第八讲 函数的图象

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读　知识与方法梳理

1．作函数图象的一般方法：描点法、变换法

2．描点法作函数图象的一般步骤

(1)确定定义域；(2)列表；(3)描点；(4)连线成图．

3．变换法作函数图象的常用变换方法

(1)平移变换：

$$y=f(x)\xrightarrow[h<0,\text{ 右移}-h\text{个单位}]{h>0,\text{ 左移}h\text{个单位}}y=f(x+h);$$

$$y=f(x)\xrightarrow[k<0,\text{ 下移}-k\text{个单位}]{k>0,\text{ 上移}k\text{个单位}}y=f(x)+k.$$

(2)对称变换：

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}y=-f(x)$；

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}y=f(-x)$；

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于原点对称}}y=-f(-x)$

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于直线}y=x\text{对称}}y=f^{-1}(x)$；

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于直线}x=a\text{对称}}y=f(2a-x)$；

$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于点}(a,\ 0)\text{对称}}y=-f(2a-x)$.

(3)伸缩变换：

$$y=f(x)\xrightarrow[0<a<1,\text{横坐标伸长到原来的}\frac{1}{a}]{a>1,\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{a}}y=f(ax);$$

$$y=f(x)\xrightarrow[0<b<1,\text{纵坐标缩短到原来的}b\text{倍}]{b>1,\text{纵坐标伸长到原来的}b\text{倍}}y=bf(x).$$

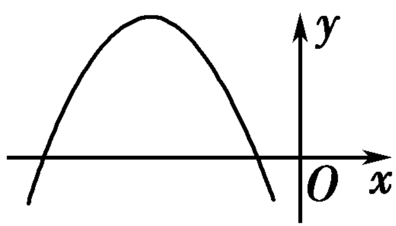
(4)翻折变换

①由$y=f(x)$的图象作出__$y=f(|x|)$__的图象($y=f(|x|)$的图象关于y轴对称，保留y轴右边图象，作出关于y轴对称图象．)

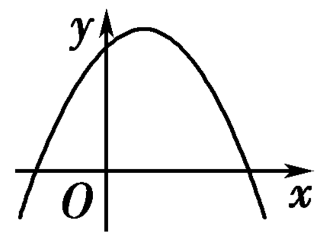
②由$y=f(x)$的图象，作出__$y=|f(x)|$__的图象(保留x轴上方图象，将x轴下方图象翻折上去．)

测

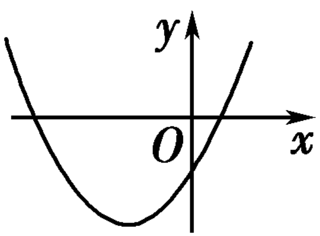
1．(2010·安徽，6)设$abc>0$，二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图象可能是(　　)



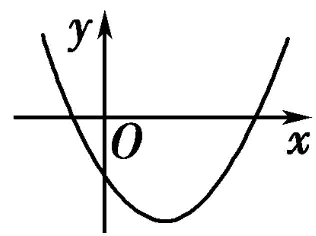
A.



B.



C.



D.

[解析]　A 项，由图象开口向下知 $a<0$，由对称轴位置知 $-\dfrac{b}{2a}<0$，$\therefore b<0$.又$\because abc>0$，

$\therefore c>0$.但由图知 $f(0)=c<0$；

D 项，由图知 $a>0$，$-\dfrac{b}{2a}>0$，$\therefore b<0$.

又$\because abc>0$，$\therefore c<0$，由图知 $f(0)=c<0$.

$\therefore$D 正确.

[答案]　D

2．(2008 **安徽**)在同一平面直角坐标系中，函数 $y=g(x)$的图象与 $y=e^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．而函数 $y=f(x)$的图象与 $y=g(x)$的图象关于 y 轴对称，若 $f(m)=-1$，则 m 的值是(　　)

A．$-e$　　　B．$-\frac{1}{e}$

C．e　　　D．$\frac{1}{e}$

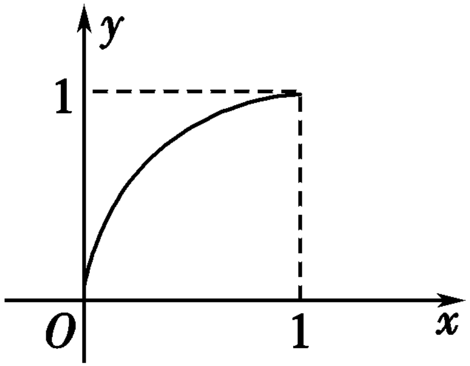
[答案]　B

3．已知定义在区间[0,1]上的函数 $y=f(x)$的图象如图所示，对于满足 $0<x_1<x_2<1$ 的任意 x_1、x_2，给出下列结论：

①$f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$；

②$x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$；

③$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$.



其中正确结论的序号是________.(把所有正确结论的序号都填上)

[答案]　②③

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型1　根据解析式作函数的图象

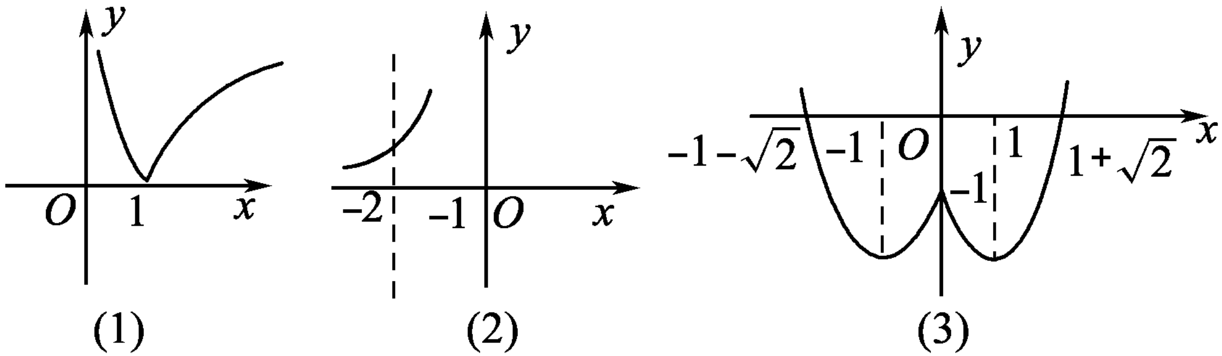
分别画出下列函数的图象：

(1)$y=|\lg x|$；(2)$y=2^{x+2}$；(3)$y=x^2-2|x|-1$.

[解]　(1)$y=\begin{cases}\lg x & (x\geq 1)\\ -\lg x & (0<x<1)\end{cases}$.

(2)将 $y=2^x$ 的图象向左平移 2 个单位.

(3)$y=\begin{cases}x^2-2x-1 & (x\geq 0)\\ x^2+2x-1 & (x<0).\end{cases}$



[点评与警示] 本题先将函数化简，转化为作基本函数的图象的问题.作分段函数的图象时要注意各段间的“触点”. 同时也可利用图象变换得出.

◆变形思考1

作出下列函数的图象：

(1)$y=2^{x+1}-1$；

(2)$y=\dfrac{x+2}{x+3}$；

(3)$y=\sin|x|$；

(4)$y=|\log_2(x+1)|$.

[解]　(1)$y=2^{x+1}-1$的图象可由$y=2^x$的图象向左平移1个单位，得$y=2^{x+1}$的图象，再向下平移一个单位得到$y=2^{x+1}-1$的图象，如图1

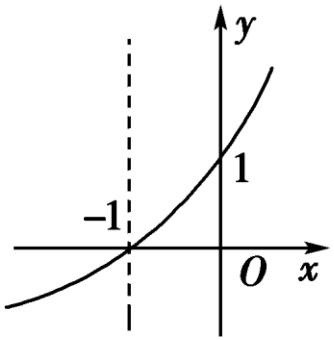


图1

(2)$y=\frac{x+2}{x+3}=1-\frac{1}{x+3}$，可见原函数可由$y=-\frac{1}{x}$向左平移3个单位再向上平移1个单位而得，如图2

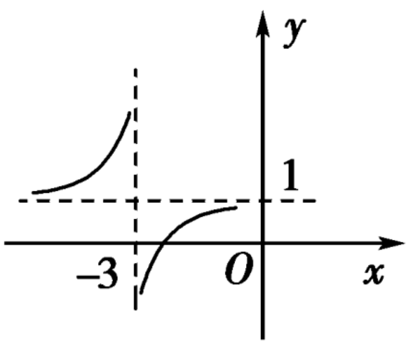


图2

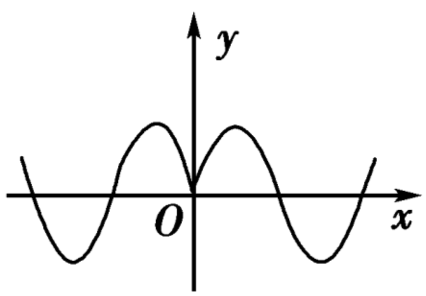


图3

(3)当$x\geq 0$时$y=\sin|x|$与$y=\sin x$的图象完全相同，又$y=\sin|x|$为偶函数其图象关于y轴对称，其图象如图3.

(4)首先做出$y=\log_2 x$的图象c_1，然后将c_1向左平移1个单位，得到$y=\log_2(x+1)$的图象c_2，再把c_2在x轴下方图象作关于x轴对称图象，即为所求图象c_3：$y=|\log_2(x+1)|$.如图4(实线部分).

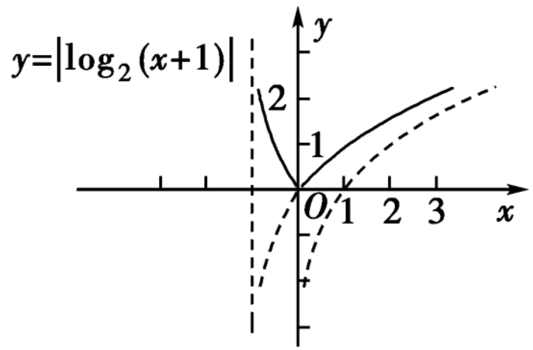


图 4

题型 2　应用数形结合求参数范围

例 2　若不等式 $x^2-\log_a x<0$ 对 $x\in(0,\frac{1}{2})$恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$0<a<1$

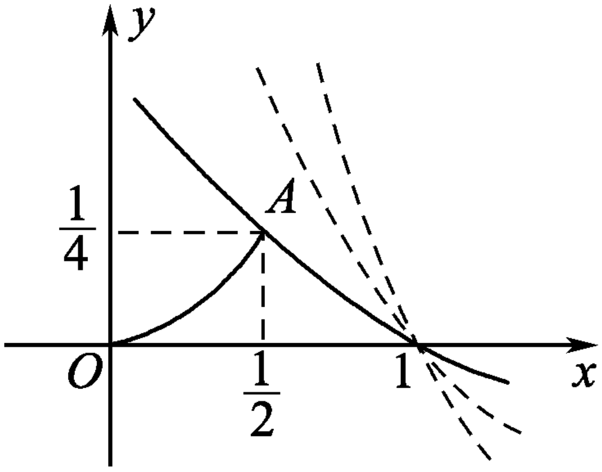
B．$\frac{1}{16}\leqslant a<1$

C．$a>1$

D．$0<a\leqslant\frac{1}{16}$

[解析]　原不等式为 $x^2<\log_a x$，设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\log_a x$，

$\because 0<x<\frac{1}{2}<1$，而 $\log_a x>x^2>0$，$\therefore 0<a<1$，作出 $f(x)$在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 内的图象，如下图所示.



$\because f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$\therefore A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，当 $g(x)$图象经过点 A 时，$\frac{1}{4}=\log_a\frac{1}{2}$ $\Rightarrow a=\frac{1}{16}$，$\because$当 $x\in(0, \frac{1}{2})$时 $\log_a x>x^2$，$\therefore g(x)$图象按如图虚线位置变化，$\therefore \frac{1}{16}\leqslant a<1$，故答案为 B.

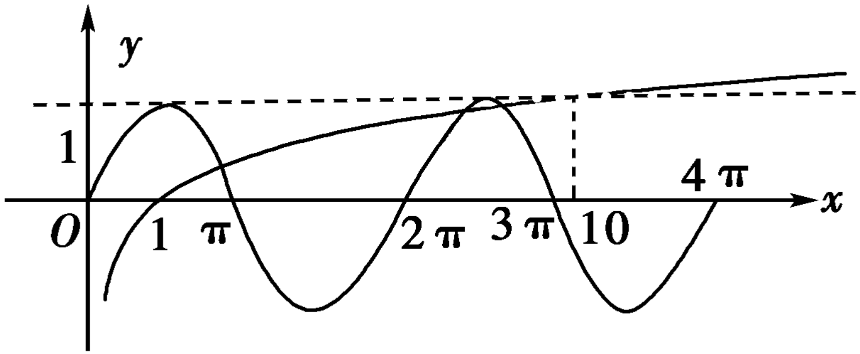
[答案]　B

[点评与警示]　运用函数图象或抓住函数图象特征是解答与函数有关问题的常用方法，这类问题是高考客观题(选择、填空题)的常见题型，应高度注意掌握好解题方法.

◆ 变形思考3

方程$\lg x=\sin x$的实根个数是________个.

[解析]　设$f_1(x)=\lg x$，$f_2(x)=\sin x$，∴$\lg 10=1$，而$3\pi<10<4\pi$，∴$f_1(x)$与$f_2(x)$的图象有3个交点.



[答案]　3

题型3　函数图象的应用

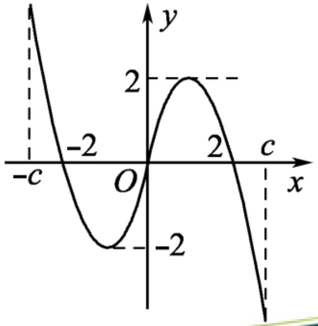
例3　$f(x)$是定义在区间$[-c，c]$上的奇函数，其图象如右图所示，令$g(x)=af(x)+b$，则下列关于函数$g(x)$的叙述正确的是　(　　)

A．若$a<0$，则函数$g(x)$的图象关于原点对称

B．若$a=1,0<b<2$，则方程$g(x)=0$有大于2的实根

C．若$a=-2$，$b=0$，则函数$g(x)$的图象关于y轴对称

D．若$a\neq 0$，$b=2$，则方程$g(x)=0$有三个实根



[解析]　解法一：用淘汰法，当 $a<0$ 时，$g(x)=af(x)+b$ 是非奇非偶函数，不关于原点对称，淘汰 A.当 $a=-2$，$b=0$ 时，$g(x)=-2f(x)$是奇函数，不关于 y 轴对称，淘汰 C.当 $a\neq0$，$b=2$ 时，因为 $g(x)=af(x)+b=af(x)+2$，当 $g(x)=0$ 有 $af(x)+2=0$，$\therefore f(x)=-\frac{2}{a}$，从图中可以看到，当$-2<-\frac{2}{a}<2$ 时，$f(x)=-\frac{2}{a}$才有三个实根，所以 $g(x)=0$ 也不一定有三个实根，淘汰 D.故选 B.

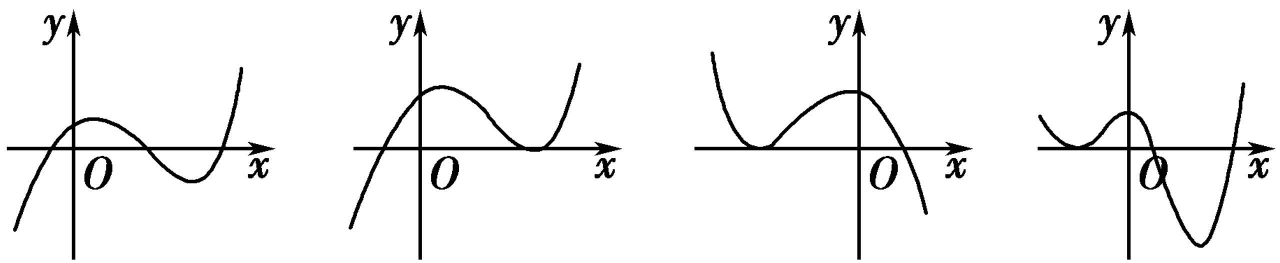
解法二： 当$a=1,0<b<2$时，$g(x)=f(x)+b$，由图可知，$g(2)=f(2)+b=0+b>0$，$g(c)=f(c)+b<-2+b<0$，所以当$x\in(2,c)$，必有$g(x)=0$，故B正确.

[答案]　B

[点评与警示]　本题属于读图题型，解答读图题型的思维要点是：仔细观察图象所提供的一切信息，并和有关知识结合起来，全面判断与分析．上述解法一为淘汰法；解法二为直接法，两法均属于解选择题的通法.

◆变形思考3

(2010·山东，11)函数$y=2^x-x^2$的图象大致是(　　)



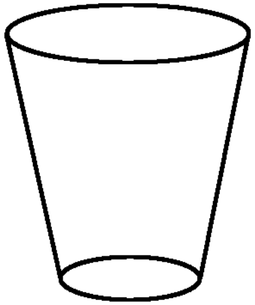
A.　　B.　　C.　　D.

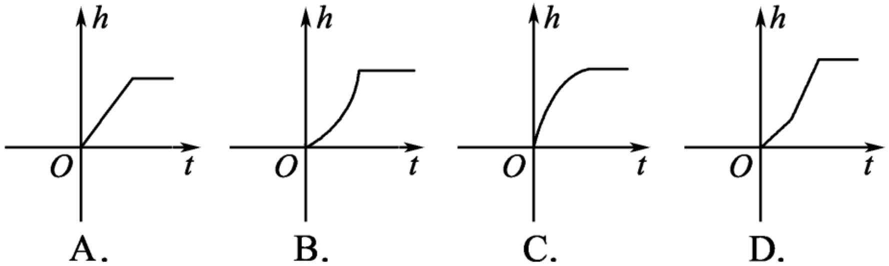
[解]　由图象可知，$y=2^x$与$y=x^2$的交点有3个，说明函数$y=2^x-x^2$的零点有3个，故排除B、C选项，当$x<x_0$(x_0是$y=2^x-x^2$的最小的零点)时，有$x^2>2^x$成立，即$y<0$，故排除D.从而选A.

[答案]　A

题型 4　识图与用图

例 4　(人教A必修1改编)现有如图所示的一个圆台型杯子，向杯中匀速注水，杯中水面的高度h随时间t变化的图象是(　　)



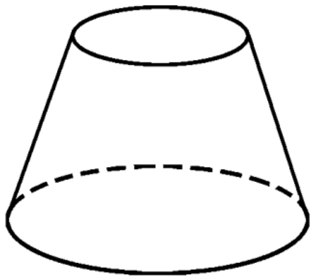


[解析]　由于所给杯子圆台下底面小、上底面大，当时间取$\frac{1}{2}t$时水面h已超过杯高的$\frac{1}{2}$，由函数图象看，应选 C.

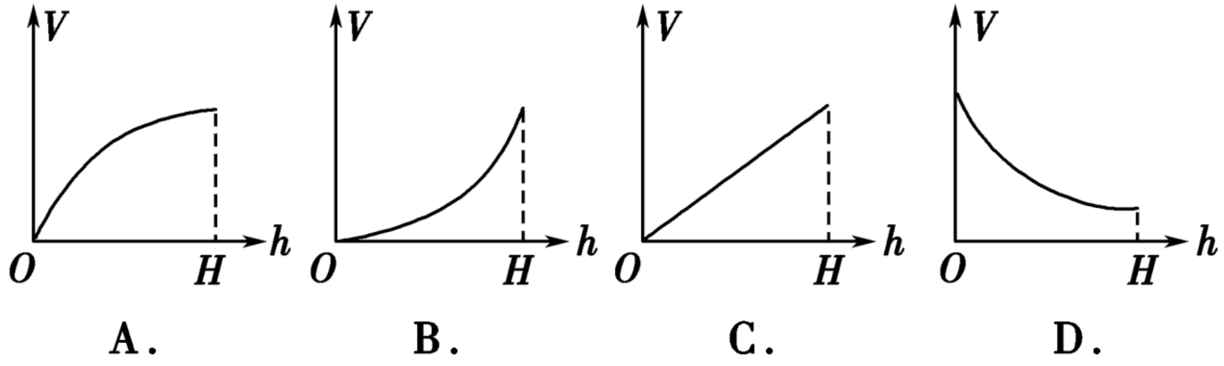
[答案]　C

◆变形思考4

回答下述关于图象的问题：



向形状如右图，高为H的水瓶注水，注满为止，若将注水量V看作水深h的函数，则函数$V=f(h)$的图象是下图中的(　　)



[解析]　水量V显然是h的增函数，将容器的高等分成n段，每一段记为Δh，从开始注水起(即从下到上)计算，每段Δh对应的水量分别记为ΔV_1，ΔV_2，…，ΔV_n，由于容器上小下大，

$\therefore \Delta V_1 > \Delta V_2 > \cdots > \Delta V_n$，即当$h$愈大时，相等高度增加的水量愈少，$\therefore$其图象呈“上凸”形状，故选A.

[答案]　A

JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．运用描点法作图象应避免描点前的盲目性，也应避免盲目地连点成线．要把表列在关键处，要把线连在恰当处．这就要求对所要画图象的存在范围、大致特征、变化趋势等作一个大概的研究．而这个研究要借助于函数性质、方程、不等式等理论和手段，是一个难点．用图象变换法作函数图象要确定以哪一种函数的图象为基础进行变换，以及确定怎样的变换，这也是个难点．

2．函数的对称性

(1)满足条件 $f(x-a)=f(b-x)$的函数的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$对称；特别地，若 $f(a+x)=f(a-x)$，则 $f(x)$图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)点(x, y)关于y轴的对称点为$(-x, y)$；

函数$y=f(x)$关于y轴的对称曲线方程为$y=f(-x)$；

(3)点(x, y)关于x轴的对称点为$(x, -y)$；

函数$y=f(x)$关于x轴的对称曲线方程为$y=-f(x)$；

(4)点(x, y)关于原点的对称点为$(-x, -y)$；

函数$y=f(x)$关于原点的对称曲线方程为$y=-f(-x)$；

(5)点(x, y)关于直线$y=x$的对称点为(y, x)；曲线$f(x, y)=0$关于直线$y=x$的对称曲线的方程为$f(y, x)=0$；点(x, y)关于直线$y=-x$的对称点为$(-y, -x)$；曲线$f(x, y)=0$关于直线$y=-x$的对称曲线的方程为$f(-y, -x)=0$.

(6)形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq0，ad\neq bc)$的图象是双曲线，其两渐近线分别是直线 $x=-\dfrac{d}{c}$(由分母对应的式子为零确定)和直线 $y=\dfrac{a}{c}$(由分子、分母中 x 的系数确定)，对称中心是点$\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟