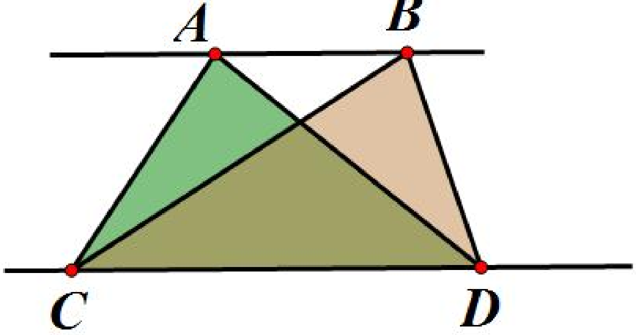
几何解题定理库

数学高手解题定理库

定理 1 共边模型

$$共边模型\begin{cases}等积模型\\一半模型\\燕尾模型\end{cases}$$

等积变形



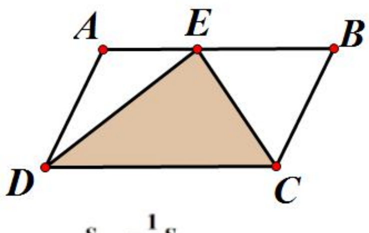
$S_{\Delta ACD}=S_{\Delta BCD}$ WHY?

(1)直线 AB 平行于 CD，可出现三对面积相等的三角形，如图(1)

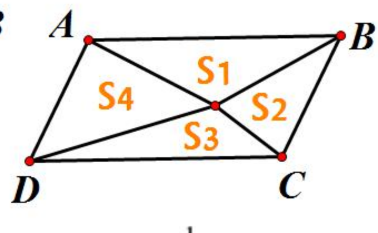
(2)两个三角形高相等，面积比等于它们的底之比；

两个三角形底相等，面积比等于它们的高之比；

一半模型

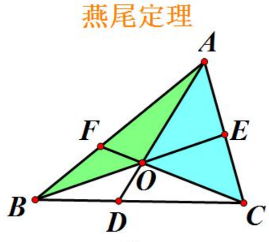


$S_{阴影}=\frac{1}{2}S_{长方形}$



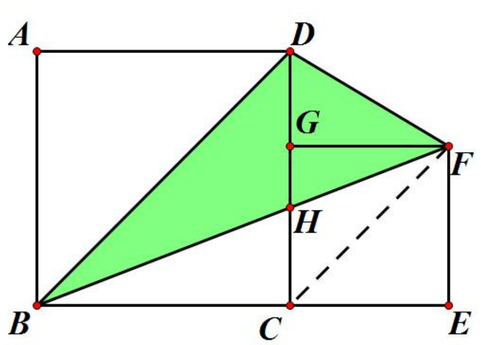
$S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}S_{长方形}$

燕尾定理



$S_{\triangle ABO}:S_{\triangle ACO}=BD:DC$

1. 正方形ABCD 和正方形CEFG，且正方形ABCD 边长为10厘米，则图中阴影面积为多少平方厘米？



原图

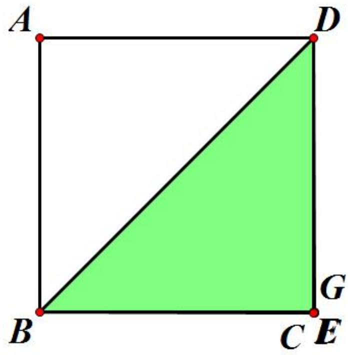
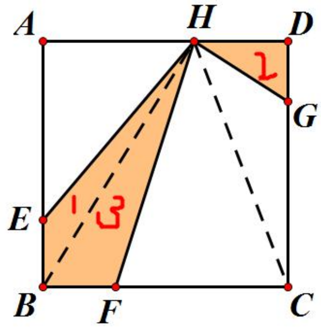
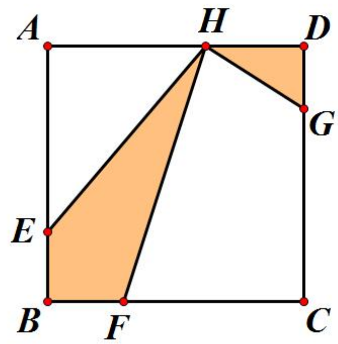


图 1

解析：如图 1，当 G 点无限逼近 C 点时，阴影部分的面积接近于正方形 ABCD 面积的一半。

2. 图中的E、F、G 分别是正方形ABCD 三条边的三等分点，H 是任意点。如果正方形的边长是12，那么阴影部分的面积是______。





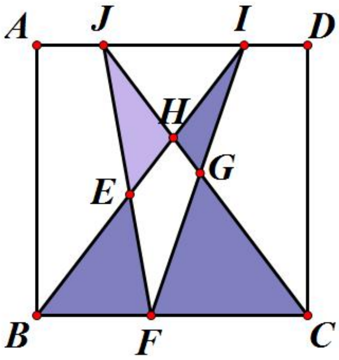
解析：

$$S_3=\frac{1}{3}S_{\Delta BCH}=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet S_{正方形}=\frac{1}{6}S_{正方形}$$

$$S_{\Delta ABH}+S_{\Delta CDH}=3\bullet(S_1+S_2)=\frac{1}{2}\bullet S_{正方形}\Rightarrow S_1+S_2=\frac{1}{6}S_{正方形}$$

$$\therefore S_{阴影}=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{3}S_{正方形}=48$$

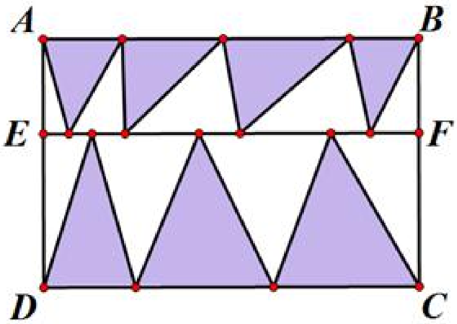
3. 如图，正方形的边长为10，四边形EFGH 的面积为5，那么阴影部分的面积是______。



解析：

$$S_{阴影}=\left(S_{\Delta JCF}-5\right)+\left(S_{\Delta IBF}-5\right)$$
$$=S_{\Delta JCF}+S_{\Delta IBF}-10$$
$$=\frac{1}{2}\times10\times10-10$$
$$=40$$

4. ⑴如图，ABFE 和CDEF 都是矩形，AB 的长是4 厘米，BC 的长是3 厘米，那么图中阴影部分的面积是 平方厘米。



原图

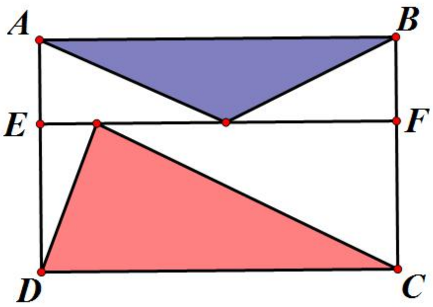


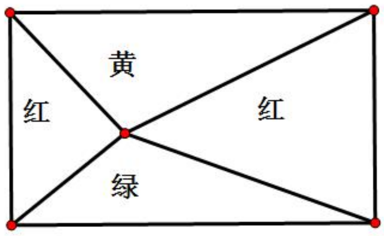
图 2

解析：

图 2 是原图的等效图：

$$S_{阴影}=\frac{4\times3}{2}=6$$

⑵一个长方形分成4 个不同的三角形，绿色三角形面积占长方形面积的15%，黄色三角形面积是21cm²。问：长方形的面积是多少平方厘米？

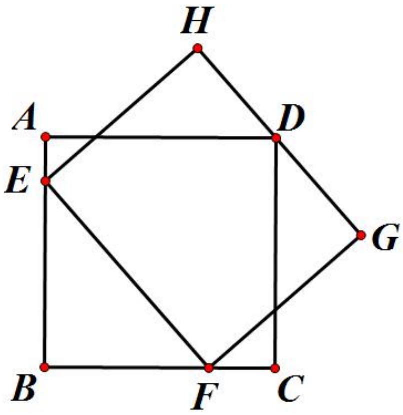


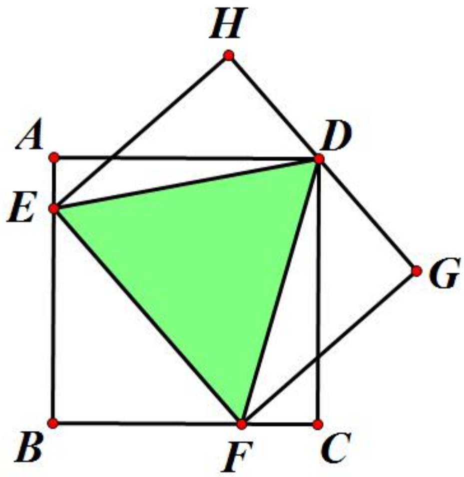
解析：

根据一半模型得：黄色与绿色面积和占整个长方形面积的一半。

$$S_{长方形}=\frac{21}{50\%-15\%}=60cm^2$$

5. 如图，正方形ABCD 的边长为6，AE＝1.5，CF＝2。长方形EFGH 的面积为______。

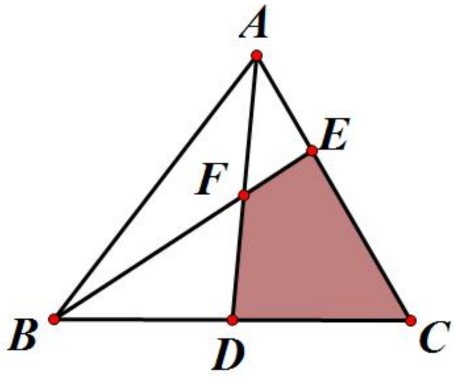


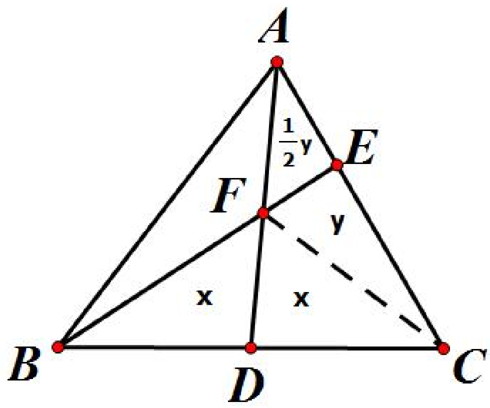


解析：根据一半模型得，长方形 EFGH 的面积为ΔDEF 面积的 2 倍.

$$\begin{aligned}S_{阴影}&=S_{正方形}-\left(S_{\Delta ADE}+S_{\Delta BEF}+S_{\Delta CDF}\right)\\&=36-\left(\frac{1}{2}\times6\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times4\times\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\times2\times6\right)\\&=16.5\end{aligned}$$

6. 如图，已知BD＝DC，EC＝2AE，三角形ABC 的面积是30，求阴影部分面积。





解析：

设$S_{\Delta CDF}=x,S_{\Delta CEF}=y$，则$S_{\Delta BDF}=x,S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}y$

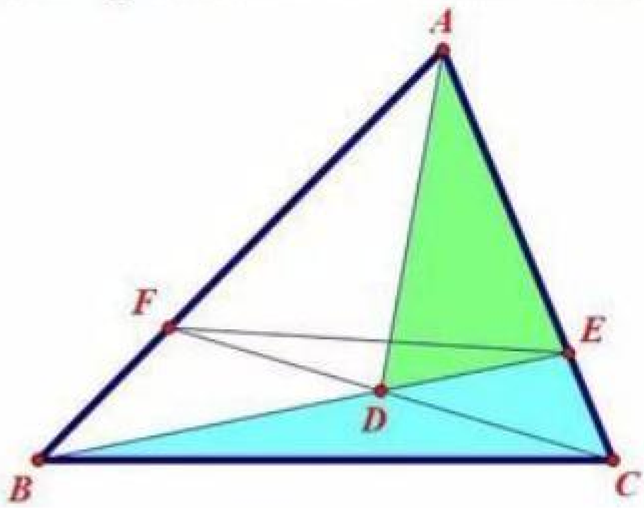
$$\begin{cases}S_{\Delta BCE}=2x+y=\frac{2}{3}\times 30=20\\ S_{\Delta ACD}=x+\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}\times 30=15\end{cases}$$

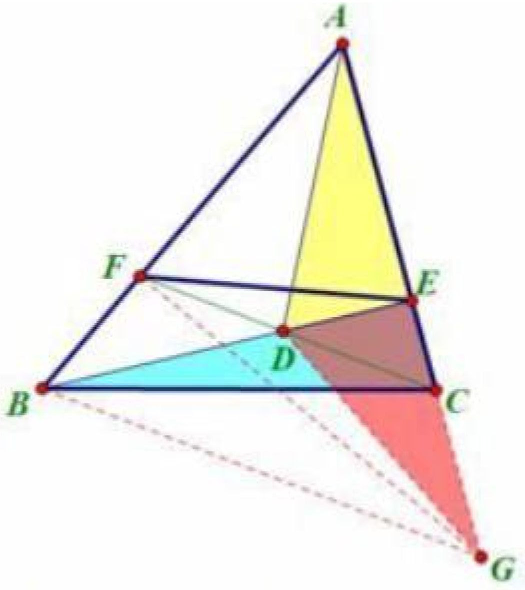
$$\Rightarrow\begin{cases}2x+y=20\\ 2x+3y=30\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=7.5\\ y=5\end{cases}\Rightarrow S_{阴影}=x+y=12.5$$

如图，E、F分别在AC、AB上，BE、CF交于D。

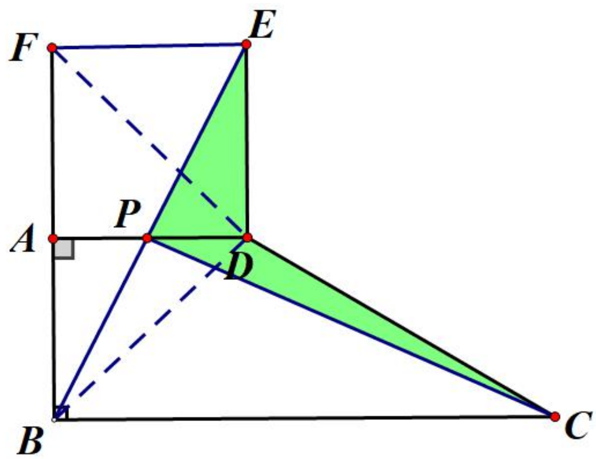
若$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。求证：$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCE}$。





证明：作BG∥FC交AC延长线于点G，可知红蓝等。
易证E是AG中点，从而红黄等，进而蓝黄等。

*如图，四边形ABCD是直角梯形，∠DAB=∠ABC=90°，*以*AD*为一边向外作长方形ADEF，其面积为6.36平方厘米，连接BE交AD于点P，连接PC，则图中阴影部分的面积是多少平方厘米？



解：连接*BD,DF*

$\because \angle DAB=\angle ABC=90°$

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore S_{\triangle DPC}=S_{\triangle DPB}$

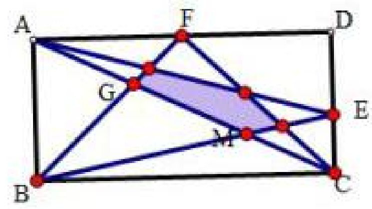
又$\because$ *ADEF*是长方形

$\therefore AF \parallel DE$

$\therefore S_{\triangle DBC}=S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}S=3.18$

$\therefore S$阴$=3.18$

如图所示，已知长方形ABCD的面积为120厘米，阴影部分的面积为13平方厘米，那么长方形的五角星AEBFC的面积是多少平方厘米？



解：$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{长方形ABCD}=S_{\triangle BFC}$

$\therefore S_{\triangle ABG}=S_{\triangle CFG}$

又$\because S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}$

$\therefore S_{\triangle BMC}=S_{\triangle AME}$

$\because S_{五角星AEBFC}=S_{\triangle AME}+S_{\triangle CFG}-S_{阴}+S_{\triangle BMG}$

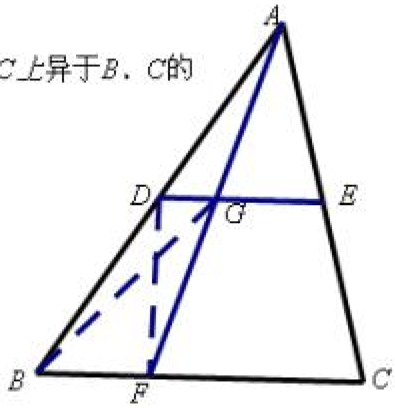
$=S_{\triangle BMC}+S_{ABG}+S_{\triangle BGM}-13$

$=S_{\triangle ABC}-13$

$=60-13$

$=47$

如图，在△ABC中，D、E分别为AB、AC中点，F为BC上异于B、C的任意一点.连接AF、DE，交于点G,求证：AG=FG

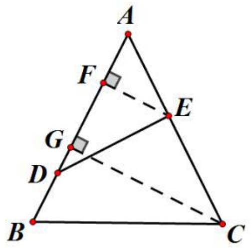
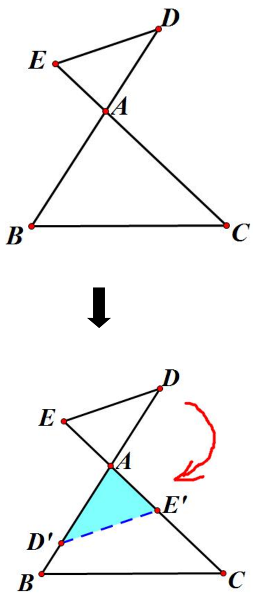
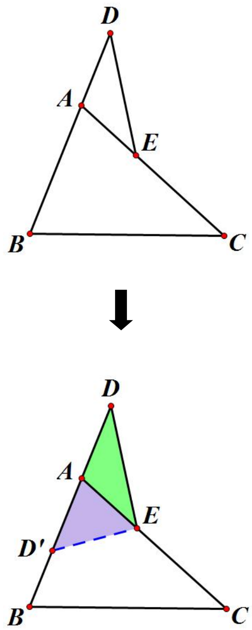
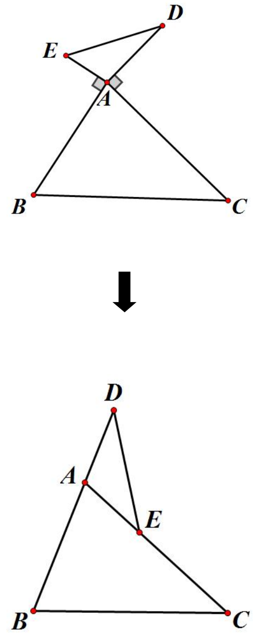


证明：$\because \frac{AG}{FG}=\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta DGF}}=\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta BDG}}=\frac{AD}{BD}=1$

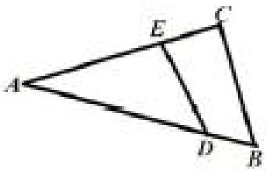
$\therefore AG=FG$

定理 2　鸟头模型

精点 1.　鸟头定理（共角定理）模型

<table>
<tr><td>几何模型</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>概述</td><td colspan="4">两个三角形中有一个角相等或互补，这两个三角形叫做共角三角形</td></tr>
<tr><td rowspan="2">结论及证明</td><td colspan="4">结论：$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD}{AB}\times\frac{AE}{AC}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}\left(\text{夹角两边}:\frac{\text{小}\times\text{小}}{\text{大}\times\text{大}}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">证明：$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\frac{1}{2}\bullet AB\bullet CG}{\frac{1}{2}\bullet AD\bullet EF}=\frac{AB}{AD}\bullet\frac{1}{\frac{EF}{CG}}=\frac{AB}{AD}\bullet\frac{1}{\frac{AE}{AC}}=\frac{AB\bullet AC}{AD\bullet AE}$</td></tr>
</table>

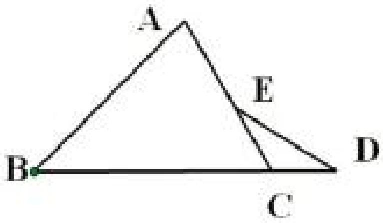
知 两点都在边上：鸟头定理



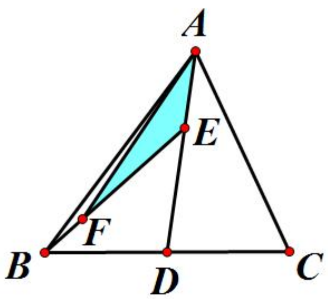
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}$$

一点在边上，一点在边的延长线上

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CD\times CE}{BC\times AC}$$



1. 图中三角形 ABC 的面积是 180 平方厘米，D 是 BC 的中点，AD 的长是 AE 长的 3 倍，EF 的长是 BF 长的 3 倍。那么三角形 AEF 的面积是多少平方厘米？



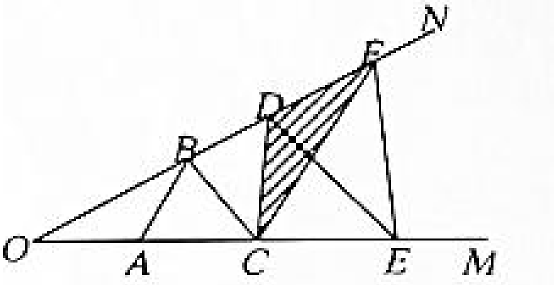
【分析】鸟头定理或共边模型

【答案】$22.5cm^2$

【解答】 根据鸟头定理或共边模型得：

$$S_{\Delta AEF}=\frac{3}{4}S_{\Delta ABE}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{8}S_{\Delta ABC}=\frac{180}{8}=22.5cm^2$$

2. 如图，在∠MON 的两边上分别有 A、C、E 及 B、D、F 六个点，并且△OAB、△ABC、△BCD、△CDE、△DEF 的面积都等于 1，则△DCF 的面积等于______________.



【分析】比例模型

【答案】$\frac{3}{4}$

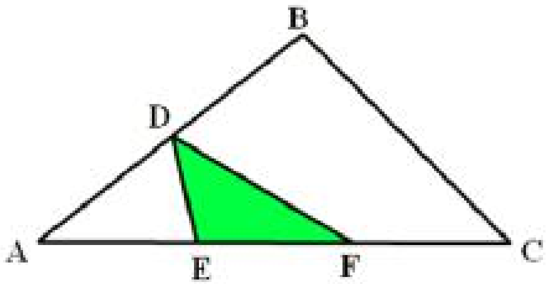
【解答】

由题意得：

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta OCD}=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BCD}=3 \\ S_{\Delta ODE}=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta CDE}=4 \\ S_{\Delta OEF}=S_{\Delta ODE}+S_{\Delta DEF}=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OD}{OF}=\frac{4}{5} \Rightarrow OD=4DF \Rightarrow \frac{S_{\Delta ODC}}{S_{\Delta DCF}}=4$$

$$\Rightarrow S_{\Delta DCF}=\frac{1}{4}S_{\Delta ODC}=\frac{3}{4}$$

3. 如右图，AD＝DB，AE＝EF＝FC，已知阴影部分面积为 5 平方厘米，△ABC 的面积是_________平方厘米。



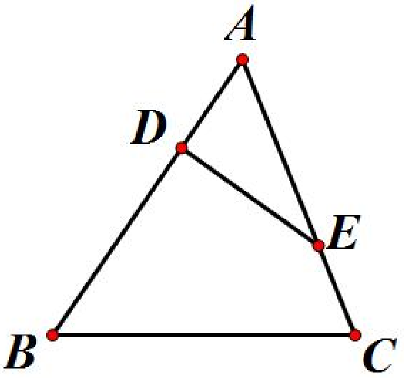
【分析】鸟头模型

【答案】30 平方厘米

【解答】

$$\left.\begin{array}{l} \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \\ \frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AF}{AB\times AC}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{阴影}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}=5 \Rightarrow S_{\Delta ABC}=30$$

4. ⑴如图在△ABC 中，D、E 分别是 AB，AC 上的点，且 AD∶AB=2∶5，AE∶AC=4∶7，△ADE 的面积是 16 平方厘米，求△ABC 的面积。

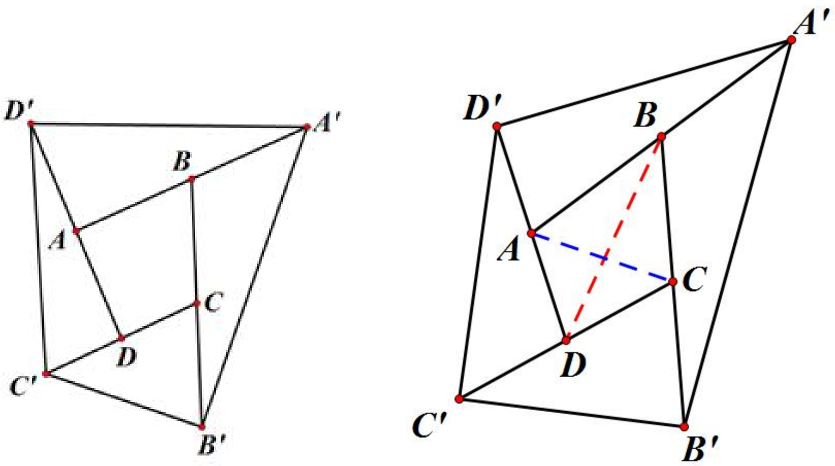


【分析】鸟头模型
【答案】70
【解答】

$$\frac{嘴}{头}=\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{35}$$

即$\frac{16}{S_{\Delta ABC}}=\frac{8}{35}$，即$S_{\Delta ABC}=70$

5. 分别延长四边形 ABCD 的四个边，使得 $AB=BA',BC=CB',CD=DC',DA=AD'$（如下图所示），如果四边形 ABCD 的面积是 1，请问四边形 $A'B'C'D'$ 的面积为多少？



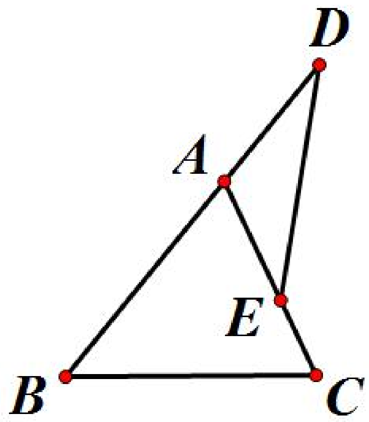
【分析】鸟头模型
【答案】5
【解答】
连接 BD，根据鸟头模型，可得

$$\left.\begin{array}{l}S_{\Delta AA'D'}=1\times2\times S_{\Delta ABD}=2S_{\Delta ABD}\\S_{\Delta CC'B'}=1\times2\times S_{\Delta BCD}=2S_{\Delta BCD}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta AA'D'}+S_{\Delta CC'B'}=2S_{四边形ABCD}$$

同理，连接 AC，易证：$S_{\Delta DC'D'}+S_{\Delta BA'B'}=2S_{四边形ABCD}$

所以，$S_{四边形A'B'C'D'}=5S_{四边形ABCD}=5$

⑵如图在△ABC 中，D 在BA 的延长线上，E 在AC 上，且AB∶AD＝5∶2，AE∶EC＝3∶2，△ADE 的面积是12 平方厘米，求△ABC的面积。

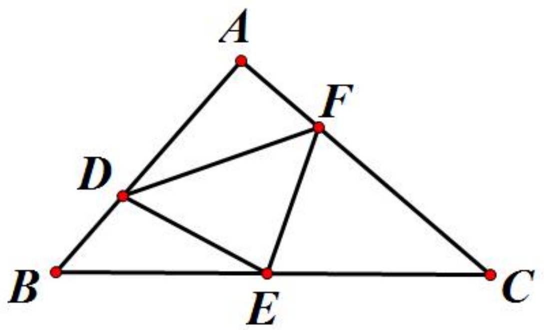


【分析】鸟头模型
【答案】50
【解答】

$$\frac{嘴}{头}=\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{12}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

即$\frac{12}{S_{\Delta ABC}}=\frac{6}{25}$，即$S_{\Delta ABC}=50$

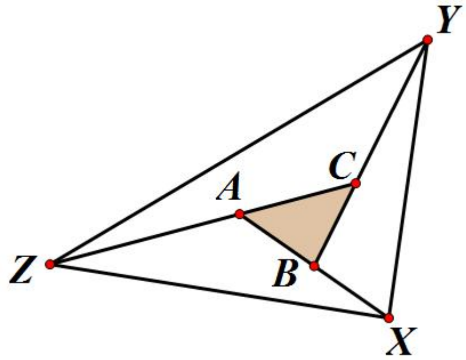
6. 已知△DEF 的面积为 7 平方厘米，BE＝CE，AD＝2BD，CF＝3AF，求△ABC 的面积。



【分析】鸟头模型
【答案】24
【解答】

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{BD\times BE}{AB\times BC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\\ \frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AF}{AB\times AC}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\\ \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{CE\times CF}{BC\times AC}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}=\frac{7}{24}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{7}{\frac{7}{24}}=24$$

7. 一只小鸟ABC，后来长成大鸟XYZ 了。AB 先长出一倍到X；BC 再长出两倍到Y；CA 再长出三倍到Z；问大鸟是小鸟面积的几倍?



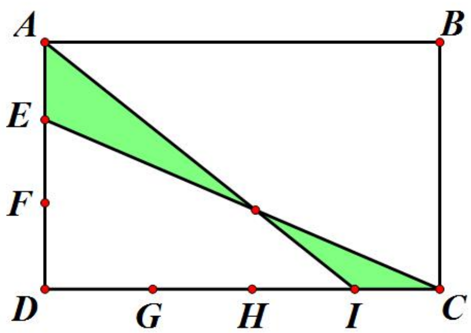
【分析】鸟头模型

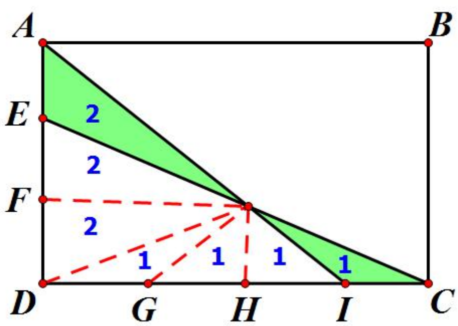
【答案】18 倍

【解答】

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BXY}}=\dfrac{BC\times AB}{BY\times BX}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow S_{\Delta BXY}=3S_{\Delta ABC}\\ \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CYZ}}=\dfrac{BC\times AC}{CY\times CZ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow S_{\Delta CYZ}=8S_{\Delta ABC}\\ \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AXZ}}=\dfrac{AB\times AC}{AX\times AZ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow S_{\Delta AXZ}=6S_{\Delta ABC}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=S_{\Delta ABC}+3S_{\Delta ABC}+8S_{\Delta ABC}+6S_{\Delta ABC}=18S_{\Delta ABC}$$

8.　长方形ABCD 面积为120，EF 为AD 上的三等分点，G、H、I 为DC 上的四等分点，阴影面积是多大？





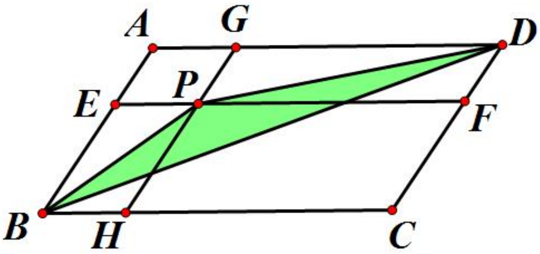
【分析】比例模型

【答案】15

【解答】

如图所示，$S_{阴影}=S_1+S_2=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ADI}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{4}\times 60=15$

9.　如右图，过平行四边形ABCD 内的一点作边的平行线EF、GH，若△PBD 的面积为8 平方分米，求平行四边形PHCF 的面积比平行四边形PGAE 的面积大多少平方分米？



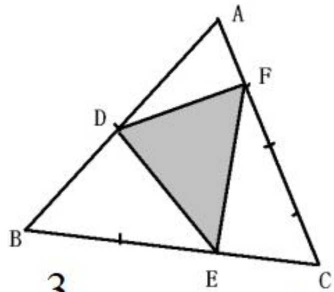
【分析】“都增加一个定量”

【答案】16

【解答】

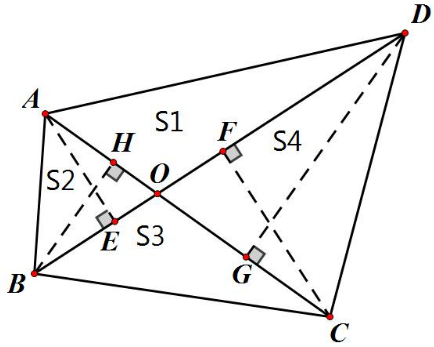
题目等效于$S_{四边形PBCD}-S_{四边形ABPD}=16 \Leftrightarrow S_{PHCF}-S_{AEPG}=16$

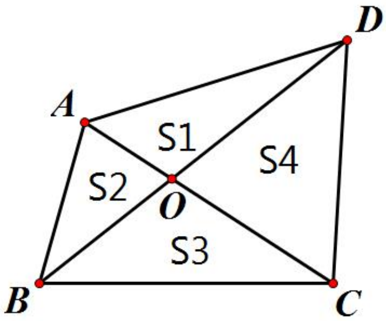
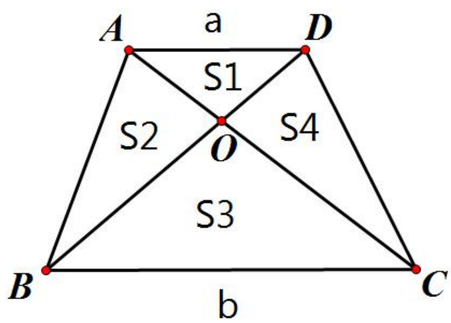
D为AB中点，E为BC三等分点，F为AC四等分点。
三角形ABC的面积是480平方厘米，求阴影面积。



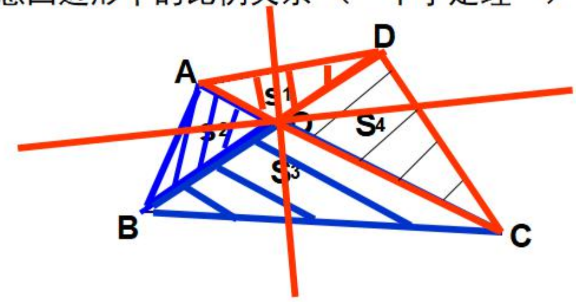
$$480\times(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4})=140\text{cm}^2$$

定理 3 蝴蝶模型



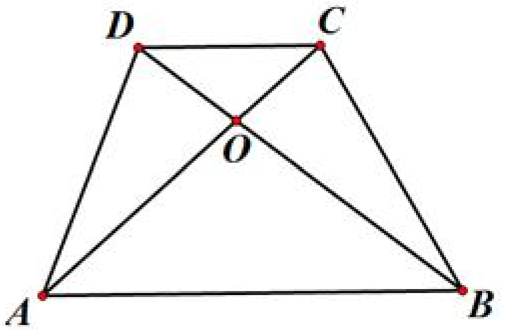
<table>
<tr><td>几何模型</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>概述</td><td>任意四边形中的比例关系</td><td>梯形中比例关系</td></tr>
<tr><td>结论及证明</td><td>（1） $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}=\frac{DO}{OB}$.
$\frac{S_2}{S_3}=\frac{S_1}{S_4}=\frac{AO}{OC}$.
（2） $S_1\bullet S_3=S_2\bullet S_4$.
（3） $\frac{AO}{OC}=\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}$.
$\frac{BO}{OD}=\frac{S_2+S_3}{S_1+S_4}$.</td><td>（1） $\frac{S_1}{S_3}=\frac{a^2}{b^2}$.
（2） S_1: S_3: S_2: $S_4=a^2:b^2:ab:ab$.
（3） $S_2=S_4=\frac{ab}{a^2+b^2+2ab}\bullet S_{梯形}=\frac{ab}{(a+b)^2}S_{梯形}$
证明：
$\frac{S_3}{S_2}=\frac{CO}{OA}=\frac{b}{a}\Rightarrow S_2=\frac{a}{b}S_3$.
$\frac{S_3}{S_1}=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow S_1=\frac{a^2}{b^2}\bullet S_3$.
$\therefore S_1:S_3:S_2:S_4=\frac{a^2}{b^2}S_3:S_3:\frac{a}{b}S_3:\frac{a}{b}S_3$
$=a^2:b^2:ab:ab$.
（4） 梯形 S 的对应份数为$(a+b)^2$.</td></tr>
</table>

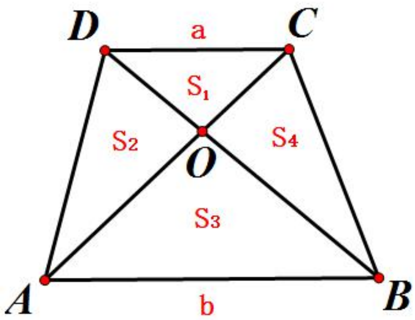
知 任意四边形中的比例关系（“十字定理”）



$\because \dfrac{\mathrm{BO}}{DO}=\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{S_3}{S_4}$ $\therefore S_1\times S_3=S_2\times S_4$

1. 如下图所示，在梯形 ABCD 中，AB//CD，对角线 AC，BD 相交于点 O.已知 AB=5，CD=3，且梯形 ABCD 的面积为 4，求三角形 OAB 的面积.





【分析】蝴蝶模型

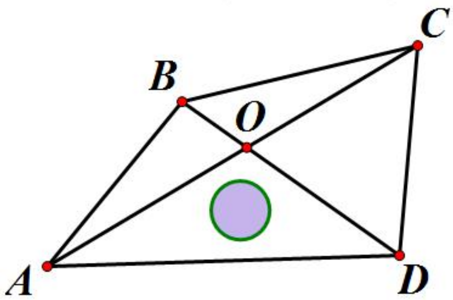
【答案】$\frac{25}{16}$

【解答】

S_1：S_2：S_3：$S_4=a^2:b^2:ab:ab$

$$S_3=\frac{b^2}{a^2+b^2+ab+ab}\bullet S=\left(\frac{b}{a+b}\right)^2\bullet S=\left(\frac{5}{3+5}\right)^2\times 4=\frac{25}{16}$$

2. 如图，某公园的外轮廓是四边形 ABCD，被对角线 AC、BD 分成四个部分，△AOB 面积为 1 平方千米，△BOC 面积为 2 平方千米，△COD 的面积为 3 平方千米，公园由陆地面积是 6.92 平方千米和人工湖组成，求人工湖的面积是多少平方千米？



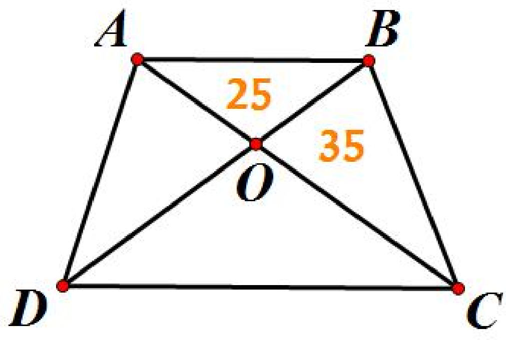
【分析】共边模型

【答案】0.58 平方千米

【解答】

$$\frac{BO}{CD}=\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOD}}=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta COD}}=\frac{2}{3}\Rightarrow S_{\Delta AOD}=1.5\text{平方千米}\Rightarrow S_{\text{人工湖}}=1.5-0.92=0.58(\text{平方千米})$$

3. 如下图，梯形ABCD 的AB 平行于CD，对角线AC，BD 交于O，已知△AOB与△BOC 的面积分别为25 平方厘米与35 平方厘米，那么梯形ABCD 的面积是多少平方厘米？



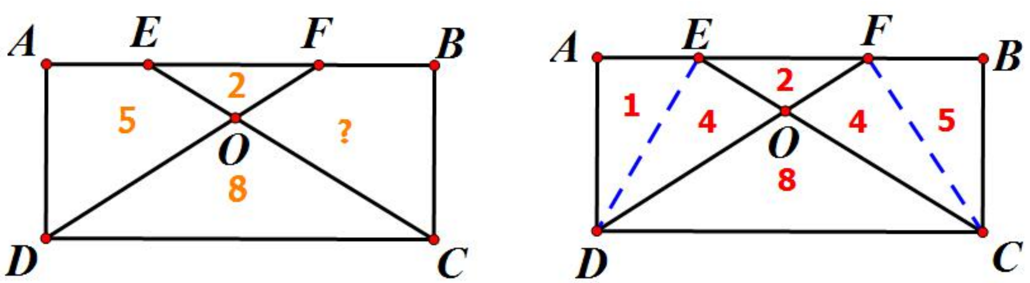
【分析】蝴蝶定理
【答案】144
【解答】

由蝴蝶定理得，$S_{\Delta AOD}=S_{\Delta BOC}=35$

由共边模型得，$\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}}=\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}$

同理可得：$\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta COD}}\Rightarrow\dfrac{5}{7}=\dfrac{35}{S_{\Delta COD}}\Rightarrow S_{\Delta COD}=144$

4. 如图，长方形ABCD 被CE、DF 分成四块，已知其中3 块的面积分别为2、5、8 平方厘米，那么余下的四边形OFBC 的面积为_____平方厘米。



【分析】蝴蝶模型、一半模型
【答案】9
【解答】

根据蝴蝶模型：$\dfrac{S_{\Delta EOF}}{S_{\Delta COD}}=\left(\dfrac{EO}{OC}\right)^2$，即$\dfrac{2}{8}=\left(\dfrac{EO}{OC}\right)^2$，所以$\dfrac{EO}{OC}=\dfrac{1}{2}$

根据比例模型：$\dfrac{S_{\Delta EOF}}{S_{\Delta COF}}=\dfrac{EO}{OC}=\dfrac{1}{2}$，即$S_{\Delta COF}=4$

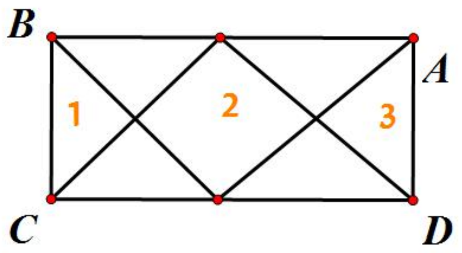
根据蝴蝶模型：$S_{\Delta DOE}=S_{\Delta COF}=4$，所以$S_{\Delta ADE}=S_{四边形ADOE}-S_{\Delta DOE}=5-4=1$

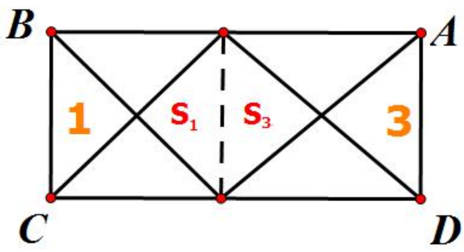
由一半模型得：$\dfrac{1}{2}S_{矩形ABCD}=S_{\Delta ADE}+S_{\Delta CEF}+S_{\Delta BCF}$

即 $12=1+6+S_{\Delta BCF}$

所以，$S_{\Delta BCF}=5$

5. 如图，长方形中，若三角形1 的面积与三角形3 的面积比为4 比5，四边形2 的面积为36，则三角形1 的面积为_____________。



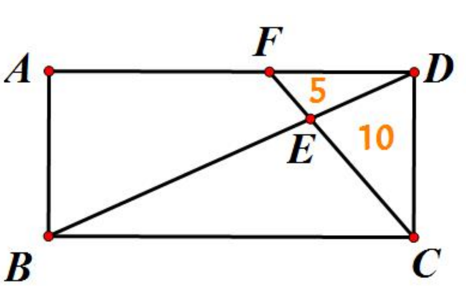


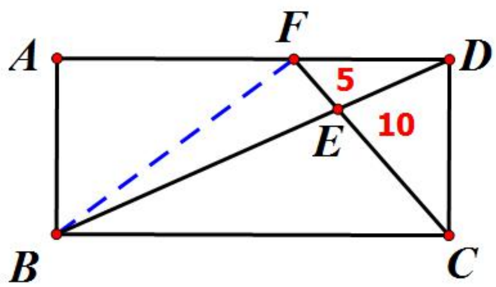
【分析】蝴蝶模型
【答案】16
【解答】

由蝴蝶定理得：$S_1=$三角形1的面积，$S_3=$三角形3的面积

$$\left.\begin{array}{l} S_1+S_3=36 \\ \dfrac{S_1}{S_3}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow S_3=\dfrac{5}{4}S_1 \end{array}\right\}\Rightarrow S_1+\frac{5}{4}S_1=36\Rightarrow S_1=16$$

6. 如图所示，BD、CF 将长方形ABCD 分成4 块，△DEF 的面积是5 平方厘米，△CED 的面积是10 平方厘米。问：四边形ABEF 的面积是多少平方厘米？





【分析】蝴蝶模型、一半模型
【答案】25
【解答】

根据蝴蝶模型：$S_{\Delta BEF}=S_{\Delta CDE}=10$

根据比例模型：$\dfrac{EF}{CE}=\dfrac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta CDE}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$,

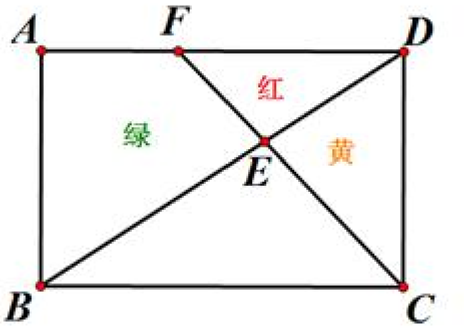
同理，$\frac{EF}{CE}=\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta BCE}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{10}{S_{\Delta BCE}}\Rightarrow S_{\Delta BCE}=20$

由一半模型得：$\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=S_{\Delta CDF}+S_{\Delta ABF}$

$$20+10=15+S_{\Delta ABF}$$
$$S_{\Delta ABF}=15$$

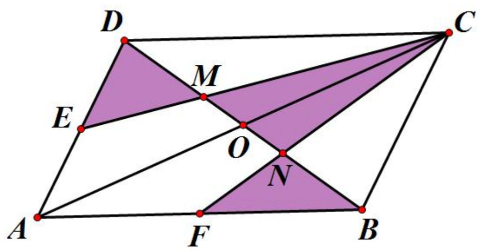
所以，$S_{四边形ABEF}=S_{\Delta ABF}+S_{\Delta BEF}=15+10=25$

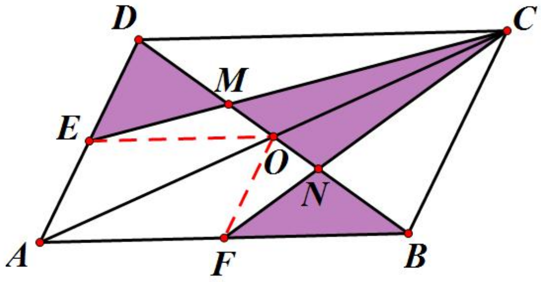
举一反三：如图，BD、CF 将长方形 ABCD 分成 4 块，红色三角形面积是 4 平方厘米，黄色三角形面积是 6 平方厘米，问：绿色四边形的面积是多少平方厘米？



【分析】蝴蝶模型
【答案】11
【解答】
同上，略

7. 平行四面形ABCD 中，对角线AC、BD 交于一点O。E是AD 中点，F 是AB 中点。CE 交BD 于点M，CF 交BD 于点N 。求阴影部分面积占平行四边形面积的几分之几？





【分析】比例模型

【答案】$\frac{1}{3}$

【解答】 连接 OE、OF

易证：$\frac{ON}{NB}=\frac{OM}{MD}=\frac{1}{2}$

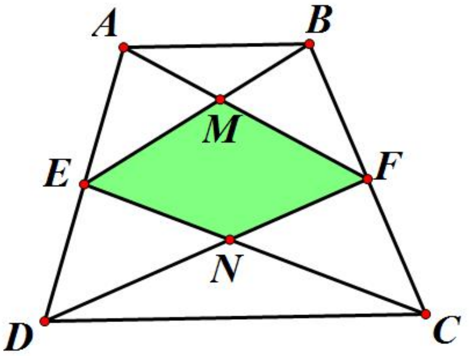
$\because OD=OB$

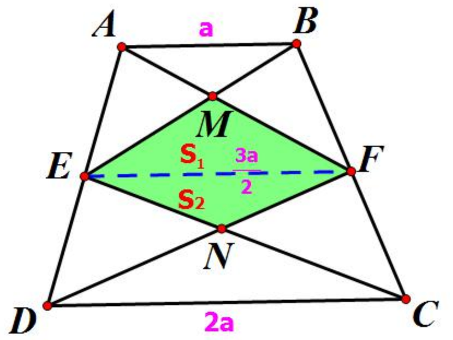
$\therefore OM=ON$,即$MN=\frac{1}{3}BD$

$\therefore S_{\Delta MNC}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{平行四边形}=\frac{1}{6}S_{平行四边形}$

$\therefore S_{阴影}=2S_{\Delta MNC}=\frac{1}{3}S_{平行四边形}$

8. 如下图，在梯形ABCD 中，与CD 平行，且CD＝2AB，点E、F 分别是AD 和BC 的中点，已知阴影四边形EMFN 的面积是54 平方厘米，则梯形ABCD 的面积是多少平方厘米？





【分析】蝴蝶模型

【答案】210

【解答】

$$\begin{cases}\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{a}{\frac{3}{2}a}=\dfrac{2}{3}\\[2ex] \dfrac{EF}{DC}=\dfrac{\frac{3}{2}a}{2a}=\dfrac{3}{4}\end{cases},\quad \begin{cases}S_1=\dfrac{b^2}{(a+b)^2}\bullet S_{ABFE}=\dfrac{\frac{9}{4}a^2}{\frac{25}{4}a^2}\bullet S_{ABFE}=\dfrac{9}{25}\bullet S_{ABFE}\\[2ex] S_2=\dfrac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{\left(\frac{3}{2}a+2a\right)^2}\bullet S_{EFCD}=\dfrac{\frac{9}{4}a^2}{\frac{49}{4}a^2}\bullet S_{EFCD}=\dfrac{9}{49}\bullet S_{EFCD}\end{cases}$$

又因为 $\dfrac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}}=\dfrac{\dfrac{\left(a+\frac{3}{2}a\right)}{2}\bullet h}{\dfrac{\left(2a+\frac{3}{2}a\right)}{2}\bullet h}=\dfrac{5}{7}$

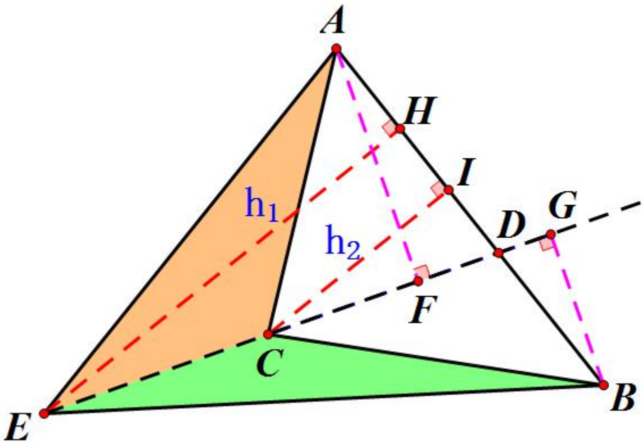
设 $S_{ABFE}=5k, S_{EFCD}=7k$

则：$S_1+S_2=\dfrac{9}{25}\times 5k+\dfrac{9}{49}\times 7k=54$

即：$\dfrac{k}{5}+\dfrac{k}{7}=6\Rightarrow k=\dfrac{35}{2}$

所以，$S_{梯形ABCD}=5k+7k=12k=12\times\dfrac{35}{2}=210$

定理 4　燕尾模型



结论：$\dfrac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta BCE}}=\dfrac{AD}{BD}$

证明：(证法一)

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta BDE}}=\frac{\frac{1}{2}\bullet AD\bullet EH}{\frac{1}{2}\bullet BD\bullet EH}=\frac{AD}{BD}$$

$$又\because\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta BDE}}=\frac{\frac{1}{2}\bullet DE\bullet AF}{\frac{1}{2}\bullet DE\bullet BG}=\frac{AF}{BG}$$

$$\therefore\frac{AF}{BG}=\frac{AD}{BD}$$

$$又\because\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{\frac{1}{2}\bullet CE\bullet AF}{\frac{1}{2}\bullet CE\bullet BG}=\frac{AF}{BG}$$

$$\therefore\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{AD}{BD}$$

证法（二）

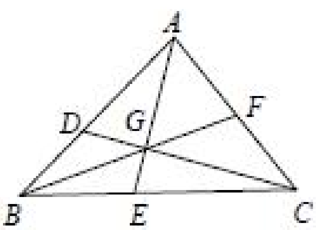
$$\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{S_{\Delta ADE}-S_{ADC}}{S_{\Delta BDE}-S_{\Delta BDC}}=\frac{\frac{1}{2}\bullet AD\bullet\left(h_1-h_2\right)}{\frac{1}{2}\bullet BD\bullet\left(h_1-h_2\right)}=\frac{AD}{BD}$$

燕尾模型

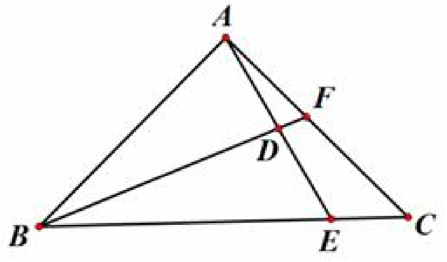
$$S_{\Delta AGB}:S_{\Delta AGC}=S_{\Delta EGB}:S_{\Delta EGC}=EB:EC$$

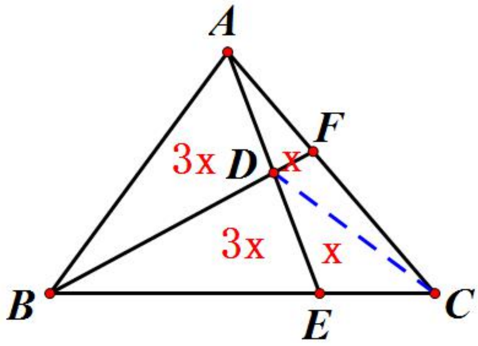
$$S_{\Delta BGA}:S_{\Delta BGC}=S_{\Delta FGA}:S_{\Delta FGC}=FA:FC$$

$$S_{\Delta CGA}:S_{\Delta CGB}=S_{\Delta DGA}:S_{\Delta DGB}=DA:DB$$



典例 1　如下图所示，在△ABC 中，E 是 BC 上一点，$BE:EC=3:1$，D 是 AE 的中点，F 是直线 BD 与 AC 的交点，则 $AF:FC=$________________.





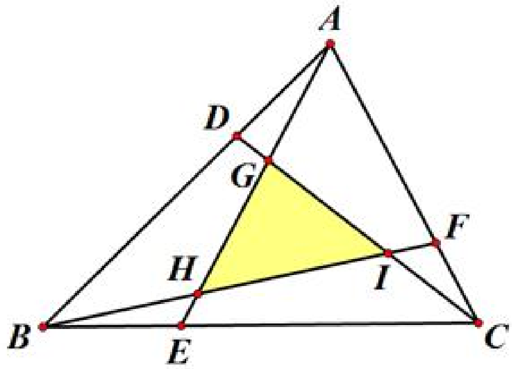
【分析】燕尾模型
【答案】$3:4$
【解答】 2 个燕尾

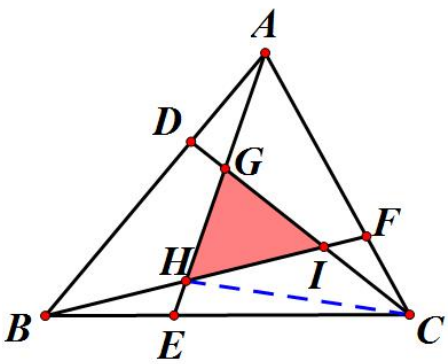
$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BE}{EC}=\frac{3}{1}$$

设 $S_{\Delta ABD}=3x$，$S_{\Delta ACD}=x$，则 $S_{\Delta BDE}=3x$，$S_{\Delta CDE}=x$

$$\frac{AF}{FC}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3}{4}$$

典例 2 如下图所示，在△ABC 中，BD=2DA，CE=2EB，AF=2FC，那么△ABC 的面积是阴影三角形面积的______________倍.





【分析】燕尾模型
【答案】7
【解答】

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{\Delta ABH}}{S_{\Delta ACH}}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\\ \frac{S_{\Delta ABH}}{S_{\Delta BCH}}=\frac{2}{1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{\Delta BCH}:S_{\Delta ABH}:S_{\Delta ACH}=1:2:4\Rightarrow S_{\Delta ABH}=\frac{2}{7}S_{\Delta ABC}$$

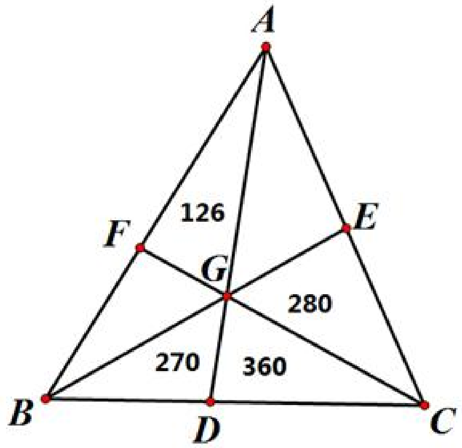
同理可证：

$$S_{\Delta ACG}=S_{\Delta BCI}=\frac{2}{7}S_{\Delta ABC}$$

$$\therefore S_{\Delta GHI}=\frac{1}{7}S_{\Delta ABC}$$

即$\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta GHI}}=7$

典例 3　如下图所示，点 G 为三角形内一点，连接 AG、BG、CG 分别交 BC、AC、AB 边于点 D，E，F.若三角形 AFG，CEG，BDG，CDG 之面积分别为 126，280，270，360.请问三角形 ABC 之面积为多少？

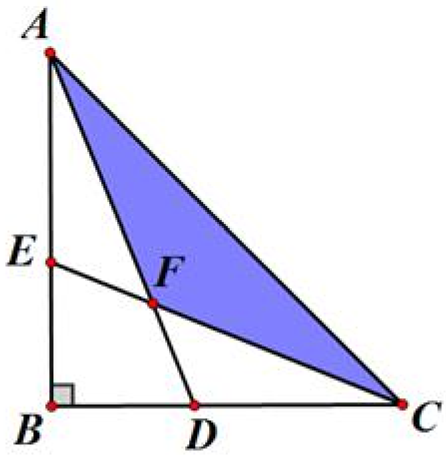


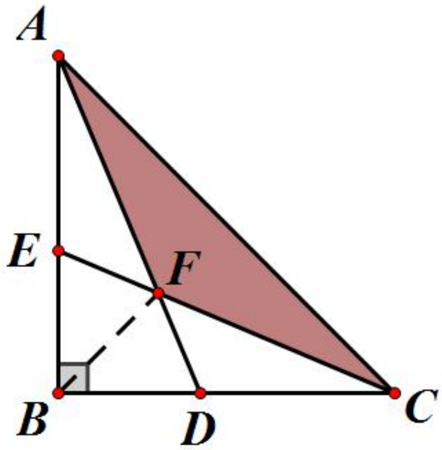
【分析】燕尾模型
【答案】1365
【解答】

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{126+x}{280+y}=\dfrac{270}{360}=\dfrac{3}{4}\\[2mm]\dfrac{126+x}{270+360}=\dfrac{y}{280}\Rightarrow 126+x=\dfrac{9}{4}y\end{array}\right\}\Rightarrow y=140\Rightarrow x=189$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=270+360+280+189+140+126=1365$$

典例 4 在下图中，三角形 ABC 是直角三角形，已知 AB=BC=14 且 BE=BD=6，请问图中阴影部分的面积是多少？





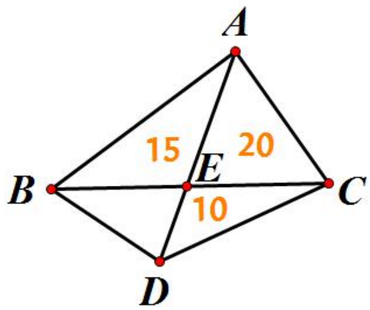
【分析】燕尾模型

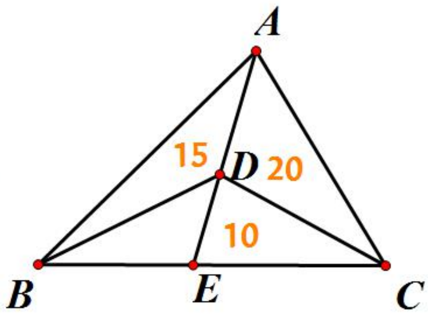
【答案】$\frac{196}{5}$

【解答】

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta ACF}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\\ \frac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ACF}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta ABF}:S_{\Delta BCF}:S_{\Delta ACF}=3:3:4\Rightarrow S_{阴影}=\frac{4}{10}\bullet S_{\Delta ABC}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times14\times14=\frac{196}{5}$$

典例 5 下面两幅图中，一个是风筝模型，一个是燕尾模型，我们来看看它们之间有什么联系。已知在下面两幅图中，△ABD 的面积是 15，△ACD 的面积是 20，△CDE 的面积是 10。求△BDE 的面积。





【分析】比例模型

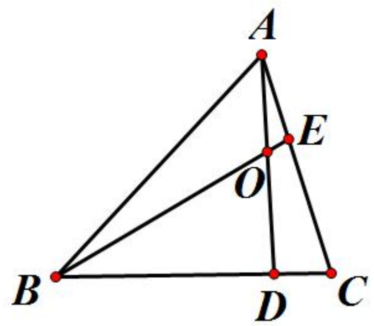
【答案】7.5；7.5

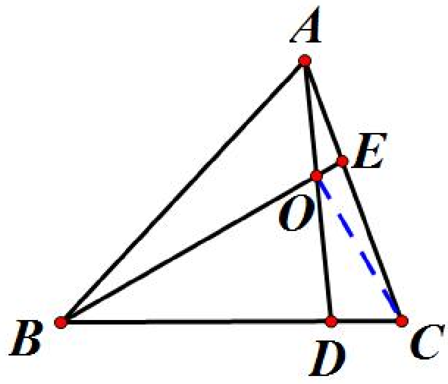
【解答】

（1）$\frac{15}{20}=\frac{S_{\Delta BDE}}{10}\Rightarrow S_{\Delta BDE}=7.5$

（2）$\frac{15}{20}=\frac{S_{\Delta BDE}}{10}\Rightarrow S_{\Delta BDE}=7.5$

典例 6 如图，已知 BD=3DC,EC=2AE,BE 与 AD 相交于点 O ,则△ABC 被分成的 4 部分面积各占△ABC 面积的几分之几？





【分析】燕尾模型

【答案】$\frac{13}{60}$

【解答】

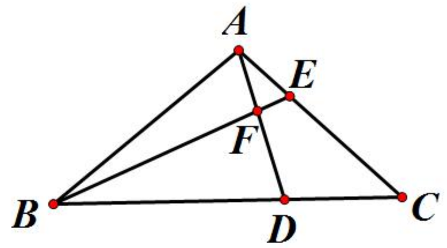
$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}\\ \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}=\frac{3}{1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}S_{\Delta AOB}=\frac{3}{10}S_{\Delta ABC}\\ S_{\Delta BOC}=\frac{6}{10}S_{\Delta ABC}=\frac{3}{5}S_{\Delta ABC}\\ S_{\Delta BOD}=\frac{3}{4}S_{\Delta BOC}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}S_{\Delta ABC}=\frac{9}{20}S_{\Delta ABC}\\ S_{\Delta OCD}=\frac{3}{20}S_{\Delta ABC}\end{array}\right\}$$

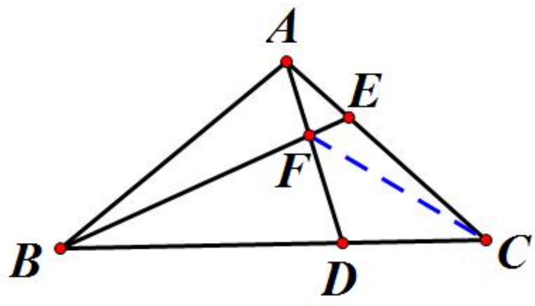
又 $\because S_{\Delta AOC}=\frac{1}{10}S_{\Delta ABC}$

$\therefore S_{\Delta AOE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{30}S_{\Delta ABC}$

$\therefore S_{OECD}=1-\frac{3}{10}-\frac{9}{20}-\frac{1}{30}=\frac{13}{60}$

典例 7 如图，三角形 ABC 的面积是 1，BD=2DC，CE=2AE，AD 与 BE 相交于点 F，请写出这 4 部分的面积各是多少?





【分析】燕尾模型

【答案】$\frac{2}{7}$

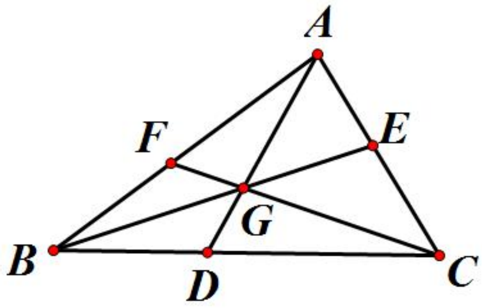
【解答】

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta ACF}}=\frac{2}{1}\\ \frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta BCF}}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2}{7}\\ S_{\Delta BCF}=\frac{4}{7}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta BDF}=\frac{2}{3}S_{\Delta BCF}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ACF}=\frac{1}{7}\Rightarrow S_{\Delta AEF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{21}\Rightarrow S_{\Delta CEF}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{21}$$

$$\Rightarrow S_{CEFD}=\frac{4}{21}+\frac{2}{21}=\frac{2}{7}$$

典例 8 如图，△ABC 中，BD:DC =2:3，AE:EC =5:3,则 AF:FB =?



【分析】燕尾模型

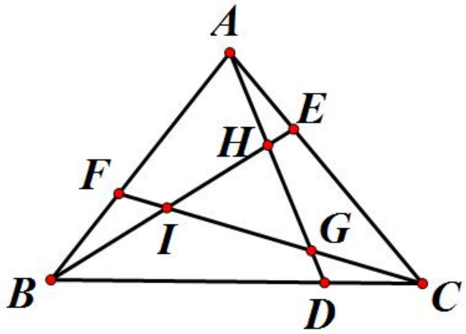
【答案】$\frac{5}{2}$

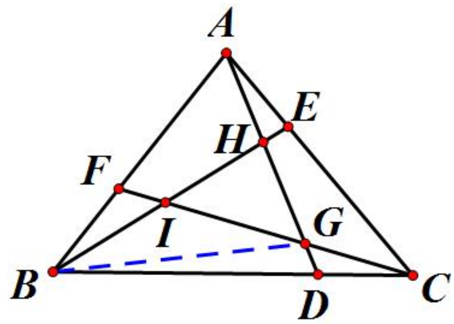
【解答】

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{\Delta ABG}}{S_{\Delta ACG}}=\frac{2}{3}=\frac{10}{15}\\ \frac{S_{\Delta ABG}}{S_{\Delta BCG}}=\frac{5}{3}=\frac{10}{6}\end{aligned}\right)\Rightarrow S_{\Delta BCG}:S_{\Delta ABG}:S_{\Delta ACG}=6:10:15$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}S_{\Delta BCG}=\frac{6}{31}S_{\Delta ABC}\\ S_{\Delta ACG}=\frac{15}{31}S_{\Delta ABC}\end{aligned}\Bigg\}\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\Delta ACG}}{S_{\Delta BCG}}=\frac{\frac{15}{31}}{\frac{6}{31}}=\frac{5}{2}$$

典例 9 如图在 ΔABC 中，$\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{EA}{EC}=\dfrac{FB}{FA}=\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{\Delta GHI\text{的面积}}{\Delta ABC\text{的面积}}$ 的值。





【分析】燕尾模型

【答案】$\dfrac{1}{7}$

【解答】连接 BG

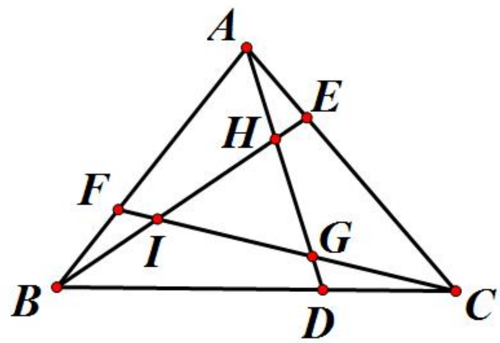
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{\Delta ABG}}{S_{\Delta ACG}}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}\\ \dfrac{S_{\Delta ACG}}{S_{\Delta BCG}}=\dfrac{2}{1}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\Delta ACG}=\frac{2}{7}S_{\Delta ABC}$$

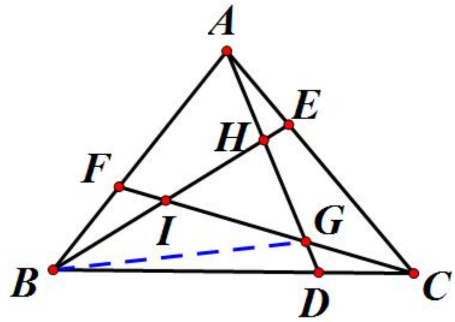
同理可证：$S_{\Delta ABH}=S_{\Delta BCI}=S_{\Delta ACG}=\dfrac{2}{7}S_{\Delta ABC}$

$\therefore S_{\Delta GHI}=\dfrac{1}{7}S_{\Delta ABC}$

$\therefore \dfrac{S_{\Delta GHI}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{1}{7}$

体验 1 如图，三角形 ABC 中，AF:FB=BD:DC=CE:AE=3:2，且三角形 GHI 的面积是 1，求三角形 ABC 的面积.





【分析】燕尾模型

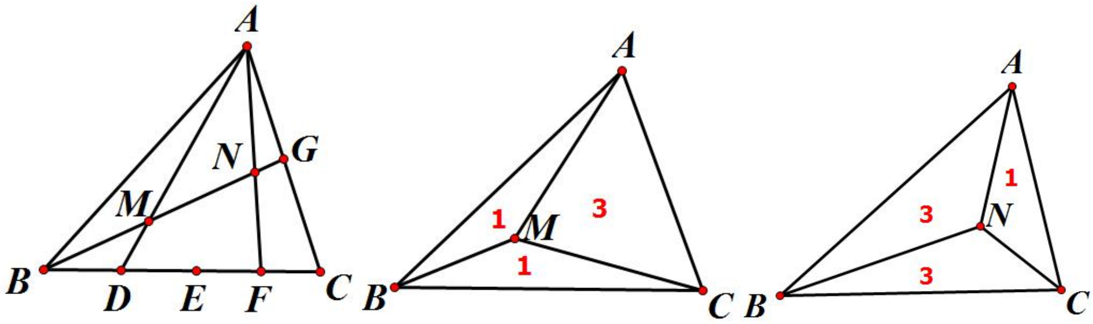
【答案】19

【解答】连接 BG

解答过程和上一道一样

略

典例 10 如图，△ABC 中，G 是 AC 的中点，D、E、F 是边上的四等分点，AD 与 BG 交于 M，AF 与 BG 交于 N，已知△AMN 的面积是 1，求△ABC 的面积.



【分析】燕尾模型

【答案】$\frac{35}{8}$

【解答】

以 M 为结点，易算出 $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{5}S_{\Delta ABC}$

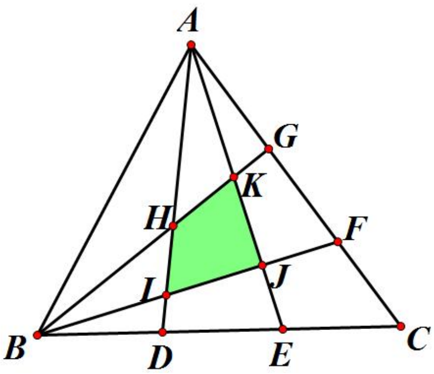
以 N 为结点，易算出 $S_{\Delta ABN}=\frac{3}{7}S_{\Delta ABC}$

$\therefore\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3}{7}-\frac{1}{5}=\frac{8}{35}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{\frac{8}{35}}=\frac{35}{8}$

【挑战题】

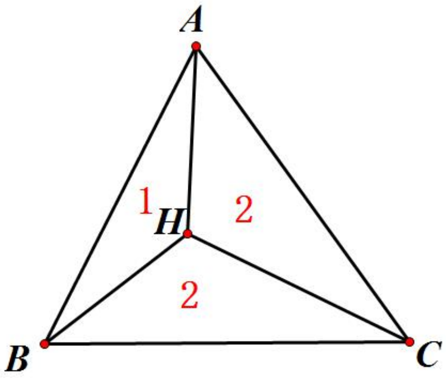
如图，三角形 ABC 的面积是 1，BD=DE=EC，CF=FG=GA，三角形 ABC 被分成 9 部分，请求出中心四边形的面积.

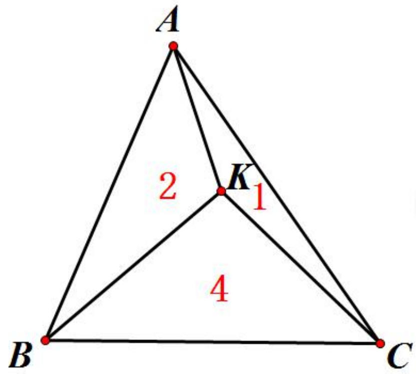


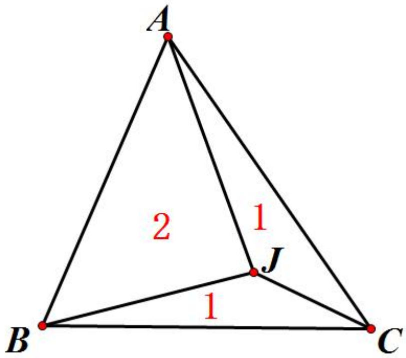
【分析】燕尾模型

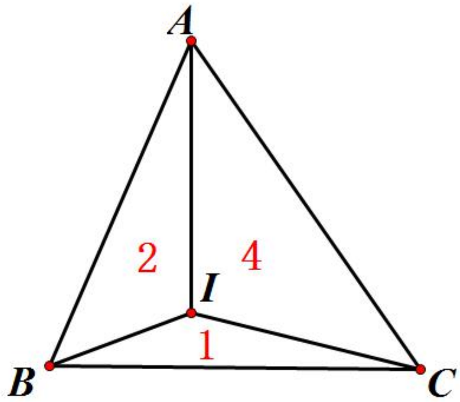
【答案】$\frac{9}{70}$

【解答】









以 H 为结点，易算出 $S_{\Delta ABH}=\frac{1}{5}$

以 K 为结点，易算出 $S_{\Delta ABK}=\frac{2}{7}$

所以 $S_{\Delta AHK}=\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{3}{35}; S_{\Delta AGK}=\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$

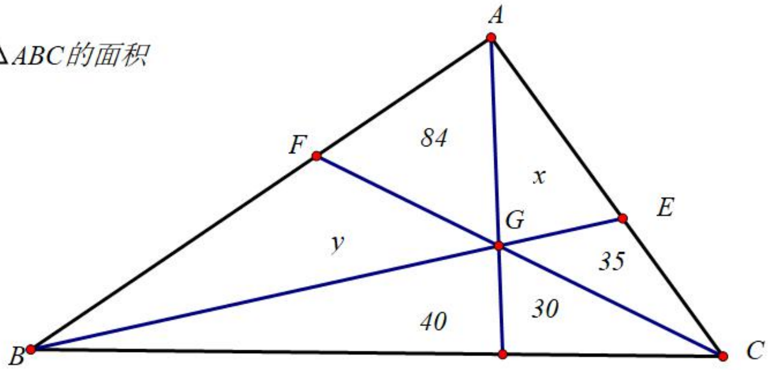
同理，以 I 为结点，易算出 $S_{\Delta ABI}=\frac{2}{7}$

所以 $S_{\Delta BIH}=\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{3}{35}; S_{\Delta BDI}=\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$

以 J 为结点，易算出 $S_{\Delta ABJ}=\frac{1}{2}$

所以 $S_{HIJK}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{3}{35}-\frac{3}{35}=\frac{9}{70}$

根据图中绘出的小三角形的数据，求ΔABC的面积



解：由题可知：

$\dfrac{84+y}{x+35}=\dfrac{4}{3}$，即$4x-3y=112$

$\dfrac{y+84}{x}=\dfrac{40+30}{35}$，即$y=2x-84$

$\therefore 3x-3(2x-84)=112$

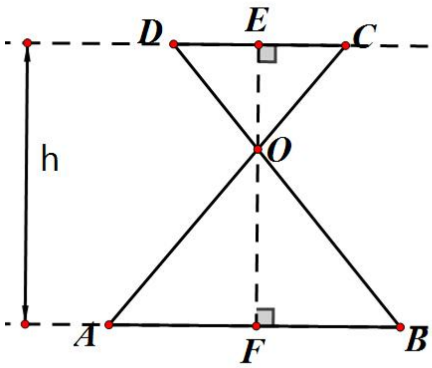
$\therefore x=70$

$\therefore y=56$

$\therefore S_{\triangle ABC}=70+56+84+40+30+35=315$

定理 5　沙漏模型

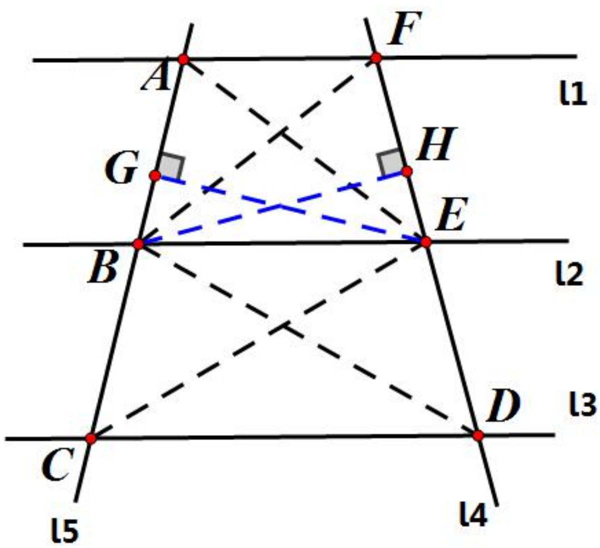
1. 沙漏模型



$$\frac{OE}{OF}=\frac{CD}{AB}$$
$$\frac{OE}{EF}=\frac{OE}{h}=\frac{CD}{AB+CD}$$

2. 平行线分线段成比例定理

已知，$l_1 // l_2 // l_3$，如图所示，求证：$\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{DE}$



证明：

$$S_{\Delta ABE}=S_{\Delta BEF}$$
$$S_{\Delta BCE}=S_{\Delta BDE}$$
$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta BDE}}$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\bullet AB\bullet EG}{\frac{1}{2}\bullet BC\bullet EG}=\frac{\frac{1}{2}\bullet EF\bullet BH}{\frac{1}{2}\bullet DE\bullet BH}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{EF}{DE}$$

引申：求证 $\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{DE}$

$$\frac{AB}{BC}+1=\frac{EF}{DE}+1$$
$$\Rightarrow \frac{AB+BC}{BC}=\frac{EF+DE}{DE}$$
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{DF}{DE}$$

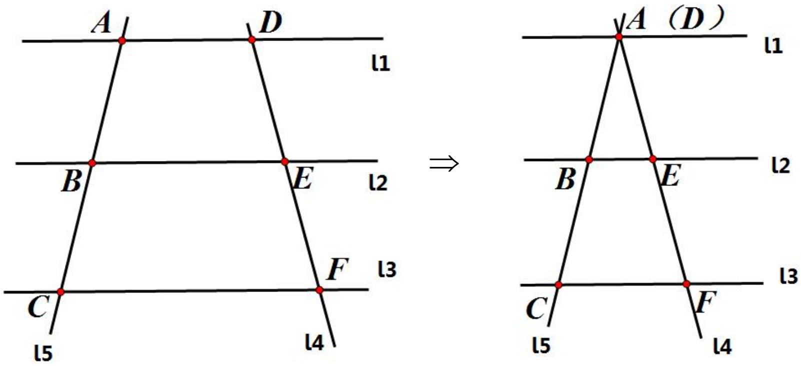
同理可证：$\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{DF}$，

即：$\frac{上}{下}=\frac{上}{下},\frac{上}{全}=\frac{上}{全},\frac{下}{全}=\frac{下}{全}$

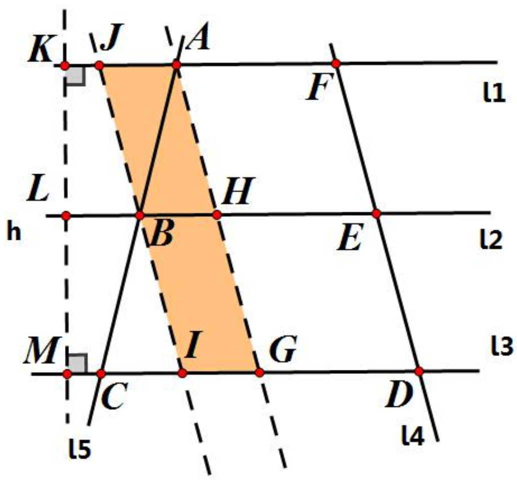
3. 平行线分线段成比例定理推导

已知，ΔACF中，$BE // CF$,求证:$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE}{EF}$

解析：从运动变化角度证明



4. 沙漏模型推导



证明：

易证:平行四边形 $AGIJ$

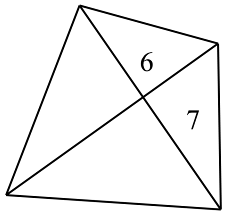
$AJ=IG$

$\Rightarrow \dfrac{CI}{AJ}=\dfrac{CI}{IG}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{LM}{KL}$

$\Rightarrow \dfrac{AJ}{CI}=\dfrac{KL}{LM}$

$\Rightarrow \dfrac{KL}{h}=\dfrac{AJ}{CI+AJ}$

典例 1　图中的四边形土地总面积为 52 公顷，两条对角线把它分成了 4 个小三角形，其中 2 个小三角形的面积分别是 6 公顷和 7 公顷。那么最大的一个三角形的面积是多少公顷？



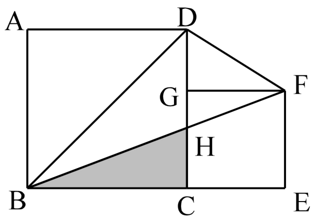
【分析】要求最大三角形的面积是多少，先求出较大的两个三角形的面积是多少，较大的两个三角形的面积和是 $52-6-7=39$ 平方厘米；根据三角形等高，面积比即三角形底边的比，然后根据按比例分配知识进行解答即可.

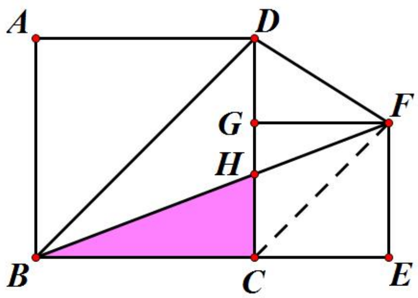
【答案】21 公顷

【解答】

左下角两个较小的三角形的面积比为 $6:7$，因为这两个三角形等高，所以底边的比也为 $6:7$，所以最大三角形面积为：$(52-6-7)\times\dfrac{7}{6+7}=21(公顷)$

典例 2　四边形 ABCD 和四边形 CEFG 是两个正方形,BF 与 CD 相交于 H,已知 CH:DH=1:2, $S_{\Delta BCH}=6$，求五边形 ABEFD 的面积。





【分析】考察沙漏模型、蝴蝶模型

【答案】3

【解答】

$S_{\Delta GHF}=S_{\Delta BCH}=6$

$\dfrac{S_{\Delta BDH}}{S_{\Delta DFH}}=\dfrac{S_{\Delta BCG}}{S_{\Delta CFH}}\Rightarrow\dfrac{12}{6}=\dfrac{6}{S_{\Delta CFH}}$

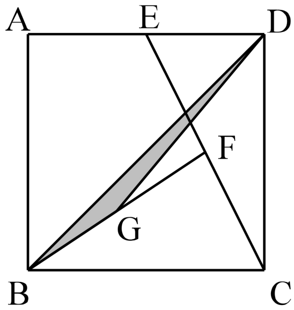
$\Rightarrow S_{\Delta CFH}=3$

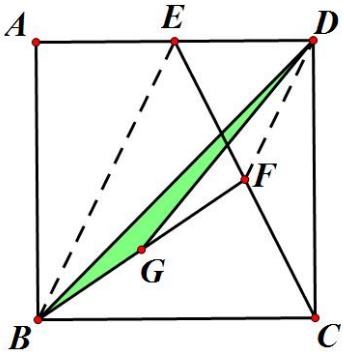
$\therefore S_{\Delta CDF}=6+3=9=\dfrac{1}{2}\times 6\bullet CE$

$\Rightarrow CE=3$

$\therefore S_{ABEFD}=36+6+3+\dfrac{9}{2}=49.5$

典例 3 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 10 厘米，E 为 AD 中点，F 为 CE 中点，G 为 BF 中点，求三角形 BDG 的面积．





【分析】考察比例模型

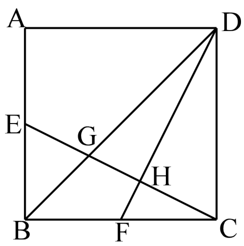
【答案】$6.25cm^2$

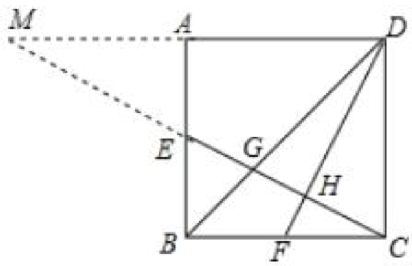
【解答】

$$S_{阴}=\frac{1}{2}S_{\Delta BDF}=\frac{1}{2}\left(S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BCF}-S_{\Delta CDF}\right)=\frac{1}{2}\left(S_{\Delta BCD}-\frac{1}{2}S_{\Delta BCE}-\frac{1}{2}S_{\Delta CDE}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(50-25-12.5)=6.25cm^2$$

典例 4 如图，正方形 ABCD 的面积是 120 平方厘米，E 是 AB 的中点，F 是 BC 的中点，四边形 BGHF 的面积是多少平方厘米？





【分析】沙漏模型

【答案】14

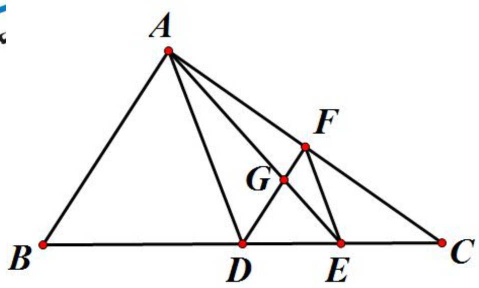
【解答】延长 CE 交 DA 的延长线于 M 点

$$\frac{S_{\Delta CFH}}{S_{\Delta DHM}}=\left(\frac{CF}{DM}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$$\frac{CF}{DM}=\frac{FH}{HD}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta CFH}=\frac{1}{5}S_{\Delta DCF}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times 60=6$$

如图，$S_{\Delta BCG}=\dfrac{2}{3+3+2+4}\times 120=\dfrac{2}{12}\times 120=20\Rightarrow S_{BGHF}=20-6=14$

典例 5 如下图，已知 D 是 BC 的中点，E 是 CD 的中点，F 是 AC 的中点，且 ΔADG 的面积比 ΔEFG 的面积大 6 平方厘米。ΔABC 的面积是多少？



【分析】比例模型

【答案】$48cm^2$

【解答】

$\because$ E是CD的中点，F是AC的中点

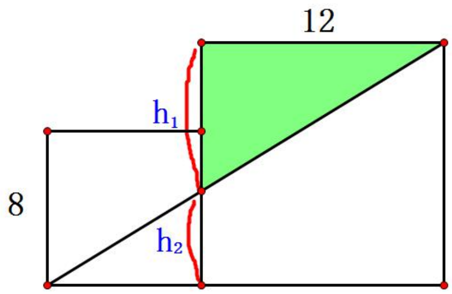
$\therefore S_{\Delta ADE}=S_{\Delta ACE}$

$S_{\Delta DEF}=S_{\Delta CEF}=S_{\Delta AEF}$

$\therefore \dfrac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ADE}}=\dfrac{1}{2}$

设$S_{\Delta DEF}=x$,即$\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=6\Rightarrow S_{\Delta ADE}=12\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{12}{\frac{1}{4}}=48\left(cm^2\right)$

典例 6 如下图所示，将边长 8 厘米和 12 厘米的两个长方形并放在一起，那么图形中阴影三角形的面积是____________平方厘米.



【分析】沙漏模型

【答案】$\dfrac{216}{5}$

【解答】

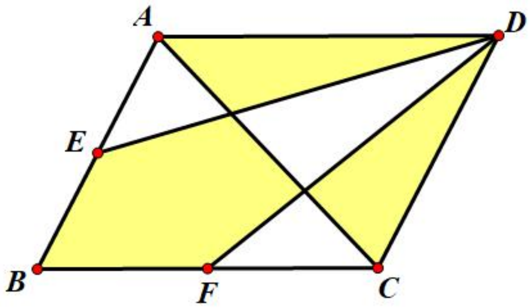
$\because \dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

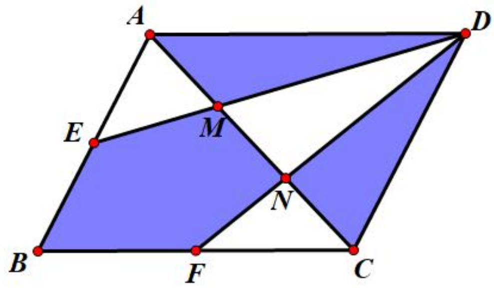
$\therefore h_1=12\times\dfrac{3}{2+3}=\dfrac{36}{5}$

$\therefore S_{阴}=\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{36}{5}=\dfrac{216}{5}$

【挑战题】

典例 7 如图，ABCD 是平行四边形，面积为 72 平方厘米，E、F 分别为边 AB、BC 的中点．则图形中阴影部分的面积为多少平方厘米?





【分析】沙漏模型

【答案】48

【解答】

由沙漏模型易证 M、N 是 AC 的三等分点.

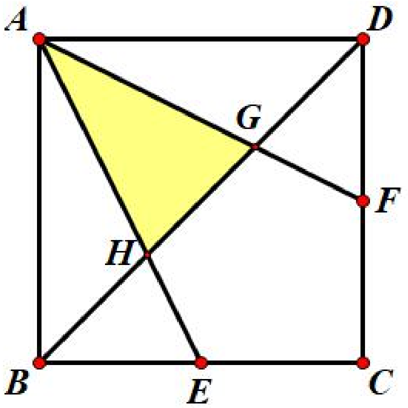
因为平行四边形的面积为 72 平方厘米，则 $S_{\Delta ADC}=72\div 2=36$(平方厘米)，

$S_{\Delta ADM}=S_{\Delta DMN}=S_{\Delta DNC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ADC}=\frac{1}{3}\times 36=12$(平方厘米)

$S_{\Delta AEM}=S_{\Delta NFC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ADM}=\frac{1}{2}\times 12=6$(平方厘米)

所以阴影部分的面积 $=72-12-6-6=48$(平方厘米)

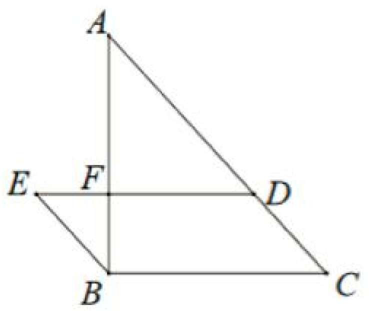
典例 8 如图所示，在正方形 ABCD 中，E，F 分别是 BC、CD 的中点.已知正方形 ABCD 的面积为 60，求阴影部分面积.



由沙漏模型得 G、H 为 BD 的三等分点，

$$S_{\Delta AHG}=\frac{1}{3}\bullet S_{\Delta ABD}=\frac{1}{6}\bullet S_{ABCD}=10$$

典例 9 如图，在直角三角形 ABC 中，点 F 在 AB 上，且 AF=2FB，四边形 EBCD 是平行四边形，那么 $FD:EF$ 的比值是多少？若三角形 BEF 的面积是 1，那么三角形 ABC 的面积是多少？



由沙漏模型得 $\dfrac{FD}{EF}=\dfrac{AF}{FB}=2$

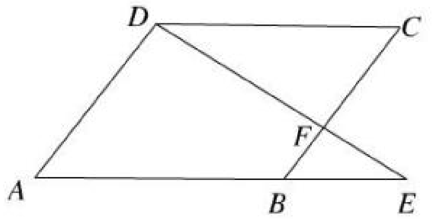
$$\Rightarrow S_{\Delta ADF}=4$$

$$\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AF}{AB}\bullet\frac{AD}{AC}=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=9$$

习　题

1. 如图，已知在平行四边形 ABCD 中，AB=16，AD=10，BE=4，那么 FC 的长度是多少？

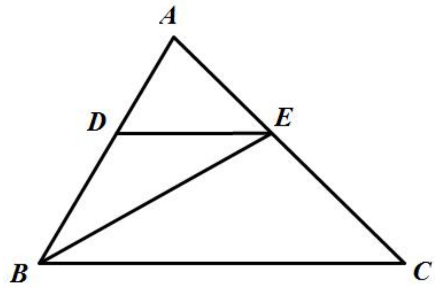


因为 AB 平行于 CD

所以 BF:FC=BE:CD=4：16=1：4

所以 FC=$10\times\frac{4}{1+4}=8$

2. 如图，DE 平行 BC,若 AD:DB=2:3，那么 $S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ECB}=$________.



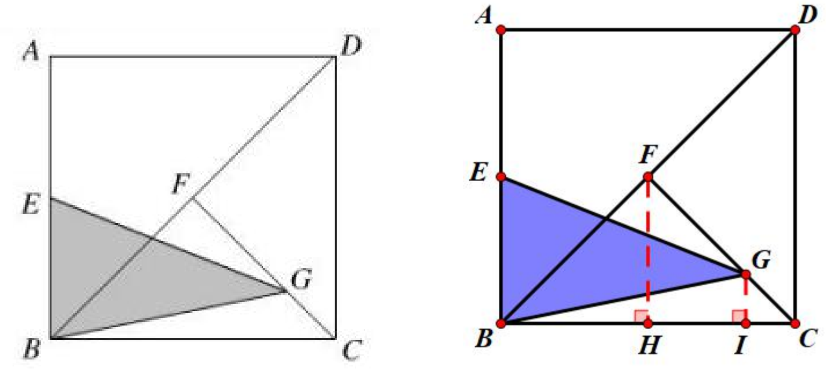
由金字塔模型 AD:AB=AE:AC=DE:BC=2：(2+3)=2：5，

$S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ABC}=2^2:5^2=4:25$，

设 $S_{ADE}=4$ 份，则 $S_{\Delta ABC}=25$ 份，$S_{\Delta BEC}=25\div5\times3=15$ 份，

所以 $S_{\Delta ADE}:S_{\Delta ECB}=4:15$

3. 右图中正方形的面积为 1，E、F 分别为 AB、BD 的中点，GC=$\frac{1}{3}$FC，求阴影部分的面积。



作 FH 垂直于 BC 于 H，GI 垂直 BC 于 I。

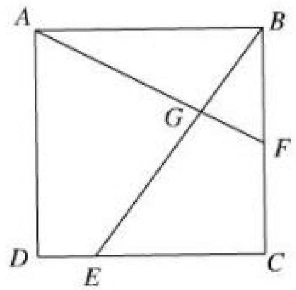
根据沙漏模型性质，CI:CH=CG:CF=1：3，

又因为 CH=HB，所以 CI:CB=1:6，

即 BI:BC=（6-1）：6=5:6，

所以 $S_{\Delta BGE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{24}$.

4. 如图，已知正方形 ABCD 的边长为 4，F 是 BC 边的中点，E 是 DC 边上的点，且 DE:EC=1：3，AF 与 BE 相交于点 G，求 $S_{\Delta ABG}$.



法一：连接 AE，延长 AF，DC 两条线交于点 M，构造出两个沙漏，
所以有 AB:CM=BF:FC=1：1，因此 CM=4，
据题意有 CE=3，再据沙漏有 GB:GE=AB:EM=4:7，
所以 $S_{\Delta ABG}=\frac{4}{4+7},S_{\Delta ABE}=\frac{4}{11}\times\left(4\times4\div2\right)=\frac{32}{11}$.
法二：连接 AE,EF，

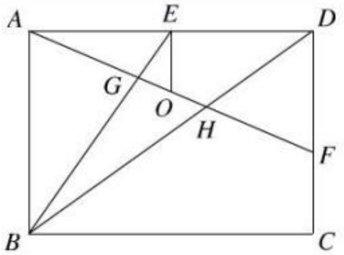
$S_{\Delta ABF}=4\times2\div2=4$,

$S_{\Delta AEF}=4\times4-4\times1\div2-3\times2\div2-4=7$,

根据蝴蝶定理 $S_{\Delta ABF}:S_{\Delta AEF}=BG:GE=4:7$，

所以 $S_{\Delta ABG}=\frac{4}{4+7},S_{\Delta ABE}=\frac{4}{11}\times\left(4\times4\div2\right)=\frac{32}{11}$.

5. 如图，长方形 ABCD 中，E 为 AD 的中点，AF 与 BE、BD 分别交于 G、H，OE 垂直于 AD 于 E，交 AF 于 O，已知 AH=5cm，HF=3cm，求 AG.



由于 AB 平行 DF，利用沙漏模型可得 AB:DF=AH:HE=5：3，

又因为 E 为 AD 中点，那么 OE:FD=1:2，

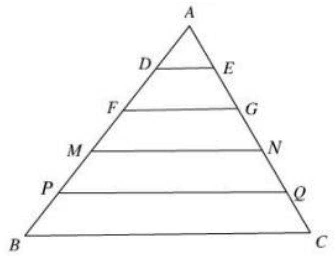
所以 AB:OE=5：$\frac{3}{2}$=10：3，

利用沙漏模型可以得到 AG：GO=AB:OE=10：3，

而 AO=$\frac{1}{2}$ AF=$\frac{1}{2}\times\left(5+3\right)=4$ (cm)，

所以 AG=$4\times\frac{10}{13}=\frac{40}{13}$ (cm)。

6. 如图，ΔABC 中，DE，FG，MN，PQ，BC 互相平行，AD=DF=FM=MP=PB，则 $S_{\Delta ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGNM}:S_{四边形MNQP}:S_{四边形PQCB}=$________.

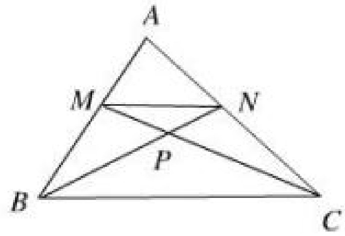


设 $S_{\Delta ADE}=1$ 份，$S_{\Delta ADE}:S_{\Delta AFG}=AD^2:AF^2=1:4$，因此 $S_{\Delta AFG}=4$ 份，进而有

$S_{四边形DEFG}=3$ 份，同理有 $S_{四边形FGNM}=5$ 份，$S_{四边形MNQP}=7$ 份，$S_{四边形PQCB}=9$ 份。

所以有 $S_{\Delta ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGNM}:S_{四边形MNQP}:S_{四边形PQCB}=$1:3:5:7:9

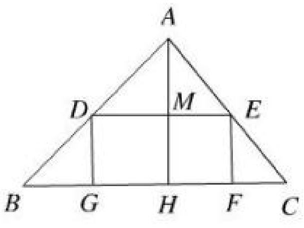
7. 如图:MN 平行 BC，$S_{\Delta MPN}:S_{\Delta BCP}=4:9$，AM=4cm，求 BM 的长度.



在沙漏模型中，因为 $S_{\Delta MPN}:S_{\Delta BCP}=4:9$，所以 MN:BC=2：3，在 金字塔模型中有：

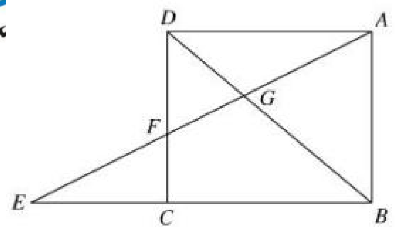
AM:AB=MN:BC=2：3，因为 AM=4cm，AB=$4\div2\times3=6$cm，所以 BM=6-4=2cm

8. 如图在 ΔABC 中，有长方形 DEFG，G、F 在 BC 上，D、E 分别在 AB，AC 上，AH 是 ΔABC 边 BC 的高，交 DE 与 M，DG:DE=1:2，BC=12 厘米，AH=8 厘米，求长方形的长和宽。



1、观察图中有金字塔模型 5 个，用与已知边有关系的两个金字塔模型，所以
$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB},\frac{DG}{AH}=\frac{BD}{AB}$,所以有 $\frac{DE}{BC}+\frac{DG}{AH}=\frac{AD}{AB}+\frac{BD}{AB}=1$，设 DG=x，则 DE=2x，
所以有 $\frac{2x}{12}+\frac{x}{8}=1$，解得 $x=\frac{24}{7},2x=\frac{48}{7}$，因此长方形的长和宽分别是 $\frac{48}{7}$ 厘米，$\frac{24}{7}$ 厘米。

9. 如右图，长方形 ABCD 中，EF=16，FG=9，求 AG 的长。



因为 DA 平行 BE，根据沙漏模型性质知$\dfrac{DG}{GB}=\dfrac{AG}{GE}$,

又因为 DF 平行 AB， $\dfrac{DG}{GB}=\dfrac{FG}{GA}$,所以$\dfrac{FG}{GA}=\dfrac{AG}{GE}$,即 $AG^2=GE\cdot FG=25\times9=225=15$,

所以 AG=15.

定理 6　梅涅劳斯定理（梅氏线）

定理：一条直线与ΔABC的三边 AB、BC、CA 所在直线分别交于点 D、E、F，且 D、E、F 均不是ΔABC的顶点，则有

$$\frac{AD}{DB}\times\frac{BE}{EC}\times\frac{CF}{FA}=1.$$

证明：如图，过点 C 作 AB 的平行线，交 EF 于点 G.

因为 CG // AB，所以$\frac{CG}{AD}=\frac{CF}{FA}$　————（1）

因为 CG // AB，所以$\frac{CG}{DB}=\frac{EC}{BE}$　————（2）

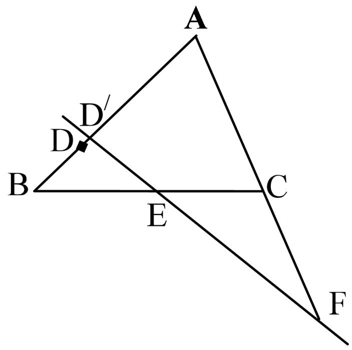
由（1）÷（2）可得$\frac{DB}{AD}=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}$，即得$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.

注：添加的辅助线 CG 是证明的关键“桥梁”，两次运用相似比得出两个比例等式，再拆去“桥梁”（CG）使得命题顺利获证.

4．梅涅劳斯定理的逆定理及其证明

定理：在ΔABC的边 AB、BC 上各有一点 D、E，在边 AC 的延长线上有一点 F，若

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1,$$



那么，D、E、F 三点共线.

证明：设直线 EF 交 AB 于点 D/，则据梅涅劳斯定理有

$$\frac{AD^{/}}{D^{/}B}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1.$$

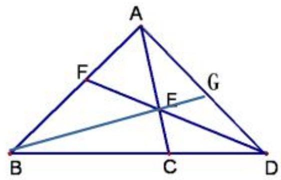
因为 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$，所以有$\frac{AD}{DB}=\frac{AD^{/}}{D^{/}B}$. 由于点 D、D/都在线段 AB 上，所以点 D 与 D/重合．即得 D、E、F 三点共线.

注：证明方法与上面的塞瓦定理的逆定理如出一辙，注意分析其相似后面的规律.

梅涅劳斯定理

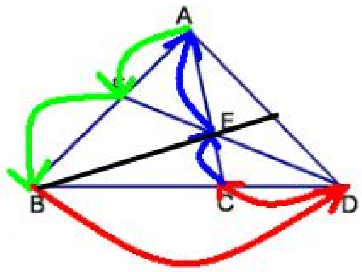
已知ΔABD，AC、BG、DF交于E点，则

$$\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{AE}=1$$



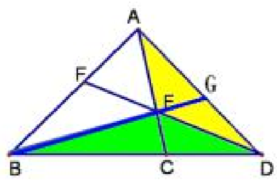
证明：

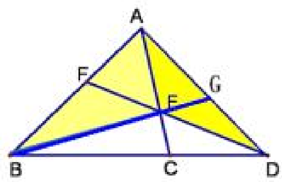
$$\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{AE}=1$$

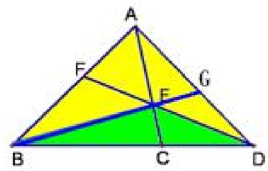


$$证:\because\frac{\cancel{S_{\Delta ADE}}}{\cancel{S_{\Delta BDE}}}\bullet\frac{\cancel{S_{\Delta BED}}}{\cancel{S_{\Delta ADE}}}\bullet\frac{\cancel{S_{\Delta BDE}}}{\cancel{S_{\Delta BED}}}$$

$$=1$$

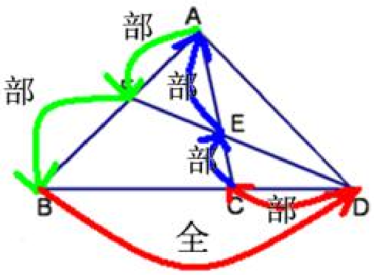


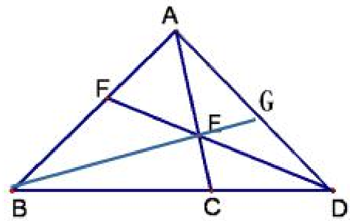


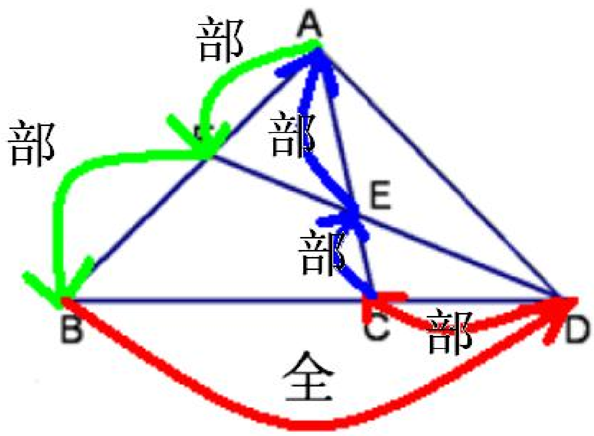


- 已知ΔABD，AC、BG、DF交于E点，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{AE}=1$$

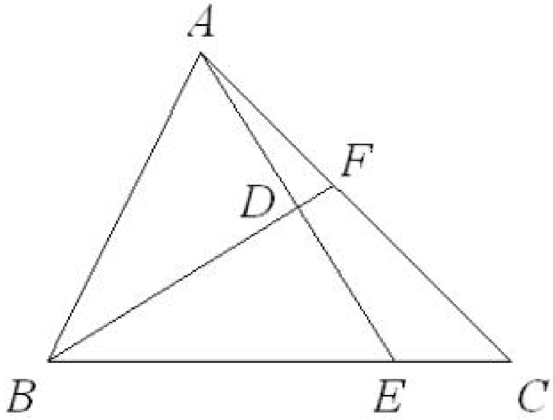




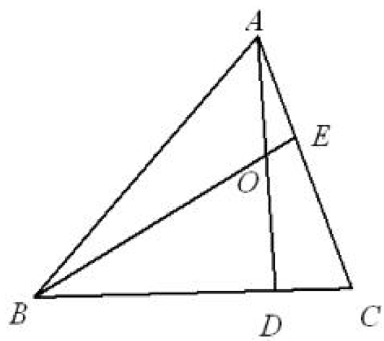


当三角形的顶点向对边连线并交于一点时，从三角形任一顶点出发，沿顺（或逆）时针，按“部、部、全、部、部、部”的顺序，一笔画并回到起点。

如图所示，在$\triangle ABC$中，$BE:EC=3:1$，D是AE的中点，那么$AF:FC=$________．



如图，已知$BD=3DC$，$EC=2AE$，BE与CD相交于点O，则$\triangle ABC$被分成的4部分面积各占$\triangle ABC$面积的几分之几？

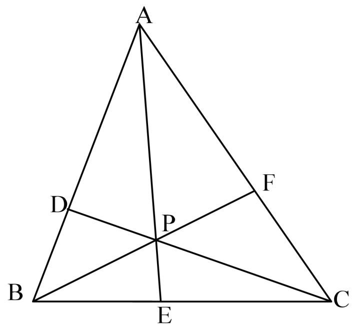


定理 7 塞瓦定理（赛瓦点）

1. 塞瓦定理及其证明

定理：在ΔABC 内一点 P，该点与ΔABC 的三个顶点相连所在的三条直线分别交ΔABC 三边 AB、BC、CA 于点 D、E、F，且 D、E、F 三点均不是ΔABC 的顶点，则有

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1.$$



证明：运用面积比可得 $\frac{AD}{DB}=\frac{S_{\Delta ADP}}{S_{\Delta BDP}}=\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta BDC}}$.

根据等比定理有

$$\frac{S_{\Delta ADP}}{S_{\Delta BDP}}=\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta BDC}}=\frac{S_{\Delta ADC}-S_{\Delta ADP}}{S_{\Delta BDC}-S_{\Delta BDP}}=\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta BPC}},$$

所以 $\frac{AD}{DB}=\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta BPC}}$. 同理可得 $\frac{BE}{EC}=\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}$，$\frac{CF}{FA}=\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta APB}}$.

三式相乘得 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.

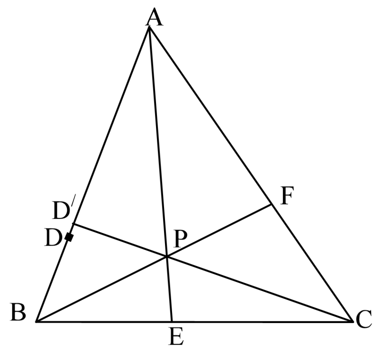
注：在运用三角形的面积比时，要把握住两个三角形是“等高”还是“等底”，这样就可以产生出“边之比”．

2. 塞瓦定理的逆定理及其证明

定理：在ΔABC 三边 AB、BC、CA 上各有一点 D、E、F，且 D、E、F 均不是ΔABC 的顶点，若 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$，那么直线 CD、AE、BF 三线共点.

证明：设直线 AE 与直线 BF 交于点 P，直线 CP 交 AB 于点 D′，则据塞瓦定理有

$$\frac{AD'}{D'B}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1.$$



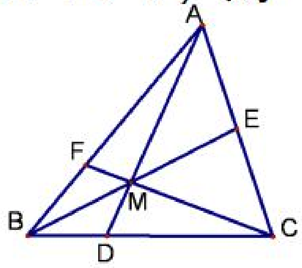
因为 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$，所以有 $\frac{AD}{DB}=\frac{AD'}{D'B}$. 由于点 D、D′都在线段 AB 上，所以点 D 与 D′重合．即得 D、E、F 三点共线.

注：利用唯一性，采用同一法，用上塞瓦定理使命题顺利获证.

塞瓦定理

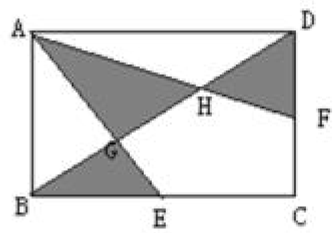
- 设M是三角形ABC内的任意一点，直线AM、BM、CM分别交对边于点D、E、F，则

$$\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{EA}\bullet\frac{AF}{FB}=1$$

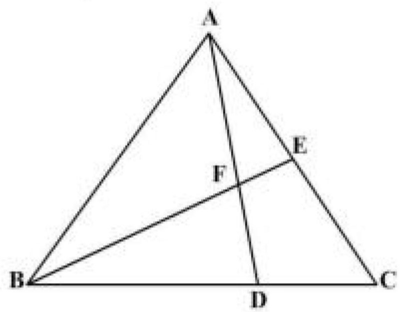


当三角形的顶点向对边连线并交于一点时，从三角形任一顶点出发，沿顺（或逆）时针围着三角形的外周，按“部、部、部、部、部、部”的顺序，一笔画并回到起点。

(1)求阴影面积（长方形长5厘米，宽4厘米）E、F分别为所在边中点。（08中高原题）

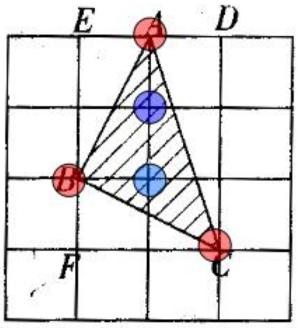


(2) 如图BD＝2DC，AF＝2FD，EC＝12，求AE。（09中高原题）



定理 8　格点面积公式（皮克公式）

皮克公式：

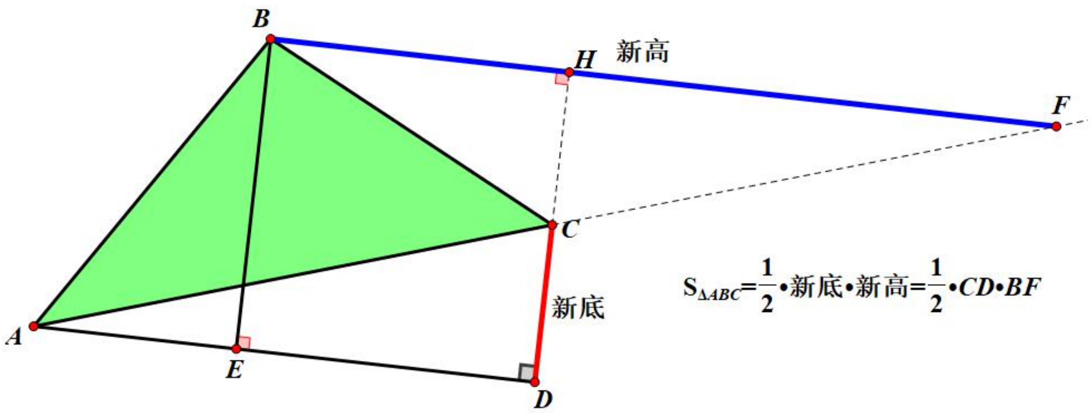


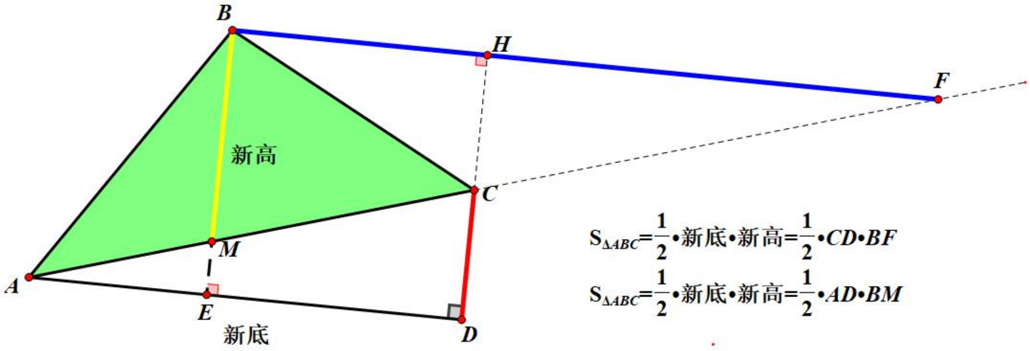
$$S=3\div 2+2-1$$
$$=2.5(\text{Cm}^2)$$

若每个小方格面积均为1，则：

格点多边形面积=外周格点数÷2+内部格点数-1

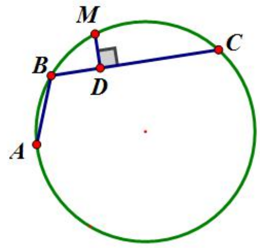
定理 9　构造新底新高巧求面积（万底公式）





定理 10　阿基米德折弦定理

问题：已知 M 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，B 为 $\overset{\frown}{AM}$ 上任意一点，且 $MD\perp BC$ 于 D. 求证：$AB+BD=DC$



证法一：(补短法)

如图：延长 DB 至 F，使 BF=BA　　∵M 为 $\overset{\frown}{AC}$ 中点　　∴AM=MC,

∴∠MAC=∠MCA---①　　又∵ $\overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MC}$，　∴MC=MA　　∴∠MBC=∠MAC---②

又∵∠MBC+∠MBF=180---③　　由 M,B,A,C 四点共圆　　∴∠MCA+∠MBA=180---④

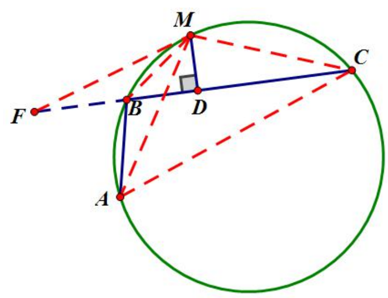
由①②③④可得：∠MBA=∠MBF

在△MBF 与△MBA 中：

$\begin{cases} BF=BA \\ \angle MBA=\angle MBF \\ MB=MB \end{cases}$　∴△MBF≅△MBA(SAS)　　∴MF=MA, 又∵MC=MA　∴MF=MC

又∵MD⊥CF　∴DF=DC　∴FB+BD=DC　又∵BF=BA

∴AB+BD=DC（证毕）



证法二：（截长法）

如图：在 CD 上截取 DB=DG　　∵MD⊥BG　∴MB=MG　∴∠MBG=∠MGB---①

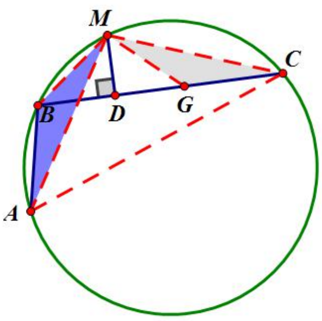
又∵ $\overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MC}$，∴∠MBG=∠MAC　　又∵∠MAC=∠MCA　(已证)，

∴∠MBG=∠MCA---②　　由①②可得∠MGB=∠MCA=∠BCA+∠MCG

而∠MGB=∠GMC+∠MCG　∴∠GMC=∠BCA　　又∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，∴∠BMA=∠BCA

∴∠BMA=∠GMC,　在△MBA 与△MGC 中 $\begin{cases} MB=MG \\ \angle BMA=\angle GMC \\ MA=MC \end{cases}$　∴△BMA≅△GMC (SAS)

B=GC, ∴AB+BD=GC+BD=GC+DG=DC(证毕)



证法三：（翻折）

如图：连接 MB,MC,MA,AC, 将△BAM 沿 BM 翻折，使点 A 落至点 E，连接 ME,BE

∵△MBA 与△MBE 关于 BM 对称，所以△MBE≌MBA　∴MA=ME,　∠MBA=∠MBE-①

又∵MA=MC, ∴ME=MC ,　　又∵M, B, A, C 四点共圆，

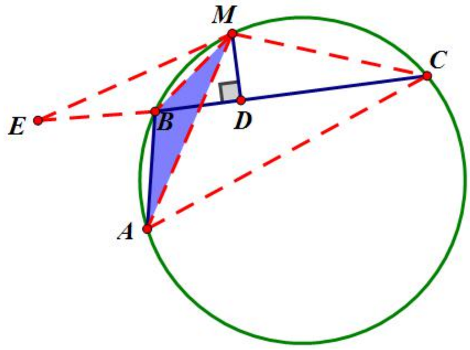
∴∠MBA+∠MCA=180---②　又∵MA=MC(已证) ∴∠MAC=∠MCA

又∵ $\overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{MC}$ ，∴∠MBC=∠MAC　∴∠MBC=∠MCA- --③

由①②③得:∠MBC+∠MBE=180　∴E, B, C 三点共线。 又∵ME=MC, MD⊥CE

∴DE=DC , ∴EB+BD=DC , 又∵△MBE≌MBA ∴AB=EB

∴ AB+BD=DC(证毕)



证法四：如图，连接 MB,MA,MC,AC, 延长 AB,过点 M 作 MH⊥AB 于点 H,

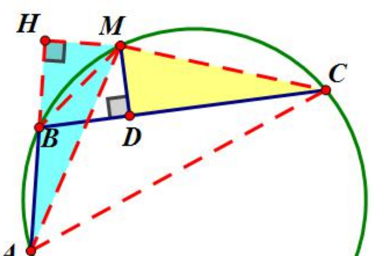
∵M 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点　　∴AM=MC,　又∵ $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{BM}$,∴∠HAM=∠DCM

又∵∠MHA=∠MDC=90　∴在△MHA 与△MDC 中 $\begin{cases}\angle MHA=\angle MDC\\ \angle HAM=\angle DCM\\ MC=MA\end{cases}$

∴△MHA≌△MDC (AAS)　∴CD=AH---①　　MD=MH　在 RT△MHB 与 RT△MDB 中

$\begin{cases}MH=MD\\ MB=MB\end{cases}$ ∴△MDB≌△MHB (HL) ∴BD=BH　又∵AH=AB+BH,　∴AH=AB+BD-②

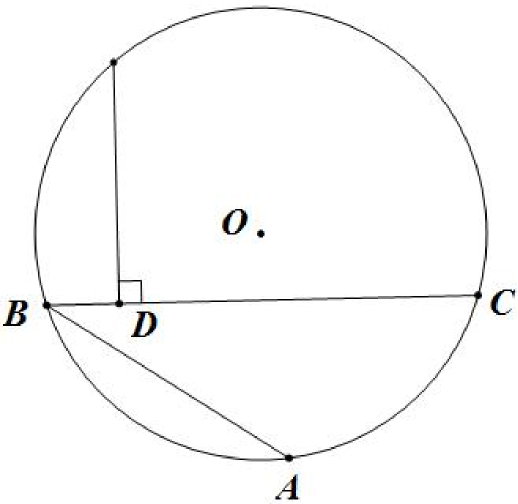
由①②可得 DC=AB+BD　(证毕)

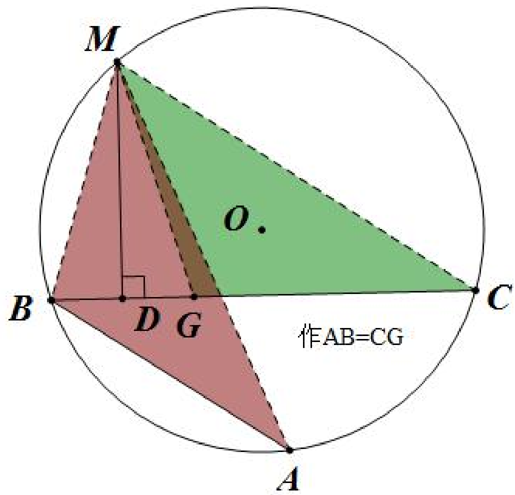


反思：在平时数学教学活动中，尤其是几何学的教学，它可以让觉得数学课枯燥无味的学生顿时感兴趣，更是师生互动的一个很好的媒体。老师与学生一起想办法，也是一种数学情感的体现。在圆这一章节，很多学生反映难学，难在辅助线多，方法多，同一个问题灵活多变，不同的出发点会得到不同的解题方法。本题就是一个很好的例子。对于一个著名的平面几何定理，我们的证明也仅仅是使用了非常常见的“截长补短”，“对称变换”等方法。在以后的几何教学过程中多总结出一些通用，常见的解题方法这会让学生受益匪浅的，万变不离其宗，才是数学的特点。

阿基米德折弦定理

例题：如图，AB和BC是⊙o的两条弦（即折线ABC是⊙o的一条折弦），BC≻ AB, M是$\widehat{ABC}$的中点，过点M作MD⊥BC垂足为D，求证：CD=AB+BD.（阿基米德折弦定理）

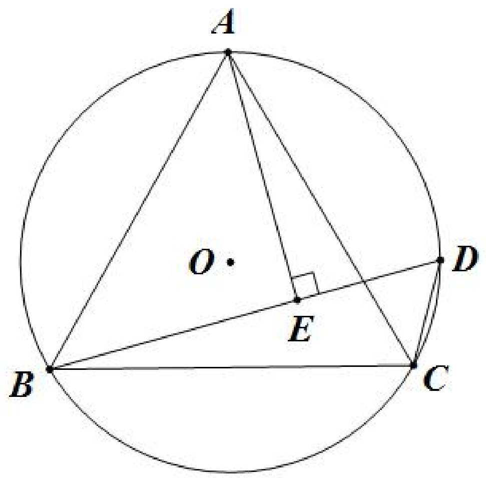


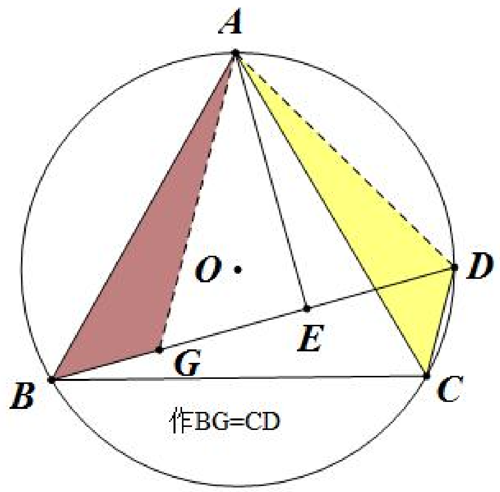


AM=CM
∴AM=CM
⇒ΔABM≅ΔCGM
⇒BM=MG

变式训练

1.如图，已知等边三角形ABC内接于⊙o，$AB=2$,点D为弧AC上一点,$\angle ABD=45°$,$AE\perp BD$于E,求ΔBDC的周长。

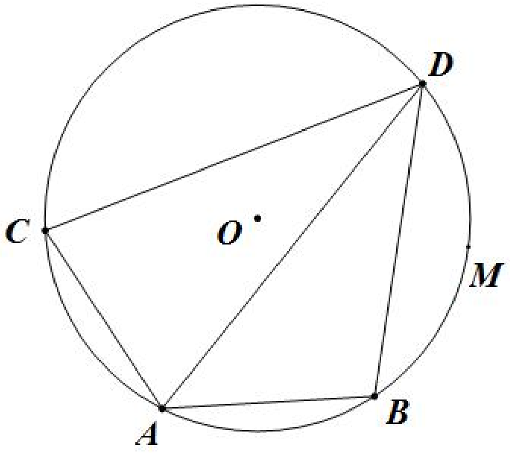


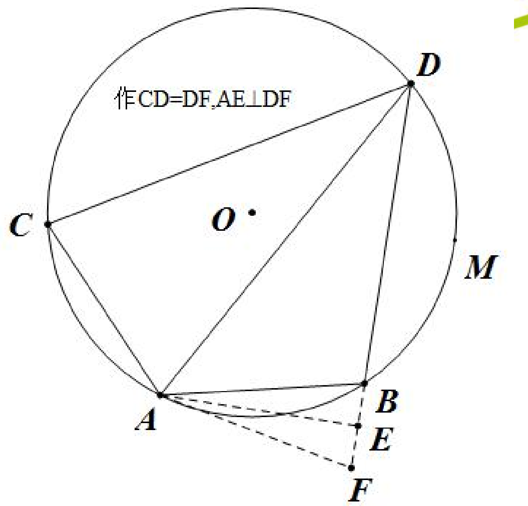


2.如图，在⊙o中$AB=AC$,点D是$\overset{\frown}{CMB}$上一动点（点D不与C、B重合）连接DA、DB、DC，∠BAC =120°,

(1)若AC=4,求⊙o的半径

（2）探究DA、DB、DC之间的关系，并证明。

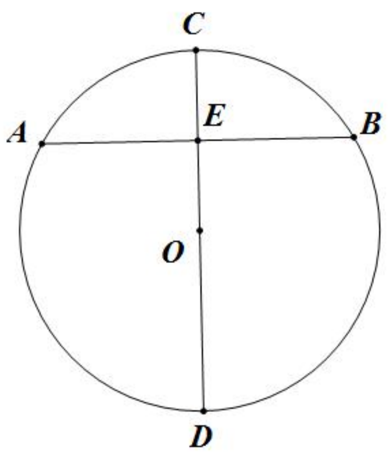


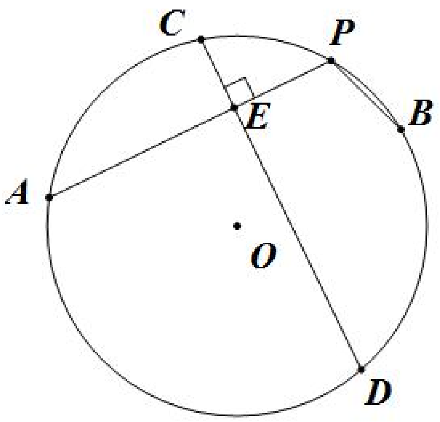


3. 已知：如图1，在⊙o中，C是劣弧AB的中点，直线$CD\perp AB$于E, 易证得：AE=BE, 从圆上任意一点出发的两条弦所组成的折线，成为该圆的一条折弦。如图2，PA、PB组成⊙o的一条折弦，C是劣弧AB的中点，直线CD⊥PA于E,

(1) 求证：AE=PE+PB

(2) 如图3，PA、PB组成⊙o的一条折弦，若C是优弧AB的中点，直线CD⊥PA于E, 则AE、PE、PB之间存在怎样的数量关系？写出结论，并证明。





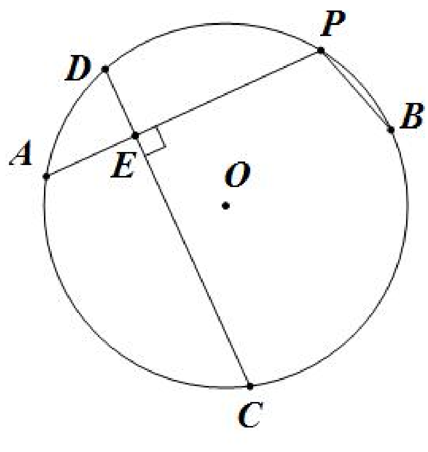
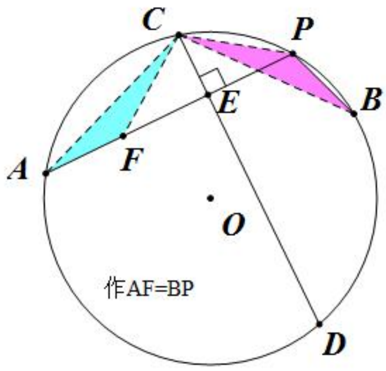
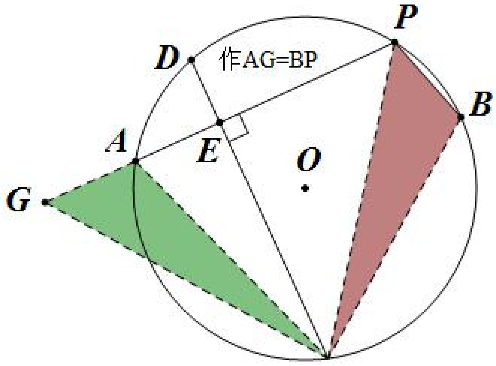
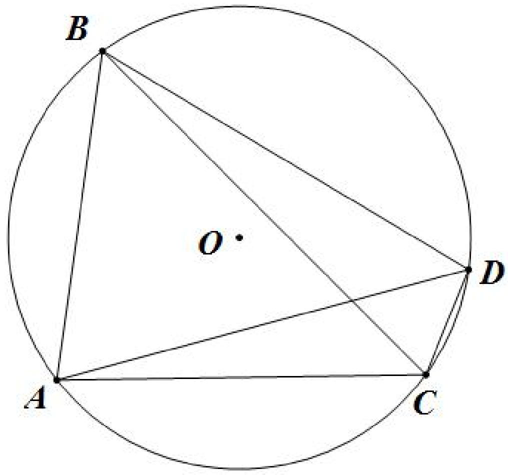


图 1　　　　　　图 2　　　　　　图 3

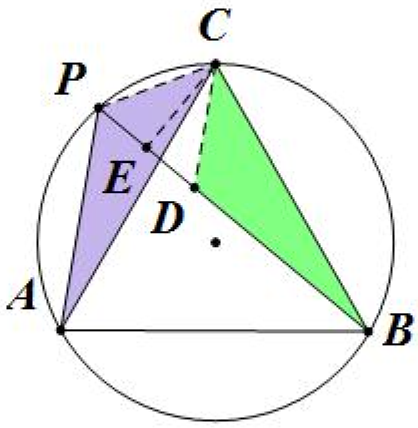




4.如图,$\triangle ABC$内接于⊙o，$AC > BC$, 点D为$\overset{\frown}{ACB}$的中点，求证：$AD^2 = AC \bullet BC + CD^2$.



已知⊙O是等边△ABC的外接圆，P是⊙O上一点，求证PA+PB≤AC+BC

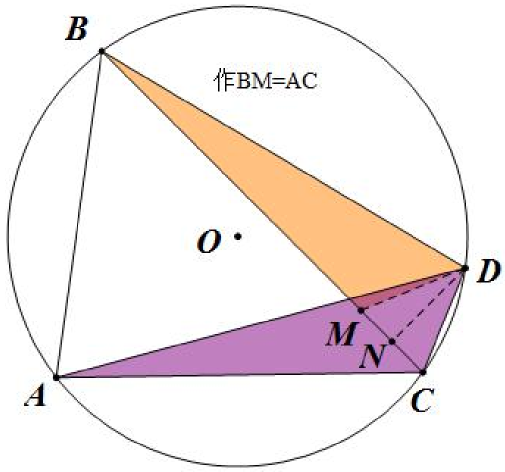


作CE⊥BP于E，截取BD=AP

⇒△APC≅△BCP，△CPE≅△CDE

⇒AP+PB=PB+BD=2BE

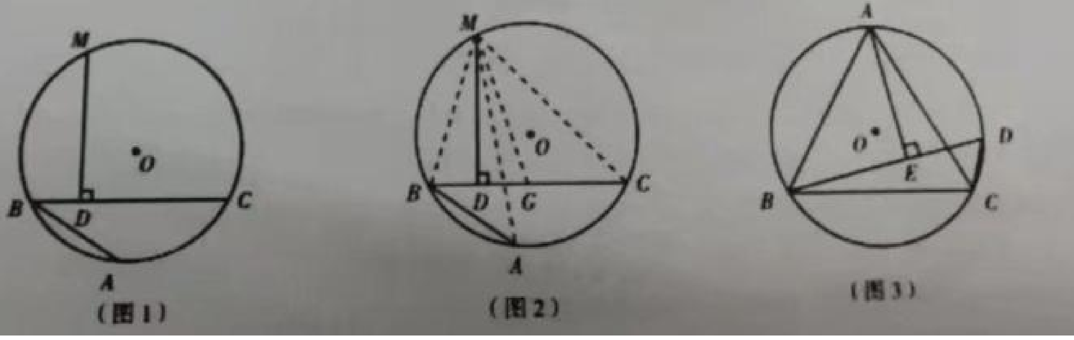
BE≤BC得证



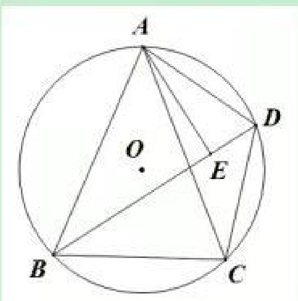
24.（本题 8 分）古希腊数学家阿基米德提出并证明了“折弦定理”．如图 1，AB 和 BC 是⊙O 的两条弦（即折线 ABC 是圆的一条“折弦”），$BC>AB$，M 是优弧 ABC 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线的垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 $CD=AB+BD$．

（1） 请按照下面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

（2） 如图（3），已知等边△ ABC 内接于⊙O，$AB=2$，D 为⊙O 上一点，$\angle ABD=45°$，$AE\perp BD$，垂足为 E．请你运用“折弦定理”求△BDC 的周长．



如图，△ABC 是圆 O 的内接三角形，AB=AC，BD 平分∠ABC 交圆 O 于点 D，连接 AD、CD。作 AE⊥BD 与点 E，若 AE=3，DE=1，则△ACD 的面积是 ________．



26. 如图，在△ABC 中，D 为 AC 边上一点，且 $AD=DC+CB$. 过 D 作 AC 的垂线交△ABC 的外接圆于 M，过 M 作 AB 的垂线 MN，交圆于 N. 求证：MN 为△ABC 外接圆的直径.

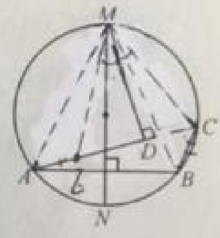
先AC上取点E 令EA=BC.

连结MA,ME,MC,MB. ∴ME=MC.

∵ BC+DC=AD.

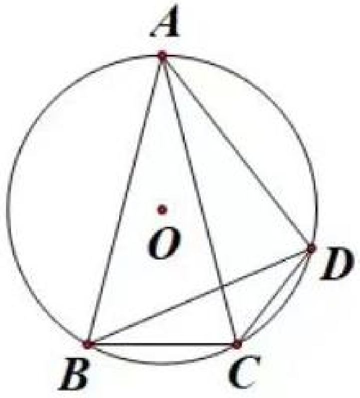
又∵AE=BC

AE+ED=AD



第 26 题图

如图，△ABC内接于⊙O，AB＝AC＝3，cos∠ABC＝$\frac{1}{4}$，D是劣弧AC上一点，且AD＝2CD，则BD的长为________.

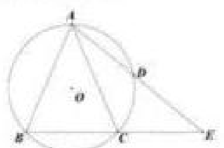


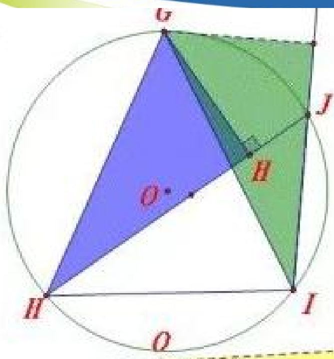
22. 在⊙O 中，已知 AB=AC，BC=2，$\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，D 是$\overset{\frown}{AC}$上的一个动点，连接 AD 并延长交 BC 于 E。

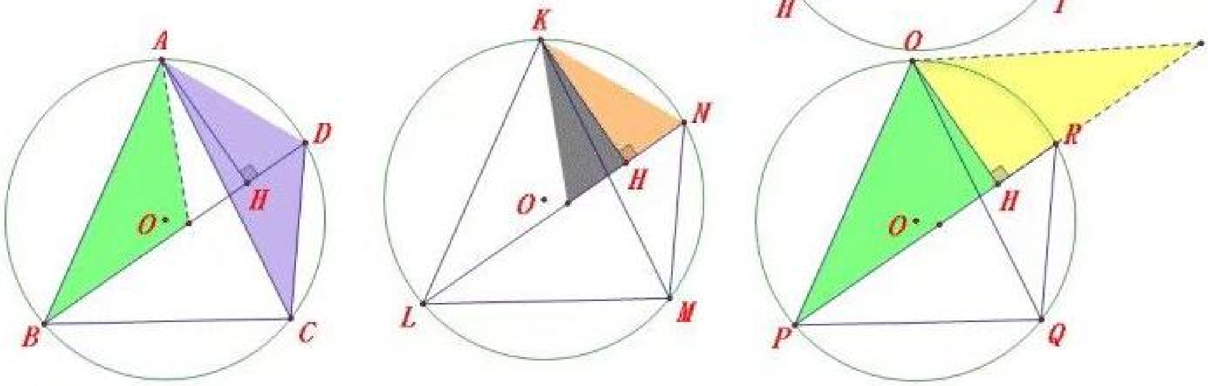
（1）求 AB

（2）判断 AD・AE 是否为定值，若是求出定值，若不是说明理由。

（3）作 AH⊥BD，证明 BH=HD+CD







【第 320 题】请阅读下列材料，并完成相应的任务：

阿基米德折弦定理：如图 1，AB 和 BC 是⊙ O 的两条弦（即折线 ABC 是圆的一条折弦），BC > AB，M 是弧 ABC 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线的垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 CD=AB+BD.

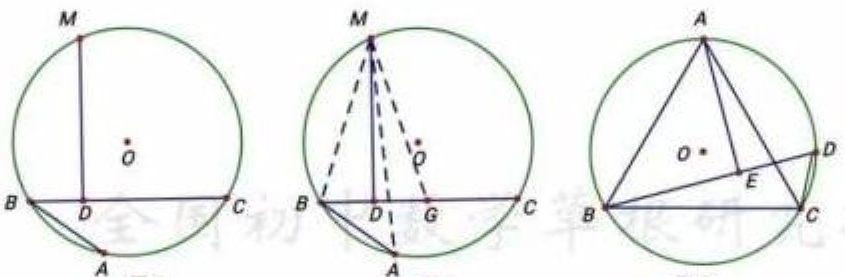


图 1　　图 2　　图 3

下面是运用"截长法"证明 CD=AB+BD 的部分证明过程.

证明：如图 2，在 CB 上截取 CG=AB，连结 MA,MB,MC 和 MG

因为 M 是弧 ABC 的中点

所以 MA=MC

……

任务：

(1) 请按照上面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

(2) 如图 3，已知等边△ABC 内接于⊙ O，AB=2，D 为弧 AC 上一点，AE⊥ BD 于点 E，若△BDC 的周长是 $2+2\sqrt{2}$，求 AE 的长.

定理 11　圆幂定理

圆幂定理是对相交弦定理、切割线定理及割线定理（切割线定理推论）以及它们推论统一归纳的结果。

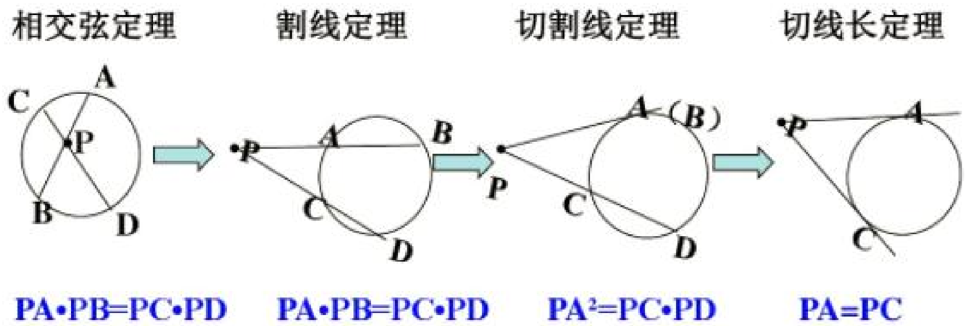
相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等。　切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。

割线定理：从圆外一点 P 引两条割线与圆分别交于 A、B；C、D，则有 PA・PB=PC・PD。

统一归纳：过任意不在圆上的一点 P 引两条直线 L1、L2，L1 与圆交于 A、B（可重合，即切线），L2 与圆交于 C、D（可重合），则有 PA・PB=PC・PD。

相交弦定理
相交弦定理推论
切割线定理
割线定理

本质一样
圆幂定理



统一叙述为：过一点P（无论点P在圆内，还是在圆外）的两条直线，与圆相交或相切（把切点看成两个重合的“交点”）于点A、B、C、D，**PA•PB=PC•PD**

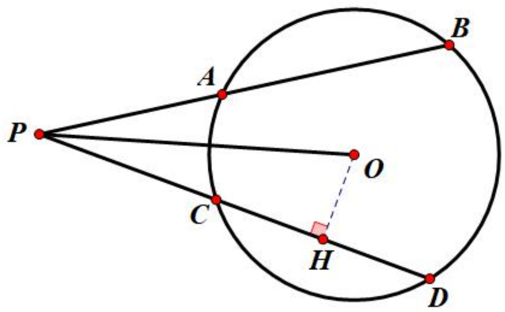
$PA \cdot PB = r^2 - OP^2$ (P在圆内)

$PA \cdot PB = OP^2 - r^2$ (P在圆外)

$PA \cdot PB = OP^2 - r^2 = 0$ (P在圆上)

定值 $\left|OP^2 - r^2\right|$ 称做点P对圆O的"幂"

圆幂定理：过一个定点P的任何一条直线与圆相交，则这点到直线与圆的交点的两条线段的乘积为定值 $\left|OP^2 - r^2\right| = d$ （等于点P到圆心的距离与半径的平方差的绝对值）



圆幂定理(点在圆外)

求证：$PA \bullet PB = OP^2 - r^2$

证明：由切割线定理推论得：

$PA \bullet PB = PC \bullet PD$

又 $PC \bullet PD = (PH - CH) \bullet (PH + CH) = PH^2 - CH^2$

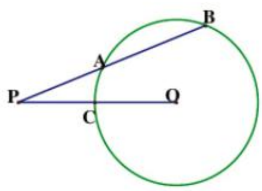
$= (OP^2 - OH^2) - (r^2 - OH^2)$

$= OP^2 - r^2$

$\therefore PA \bullet PB = OP^2 - r^2$

学会用半径加减或加减半径

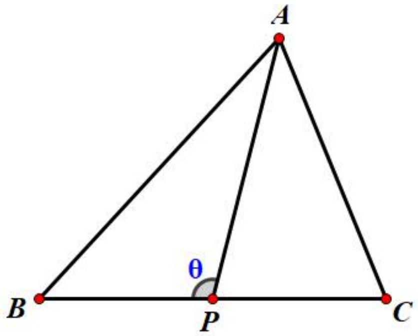
- 如图，已知PAB是⊙O的割线，PO＝14cm，PA＝4cm，AB＝16cm。求⊙O的半径。



定理 12　巴布斯定理（中线定理）

巴布斯定理

设的边BC的中点为P，则$AB^2+AC^2=2(AP^2+BP^2)$



为证这个定理，令$\angle APB=\theta$，根据余弦定理，有

$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos\theta$,

及 $AC^2=AP^2+CP^2-2AP\cdot CP\cdot\cos(\pi-\theta)$.

$\Rightarrow$ $AC^2=AP^2+BP^2+2AP\cdot BP\cdot\cos\theta$

两式相加：

$AB^2+AC^2=2(AP^2+BP^2)$

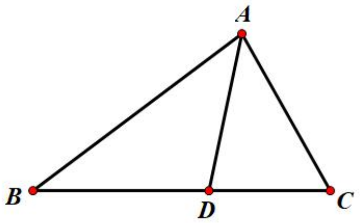
这个定理又可叫做 中线定理

中线定理（巴布斯定理）设△ABC 的边 BC 的中点为 P，则有 $AB^2+AC^2=2(AP^2+BP^2)$；

中线长：$m_a=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

定理 13　斯库顿定理

斯库顿定理



如图，AD是ΔABC的角平分线，则

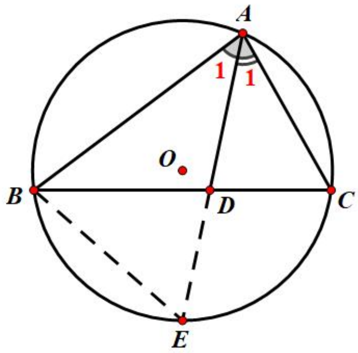
$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$

就其位置关系而言，可如下记忆：

中方=上积-下积

这是一个冰冷而美丽的定理！

证明：



易证$\Delta ABE\sim\Delta ADC$

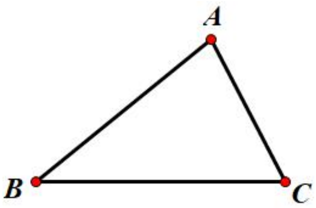
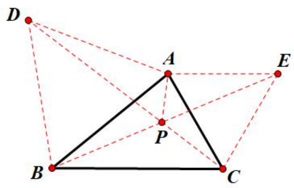
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$

$\Rightarrow AB\cdot AC=AD\cdot AE=AD\cdot(AD+DE)$

$=AD^2+AD\cdot DE=AD^2+BD\cdot CD$

$\Rightarrow AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$

定理 14 费马点

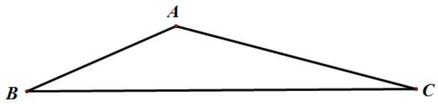
【问题 12】“费马点”	做法	图形	原理
 △ABC 中每一内角都小于 120°，在△ABC 内求一点 P，使 PA+PB+PC 值最小	所求点为“费马点”，即满足∠APB=∠BPC=∠CPA=120°，以 AB、AC 为边向外作等边三角形 ABD、ACE，连接 CD、BE 相交于 P，点 P 即为所求		两点之间线段最短，PA+PB+PC 最小值为 CD 的长

破解策略

费马点是指三角形内到三角形三个顶点距离之和最小的点。这个最小距离叫做费马距离。

若三角形的内角均小于 120°，那么三角形的费马点与各顶点的连线三等分费马点所在的周角；若三角形内有一内角大于 120°，则此钝角的顶点就是到三个顶点距离之和最小的点。

1.若三角形有一个内角大于等于 120°，则此钝角的顶点即为该三角形的费马点。



如图，ΔABC 中，∠BAC≥120°，则钝角的顶点即为该三角形的费马点。

证明： 如图，在ΔABC 中有一点 P，延长 BA 至 C’，使得 AC=AC’，作 $\angle C'AP' = \angle CAP$，并且使得 AP’=AP，连接 PP’。

则 $\Delta APC \cong \Delta AP'C'$.

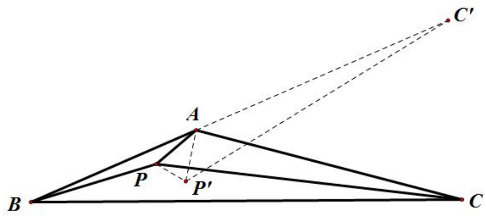
因为∠BAC≥120°，

所以∠PAP’=∠CAC’≤60°，

在等腰△ $P'AP$ 中，AP≥PP’，

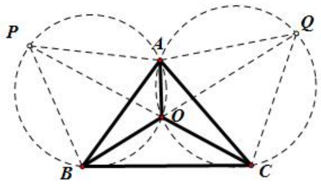
所以 $PA + PB + PC \geq PP' + PB + P'C' > BC' = AB + AC$，

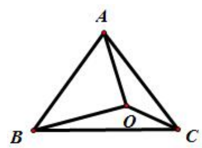
所以点 A 为△ABC 的费马点。



2.若三角形三个内角均小于 120°，则以三角形的任意两边向外作等边三角形，两个等边三角形外接圆在三角形内的交点即为该三角形的费马点。

如图，△ABC 中，三个内角均小于 120°，分别以 AB,AC 为边向外作等边三角形，两个等边三角形的外接圆在△ABC 内的交点为 O，求证：点 O 为△ABC 的费马点。





证明： 在ΔABC 内部任取一点 O，连接 OA,OB,OC。

将△AOC 绕着点 A 逆时针旋转 60°，得到△AO’D,连接 OO’,则 O’D=OC.

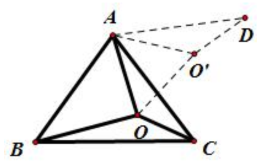
所以△AOO’为等边三角形，OO’=AO，

所以 OA+OB+OC=OO’+OB+O’D,

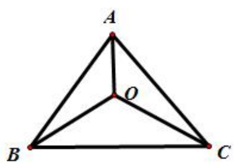
则当点 B,O,O’,D 四点共线时，OA+OB+OC 最小，

此时∠AOB=∠AOC=∠BOC=120°，

即以 AB,AC 为边向外作等边三角形，两个等边三角形的外接圆在△ABC 内的交点即为点 O。

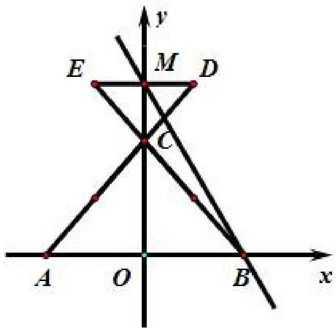


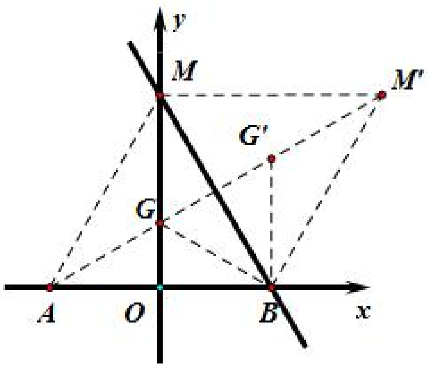
如图，△ABC 中，若∠BAC,∠ABC,∠ACB 的度数均小于 120°，O 为费马点，则有∠AOB=∠BOC=∠COA=120°。所以三角形的费马点也称为**三角形的等角中心**。



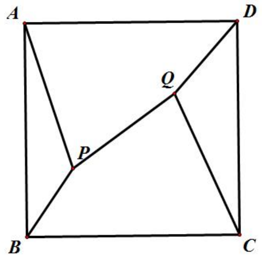
例题讲解

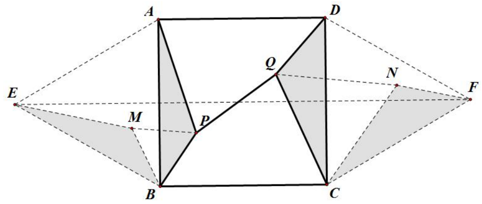
例 1：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为（-6，0），点 B 的坐标为（6，0），点 C 的坐标为（0，$4\sqrt{3}$），延长 AC 至 D，使得 CD=$\frac{1}{2}$AC,过点 D 作 DE∥AB，交 BC 的延长线于点 E。设 G 为 y 轴上的一点，点 P 从直线 $y=-\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$ 与 y 轴的交点 M 出发，先沿 y 轴到达 G 点，再沿 GA 到达 A 点，若 P 点在 y 轴上运动的速度是它在直线 GA 上运动速度的 2 倍，试确定 G 点的位置，使点 P 按照上述要求到达 A 点所用的时间最短。

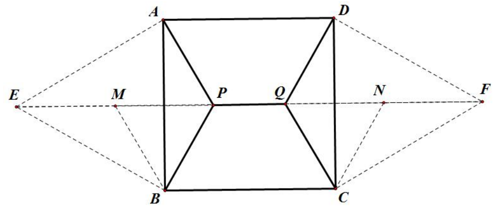




例 2：A,B,C,D 四个城市恰好为一个正方形的四个顶点，要建立一个公路系统，使每两个城市之间都有公路相通，并使整个公路系统的总长为最小，则这个公路系统应当如何修建？

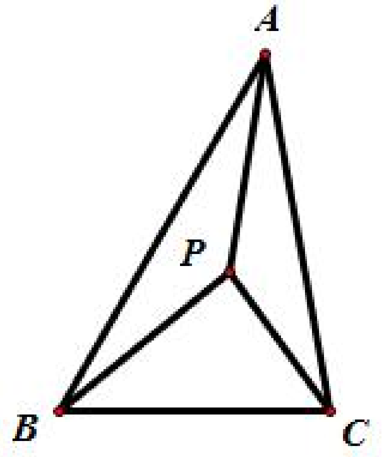






进阶训练

1.如图，在△ABC 中，∠ABC=60°，AB=5，BC=3,P 是△ABC 内一点，求 PA+PB+PC 的最小值，并确定当 PA+PB+PC 取得最小值时，∠APC 的度数。

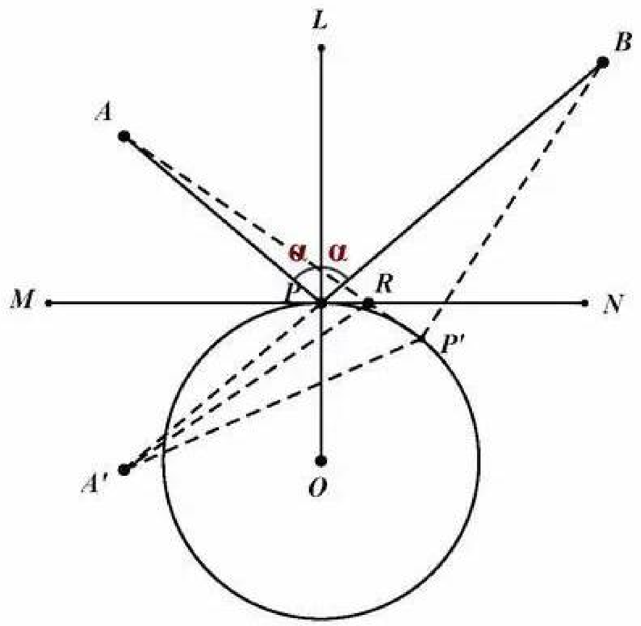


定理 15

定理 16　古堡朝圣问题

传说：从前有一个虔诚的信徒，他是集市上的一个小贩，每天他都从家所在的 A 点出发，到集市 B 点做买卖.到集市之前他要先拐弯儿到圆形古堡朝拜阿波罗神像.古堡是座圣城,阿波罗像供奉在古堡的圆心 O 上,而圆周上的点都是供信徒朝拜的顶礼点. 这个信徒在想：我应该选择什么样的顶礼点,才能从家到朝拜点,然后再到集市的路程最短呢?（感谢刘俊勇老师提供此传说）

这一题有一个一般的解答，如图所示：



在圆周上找一点 P,过 P 点作圆的切线 MN，OL⊥MN，使得∠APL=∠BPL=α，则 A → P → B 就是朝圣者的最短路线.

下面我们证明这个结论：

假设圆周上有另一个不同于点 P 的点 P’，连接 AP’, P’B.

设 AP’交 MN 于 R，连接 AR.则有 AR=A’R，AP=A’P.

作 A 关于切线 MN 的对称点 A’,

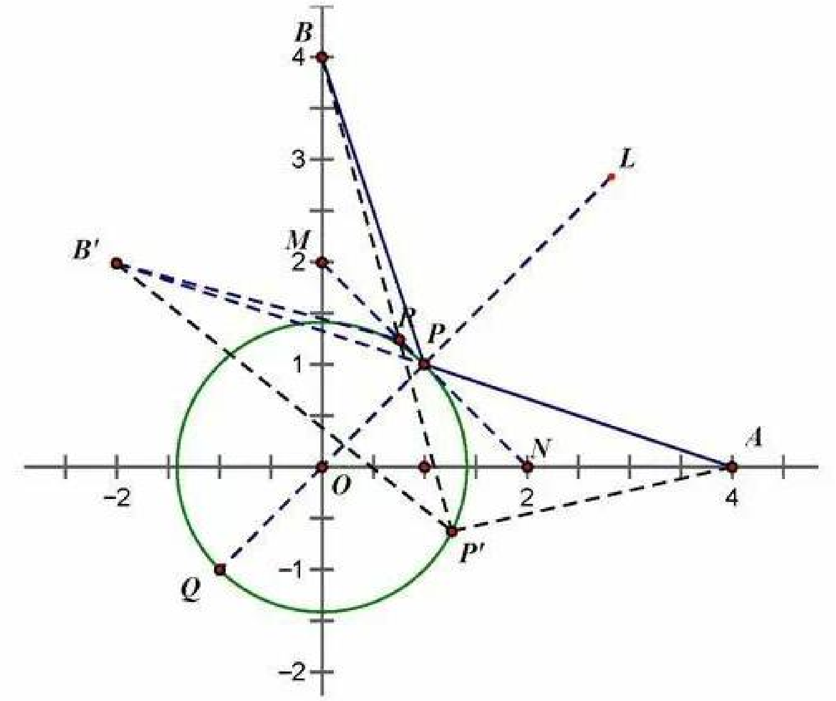
∵∠APM=∠A’PM=∠BPN=90°－α，

∴A’, P, B 共线.

AP’+P’B=AR+RP’+P’B=A’R+RP’+P’B

　　>A’P’+P’B>A’B=A’P+PB=AP+PB

从上面的证明过程我们可以看出，这样的 P 点时存在的，但是要想在一般情况下用尺规作图讲它做出来是不可能的。因此一般来说，这个问题是没有初等解法的，不过因为本题的数据比较特殊，两个定点离圆心的距离相等，因此我们才有下面的初等解法.



简解一　作第一、三象限的平分线，它在一、三象限分别交○O 于 P、Q，则 AP+PB 最小，AQ+QB 最大。证明如下：

过 P 作 OP 的垂线，与 y 轴，x 轴分别交于 M、N。对于圆周上另一点 P'（不同于 P），连 AP',P'B,P'B 交 MN 于 R。

作 B 关于对称轴 MN 的对称点 B',连 PB',RB',

显然 RB=RB',PB=PB'.

∵OA=OB，∠BOP=∠AOP，OP=OP，∴△BOP≌△AOP，

于是∠APL=∠BPL，∴∠APN=∠BPM=∠B'PM

∴A,P,B'共线.

AP'+P'B=AR+RP'+P'B=A'R+RP'+P'B

　　>A'P'+P'B>A'B=A'P+PB=AP+PB

类似的，可以证明 AQ+QB≥AP'+P'B .

因为○O 的半径为 $\sqrt{2}$，∴P（1,1），Q（-1，-1）

AP+PB= $2\sqrt{10}$，AQ+QB= $2\sqrt{26}$

这样我们不仅计算出了 AP+PB 的最小值为 $2\sqrt{10}$，也算出了其最大值为 $2\sqrt{26}$

下面我们使用代数的方法重新计算一下上面的问题.

简解二　设 P（x,y）$AP=\sqrt{(x-4)2+y2}$，$BP=\sqrt{x2+(y-4)2}$

$$AP+PB=\sqrt{18-8x}+\sqrt{18-8y}\geq 2\sqrt[4]{(18-8x)(18-8y)}$$ （取等条件 x=y）

于是问题转换为在 $x^2+y^2=2$ 条件下，求(9-4x)(9-4y)的最小值。

(9-4x)(9-4y)=81-36(x+y)+16xy

继续转换：在在 $x^2+y^2=2$ 条件下，求 4xy-9(x+y)的最小值。

∵$x^2+y^2=2$，易知-2≤x+y≤2

令 x+y=t,-2≤t≤2

$4xy-9(x+y)=2[(x+y)^2-(x^2+y^2)]-9(x+y)$

$=2t^2-9t-4$

$=2(t-\frac{9}{4})2-\frac{81}{8}-4$

$\geq 2(2-\frac{9}{4})2-\frac{81}{8}-4$

$=-14$

当 t=2,即 x=y=1 时取等号。

因此 $(9-4x)(9-4y)=81-36(x+y)+16xy=81+4[4xy-9(x+y)]\geqslant 25$）

于是 AP+PB≥ $2\sqrt{10}$ ，当 x=y=1 时等号成立.

求最大值则稍简单一些：

$(AP+PB)^2\leqslant 2(AP^2+PB^2)$

$=2[(x^2+y^2)+32-8(x+y)]=72-16(x+y)\leqslant 104$

∴AP+PB≤ $2\sqrt{26}$ ，当 x=y=-1 时等号成立.

显然我们可以将上面的问题稍作推广：∠AOB=2α，OA=OB=d, OP=r(d>r), 求 $(AP+PB)_{min.}$

注意我们保留了核心条件两个定点到圆心的距离相等，只不过改成了一般的数据，另外，两线的夹角变成了一般的角度。从简解一的角度来看，这个问题的解法是显然的，就不再赘述了。

定理 17　四点共圆

证明四点共圆的基本方法：

方法 1

从被证共圆的四点中先选出三点作一圆，然后证另一点也在这个圆上，若能证明这一点，即可肯定这四点共圆.

方法 2

把被证共圆的四个点连成共底边的两个三角形，且两三角形都在这底边的同侧，若能证明其顶角相等(同弧所对的圆周角相等），从而即可肯定这四点共圆. （若能证明其两顶角为直角，即可肯定这四个点共圆，且斜边上两点连线为该圆直径。）

方法 3

把被证共圆的四点连成四边形，若能证明其对角互补或能证明其一个外角等于其邻补角的内对角时，即可肯定这四点共圆.

方法 4

把被证共圆的四点两两连成相交的两条线段，若能证明它们各自被交点分成的两线段之积相等，即可肯定这四点共圆（相交弦定理的逆定理）；或把被证共圆的四点两两连结并延长相交的两线段，若能证明自交点至一线段两个端点所成的两线段之积等于自交点至另一线段两端点所成的两线段之积，即可肯定这四点也共圆. （割线定理的逆定理）

方法 5

证被证共圆的点到某一定点的距离都相等，从而确定它们共圆. 既连成的四边形三边中垂线有交点，即可肯定这四点共圆.

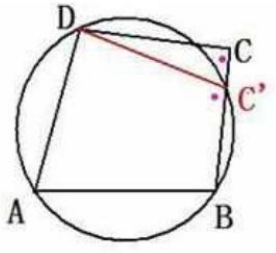
上述五种基本方法中的每一种的根据，就是产生四点共圆的一种原因，因此当要求证四点共圆的问题时，首先就要根据命题的条件，并结合图形的特点，在这五种基本方法中选择一种证法，给予证明.

五个基本判断方法：

1. 若四个点到一个定点的距离相等，则这四个点共圆。
2. 若一个四边形的一组对角互补（和为 180°），则这个四边形的四个点共圆。
3. 若一个四边形的外角等于它的内对角，则这个四边形的四个点共圆。
4. 若两个点在一条线段的同旁，并且和这条线段的两端连线所夹的角相等，那么这两个点和这条线的两个端点共圆。
5. 同斜边的直角三角形的顶点共圆。

(1) 已知：四边形 ABCD 中，∠A+∠C=180°.

求证：四边形 ABCD 内接于一个圆（A，B，C，D 四点共圆）



证明：用反证法

过 A，B，D 作圆 O，假设 C 不在圆 O 上，则 C 在圆外或圆内，若 C 在圆外，设 BC 交圆 O 于 C’，连结 DC’，根据圆内接四边形的性质得∠A+$\angle DC'B$ =180°，

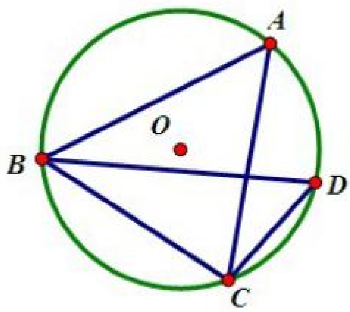
∵∠A+∠C=180° ∴$\angle DC'B$ =∠C

这与三角形外角定理矛盾，故 C 不可能在圆外。类似地可证 C 不可能在圆内。

∴C 在圆 O 上，也即 A，B，C，D 四点共圆。

(2) 已知：同侧△ABC 和△CBD，共有底边 CB，∠A=∠D，

求证：A、B、C、D 四点共圆



证明：

假设四点不在同一圆上，

作△ABC 外接圆，则 D 点不在圆上，

因二角共用 AB 弧，则∠A≠∠D，

与实际不符，

所以只有 D 点在△ABC 外接圆上，

故 A、B、C、D 四点共圆。

课堂练习题

1. 已知∠ABC=∠ADC=90°，∠DAC=25°，则∠ABD=___________.

2. 矩形 ABCD 中，E 是 BD 上一点，EF⊥AE 交 BC 于 F，sin∠ADB=$\frac{2}{3}$，则 $\frac{AE}{EF}$=____________.

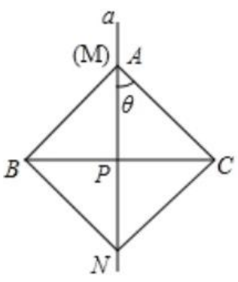
3.已知，在△ABC 中，AB＝AC．过 A 点的直线 a 从与边 AC 重合的位置开始绕点 A 按顺时针方向旋转角 θ，直线 a 交 BC 边于点 P（点 P 不与点 B、点 C 重合），△BMN 的边 MN 始终在直线 a 上（点 M 在点 N 的上方），且 BM＝BN，连接 CN．

（1）当∠BAC＝∠MBN＝90°时，

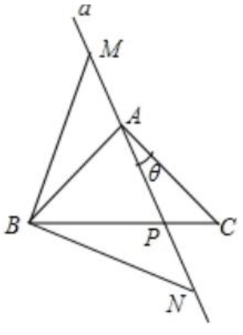
①如图 a，当 θ＝45°时，∠ANC 的度数为　；

②如图 b，当 θ≠45°时，①中的结论是否发生变化？说明理由；

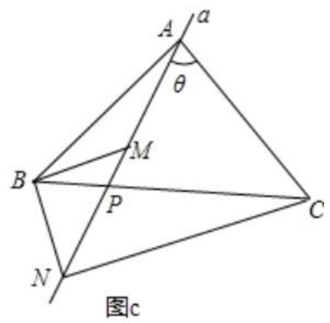
（2）如图 c，当∠BAC＝∠MBN≠90°时，请直接写出∠ANC 与∠BAC 之间的数量关系，不必证明



图a



图b



图c

4.阅读下面材料：

小红遇到这样一个问题，如图1：在△ABC中，AD⊥BC，BD＝4，DC＝6，且∠BAC＝45°，求线段AD的长.

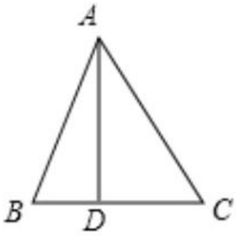


图1

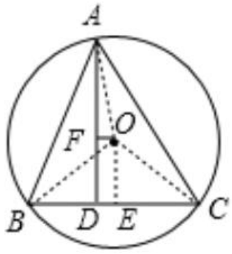


图2

图3

小红是这样想的：作△ABC的外接圆⊙O，如图2：利用同弧所对圆周角和圆心角的关系，可以知道∠BOC＝90°，然后过O点作OE⊥BC于E，作OF⊥AD于F，在Rt△BOC中可以求出⊙O半径及OE，在Rt△AOF中可以求出AF，最后利用AD＝AF＋DF得以解决此题.

请你回答图2中线段AD的长____________.

参考小红思考问题的方法，解决下列问题：

如图3：在△ABC中，AD⊥BC，BD＝4，DC＝6，且∠BAC＝30°，则线段AD的长___________.

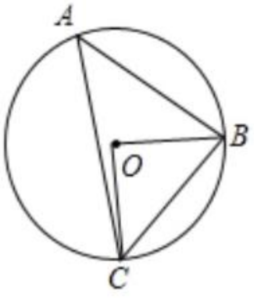
5.已知：A、B、C 三点不在同一直线上.

（1）若点 A、B、C 均在半径为 R 的⊙O 上，

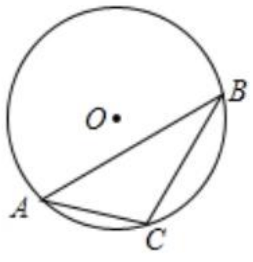
（i）如图①，当∠A＝45°，R＝1 时，求∠BOC 的度数和 BC 的长；

（ii）如图②，当∠A 为锐角时，求证：sinA＝$\frac{BC}{2R}$

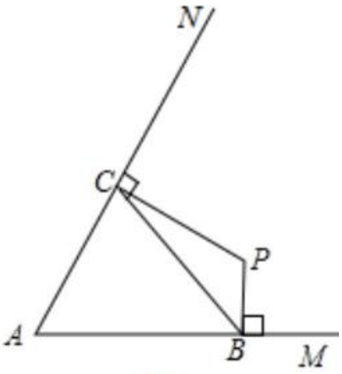
（2）若定长线段 BC 的两个端点分别在∠MAN 的两边 AM、AN（B、C 均与 A 不重合）滑动，如图③，当∠MAN＝60°，BC＝2 时，分别作 BP⊥AM，CP⊥AN，交点为 P，试探索在整个滑动过程中，P、A 两点间的距离是否保持不变？请说明理由.



图①



图②



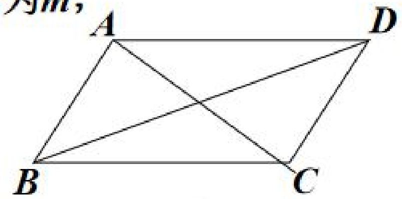
图③

定理 18　阿波罗尼定理

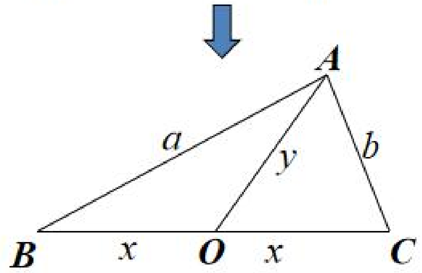
<u>性质</u>　设两邻边长分别为a，b，两条对角线长分别为m，n的四边形$ABCD$为平行四边形，则成立如下关系：

$$m^2+n^2=2(a^2+b^2)$$

阿波罗尼定理



其最简单的证明是利用向量



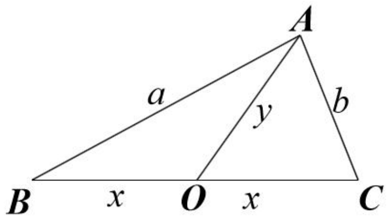
特殊地，在ΔABC中，AO是中线，若$BO=x$，$AO=y$，则

$$a^2+b^2=2(x^2+y^2)$$

定理 19 三角形中线长定理

斯特瓦尔特定理 推论 2 设 AP 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线，则 $AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$.

三角形中线长定理 $|AO|=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-4x^2}$



$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$(\overrightarrow{AO})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2$$

$$4y^2=(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AC})^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=a^2+b^2+2ab\cos A$$

$$=a^2+b^2+a^2+b^2-4x^2=2(a^2+b^2)-4x^2$$

$$\Longrightarrow \quad y=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-4x^2}$$

定理 20　广义勾股定理

1、 **广勾股定理的两个推论：**

推论 1：平行四边形对角线的平方和等于四边平方和。

推论 2：设△ABC 三边长分别为 a、b、c，对应边上中线长分别为 m_a、m_b、m_c

则：$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$；$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$；$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

定理21　三角形高线长定理

垂线定理：$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

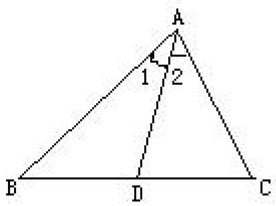
高线长：$h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{bc}{a}\sin A = c\sin B = b\sin C$.

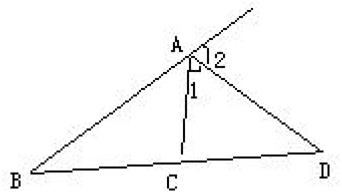
定理 22 三角形内、外角平分线模型、角平分线长定理

三角形内、外角平分线定理：

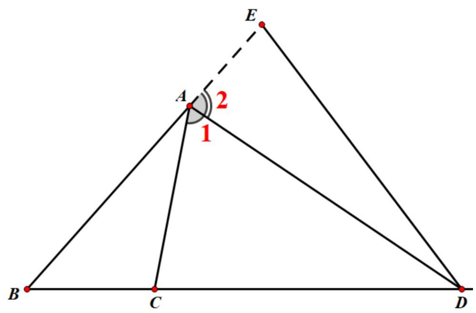
内角平分线定理：如图：如果∠1=∠2，则有 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

外角平分线定理：如图，AD 是△ABC 中∠A 的外角平分线交 BC 的延长线与 D，则有 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$





角平分线长：$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$（其中 p 为周长一半）.



如图1，在BA的延长线上任取一点E，连接DE [2]

$\because AD$ 是 ΔABC 中 $\angle A$ 的外角平分线，

$\therefore \angle 1=\angle 2$ 即 $\angle CAD=\angle DAE$，

$\therefore$ 由三角形等角定理得：

$$\begin{cases}\frac{S_{\Delta DAE}}{S_{\Delta DAC}}=\frac{EA\cdot AD}{AD\cdot AC}=\frac{EA}{AC}\cdots\cdots(1)\\ \frac{S_{\Delta DAB}}{S_{\Delta DAE}}=\frac{AB}{AE}\cdots(2)\end{cases}$$

$\therefore (1)\times(2)$ 得：$\frac{S_{\Delta DAB}}{S_{\Delta DAC}}=\frac{AB}{AC}$,

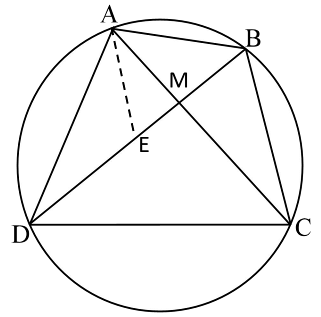
又 $\because \frac{S_{\Delta DAB}}{S_{\Delta DAC}}=\frac{BD}{DC}$,

$\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

定理23 托勒密定理

一、 托勒密定理

5．托勒密定理及其证明



定理：凸四边形 ABCD 是某圆的内接四边形，则有

AB・CD + BC・AD = AC・BD．

证明：设点 M 是对角线 AC 与 BD 的交点，在线段 BD 上找一点，使得∠DAE =∠BAM．

因为∠ADB =∠ACB，即∠ADE =∠ACB，所以ΔADE∽ΔACB，即得

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}，即 AD\cdot BC=AC\cdot DE \quad ———— （1）$$

由于∠DAE =∠BAM，所以∠DAM =∠BAE，即∠DAC =∠BAE。而∠ABD =∠ACD，即∠ABE =∠ACD，所以ΔABE∽ΔACD．即得

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}，即 AB\cdot CD=AC\cdot BE \quad ———— （2）$$

由（1）+（2）得

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot DE+AC\cdot BE=AC\cdot BD.$$

所以 AB・CD + BC・AD = AC・BD．

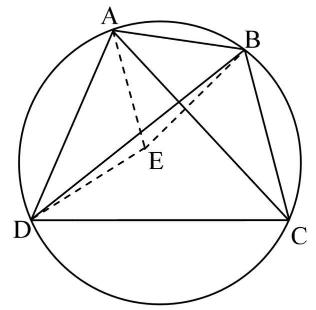
注：巧妙构造三角形，运用三角形之间的相似推得结论．这里的构造具有特点，不容易想到，需要认真分析题目并不断尝试．

6．托勒密定理的逆定理及其证明

定理：如果凸四边形 ABCD 满足 AB×CD + BC×AD = AC×BD，那么 A、B、C、D 四点共圆．

证法 1（同一法）：

在凸四边形 ABCD 内取一点 E，使得 $\angle EAB=\angle DAC$，$\angle EBA=\angle DCA$，则 ΔEAB ∽ ΔDAC．



可得 AB×CD = BE×AC ———（1）

且 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$ ———（2）

则由 $\angle DAE=\angle CAB$ 及（2）可得 ΔDAE ∽ ΔCAB．于是有

AD×BC = DE×AC ———（3）

由（1）+（3）可得 AB×CD + BC×AD = AC×(BE + DE)．

据条件可得 BD = BE + DE，则点 E 在线段 BD 上．则由 $\angle EBA=\angle DCA$，得 $\angle DBA=\angle DCA$，这说明 A、B、C、D 四点共圆．

证法 2（构造转移法）

延长 DA 到 A'，延长 DB 到 B'，使 A、B、B'、A'四点共圆．延长 DC 到 C'，使得 B、C、C'、B'四点共圆．（如果能证明 A'、B'、C'共线，则命题获证）

那么，据圆幂定理知 A、C、C'、A'四点也共圆．

因此，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'D}{BD}$，$\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D}{BD}$．

可得 $A'B'+B'C'=\dfrac{AB\times A'D+BC\times C'D}{BD}$．

另一方面，$\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{A'D}{CD}$，即 $A'C'=\dfrac{AC\times A'D}{CD}$．

欲证 $\dfrac{AB\times A'D+BC\times C'D}{BD}=\dfrac{AC\times A'D}{CD}$，即证

$$AB\times CD\times A'D+BC\times CD\times C'D=AC\times BD\times A'D$$

即 $BC\times CD\times C'D=(AC\times BD-AB\times CD)A'D$．

据条件有 $AC\times BD-AB\times CD=AD\times BC$，所以需证

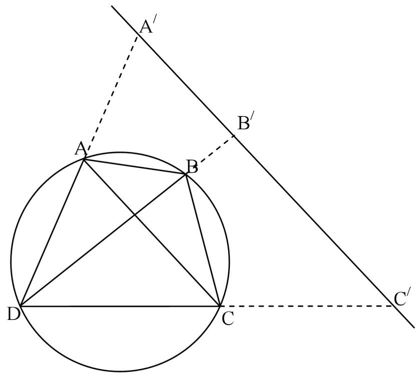
$$BC\times CD\times C'D=AD\times BC\times A'D,$$

即证 $CD\times C'D=AD\times A'D$，这是显然的．所以，$A'B'+B'C'=A'C'$，即 A'、B'、C'共线．所以 $\angle A'B'B$ 与 $\angle BB'C'$ 互补．由于 $\angle A'B'B=\angle DAB$，$\angle BB'C'=\angle DCB$，所以 $\angle DAB$ 与 $\angle DCB$ 互补，即 A、B、C、D 四点共圆．

7．托勒密定理的推广及其证明

定理：如果凸四边形 ABCD 的四个顶点不在同一个圆上，那么就有

AB×CD + BC×AD > AC×BD

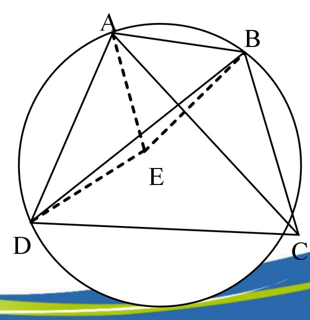


证明：如图，在凸四边形 ABCD 内取一点 E，使得 $\angle EAB=\angle DAC$，$\angle EBA=\angle DCA$，则 $\Delta EAB\backsim\Delta DAC$．

可得 AB×CD = BE×AC ———— （1）

且 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$ ———（2）

则由 $\angle DAE=\angle CAB$ 及（2）可得 $\Delta DAE\backsim\Delta CAB$．于是



$AD \times BC = DE \times AC$ ————（3）

由（1）+（3）可得 $AB \times CD + BC \times AD = AC \times (BE + DE)$

因为 A、B、C、D 四点不共圆，据托勒密定理的逆定理可知

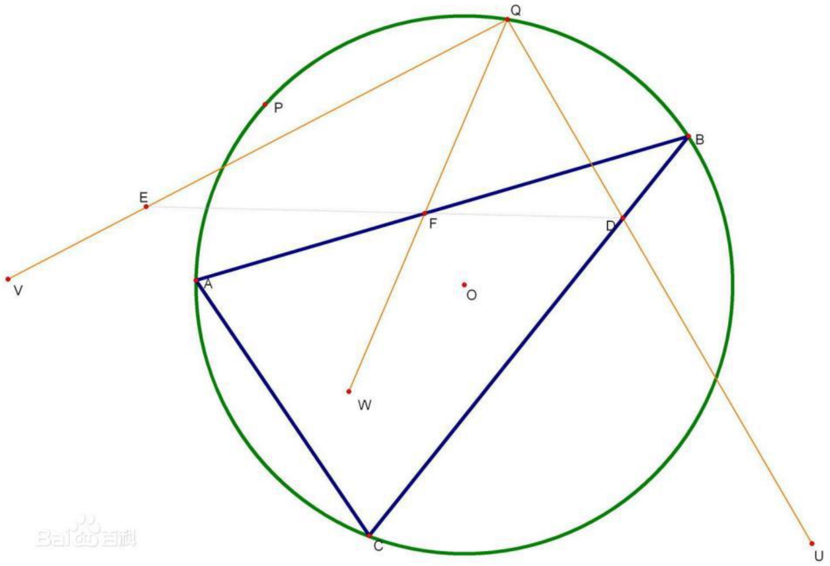
$AB \times CD + BC \times AD \neq AC \times BD$

所以 $BE + DE \neq BD$，即得点 E 不在线段 BD 上，则据三角形的性质有 $BE + DE > BD$.

所以 $AB \times CD + BC \times AD > AC \times BD$.

定理 24 清宫定理

设 P、Q 为△ABC 的外接圆上异于 A、B、C 的两点，P 关于三边 BC、CA、AB 的对称点分别是 U、V、W，且 QU、QV、QW 分别交三边 BC、CA、AB 或其延长线于 D、E、F，则 D、E、F 在同一直线上



定理 25 西姆松定理（西姆松线）

定理：从 ΔABC 外接圆上任意一点 P 向 BC、CA、AB 或其延长线引垂线，垂足分别为 D、E、F，则 D、E、F 三点共线．

证明：如图示，连接 PC，连接 EF 交 BC 于点 D′，连接 PD′．

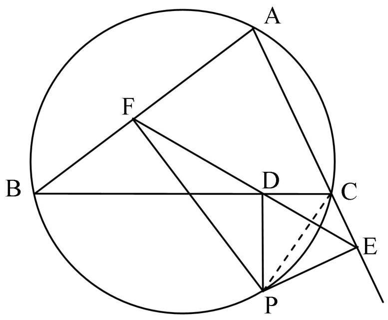
因为 PE⊥AE，PF⊥AF，所以 A、F、P、E 四点共圆，可得∠FAE =∠FEP．

因为 A、B、P、C 四点共圆，所以∠BAC =∠BCP，即∠FAE =∠BCP．

所以，∠FEP =∠BCP，即∠D′EP =∠D′CP，可得 C、D′、P、E 四点共圆．

所以，∠CD′P +∠CEP = 180°。而∠CEP = 90°，所以∠CD′P = 90°，即 PD′⊥BC．

由于过点 P 作 BC 的垂线，垂足只有一个，所以点 D 与 D′重合，即得 D、E、F 三点共线．

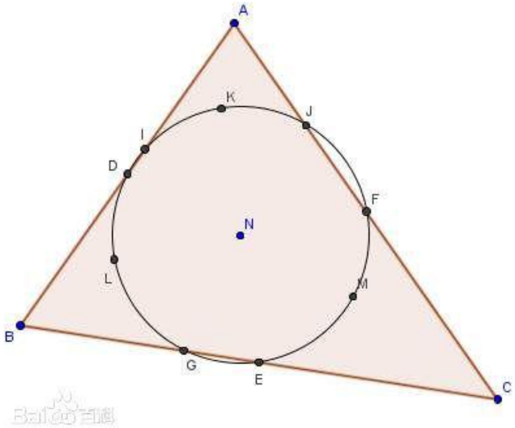


注：（1）采用同一法证明可以变被动为主动，以便充分地调用题设条件．但需注意运用同一法证明时的唯一性．

（2）反复运用四点共圆的性质是解决此题的关键，要掌握好四点共圆的运用手法．

定理 26　九点圆

三角形三边的中点，三高的垂足和三个欧拉点（连结三角形各顶点与垂心所得三线段的中点）九点共圆。通常称这个圆为九点圆（nine-point circle），或欧拉圆、费尔巴哈圆。



九点圆具有许多有趣的性质，例如：

1. 三角形的九点圆的半径是三角形的外接圆半径之半；

2. 九点圆的圆心在欧拉线上，且恰为垂心与外心连线的中点；

3. 三角形的九点圆与三角形的内切圆，三个旁切圆均相切（费尔巴哈定理）；

4. 九点圆是一个垂心组（即一个三角形三个顶点和它的垂心，共四个点，每个点都是其它三点组成的三角形的垂心，共 4 个三角形）共有的九点圆，所以九点圆共与四个内切圆、十二个旁切圆相切。

5. 九点圆心(V)，重心(G)，垂心(H)，外心(O)四点共线，且 HG=2OG，OG=2VG，OH=2OV。

定理 27　莫利定理（摩莱三角形）

莫利定理：将任意三角形的各角三等分，则每两个角的相邻三等分线的交点构成一个正三角形。

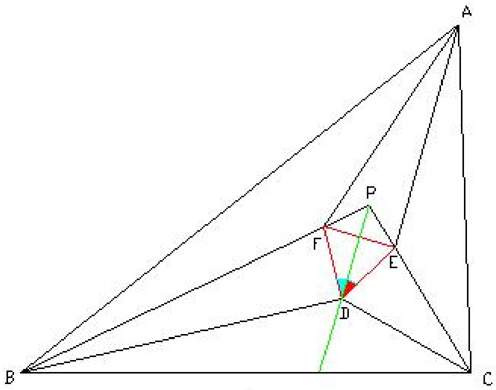


图 1

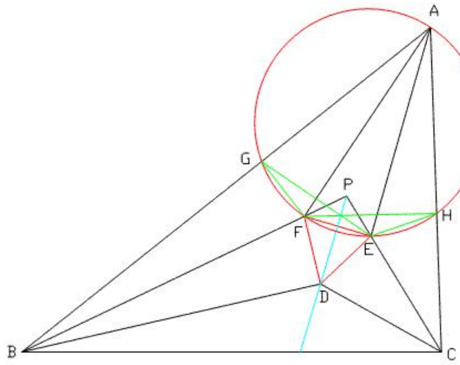
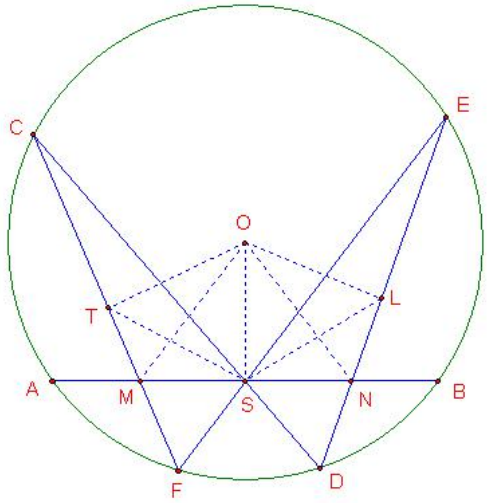
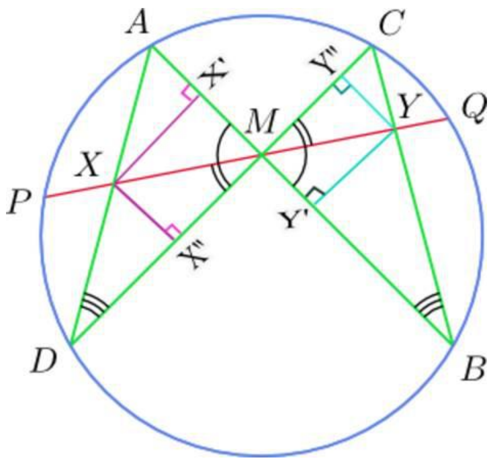


图 2

定理 28　蝴蝶定理

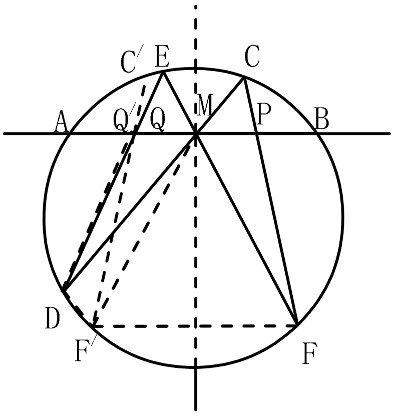
蝴蝶定理：AB 是圆的一条弦，中点记为 S，圆心为 O，过 S 作任意两条弦 CD、EF，分别交圆于 C、D、E、F，连接 CF,ED 分别交 AB 于点 M、N，求证：MS=NS。





蝴蝶定理及其证明

定理：如图，过圆中弦 AB 的中点 M 任引两弦 CD 和 EF，连接 CF 和 ED，分别交 AB 于 P、Q，则 PM = MQ.



证明：过点 M 作直线 AB 的垂线 l，作直线 CF 关于直线 l 的对称直线交圆于点 $C^/$、$F^/$，交线段 AB 于点 $Q^/$．连接 $FF^/$、$DF^/$、$Q^/F^/$、$DQ^/$．据圆的性质和图形的对称性可知：

$\angle MF^/Q^/ = \angle MFP$， $\angle F^/Q^/M = \angle FPM$；

且 $FF^/ \,//\, AB$，$PM = MQ^/$.

因为 C、D、$F^/$、F 四点共圆，所以

$\angle CDF^/ + \angle CFF^/ = 180^0$，

而由 $FF^/ \,//\, AB$ 可得 $\angle Q^/PF + \angle CFF^/ = 180^0$，所以

$\angle CDF^/ = \angle Q^/PF$，即 $\angle MDF^/ = \angle Q^/PF$.

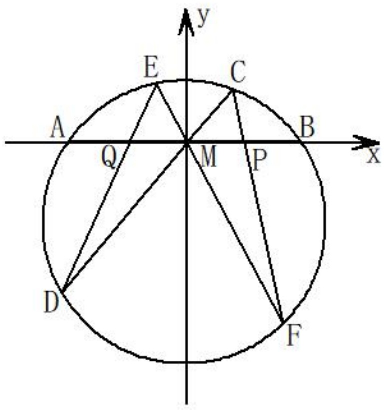
又因为 $\angle Q^/PF = \angle PQ^/F^/$，即 $\angle Q^/PF = \angle MQ^/F^/$．所以有

$\angle MDF^/ = \angle MQ^/F^/$.

这说明 $Q^/$、D、$F^/$、M 四点共圆，即得 $\angle MF^/Q^/ = \angle Q^/DM$.

因为∠MF′Q′ = ∠MFP，所以∠MFP = ∠Q′DM．而∠MFP = ∠EDM，所以∠EDM = ∠Q′DM．这说明点 Q 与点 Q′重合，即得 PM = MQ．

此定理还可用解析法来证明：



想法：设法证明直线 DE 和 CF 在 x 轴上的截距互为相反数．

证：以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，M 点是坐标原点．

设直线 DE、CF 的方程分别为

$$x = m_1 y + n_1,\quad x = m_2 y + n_2;$$

直线 CD、EF 的方程分别为

$$y = k_1 x\ ,\quad y = k_2 x\ .$$

则经过 C、D、E、F 四点的曲线系方程为

$$(y - k_1 x)(y - k_2 x) + \lambda(x - m_1 y - n_1)(x - m_2 y - n_2) = 0.$$

整理得

$$(\lambda + k_1k_2)x^2 + (1 + \lambda m_1m_2)y^2 - [(k_1+k_2) + \lambda(m_1+m_2)]xy$$

$$-\lambda(n_1+n_2)x + \lambda(n_1m_2+n_2m_1)y + \lambda n_1n_2 = 0.$$

由于 C、D、E、F 四点在一个圆上，说明上面方程表示的是一个圆，所以必须

$$\lambda + k_1 k_2 = 1 + \lambda m_1 m_2 \neq 0,$$

且　$(k_1+k_2) + \lambda(m_1+m_2) = 0$.

若 $\lambda = 0$，则 $k_1k_2 = 1$，$k_1 + k_2 = 0$，这是不可能的，故 $\lambda \neq 0$；

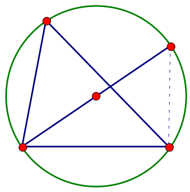
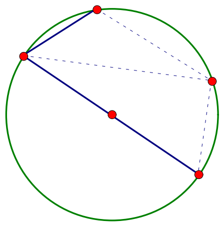
又 y 轴是弦 AB 的垂直平分线，则圆心应落在 y 轴上，故有 $\lambda(n_1 + n_2) = 0$，从而得 $n_1 + n_2 = 0$.

这说明直线 DE、CF 在 x 轴上的截距互为相反数，即得 PM = MQ.

注：利用曲线系方程解题是坐标法的一大特点，它可以较好地解决直线与曲线混杂在一起的问题．如本题，四条直线方程一经组合就魔术般地变成了圆方程，问题瞬息间得以解决，真是奇妙．运用它解题，不拘泥于小处，能够从整体上去考虑问题．

另外，待定系数法在其中扮演了非常重要的角色，需注意掌握其用法．

定理 29　正弦定理、余弦定理

定理 1　正弦定理

ΔABC 中，设外接圆半径为 R，则 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

证明:如图 1-1，图 1-2

过 B 作直径 BA'，则 $\angle A'=\angle A,\angle BCA'=90^\circ$，故 $\dfrac{BC}{BA'}=\dfrac{a}{2R}=\sin A'=\sin A$,即 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$；同理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

当 $\angle A$ 为钝角时，可考虑其补角 $\pi-A$．

当 $\angle A$ 为直角时，$\sin A=1$，故无论哪种情况正弦定理成立。

定理 2　余弦定理

ΔABC 中，有关系 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

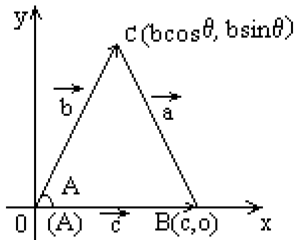


图3

有时也用它的等价形式

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=a\cos C+c\cos A$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

证明一

如图[1]，作△ABC 中 AC 边的高 BD，则易知 $CD=a\cdot\cos C$，由勾股定理

$$\begin{aligned}AB^2&=BD^2+AD^2\\&=BD^2+(AC-CD)^2\\&=BD^2+AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\\&=BC^2+AC^2-2AC\cdot CD\\&=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

那么(*)式得证，则同理其余两式亦得证.

注一　其中 $AB^2=BC^2+AC^2-2AC\cdot CD$ 称作“广勾股定理”.

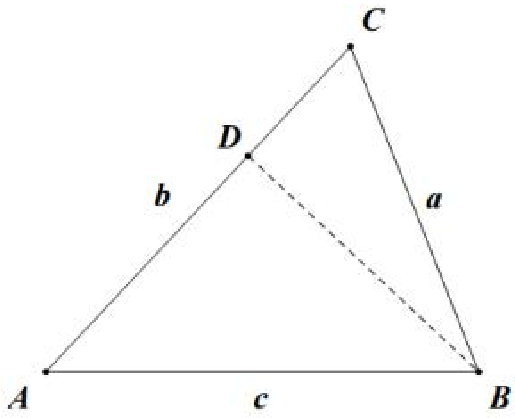
证明二

如图，将$\triangle ABC$绕点C旋转90°得到$\triangle ECD$，由于旋转角为90°，则$AB\perp DE$，对于对角线互相垂直的四边形$BEAD$，有$S_{四边形BEAD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}c^2$，而

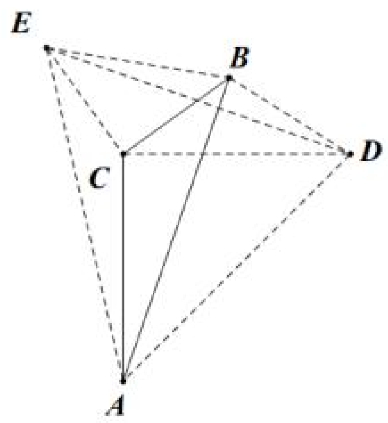
$$\begin{aligned}S_{四边形BEAD}&=S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACE}\\&=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab\cdot\sin(\angle C-90^\circ)+\frac{1}{2}ab\cdot\sin[180^\circ-(\angle C-90^\circ)]\\&=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+ab\cdot\sin(\angle C-90^\circ)\\&=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-ab\cdot\sin(90^\circ-\angle C)\\&=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-ab\cdot\cos\angle C\end{aligned}$$

这就得到了

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$



方法一



方法二

定理 30　斯特瓦尔特（Stewart）定理

【基础知识】

斯特瓦尔特定理　设 P 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点（$P\neq B$，$P\neq C$），则有

$$AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC \quad ①$$

或 $$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC}. \quad ②$$

证明　如图 4-1，不失一般性，不妨设 $\angle APC<90^\circ$，则由余弦定理，有

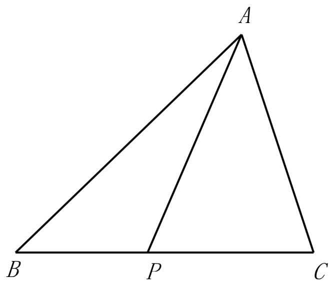


图4-1

$$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC,$$

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos(180^\circ-\angle APC)$$

$$=AP^2+BP^2+2AP\cdot BP\cdot\cos\angle APC.$$

对上述两式分别乘以 BP，PC 后相加整理，得①式或②式.

斯特瓦尔特定理的逆定理　设 B，P，C 依次分别为从 A 点引出的三条射线 AB，AP，AC 上的点，若 $AB^2\cdot PC+AC\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$，或 $AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC}$，则 B，P，C 三点共线.

证明　令 $\angle BPA=\theta_1$，$\angle APC=\theta_2$，对△ ABP 和△ APC 分别应用余弦定理，有

$$AB^2=AP^2+PB^2-2AP\cdot PB\cdot\cos\theta_1,\quad AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\theta_2.$$

将上述两式分别乘以 PC，BP 后相加，再与已知条件式相比较得

$-2AP\cdot BP\cdot PC\cdot(\cos\theta_1+\cos\theta_2)=0$，由此推出 $\theta_1=180^\circ-\theta_2$，即证.

斯特瓦尔特定理的推广　（1）设 P 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边延长线上任一点，则

$$AP^2=-AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \quad ③$$

（2）设 P 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边反向延长线上任一点，则

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}-AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BC^2\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BP}{BC}. \quad ④$$

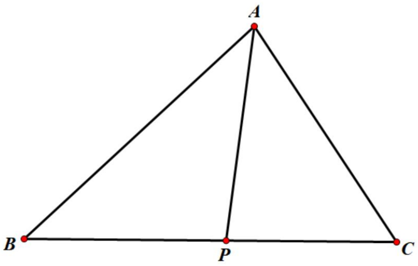
注 若用有向线段表示，则②，③，④式是一致的．

推论 1 设 P 为等腰△ABC 的底边 BC 上任一点，则 $AP^2=AB^2-BP\cdot PC$．

注 此推论也可视为以 A 为圆心，AB 为半径的圆中的圆幂定理．

推论 2 设 AP 为△ABC 的 BC 边上的中线，则 $AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$．

推论 3 设 AP 为△ABC 的 A 的内角平分线，则 $AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$．



证明：内角平分线定理：$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}\Leftrightarrow AB\bullet PC=AC\bullet BP$

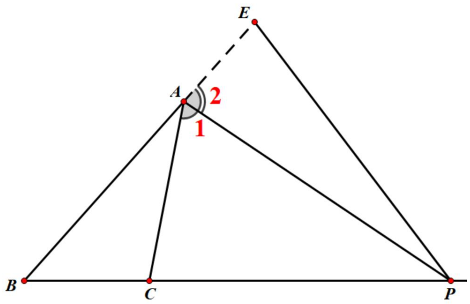
$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC}$$

$$=\frac{AB\cdot AC\cdot BP}{BC}+\frac{AC\cdot AB\cdot PC}{BC}-BP\cdot PC$$

$$=\frac{AB\cdot AC}{BC}\bullet(BP+PC)-BP\cdot PC$$

$$=AB\cdot AC-BP\cdot PC$$

推论 4 设 AP 为△ABC 的 A 的外角平分线，则 $AP^2=-AB\cdot AC+BP\cdot PC$．



证明：外角平分线定理：$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}\Leftrightarrow AB\bullet PC=AC\bullet BP$

$$AP^2=-AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BC^2\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{PC}{BC}$$

$$=-\frac{AB\cdot AC\cdot BP}{BC}+\frac{AC\cdot AB\cdot PC}{BC}+BP\cdot PC$$

$$=-\frac{AB\cdot AC}{BC}\bullet(BP-PC)+BP\cdot PC$$

$$=-AB\cdot AC+BP\cdot PC$$

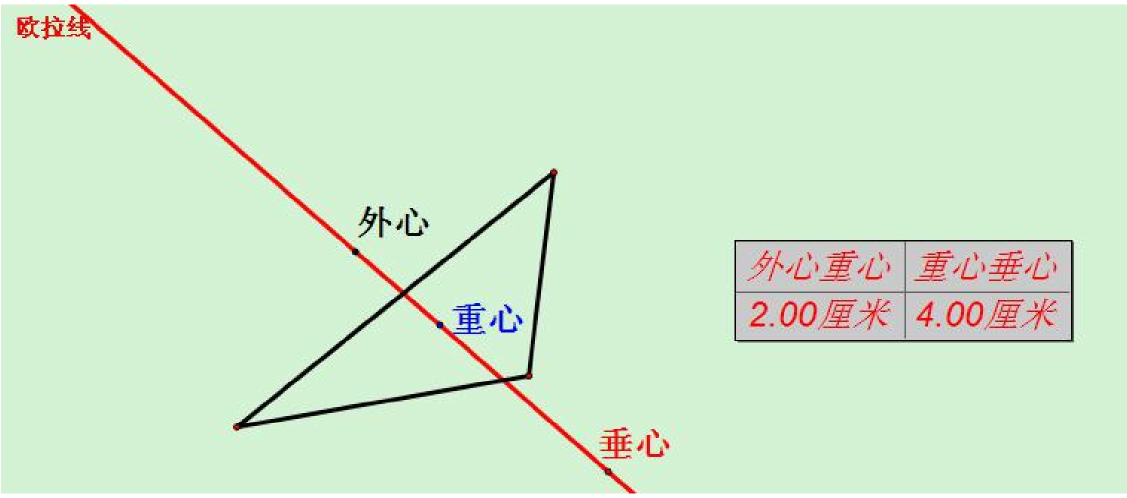
推论 5 在△ABC 中，若 P 分线段 BC 满足 $\frac{BP}{BC}=\lambda$，则

$$AP^2=\lambda(\lambda-1)BC^2+(1-\lambda)AB^2+\lambda\cdot AC^2.$$

注 若 $\frac{BP}{PC}=k$，则 $AP^2=\frac{1}{1+k}\cdot AB^2+\frac{k}{1+k}AC^2-\frac{k}{(1+k)^2}\cdot BC^2$．

定理 31 欧拉（Euler）线

同一三角形的**垂心**、**重心**、**外心**三点共线，这条直线称为三角形的**欧拉线**；且**外心**与**重心**的距离等于**垂心**与**重心**距离的**一半**。



$\triangle ABC$ 的垂心 H，外心 O，重心 G 共线．此线称为 Euler 线．

证明

首先，我们证明一个引理．在$\triangle ABC$ 中，$OK \perp BC$ 于 K，则

$$AH = 2OK$$

事实上，作$\triangle ABC$ 的高 AD 和 BE，则知$\angle CHE = \angle BAC = \angle KOC$，于是

$$Rt\triangle OKC \sim Rt\triangle HEC$$

而$\angle AHE = \angle BCA$，就又有

$$Rt\triangle AHE \sim Rt\triangle BCE$$

那么

$$\frac{OK}{CK} = \frac{HE}{CE} = \frac{AH}{BC} = \frac{AH}{2CK}$$

$$\Rightarrow AH = 2OK$$

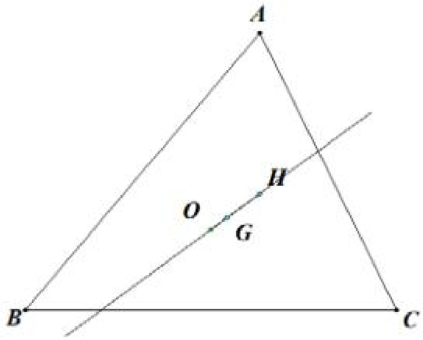
这就使引理得到了证明．这个引理在做其它的几何问题时也常常用到，十分有用．

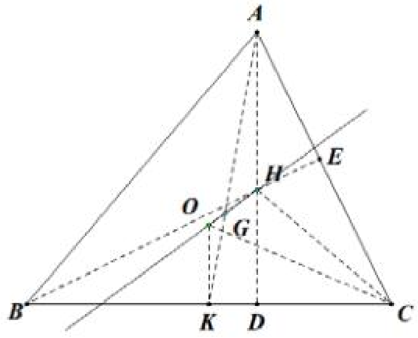
接下来用引理证明原命题．

现在，我们设 OH 与中线 AK 交于 G，注意到 $OK /\!/ AH$，由引理我们就知道了

$$\frac{KG}{AG} = \frac{OK}{AH} = \frac{1}{2}$$

而重心也恰好把中线(由顶点到对边中点)分为 2:1 两部分，这说明了 G 即为△ABC 的重心，这就证明了 O、H、G 共线.





定理：设ΔABC 的重心、外心、垂心分别用字母 G、O、H 表示．则有 G、O、H 三点共线（欧拉线），且满足 $OH = 3OG$.

证明（向量法）：连 BO 并延长交圆 O 于点 D。连接 CD、AD、HC，设 E 为边 BC 的中点，连接 OE 和 OC．则

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} \quad ——— ①$$

因为 CD⊥BC，AH⊥BC，所以 AH // CD．同理 CH // DA．

所以，AHCD 为平行四边形．

从而得 $\vec{AH} = \vec{DC}$．而 $\vec{DC} = 2\vec{OE}$，所以 $\vec{AH} = 2\vec{OE}$．

因为 $\vec{OE} = \frac{1}{2}\left(\vec{OB} + \vec{OC}\right)$，所以 $\vec{AH} = \vec{OB} + \vec{OC}$ ——— ②

由①②得：$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ ———— ③

另一方面，$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OA} + 2\vec{GF} = \vec{OA} + \vec{GB} + \vec{GC}$．

而 $\vec{GB} = \vec{GO} + \vec{OB}, \vec{GC} = \vec{GO} + \vec{OC}$，所以

$$\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{GO} + \vec{OC} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right) \quad —— ④$$

由③④得：$\vec{OH} = 3\vec{OG}$．结论得证．

注：（1）运用向量法证明几何问题也是一种常用方法，而且有其独特之处，注意掌握向量对几何问题的表现手法；

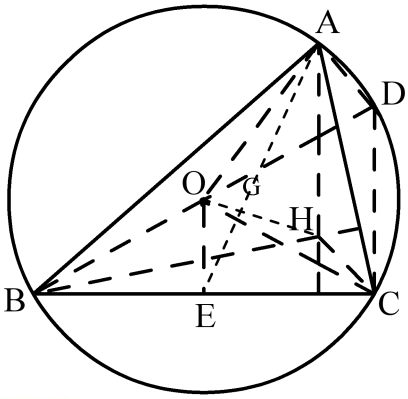
（2）此题也可用纯几何法给予证明．

又证（几何法）：连接 OH，AE，两线段相交于点 G′；连 BO 并延长交圆 O 于点 D；连接 CD、AD、HC，设 E 为边 BC 的中点，连接 OE 和 OC，如图．

因为 CD⊥BC，AH⊥BC，所以 AH // CD．同理 CH // DA．

所以，AHCD 为平行四边形．

可得 AH = CD．而 CD = 2OE，所以 AH = 2OE．



因为 AH // CD，CD // OE，所以 AH // OE．可得$\Delta AHG' \backsim \Delta EOG'$．所以

$$\frac{AH}{OE}=\frac{AG'}{G'E}=\frac{HG'}{G'O}=\frac{2}{1}.$$

由$\frac{AG'}{G'E}=\frac{2}{1}$，及重心性质可知点 G'就是$\Delta ABC$的重心，即 G'与点 G 重合．

所以，G、O、H 三点共线，且满足$OH=3OG$．

定理 32　欧拉（Euler）定理

设$\triangle ABC$的外心为O，内心为I，外接圆、内切圆半径分别为R、r，则

$$OI^2=R^2-2Rr$$

证明

设直线AI交$\triangle ABC$外接圆于D，作直径DE，连结CD、CE. 容易知道

$$Rt\triangle AIF\sim Rt\triangle ECD$$

这是由于

$$\angle IAF=\angle DEC=\frac{1}{2}\angle BAC$$

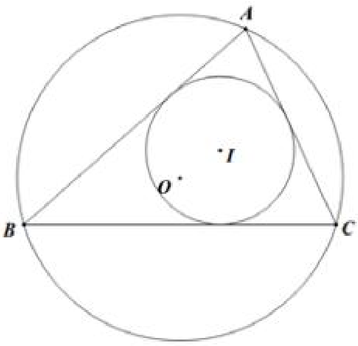
于是即有

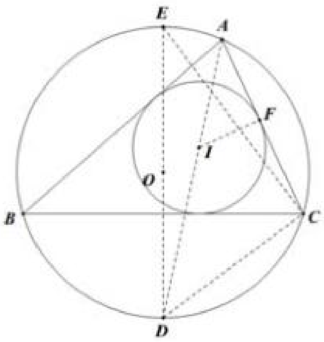
$$\frac{AI}{DE}=\frac{IF}{CD}\Leftrightarrow AI\cdot CD=DE\cdot IF$$

而由鸡爪定理$CD=ID$，又由圆幂定理$R^2-OI^2=AI\cdot ID$，于是

$$R^2-OI^2=AI\cdot CD=IF\cdot DE=2Rr$$

命题得证.





定理 33 海伦公式

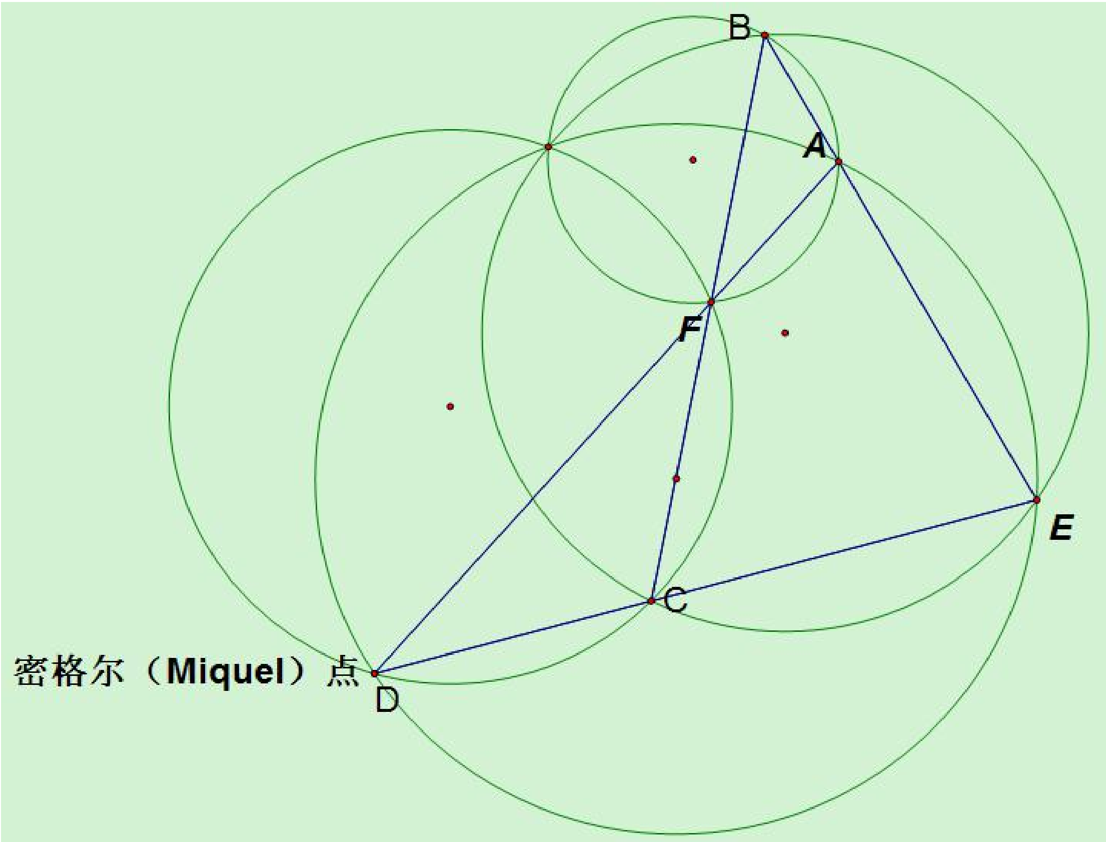
Heron 公式

若$\triangle ABC$的三边长分别为a、b、c，且$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

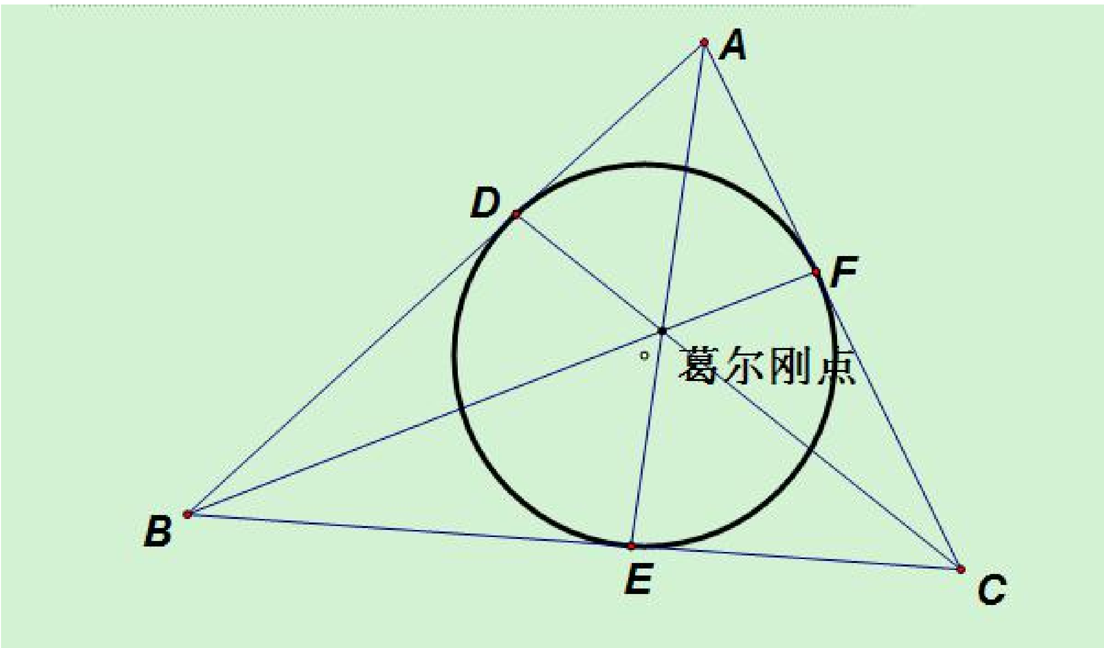
定理 34 密格尔（Miquel）点

若 AE、AF、ED、FB 四条直线相交于 **A**、**B**、**C**、**D**、**E**、**F** 六点，
构成四个三角形，它们是△**ABF**、△**AED**、△**BCE**、△**DCF**，
则这四个三角形的外接圆**共点**，这个点称为密格尔点。



定理 35　葛尔刚（Gergonne）点

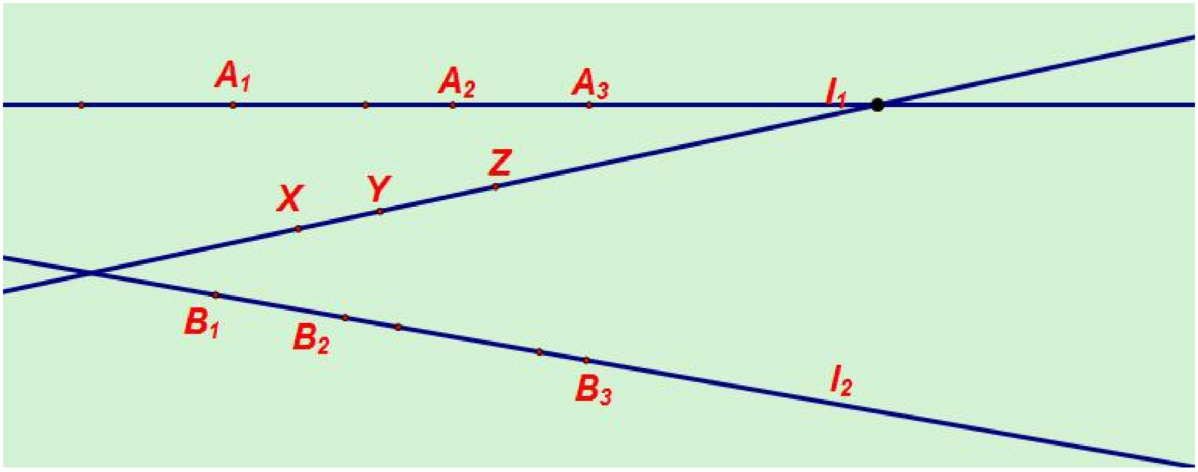
△ABC 的内切圆分别切边 **AB**、**BC**、**CA** 于点 **D**、**E**、**F**，
则 **AE**、**BF**、**CD** 三线共点，这个点称为葛尔刚点。



定理 36　帕普斯（Pappus）定理

已知点 A_1、A_2、A_3 在直线 l_1 上，已知点 B_1、B_2、B_3 在直线 l_2 上，

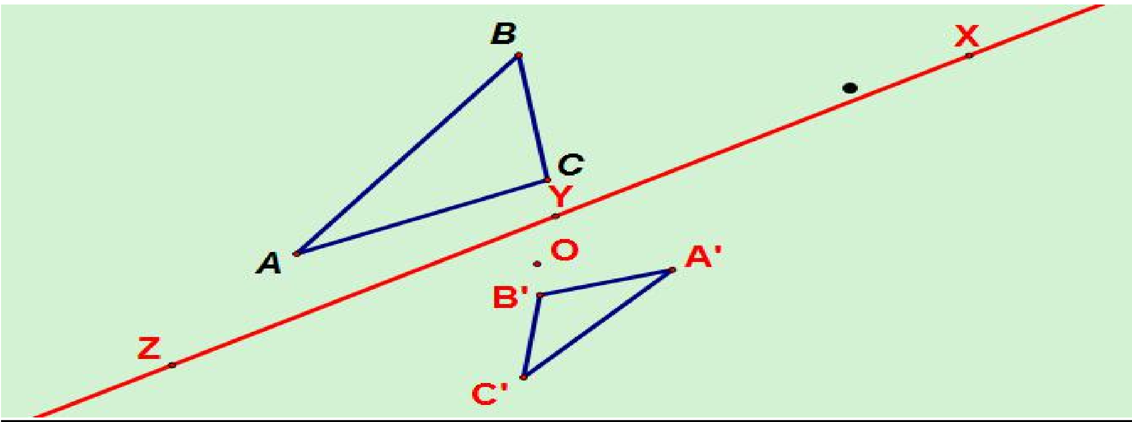
且 $A_1\ \ B_2$ 与 $A_2\ \ B_1$ 交于点 X，A_1B_3 与 $A_3\ \ B_1$ 交于点 Y，$A_2\ \ B_3$ 于 $A_3\ \ B_2$ 交于点 Z，则 X、Y、Z 三点共线。



定理 37　笛沙格（Desargues）定理

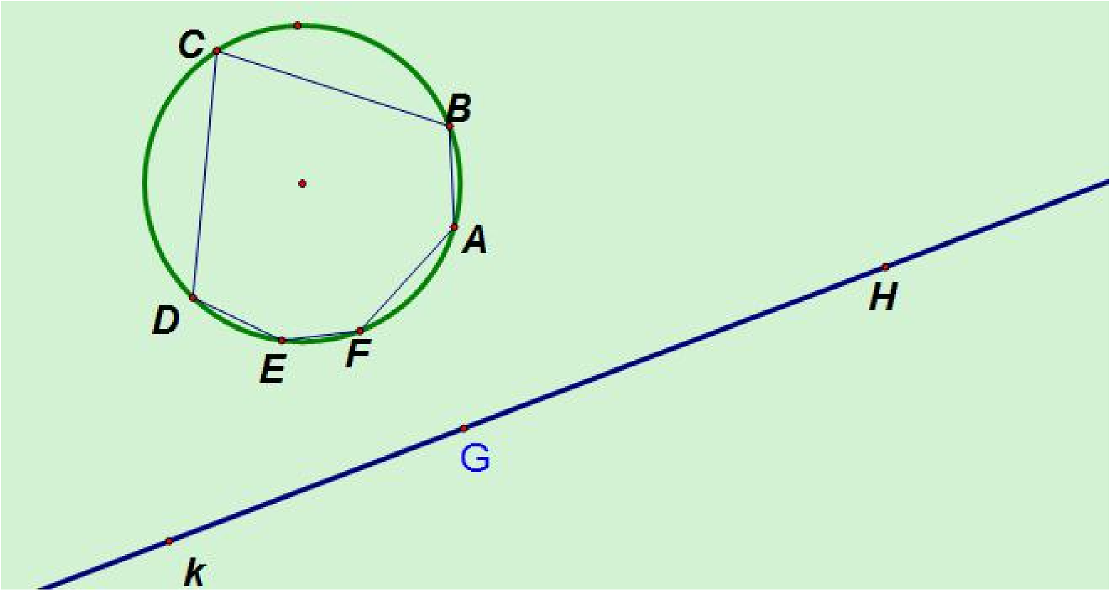
已知在△ ABC 与△A'B'C'中，**AA'**、**BB'**、**CC'**三线相交于点 **O**，

BC 与 **B'C'**、**CA** 与 **C'A'**、**AB** 与 **A'B'**分别相交于点 **X**、**Y**、**Z**，则 **X**、**Y**、**Z** 三点共线；<u>其逆亦真</u>



定理 38　帕斯卡（Paskal）定理

已知**圆内接六边形 ABCDEF** 的边 **AB**、**DE** 延长线交于点 **G**，边 **BC**、**EF 延长线**交于点 **H**，边 **CD**、**FA** 延长线交于点 K，则 **H、G、K 三点共线**。



定理 39　阿波罗尼斯（Apollonius）圆

设平面上有不同的两点 A、B，那么该平面上使得

$$\frac{PB}{PA}=k$$

为定值 $k(k\neq 1)$ 的 P 的轨迹是一个圆[1].

证明

我们将之放入平面直角坐标系中，设 A 为原点，$B(k+1,0)$[2]，$P(x,y)$. 作△ABP 的高 PC，则

$$BC^2+PC^2=k^2\left(AC^2+PC^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (k+1-x)^2+y^2=k^2\left(x^2+y^2\right)$$

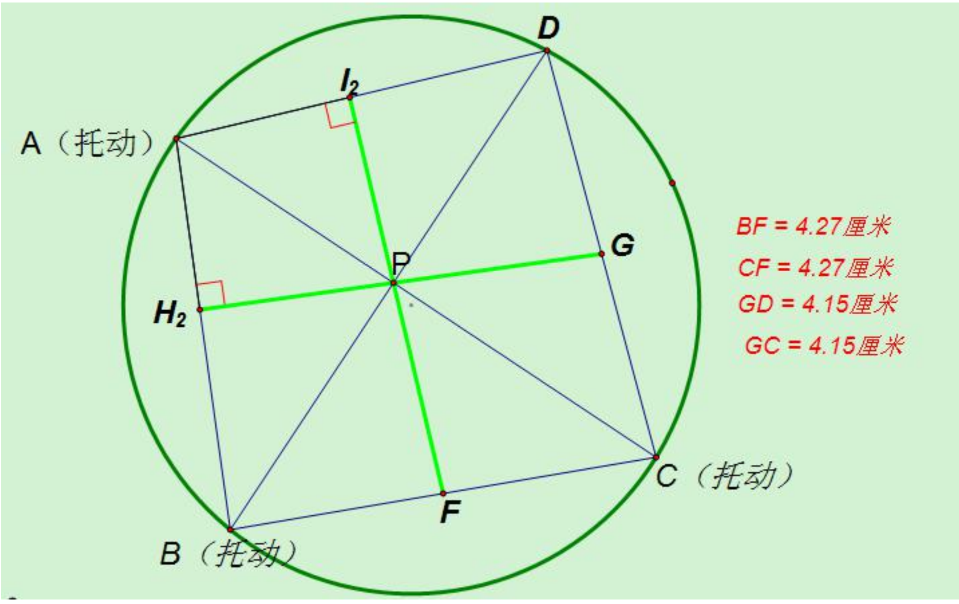
处理得

$$\left(x+\frac{1}{k-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{k}{k-1}\right)^2$$

这表明 P 在一个圆上，且圆心为 $\left(-\frac{1}{k-1},0\right)$，半径为 $\frac{k}{k-1}$.

定理 40 布拉美古塔（Brahmagupta）定理

在**圆内接四边形 ABCD** 中，**AC⊥BD**，自对角线的交点 **P** 向一边作垂线，**其延长线必平分对边。**



定理 41　张角定理

张角定理

若 P 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，使得$\angle BAP=\alpha$，$\angle CAP=\beta$，则

$$\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}$$

证明

事实上，由面积关系

$$S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ABC}$$

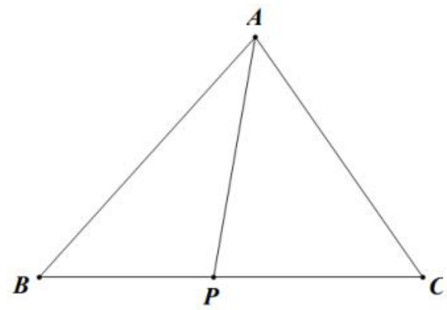
就有

$$\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AC\cdot AP\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

等式两边同除以$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot AP$就得到了

$$\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}$$

得证.



Stewart 定理

定理 42　鸡爪定理

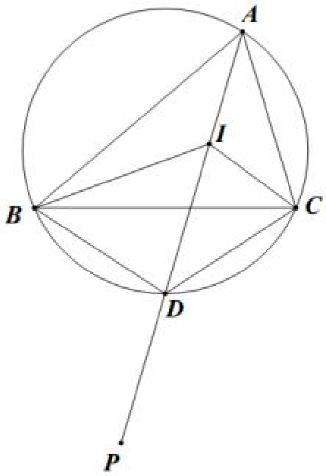
AD 平分$\triangle ABC$ 中的$\angle A$，交其外接圆于 D. I、P 分别为$\triangle ABC$ 的内心和 A-旁心. 则

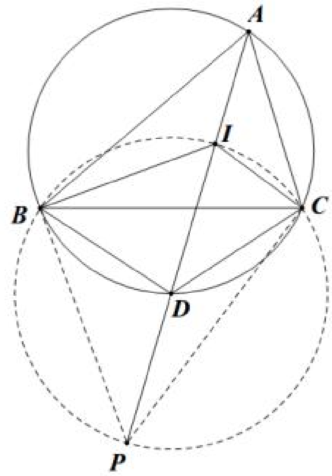
$$DI = DB = DC = DP$$

证明

事实上，通过导角即易得$\angle DIC = \angle DAC + \angle ACI = \angle ICB + \angle BAD = \angle ICB + \angle BCD = \angle ICD$，于是 $DI = DC$，同理 $DI = DB$. 由$\angle IBP = \angle ICP = 90^\circ$，又知 I、B、P、C 共圆，而 D 即为圆心，故得证.

注 由同一法亦不难证，若在角平分线 AD 所在直线截取 $DI = DP = DB$，则所得 I、P 分别为内心和旁心.





定理 43　牛顿线定理

如图，△ABC 被一条截线 DEF 所截，其中 D 在 AB 上，E 在 BC 上，F 在 AC 之延长线上，分别取 CD、BF、AE 的中点 N、M、K. 则 N、M、K 共线.

证明一

如图，构造△BDE 的中点三角形 XYZ，可知 ZX 经过 K，YZ 经过 M，YX 经过 N. 并知

$$\frac{ZM}{YM}=\frac{EF}{DF},\quad \frac{YN}{XN}=\frac{BC}{EC},\quad \frac{XK}{ZK}=\frac{AD}{AB}$$

而对△BDE 以及截线 FCA 运用 Menelaus 定理，知

$$\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EF}{DF}=1$$

这恰表明

$$\frac{ZM}{YM}\cdot\frac{YN}{XN}\cdot\frac{XK}{ZK}=1$$

再由 Menelaus 逆定理，即得到了 M、N、K 共线.

证明二

取 BD、CF 的中点 Y、P，容易证明 $S_{\triangle NPM}=S_{\triangle NYP}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ (请读者自证)，用它来进行面积的推导，知

$$\begin{aligned}S_{\triangle ANM}&=S_{\triangle ADN}+S_{\triangle DYN}+S_{\triangle YMN}+S_{\triangle BYM}-S_{\triangle ABM}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}+\frac{1}{4}S_{DBCF}+\frac{1}{4}\left(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BFD}\right)-\frac{1}{2}\left(S_{\triangle ADC}+S_{BDCF}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BFD}\right)-\frac{1}{4}S_{BDCF}\\&=\frac{1}{4}\left(S_{BCDF}-S_{\triangle BFC}\right)+\frac{1}{4}\left(S_{BDCF}-S_{\triangle CDF}\right)-\frac{1}{4}S_{BDCF}\\&=\frac{1}{4}S_{BDCF}-\frac{1}{4}\left(S_{\triangle DCF}+S_{\triangle BCF}\right)\\&=S_{\triangle NEM}\end{aligned}$$

若设直线 MN 交 AE 于 K'，那么由共边比例定理知

$$\frac{AK'}{EK'}=\frac{S_{\triangle ANM}}{S_{\triangle MEN}}=1$$

这即表明 K'为 AE 之中点，故 K'与 K 重合，得证.