第2章　　信号分析

本章提要

- ■　信号分类
- ■ 周期信号分析--傅里叶级数
- ■ 非周期信号分析--傅里叶变换
- ■ 脉冲函数及其性质

信号：反映研究对象状态和运动特征的物理量

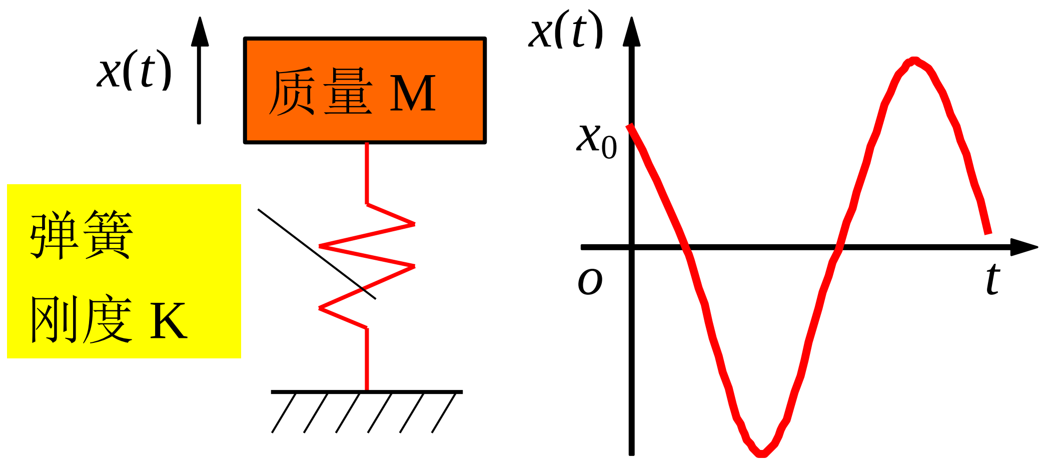
信号分析：从信号中提取有用信息的方法和手段

§2—1　信号的分类

- 两大类：**确定性信号，非确定性信号**

确定性信号：给定条件下取值是确定的。

进一步分为：周期信号，非周期信号。



质量一弹簧系统的力学模型

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

非确定性信号（随机信号）：给定条件下取值是不确定的

● **按取值情况分类：模拟信号，离散信号**

数字信号：属于离散信号，幅值离散，并用二进制表示。

● 信号描述方法

时域描述

如简谐信号

简谐信号及其三个要素

$$x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

幅值　　频率　　相角

频域描述

以信号的频率结构来描述信号的方法:将信号看成许多谐波（简谐信号）之和，每一个谐波称作该信号的一个频率成分，考察信号含有那些频率的谐波，以及各谐波的幅值和相角。

<page break>

§2—2　周期信号与离散频谱

一、　周期信号傅里叶级数的三角函数形式

● 周期信号时域表达式

$$x(t) = x(t+T) = x(t+2T) = \cdots = x(t+nT)$$
$$(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

T：周期。注意n的取值：周期信号“无始无终”

#

● 傅里叶级数的三角函数展开式

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

（n=1, 2, 3，…）

傅立叶系数：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\cos n\omega_0 tdt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\sin n\omega_0 tdt$$

式中 T--周期；ω_0--基频，$\omega_0=2\pi/T$。

● 三角函数展开式的另一种形式：

N 次谐波的幅值

N 次谐波的频率

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

N 次谐波

信号的均值，直流分量

N 次谐波的相角

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

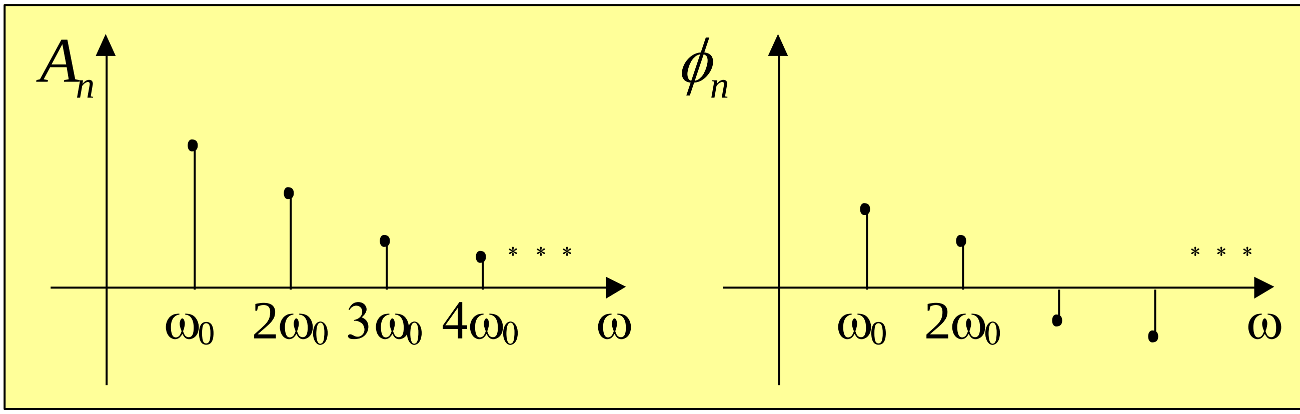
$$\phi_n = \mathrm{arctg}\frac{-b_n}{a_n}$$

$$n = 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots$$

周期信号可以看作均值与一系列谐波之和

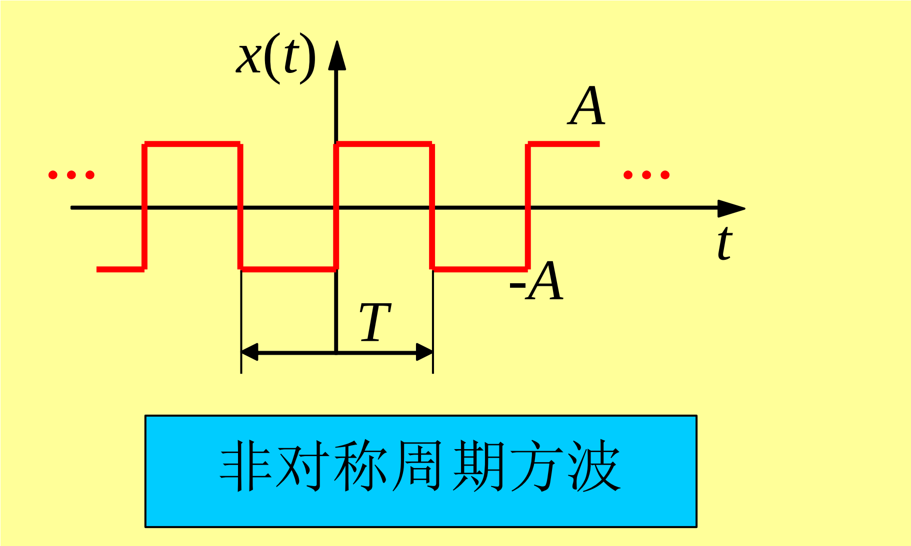
——谐波分析法

● 频谱图



- 周期信号的频谱三个特点：离散性、谐波性、收敛性
- **例1**：求周期性非对称周期方波的傅立叶级数并画出频谱图

解：



解：

信号的基频

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

傅里叶系数

奇函数： $a_0 = a_n = 0$

t 的偶函数

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t = \frac{2A}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4A}{n\pi} & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases}$$

n次谐波的幅值和相角

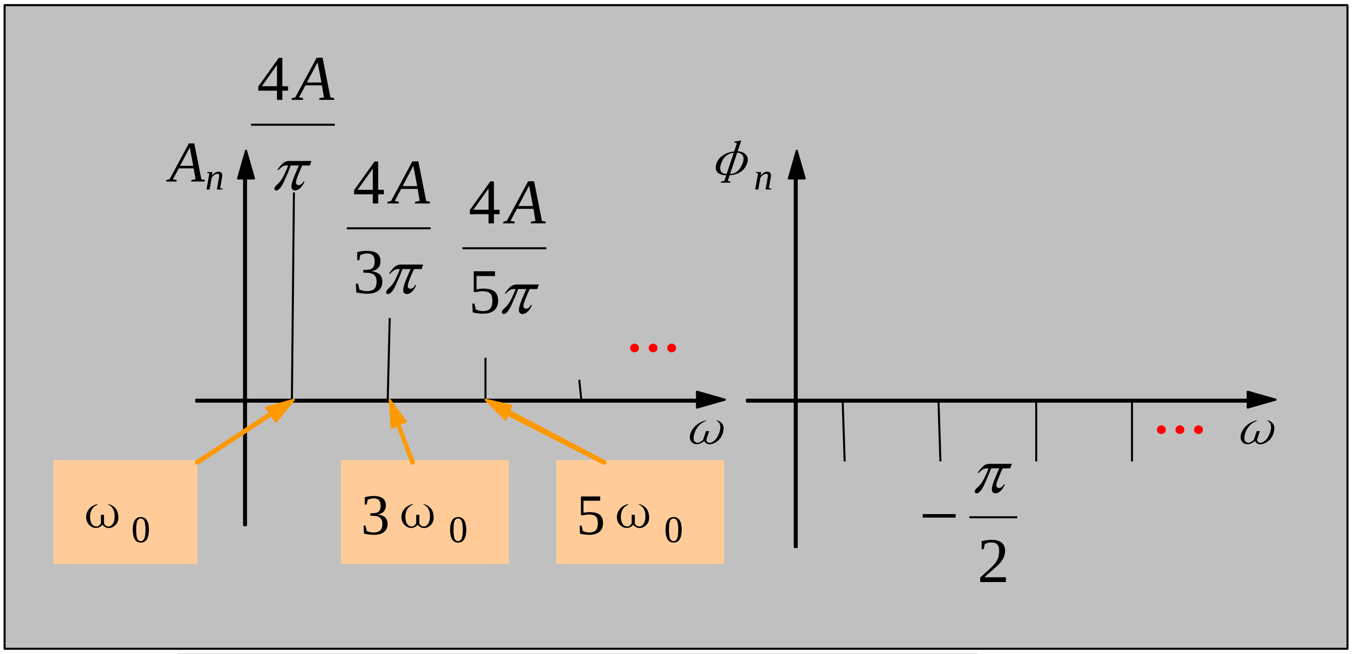
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{4A}{n\pi}, \quad \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$(n = 1,3,5,\cdots)$$

最后得傅立叶级数

$$x(t)=\sum_n \frac{4A}{n\pi}\cos(n\omega_0 t-\frac{\pi}{2}) \qquad (n=1,3,5,\cdots)$$

频谱图



幅频谱图　　　　相频谱图

二、　周期信号傅里叶级数的复指数形式

- 欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t}=\cos\omega t\pm j\sin\omega t$$

或

$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{1}{2}\left(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right) \\ \sin\omega t = \dfrac{j}{2}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right) \end{cases}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

- 傅立叶级数的复指数形式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

- 复数傅里叶系数的表达式

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \end{aligned}$$

其中a_n，b_n的计算公式与三角函数形式相同，只是n包括全部整数。

● 一般c_n是个复数。

因为a_n是n的偶函数, b_n是n的奇函数，因此 #

$$\boxed{a_n = a_{-n}} \qquad \boxed{b_{-n} = -b_n}$$

即：实部相等，虚部相反，**c_n与c_{-n}共轭。**

● c_n的复指数形式

$$\boxed{c_n = |c_n| e^{j\phi_n}}$$

共轭性还可以表示为

$$\boxed{|c_n| = |c_{-n}|}, \quad \boxed{\phi_n = -\phi_{-n}}$$

即：c_n与c_{-n}模相等，相角相反。

● 傅立叶级数复指数也描述信号频率结构。它与三角函数形式的关系

对于n>0

$$\boxed{|c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + (-b_n)^2}}{2} = \frac{A_n}{2}}$$

（等于三角

函数模的一半）

$$\boxed{\phi_n = \mathrm{arctg}\frac{-b_n}{a_n}}$$

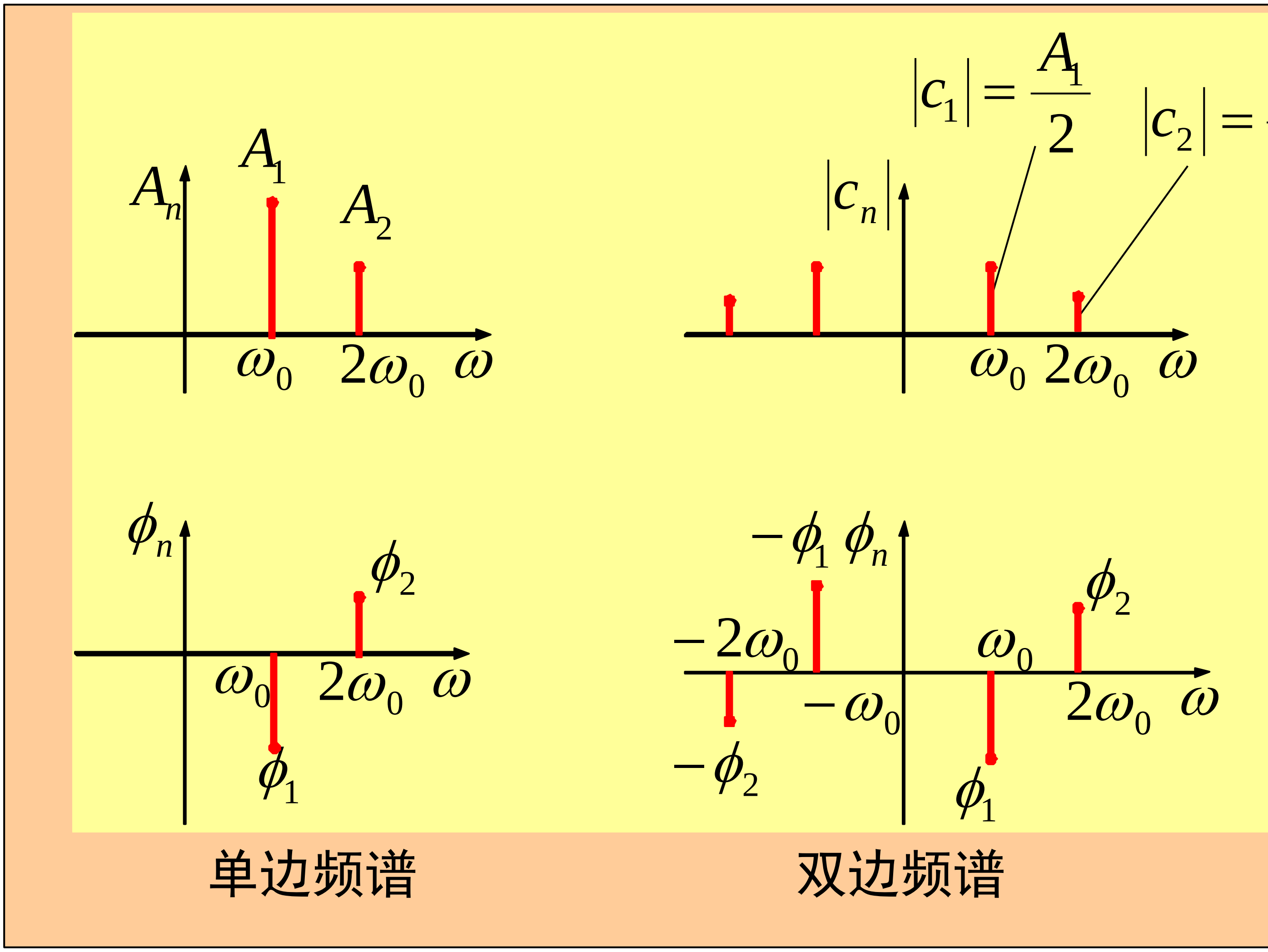
（与三角函数形式中的相角相等）

$$\boxed{|c_{-n}| = \frac{A_n}{2}}$$

$$\boxed{\phi_{-n} = -\mathrm{arctg}\frac{-b_n}{a_n} = \mathrm{arctg}\frac{b_n}{a_n}}$$

●用c_n画频谱：双边频谱

第一种：幅频谱图：$|c_n|-\omega$，相频谱图：$\varphi_n-\omega$



第二种：实谱频谱图:Rec_n− ω，虚频谱图：Imc_n− ω；也就是a_n− ω 和-b_n− ω.

#

<page break>

§2—3　非周期信号与连续频谱

分两类：

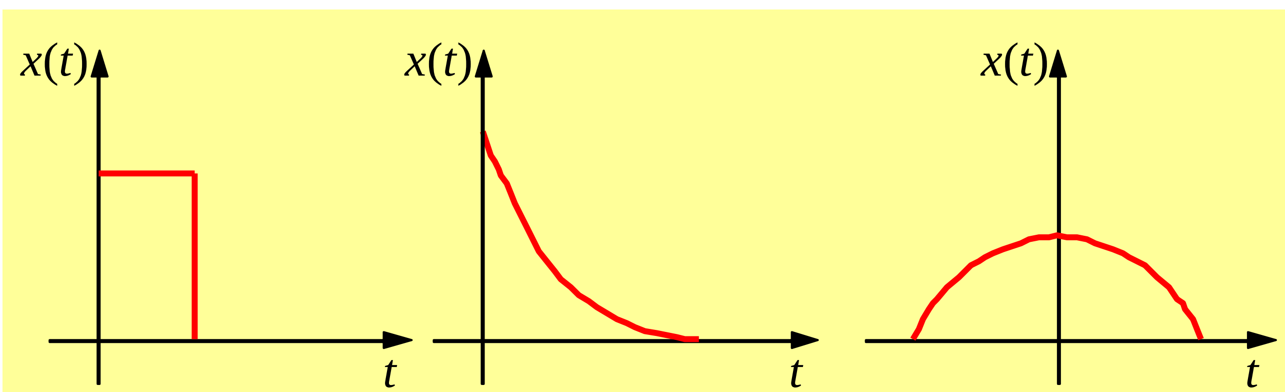
a. 准周期信号

　定义：由没有公共周期（频率）的周期信号组成

　频谱特性：离散性，非谐波性

　判断方法：周期分量的频率比（或周期比）不是有理数

b. 瞬变非周期信号



几种瞬变非周期信号

数学描述：傅里叶变换

一、　傅里叶变换

演变思路：视作周期为无穷大的周期信号

式（2.22）借助（2.16）演变成：

$x(t)$的傅里叶变换$X(\omega)$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt}\right]e^{j\omega t}d\omega$$

定义$x(t)$的傅里叶变换$X(\omega)$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

$X(\omega)$的傅里叶反变换$x(t)$:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

● 傅里叶变换的频谱意义：一个非周期信号可以分解为角频率ω 连续变化的无数谐波

$$\frac{1}{2\pi}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

的叠加。称$X(\omega)$其为函数$x(t)$的**频谱密度函**

数。

● 对应关系：

$$\left[\frac{1}{2\pi}X(\omega)d\omega\right]e^{j\omega t} \Leftrightarrow [c_n]e^{jn\omega_0 t}$$

$X(\omega)$描述了$x(t)$的频率结构

$X(\omega)$的指数形式为

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

● 以频率 f (Hz)为自变量，因为f =w/(2p)，得

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

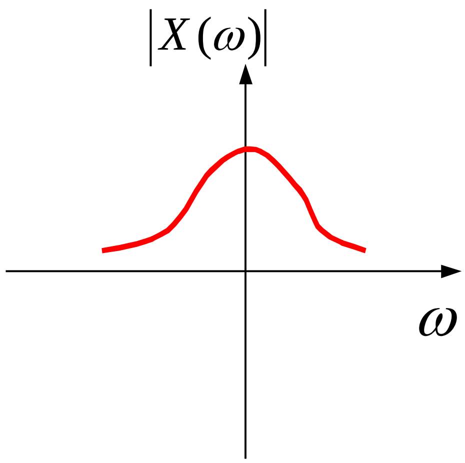
$X(f)$的指数形式

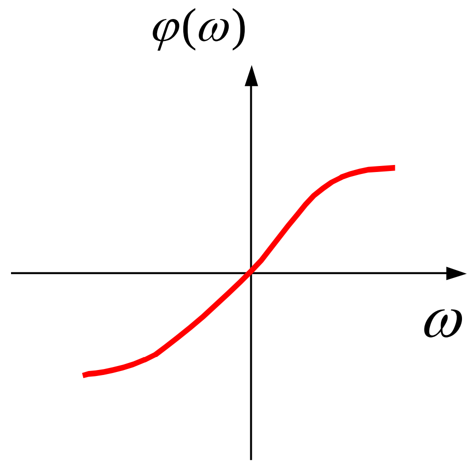
$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

● 频谱图

幅值频谱图和相位频谱图：

幅值频谱图　　　　相位频谱图





实频谱图Re$X(\omega)$和虚频谱图Im(ω)

如果$X(\omega)$是实函数，可用一张$X(\omega)$图表示。负值理解为幅值为$X(\omega)$的绝对值，相角为π或$-\pi$。

二、　傅里叶变换的主要性质

（一）叠加性

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\xrightarrow{FT}a_1X_1(f)+a_2X_2(f)$$

（二）对称性

$$X(t)\xrightarrow{FT}x(-f)$$

（注意翻转）

（三）时移性质

$$\boxed{x(t \pm t_0) \xrightarrow{FT} X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}}$$

（幅值不变，相位随 f 改变$\pm 2\pi f t_0$）

（四）频移性质

$$\boxed{x(t)e^{\pm j2\pi f t_0} \xrightarrow{FT} X(f \mp f_0)}$$

（注意两边正负号相反）

（五）时间尺度改变特性

$$\boxed{x(at) = \frac{1}{a} X(\frac{f}{a})}$$

（六）微分性质

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{FT} (j2\pi f)^n X(f)}$$

（七）卷积性质

（1）卷积定义

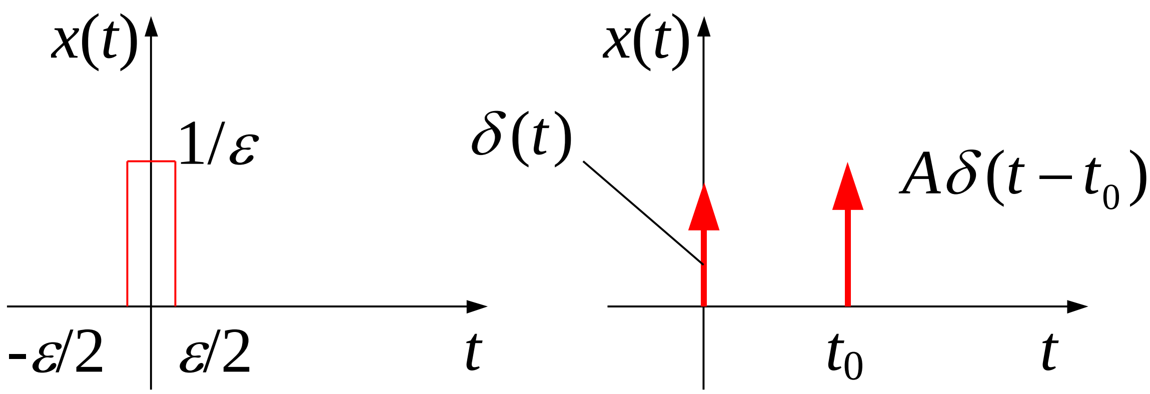
$$\boxed{x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau}$$

（2）卷积定理

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{FT} X(f)Y(f)$$
$$x(t)y(t) \xrightarrow{FT} X(f) * Y(f)$$

三、 脉冲函数及其频谱

（一） 脉冲函数：



定义δ函数（要通过函数值和面积两方面定义）

函数值：

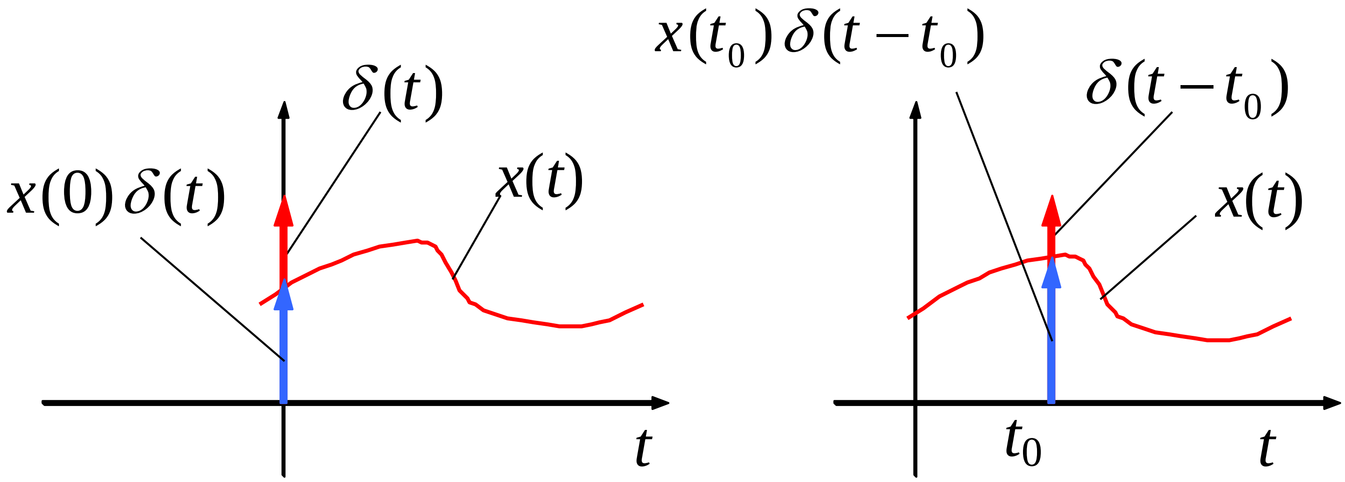
$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

脉冲强度（面积）

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

（二）脉冲函数的样质

1．脉冲函数的采性（相乘）样质：



函数值：

$$x(t)\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

强度：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

结论：1. 结果是一个脉冲，脉冲强度是$x(t)$

在脉冲发生时刻的函数值

2. 脉冲函数与任意函数乘积的积分等于该函数在脉冲发生时刻的的值。

2. 脉冲函数的卷积性质：

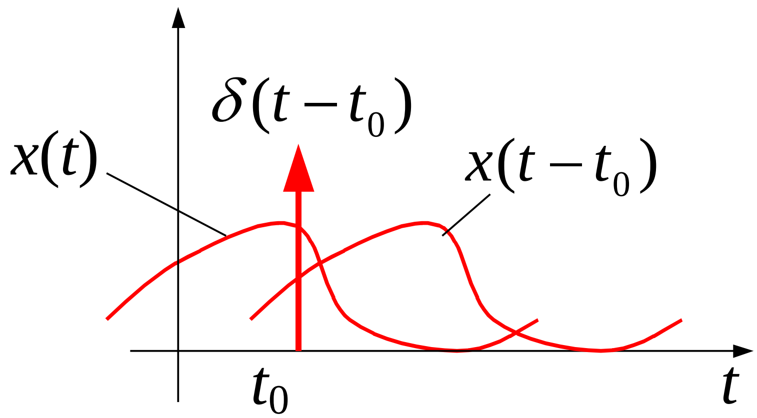
(a) 利用结论2

$$\boxed{\begin{aligned} x(t)*\delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau \\ &= x(t) \end{aligned}}$$

(b) 利用结论2

$$\boxed{\begin{aligned} x(t)*\delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau \\ &= x(t-t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau)d\tau \\ &= x(t-t_0) \end{aligned}}$$

结论：**平移**



（三）脉冲函数的频谱

$$\delta(t) \xrightarrow{FT} \Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

均匀幅值谱

由此导出的其他3个结果

$$\delta(t \pm t_0) \xrightarrow{FT} e^{\pm j2\pi f t_0}$$

（利用时移性质）

$$1 \xrightarrow{FT} \delta(-f) = \delta(f)$$

（利用对称性质）

$$e^{\pm j2\pi f_0 t} \xrightarrow{FT} \delta(f \mp f_0)$$

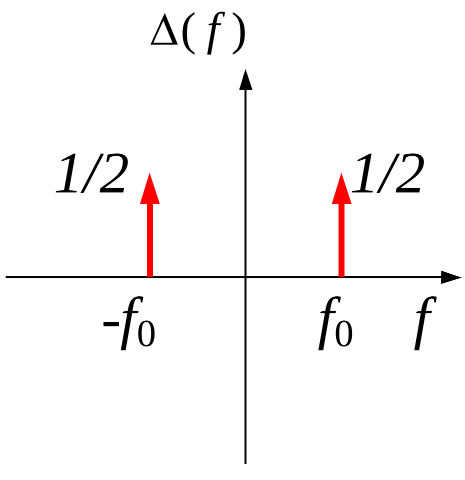
（对上式，再用频移性质）

（四）正弦函数和余弦函数的频谱

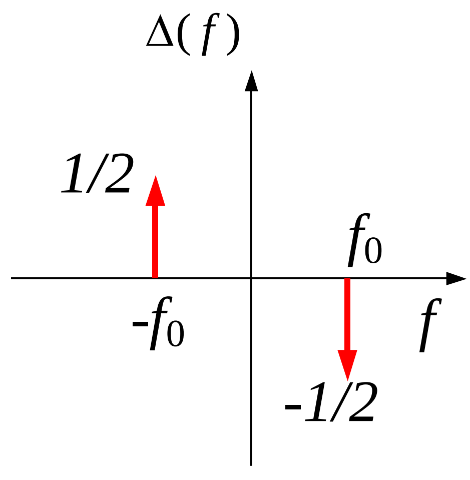
$$\cos 2\pi ft = \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi ft} + e^{j2\pi ft}\right] \xrightarrow{FT} \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)$$

$$\sin 2\pi ft = \frac{j}{2}\left[e^{-j2\pi ft} - e^{j2\pi ft}\right] \xrightarrow{FT} \frac{j}{2}\delta(f+f_0) - \frac{j}{2}\delta(f-f_0)$$

余弦函数的频谱



正弦函数的频谱



<page break>