## 一、傅里叶变换

1、傅里叶积分存在定理：设 $f(t)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足条件：

1）$f(t)$ 在任一有限区间上满足狄氏条件；

2）$f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积（即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛；

则傅氏积分公式存在，且有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau]e^{iwt}dw=\begin{cases}f(t), & t\text{是}f(t)\text{的连续点}\\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & t\text{是}f(t)\text{的第一类间断点}\end{cases} \quad 1\text{-}1$$

2、傅里叶变换定义式：$F[f(t)]=F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt$　　1-2

傅里叶逆变换定义式：$F^{-1}[F(w)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw$　　1-3

3、常用函数的傅里叶变换公式 $f(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}F(\omega)$

矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}E \quad , & |t|\le\dfrac{\tau}{2}\\ 0 \quad , & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\tau}{2}\omega$　　1-4

单边指数衰减函数

$$e(t)=\begin{cases}e^{-\beta t} \quad , & t\ge0\\ 0 \quad , & t<0\end{cases}\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\frac{1}{\beta+iw}\Rightarrow F\left[e(t)\right]=\frac{1}{\beta+j\omega} \quad 1\text{-}5$$

单位脉冲函数　　$\delta(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}1$　　1-6

单位阶跃函数　　$u(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\frac{1}{iw}+\pi\delta(w)$　　1-7

$$1\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}2\pi\delta(w) \quad 1\text{-}8$$

$$t\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}2\pi j\delta'(\omega) \quad 1\text{-}9$$

$$e^{j\omega_0 t}\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}2\pi\delta(\omega-\omega_0) \quad 1\text{-}10$$

$$\cos\omega_0 t\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right] \quad 1\text{-}11$$

$$\sin\omega_0 t\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right] \quad 1\text{-}12$$

4、傅里叶变换的性质

设$F[f(t)]=F(w)$，  $F[f_i(t)]=F_i(w)$

（1）线性性：$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\alpha F_1(\omega)+\beta F(\omega)$ 1-13

（2）位移性：$f(t-t_0)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}e^{-j\omega t_0}F(\omega)$ 1-14

$e^{j\omega_0 t}f(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}F(\omega-\omega_0)$ 1-15

（3）微分性：$f'(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}j\omega F(\omega)$ 1-16

$f^{(n)}(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}(j\omega)^n F(\omega)$ 1-17

$(-jt)f(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}F'(\omega)$ 1-18

$(-jt)^{(n)}f(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}F^{(n)}(\omega)$ 1-19

（4）积分性：$\int_{-\infty}^{t}f(t)dt\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\frac{1}{j\omega}F(\omega)$ 1-20

（5）相似性：$f(at)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 1-21

（6）对称性：$F(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}2\pi f(-\omega)$ 1-22

上面性质写成变换式如下面:

（1）线性性：$F\left[\alpha\cdot f_1(t)+\beta\cdot f_2(t)\right]=\alpha\cdot F_1(w)+\beta\cdot F_2(w)$ *1-13-1*

$F^{-1}\left[\alpha\cdot F_1(w)+\beta\cdot F_2(w)\right]=\alpha\cdot f_1(t)+\beta\cdot f_2(t)$（$\alpha,\beta$是常数）1-13-2

（2）位移性：$F\left[f(t-t_0)\right]=e^{-iwt_0}F(w)$ *1-14*

$F\left[e^{iw_0 t}f(t)\right]=F(w)\big|_{w=w-w_0}=F(w-w_0)$ *1-15*

（3）微分性：设$|t|\to+\infty$时，$f(t)\to 0$，则有

$F\left[f'(t)\right]=(iw)F[f(t)]=(iw)F(w)$ 1-16

$F\left[f^{(n)}(t)\right]=(iw)^n F[f(t)]=(iw)^n F(w)$ *1-17*

$F\left[tf(t)\right]=j\frac{d}{dw}F(w)$ *1-18*

$$F\left[t^n f(t)\right]=j^n \frac{d^n}{dw^n}F(w) \qquad 1\text{-}19$$

（4）积分性：$\left[F\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right]=\frac{F(w)}{iw}$ 1-20

（5）相似性：$F\left[f(at)\right]=\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$ 1-21-1

翻转性: $a=1$ 时 $F[f(-t)]=F(-w)$ 1-21-2

（6）对称性:设 $f(t)\longleftrightarrow F(w)$，则

$$F(-t)\longleftrightarrow 2\pi f(w) \text{ 或 } F(t)\longleftrightarrow 2\pi f(-w) \qquad 1\text{-}22$$

5、卷积公式 ： $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$。 1-23

$$f_1(t)u(t)*f_2(t)u(t)=\begin{cases}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau & , \quad t\ge 0\\ 0 & , \quad t<0\end{cases} \qquad 1\text{-}24$$

6、卷积定理：设 $F\left[f_1(t)\right]=F_1(w)$ $F\left[f_2(t)\right]=F_2(w)$

$$f_1(t)*f_2(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}F_1(w)\cdot F_2(w) \qquad 1\text{-}25$$

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}F_1(w)*F_2(w) \qquad 1\text{-}26$$

7、单位脉冲函数:

筛选性：假设 $f(t)$在（$-\infty,+\infty$）上连续，则有：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$ 1-27

更一般的有：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$ 1-28

时间尺度变换性质：$\delta(kt-c)=\frac{1}{|k|}\delta(t-\frac{c}{k})$ 其中 $k,c\neq 0$ 1-29

特殊的：$\delta(kt)=\frac{1}{|k|}\delta(t),(k\neq 0)$ 和 $\delta(-t)=\delta(t)$ 1-30

乘以时间的函数 $f(t)$ 性质：$f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a)$ 1-31

特殊的：$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ 和 $t\delta(t)=0$

## 二、拉普拉斯变换

1、拉普拉斯变换定义式 ：$L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=F(s)$

拉普拉斯逆变换定义式：$L^{-1}[F(s)]=f(t)$

2、常用函数的拉氏变换:

$$\delta(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}1 \qquad L[\delta(t)]=1$$

$$1，\mathrm{u}(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{1}{s} \qquad L[1]=L[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$$e^{kt}\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{1}{s-k} \qquad L[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$$

$$\sin kt\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{k}{s^2+k^2} \qquad L[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$$

$$\cos kt\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{s}{s^2+k^2} \qquad L[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$$

$$shkt\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{k}{s^2-k^2} \qquad L[shkt]=\frac{k}{s^2-k^2}$$

$$chkt\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{s}{s^2-k^2} \qquad L[chkt]=\frac{s}{s^2-k^2}$$

$$t^m\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}\overset{m\in N}{=}\frac{m!}{s^{m+1}} \qquad L[t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}\overset{m\in N}{=}\frac{m!}{s^{m+1}}$$

3、基本性质：设 $f(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}F(s), f_i(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}F_i(s),\quad i=1,2\quad \alpha,\beta$ 是常数

（1）线性性质：$\alpha\cdot f_1(t)+\beta\cdot f_2(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\alpha\cdot F_1(s)+\beta\cdot F_2(s)$

（2）微分性质：$f'(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}sF(s)-f(0)$

$$(-t)f(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{dF(s)}{ds}$$

推广到 $n$ 阶：$f^{(n)}(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots\cdots f^{(n-1)}(0)$

$$(-t)^n f(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

（3）积分性质：$\int_0^t f(t)dt\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\frac{F(s)}{s}$

$$\frac{f(t)}{t}\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\int_s^{\infty}F(s)ds$$

（4）位移性质：$f(t-t_0) \xrightleftharpoons[L^{-1}]{L} e^{-st_0}F(s)$

$$e^{at}f(t) \xrightleftharpoons[L^{-1}]{L} F(s-a)$$

（5）相似性质：$f(at) \xrightleftharpoons[L^{-1}]{L} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a>0$

上面性质写成变换式如下面:

（1）线性性质：时域上：$L[\alpha \cdot f_1(t)+\beta \cdot f_2(t)] = \alpha \cdot F_1(s)+\beta \cdot F_2(s)$

频域上：$L^{-1}[\alpha \cdot F_1(s)+\beta \cdot F_2(s)] = \alpha \cdot f_1(t)+\beta \cdot f_2(t)$

（2）微分性质：时域上：$L[f'(t)] = sF(s)-f(0)$

推论：$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\cdots\cdots f^{(n-1)}(0)$

频域上：$L[t \cdot f(t)] = (-1)\frac{dF(s)}{ds}$

或 $L^{-1}[F'(s)] = (-t)f(t)$

推论：$L[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

（3）积分性质：时域上：$L[\int_0^t f(t)dt] = \frac{F(s)}{s}$

频域上：若 $\int_s^\infty F(s)ds$ 收敛，则 $L[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty F(s)ds$

推广：如果积分 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ 存在，则 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty L[f(t)]ds$

（4）位移性质：时域上：$L[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

或：$L^{-1}[e^{-st_0}F(s)] = f(t-t_0)u(t-t_0)$

频域上：$L[e^{at}f(t)] = F(s-a) \quad \mathrm{Re}(s-a)>c$

或：$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}[F(s)] = e^{at}f(t)$

（5）相似性质：$L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a>0$

更广泛：$L[f(at-b)]=\frac{1}{a}e^{-s\cdot\frac{b}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right)$

4、卷积定理：$f_1(t)*f_2(t)\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}F_1(s)\cdot F_2(s)$

即：$L[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$