第 11 章　常微分方程

基础知识与规律总结

11.1　微分方程的基本概念

一、微分方程

定义 1　含有自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

定义 2　只含一个自变量的微分方程,称为常微分方程.

一般形式为:$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$; (1)

标准形式为:$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$. (2)

定义 3　微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数,称为微分方程的阶.

如,$y'+x^2y=0$ 是一阶微分方程,$xy''+y^2=x\sin x$ 是二阶微分方程.

二、常微分方程的解

定义 4　如果函数 $y=y(x)$ 代入方程(1) 或(2) 后,使之成为恒等式,则称函数 $y=y(x)$ 为方程(1) 或(2) 的显式解.

如果由方程 $G(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1) 或(2) 的解,则称 $G(x,y)=0$ 为方程(1) 或(2) 的隐式解.

微分方程的解 $y=y(x)$ 所表示的曲线称为微分方程的积分曲线.

定义 5　若 n 阶微分方程(1) 或(2) 的解为 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个独立的任意常数,则 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为方程(1) 或(2) 的通解.

通解的图形是一簇以任意常量为参数的积分曲线,通常称这一簇曲线为微分方程的积分曲线簇.

定义 6　确定方程(1) 或(2) 的通解中 n 个任意常数的条件

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

称为方程(1) 或(2) 的初始条件.

把微分方程和其所有初始条件合在一起(即求微分方程的满足一定初始条件的特解)的问题叫做定解问题或初值问题.

定义 7　不含任意常数或通解中的任意常数已经被初始条件确定出的解,称为特解.

11.2　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

定义　当微分 dx,dy 前面的项均可分解为仅含 x 或仅含 y 的函数乘积时，这个方程为一阶可分离变量方程.

形式 1:$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$,

解法:当 $g(y)\neq 0$ 时,$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Leftrightarrow\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$,于是方程通解为

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

形式 2:$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$.

解法:当 $N_1(y)M_2(x)\neq 0$ 时,

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0\Leftrightarrow\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx,$$

于是方程通解为

$$\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=-\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

【例 11.1】求下列微分方程的通解.

(1)$ydx+(x^2-4x)dy=0$;　　　(2)$\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$.

【解】(1) 方程属于可分离变量型,经变量分离,得

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{4x-x^2},$$

两边积分,得

$$\ln|y|=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right|+\frac{1}{4}\ln C_1,$$

化简得

$y^4=\frac{Cx}{4-x}$,即$(4-x)y^4=Cx$. 其中 $C=\pm C_1$ 为任意常数.

(2) 方程属于可分离变量型,经变量分离,得

$$\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\frac{\cos y}{\sin y}dy,$$

两边积分,得

$$\ln|\sin x|=-\ln|\sin y|+\ln C_1,$$

化简得

$$\sin x\sin y=C,\text{其中 } C=\pm C_1 \text{ 为任意常数.}$$

二、齐次方程

1. 齐次方程

(1) 定义:如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$中的函数 $f(x,y)$可以写成$\frac{y}{x}$ 的函数,即$\frac{dy}{dx}=$

$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，则这个方程为齐次方程.

(2) 解法：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，两边对 x 求导，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C,$$

变量还原 $u=\frac{y}{x}$ 即得方程的解.

【例 11.2】求解下列微分方程：

(1) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$；　(2) $\frac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$；

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$；　(4) $(1+2e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$.

【解】(1) 令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$，代入原方程，经整理，得

$$\cos u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分，得 $\sin u=-\ln|x|+C$，

即 $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$，其中 C 为任意常数.

(2) 原方程 $\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$，代入原方程，经整理得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2},$$

分离变量得

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\ln|u-1|-\frac{3}{2}\ln|u-2|-\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|+\ln C,$$

化简得

$$\frac{|u-1|}{\sqrt{|u|}\,|u-2|^{\frac{3}{2}}}=C|x|,$$

即 $(y-x)^2=Cy(y-2x)^3$，其中 C 为任意常数.

(3) 原方程 $\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$.

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$，代入原方程，经整理得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u^2}{u},$$

分离变量得

$$u\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C,$$

即 $y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$，其中 C 为任意常数.

(4) 原方程 $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)}{1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}}$.

令 $\dfrac{x}{y} = u$，则 $x = uy$，$\mathrm{d}x = u\mathrm{d}y + y\mathrm{d}u$，代入原方程，经整理得

$$u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{2\mathrm{e}^u(u-1)}{1+2\mathrm{e}^u},$$

分离变量得

$$\frac{(1+2\mathrm{e}^u)}{u+2\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0,$$

两边积分得

$$\ln(u+2\mathrm{e}^u) + \ln y = \ln C,$$

代入 $\dfrac{x}{y} = u$，整理得 $y\left(\dfrac{x}{y} + 2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right) = C$，即 $x + 2y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = C$，其中 C 为任意常数.

2. 一阶可化为齐次微分方程

(1) 形式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

(2) 解法：

① 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) = f\left[\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}\right] = g\left(\frac{y}{x}\right),$$属于齐次型.

② 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$ 时，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = g(a_2x+b_2y).$$

令 $a_2x+b_2y = u$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2g(u)$，属于分离变量型.

③ 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，且 c_1, c_2 不全为 0，解方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases},$$

求出交点(α,β)，

令 $x=X+\alpha, y=Y+\beta$，则原方程变为$\dfrac{dY}{dX}=\varphi\left(\dfrac{Y}{X}\right)$，属于齐次型.

【例 11.3】求解下列微分方程.

(1)$y'=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$；　　(2)$y'=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$.

【解】(1) 解$\begin{cases}y-x+1=0\\y+x+5=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$，令 $X=x+2, Y=y+3$，代入原方程，得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{Y+X}=\frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{Y}{X}+1}.$$

再令 $Y=uX, \dfrac{dY}{dX}=u+X\dfrac{du}{dX}$，代入上式得

$$u+X\frac{du}{dX}=\frac{u-1}{u+1}\Rightarrow\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dX}{X},$$

两边积分，得　$\arctan u+\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|X|+C$，

变量还原，得　$\arctan\left(\dfrac{y+3}{x+2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left[1+\left(\dfrac{y+3}{x+2}\right)^2\right]=-\ln|x+2|+C$，

其中 C 为任意常数.

(2) 原方程变形为　$\dfrac{ydy}{xdx}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}\Rightarrow\dfrac{dy^2}{dx^2}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$，

令 $y^2=\eta, x^2=\xi$，则方程变为$\dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{2\xi+3\eta-7}{3\xi+2\eta-8}$，

解$\begin{cases}2\xi+3\eta-7=0\\3\xi+2\eta-8=0\end{cases}$得$\begin{cases}\xi=2\\\eta=1\end{cases}$，令 $X=\xi-2, Y=\eta-1$，

代入上式得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X+3Y}{3X+2Y}=\frac{2+3\frac{Y}{X}}{3+2\frac{Y}{X}},$$

再令　$Y=uX, \dfrac{dY}{dX}=u+X\dfrac{du}{dX}$，

代入上式得　$\dfrac{3+2u}{2(1-u^2)}du=\dfrac{dX}{X}$，

两边积分得　$\dfrac{1+u}{(1-u)^5}=CX^4$，

变量还原得 $x^2+y^2-3=C(x^2-y^2-1)^5(x^2-2)^4$，其中 C 为任意常数.

三、一阶线性微分方程

标准的一阶线性微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$.　(3)

若 $q(x)\equiv0$，则

$$(3)\Rightarrow y'+p(x)y=0.\quad(4)$$

(4) 式称为一阶线性齐次微分方程.

若 $q(x) \neq 0$,则(3) 式称为一阶线性非齐次微分方程.

方程(4) 为可分离变量方程,其通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

方程(3) 的通解为

$$y = [\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C]e^{-\int p(x)dx}.$$

【例 11.4】求解下列微分方程.

(1)$xy' + y = x^2 + 3x + 2$;

(2)$y\ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$.

【解】(1) 化原方程为一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x + \frac{2}{x} + 3,$$

得其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(x + \frac{2}{x} + 3\right)dx + C] = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x},$$

其中 C 为任意常数.

(2) 原方程 $\Rightarrow \dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x}{y\ln y} = \dfrac{1}{y}$,故

$$x = e^{-\int \frac{1}{y\ln y}dy}\left(\int \frac{1}{y}e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy}dy + C_1\right) = e^{-\ln(\ln y)}\left(\int \frac{1}{y}\ln y dy + C_1\right)$$

$$= \frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y + C_1\right),$$

即

$$2x\ln y = \ln^2 y + C(C = 2C_1),$$

其中 C 为任意常数.

【例 11.5】求解下列微分方程.

(1)$x\dfrac{dy}{dx} = x - y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$;

(2)$(1 + y^2)dx + (x - \arctan y)dy = 0$.

【解】(1) 化原方程为一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1,$$

得其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x},$$

由 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$,得 $C = -1$,

故所求解为
$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}.$$

(2) 如果将 y 看做自变量,将 x 看做因变量,则所给微分方程成为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1 + y^2}x = \frac{\arctan y}{1 + y^2},$$

上述方程的通解为

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-\int \frac{1}{1+y^2}dy}\left(C+\int \frac{\arctan y}{1+y^2}\cdot e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy}dy\right) \\
&= e^{-\arctan y}\left(C+\int \frac{\arctan y}{1+y^2}\cdot e^{\arctan y}dy\right) \\
&= e^{-\arctan y}\left(C+\int \arctan y de^{\arctan y}\right) \\
&= e^{-\arctan y}(C+\arctan y e^{\arctan y}-e^{\arctan y}) \\
&= Ce^{-\arctan y}+\arctan y-1.
\end{aligned}
$$

即 $x = Ce^{-\arctan y}+\arctan y-1$.

四、伯努利方程(数二不作要求)

1. 定义

形如 $y'+p(x)y=q(x)y^n, n\neq 0,1$ 的一阶微分方程称为伯努利方程.

注 ① 当 $n=0$ 时,为一阶线性非齐次微分方程;

② 当 $n=1$ 时,为一阶线性齐次微分方程.

2. 解法

原式 $\Rightarrow y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=q(x)\Rightarrow \dfrac{1}{1-n}(y^{1-n})'+p(x)y^{1-n}=q(x)$.

令 $z=y^{1-n}$,得 $z'=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x)$,此为关于 z 的一阶线性方程.

【例 11.6】 求解微分方程 $y'-\dfrac{4}{x}y=\sqrt{y}x^2$.

【解】 令 $z=\sqrt{y}$,得

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{1}{2}x^2,\text{为一阶线性微分方程.}$$

于是通解为 $z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int \dfrac{1}{2}x^2e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=x^2\left(\dfrac{1}{2}x+C\right)$,

故原方程的通解为 $\sqrt{y}=\dfrac{1}{2}x^3+Cx^2$,其中 C 为任意常数.

【例 11.7】 求微分方程 $2yy'+2xy^2=e^{-x^2}\sin x$ 的通解.

【解】 令 $z=y^2$,则所给的微分方程成为

$$z'+2xz=e^{-x^2}\sin x,\text{为一阶线性微分方程.}$$

它的通解为 $z=e^{-\int 2xdx}\left(C+\int e^{-x^2\sin x}\cdot e^{\int 2xdx}dx\right)$

$$=e^{-x^2}\left(C+\int \sin xdx\right)=Ce^{-x^2}-e^{-x^2}\cos x,$$

故原微分方程的通解为 $y^2=Ce^{-x^2}-e^{-x^2}\cos x$,其中 C 为任意常数.

五、全微分方程(数二不作要求)

1. 定义

若存在可微函数 $u(x,y)$,使得 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,则称一阶微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为全微分方程. $u(x,y)=C$ 为全微分方程的通解,其中 C 是任意

常数.

注 判断方程为全微分方程的方法：

当$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$时，$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程.

2.解法

利用曲线积分$\int_{L(x_0,y_0)}^{L(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$与路径无关的充要条件可得

$$u(x,y)=\int_{L(x_0,y_0)}^{L(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

注 选取(x_0,y_0)的原则：

(1) 简单；(2) $P(x,y)$，$Q(x,y)$在(x_0,y_0)处具有一阶连续的偏导数.

此外，要牢记如下公式：

①$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xy)$，$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)$；

② $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$，$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$；

③ $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$，$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$；

④ $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right)$；$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\frac{y}{x}\right)$.

⑤ $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$.

【例 11.8】求解下列微分方程.

(1) $(2xe^y+3x^2-1)\mathrm{d}x+(x^2e^y-2y)\mathrm{d}y=0$；

(2) $\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$.

【解】(1) $P=2xe^y+3x^2-1$，$Q=x^2e^y-2y$，

于是$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，于是方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x(2x+3x^2-1)\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2e^y-2y)\mathrm{d}y=C.$$

故$x^2+x^3-x+x^2(e^y-1)-y^2=C$，即

$$x^3-x+x^2e^y-y^2=C.$$

【另解】$(3x^2-1)\mathrm{d}x+(-2y)\mathrm{d}y+(2xe^y\mathrm{d}x+x^2e^y\mathrm{d}y)=0$，

$$\mathrm{d}(x^3-x)+\mathrm{d}(-y^2)+\mathrm{d}(x^2e^y)=0,$$

于是得 $$x^2e^y+x^3-x-y^2=C.$$

(2) 因为 $P=\frac{2x}{y^3}$，$Q=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$，

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，于是当$y\neq0$时，方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_1^y \frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=C.$$

故 $x^2-\frac{1}{y}+1+\frac{x^2}{y^3}-x^2=C$，即 $x^2-y^2+y^3=Cy^3$.

11.3　二阶线性微分方程

一、线性微分方程解的性质和结构定理

1. 二阶线性微分方程的概念

二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$.　　(5)

令 $f(x)=0$，则(5)$\Rightarrow y''+p(x)y'+q(x)y=0$.　　(6)

(6) 式称为(5) 式对应的齐次方程；若 $f(x)\neq 0$，称(5) 式为二阶非齐次线性微分方程.

2. 二阶线性微分方程解的性质

(1) 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为方程(6) 的两个解，C_1,C_2 为两个任意常数，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为方程(6) 的解；

(2) 设 $y_1^*(x),y_2^*(x)$ 为方程(5) 的两个解，则 $y_1^*(x)-y_2^*(x)$ 或 $y_2^*(x)-y_1^*(x)$ 为方程(6) 的解；

(3) 假设 $y^*(x),y(x)$ 分别为方程(5)，(6) 的解，则 $y^*(x)+y(x)$ 为方程(5) 的解.

3. 二阶线性微分方程解的结构定理

定理 1　设 $y_1(x),y_2(x)$ 为方程(6) 的两个线性无关解(即$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq C$，$C$ 为常数)，C_1,C_2 为两个任意常数，则方程(6) 的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

推论：设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的 n 个线性无关解(即当且仅当 n 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全为零时，$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$ 才成立)，那么，该方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

定理 2　设 $y_1(x),y_2(x)$ 为方程(6) 的两个线性无关解，$y^*(x)$ 为方程(5) 的一个特解，C_1,C_2 为两个任意常数，则方程(5) 的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x).$$

定理 3　**(叠加原理)**　设 $y_1(x),y_2(x)$ 分别为方程

$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f_1(x)$ 与 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f_2(x)$ 的解，

则 $y=y_1(x)+y_2(x)$ 为方程 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

【例 11.9】设 e^x,xe^x,x^2e^x 分别为二阶非线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的 3 个特解，C_1,C_2 为两个任意常数，则此方程的通解为

(A) $\dfrac{x^2e^x+e^x}{2}C_1+\dfrac{xe^x+e^x}{2}C_2$

(B) $\left(\dfrac{x^2e^x+e^x}{2}-xe^x\right)C_1+(x^2e^x-e^x)C_2$

(C) $\left(\dfrac{x^2e^x+xe^x+e^x}{3}-e^x\right)C_1+\dfrac{x^2e^x+e^x}{2}C_2$

(D) $\left(\dfrac{x^2e^x+xe^x+e^x}{3}-e^x\right)C_1+\dfrac{x^2e^x-e^x}{2}C_2+xe^x$

【解】因为 e^x,xe^x,x^2e^x 分别为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的3个特解，所以 $\dfrac{x^2e^x+xe^x+e^x}{3}$ 为原方程的特解，$\dfrac{x^2e^x+xe^x+e^x}{3}-e^x$，$\dfrac{x^2e^x-e^x}{2}$ 为对应齐次方程的两个线性无关的解，所以(D)正确.

二、可降阶的微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的解法

积分 n 次即可得，注意每积分一次要加一个常数.

2. 不显含 y 的二阶方程 $y''=f(x,y')$ 型的解法

令 $y'=p,y''=p'$ 代入方程可得 $p'=f(x,p)$，其为关于 p 的一阶线性方程.

设有解 $p=\varphi(x,C_1)$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)\Rightarrow y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

3. 不显含 x 的二阶方程 $y''=f(y,y')$ 型的解法

令 $y'=p,y''=\dfrac{d}{dx}(p)=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，

代入方程可得：

$p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$，此为 p 关于 y 的一阶线性方程.

设有解 $p=\psi(y,C_1)$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\psi(y,C_1)\Rightarrow\dfrac{dy}{\psi(y,C_1)}=dx$，积分得

$$\int\frac{dy}{\psi(y,C_1)}=x+C_2.$$

【例 11.10】求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

【解】本题不含 y，则设 $y'=p$，于是 $y''=p'$，原方程变为

$$p'(x+p^2)=p,$$

则 $\dfrac{dx}{dp}=\dfrac{x}{p}+p$，解之得 $x=p(p+C)$，将 $p(1)=1$ 代入左式得 $C=0$，

于是 $x=p^2\Rightarrow y'=\sqrt{x}\Rightarrow y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$，结合 $y(1)=1$ 得 $C=0$，

故 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

【例 11.11】求解下列微分方程.

(1) $yy''-(y')^2=0$； (2) $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$.

【解】(1) 本题不显含 x，令 $y'=p$，将 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入方程可得

$$py\frac{dp}{dy}-p^2=0\Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)=0.$$

当 $p=0$ 时，得 $y'=0$，可解得 $y=C$.

当 $y\dfrac{dp}{dy}-p=0$ 时，可得 $p=C_1y$，即 $y'=C_1y\Rightarrow \ln y=C_1x+\ln C_2$，

于是得 $y=C_2e^{C_1x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(2) 本题不显含 x，令 $y'=p$，将 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入方程可得

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}p^2=0\Rightarrow p\left(\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}p\right)=0.$$

当 $p=0$ 时，得 $y'=0$，可解得 $y=C$.

当 $\dfrac{dp}{dy}+\dfrac{2p}{1-y}=0$ 时，可得 $p=C_1(y-1)^2$，

即
$$y'=C_1(y-1)^2,\ \frac{C_1}{1-y}=x+C_2,$$

于是得 $x=\dfrac{C_1}{1-y}-C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

三、常系数齐次和非齐次线性微分方程

1. 二阶常系数线性齐次微分方程

形式为
$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{7}$$
其中 a_1,a_2 为两个任意常数.

其特征方程为
$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0. \tag{8}$$

方程(8)的特征根与方程(7)的通解之间的关系如下：

① 设 λ_1,λ_2 为(8)的两个互异实根(即 $\Delta=a_1^2-4a_2>0$)，则方程(7)的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，其中 C_1,C_2 为两个任意常数；

② 设 $\lambda=k$ 为(8)的二重根(即 $\Delta=a_1^2-4a_2=0$)，则方程(7)的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{kx}$，其中 C_1,C_2 为两个任意常数；

③ 假设 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 为方程(8)的一对共轭复根(即 $\Delta=a_1^2-4a_2<0$)，则方程(7)的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$，其中 C_1,C_2 为两个任意常数.

注 我们要能从通解看出方程的根，能够写出方程. 即从通解中如果得出特征根为 λ_1,λ_2，则特征方程为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2,$$

于是方程为

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0.$$

【例 11.12】 求解下列方程.

(1) $4y''-12y'+9y=0$; (2) $y''-7y'+12y=0$;

(3) $y''+2y'+3y=0$; (4) $y''+y'-6y=0$.

【解】 (1) 对应的特征方程为

$$4\lambda^2-12\lambda+9=0\Rightarrow(2\lambda-3)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2},$$

故方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{3}{2}x}$, C_1,C_2 为任意常数.

(2) 对应的特征方程为

$$\lambda^2-7\lambda+12=0\Rightarrow(\lambda-3)(\lambda-4)=0\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=4,$$

故方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$, C_1,C_2 为任意常数.

(3) 对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=-1\pm\sqrt{2}i,$$

故方程的通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$, C_1,C_2 为任意常数.

(4) 对应的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-6=0\Rightarrow(\lambda+3)(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=2,$$

故方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$, C_1,C_2 为任意常数.

2. 二阶常系数线性非齐次微分方程

形式为
$$y''+a_1y'+a_2y=f(x). \tag{9}$$

其通解为 $y=$ 对应的齐次方程的通解 $+$ 非齐次方程的特解 $y^*(x)$.

3. 特解 $y^*(x)$ 的求法

(1) 待定系数法.

表 11-1 中 $P_n(x)$ 为系数已知的 n 次多项式, $R_k(x)$, $S_k(x)$ 为系数待定的 k 次多项式, $k=\max\{m,n\}$.

表 11-1

$f(x)$ 形式	条件	所设特解 $y^*(x)$ 的形式
$f(x)=P_n(x)$ 为 n 次多项式	0 不是特征根	$y^*(x)=R_n(x)$
	0 是单特征根	$y^*(x)=xR_n(x)$
	0 是重特征根	$y^*(x)=x^2R_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}$	α 不是特征根	$y^*(x)=e^{\alpha x}$
	α 是单特征根	$y^*(x)=xe^{\alpha x}$
	α 是重特征根	$y^*(x)=x^2e^{\alpha x}$
$f(x)=\cos\beta x$ 或 $\sin\beta x$	$\pm i\beta$ 不是特征根	$y^*(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$
	$\pm i\beta$ 是特征根	$y^*(x)=x[A\cos\beta x+B\sin\beta x]$

【例 11.13】微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

【分析】利用待定系数法确定二阶常系数线性非齐次方程特解的形式.

【解】对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+1=0,\text{特征根为 }\lambda=\pm i.$$

对 $y''+y=x^2+1=e^{0x}(x^2+1)$ 而言,因 0 不是特征根,从而其特解形式可设为

$$y_1^*=ax^2+bx+c;$$

对 $y''+y=\sin x=I_m(e^{ix})$,因 i 为特征根,从而其特解形式可设为

$$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x);$$

从而 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x).$$

故选(A).

【例 11.14】求解下列微分方程.

(1) $y''-2y'+y=e^x$;　　(2) $y''+y=\cos x$;

(3) $y''+2y'-3y=e^{2x}$;　　(4) $y''+4y'+5y=\sin 2x$.

【解】(1) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,C_1,C_2 为任意常数.

下面用待定系数法求方程的特解.

因为 $\alpha=1$ 为特征方程的重根,所以可设 $y^*=Ax^2e^x$,则

$$(y^*)'=Ax(2+x)e^x,(y^*)''=A(x^2+4x+2)e^x,$$

把 y^*,$(y^*)'$,$(y^*)''$ 代入方程中,得 $A=\frac{1}{2}$.

所以原方程的特解为 $y^*=\frac{1}{2}x^2e^x$.

故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x$,$C_1$,$C_2$ 为任意常数.

(2) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_1=i,\lambda_2=-i,$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$,C_1,C_2 为任意常数.

下面用待定系数法求方程的特解.

因为 $\lambda=\pm i$ 为特征根,所以可设 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$,则

$$(y^*)'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x),$$

$$(y^*)''=2(-A\sin x+B\cos x)-x(A\cos x+B\sin x).$$

把 y^*,$(y^*)'$,$(y^*)''$ 代入方程中,得 $A=0,B=\frac{1}{2}$.

所以原方程的特解为 $y^*=\frac{1}{2}x\sin x$.

故原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

(3) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda-3=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=1,$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$，C_1，C_2 为任意常数.

下面用待定系数法求方程的特解.

因为 $\alpha=2$ 不是特征根，所以可设 $y^*=Ae^{2x}$，则

$$(y^*)'=2Ae^{2x},(y^*)''=4Ae^{2x},$$

把 y^*，$(y^*)'$，$(y^*)''$ 代入方程中，得 $5Ae^{2x}=e^{2x}\Rightarrow A=\frac{1}{5}$.

所以方程的特解为 $y^*=\frac{1}{5}e^{2x}$.

故原方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+\frac{1}{5}e^{2x}$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

(4) 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-2\pm 2i,$$

故对应的齐次方程的通解为 $y=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

下面用待定系数法求方程的特解.

因为 $2i$ 不是特征根，所以可设 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$，

则 $\qquad (y^*)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,(y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x,$

把 y^*，$(y^*)'$，$(y^*)''$ 代入方程中，

得
$$\begin{cases}B-8A=1\\A+8B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{8}{65}\\[2mm]B=\dfrac{1}{65}\end{cases}.$$

所以方程的特解为 $y^*=-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x)$.

故原方程的通解为

$y=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x)$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数.

【例 11.15】 求解微分方程 $y''+4y'+4y=e^{\alpha x}$，其中 α 为实数.

【解】 对应的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，

故对应齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

现在求非齐次方程的一个特解.

① 当 $\alpha\neq-2$ 时，设特解 $y^*=Ae^{\alpha x}$，则 $(y^*)'=\alpha Ae^{\alpha x}$，$(y^*)''=\alpha^2Ae^{\alpha x}$，

代入原方程得

$$A=\frac{1}{(\alpha+2)^2},\text{则特解为 } y^*=\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha+2)^2};$$

② 当 $\alpha=-2$ 时，设特解为 $y^*=Ax^2e^{-2x}$，则

$$(y^*)'=2Axe^{-2x}-2Ax^2e^{-2x},(y^*)''=2Ae^{-2x}-8Axe^{-2x}+4Ax^2e^{-2x},$$

代入原方程得 $A=\dfrac{1}{2}$，

故非齐次方程的通解为

$$y^*=\begin{cases}(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(\alpha+2)^2}e^{\alpha x}, & \alpha\neq-2\\(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{\alpha x}, & \alpha=-2\end{cases}.$$

【例 11.16】 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 是任意常数）为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$ (B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$ (D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

【分析】 本题已知微分方程的通解，反求微分方程的形式，一般根据通解的形式分析出特征值，然后从特征方程入手.

【解】 因为 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 是任意常数）为通解，所以微分方程的特征值为 $1,\pm 2i$. 于是特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-2i)(\lambda+2i)=0$，即

$$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0.$$

故所求的微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$. 故选(D).

【例 11.17】 函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$ (B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$ (D) $y''+y'-2y=3e^x$

【解】 由所给解的形式，可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=-2.$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2)=0,\text{即 }\lambda^2+\lambda-2=0.$$

故对应的齐次微分方程为

$$y''+y'-2y=0.$$

又 $y^*=xe^x$ 为原微分方程的一个特解，而 $\lambda=1$ 为特征单根，故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x)=Ce^x$（C 为常数）. 所以综合比较四个选项，应选(D).

【例 11.18】 已知 $y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性常系数非齐次微分方程的三个解，求该微分方程.

【解】 设所求方程为 $y''+py'+qy=f(x)$，只需求出 $p,q,f(x)$ 即可.

由线性方程解的性质，

得 $y_1-y_3=e^{-x},(y_1-y_2)+(y_1-y_3)=e^{2x}$

是对应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的解，

所以，$\lambda_1=-1,\lambda_2=2$ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根，根据根与系数的关系，得 $p=-1$，$q=-2$.

将 $y_1 = xe^x + e^{2x}$ 代入方程 $y'' - y' - 2y = f(x)$，可得 $f(x) = (1-2x)e^x$.

所以，所求方程为 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$.

四、欧拉方程(数二不作要求)

1. 定义

各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同的方程，即形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

的方程，称为欧拉方程，其中 $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n$ 为常数.

2. 解法

作自变量 x 的变量替换，令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$，把 y 看做 t 的函数，则

$$xy' = x \cdot \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} = Dy;$$

$$x^2 y'' = D(D-1)y;$$

$$\vdots$$

$$x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y.$$

于是欧拉方程化为 $P_n(D)y = f(e^t)$，解出 $y = y(t)$，

则 $y = y(\ln x)$ 就是欧拉方程的解.

【例 11.19】计算微分方程 $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$.

【解】令 $x = e^t$，即 $t = \ln x$，则原方程可变化为

$$D(D-1)y + Dy + y = 2\sin t,$$

即 $y'' + y = 2\sin t$.

相应的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$，解之得 $\lambda = \pm i$.

则对应的齐次方程通解为 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

下面用待定系数法求特解.

因为 $\lambda = \pm i$ 是特征根，所以设特解 $y^* = t(A\cos t + B\sin t)$，

则 $$y^{*\prime} = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t)$$

$$y^{*\prime\prime} = -2A\sin t + 2B\cos t + t(-A\cos t - B\sin t),$$

代入原方程得

$$-2A\sin t + 2B\cos t + t(-A\cos t - B\sin t) + t(A\cos t + B\sin t) = 2\sin t,$$

即 $-2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t$.

解之得 $A = -1, B = 0$，即特解为 $y^* = -t\cos t$，

所以原式的通解为

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t,$$

即

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \ln x \cos(\ln x),$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

习　题　十　一

一、选择题

1. 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解是

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$.　　B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.
C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　【　】

2. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于

A. 2π.　　B. π.　　C. $e^{\frac{\pi}{4}}$.　　D. $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.　　【　】

3. 设 $p(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且不恒等于零,$y_1(x),y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同的特解,则下列结论中不成立的是

A. $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\equiv$ 常数(假设 $y_1(x)\neq 0$).
B. $C(y_1(x)-y_2(x))$ 构成方程的通解.
C. $y_1(x)-y_2(x)=$ 常数.
D. $y_1(x)-y_2(x)$ 在任何一点不等于零.　　【　】

4. 设 $p(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续非负,如果微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 的每一个特解 $y(x)$ 都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$,则 $p(x)$ 必然满足

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$.　　B. $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$.
C. $\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 收敛.　　D. $\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 发散.　　【　】

5. 具有特解 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是

A. $y'''-y''-y'+y=0$.　　B. $y'''+y''-y'-y=0$.
C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　　D. $y'''-2y''-y'+2y=0$.　　【　】

6. 下列微分方程中,是全微分方程的是

A. $y(x-2y)dx-x^2dy=0$.　　B. $(x^2+y^2)dx+xydy=0$.
C. $2e^ydx+(xe^{2y}-2y)dy=0$.　　D. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$.
【　】

二、填空题

1. 微分方程 $y''+(y')^2=0$ 的通解是________.

2. 微分方程 $y''+2y'+y=3xe^{-x}$ 有形如________的特解.

3. 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为________.

4. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$ 满足 $y(2\pi)=0$ 的解是________.

5. 欧拉方程 $(x+1)^2y''-(x+1)y'+y=6(x+1)\ln(x+1)$ 的通解为________.

三、计算题

1. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

2. 求初值问题$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0(x>0)\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$的解.

3. 设函数 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上连续,若由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=1,x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程,并求该微分方程满足条件 $y\Big|_{x=2}=\frac{2}{9}$的解.

4. 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2,若\ x<1\\ 0,若\ x>1\end{cases}$,试求在$(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$,使之在$(-\infty,1)$ 和$(1,+\infty)$ 内都满足所给方程,且满足条件 $y(0)=0$.

5. 求微分方程 $y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的解.

参 考 答 案

一、1. B 2. D 3. C 4. D 5. C 6. D

二、1. $y=\ln(x+C_1)+C_2$. 2. $y^*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$.

3. $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$. 4. $y=\frac{1-\cos x}{x}$.

5. $y=c_1(x+1)+c_2(x+1)\ln(x+1)+(x+1)\ln^3(x+1)$.

三、1. $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$,需讨论 $x>0$ 和 $x<0$.

2. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

3. 通解为 $y-x=Cx^3y$;满足条件的解为 $y-x=-x^3y$(或 $y=\frac{x}{1+x^3}$).

4. $y(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1,x<1\\(1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{2x},x>1\end{cases}$;若补充定义函数值 $y|_{x=1}=\mathrm{e}^2-1$,则得在$(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $y(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1,x\leqslant 1\\(1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{2x},x>1\end{cases}$.

5. $y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(3+2x)\mathrm{e}^{2x}$.