同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§10.4 二次曲面的分类

在直角坐标系下, 二次曲面的一般方程是:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+2a_1x_1+2a_2x_2+2a_3x_3+a_0=0$$

令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

则二次曲面的一般方程矩阵形式:

$$\varphi(X)=X^tAX+2C^tX+a_0=0$$

由于A是实对称阵, 所以存在正交阵$O(|O|=1)$, 使得

$$O^tAO = O^{-1}AO = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为$A$的特征值. 所以经旋转变换$X = OY$后, 曲面方程变为

$Y^t(O^tAO)Y + 2(C^tO)Y + l = 0,$ 或者$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2b_1y_1 + 2b_2y_2 + 2b_3y_3 + a_0 = 0$

其中$(b_1, b_2, b_3) = C^tO$.

- $R(A) = 3$

由$R(A) = 3$推出$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$全不为零. 作平移变换

$$y_i = z_i - \frac{b_i}{\lambda_i}, i = 1, 2, 3$$

于是曲面方程化为

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + d = 0$$

其中$d = a_0 - \sum_{i=1}^3 (\frac{b_i}{\lambda_i})^2$.

(1) 当A的正惯性指数$p=3$, 则$\lambda_1>0, \lambda_2>0, \lambda_3>0$.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_3}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个虚椭球面

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, c=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=0$$

这是空间上一个点.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个椭球面

(2) 当A的正惯性指数$p=2$, 则不妨设$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3<0$.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个双叶双曲面

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, c=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=0$$

这是一个椭圆锥面.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个单叶双曲面

(3) 当A的正惯性指数$p=1$, 则不妨设$\lambda_1>0,\lambda_2<0,\lambda_3<0$.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个单叶双曲面

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=0$$

这是一个椭圆锥面.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个双叶双曲面

(4) 当A的正惯性指数$p=0$, 则$\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_3<0$.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个椭球面

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=0$$

这是空间上一个点.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_3}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

这是一个虚椭球面.

- $R(A) = 2, b_3 \neq 0$

由$R(A) = 2$推出$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中有一个为零, 不妨设$\lambda_3 = 0$. 这时曲面方程为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_1 y_1 + 2b_2 y_2 + 2b_3 y_3 + a_0 = 0$$

作平移变换

$$y_i = z_i - \frac{b_i}{\lambda_i}, i = 1, 2,\ y_3 = z_3 - \frac{a_0}{2b_3}$$

于是曲面方程化为

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2b_3 z_3 = 0$$

(1) 当A的正惯性指数$p=2$, 则$\lambda_1>0,\lambda_2>0$. 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, c=2b_3$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+cz_3=0$$

这是一个椭圆抛物面

(2) 当A的正惯性指数$p=1$, 则不妨设$\lambda_1>0,\lambda_2<0$. 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=2b_3$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}+cz_3=0$$

这是一个双曲抛物面

(3) 当A的正惯性指数$p=0$, 则$\lambda_1<0,\lambda_2<0$. 令$a=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}, c=2b_3$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}+cz_3=0$$

这是一个椭圆抛物面.

- $R(A)=2, b_3=0$

由$R(A)=2$推出$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中有一个为零, 不妨设$\lambda_3=0$. 这时曲面方程为

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+2b_1y_1+2b_2y_2+a_0=0$$

作平移变换

$$y_i=z_i-\frac{b_i}{\lambda_i}, i=1,2,\ y_3=z_3$$

于是曲面方程化为

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+d=0$$

这里$d=a_0-\sum_{i=1}^{2}(\frac{b_i}{\lambda_i})^2$.

(1) 当A的正惯性指数$p=2$, 则$\lambda_1>0,\lambda_2>0,$.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_2}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=1$$

这是一个虚椭圆柱面.

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=0$$

这是一条直线.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_2}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$$

这是一个虚椭圆柱面.

(2) 当A的正惯性指数$p=1$, 则不妨设$\lambda_1>0,\lambda_2<0$,.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_2}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$$

这是一个双曲柱面.

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=0$$

这是两条相交的平面.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_2}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=1$$

这是一个双曲柱面.

(3) 当A的正惯性指数$p=0$, 则$\lambda_1<0,\lambda_2<0$,.

当$d>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{-\lambda_2}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$$

这是一个椭圆柱面.

当$d=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=0$$

这是空间上一个点.

当$d<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_1}}, b=\frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{-\lambda_2}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=1$$

这是一个虚椭圆柱面.

- $R(A) = 1, b_2 = b_3 = 0$

由$R(A) = 1$推出$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中只有一个不为零, 不妨设$\lambda_1 \neq 0$. 这时曲面方程为

$$\lambda_1 y_1^2 + 2b_1 y_1 + a_0 = 0$$

作平移变换

$$y_1 = z_1 - \frac{b_1}{\lambda_1}, y_i = z_i, i = 2, 3$$

于是曲面方程化为

$$\lambda_1 z_1^2 + a_0 = 0$$

(1) 当A的正惯性指数$p=1$, 则$\lambda_1>0$.

当$a_0>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{\lambda_1}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}=1$$

这是一对虚平行平面.

当$a_0=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}=0$$

这是一个平面.

当$a_0<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-a_0}}{\sqrt{\lambda_1}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}=1$$

这是一对平行平面.

(2) 当A的正惯性指数$p=0$, 则$\lambda_1<0$.

当$a_0>0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{-\lambda_1}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}=1$$

这是一对平行平面.

当$a_0=0$ 时, 令$a=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}$, 则方程变为

$$\frac{z_1^2}{a^2}=0$$

这是一个平面.

当$a_0<0$ 时, 令$a=\frac{\sqrt{-a_0}}{\sqrt{-\lambda_1}}$, 则方程变为

$$-\frac{z_1^2}{a^2}=1$$

这是一对虚平行平面.

- $R(A)=1, b_2, b_3$**至少有一个不是零**

由$R(A)=1$推出$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中只有一个不为零, 不妨设$\lambda_1\neq 0$. 这时曲面方程为

$$\lambda_1 y_1^2+2b_1y_1+2b_2y_2+2b_3y_3+a_0=0$$

作直角坐标系的旋转和平移

$$\begin{aligned}
z_1&=y_1+\frac{b_1}{\lambda_1}\\
z_2&=\frac{b_2}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}}y_2+\frac{b_3}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}}y_3+\frac{d}{2\sqrt{b_2^2+b_3^2}}\\
z_3&=\frac{-b_3}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}}y_2+\frac{b_2}{\sqrt{b_2^2+b_3^2}}y_3
\end{aligned}$$

其中$d=a_0-\frac{b_1}{\lambda_1}^2$. 于是曲面方程化为

$$\lambda_1 z_1^2+2\sqrt{b_2^2+b_3^2}z_2=0$$

这是一个抛物柱面.

练习1. 设A, B为对称阵, 如果$X^tAX = X^tBX$,对任何$X \in \mathbb{F}^n$, 则$A = B$.

练习2. 试问空间曲面$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 2x - 4y - 6z + 1 = 0$是一个什么曲面?

练习3. 习题9.6:2,3.