一. 函数的概念

1. 用变上、下限积分表示的函数

（1）$y=\int_0^x f(t)dt$，其中 $f(t)$ 连续，则 $\frac{dy}{dx}=f(x)$

（2）$y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 可导，$f(t)$ 连续，

则 $\frac{dy}{dx}=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

2. 两个无穷小的比较

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=l$

（1）$l=0$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记以 $f(x)=0[g(x)]$，称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小。

（2）$l\neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小。

（3）$l=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记以 $f(x)\sim g(x)$

3. 常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

二. 求极限的方法

1. 利用极限的四则运算和幂指数运算法则

2. 两个准则

准则 1. 单调有界数列极限一定存在

（1）若 $x_{n+1}\le x_n$（n 为正整数）又 $x_n\ge m$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\ge m$

（2）若 $x_{n+1}\ge x_n$（n 为正整数）又 $x_n\le M$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\le M$

准则 2.（夹逼定理）设 $g(x)\le f(x)\le h(x)$

若 $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$

3. 两个重要公式

公式 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

公式 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$；$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$；$\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e$

4. 用无穷小重要性质和等价无穷小代换

5. 用泰勒公式（比用等价无穷小更深刻）（数学一和数学二）

当 $x\to 0$ 时，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\Lambda+\frac{x^n}{n!}+0(x^n)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\Lambda+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\Lambda+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+0(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\Lambda+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+0(x^n)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\Lambda+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+0(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\Lambda+\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+0(x^n)$$

6. 洛必达法则

法则 1.（$\frac{0}{0}$ 型）设（1）$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$

（2）x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在

（3）$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）

则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或 ∞）

（注：如果 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形，则不能得出 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形）

法则 2.（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）设（1）$\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$

（2）x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在

（3）$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或$\infty$）

则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$（或$\infty$）

7．利用导数定义求极限

基本公式：$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ [如果存在]

8．利用定积分定义求极限

基本公式 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$ [如果存在]

三．函数的间断点的分类

函数的间断点分为两类：

（1）第一类间断点

设x_0是函数$y=f(x)$的间断点。如果$f(x)$在间断点x_0处的左、右极限都存在，则称x_0是$f(x)$的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

（2）第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

四．闭区间上连续函数的性质

在闭区间$[a,b]$上连续的函数$f(x)$，有以下几个基本性质。这些性质以后都要用到。

定理 1.（有界定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$必在$[a,b]$上有界。

定理 2.（最大值和最小值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在这个区间上一定存在最大值M和最小值m。

其中最大值M和最小值m的定义如下：

定义　设$f(x_0)=M$是区间$[a,b]$上某点x_0处的函数值，如果对于区间$[a,b]$上的任一点x，总有$f(x)\le M$，则称M为函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值。同样可以定义最小值m。

定理 3.（介值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且其最大值和最小值分别为M和m，则对于介于m和M之间的任何实数c，在$[a,b]$上至少存在一个ξ，使得

$$f(\xi)=c$$

推论：如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则在(a,b)内至少存在一个点ξ，使得

$$f(\xi)=0$$

这个推论也称为零点定理

五．导数与微分计算

1．导数与微分表

$(c)'=0$　　$d(c)=0$

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$实常数）$d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$（$\alpha$实常数）

$(\sin x)'=\cos x$　　$d\sin x=\cos xdx$

$(\cos x)'=-\sin x$　　$d\cos x=-\sin xdx$

$(\tan x)'=\sec^2 x$　　$d\tan x=\sec^2 xdx$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$　　$d\cot x=-\csc^2 xdx$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$d\sec x=\sec x\tan xdx$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$　　$d\csc x=-\csc x\cot xdx$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0,a\ne 1)$

$d\log_a x=\dfrac{dx}{x\ln a}\ (a>0,a\ne 1)$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$d\ln x=\dfrac{1}{x}dx$

$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\ne 1)$

$da^x=a^x\ln adx\ (a>0,a\ne 1)$

$(e^x)' = e^x \qquad de^x = e^x dx$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad d\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \qquad darc\cot x = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$d\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$d\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

2．四则运算法则

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

3．复合函数运算法则

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

对应地 $dy=f'(u)du=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

由于公式 $dy=f'(u)du$ 不管 u 是自变量或中间变量都成立。因此称为一阶微分形式不变性。

4．由参数方程确定函数的运算法则

设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 确定函数 $y=y(x)$，其中 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 存在，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\varphi'(t)\neq 0)$$

二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx}=\frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

5．反函数求导法则

设 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$，两者皆可导，且 $f'(x)\neq 0$

则 $$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'[g(y)]} \quad (f'(x)\neq 0)$$

二阶导数 $$g''(y)=\frac{d[g'(y)]}{dy}=\frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{f''[g(y)]}{\{f'[g(y)]\}^3} \quad (f'(x)\neq 0)$$

6．隐函数运算法则

设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定，求 y' 的方法如下：

把 $F(x,y)=0$ 两边的各项对 x 求导，把 y 看作中间变量，用复合函数求导公式计算，然后再解出 y' 的表达式（允许出现 y 变量）

7．对数求导法则

先对所给函数式的两边取对数，然后再用隐函数求导方法得出导数 y'。

对数求导法主要用于：
①幂指函数求导数
②多个函数连乘除或开方求导数

关于幂指函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 常用的一种方法

$y=e^{g(x)\ln f(x)}$ 这样就可以直接用复合函数运算法则进行。

8．可微与可导的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导。

9．求 n 阶导数（$n\ge 2$，正整数）

先求出 y', y'', Λ，总结出规律性，然后写出 $y^{(n)}$，最后用归纳法证明。

有一些常用的初等函数的 n 阶导数公式

（1）$y=e^x$　　$y^{(n)}=e^x$

（2）$y=a^x(a>0, a\ne 1)$　　$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

（3）$y=\sin x$　　$y^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

（4）$y=\cos x$　　$y^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(5) $y=\ln x$　　$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

两个函数乘积的 n 阶导数有莱布尼兹公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，$u^{(0)}(x)=u(x)$，$v^{(0)}(x)=v(x)$

假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是 n 阶可导。

微分中值定理

一．罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）$f(a)=f(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

二．拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

或写成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$　　$(a<\xi<b)$

有时也写成 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$　$(0<\theta<1)$

这里 x_0 相当 a 或 b 都可以，Δx 可正可负。

推论 1．若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数。

推论 2．若 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内皆可导，且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 (a,b) 内 $f(x)=g(x)+c$，其中 c 为一个常数。

三．柯西中值定理（数学四不要）

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续；

（2）在开区间 (a,b) 内皆可导；且 $g'(x)\ne 0$

则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\qquad(a<\xi<b)$$

（注：柯西中值定理为拉格朗日中值定理的推广，特殊情形 $g(x)=x$ 时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。）

四．泰勒定理（泰勒公式）（数学一和数学二）

定理 1．（皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式）

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则有公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\Lambda+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$(x \to x_0)$

其中 $R_n(x) = 0\left[(x-x_0)^n\right] \qquad (x \to x_0)$ 称为皮亚诺余项。

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0\right)$$

前面求极限方法中用泰勒公式就是这种情形，根据不同情形取适当的 n，所以对常用的初等函数如 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$（α 为实常数）等的 n 阶泰勒公式都要熟记。

定理 2（拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式）

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，则对 $x \in [a,b]$，有公式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \Lambda + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，（$\xi$ 在 x_0 与 x 之间）

称为拉格朗日余项。

上面展开式称为以 x_0 为中心的 n 阶泰勒公式。当 $x_0 = 0$ 时，也称为 n 阶麦克劳林公式。

如果 $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$，那么泰勒公式就转化为泰勒级数，这在后面无穷级数中再讨论。

导数的应用：

一．基本知识

1．定义

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，x_0 是 (a,b) 内的某一点，则

如果点 x_0 存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点 $x(x \neq x_0)$，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大值点；

如果点 x_0 存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点 $x(x \neq x_0)$，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极小值，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极小值点。

函数的极大值与极小值统称极值。极大值点与极小值点统称极值点。

2．必要条件（可导情形）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点，则 $f'(x_0) = 0$。

我们称 x 满足 $f'(x_0) = 0$ 的 x_0 为 $f(x)$ 的驻点可导函数的极值点一定是驻点，反之不然。

极值点只能是驻点或不可导点，所以只要从这两种点中进一步去判断。

3．第一充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 $0 < |x-x_0| < \delta$ 内可导，$f'(x_0)$ 不存在，或 $f'(x_0) = 0$。

1° 如果在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x) > 0$，而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x) < 0$，则 $f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；

2° 如果在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x) < 0$，而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处，有 $f'(x) > 0$，则 $f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点；

3° 如果在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的任一点 x 处，$f'(x)$ 的符号相同，那么 $f(x_0)$ 不是极值，x_0 不是极值点。

4．第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$，则

当 $f''(x_0) < 0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点。

当 $f''(x_0) > 0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点。

二．函数的最大值和最小值

1．求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值的方法

首先，求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内所有驻点和不可导点 x_1,Λ,x_k，其次计算 $f(x_1),\Lambda,f(x_k),f(a),f(b)$。

最后，比较 $f(x_1),\Lambda,f(x_k),f(a),f(b)$，

其中最大者就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M；其中最小者就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值 m。

2．最大（小）值的应用问题

首先要列出应用问题中的目标函数及其考虑的区间，然后再求出目标函数在区间内的最大（小）值。

三．凹凸性与拐点

1．凹凸的定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对任意不同的两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\right)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸（凹）的。

在几何上，曲线 $y=f(x)$ 上任意两点的割线在曲线下（上）面，则 $y=f(x)$ 是凸（凹）的。

如果曲线 $y=f(x)$ 有切线的话，每一点的切线都在曲线之上（下）则 $y=f(x)$ 是凸（凹）的。

2．拐点的定义

曲线上凹与凸的分界点，称为曲线的拐点。

3．凹凸性的判别和拐点的求法

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$，

如果在 (a,b) 内的每一点 x，恒有 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的；

如果在 (a,b) 内的每一点 x，恒有 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的。

求曲线 $y=f(x)$ 的拐点的方法步骤是：

第一步：求出二阶导数 $f''(x)$；

第二步：求出使二阶导数等于零或二阶导数不存在的点 x_1、x_2、…、x_k；

第三步：对于以上的连续点，检验各点两边二阶导数的符号，如果符号不同，该点就是拐点的横坐标；

第四步：求出拐点的纵坐标。

四．渐近线的求法

1．垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$

则 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线。

2．水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$

则 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线。

3．斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$

则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线。

五．曲率（数学一和数学二）

设曲线 $y=f(x)$，它在点 $M(x,y)$ 处的曲率 $k=\dfrac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$，若 $k\neq0$，则称 $R=\dfrac{1}{k}$ 为点 $M(x,y)$ 处的曲率半径，在 M 点的法线上，凹向这一边取一点 D，使 $|MD|=R$，则称 D 为曲率中心，以 D 为圆心，R 为半径的圆周称为曲率圆。

不定积分

一．基本积分公式

1. $\displaystyle\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\qquad(\alpha\neq-1，实常数)$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \qquad (a>0, a\neq 1)$

$\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

7. $\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

8. $\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$

9. $\int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$

10. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

11. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

12. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

13. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a>0)$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (a>0)$

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad (a>0)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad (a>0)$

二．换元积分法和分部积分法

1．第一换元积分法（凑微分法）

设 $\int f(u)du = F(u) + C$，又 $\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \xlongequal{令u=\varphi(x)} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$$

这里要求读者对常用的微分公式要“倒背如流”，也就是非常熟练地凑出微分。

常用的几种凑微分形式：

（1）$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

$(a \neq 0)$

（2）$\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$

$(a\neq 0, n\neq 0)$

（3）$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d(\ln x)$

（4）$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)$

（5）$\int f(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$

（6）$\int f(a^x)a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)d(a^x)$

$(a>0, a\neq 1)$

$\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)d(e^x)$

（7）$\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x)d(\sin x)$

（8）$\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x)d(\cos x)$

（9）$\int f(\tan x)\sec^2 x dx = \int f(\tan x)d(\tan x)$

（10）$\int f(\cot x)\csc^2 x dx = -\int f(\cot x)d(\cot x)$

（11）$\int f(\sec x)\sec x \tan x dx = \int f(\sec x)d(\sec x)$

（12）$\int f(\csc x)\csc x \cot x dx = -\int f(\csc x)d(\csc x)$

（13）$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

（14）$\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int f(\arccos x)d(\arccos x)$

（15）$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d(\arctan x)$

（16）$\int \frac{f(arc\cot x)}{1+x^2}dx = -\int f(arc\cot x)d(arc\cot x)$

（17）$\int \frac{f\left(\arctan\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}dx = -\int f\left(\arctan\frac{1}{x}\right)d\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

（18）

$$\int \frac{f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$$

$(a>0)$

（19）

$$\int \frac{f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int f\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)$$

$(a>0)$

（20）$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C \qquad (f(x)\neq 0)$

2．第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t)+C$，

则

$$\int f(x)dx \xlongequal{令x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t)+C = G\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C$$

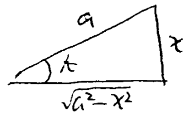
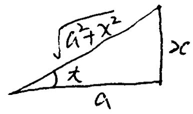
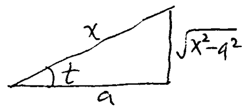
其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

第二换元积分法绝大多数用于根式的被积函数，通过换元把根式去掉，其常见的变量替换分为两大类：

第一类：被积函数是 x 与 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 x 与 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 或由 e^x 构成的代数式的根式，例如 $\sqrt{ae^x+b}$ 等。

只要令根式 $\sqrt[n]{g(x)}=t$，解出 $x=\varphi(t)$ 已经不再有根式，那么就作这种变量替换 $x=\varphi(t)$ 即可。

第二类：被积函数含有 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}\quad (A\neq 0)$，如果仍令 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}=t$ 解出 $x=\varphi(t)$ 仍是根号，那么这样变量替换不行，要作特殊处理，将 $A>0$ 时先化为 $\sqrt{A\left[(x-x_0)^2\pm l^2\right]}$，$A<0$ 时，先化为 $\sqrt{(-A)\left[l^2-(x-x_0)^2\right]}$ 然后再作下列三种三角替换之一：

根式的形式	所作替换	三角形示意图（求反函数用）
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

3．分部积分法

设 $u(x)$，$v(x)$ 均有连续的导数，则

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

或 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

使用分部积分法时被积函数中谁看作 $u(x)$ 谁看作 $v'(x)$ 有一定规律。

（1）$P_n(x)e^{ax}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$ 情形，$P_n(x)$ 为 n 次多项式，a 为常数，要进行 n 次分部积分法，每次均取 e^{ax}，$\sin ax$，$\cos ax$ 为 $v'(x)$；多项式部分为 $u(x)$。

（2）$P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$ 情形，$P_n(x)$ 为 n 次多项式取 $P_n(x)$ 为 $v'(x)$，而 $\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 为 $u(x)$，用分部积分法一次，被积函数的形式发生变化，再考虑其它方法。

（3）$e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ 情形，进行二次分部积分法后要移项，合并。

（4）比较复杂的被积函数使用分部积分法，要用凑微

分法，使尽量多的因子和 dx 凑成

一．定积分的概念与性质

1．定积分的性质

（1）$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

（2）$\int_a^a f(x)dx = 0$

（3）$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx$

（4）$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$（$c$ 也可以在 $[a,b]$ 之外）

（5）设 $a \le b$，$f(x) \le g(x)$ $(a \le x \le b)$，则

$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

（6）设 $a < b$，$m \le f(x) \le M$ $(a \le x \le b)$，则

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

（7）设 $a < b$，则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

（8）定积分中值定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

定义：我们称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值

（9）奇偶函数的积分性质

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$（f 奇函数）

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$（$f$ 偶函数）

（10）周期函数的积分性质

设 $f(x)$ 以 T 为周期，a 为常数，则

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

二．基本定理

1．变上限积分的函数

定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，$x \in [a,b]$ 称为变上限积分的函数

定理：（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x)$

推广形式：设 $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，

则 $F'(x) = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

2．牛顿—莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意一个原函数，

则有 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

（注：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可以很容易地用上面变上限积分的方法来证明；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，牛顿—莱布尼兹公式仍成立，但证明方法就很复杂）

三．定积分的换元积分法和分部积分法

1．定积分的换元积分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变量替换 $x = \varphi(t)$ 满足

（1）$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上连续；

（2）$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$，且当 $\alpha \le t \le \beta$ 时，$a \le \varphi(t) \le b$，则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

2．定积分的分部积分法

设 $u'(x), v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

或 $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$

定积分的应用

一．平面图形的面积

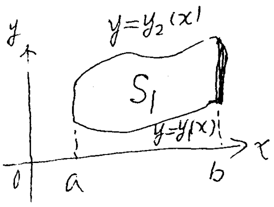
1．直角坐标系

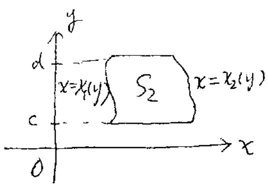
模型 I　$S_1=\int_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$

其中 $y_2(x)\ge y_1(x)$，$x\in[a,b]$

模型 II　$S_2=\int_c^d\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dy$

其中 $x_2(y)\ge x_1(y)$，$y\in[c,d]$

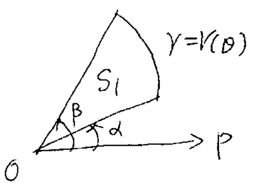


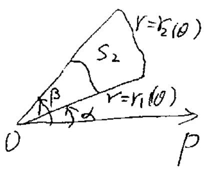


2．构坐标系

模型 I　$S_1=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$

模型 II　$S_2=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]d\theta$



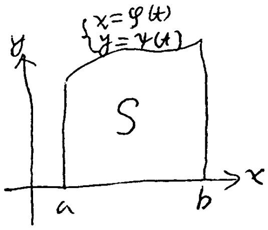


3．参数形式表出的曲线所围成的面积

设曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，

$(\alpha\le t\le\beta)$ $\varphi(\alpha)=a$，$\psi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续导数，且 $\varphi'(t)$ 不变号，$\psi(t)\ge 0$ 且连续，则曲边梯形面积（曲线 C 与直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成）

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt$$



二．平面曲线的弧长（数学一和数学二）

1．直角坐标系

设光滑曲线 $y=y(x)$，$(a\le x\le b)$[也即 $y(x)$ 有连续的导数]

弧长 $S=\int_a^b\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx$

而 $dS=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx$ 也称为弧微分

2．构坐标系

设光滑曲线 $r=r(\theta)$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$[$r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数]

弧长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[r'(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta$

3．参数方程所表曲线的弧长

设光滑曲线 $C\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$[$x(t)$，$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数]

曲线 C 的弧长 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt$

三．特殊的空间图形的体积（一般体积要用二重积分）

1．已知平行截面面积的立体体积

设空间一个立体由一个曲面和垂直于 z 轴两平面 $z=c$ 和 $z=d$ 所围成，z 轴每一点 $z(c\le z\le d)$ 且垂直于 z 轴的立体截面的面积 $S(z)$ 为已知的连续函数，则立体体积

$$V=\int_c^d S(z)dz$$

2．绕坐标轴旋转的旋转体的体积

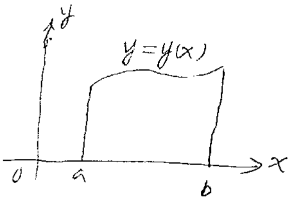
（1）平面图形由曲线 $y=y(x)$ (≥ 0) 与直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴围成

绕 x 轴旋转一周的体积

$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$

绕 y 轴旋转一周的体积

$V_y = 2\pi \int_a^b x y(x) dx$

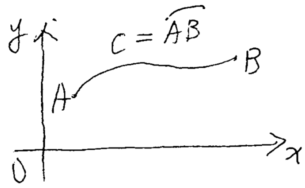


（2）平面图形由曲线 $x = x(y)$ (≥ 0) 与直线 $y = c$，$y = d$ 和 y 轴围成

绕 y 轴旋转一周的体积

$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy$

绕 x 轴旋转一周的体积



1．设 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$

则 $S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

2．设 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$，$(\alpha \leq \theta \leq \beta)$

则 $S = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\theta) \sin\theta \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$

3．设 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$(\alpha \leq t \leq \beta)$

则 $S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

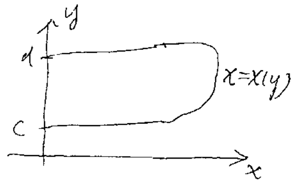
常微分方程

二．变量可分离方程及其推广

1．变量可分离的方程

（1）方程形式：$\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$ $\quad (Q(y) \neq 0)$

$V_x = 2\pi \int_c^d y x(y) dy$



四．绕坐标轴旋转的旋转曲面的面积（数学一和数学二）

设平面曲线 $C = \overset{\frown}{AB}$ 位于 x 轴上方，它绕 x 轴一周所得旋转曲面的面积为 S。

通解 $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C$

（注：在微分方程求解中，习惯地把不定积分只求出它的一个原函数，而任意常数另外再加）

（2）方程形式：$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

通解 $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$

$(M_2(x) \neq 0, N_1(y) \neq 0)$

2．变量可分离方程的推广形式

（1）齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $\frac{y}{x} = u$，

则 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u)$

$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c = \ln|x| + c$

（2）$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)(a\neq 0,b\neq 0)$

令 $ax+by+c=u$，

则 $\frac{du}{dx}=a+bf(u)$

$\int\frac{du}{a+bf(u)}=\int dx=x+c$

（3）$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

① 当 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 情形，先求出 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 的解 (α,β)

令 $u=x-\alpha$，$v=y-\beta$

则 $\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right)$ 属于齐次方程情形

②当 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ 情形，

令 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$

则 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$

令 $u=a_1x+b_1y$，

则 $\frac{du}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}=a_1+b_1f\left(\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2}\right)$

属于变量可分离方程情形。

三．一阶线性方程及其推广

1．一阶线性齐次方程

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$

它也是变量可分离方程，通解公式 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，（c 为任意常数）

2．一阶线性非齐次方程

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

用常数变易法可求出通解公式

令 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$

代入方程求出 $C(x)$

则得 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

3．贝努利方程

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq 0,1)$

令 $z=y^{1-\alpha}$

把原方程化为 $\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$

再按照一阶线性非齐次方程求解。

4．方程：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Q(y)-P(y)x}$

可化为 $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$

以 y 为自变量，x 为未知函数

再按照一阶线性非齐次方程求解。

四．全微分方程及其推广（数学一）

1．全微分方程

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

通解：$u(x,y)=C$，

其中 $u(x,y)$ 满足 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

求 $u(x,y)$ 的常用方法。

第一种：凑全微分法

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\Lambda=du(x,y)$

把常见的一些二元函数的全微分公式要倒背如流，就很有帮助。

（1）$xdx+ydy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$；

（2）$xdx-ydy=d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$；

（3）$ydx + xdy = d(xy)$；

（4）$\dfrac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$；

（5）$\dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)\right]$；

（6）$\dfrac{xdx - ydy}{x^2 - y^2} = d\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 - y^2\right)\right]$；

（7）$\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$；

（8）$\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right)$；

（9）$\dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\dfrac{x}{y}\right)$；

（10）$\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$；

（11）$\dfrac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x - y}{x + y}\right)$；

（12）$\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x + y}{x - y}\right)$；

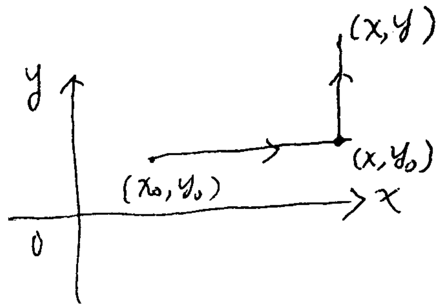
（13）$\dfrac{xdx + ydy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = d\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$；

（14）$\dfrac{xdx - ydy}{\left(x^2 - y^2\right)^2} = d\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2 - y^2}\right)$；

（15）$\dfrac{xdx + ydy}{1 + \left(x^2 + y^2\right)^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\arctan\left(x^2 + y^2\right)\right)$；

（16）$\dfrac{xdx - ydy}{1 + \left(x^2 - y^2\right)^2} = d\left(\dfrac{1}{2}\arctan\left(x^2 - y^2\right)\right)$；

第二种：特殊路径积分法（因为积分与路径无关）



$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(x_0,y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= u(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \end{aligned}$$

第三种：不定积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ 得

$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$

对 y 求导，

得 $Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right] + C'(y)$，

求出 $C'(y)$ 积分后求出 $C(y)$

2．全微分方程的推广（约当因子法）

设 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 不是全微分方程。

不满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

但是存在 $R(x,y)$

使得 $R(x,y)P(x,y)dx + R(x,y)Q(x,y)dy = 0$ 为全微分方程，

也即满足 $\dfrac{\partial[RQ]}{\partial x} = \dfrac{\partial[RP]}{\partial y}$

则 $R(x,y)$ 称为约当因子，

按全微分方程解法仍可求出

$R(x,y)P(x,y)dx + R(x,y)Q(x,y)dy = du(x,y)$

通解 $u(x,y) = C$ 。

这种情形，求约当因子是关键。

特殊的高阶微分方程

一．可降阶的高阶微分方程

方程类型	解法及解的表达式
$y^{(n)} = f(x)$	通解 $y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n次} f(x)(dx)^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x$
$y'' = f(x, y')$	令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，原方程$\Rightarrow$ $p' = f(x, p)$——一阶方程，设其解为 $p = g(x, C_1)$， 即 $y' = g(x, C_1)$，则原方程的通解为 $y = \int g(x, C_1)dx + C_2$ 。
$y'' = f(y, y')$	令 $y' = p$，把 p 看作 y 的函数，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ 把 y'，y'' 的表达式代入原方程，得 $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} f(y, p)$——一阶方程， 设其解为 $p = g(y, C_1)$,即 $\frac{dy}{dx} g(y, C_1)$，则原方程的通解为 $\int \frac{dy}{g(y, C_1)} = x + C_2$ 。

二．线性微分方程解的性质与结构

我们讨论二阶线性微分方程解的性质与结构，其结论很容易地推广到更高阶的线性微分方程。

二阶齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad （1）$$

二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad （2）$$

1．若 $y_1(x)$，$y_2(x)$为二阶齐次线性方程的两个特解，则它们的线性组合$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$（C_1，C_2 为任意常数）仍为同方程的解，特别地，当 $y_1(x) \neq \lambda y_2(x)$（$\lambda$ 为常数），也即 $y_1(x)$与 $y_2(x)$线性无关时，则方程的通解为 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

2．若 $y_1(x)$，$y_2(x)$为二阶非齐次线性方程的两个特解，则 $y_1(x) - y_2(x)$为对应的二阶齐次线性方程的一个特解。

3．若 $\bar{y}(x)$为二阶非齐次线性方程的一个特解，而 $y(x)$为对应的二阶齐次线性方程的任意特解，则 $\bar{y}(x) + y(x)$为此二阶非齐次线性方程的一个特解。

4．若 $\bar{y}$ 为二阶非齐次线性方程的一个特解，而 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$为对应的二阶齐次线性方程的通解（C_1，C_2 为独立的任意常数）则 $y = \bar{y}(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$是此二阶非齐次线性方程的通解。

5．设 $y_1(x)$与 $y_2(x)$分别是

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$与

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$的特解，则

$y_1(x) + y_2(x)$是

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$的特解。

三．二阶和某些高阶常系数齐次线性方程

1．二阶常系数齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

其中 p，q 为常数，

特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

特征方程根的三种不同情形对应方程通解的三种形式

（1）当 $\Delta = p^2 - 4q > 0$，特征方程有两个不同的实根 λ_1，λ_2

则方程的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

（2）当 $\Delta=p^2-4q=0$，特征方程有二重根 $\lambda_1=\lambda_2$

则方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$

（3）当 $\Delta=p^2-4q<0$，特征方程有共轭复根 $\alpha\pm i\beta$，

则方程的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2．n 阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\Lambda+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

其中 $p_i(i=1,2,\Lambda,n)$ 为常数。

相应的特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\Lambda+p_{n-1}\lambda+p_n=0$$

特征根与方程通解的关系同二阶情形很类似。

（1）若特征方程有 n 个不同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$

则方程通解 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\Lambda+C_ne^{\lambda_n x}$

（2）若 λ_0 为特征方程的 k 重实根 $(k\le n)$

则方程通解中含有 $(C_1+C_2x+\Lambda+C_kx^{k-1})e^{\lambda_0 x}$

（3）若 $\alpha\pm i\beta$ 为特征方程的 k 重共轭复根 $(2k\le n)$

则方程通解中含有

$$e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2x+\Lambda+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\Lambda+D_kx^{k-1})\sin\beta x\right]$$

由此可见，常系数齐次线性方程的通解完全被其特征方程的根所决定，但是三次及三次以上代数方程的根不一定容易求得，因此只能讨论某些容易求特征方程的根所对应的高阶常系数齐次线性方程的通解。

四．二阶常系数非齐次线性方程

方程：$y''+py'+qy=f(x)$ 其中 p,q 为常数

通解：$y=\bar{y}+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

其中 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为对应二阶常系数齐次线性方程的通解上面已经讨论。所以关键要讨论二阶常系数非齐次线性方程的一个特解 $\bar{y}$ 如何求？

我们根据 $f(x)$ 的形式，先确定特解 $\bar{y}$ 的形式，其中包含一些待定的系数，然后代入方程确定这些系数就得到特解 $\bar{y}$，常见的 $f(x)$ 的形式和相对应地 $\bar{y}$ 的形式如下：

1．$f(x)=P_n(x)$，其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式

（1）若 0 不是特征根，则令 $\bar{y}=R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n$

其中 $a_i(i=0,1,2,\Lambda,n)$ 为待定系数。

（2）若 0 是特征方程的单根，则令 $\bar{y}=xR_n(x)$

（3）若 0 是特征方程的重根，则令 $\bar{y}=x^2R_n(x)$

2．$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，α 为实常数

（1）若 α 不是特征根，则令 $\bar{y}=R_n(x)e^{\alpha x}$

（2）若 α 是特征方程单根，则令 $\bar{y}=xR_n(x)e^{\alpha x}$

（3）若 α 是特征方程的重根，则令 $\bar{y}=x^2R_n(x)e^{\alpha x}$

3．$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 或 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，α,β 皆为实常数

（1）若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，则令 $\bar{y}=e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x]$

其中 $R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n$

$a_i(i=0,1,\Lambda,n)$ 为待定系数

$T_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\Lambda+b_{n-1}x+b_n$

$b_i(i=0,1,\Lambda,n)$ 为待定系数

（2）若$\alpha \pm i\beta$是特征根，则令

$$\bar{y} = xe^{\alpha x}\left[R_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x\right]$$

五．欧拉方程（数学一）

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \Lambda + p_{n-1}xy' + p_n y = 0$$ ，

其中 $p_i(i = 1,2,\Lambda ,n)$ 为常数称为 n 阶欧拉方程。令 $x = e^t$ 代入方程，变为 t 是自变量，y 是未知函数的微分方程，一定是常系数齐次线性微分方程。

注意下面变换公式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

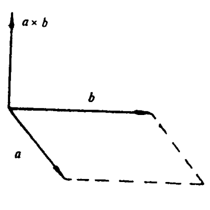
向量代数与空间解析几何

三．向量的运算

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k = \{c_1, c_2, c_3\}$$



1．加法。$a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$

减法。$a - b = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}$

2．数乘。$\lambda\alpha = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$（$\lambda$ 是常数）

向量的加、减和数乘运算统称线性运算。

3．数量积。$a\cdot b = |a||b|\cdot\cos\left(\overset{\frown}{a,b}\right)$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

其中$\left(\overset{\frown}{a,b}\right)$为向量$a,b$间夹角

$a\cdot b$为数量也称点乘。

$a\cdot b^0$表示向量a在向量b上的投影，即

$$a\cdot b^0 = \Pr j_b a$$

4．向量积$a\times b$也称为叉乘。

$$|a\times b| = |a||b|\sin\left(\overset{\frown}{a,b}\right)$$

$a\times b$的方向按右手法则垂直于a,b所在平面，且

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$a\times b$是向量，$a\times b = -b\times a$。$|a\times b|$等于以a,b为邻边的平行四边形的面积。

5．混合积：定义$(a,b,c) = (a\times b)\cdot c$，坐标公式

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

几何意义$|(a,b,c)|$表示以a,b,c为棱的平行大面体的体积。

四．两向量间的关系

设$a = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2, b_3\}$

关系	向量表示	向量坐标表示
a,b间夹角(φ)	$\cos\varphi = \frac{a\cdot b}{\|a\|\|b\|}$	$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
a与b垂直	$a\cdot b = 0$	$a_1b_1 + a_2b_2 + b_3b_3 = 0$

a与b平行	$a\times b=0$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

二．平面及其方程

1．法（线）向量，法（线）方向数。

与平面π垂直的非零向量，称为平面π的法向量，通常记成n。法向量$\{m,n,p\}$的坐标称为法（线）方向数。对于给定的平面π，它的法向量有无穷多个，但它所指的方向只有两个。

2．点法式方程　已知平面π过$M(x_0,y_0,z_0)$点，其法向量$n=\{A,B,C\}$，则平面π的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

或$n\cdot(r-r_0)=0$

其中$r_0=\{x_0,y_0,z_0\},r=\{x,y,z\}$

3．一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中A,B,C不全为零。x,y,z前的系数表示π的法线方向数，$n=\{A,B,C\}$是π的法向量。

特别情形：

$Ax+By+Cz=0$，表示通过原点的平面。

$Ax+By+D=0$，平行于z轴的平面。

$Ax+D=0$，平行yOz平面的平面。

$x=0$表示yOz平面。

4．三点式方程

设$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$三点不在一条直线上，则通过A,B,C的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

5．平面束

设直线L的一般式方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，则通过$L$的所有平面方程为

$$k_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

，其中$(k_1,k_2)\neq(0,0)$。

6．有关平面的问题

两平面为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

π_1与π_2间夹角(φ)	$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
垂直条件	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
平行条件	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\left(\neq\frac{D_1}{D_2}\right)$
重合条件	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

设平面π的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，而点$M(x_1,y_1,z_1)$为平面π外的一点，则M到平面π的距离d：

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

三．直线及其方程

1．方向向量、方向数

与直线平行的非零向量S，称为直线L的方向向量，方向向量的坐标称为方向数。

2．直线的标准方程（对称式方程）。

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

其中(x_0,y_0,z_0)为直线上的点，l,m,n为直线的方向数。

3．参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$s = \{l, m, n\}$，t 为参变量。

4．两点式

设 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ 为不同的两点，则通过 A 和 B 的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5．一般式方程（作为两平面的交线）：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$，方向向量

$S = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\}$

6．有关直线的问题

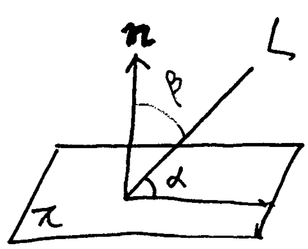
两直线为

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

L_1 与 L_2 间夹角 (θ)	$\cos\theta = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$
垂直条件	$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
平行条件	$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

四．平面与直线相互关系



平面 π 的方程为：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

直线 L 的方程为：

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

L 与 π 间夹角（α）	$\sin\alpha = \dfrac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$
L 与 π 垂直条件	$\dfrac{l}{A} = \dfrac{m}{B} = \dfrac{n}{C}$
L 与 π 平行条件	$Al + Bm + Cn = 0$
L 与 π 重合条件	$Al + Bm + Cn = 0$ L 上有一点在 π 上

多元函数微分学

多元函数的偏导数与全微分

四．方向导数与梯度（数学一）

1．平面情形

$z = (x, y)$ 在平面上过点 $P_0(x_0, y_0)$ 沿方向 $l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的梯度为

$$gradf(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

而方向导数与梯度的关系为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = [gradf(x_0, y_0)] \cdot l$$

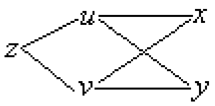
$$= |gradf(x_0, y_0)| \cos l(gradf(x_0, y_0), l)$$

多元函数微分法

一．复合函数微分法——锁链公式

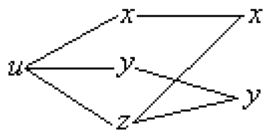
模型 1．$z = f(u, v)$，$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



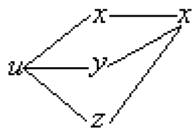
模型 2．$u=f(x,y,z)$，$z=z(x,y)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$



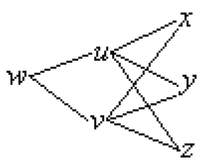
模型 3．$u=f(x,y,z)$，$y=y(x)$，$z=z(x)$

$$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_y\cdot y'(x)+f'_z\cdot z'(x)$$



模型 4．$w=f(u,v)$，$u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=f'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=f'_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+f'_v\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=f'_u\dfrac{\partial u}{\partial z}+f'_v\dfrac{\partial v}{\partial z}\end{cases}$$



还有其它模型可以类似处理

二．隐函数微分法

设 $F(x,y,z)=0$

（1）确定 $z=z(x,y)$ 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$

（2）确定 $x=x(y,z)$ 则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_x}$；$\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{F'_z}{F'_x}$

（3）确定

$y=y(z,x)$ 则 $\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F'_z}{F'_y}$；$\dfrac{\partial y}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$

多元函数的极值和最值

一．求 $z=f(x,y)$ 的极值

第一步 $\begin{cases}f'_x(x,y)=0\\ f'_y(x,y)=0\end{cases}$ 求出驻点 (x_k,y_k) $(k=1,2,\Lambda,l)$

第二步 令 $\Delta_k=f''_{xx}(x_k,y_k)f''_{yy}(x_k,y_k)-\left[f''_{xy}(x_k,y_k)\right]^2$

若 $\Delta_k<0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 不是极值

若 $\Delta_k=0$ 则不能确定（需从极值定义出发讨论）

若 $\Delta_k>0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 是极值

进一步 若 $f''_{xx}(x_k,y_k)>0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 为极小值

若 $f''_{xx}(x_k,y_k)<0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 为极大值

二．求多元 $(n\ge 2)$ 函数条件极值的拉格朗日乘子法

求 $u=f(x_1,\Lambda,x_n)$ 的极值

约束条件 $\begin{cases}\varphi_1(x_1,\Lambda,x_n)=0\\ \quad M\\ \varphi_m(x_1,\Lambda,x_n)=0\end{cases}$ $(m<n)$

作

$$F=F(x_1,\Lambda,x_n,\lambda_1,\Lambda,\lambda_m)=f(x_1,\Lambda,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\Lambda,x_n)$$

$$\begin{cases} F'_{x_1}=0 \\ \vdots \\ F'_{x_n}=0 \\ F'_{\lambda_1}=\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ F'_{\lambda_m}=\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

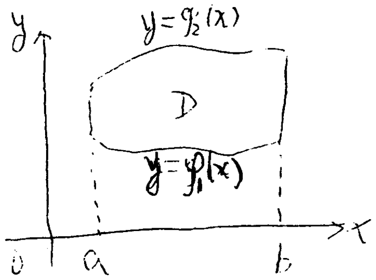
求出 $\left(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)(k=1,2,\cdots,l)$ 是有可能的条件极值点，一般再由实际问题的含义确定其充分性。这种方法的关键是解方程组的有关技巧。

多元函数积分学

二．在直角坐标系中化二重积分为累次积分以及交换积分顺序问题

模型 I：设有界闭区域

$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$



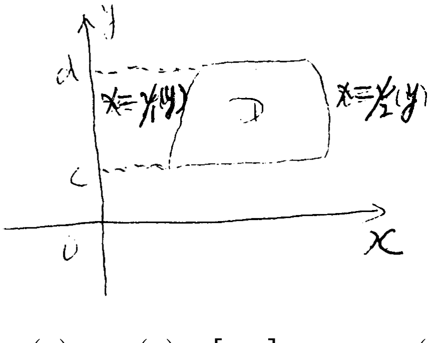
其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续。

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$

模型 II：设有界闭区域

$D=\{(x,y)|c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$



其中 $\psi_1(y)$，$\psi_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续。

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$

关于二重积分的计算主要根据模型 I 或模型 II 把二重积分化为累次积分从而进行计算，对于比较复杂的区域 D，如果既不符合模型 I 中关于 D 的要求，又不符合模型 II 中关于 D 的要求，那么就需要把 D 分解成一些小区域，使得每一个小区域能够符合模型 I 或模型 II 中关于区域的要求，利用二重积分性质，把大区域上二重积分等于这些小区域上二重积分之和，而每个小区域上的二重积分则可以化为累次积分进行计算。

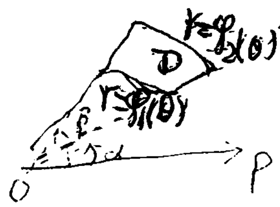
在直角坐标系中，两种不同顺序的累次积分的互相转化是一种很重要的手段，具体做法是先把给定的累次积分反过来化为二重积分，求出它的积分区域 D，然后根据 D 再把二重积分化为另外一种顺序的累次积分。

三．在极坐标系中化二重积分为累次积分

在极坐标系中一般只考虑一种顺序的累次积分，也即先固定 θ 对 γ 进行积分，然后再对 θ 进行积分，由于区域 D 的不同类型，也有几种常用的模型。

模型：设有界闭区域

$D=\{(\gamma,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,\varphi_1(\theta)\le\gamma\le\varphi_2(\theta)\}$



其中 $\varphi_1(\theta)$，$\varphi_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，

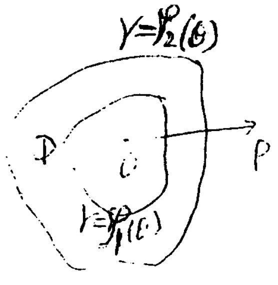
$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$ 在 D 上连续，则

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma\,d\theta$

$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma$

模型 I：设有界闭区域

$D=\{(\gamma,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,\varphi_1(\theta)\le\gamma\le\varphi_2(\theta)\}$



其中 $\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，

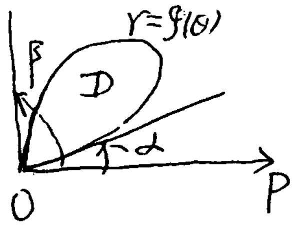
$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma$$

模型II：设有界闭区域

$D=\{(\gamma,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,0\le\gamma\le\varphi(\theta)\}$

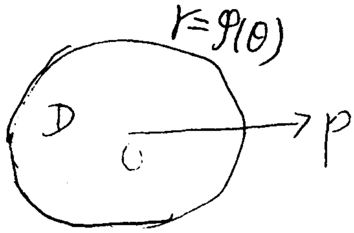


其中$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma$$

模型III：设有界闭区域$D=\{(\gamma,\theta)|0\le\theta\le2\pi,0\le\gamma\le\varphi(\theta)\}$



其中$\varphi(\theta)$在$[0,2\pi]$上连续，$f(x,y)=f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\,d\gamma$$

四．二重积分在几何上的应用

1．空间物体的体积

$$V=\iint_D[f_2(x,y)-f_1(x,y)]d\sigma$$

其中D为闭曲面S在xy平面上投影区域$z=f_2(x,y)$为上半曲面，$z=f_1(x,y)$为下半曲面。

2．空间曲面的面积

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma$$

其中D为曲面S在xy平面上投影，曲面S的方程$z=z(x,y)$

三重积分

二．三重积分的计算方法

1．直角坐标系中三重积分化为累次积分

（1）设Ω是空间的有界闭区域，

$\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\}$

其中D是xy平面上的有界闭区域，$z_1(x,y),z_2(x,y)$在D上连续，函数$f(x,y,z)$在Ω上连续，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

（2）设$\Omega=\{(x,y,z)|\alpha\le z\le\beta,(x,y)\in D(z)\}$

其中$D(z)$为竖坐标为z的平面上的有界闭区域，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_\alpha^\beta dz\iint_{D(z)}f(x,y,z)dxdy$$

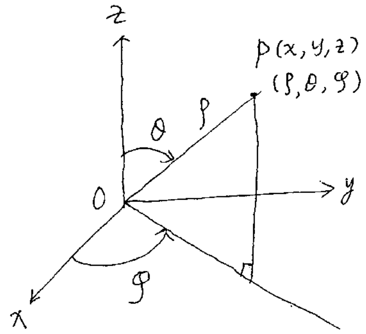
2．柱坐标系中三重积分的计算

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta,z)\gamma\,d\gamma\,d\theta\,dz$$

相当于把(x,y)化为极坐标(γ,θ)而z保持不变。

3．球坐标系中三重积分的计算

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \begin{pmatrix} \rho\ge 0 \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\,\theta\, d\varphi$$

然后再根据 Ω 把三重积分化为关于 ρ,θ,φ 的累次积分。

曲线积分

一．第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

空间情形：空间一条逐段光滑曲线 L 上定义函数 $f(x,y,z)$，把曲线 L 任意分割为 n 段，$\Delta S_1,\Delta S_2,\Lambda\,,\Delta S_n$ 在 $\Delta S_k(1\le k\le n)$ 上任取一点 (ξ_k,η_k,s_k)，如果对任意分割，任意取点，下列极限皆存在并且相等。

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta S_k$$

（这里 ΔS_k 又表示第 k 段曲线的弧长，$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta S_k$）

则称此极限值为 $f(x,y,z)$ 在曲线 L 上的第一类曲线积分，也称为对弧长的曲线积分，记以

$$\int_L f(x,y,z)dS$$

如果曲线 L 是封闭曲线，也记以 $\oint_L f(x,y,z)dS$

2．参数计算公式

我们只讨论空间情形（平面情形类似）

设空间曲线 L 的参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$

则

$$\int_L f(x,y,z)dS=\int_{\partial}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

（假设 $f(x,y,z)$ 和 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$ 皆连续）这样把曲线积分化为定积分来进行计算。

二．第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

空间情形：设空间一条逐段光滑有定向的曲线 $L=\overset{\frown}{AB}$，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 L 上皆有定义，把 L 任意分成 n 段，$\Delta S_1,\Delta S_2,\Lambda\,,\Delta S_n$，在 $\Delta S_k(1\le k\le n)$ 上起点坐标为 $(x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1})$，终点坐标 (x_k,y_k,z_k)（按 L 的定向决定起点和终点）令 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$，$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，$(1\le k\le n)$ 再在 ΔS_k 上任意一点 (ξ_k,η_k,s_k) 考虑极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta y_k+R(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta z_k]$$

其中 λ 仍是 n 段弧长中最大值，如果对任意分割，任意取点，上述极限皆存在并且相等，则称此极限值为 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 对空间曲线 L 的第二类曲线积分，也称对坐标的曲线积分，记以

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

它的向量形式为 $\int_L F\cdot dS$

其　中　$F=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

$dS=\{dx,dy,dz\}$

如果 L 是空间封闭曲线也要说明 L 的定向，在空间不能简单地说逆时针方向或顺时针方针，必须用其他方式

加以说明。

2．参数计算公式

我们只讨论空间情形（平面情形类似）

设空间有向曲线 L 的参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，起点 A 对应参数为 α，终点 B 对应参数为 β（注意：现在 α 和 β 的大小不一定 $\alpha<\beta$）如果 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 皆连续，又 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$ 也都连续，则

$$\int_{L=\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

这样把曲线积分化为定积分来计算。值得注意：如果曲线积分的定向相反，则第二类曲线积分的值差一个负号，而第一类曲线积分的值与定向无关，故曲线不考虑定向。

三．两类曲线积分之间的关系

1．平面情形

设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 平面上一个逐段光滑有定向的曲线，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\overset{\frown}{AB}}[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为曲线弧在点 (x,y) 处沿定向 A 到 B 方向的切线的方向余弦。

2．空间情形

设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 为空间一条逐段光滑有定向的曲线，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 L 上连续，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{\overset{\frown}{AB}}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]ds$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上点 (x,y,z) 处沿定向 A 到 B 方向的切线的方向余弦。

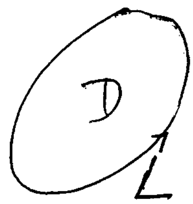
四．格林公式

关于平面区域上的二重积分和它的边界曲线上的曲线积分之间的关系有一个十分重要的定理，它的结论就是格林公式。

定理 1.（单连通区域情形）

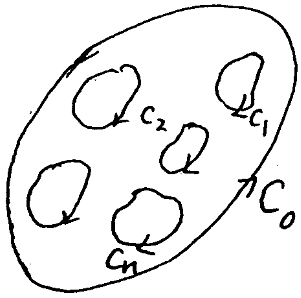
设 xy 平面上有界闭区域 D 由一条逐段光滑闭曲线 L 所围成的单连通区域。当沿 L 正定向移动时区域 D 在 L 的左边，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$



定理 2.（多连通区域情形）

设 xy 平面上有界闭区域 D 是 $(n+1)$ 连通区域（也即有 n 个"洞"），它的边界 $L=C_0\cup C_1\cup\cdots\cup C_n$，其中 C_0 的定向为逆时针方向，$C_1,\cdots,C_n$ 定向皆为顺时针方向，仍符合沿 L 的正定向移动时区域 D 在它的左边这个原则。



函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_L Pdx+Qdy$$

$$=\int_{C_0}Pdx+Qdy+\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k}Pdx+Qdy$$

五．平面上第二类曲线积分与路径无关的几个等价条件

设 $F\{P(x,y),Q(x,y)\}$ 的分量 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数，则下面几条彼此等价。

1．对 D 内任意一条逐段光滑闭曲线 L，都有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$

2．任意 $L=\overset{\frown}{AB}$ 在 D 内，则 $\int_{\overset{\frown}{AB}}Pdx+Qdy$ 只依赖于起点 A 和终点 B，与曲线 $L=\overset{\frown}{AB}$ 的取法无关，称为曲线积分与路径无关。

3．$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$ 成立。

4．D 内处处有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 成立。

5．向量场 $F\{P(x,y),Q(x,y)\}$ 是有势场，即存在二元函数 $V(x,y)$，具有 $F=-gradV$，$V(x,y)$ 称为势函数，具有 $P=-\dfrac{\partial V}{\partial x}$，$Q=-\dfrac{\partial V}{\partial y}$。

曲面积分

一．第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

1．定义

设 S 为分块光滑曲面，$f(x,y,z)$ 在 S 上有定义，把曲面 S 任意分成 n 块小曲面 $\Delta S_1,\Delta S_2,\Lambda,\Delta S_n$，在 $\Delta S_k\,(1\le k\le n)$ 上任取一点 (ξ_k,η_k,s_k)，把小曲面 ΔS_k 的面积也记以 ΔS_k，而 λ 表示各小块曲面直径的最大值。如果对任意分割和任意取点，下列极限皆存在且相等

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,s_k)\Delta S_k$$

则称这极限值为 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的第一类曲面积分，也称对面积的曲面积分，记以

$$\iint_{S'}f(x,y,z)dS$$

2．基本计算公式

设曲面 S 的方程 $z=z(x,y),(x,y)\in D$，$z(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数。

$f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

这样把第一类曲面积分化为二重积分进行计算。

二．第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

1．定义

设 S 为分块光滑有向曲面（已指定一侧为定向)，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 皆在 S 上有定义，把曲面 S 任意分成 n 个小曲面 $\Delta S_1,\Delta S_2,\Lambda,\Delta S_n$，而 $\Delta S_k(1\le k\le n)$ 在 yz 平面上投影的面积记以 $(\Delta S_k)_{yz}$，在 zx 平面上投影的面积记以 $(\Delta S_k)_{zx}$，在 xy 平面上投影的面积记以 $(\Delta S_k)_{xy}$，又在 $\Delta S_k(1\le k\le n)$ 上任取一点 (ξ_k,η_k,s_k)，令 λ 是各小块曲面直径的最大值，考虑极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k,s_k)(\Delta S_k)_{yz}+Q(\xi_k,\eta_k,s_k)(\Delta S_k)_{zx}+R(\xi_k,\eta_k,s_k)(\Delta S_k)_{xy}\right]$$

如果对任意分割，任意取点，极限值都存在并且相等，则这个极限限称为 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在有向曲面 S 上的第二类曲面积分，也称为对面积的曲面

积分，记以

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

如果令 $F=\{P,Q,R\}$，$dS=\{dydz,dzdx,dxdy\}$

则向量形式为

$$\iint_S F\cdot dS$$

2．基本计算公式

如果曲面 S 的方程 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$

$z(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续，$R(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

若曲面 S 指定一侧的法向量与 z 轴正向成锐角取正号，成钝角取负号。这样把这部分曲面积分化为 xy 平面上的二重积分。

类似地，曲面 S 的方程表示为 $x=x(y,z)$，$(y,z)\in D_{yz}$，则

$$\iint_S P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{YZ}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

曲面 S 指定一侧的法向量与 x 轴正向成锐角取正号，成钝角取负号，如果曲面 S 的方程表示为 $y=y(z,x)$，$(z,x)\in D_{zx}$，则

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{ZX}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

曲面 S 指定一侧的法向量与 y 轴成锐角取正号，成钝角取负号。由此可见，第二类曲面积分用基本公式进行计算是很麻烦的。绝大多数情形都用下面的定理进行计算，但是当 P,Q,R 有些为 0 只剩下一项或二项时，也有可能用基本公式进行计算。

三．两类曲面积分之间的关系

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 在点 (x,y,z) 处根据定向指定一侧的法向量的三个方向余弦。

令 $F=\{P,Q,R\}$，　$n_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S F\cdot n_0 dS$$

四．高斯公式

定理 1．（单连通区域）

设 Ω 是由分块光滑曲面 S 围成的单连通有界闭区域，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（外侧）

$$=\iint_S[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]dS$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 S 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦。

定理 2．（多连通区域）

设 Ω 是 $(n+1)$ 连通区域，外面边界曲面 S_0 为外侧，每一个“洞”的边界曲面 $S_k'(1\le k\le n)$ 为内侧，彼此不重叠，都在 S_0 的内部。这些曲面都是分块光滑的，Ω 是有界闭区域，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint_{S_0} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（外侧）

$$+\sum_{k=1}^{n}\iint_{S_K} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（内侧）

五．斯托克斯公式

定理：设 L 是逐段光滑有向闭曲线，S 是以 L 为边界的分块光滑有向曲面，L 的正向与 S 的侧（即法向量的指向）符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域

内有连续的一阶偏导数，则有

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

也可用第一类曲面积分

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

六．散度与旋度

讨论中有三个概念很重要，就是梯度、散度和旋度。前面我们已经讨论过梯度：

设 $u=u(x,y,z)$ 算 $\partial\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

$gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\nabla u$ 称为 u 的梯度。

1．散度

设 $F=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

散度 $divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot F$ 称为 F 的散度

高斯公式可写成 $\iiint_\Omega divFdv=\iint_S F\cdot n_0 dS$

（外侧）

$$n_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

2．旋度

设 $F=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

旋度 $rotF=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

称为 F 的旋度。

斯托克斯公式可写成 $\oint_L F\cdot dr=\iint_S (rotF)\cdot n_0 dS$

其中 $dr=(dx,dy,dz)$， $n_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

无穷级数

常数项级数

1．基本性质

（1）如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 皆收敛，a,b 为常数，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$ 收敛，且等于 $a\sum_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

（2）在级数中增加或减少或变更有限项则级数的收敛性不变。

（3）收敛级数具有结合律，也即对级数的项任意加括号所得到的新级数仍收敛，而且其和不变。

发散级数不具有结合律，引言中的级数可见是发散的，所以不同加括号后得到级数的情形就不同。

（4）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$。

（注：引言中提到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$，具有 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在，因此收敛级数的必要条件不满足，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 发散。调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是分散的。所以满足收敛级数的必要条件 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛性尚不能确定。）

2．两类重要的级数

（1）等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \ (a \neq 0)$$

当$|r| < 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ 收敛；

当$|r| \geq 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ 发散。

（2）p—级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当 $p > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛；

当 $p \leq 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散。

（注：$p > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的和一般不作要求，但后面用特殊的方法可知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。）

二．正项级数敛散性的判别法

若$u_n \geq 0 (n = 1,2,3,\Lambda)$ 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为正项级数，这时

$$S_{n+1} \geq S_n (n = 1,2,3,\Lambda)$$

所以$\{S_n\}$是单调增加数列，它是否收敛就只取决于S_n是否有上界。

因此$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛$\Leftrightarrow S_n$有上界，这是正项级数比较判别法的基础。从而也是正项级数其它判别法的基础。

1．比较判别法

设$c > 0$，当$n \geq N$时，$cv_n \geq u_n > 0$皆成立。

如果$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

如果$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

2．比较判别法的极限形式

设$u_n \geq 0$，$v_n \geq 0$，$(n = 1,2,3,\Lambda)$

若$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

（1）当$0 < A < +\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散。

（2）当$A = 0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

（3）当$A = +\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

3．比值判别法（达朗倍尔）

设$u_n > 0$，而$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

（1）当$\rho < 1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

（2）当$\rho > 1$（包括$\rho = +\infty$）时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

（3）当$\rho = 1$时，此判别法无效。

（注：如果$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在时，此判别法也无法用。）

4．根值判别法（柯西）

设$u_n \geq 0$，而$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

（1）当$\rho < 1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

（2）当 $\rho > 1$（包括 $\rho = +\infty$）时，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

（3）当 $\rho = 1$时，此判别法无效。

事实上，比值判别法和根值判别法都是与等比级数比较得出相应的结论。应用时，根据所给级数的形状有不同的选择，但它们在 $\rho = 1$情形都无能为力，数学上有更精细一些的判别法，但较复杂，对考研来说，不作要求。

三．交错级数及其莱布尼兹判别法

1．交错级数概念

若 $u_n > 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 称为交错级数。

2．莱布尼兹判别法

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 满足：

（1）$u_{n+1} \le u_n \left(n = 1,2,3,\Lambda\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛， 且 $0 < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n < u_1$

四．绝对收敛与条件收敛

1．定理

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛；反之不然。

2．定义

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛。

3．有关性质

（1）绝对收敛级数具有交换律，也即级数中无穷多项任意交换顺序，得到级数仍是绝对收敛，且其和不变。

（2）条件收敛级数的正项或负项构成的级数，即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(|u_n| + u_n\right)$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(u_n - |u_n|\right)$ 一定是发散的。

4．一类重要的级数

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$

（1）当 $p > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是绝对收敛的。

（2）当 $0 < p \le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是条件收敛的。

（3）当 $p \le 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是发散的。

幂级数

一．函数项级数及其收敛域与和函数（数学一）

1．函数项级数概念

设 $u_n(x)$ $\left(n = 1,2,3,\Lambda\right)$ 皆定义在区间 I 上，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 称为区间 I 上的函数项级数

2．收敛域

设 $x_0 \in \mathrm{I}$，如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点，

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点。

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点构成的集合就称为收敛域。

所有发散点构成的集合称为发散域。

3．和函数

在 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域的每一点都有和，它与 x 有关，

因此

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)，\quad x\in 收敛域$$

称 $S(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数，它的定义域就是函数项级数的收敛域。

二．幂级数及其收敛域

1．幂级数概念

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为 $(x-x_0)$ 的幂级数，$a_n\,(n=0,1,2,\Lambda\,)$ 称为幂级数的系数，是常数。

当 $x_0=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数。

一般讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有关问题，作平移替换就可以得出有关 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的有关结论。

2．幂级数的收敛域

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域分三种情形

（1）收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，亦即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对每一个 x 皆收敛。我们称它的收敛半径 $R=+\infty$。

（2）收敛域仅为原点，除原点外幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 皆发散，我们称它的收敛半径 $R=0$。

（3）收敛域为 $(-R,R)$ 或 $(-R,R]$ 或 $[-R,R)$ 或 $[-R,R]$ 中的一种，我们称它的收敛半径为 $R\ (0<R<+\infty)$。

所以求幂级数的收敛半径 R 非常重要，（1），（2）两种情形的收敛域就确定的。而 (3) 的情形，还需讨论 $\pm R$ 两点上的敛散性。

如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$（包括 $+\infty$）或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$（包括 $+\infty$）

则收敛半径 $R=\frac{1}{l}$（若 $l=+\infty$，则 $R=0$；若 $l=0$，则 $R=+\infty$）

如果上述两极限不成立，那么就要用其它方法求收敛半径，后面有所讨论。

三．幂级数的性质

1．四则运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$，$|x|<R_1$；$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=g(x)$，$|x|<R_2$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)$，$|x|<\min(R_1,R_2)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+\Lambda+a_kb_{n-k}+\Lambda+a_nb_0)x^n=f(x)\cdot g(x)$$

$|x|<\min(R_1,R_2)$

2．分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为和函数，则有下列重要性质

（1）$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

求导后幂级数的收敛半径不变，因此得出 $S(x)$ 在

$(-R,R)$内有任意阶导数，公式为

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\Lambda\,(n-k+1)x^{n-k},$$

$|x|<R\ (k=1,2,3,\Lambda\ )$

（2）$S(x)$在$(-R,R)$内有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且这个幂级数的收敛半径也不变

（3）若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S(x)$ 在$x=R(-R)$成立。则有下列性质：

（i）$\lim\limits_{x\to R^-}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$ 成立

$\left(\lim\limits_{x\to(-R)^+}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n\text{成立}\right)$

（ii）$\int_0^R S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 成立

$\left(\int_{-R}^0 S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-a_n}{n+1}(-R)^{n+1}\text{成立}\right)$

（iii）$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ 在$x=R(-R)$不一定收敛

也即$\sum_{n=1}^{\infty}na_n R^{n-1}=S'_-(R)$不一定成立，$(S'_+(-R))$

如果$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$x=R(-R)$发散，那么逐项求导后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ 在$x=R(-R)$一定发散，而逐项积分后的级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在$x=R(-R)$有可能收敛。

四．幂级数求和函数的基本方法

1．把已知函数的幂级数展开式（§8.3 将讨论）反过来用

下列基本公式应熟背

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，$|x|<+\infty$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$，$|x|<+\infty$

（4）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$，$|x|<+\infty$

（5）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x)$，$(-1<x\le 1)$

（6）$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n=(1+x)^\alpha$，$(-1<x<1)$（$\alpha$为实常数）

2．用逐项求导和逐项积分方法以及等比级数的求和公式

3．用逐项求导和逐项积分方法化为和函数的微分方程，从而求微分方程的解

五．利用幂级数求和函数得出有关常数项级数的和（强化班再讨论）

将函数展开成幂级数

一．泰勒级数与麦克劳林级数的概念

1．基本概念

设函数$f(x)$在点x_0的某一领域$|x-x_0|<\delta$内具有任意阶导数，则级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$称为函数$f(x)$在$x_0$处的泰勒级数。

（注：这里泰勒级数是否收敛？是否收敛于$f(x)$都不知道）特别地，当$x_0=0$，则级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$称为$f(x)$的麦克劳林级数。

2．函数展成幂级数的条件

设 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内有任意阶导数，它的泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\Lambda+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 为 n 阶余项，它的拉格朗日型为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

则 $f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，$\quad |x-x_0|<R$

的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0 \qquad |x-x_0|<R$

而且 $f(x)$ 在 x_0 处幂级数展开式是唯一的。

特别地，$x_0=0$ 时得到函数展成麦克劳林级数的充分必要条件。

二．函数展成幂级数的方法

1．套公式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0|<R$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (n=0,1,2,\Lambda)$$

例 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，$\quad |x|<+\infty$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |x|<+\infty$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\Lambda(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$|x|<1$，

（α 为实常数）

2．逐项求导

例：$\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$\quad |x|<+\infty$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}, \quad |x|<1$$

3．变量替换法

例：$e^{x^2}=e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$，$\quad |x|<+\infty$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

$|x|<1$

4．逐项积分法

例：$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<x\le 1)$$

由此可得 $\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$(-1\le x\le 1)$

由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$