\alpha_2)+\cdots+c_s\varphi(\alpha_s)$.
证明. 对s进行数学归纳. 具体证明留作练习.

(4) 如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_s)$线性相关.
证明. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关推出存在不全为零数$c_1,c_2,\cdots,c_s$使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

由(1)和(3)得

$$\mathbf{0}=\varphi(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s)=c_1\varphi(\alpha_1)+c_2\varphi(\alpha_2)+\cdots+c_s\varphi(\alpha_s).$$

所以$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_s)$线性相关.
注意. 线性变换可以把线性无关的向量组变为线性相关的向量组.

定理. 设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是n 维线性空间V 的一个有序基, 对于V 中任意n 个向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, 一定存在唯一的线性变换$T$, 使得

$$T(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

这个定理说明: 一个线性空间上的线性变换, 由它在基上的取值完全确定. 即要确定一个线性变换只要确定这个线性变换在基上值便可, 而且在基上随意取值都可以定义一个V上的线性变换.

证明. (存在性)对任意的$\alpha \in V$, 由于$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是n 维线性空间V 的一个有序基, 所以α可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示而且线性表达式是唯一的. 设

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

定义

$$T(\alpha) := x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n$$

由T的定义推出$T(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$
下面验证T是V 的一个线性变换. 对任意的向量$\alpha, \beta \in V; k \in \mathbb{F}$, 设

$$\begin{aligned}\alpha &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \\ \beta &= y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (x_1 + y_1)\alpha_1 + (x_2 + y_2)\alpha_2 + \cdots + (x_n + y_n)\alpha_n \\ k\alpha &= kx_1\alpha_1 + kx_2\alpha_2 + \cdots + kx_n\alpha_n\end{aligned}$$

根据T的定义得:

$$\begin{aligned}T(\alpha) &= x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n \\ T(\beta) &= y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n \\ T(\alpha + \beta) &= (x_1 + y_1)\beta_1 + (x_2 + y_2)\beta_2 + \cdots + (x_n + y_n)\beta_n \\ T(k\alpha) &= kx_1\beta_1 + kx_2\beta_2 + \cdots + kx_n\beta_n\end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned}T(\alpha+\beta)&=(x_1+y_1)\beta_1+(x_2+y_2)\beta_2+\cdots+(x_n+y_n)\beta_n\\&=(x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n)+(y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n)\\&=T(\alpha)+T(\beta)\\T(k\alpha)&=kx_1\beta_1+kx_2\beta_2+\cdots+kx_n\beta_n\\&=k(x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n)\\&=kT(\alpha)\end{aligned}$$

所以T是V上线性变换.

(唯一性) 如果另外有一个V上的线性变换T_1, 也满足

$$T_1(\alpha_i)=\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则对于任意的向量$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$ 一定有

$$\begin{aligned}T_1(\alpha)&=T_1(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n)\\&=x_1T_1(\alpha_1)+x_2T_1(\alpha_2)+\cdots+x_nT_1(\alpha_n)\\&=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n\\&=T(\alpha)\end{aligned}$$

所以$T_1=T$.

例. 给出$\mathbb{R}^2$上的线性变换形式.

解. 在$\mathbb{R}^2$上取一个有序基

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

设T是$\mathbb{R}^2$上的线性变换. 由定理推出, T由$T(\mathbf{e}_1)$和$T(\mathbf{e}_2)$完全确定. 设

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

对于$\alpha \in \mathbb{R}^2$, 则

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

$$T(\alpha) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} ax \\ bx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cy \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

反之, 设A是一个2阶实矩阵, 对于$X \in \mathbb{R}^2$, 定义$T(X) = AX$. 则由矩阵的运算性质可以推出T是$\mathbb{R}^2$上的线性变换.

练习1. 对于一般$\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}^n$上的线性变换形式是怎样的?

练习2. 习题7.1: 11.

- **线性变换的运算**

定义. 设T_1和T_2是V上的两个线性变换, T_1和T_2的加法记为T_1+T_2, 定义如下:

$$(T_1+T_2)(\alpha):=T_1(\alpha)+T_2(\alpha),\quad \alpha\in V.$$

命题. 设T_1和T_2是V上的两个线性变换, 则T_1+T_2是V上的线性变换.

证明. 由T_1+T_2的定义可以推出T_1+T_2是V到V的单值映射. 对于$\alpha,\beta\in V$, $k\in\mathbb{F}$,

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(\alpha+\beta)&=T_1(\alpha+\beta)+T_2(\alpha+\beta)=T_1(\alpha)+T_1(\beta)+T_2(\alpha)+T_2(\beta)\\&=(T_1(\alpha)+T_2(\alpha))+(T_1(\beta)+T_2(\beta))=(T_1+T_2)(\alpha)+(T_1+T_2)(\beta)\\(T_1+T_2)(k\alpha)&=T_1(k\alpha)+T_2(k\alpha)=kT_1(\alpha)+kT_2(\alpha)=k(T_1(\alpha)+T_2(\alpha))=k(T_1+T_2)(\alpha).\end{aligned}$$

所以T_1+T_2是V上的一个线性变换.

定义. 设$k \in \mathbb{F}$是一个数, T是V上的线性变换, 定义T和数k的乘法记为kT或者记为Tk, 定义如下:

$$(kT)(\alpha) := kT(\alpha) \ \ (= k(T(\alpha))), \quad \alpha \in V,$$

命题. kT 是V 上的一个线性变换.

证明. 由kT 的定义可以看出kT是V到V的单值映射. 对于$\alpha, \beta \in V, l \in \mathbb{F}$,

$$(kT)(\alpha+\beta) = kT(\alpha+\beta) = k(T(\alpha)+T(\beta)) = kT(\alpha)+kT(\beta) = (kT)(\alpha)+(kT)(\beta)$$
$$(kT)(l\alpha) = kT(l\alpha) = k(lT(\alpha)) = (kl)T(\alpha) = (lk)T(\alpha) = l(kT(\alpha)) = l(kT)(\alpha)$$

所以kT 是V 上的一个线性变换.

命题. 设$\mathcal{L}(V,V)$ 是V 上所有线性变换所组成的集合, 则$\mathcal{L}(V,V)$ 关于线性变换的加法和数乘构成一个数域$\mathbb{F}$ 上的线性空间, 即, 线性变换的数乘和加法满足下面八个性质:

(1) 交换律: 对于任意$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,V)$, $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

(2) 结合律: 对于任意$T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V,V)$, $T_1 + (T_2 + T_3) = (T_1 + T_2) + T_3$

(3) 零元素存在: $\mathcal{O}$是零变换, 则对任意$T \in \mathcal{L}(V,V)$ 有$T + \mathcal{O} = T$,

(4) 负元素存在: 对于任意$T_1 \in \mathcal{L}(V,V)$, 定义T_2如下:

$$T_2(\alpha) := -T_1(\alpha), \quad \alpha \in V,$$

则$T_2 \in \mathcal{L}(V,V)$并且$T_1 + T_2 = \mathcal{O}$. (称T_2为T_1的负变换, 记为$-T_1$)

(5) 对于$T \in \mathcal{L}(V,V)$, 则$1T = T$

(6) 对于$k, l \in \mathbb{F}$,$T \in \mathcal{L}(V,V)$, 则$(kl)T = k(lT)$

(7) 对于$k, l \in \mathbb{F}$,$T \in \mathcal{L}(V,V)$, 则$(k+l)T = kT + lT$

(8) 对于$k \in \mathbb{F}$,$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,V)$, 则$k(T_1 + T_2) = kT_1 + kT_2$

证明. 我们只证明(1)和(4), 其余的请同学们证明
(1) 设$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$, 对于$\alpha \in V$, 则

$$(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha) = T_2(\alpha) + T_1(\alpha) = (T_2 + T_1)(\alpha)$$

所以$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$.
(4) 对于$T_1 \in \mathcal{L}(V, V)$, T_2的定义是

$$T_2(\alpha) := -T_1(\alpha) \ \ (-(T_1(\alpha))), \quad \alpha \in V,$$

由T_2的定义可以看出T_2是V到V的单值映射. 对于$\alpha, \beta \in V$, $k \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} T_2(\alpha + \beta) &= -(T_1(\alpha + \beta)) = -(T_1(\alpha) + T_1(\beta)) = (-T_1(\alpha)) + (-T_1(\beta)) = T_2(\alpha) + T_2(\beta) \\ T_2(k\alpha) &= -(T_1(k\alpha)) = -(kT_1(\alpha)) = k(-(T_1(\alpha))) = kT_2(\alpha) \end{aligned}$$

所以$T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$

$$(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha) = T_1(\alpha) + (-T_1(\alpha)) = \mathbf{0}$$

所以$T_1 + T_2 = \mathcal{O}$.

练习1. (习题7.1: 13) 设V, W是二个数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $\mathcal{L}(V, W)$表示由V到W的线性映射组成的集合.

(1) 请类似于集合$\mathcal{L}(V, V)$上的加法和数乘定义给出集合$\mathcal{L}(V, W)$上的加法和数乘定义.

(2) 证明$\mathcal{L}(V, W)$关于上面定义的加法和数乘构成一个数域$\mathbb{F}$上的线性空间.

练习2. 习题7.1: 8(2); 14.

说明. 当$W = \mathbb{F}$时, 则称线性空间$\mathcal{L}(V, W)$为V的对偶空间, 常用记号V^*表示. V^*中的元素称为V上的线性函数.

定义. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间,$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$, 则$T_1$乘以$T_2$记为$T_1T_2$定义如下:

$$T_1T_2(\alpha) := T_1(T_2(\alpha)) \quad \alpha \in V$$

命题. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间,$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$, 则$T_1T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$.

证明. 由T_1T_2的定义可以看出T_1T_2是V到V的单值映射. 对于$\alpha, \beta \in V$和$k \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} T_1T_2(\alpha+\beta) &= T_1(T_2(\alpha+\beta)) = T_1(T_2(\alpha)+T_2(\beta)) = T_1(T_2(\alpha)) + T_1(T_2(\beta)) \\ &= T_1T_2(\alpha) + T_1T_2(\beta) \\ T_1T_2(k\alpha) &= T_1(T_2(k\alpha)) = T_1(kT_2(\alpha)) = kT_1(T_2(\alpha)) = kT_1T_2(\alpha) \end{aligned}$$

所以$T_1T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$.

注意. 当线性空间V和W不同时, 则在集合$\mathcal{L}(V, W)$上无法给出类似于集合$\mathcal{L}(V, V)$上的乘法定义.

命题. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间,则V上的线性变换的乘法满足:

(1) 结合律: 对于任意$T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V, V)$, 恒有$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$

(2) 存在单位元: 对于任意$T \in \mathcal{L}(V, V)$, 恒有$T\mathcal{E} = \mathcal{E}T = T$

(3) 分配律: 对于任意$T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V, V)$, 恒有

$$T_1(T_2 + T_3) = T_1T_2 + T_1T_3, \quad (T_2 + T_3)T_1 = T_2T_1 + T_3T_1$$

证明. 我们只证明(1)和(3)的左分配律, 其余请同学们完成证明.
对于$\alpha \in V$

$$\begin{aligned} T_1(T_2T_3)(\alpha) &= T_1((T_2T_3)(\alpha)) = T_1(T_2(T_3(\alpha))) \\ (T_1T_2)T_3(\alpha) &= (T_1T_2)(T_3(\alpha)) = T_1(T_2(T_3(\alpha))) \end{aligned}$$

所以$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$

$$\begin{aligned} (T_2 + T_3)T_1(\alpha) &= (T_2 + T_3)(T_1(\alpha)) = T_2(T_1(\alpha)) + T_3(T_1(\alpha)) \\ (T_2T_1 + T_3T_1)(\alpha) &= T_2T_1(\alpha) + T_3T_1(\alpha) = T_2(T_1(\alpha)) + T_3(T_1(\alpha)) \end{aligned}$$

所以$(T_2 + T_3)T_1 = T_2T_1 + T_3T_1$

注意. 线性变换的乘法一般不满足交换律, 请同学们给一个反例(参考习题7.1.2).

定义. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, T是V上的线性变换, 则T的乘幂定义如下:

$$\begin{cases} T^0 := \mathcal{E} \\ T^{n+1} := T^n T \end{cases}$$

注意. 由于线性变换的乘法具有结合律, 所以对于非负整数m, n有

$$T^n T^m = T^{n+m} \quad (T^n)^m = T^{nm}$$

于是, 对任意的多项式$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$, 可以定义线性变换$T$ 的多项式,

$$f(T) = a_m T^m + a_{m-1} T^{m-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \mathcal{E}$$

而且$f(T)$ 仍然是V 上的线性变换.
如果

$$h(x) = f(x) + g(x), \quad p(x) = f(x)g(x)$$

则

$$h(T) = f(T) + g(T), \quad p(T) = f(T)g(T).$$

所以同一线性变换T的两个多项式的乘法可以交换, 即

$$f(T)g(T) = g(T)f(T).$$

由于线性变换乘法一般不满足交换律, 所以在运算时要特别注意, 乘法公式一般不能随便使用. 例如

$$
\begin{aligned}
&(T_1T_2)^2 \neq T_1^2{T_2}^2, \\
&(T_1+T_2)^2 \neq T_1^2 + 2T_1T_2 + {T_2}^2, \\
&(T_1+T_2)(T_1-T_2) \neq T_1^2 - {T_2}^2.
\end{aligned}
$$

正确的公式应该是

$$
\begin{aligned}
&(T_1T_2)^2 = T_1T_2T_1T_2, \\
&(T_1+T_2)^2 = T_1^2 + T_1T_2 + T_2T_1 + {T_2}^2, \\
&(T_1+T_2)(T_1-T_2) = T_1^2 + T_2T_1 - T_1T_2 - {T_2}^2.
\end{aligned}
$$

练习. 习题7.1: 3; 6.

- 可逆线性变换

定义. 设T_1是线性空间V上的一个线性变换, 如果存在V上的另一个线性变换T_2, 使得

$$T_1T_2 = T_2T_1 = \mathcal{E}$$

则称线性变换T_1为可逆线性变换, T_2为T_1的逆变换

命题. 如果T是线性空间V上可逆线性变换, 则T的逆变换是唯一的.

证明. 设T_1和T_2都是T的逆变换, 则

$$T_1 = T_1\mathcal{E} = T_1(TT_2) = (T_1T)T_2 = \mathcal{E}T_2 = T_2$$

说明. 由于可逆线性变换的逆变换是唯一的, 所以我们将可逆线性变换T的逆变换记为T^{-1}

定理. 设T是线性空间V上的一个可逆线性变换充要条件T是双射.

证明. 由于T是线性空间V上的一个可逆线性变换, 所以存在T^{-1}使得

$$T^{-1}T = TT^{-1} = \mathcal{E}$$

因此T是双射.
反之如果T是双射, 则存在V到V的单值映射T_1使得

$$T_1T = TT_1 = \mathcal{E}$$

下面说明T_1是线性变换. 对任意的$\alpha, \beta \in V$ 和$k \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}
T_1(\alpha) + T_1(\beta) &= \mathcal{E}(T_1(\alpha) + T_1(\beta)) = T_1T(T_1(\alpha) + T_1(\beta)) = T_1(TT_1(\alpha) + TT_1(\beta)) \\
&= T_1(\mathcal{E}(\alpha) + \mathcal{E}(\beta)) = T_1(\alpha + \beta) \\
kT_1(\alpha) &= \mathcal{E}(kT_1(\alpha)) = T_1T(kT_1(\alpha)) = T_1(kT(T_1(\alpha))) = T_1(k(TT_1)(\alpha)) \\
&= T_1(k\mathcal{E}(\alpha)) = T_1(k\alpha)
\end{aligned}$$

所以T_1是线性变换. 由此推出T是可逆线性变换.

说明. 当T是可逆线性变换时, 可以定义T的负整数幂: 对正整数n, 令

$$T^{-n} = (T^{-1})^n$$

而且乘幂法则成立.

定义. 设V和W是$\mathbb{F}$上的二个线性空间, φ是V到W 一个线性映射, 令

$$\ker(\varphi) := \{\alpha \in V | \varphi(\alpha) = \mathbf{0}\} \quad \varphi(V) := \{\varphi(\beta) | \beta \in V\}$$

则称$\ker(\varphi)$为φ的核, $\varphi(V)$为φ的象.

定理. 设T 是n 维线性空间V 上的一个线性变换, 则$\ker(T)$ 和$T(V)$ 都是V 的子空间, 而且

$$\dim \ker(T) + \dim T(V) = \dim V.$$

证明. 首先验证$\ker(T)$ 和$T(V)$ 都是V 的子空间.
对于$\alpha, \beta \in \ker(T)$和$k, l \in \mathbb{F}$,

$$T(k\alpha + l\beta) = kT(\alpha) + lT(\beta) = k\mathbf{0} + l\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

所以$k\alpha + l\beta \in \ker(T)$, 即$\ker(T)$是$V$ 的子空间.
对于$\alpha, \beta \in T(V)$和$k, l \in \mathbb{F}$, 则存在$\alpha_1, \beta_1 \in V$使得$\alpha = T(\alpha_1), \beta = T(\beta_1)$,

$$k\alpha + l\beta = kT(\alpha_1) + lT(\beta_1) = T(k\alpha_1) + l\beta_1)$$

所以$k\alpha + l\beta \in T(V)$, 即$T(V)$是$V$ 的子空间.

再证明维数公式. 设$\dim\ker(T)=r$. 在$\ker(T)$中取一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 再把它扩充为$V$的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 下面验证$T(\alpha_{r+1}),T(\alpha_{r+2}),\cdots,T(\alpha_n)$是$T(V)$的一个基.

如果存在$k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_n\in\mathbb{F}$使得

$$\begin{aligned}k_{r+1}T(\alpha_{r+1})+k_{r+2}T(\alpha_{r+2})+\cdots+k_nT(\alpha_n)&=\mathbf{0}\\T(k_{r+1}\alpha_{r+1}+k_{r+2}\alpha_{r+2}+\cdots+k_n\alpha_n)&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

即$k_{r+1}\alpha_{r+1}+k_{r+2}\alpha_{r+2}+\cdots+k_n\alpha_n\in\ker(T)$, 所以它可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示, 所以

$$\begin{aligned}&k_{r+1}\alpha_{r+1}+k_{r+2}\alpha_{r+2}+\cdots+k_n\alpha_n=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\\&k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r-k_{r+1}\alpha_{r+1}-k_{r+2}\alpha_{r+2}-\cdots-k_n\alpha_n=\mathbf{0}\end{aligned}$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\ \alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$线性无关推出$k_{r+1}=k_{r+2}=\cdots=k_n=0$. 所以$T(\alpha_{r+1}),T(\alpha_{r+2}),\cdots,T(\alpha_n)$是线性无关的.

对于$\beta\in T(V)$, 则存在$\beta_1\in V$, 使得$\beta=T(\beta_1)$, 设$\beta_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+x_n\alpha_n$, 则

$$\begin{aligned}\beta=T(\beta_1)&=T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+x_n\alpha_n)\\&=x_1T(\alpha_1)+x_2T(\alpha_2)+\cdots+x_rT(\alpha_r)+x_{r+1}T(\alpha_{r+1})+\cdots+x_nT(\alpha_n)\\&=x_{r+1}T(\alpha_{r+1})+\cdots+x_nT(\alpha_n)\end{aligned}$$

所以β可以由$T(\alpha_{r+1}),T(\alpha_{r+2}),\cdots,T(\alpha_n)$线性表示. 因此$T(\alpha_{r+1}),T(\alpha_{r+2}),\cdots,T(\alpha_n)$是$T(V)$的一个基. 由此推出

$$\dim\ker(T)+\dim T(V)=\dim V.$$

引理. 设V和W是$\mathbb{F}$上的二个线性空间, φ是V到W 一个线性映射. 则φ是单射充分必要条件$\ker(\varphi)=\{\mathbf{0}\}$

证明. (必要性) 对于$\alpha\in\ker(\varphi)$, 则$\varphi(\alpha)=\mathbf{0}=\varphi(\mathbf{0})$. 由$\varphi$是单射推出$\alpha=\mathbf{0}$.

(充分性) 如果$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$, 则$\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)=\mathbf{0}$, 由$\varphi$是线性映射推出$\varphi(\alpha-\beta)=\mathbf{0}$, 由$\ker(\varphi)=\{\mathbf{0}\}$推出$\alpha-\beta=\mathbf{0}$, 即$\alpha=\beta$. 所以$\varphi$是单射.

定理. 设V 是n维线性空间, T是V 上的一个线性变换. 则T 是单射充分必要条件T 是满射.

证明. T 是单射充分必要条件$\ker T=\{\mathbf{0}\}$; 由$\dim\ker(T)+\dim T(V)=\dim V$可知$\ker T=\{\mathbf{0}\}$充分必要条件$\dim T(V)=\dim V$; 由于$T(V)$是$V$的子空间, 所以$\dim T(V)=\dim V$充分必要条件$T(V)=V$, 即$T$ 是满射.

练习. 习题7.1: 5(2), 12