伽马函数及其相关函数

潘佳伟

摘要

伽玛函数不是初等函数，而是用积分形式定义的超越函数，伽玛函数也被称为阶乘函数。高等数学会告诉我们一个基本结论：伽玛函数是阶乘的推广，由于伽玛函数在整个实数轴上都有定义，于是可以看做阶乘概念在实数集上的延拓。该篇文章主要介绍Gamma函数，Beta函数及其相关函数的定义，性质及它们的应用，并对其主要公式进行了严格的证明。

关键字： Gamma函数；Beta函数；Riemann函数。

Gamma Function and Related Functions

Jiawei Pan

Abstract

The gamma function is not a primary function, but a transcendental functions, the gamma function is also called factorial function. Advanced Mathematics will tell us a basic conclusion: the gamma function is promotion of factorial, due to the gamma function is always has definition on the whole real number axis, so we can regard the gamma function as the continuation of factorial on real number axis. In this paper we will mainly talk about the gamma function, beta function and other related function or formula. In addition, we will also study their character and application, and give the strict proof for the main formula.

Keywords: Gamma Function; Beta Function; Riemann Function.

1 Γ函数

1.1 定义

伽马函数$\Gamma(z)$的通常定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1}$$

这个定义只适用于$Re(z) > 0$的区域，因为这是积分在$t = 0$时的收敛条件。在接下来几部分中将给出其他定义，可用于全部z平面。现在这个定义的积分在实用上经常遇到，名为**第二类欧拉积分**。
(1)式中的积分路线可以改变为从$t = 0$出发到$\infty e^{i\alpha}$的直线，只要$|\alpha| < \pi/2$:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty e^{i\alpha}} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (Re(z) > 0), \tag{2}$$

因为(1)和(2)两式中的两个积分之差等于在右半平面中张角为$|\alpha|$, 半径$R \to \infty$的圆弧上的积分，而这个圆弧上的积分值是随$R \to \infty$而趋向于0的(约当定理，或者直接计算)。

伽马函数的符号$\Gamma(z)$是最通行的。此外还有两种符号，$\Pi(z)$和$z!$, 都等于$\Gamma(z+1)$:

$$z! = \Pi(z) = \Gamma(z+1). \tag{3}$$

符号$z!$通常只用在z是正整数的情形，但是在本文中将不给以这限制，而认为它与$\Gamma(z+1)$具有完全相同的意义，至于符号$\Pi(z)$，本文章将不采用。

1.2 递推关系

$\Gamma\left(z\right)$满足下列递推关系：

$$\Gamma\left(z+1\right)=z\Gamma\left(z\right) \tag{4}$$

或

$$z!=z\cdot\left(z-1\right)! \tag{5}$$

这个关系式可以由1.1部分(1)式用分部积分法证明如下：

$$\Gamma\left(z+1\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=\left[-e^{-t}t^z\right]_0^\infty+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma\left(z\right). \tag{6}$$

设n唯一正整数，(1)式可以推广为

$$\Gamma\left(z+n\right)=\left(z+n-1\right)\left(z+n-2\right)\cdots\left(z+1\right)z\Gamma\left(z\right) \tag{7}$$

或

$$\Gamma\left(z\right)=\frac{\Gamma\left(z+n\right)}{z\left(z+1\right)\cdots\left(z+n-1\right)}=\frac{1}{\left(z\right)_n}\int_0^\infty e^{-t}t^{z+n-1}dt, \tag{8}$$

其中

$$\left(z\right)_n=z\left(z+1\right)\cdots\left(z+n-1\right). \tag{9}$$

公式(8)把$\Gamma\left(z\right)$的定义推广到$Re(z)>-n$，n为任意正整数。(7)式又可写为

$$\left(z\right)_n=\frac{\Gamma\left(z+n\right)}{\Gamma\left(z\right)}=\frac{\left(z+n-1\right)!}{\left(z-1\right)!}. \tag{10}$$

在(4)式中令$z=1$，得

$$\Gamma\left(1\right)=0!=\int_0^\infty e^{-t}dt=1. \tag{11}$$

在(7)式中令$z=1$，得

$$\Gamma\left(n+1\right)=n!=n\left(n-1\right)\cdots2\cdot1. \tag{12}$$

这说明在z为正整数n时，$\Gamma\left(z+1\right)$就是阶乘$n!$。

由公式(8)看出$\Gamma\left(z\right)$是半纯函数，在有限区域内的奇点都是一阶极点。极点为

$$z=0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots. \tag{13}$$

在极点$z=-n$处残数为

$$\lim_{z\to-n}\left(z+n\right)\Gamma\left(z\right)=\left[\frac{\Gamma\left(z+n-1\right)}{z\left(z+1\right)\cdots\left(z+n-1\right)}\right]_{z=-n}=\frac{\left(-1\right)^n}{n!}. \tag{14}$$

1.2.1 特殊值及扩充

$$n!!=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right) & n\ \ is\ even\\ \pi^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right) & n\ \ is\ odd\end{cases} \tag{15}$$

(上述公式同样适用于当$n=-1$.)

$$\left|\Gamma\left(iy\right)\right|=\left(\frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}\right)^{1/2},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)=\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2=\frac{\pi}{\cosh\left(\pi y\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}+iy\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-iy\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\cosh\left(\pi y\right)+i\sinh\left(\pi y\right)}.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=1.77245\,38509\,05516\,02729\cdots,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=2.67893\,85347\,07747\,63365\cdots,$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=1.35411\,79394\,26400\,41694\cdots,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=3.62560\,99082\,21908\,31193\cdots,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=1.22541\,67024\,65177\,64512\cdots.$$

$$\Gamma'(1)=-\gamma.$$

此外还有Γ函数的复数值

$$\Gamma(x+iy)=\int_1^\infty\frac{t^{x-1}}{e^t}\cos(y\ln t)\,dt+\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{k}{(k+x)^2+y^2}+\frac{x}{(k+x)^2+y^2}\right]$$

$$+i\left\{\int_1^\infty\frac{t^{x-1}}{e^t}\sin(y\ln t)\,dt-y\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\left[(k+x)^2+y^2\right]}\right\}$$

1.3 Γ函数的一些最简单的性质

函数$\Gamma(z)$对于$a>0$是连续并且具有所有各阶连续的导数，只需要导数存在就够了，在积分号下对积分

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

求导，其中$a,b>0$, 我们可以得到

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\ln x\cdot e^{-x}dx. \tag{16}$$

因为应用莱布尼茨法则两个积分

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln x\cdot e^{-x}dx$$

$$\int_1^\infty x^{a-1}\ln x\cdot e^{-x}dx$$

对a一致收敛：第一个当$x=0$时对$a\geq a_0>0$(优函数为$x^{a_0-1}|\ln x|$)，而第二个当$x=\infty$时对$a\leq A<\infty$(优函数为x^Ae^{-x}).
用这个方法可以证明存在二阶导数

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^2e^{-x}dx. \tag{17}$$

1.3.1 拉阿伯积分

计算重要积分

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(a)\,da$$

时，会牵扯到接下来要说的余元公式，显然这个积分存在，因为

$$\ln\Gamma(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln a.$$

将a换为$1-a$，则可以写成

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(1-a)\,da,$$

再相加

$$2R_0=\int_0^1\ln\Gamma(a)\Gamma(1-a)\,da=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{18}$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln\sin xdx=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx. \tag{19}$$

在这里我们带入已知的积分值

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

便得

$$R_0=\int_0^1\ln\Gamma(a)\,da=\ln\sqrt{2\pi} \tag{20}$$

拉阿伯研究了积分(当$a>0$时)

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)\,da=\int_0^{a+1}-\int_0^a.$$

因为显然

$$R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln a$$

故积分之，便得(对于$a>0$)

$$R(a)=a(\ln a-1)+C.$$

但是$R(z)$在$a=0$时也保持连续；在此处使$a\to 0$取极限，我们便看出$C=R_0$。代入值$\ln\sqrt{2\pi}$, 我们便导出**拉阿伯公式：**

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)\,da=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi}. \tag{21}$$

1.4 欧拉无穷乘积公式

根据e^{-t}的极限关系

$$e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n, \tag{22}$$

可以把$\Gamma(z)$作为下列积分

$$P_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \tag{23}$$

的极限。即是当$n\to\infty$时，$P_n(z)\to\Gamma(z)$。这个极限的证明如下：

$$\Gamma(z)-P_n(z)=\int_0^n\left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{z-1}dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{24}$$

很容易看出右方第二项的极限($n\to\infty$)为零。关于第一项，可以应用下列不等式

$$0\le e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\le\frac{t^2}{n}e^{-t} \tag{25}$$

(证明如下),得

$$\left|\int_0^n\left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{z-1}dt\right|\le\int_0^n\frac{1}{n}e^{-t}t^{x+1}dt$$
$$<\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}dt\to 0,$$

其中$x=Re(z)$. 这样就证明了$P_n(z)\to\Gamma(z)$.

现在来证明不等式(25)，由e^y及$(1-y)^{-1}$的级数可知，当$0\le y<1$时，有

$$1+y\le e^y\le(1-y)^{-1}.$$

令$t=t/n$, 得

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\ge e^{-t}\ge\left(1-\frac{t}{n}\right)^n,$$

故

$$0\le e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}\left\{1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}$$
$$\le e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\},$$

其中最后一步用了不等式$e^t\ge(1+t/n)^n$. 又用数学归纳法可证明，若$0\le\alpha\le 1$, 有$(1-\alpha)^n\ge 1-n\alpha$, 于是得

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\le\frac{t^2}{n}.$$

这样就证明了不等式(25)。

在$P_n(z)$中令$t=n\tau$，并利用分部积分法n次，注意$Re(z)>0$，得

$$
\begin{aligned}
P_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau && (26)\\
&= n^z \left[\frac{\tau^z}{z}(1-\tau)^n\right]_0^1 + \frac{n^z \cdot n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau && (27)\\
&= \cdots = \frac{n^z n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau && (28)\\
&= \frac{1\cdot 2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z, && (29)
\end{aligned}
$$

即

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z. \tag{30}$$

由于当$n\to\infty$时，$n/(z+n)\to 1$，此式又可写为

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} n^z. \tag{31}$$

因此我们便导出了著名的**欧拉-高斯**公式。

(31)式中的最后一个因子n^z可写为

$$n^z = \prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z,$$

前面的因子可写为

$$\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1},$$

因此

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\right\}. \tag{32}$$

这是**欧拉无穷乘积表达式**。这对于任何z，除了极点$z=-n$外都是成立的，因此可以作为普遍的$\Gamma(z)$的定义。

另外我们还有

$$\left|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+iy)}\right|^2 = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(x+k)^2}\right), x\neq 0,-1,\cdots$$

此外我们还有，当

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

有

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1+k)(a_2+k)\cdots(a_m+k)}{(b_1+k)(b_2+k)\cdots(b_m+k)} = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\cdots\Gamma(b_m)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_m)},$$

其中b_k为正整数。

1.5 Weierstrass无穷乘积

在上一部分公式(30)中最后一个因子可写为

$$n^z = \exp(z\ln n) = \exp\left\{z\left[\ln n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\prod_{m=1}^{n} e^{z/m},$$

因此由该式得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \tag{33}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln n\right\} && (34)\\
&= 0.57721\,56649\,01532\,86060\,651\cdots. && (35)
\end{aligned}
$$

γ名为**欧拉常数**。这个无穷乘积(33)给出任何z的$\Gamma(z)$，同时指明了$\Gamma(z)$的奇点为一阶极点$z=0,-1,-2,\cdots$，而没有零点。这是Weierstrass给予$\Gamma(z)$的定义，所以称为魏氏乘积。
由

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=\sum_{m=1}^{n}\int_0^1 x^{m-1}dx=\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx \tag{36}$$

$$=\int_0^1\frac{1-(1-y)\,n}{y}dy=\int_0^n\left\{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\frac{dt}{t}, \tag{37}$$

得

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n=\int_0^n\left\{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\frac{dt}{t}-\int_1^n\frac{dt}{t}$$
$$=\int_0^1\left\{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\frac{dt}{t}-\int_1^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\frac{dt}{t}.$$

令$n\to\infty$，得

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt-\int_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{38}$$

1.6 Γ函数与三角函数的联系

由上一部分的魏氏定义得

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right\}^{-1}$$
$$=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.$$

已知知识我们有

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), \tag{39}$$

故

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z}.$$

又由1.2(4)式知$\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$，因此有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}, \tag{40}$$

这便是我们熟悉的**余元公式**，或者写成下列对称形式

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=z!\,(-z)!=\frac{\pi z}{\sin\pi z} \tag{41}$$

在(40)式中令$z=1/2$，得$\{\Gamma(1/2)\}^2=\pi$; 再开方，并注意由定义知$\Gamma(1/2)>0$，得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{42}$$

倘若在积分

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz=\sqrt{\pi}.$$

中作替换$z=x^2$，则重新得到**欧拉-泊松**积分的值：

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{43}$$

又，在(39)中令$z=1/2$，得

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{m\to\infty}\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{2n}{2n-1}\right\}^2\frac{1}{2m+1}. \tag{44}$$

这就是**Wallis乘积**。

1.7 欧拉乘积公式

作为余元公式的应用，我们来确定并证明下列欧拉乘积公式

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

令

$$\phi=\frac{n^{nz}}{n\Gamma(nz)}\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{n}\right). \tag{45}$$

应用1.3极限公式(31)，得

$$\phi=n^{nz-1}\prod_{r=0}^{n-1}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1\cdot 2\cdots(m-1)}{\left(z+\frac{r}{n}\right)\left(z+\frac{r}{n}+1\right)\cdots\left(z+\frac{r}{n}+m-1\right)}m^{z+r/n}}{\frac{1\cdot 2\cdots(nm-1)}{nz(nz+1)\cdots(nz+nm-1)}(nm)^{nz}} \tag{46}$$

$$=n^{nz-1}\lim_{m\to\infty}\frac{[(m-1)!]^n m^{nz+\frac{1}{2}(n-1)}n^{nm}}{(nm-1)!(nm)^{nz}} \tag{47}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{[(m-1)!]^n m^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{nm-1}}{(nm-1)!}, \tag{48}$$

这里指出ϕ与z无关。在(45)中令$z=1/n$，得

$$\phi=\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{r+1}{n}\right)=\prod_{r=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)=\prod_{r=1}^{n-1}\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right),$$

在最后一步中把r换成了$n-r$。因此，应用余元公式，得

$$\phi^2=\prod_{r=1}^{n-1}\left\{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}=\pi^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\left(\sin\frac{\pi r}{n}\right)^{-1}. \tag{49}$$

令$z^n-1=0$的根为$z=e^{2\pi ri/n},r=0,1,2,\cdots,n-1$; 得

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\sum_{r=0}^{n-1}z^r=\prod_{r=1}^{n-1}\left(z-e^{2\pi ri/n}\right). \tag{50}$$

令$z=1$，得

$$n=\prod_{r=1}^{n-1}\left(1-e^{2\pi ri/n}\right)=\prod_{r=1}^{n-1}e^{\pi ri/n}\left(-2i\sin\frac{\pi r}{n}\right) \tag{51}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}(n-1)i}2^{n-1}(-i)^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\sin\frac{\pi r}{n}=2^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\sin\frac{\pi r}{n}. \tag{52}$$

代入(49)式，得

$$\phi^2=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}. \tag{53}$$

取平方根，代入(45)式，即得

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz) \tag{54}$$

在上式中令$n=2$，得

$$2^{2n-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2z), \tag{55}$$

这又可写为

$$2^{2z}z!\left(z-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}(2z)!. \tag{56}$$

1.8　Γ函数的对数微商

令

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}x}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{57}$$

由1.2公式(4)取对数微商，得

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z} \tag{58}$$

由1.6公式(40)取对数微商，得

$$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z \tag{59}$$

由1.2公式(7)取对数微商，得

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{z+r} \tag{60}$$

(58)是它的特例。

由1.5(33)式求得

$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right). \tag{61}$$

应用1.5(34)式，并把上式右方的级数取到$n=m$为止，得

$$\psi(z)=-\frac{1}{z}+\lim_{m\to\infty}\left\{\ln m-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{z+n}\right\}. \tag{62}$$

若$Re(p)>0$，有

$$\frac{1}{p}=\int_0^\infty e^{-pt}dt. \tag{63}$$

对p求积分，由$p=1$到$p=m$，得

$$\ln m=\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-mt}\right)\frac{dt}{t}. \tag{64}$$

把(63),(64)两式代入到(62)中，得

$$\psi(z)=\lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-mt}\right)\frac{dt}{t}-\sum_{n=0}^{m}\int_0^\infty e^{-(z+n)t}dt\right\} \tag{65}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^\infty\left(e^{-t}-e^{-mt}\right)\frac{dt}{t}-\int_0^\infty\frac{e^{-zt}\left(1-e^{-(m+1)t}\right)}{1-e^{-t}}dt\right\}. \tag{66}$$

当$m\to\infty$时，可以证明含e^{-mt}因子的积分值为零，故得

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}dt. \tag{67}$$

把(61)式代入到(58)式右方，得

$$\psi(z+1)=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right). \tag{68}$$

在此式中令$z=0$，得

$$\psi(1)=-\gamma. \tag{69}$$

代入(57)式，注意$\Gamma(1)=1$，得

$$\Gamma'(1)=\psi(1)=-\gamma. \tag{70}$$

在(67)中令$z=1$，用(69)式，得

$$\gamma=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right\}e^{-t}dt. \tag{71}$$

在这个积分中，把下限0换为δ，在第一项的积分中作变换$e^{-t}=u$，再令$1-u=v$，与第二项积分合并后让$\delta\to 0$，即见(71)式与1.5(38)式相同。

将(71)式与(67)式相加，得

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt. \tag{72}$$

又在(64)式中令$m=z$，并与(67)式相减，得

$$\psi\left(z\right)=\ln z+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}e^{-zt}dt. \tag{73}$$

在(63)式中令$p=z$，除以2，与(73)式相加，得

$$\psi\left(z\right)=\ln z-\frac{1}{2z}+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}e^{-zt}dt. \tag{74}$$

对z求积分，由$z=1$到z，得

$$\ln\Gamma\left(z\right)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+1+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}dt. \tag{75}$$

(75)式中与z无关的一项积分可计算如下：令

$$I=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-t}}{t}dt. \tag{76}$$

在(75)式中令$z=1/2$，用1.6(42)式，得

$$I-J=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}, \tag{77}$$

其中

$$J=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-t/2}}{t}dt. \tag{78}$$

把(76)式中的t换为$t/2$，得

$$I=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{2}{t}-\frac{1}{1-e^{-t/2}}\right\}\frac{e^{-t/2}}{t}dt \tag{79}$$

从中减去(78)，得

$$I-J=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{t}-\frac{e^{-t/2}}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-t/2}}{t}dt. \tag{80}$$

再用(76)，得

$$J=\int_0^\infty\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right)e^{-t}-\frac{e^{-t/2}}{t}\right\}\frac{dt}{t}. \tag{81}$$

对于后面两项分部积分，得

$$J=\left[-\frac{e^{-t}-e^{-t/2}}{t}\right]_0^\infty-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-t/2}}{t}dt=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}, \tag{82}$$

最后一步用了(64)式。把结果代入(77)式，即得

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)-1. \tag{83}$$

代入(75)，得

$$\ln\Gamma\left(z\right)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)-\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-zt}}{t}dt \tag{84}$$

$$(Re(z)>0).$$

这是**Binet第一公式**。

还有**Binet第二公式**

$$\ln\Gamma\left(z\right)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)+2\int_0^\infty\frac{\arctan\left(t/z\right)}{e^{2\pi t}-1}dt. \tag{85}$$

此外我们还有

$$\ln\Gamma\left(z+1\right)=-\gamma z-\frac{1}{2\pi i}\int_{-c-\infty i}^{-c+\infty i}\frac{\pi z^{-s}}{s\sin\left(\pi s\right)}\zeta\left(s\right)ds, \tag{86}$$

其中$|ph\,z|\leq\pi-\delta\left(<\pi\right),1<c<2.$

1.9 渐进展开式

由已知函数$t/\left(e^{t}-1\right)$的有限项泰勒展开式

$$\frac{t}{e^{t}-1}=1-\frac{t}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k}B_{k}}{\left(2k\right)!}t^{2k}+\frac{t^{2n+2}}{e^{t}-1}\int_{0}^{1}P_{2n+1}\left(s\right)e^{ts}ds. \tag{87}$$

$$P_{2n+1}\left(t\right)=\left(-1\right)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin 2k\pi t}{\left(2k\pi\right)^{2n}}\quad\left(n\geq 0\right).$$

把t换成$-t$，有

$$\frac{-t}{e^{-t}-1}=1+\frac{t}{2}-\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_{r}}{\left(2r\right)!}t^{2r}+\frac{t^{2n+2}}{e^{-t}-1}\int_{0}^{1}P_{2n+1}\left(x\right)e^{-tx}dx. \tag{88}$$

代入上一部分(85)式积分中，级数$\sum_{r}$这一项的贡献为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_{r}}{\left(2r\right)!}\int_{0}^{\infty}t^{2r-2}e^{-zt}dt=\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_{r}}{\left(2r\right)!}\frac{\left(2r-2\right)!}{z^{2r-1}}; \tag{89}$$

积分项的贡献计算如下：

$$\left|\int_{0}^{1}P_{2n+1}\left(x\right)e^{-tx}dx\right|\leq\frac{4}{\left(2\pi\right)^{2n+1}}\int_{0}^{1}e^{-tx}dx=\frac{4}{\left(2\pi\right)^{2n+1}}\frac{e^{-t}-1}{-t}, \tag{90}$$

该不等式这里不作证明。

故其贡献为$O\left(\left|z\right|^{-2n}\right)$。这结果对于任意$n$均成立，故得$\Gamma\left(z\right)$的渐进展开式

$$\ln\Gamma\left(z\right)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)+\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_{r}}{2r\left(2r-1\right)}z^{-2r+1}+O\left(z^{-2n-1}\right). \tag{91}$$

又用$\Gamma\left(z+1\right)=z\Gamma\left(z\right)=z!$，得

$$\ln z!=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)+\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_{r}}{2r\left(2r-1\right)}z^{-2r+1}+O\left(z^{-2n-1}\right) \tag{92}$$

或

$$\ln z!=z\left(\ln z-1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi z\right)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^{3}}+\frac{1}{1260z^{5}}-\frac{1}{1680z^{7}}+\cdots. \tag{93}$$

取指数函数，得

$$z!\sim z^{z}e^{-z}\left(2\pi z\right)^{1/2}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^{2}}-\frac{139}{51840z^{3}}-\frac{571}{2488320z^{4}}+\cdots\right\}. \tag{94}$$

这些渐进展开式是在$Re(z)>0$的条件下得到的，因为这是(85)式中的积分收敛的条件，这个条件相当于$\left|\arg z\right|<\pi/2$。在接下来几部分中将放宽这个限制。公式(92),(93)或者(94)称为**Stirling公式**。

由(91)式取微商，得

$$\psi\left(z\right)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_{r}}{2r}z^{-2r}+O\left(z^{-2n-2}\right). \tag{95}$$

这个结果也可以由本部分(87)式代入上一部分(74)式直接求得。

1.9.1 渐进展开式的另一导出法

首先我们引入欧拉公式

$$\int_{a}^{a+mh}F\left(x\right)dx=h\left\{\frac{F\left(a\right)}{2}+F\left(a+h\right)+\cdots+F\left[a+\left(m-1\right)h\right]+\frac{F\left(a+mh\right)}{2}\right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k}B_{k}h^{2k}}{\left(2k\right)!}\left[F^{\left(2k-1\right)}\left(a+mh\right)-F^{\left(2k-1\right)}\left(a\right)\right]+R^{n}, \tag{96}$$

其中

$$R_{n}=\frac{h^{2n+1}}{\left(2n\right)!}\int_{0}^{1}\varphi_{2n}\left(t\right)\sum_{s=0}^{m-1}F^{\left(2n\right)}\left(a+hs+ht\right)dt. \tag{97}$$

其中$\varphi_{n}\left(t\right)$为伯努利多项式。这就是**欧拉公式**。

在欧拉展开式中令$F\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)$，取$a=0,h=1,m=n-1$，余项用

$$R_n=-h^{2n+2}\int_0^m P_{2n+1}\left(t\right)F^{\left(2n+1\right)}\left(a+ht\right)dt, \tag{98}$$

得

$$\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n=\int_1^n \ln x dx+\frac{1}{2}\ln n+\int_1^n \frac{P_1\left(x\right)}{x}dx,$$

或

$$\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-\left(n-1\right)+\int_1^n \frac{P_1\left(x\right)}{x}dx. \tag{99}$$

令

$$I_n=\int_1^n \frac{P_1\left(x\right)}{x}dx, \tag{100}$$

由(99)式得

$$\ln\prod_{r=1}^{n}\left(2r\right)^2=2n\ln 2+2\ln n!=\left(2n+1\right)\ln\left(2n\right)-2n-\ln 2+2+2I_{2n+1},$$

又有

$$\ln\left(2n+1\right)!=\left(2n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(2n+1\right)-2n+I_{2n+1.} \tag{101}$$

相减得

$$\ln\left\{\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{2r}{2r-1}\right)\frac{1}{2n+1}\right\}=\left(2n+1\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(2n+1\right)-\ln 2+2+2I_n-I_{2n+1}.$$

乘2，得

$$\ln\left\{\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{2r}{2r-1}\right)^2\frac{1}{2n+1}\right\}=2\left(2n+1\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$-2\ln 2+4+4I_n-2I_{2n+1}.$$

令$n\to\infty$，并用1.6(44)Wallis公式，得

$$\ln\frac{\pi}{2}=2-2\ln 2+2I_\infty,$$

故

$$I_\infty=\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)-1. \tag{102}$$

代入(99)式，注意

$$I_n=I_\infty-\int_n^\infty P_1\left(x\right)x^{-1}dx,$$

得

$$\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)-\int_n^\infty \frac{P_1\left(x\right)}{x}dx. \tag{103}$$

用分部积分法及公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_\lambda\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_\lambda\left(t\right)/\lambda!=\varphi_{\lambda-1}\left(t\right)/\left(\lambda-1\right)!=P_{\lambda-1}\left(t\right), \tag{104}$$

$$P_{2n+1}\left(1\right)=\left(-1\right)^{2n+1}P_{2n+1}\left(0\right)=0. \tag{105}$$

并注意$P_\lambda\left(t\right)$是周期为1的函数，在$\left(0,1\right)$之间$P_\lambda\left(x\right)$等于伯努利多项式，得

$$\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)+\sum_{r=1}^{k}\frac{\left(-1\right)^{r-1}B_r}{2r\left(2r-1\right)n^{2r-1}}-\left(2k\right)!\int_n^\infty \frac{P_{2k+1}\left(x\right)}{x^{2k+1}}dx. \tag{106}$$

这与1.9(92)相同，只是现在n是正整数。

要想求得普遍的渐进展开式，在欧拉公式(96)中令$F\left(z\right)=\ln\left(x+z\right),z\neq$负实数，并如前取$a=0,h=1$，但$m=n$，得

$$\ln z+\ln\left(z+1\right)+\cdots+\ln\left(z+n\right)$$
$$=\left(z+n\right)\ln\left(z+n\right)-n-z\ln z+\frac{1}{2}\left[\ln\left(z+n\right)+\ln z\right]+\int_0^n \frac{P_1\left(x\right)}{x+z}dx. \tag{107}$$

从(103)式减去(107)式，得

$$\ln\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-\left(z+n-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{z+n}{n}$$
$$+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^n\frac{P_1(x)}{x+z}dx-\int_n^\infty\frac{P_1(x)}{x}dx.$$

令$n\to\infty$，用1.4(30)式，得

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^\infty\frac{P_1(x)}{x+z}dx. \tag{108}$$

用分部积分法

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$
$$+\sum_{r=1}^n\frac{(-z)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)}z^{-2r+1}-(2n)!\int_0^\infty\frac{P_{2n+1}(x)}{(x+z)^{2n+1}}dx, \tag{109}$$

其中z不等于负实数，即$|\arg|<\pi$。这结果与1.9(91)式相同((109)式中的积分为$O(z^{-2n})$)，但$\arg z$的范围更大，因此比以前的更普遍一些。

1.10 围道积分

考虑围道积分

$$I=\int_\infty^{(0+)}e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{110}$$

这个围道积分从上半平面靠近正实轴无穷远处出发，向左行，围绕原点正向一周，到下半平面，再向右行到下半平面靠近正实轴无穷远处。

这个围道积分适用于任意z值，可以作为对于$\Gamma(z)$在任意的z值下定义的基础，先设z的值限制在$Re(z)>0$的范围内且不等于整数，寻求这个围道积分I与$\Gamma(z)$的关系。

把这个围道积分变形，分为三段。第一段在上半平面从$t=+\infty$沿实轴向左行到$t=\delta>0$处，δ之值可以无限小；第二段从$t=\delta$处起，绕原点作一半径为δ的圆，到下半平面实轴$t=\delta$处；第三段在下半平面从$t=\delta$处沿实轴向右行到$t=+\infty$处。把这三段积分写为I_1,I_2,I_3。为了使多值函数t^{z-1}的数值确定，在I_3中$\arg t=2\pi$。这三段积分分别为

$$I_1=\int_\infty^\delta e^{-t}t^{z-1}dt=-\int_\delta^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{111}$$
$$I_2=\int_0^{2\pi}e^{-\delta e^{i\theta}}\left(\delta e^{i\theta}\right)^{z-1}e^{i\theta}id\theta=\delta^z\int_0^{2\pi}e^{-\delta\cos\theta-i\delta\sin\theta+iz\theta}id\theta \tag{112}$$
$$I_3=e^{2\pi zi}\int_\delta^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{113}$$

既已设$Re(z)>0$，则当$\delta\to 0$时，$I_2\to 0$，而$I_1+I_3\to I$：

$$I=\left(e^{2\pi zi}-1\right)\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\left(e^{2\pi zi}-1\right)\Gamma(z)=2ie^{\pi zi}\sin\pi z\Gamma(z),$$

因此有

$$\Gamma(z)=-\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_\infty^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}dt \tag{114}$$
$$(|\arg(-t)|<\pi).$$

这关系是在$Re(z)>0$的条件下得到的，但围道积分适用于任意z值，故按解析延拓原理，$Re(z)>0$这个条件可以取消。

公式(114)不适用于z是整数的情形，因为当z是正整数时，(114)式右方是一个不定式，而当z是负整数时，右方为无穷大，但利用1.6(40)式，得

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\infty^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}dt\quad(|\arg(-t)|<\pi). \tag{115}$$

这个表达是适用于任意z值，包括z等于整数。

在(115)式中把$1-z$换成z，得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\infty^{(0+)}e^{-t}(-t)^{-z}dt\quad(|\arg(-t)|<\pi). \tag{116}$$

再把t换成$-t$，得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}e^{t}t^{-z}dt\quad(|\arg t|<\pi)\,. \tag{117}$$

其中的围道从负实轴无穷远处($t=-\infty$)出发，正想绕原点一周，再回到出发点。

(116)和(117)这两个围道积分对于任何z值都适用，可以作为$\Gamma(z)$的普遍表达式。

又像得到1.1中(2)式那样，上面(114)到(117)各式的围道可以整个绕原点转一个角度α，只要$|\alpha|<\pi/2$，围道积分之值不变，例如由(117)式得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty e^{i\alpha}}^{(0+)}e^{t}t^{-z}dt\quad(|\arg t|<\pi)\,. \tag{118}$$

1.11 Dirichlet积分

Dirichlet积分是

$$I=\int\int\cdots\int f\left(t_1+t_2+\cdots+t_n\right)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}dt_1dt_2\cdots dt_n, \tag{119}$$

其中积分限为$t\geq 0\,(r=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{r=1}^{n}t_r\leq 1$，$f$是连续函数，为了保证积分在$t_r=0$处收敛，必须$Re(\alpha_r>0)$。

先计算t_1,t_2两重积分，令$\lambda=t_3+t_4+\cdots+t_n,\tau_2=t_1+t_2$，得

$$\begin{aligned}&\int_0^{1-\lambda}dt_2\int_0^{1-\lambda-t_2}dt_1f\left(t_1+t_2+\lambda\right)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}\\=&\int_0^{1-\lambda}dt_2\int_{t_2}^{1-\lambda}d\tau_2f\left(\tau_2+\lambda\right)\left(\tau_2-t_2\right)^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}.\end{aligned}$$

变换积分次序，然后令$t_2=\tau_2t$，得

$$\int_0^{1-\lambda}d\tau_2\int_0^{\tau_2}dt_2f\left(\tau_2+\lambda\right)\left(\tau_2-t_2\right)^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}$$

$$=\int_0^{1-\lambda}d\tau_2f\left(\tau_2+\lambda\right)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1dt\left(1-t\right)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1} \tag{120}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^{1-\lambda}d\tau_2f\left(\tau_2+\lambda\right)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} \tag{121}$$

这样就减少了一重积分，而积分的形式不变，再把这个方法用到τ_2和t_3又可以减少一重，而积分前面的因子为

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}.$$

照此做下去，最后得公式

$$\int\int\cdots\int f\left(\sum_{r=1}^{n}t_r\right)\cdot\prod_{r=1}^{n}t_r^{\alpha_r-1}\cdot dt_1dt_2\cdots dt_n$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)+\cdots+\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n)}\int_0^1f(\tau)\,\tau^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-1}d\tau, \tag{122}$$

左方的积分限为$t_r\geq 0\;\;(r=1,2,\cdots,n)\,,\sum_{r=1}^{n}t_r\leq 1;\;Re(\alpha_r)>0$。

2 欧拉第一类积分，β函数

2.1 定义

欧拉第一类积分$B(p,q)$为

$$B(p,q)=\int_0^1x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1}dx, \tag{123}$$

这个积分在$Re(p)>0,Re(q)>0$时成立，作变换$x=1-t$，可以证明

$$B(p,q)=B(q,p). \tag{124}$$

$B(p,q)$可以用Γ函数表达如下

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{125}$$

为了证明这个公式，考虑

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du\int_0^\infty e^{-v}v^{q-1}dv.$$

令$u=x^2,v=y^2$，得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-x^2}u^{2p-1}dx\int_0^\infty e^{-y^2}v^{2q-1}dy \tag{126}$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy. \tag{127}$$

引进平面极坐标：$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta. \tag{128}$$

在第一个积分中令$r^2=t$，得

$$\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{p+q-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma(p+q), \tag{129}$$

在第二个积分中令$\cos^2\theta=x$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{1}{2}B(p,q). \tag{130}$$

将(129)和(130)代入(128)式，得$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q)$，这就证明了(125)式。由(125)式，根据解析开拓原理，我们得到不受条件$Re(p)>0,Re(q)>0$限制的函数$B(p,q)$，称为β**函数**。
在(130)式中应用(125)式，并把$2p$和$2q$分别改写为$p+1$和$q+1$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}. \tag{131}$$

在(129)式中把$2(p+q)-1$改写为p，得

$$\int_0^\infty e^{-r^2}r^p dr=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right); \tag{132}$$

这式的一个特殊情形是$(p=0)$

$$\int_0^\infty e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{133}$$

在(123)式中令$x=t/(1+t)$，并用(125)，得

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{134}$$

令$q=1-p$，假设$0<Re(p)<1$，并用1.6(40)式，得

$$\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}dt=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}. \tag{135}$$

这个结果也可利用留数定理求积分而得到。

现在证明下列公式

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}=\frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}t^{-p-1}(1-t)^{-q-1}dt, \tag{136}$$

其中$Re(p+q+1)>0$以保证积分在$t=-\infty$处收敛，又$t=1$在围道之外，很容易证明当$Re(p)<0$时，(136)式右方为(在负实轴的上下部分分别令$t=xe^{\pi i}$和$t=xe^{-\pi i}$)

$$-\frac{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}}{2\pi i}\int_0^\infty x^{-p-1}(1+x)^{-q-1}dx=-\frac{\sin p\pi}{\pi}\frac{\Gamma(-p)\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(q+1)},$$

最后一步用了(134)式。再用(135)式，把其中的p换成$-p$，即得(136)；根据解析开拓原理，(136)式不受$Re(p)<0$的限制。

3 黎曼(Riemann)ζ函数

3.1 定义

黎曼ζ函数的定义是

$$\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}. \tag{137}$$

这个定义在$Re(s)=\sigma>1$时有效，因为这是级数收敛的条件。通常把s表达为$s=\sigma+it$和t都是实数。

推广的ζ函数的定义是

$$\zeta\left(s,a\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+a\right)^{s}}, \tag{138}$$

其中a为一常数，不等于负整数，而$Re(s)>1$，为简单起见，我们将假设a为实数，满足$0<a\leq1$，并取$\arg\left(n+a\right)=0$。显然，$\zeta\left(s\right)=\zeta\left(s,1\right)$。

由

$$\left(n+a\right)^{-s}\Gamma\left(s\right)=\int_{0}^{\infty}x^{s-1}e^{-(n+a)x}dx, \tag{139}$$

得

$$\Gamma\left(s\right)\zeta\left(s,a\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}dx, \tag{140}$$

这个结果在a是负数时也成立，只要$Re(a)>0$，同时$Re(s)>1$，这分别是积分在下限及上限收敛的条件。

用前面围道积分的方法可以证明

$$\zeta\left(s,a\right)=-\frac{\Gamma\left(1-s\right)}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{\left(-z\right)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}dz, \tag{141}$$

其中$\left|\arg\left(-z\right)\right|<\pi$，围道内不含被积函数的奇点$z=2\pi ni\left(n=\pm1,\pm2,\cdots\right)$。(141)式中的积分是一个对一切$s$值解析的单值函数，因此在(141)式中可以取消$Re(s)=\sigma>1$的限制。这个结果在$a$为复数时也成立，只要$Re(a)>0$。

由(141)式看出，$\zeta\left(s,a\right)$为奇点只能是$\Gamma\left(1-s\right)$的奇点，这就是$s=1,2,\cdots n$，而且这些点都是一阶极点。但是我们已知$\zeta\left(s,a\right)$在$Re(s)>1$时没有奇点，因此$\zeta\left(s,a\right)$的唯一奇点式$s=1$处的一阶极点。当$s=1$时，(114)式中的积分为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{e^{-az}}{1-e^{-z}}dz, \tag{142}$$

这等于被积函数在$z=0$出的留数，等于1，故得

$$\lim_{s\to1}\frac{\zeta\left(s,a\right)}{\Gamma\left(1-s\right)}=-1. \tag{143}$$

令$\Gamma\left(1-s\right)$在$s=1$处的留数为-1，故$\zeta\left(s,a\right)$在$s=1$处的留数为1。

3.2 ζ函数的函数方程

Hurwitz证明了下列公式

$$\zeta\left(s,a\right)=\frac{2\Gamma\left(1-s\right)}{\left(2\pi\right)^{1-s}}\left\{\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}\cos\left(2n\pi a\right)+\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}\sin\left(2n\pi a\right)\right\}, \tag{144}$$

这个式子右方的级数在$Re(s)<0$的条件下收敛。

为了真名这个结果，考虑一围道C为一以原点为中心的圆，半径为$\left(2N+1\right)\pi$，N为正整数。在C与上一部分(141)式的积分围道之间，被积函数$\left(-z\right)^{s-1}e^{-az}\left(1-e^{-z}\right)^{-1}$除一阶极点$\pm2n\pi i\left(n=1,2,\cdots,N\right)$外都是单值解析的，故有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\left(-z\right)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{\left(-z\right)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}dz=\sum_{n=1}^{N}\left(R_{n}+R_{n}'\right),$$

其中R_n和R_n'分别为$z=2n\pi i$和$z=2n\pi i$处的留数。在$-z=2n\pi e^{\pm\pi i/2}$处的留数为$\left(2n\pi e^{\pm\pi i/2}\right)^{s-1}e^{\pm2n\pi ai}$，故

$$R_{n}+R_{n}'=\left(2n\pi\right)^{s-1}2\sin\left(\frac{s\pi}{2}+2n\pi a\right).$$

现设$0 < a \leq 1 Re(s) < 0$，就可以找到一个与N无关的正数K，使在C上$\left|e^{-az}\left(1-e^{-z}\right)^{-1}\right| < K$。于是得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}dz\right| < \frac{K}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left[(2N+1)\pi\right]^s e^{is\theta}\right|d\theta < K\left[(2N+1)\pi\right]^{\sigma}e^{\pi|s|},$$

其中$\sigma = Re(s)$。当$\sigma < 0$时，右方$N \to \infty$时趋于零。这样就得到了要证明的(144)式。

在(144)式中令$a = 1$，并将s改为$1-s$，得

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s). \tag{145}$$

这就是ζ函数的函数方程。这个式子的两方都是除了孤立的极点外的解析函数，不受$\sigma < 0$或者是$\sigma > 1$的限制。这个公式指出$s = -2m\,(m = 1, 2, \cdots)$是$\zeta(s)$的零点。

由1.6公式(40)得

$$\cos\frac{s\pi}{2} = \sin\frac{(1-s)\pi}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}, \tag{146}$$

又由1.7公式(55)有

$$\Gamma(s) = \pi^{-1/2}2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right), \tag{147}$$

代入(145)式，得

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{s}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{148}$$

从这个公式更容易看出$s = -2m\,(m = 1, 2, \cdots)$是$\zeta(s)$的零点。

3.3 s为整数时$\zeta(s, a)$之值

若s为负整数$-n$，则3.1中积分(141)的被积函数$(-z)^{s-1}e^{-az}\left(1-e^{-z}\right)^{-1}$为单值函数，故积分等于原点的留数。这个留数可以利用下列级数求出

$$-\frac{ze^{-az}}{e^{-z}-1} = \sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-z)^v}{v!}\varphi_v(a),$$

其中$\varphi_v(a)$是伯努利多项式。由此得

$$\zeta(-n, a) = -\frac{\varphi_{n+1}(a)}{n+1}. \tag{149}$$

该公式对于实部大于零的复数a也成立(见3.1)。

令$a = 1$，得

$$\zeta(-n) = -\frac{\varphi_{n+1}(1)}{n+1}$$

. 因此，得

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m) = 0,$$

$$\zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m} \ \ (m \geq 1). \tag{150}$$

应用3.2公式(145)，得

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}B_m}{(2m)!}. \tag{151}$$

3.4 与Γ函数的联系

现在利用Hermite公式

$$\zeta(s, a) = \frac{a^{-s}}{2} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + 2\int_0^{\infty}\frac{\left(a^2+y^2\right)^{-\frac{s}{2}}\sin s\theta}{e^{2\pi y}-1}dy,\ \theta = \arctan(y/a). \tag{152}$$

求出$\zeta(s, a)$(这里不作证明)和$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s, a)$当$s \to 0$时的值，并求出$\zeta$函数与$\Gamma$函数的联系。在(152)式中令$s = 0$，得

$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a. \tag{153}$$

这个结果已在前面得到过。

在(152)式中令$s=2$，得(因$\theta=\arctan(y/a)$)

$$\zeta(2,a)=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a}+\int_0^\infty\frac{2\sin 2\theta}{a^2+y^2}\frac{dy}{e^{2\pi y}-1} \tag{154}$$

$$=\zeta(2,a)=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a}+\int_0^\infty\frac{4ay}{\left(a^2+y^2\right)^2}\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}; \tag{155}$$

右方是在区域$Re(a)>0$中的解析函数，因为其中的积分在这区域内的任意一闭区域是一致收敛的。

由1.8(81)式求微商，得

$$\psi'(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(z+n)^2}=\zeta(2,z) \tag{156}$$

$$=\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z}+\int_0^\infty\frac{4zy\,dy}{\left(y^2+z^2\right)^2\left(e^{2\pi y}-1\right)}, \tag{157}$$

其中$Re(z)>0$，对z求积分一次，得

$$\psi(z)=C-\frac{1}{2z}+\ln z-\int_0^\infty\frac{2y\,dy}{\left(y^2+z^2\right)\left(e^{2\pi y}-1\right)}, \tag{158}$$

其中C是积分常数。要想要求C，可注意当z是实数时，这式中的积分值为$O\left(z^{-2}\right)$，因为

$$\left|\int_0^\infty\frac{2y\,dy}{\left(y^2+z^2\right)\left(e^{2\pi y}-1\right)}\right|\le\int_0^\infty\frac{2y\,dy}{|z|^2\left(e^{2\pi y}-1\right)}.$$

又由1.8(74)式可证明$|z|\to\infty$时，

$$\left|\psi(z)+\frac{1}{2z}-\ln z\right|=\left|\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}e^{-zt}dt\right|=O\left(z^{-2}\right)$$

(参看1.9(91)式的证明中关于类似积分的估计)。因此，令$z\to\infty$，即见$C=0$，而有

$$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\int_0^\infty\frac{2y\,dy}{\left(y^2+z^2\right)\left(e^{2\pi y}-1\right)}. \tag{159}$$

再求积分一次，得

$$\ln\Gamma(z)=C+z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+2\int_0^\infty\frac{\arctan(y/z)}{e^{2\pi y}-1}dy,$$

其中C是积分常数。按照前面的结果，此式中的积分，当z为实数$\to\infty$时，其值为$O(z^{-1})$。又由1.8(84)式有

$$\left|\ln\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+z-\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right|$$

$$=\left|\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-zt}}{t}dt\right|=O\left(z^{-1}\right),$$

故$C=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$，而有

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+2\int_0^\infty\frac{\arctan(y/z)}{e^{2\pi y}-1}dy, \tag{160}$$

其中$Re(z)>0,\arctan u=\int_0^u dt/\left(1+t^2\right)$，积分路线为0到$u$的直线。公式(160)称为**Binet第二公式**(1.8(85))。在(152)式中令$s\to1$，得

$$\lim_{s\to1}\left\{\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right\}=\lim_{s\to1}\frac{a^{1-s}-1}{s-1}+\frac{1}{2a}+\int_0^\infty\frac{2y\,dy}{\left(a^2+y^2\right)\left(e^{2\pi y}-1\right)}. \tag{161}$$

用公式(159)，得

$$\lim_{s\to1}\left\{\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right\}=-\psi(a)=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}. \tag{162}$$

对(152)式求微商

$$\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,a)=-\frac{a^{-s}}{2}\ln a-\frac{a^{1-s}}{s-1}\ln a-\frac{a^{1-s}}{(s-1)^2}$$

$$+2\int_0^\infty\left\{\theta\cos s\theta-\frac{1}{2}\ln\left(a^2+y^2\right)\sin s\theta\right\}\frac{\left(s^2+y^2\right)^{-s/2}}{e^{2\pi y}-1}dy. \tag{163}$$

令$s=0$，得

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,a)\right\}_{s=0}=\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+2\int_0^\infty\frac{\arctan(y/a)}{e^{2\pi y}-1}dy.$$

用公式(160)，得

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,a)\right\}_{s=0}=\ln\Gamma(a)-\frac{1}{2}\ln(2\pi). \tag{164}$$

在(162)式中令$a=1$，用1.8(69)，得

$$\lim_{s\to1}\left\{\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right\}=-\psi(1)=\gamma. \tag{165}$$

在(164)式中令$a=1$，得

$$\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi). \tag{166}$$

3.5 ζ函数的欧拉乘积

设$\sigma=Re(s)>1$，令p表示质数，$p=2,3,5,\cdots$。由$\zeta(s)$的级数求得

$$\zeta(s)\left(1-2^{-s}\right)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots, \tag{167}$$

在右方级数Σn^{-s}中n等于2的倍数项不出现。同样，得

$$\zeta(s)\left(1-2^{-s}\right)\left(1-3^{-s}\right)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots,$$

在右方的级数中n等于2和3的倍数项不出现。照此做下去，得

$$\zeta(s)\left(1-2^{-s}\right)\left(1-3^{-s}\right)\cdots\left(1-p^{-s}\right)=1+\Sigma' n^{-s}, \tag{168}$$

在右方级数中n从大于p的质数开始，而所有$2,3,\cdots p$的倍数项都不出现。现令$p\to\infty$，由于$\sigma>1$，得欧拉乘积为

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}. \tag{169}$$

这个式子的左方$\sigma=Re(s)>1$时收敛，因此$\zeta(s)$在$\sigma>1$处没有零点。在3.2中证明了$s=-2m(m=1,2,\cdots)$是$\zeta(s)$的零点，同时应用现在的结果到3.2(145)式，得知当$\sigma<0$时，除$s=-2m$外无其他零点，所有其他可能的零点只能在处于$0\le\sigma\le1$区间内。黎曼曾经提出过假设，在此区间的零点全位于$\sigma=1/2$线上，但没有得到证明，这就是著名的**黎曼猜想**.

3.6 ζ函数的黎曼积分

从Γ函数的定义很容易看出

$$n^{-s}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx. \tag{170}$$

引进函数$\varpi(x)$:

$$\varpi(x)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}. \tag{171}$$

用(170)，得

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^\infty\varpi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx. \tag{172}$$

由已知公式(这里不做证明)

$$1+2\varpi(x)=x^{-1/2}\left\{1+2\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}. \tag{173}$$

在(172)式中的积分分为两段，一段为$(0,1)$，一段为$(1,\infty)$，在第一段积分中用(173)式，得

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^{-1/2}+x^{-1/2}\varpi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^\infty\varpi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx \tag{174}$$

$$=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^\infty\varpi(t)t^{\frac{1-s}{2}-1}dt+\int_1^\infty\varpi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx \tag{175}$$

$$=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty\left(x^{s/2}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\varpi(x)\frac{dx}{x}, \tag{176}$$

或

$$s(s-1)\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=1+s(s-1)\int_1^\infty\left(x^{s/2}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\varpi(x)\frac{dx}{x}. \tag{177}$$

令$s=\frac{1}{2}+it$, $\xi(t)=\frac{1}{2}s(s-1)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$,用(177)式，得

$$\xi(t)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) \tag{178}$$

$$=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-3/4}\varpi(x)\cos\left(\frac{t}{2}\ln x\right)dx. \tag{179}$$

将$\cos v$的展开式$\cos v=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n v^{2n}/(2n)!$代入(179)式积分中，求积分，得

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^\infty a_n t^{2n}, \tag{180}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2}-\frac{b_0}{4},\ a_n=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left\{2n(2n-1)b_{n-1}-\frac{b_n}{4}\right\}\quad(n\ge1),$$

$$b_n=\int_1^\infty\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^{2n}x^{-3/4}\varpi(x)\,dx.$$

3.7 Γ函数的渐进展开式的又一导出法

由1.5(33)式得

$$\frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=\left(1+\frac{z}{a}\right)\prod_{n=1}^\infty\left\{\left(1+\frac{z}{a+n}\right)e^{-z/n}\right\}.$$

取对数主值，并展开为级数，得

$$\ln\frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^{m-1}z^m}{ma^m}+\sum_{n=1}^\infty\left[\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^{m-1}z^m}{m(a+n)^m}-\frac{z}{n}\right] \tag{181}$$

$$=\frac{z}{a}+\sum_{m=2}^\infty\frac{(-1)^{m-1}z^m}{ma^m}+\sum_{n=1}^\infty\left[\sum_{m=2}^\infty\frac{(-1)^m z^m}{m(a+n)^m}-\frac{az}{n(n+a)}\right] \tag{182}$$

$$=\frac{z}{a}-\sum_{n=1}^\infty\frac{az}{n(n+a)}+\sum_{m=2}^\infty\frac{(-1)^m}{m}z^m\zeta(m,a). \tag{183}$$

用1.8公式(61)，得

$$\ln\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(a)}=z\psi(a)-\sum_{m=2}^\infty\frac{(-1)^{m-1}}{m}z^m\zeta(m,a). \tag{184}$$

考虑下列积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z^s\Gamma(s)\Gamma(-s)\zeta(s,a)\,ds=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\pi z^s}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)\,ds.$$

积分围道C为直线$\sigma=3/2$加上在这直线之右的半圆，圆心为$s=3/2$，半径为N。这个积分等于在围道C内各极点的留数之和，极点为$s=m=2,3,\cdots$，所以留数之和就是(184)式右方的级数在半圆上$\zeta(s,a)=O(1)$，因为代表$\zeta(s,a)$的级数在其上是收敛的。又$|z^s|=|z|^\sigma e^{-t\arg z}$,$(s=\sigma+it)$，故被积函数是$O\left\{|z|^\sigma e^{-\pi|t|-t\arg z}\right\}$。因此，当$|z|<1$，而且$|\arg z|<\pi$时，沿半圆的积分值随$N\to\infty$而趋于零，而剩下的沿直线$\sigma=3/2$的积分：

$$\ln\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(a)}=z\psi(a)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}z^s\Gamma(s)\Gamma(-s)\zeta(s,a)\,ds. \tag{185}$$

右方的积分对于一切z值是解析的只要$|\arg z|<\pi$，因此这式不受条件$|z|<1$的限制。

可以证明(详见Whittaker and Watson (1927)，p.277)，当$R\to\infty$时

$$\int_{-n-\frac{1}{2}\pm Ri}^{\frac{3}{2}\pm Ri}\frac{\pi z^s}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)\,ds\to0\quad\left(n\in N^+\right),$$

故(185)式可转化为

$$\ln\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(a)}=z\psi(a)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-n-\frac{1}{2}-\infty i}^{-n-\frac{1}{2}+\infty i}\frac{\pi z^s}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)\,ds+\sum_{m=-1}^n R_m, \tag{186}$$

其中R_m为函数$-\pi z^s/(s\sin\pi s)$在$s=-m$处的留数，当$|z|$大时，可以证明(186)式中的积分为$O\left(|z|^{-n-1/2}\right)$(见Whittaker and Watson (1927)，p.277).因此

$$\ln\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(a)}=z\psi(a)+\sum_{m=-1}^n R_m+O\left(|z|^{-n-\frac{1}{2}}\right). \tag{187}$$

当$m>0$时，留数为

$$R_m=\frac{(-1)^m}{m}z^{-m}\zeta(-m,a)=\frac{(-1)^{m-1}z^{-m}\varphi_{m+1}(a)}{m(m+1)},$$

最后一步用了3.3(149)式，其中$\varphi_{m+1}(a)$是伯努利多项式。

要求R_0，把(186)式中的被积函数在$s=0$处展开为

$$-\frac{1}{s^2}\left(1+\frac{\pi^2s^2}{6}+\cdots\right)(1+s\ln z+\cdots)\times\{\zeta(0,a)+s\zeta'(0,a)+\cdots\},$$

用3.4(153)，(164)两式，即得

$$R_0=-\zeta(0,a)\ln z-\zeta'(0,a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln z-\ln\Gamma(a)+\frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

类似地，要求R_{-1}，可以把被积函数在$s=1$处展开(利用3.4(162)式)($y=s-1$)

$$\left(1-y+y^2+\cdots\right)\frac{1}{y}\left(1+\frac{\pi^2y^2}{6}+\cdots\right)\times z(1+y\ln z+\cdots)\left(\frac{1}{y}-\psi(a)+\cdots\right),$$

得

$$R_{-1}=z\{\ln z-\psi(a)-1\}.$$

把这些结果代入(187)，最后得

$$\ln\Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}\varphi_{m+1}(a)}{m(m+1)z^m}+O\left(z^{-n-1}\right), \tag{188}$$

其中$|\arg z|<\pi$。(188)式最后一项$O\left(z^{-n-1}\right)$是根据前项的递减规律写出来的，比(187)式末项的估计更精确些。

3.8 ζ函数的计算

设$f(z)$是a点到z点的直线上的解析函数，$\varphi(t)$是t的任意n次多项式，则有

$$\begin{aligned}&\varphi^{(n)}(0)\{f(z)-f(a)\}=\\&\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m\left\{\varphi^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\varphi^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right\}\\&+(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1\varphi(t)f^{(n+1)}[a+(z-a)t]\,dt.\end{aligned} \tag{189}$$

这就是**达布公式**。在达布公式中令$\varphi(t)=\varphi_n(1-t)$，又令$f(z)=(s-1)^{-1}(z+1)^{1-s}$，$a=0$，得(设$\sigma=Re(s)>1$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{(z+1)^{s-1}}-1\right]&=-\frac{1}{s-1}\sum_{m=1}^{n}\binom{1-s}{m}z^m\left[\frac{\varphi_m}{(z+1)^{s+m-1}}-\varphi_m(1)\right]\\&+\frac{n+1}{s-1}\binom{1-s}{n+1}z^{n+1}\int_0^1\varphi_n(1-t)\cdot(zt+1)^{-s-n}\,dt=-\frac{z}{2}\left[\frac{1}{(z+1)^s}+1\right]\\&-\frac{1}{s-1}\sum_{m=2}^{n}\binom{1-s}{m}z^m\cdot\varphi_m\left[\frac{1}{(z+1)^{s+m-1}}-1\right]\\&+\frac{n+1}{s-1}\binom{1-s}{n+1}z^{n+1}\int_0^1\varphi_n(1-t)(zt+1)^{-s-n}\,dt.\end{aligned}$$

令$z=1/x$，并把n换成$2n$，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)^s}&=\frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{x^{s-1}}-\frac{1}{(x+1)^{s-1}}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^s}-\frac{1}{(x+1)^s}\right]\\&+\frac{1}{s-1}\sum_{m=1}^{n}\binom{1-s}{2m}(-1)^{m-1}B_m\left[\frac{1}{x^{s+2m-1}}-\frac{1}{(x+1)^{s+2m-1}}\right]\\&-(s)_{2n}\int_0^1\frac{P_{2n}(1-t)}{(t+x)^{s+2n}}dt.\end{aligned}$$

把x换成$x+p$，对p从0到∞求和，得

$$\zeta(s,x+1)=\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}}-\frac{1}{2x^s}+\frac{1}{s-1}\sum_{m=1}^{n}\binom{1-s}{2m}\frac{(-1)^{m-1}B_m}{x^{s+2m-1}}$$

$$-(s)_{2n}\int_0^\infty\frac{P_{2n}(1-t)}{(t+x)^{s+2n}}dt, \tag{190}$$

其中B_m是伯努利数，$P_\lambda(y)$是周期为1的函数，当$0\le y<1$时，$P_\lambda(y)=\varphi_\lambda(y)/\lambda!$。

在(189)式中令$x=k$(正整数)，则因

$$\zeta(s,k+1)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r+k+1)^s}=\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{1}{r^s}=\zeta(s)-\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{e^s},$$

故有

$$\zeta(s)=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r^s}+\frac{1}{s-1}\frac{1}{k^{s-1}}-\frac{1}{2k^s}$$

$$+\frac{1}{s-1}\sum_{m=1}^{n}\binom{1-s}{2m}\frac{(-1)^{m-1}B_m}{k^{s+2m-1}}-(s)_{2n}\int_0^\infty\frac{P_{2n}(1-t)}{(t+k)^{s+2n}}dt. \tag{191}$$

这个公式可以用来计算ζ函数的值。(190)式和(191)式中的积分在$\sigma=Re(s)>-2n$时收敛。

4 相关函数及公式

4.1 Stirling公式

对于充分大得n，为了大致估计$n!$的行为，把$\ln n$换成$\int_{n+1/2}^{n-1/2}\ln x dx$，所以由定积分定义得

$$\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n+\delta_n=\int_1^n\ln x dx=n\ln n-n+1,$$

即

$$\ln(n-1)!=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1-\delta_n,$$

从而有

$$\Gamma(n)=(n-1)!=n^{n-1/2}e^{-n}e^{1-\delta_n}.$$

误差$\delta_n=\alpha_1-\beta_2+\alpha_2-\beta_3+\cdots-\beta_n$是交错级数，其项单调递减，当$n\to\infty$时，它收敛。

事实上，$\ln x$的图像是向上凸起的，因此它在切线的下方，弦在上方。于是$\beta_i>\alpha_i$, $\alpha_i>\beta_{i+1}$。且当$n\to\infty$时，$\alpha_n\to 0$, $\beta_n\to 0$。

因此，当$n\to\infty$时，$\delta_n\to\delta$，此时令$\delta=\delta_n+\mu(n)$，$e^{1-\delta}=a$，有

$$\Gamma(n)=an^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\mu(n)}, \tag{192}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(n)=0. \tag{193}$$

上面的常数a可以简单地通过下面的Wallis公式(见1.6)求得

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}},$$

即把(192)代入到上面的等式之中，并利用(193)得

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a^2n^{2n-1}e^{-2n}2^{2n}}{2na(2n)^{2n-\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{n}}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

所以

$$a=\sqrt{2\pi}.$$

把(192)两边乘以n，得

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

这就是我们在1.9提到过的**Stirling公式**。

很容易就得到了Stirling公式，(192)对于任意的实数成立。其中

$$\begin{cases}\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)} & s>0\\ \mu(s)=\frac{\theta}{12s} & 0<\theta<1\end{cases} \tag{194}$$

下面对此加以验证，如果设(194)成立，则把(194)代入$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$得到

$$\mu(s)-\mu(s+1)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)-1.$$

把上式右边记作$\lambda(s)$，s分别换成$s+1,s+2,\cdots$代入并加起来得

$$\mu(s)-\mu(s+n+1)=\sum_{\nu=0}^{n}\lambda(s+\nu). \tag{195}$$

而在公式

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots. \tag{196}$$

中设$s=1/(2s+1)$，有

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{2s+1}+\frac{1}{3(2s+1)^3}+\frac{1}{5(2s+1)^5}+\cdots,$$

上式两边乘以$2s+1$再减去1，有

$$\lambda(s)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)-1=\frac{1}{3(2s+1)^2}+\frac{1}{5(2s+1)^4}+\cdots, \tag{197}$$

从而有

$$0<\lambda(s)<\frac{1}{3(2s+1)}\left(1+\frac{1}{(2s+1)^2+\cdots}\right)=\frac{1}{12s(s+1)}=\frac{1}{12s}-\frac{1}{12(s+1)}. \tag{198}$$

所以当$n\to\infty$时，(195)右边的级数收敛。从而当$\mu(s)\to 0$时，有

$$\mu(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(s+n). \tag{199}$$

因此由(198)得

$$\mu(s)=\frac{\theta}{12s},\quad 0<\theta<1.$$

但是，根据(199)确定$\mu(s)$时，(194)式必须成立，对此给出验证是关键。为此利用(199)的$\mu(s)$，设

$$f(s)=s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)}$$

由前面的计算可知

$$f(s+1)=sf(s)$$

而由

$$\ln f(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s-s+\mu(s)$$

得

$$\frac{d^2}{ds^2}\ln f(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{2s^2}+\mu''(s).$$

由(197)和(199)式可知$\mu''(s)>0$。即$\ln f(s)$是凸函数。因此存在某个常数因子a，满足

$$\Gamma(s)=af(s)$$

即

$$\Gamma(s)=as^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)}.$$

当$s=n$是自然数时计算得到常数$a=\sqrt{2\pi}$。即证明了(194)。

[附记] 在Stirling公式

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)}$$

中

$$\mu(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(s+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{s+n}\right)-1\right\},\tag{200}$$

为了计算$\mu(s)$，要使用下面的公式：

$$\mu(s)=\frac{B_1}{1\times 2}\frac{1}{s}-\frac{B_2}{3\times 4}\frac{1}{s^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,2n}\frac{\theta}{s^{2n-1}},,\ 0<\theta<1,\tag{201}$$

B_n是伯努利数。上式中只有最后一项例外，它乘以一个小于1的系数θ。把上式继续下去，形成一个无穷级数，它虽然不收敛，但对应于s，适当地确定n使得剩余项变小，还是可以利用它进行计算的。

下面证明(201)。

$$\lambda(s)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{s}\right)-1=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-x}{x+s}dx.$$

把上面等式代入到(200)中得

$$\mu(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-x}{x+n+s}dx.$$

此时令

$$\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{2}-x & (0<x<1)\\ \varphi(0)=0 & \\ \varphi(x+1)=\varphi(x) & (x\leq 0,1\leq x)\end{cases}$$

定义$\varphi(x)$是周期为1得函数，则有

$$\mu(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\varphi(x)\,dx}{x+n+s}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\varphi(x)\,dx}{x+s}=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{x+s}.\tag{202}$$

把$\varphi(x)$展开成三角级数。即

$$\varphi(x)=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{2\nu\pi}.$$

此时，令

$$\begin{cases}\varphi_{2n}(x)=(-1)^{n-1}\,2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{(2\nu\pi)^{2n}},\\ \varphi_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\,2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{(2\nu\pi)^{2n+1}},\end{cases}\tag{203}$$

则有

$$\varphi_1(x)=-\varphi(x).\tag{204}$$

如果$n>1$，$\varphi_n(x)$一致收敛，而且

$$\varphi'_{n+1}(x)=\varphi_n(x).\tag{205}$$

如果$n=1$，在不包括$\varphi_1(x)$的不连续点$(x=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的闭区域内(205)成立。
另外，由(203)可得

$$\begin{cases}\varphi_{2n+1}(0)=0,\\ \varphi_{2n}(0)=\frac{(-1)^{n-1}2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}.\end{cases}\tag{206}$$

利用(205)，反复进行分部积分得

$$\int\frac{\varphi_1(x)\,dx}{x+s}=\frac{\varphi_2(x)}{x+s}+\frac{\varphi_3(x)}{(x+s)^2}+\frac{2\varphi_4(x)}{(x+s)^3}+\cdots+(2n-2)!\int\frac{\varphi_{2n-1}(x)\,dx}{(x+s)^{2n-1}}.$$

利用

$$\mu(s)=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{x+s}=-\int_0^{\infty}\frac{\varphi^1(x)\,dx}{x+s}$$

$$\frac{\varphi_2(0)}{s}+\frac{\varphi_3(0)}{s^2}+\frac{2\varphi_4(0)}{s^3}+\cdots-(2n-2)!\int\frac{\varphi_{2n-1}(x)\,dx}{(x+s)^{2n-1}}.$$

把(206)代入，除了剩余项之外，其他各项都与(201)一致。即

$$\mu(s)=\frac{B_1}{1\times 2}\frac{1}{s}-\frac{B_2}{3\times 4}\frac{1}{s^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}B_{n-1}}{(2n-2)(2n-3)}\frac{1}{s^{2n-3}}+R_{2n-2},\tag{207}$$

其中

$$R_{2n-2}=-\left(2n-2\right)!\int\frac{\varphi_{2n-1}\left(x\right)dx}{\left(x+s\right)^{2n-1}}.$$

为了把上式中的剩余项变为(201)中的形式，把R_{2n-2}的右边得积分在进行一次分部积分

$$\int\frac{\varphi_{2n-1}\left(x\right)dx}{\left(x+s\right)^{2n-1}}=\frac{-\varphi_{2n}\left(0\right)}{s^{2n-1}}+\left(2n-1\right)\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}\left(x\right)dx}{\left(x+s\right)^{2n}} \tag{208}$$

$$=\left(2n-1\right)\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}\left(x\right)-\varphi_{2n}\left(0\right)}{\left(x+s\right)^{2n}}dx. \tag{209}$$

由(203)知，这个积分的符号是$(-1)^n$。即R_{2n-2}的符号等于$(-1)^{n-1}$。在(207)中把n换成$n+1$得

$$R_{2n-2}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}B_{n}}{\left(2n-1\right)\cdot2n}\frac{1}{s^{2-1}}+R_{2n}. \tag{210}$$

如上所述，R_{2n-2}与R_{2n}的符号相反，所以

$$R_{2n-2}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}B_{n}}{\left(2n-1\right)\cdot2n}\frac{\theta}{s^{2-1}},\quad\left(0<\theta<1\right). \tag{211}$$

把上式代入(207)得到(201)。

由(210)导出(211)是关键。在$a=b+c$中，如果a与c符号相反，则$0<a/b<1$。举一个简单的例子，选取较小的$B_4=1/30$，在(201)中代入$n=4$得

$$\mu\left(s\right)=\frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^{3}}+\frac{1}{1260s^{5}}-\frac{\theta}{1680s^{7}}.$$

因此，$s\geq4\left(4^{7}=16384\right)$时，剩余项的绝对值比$\frac{1}{2}\times10^{-7}$小。因此取这个式子的前三项以及区间$4\leq s<5$内的$\mu\left(s\right)$，根据(194)可以计算$\ln\Gamma\left(s\right)$到小数点后6位。然后再根据$\Gamma\left(s\right)$的函数方程，可以以相同的精度求得区间$1\leq s<2$的$\Gamma\left(s\right)$。

[注意] (203)给出了伯努利多项式得傅里叶级数展开。即

$$B_{n}\left(x\right)=n!\varphi_{n}\left(x\right),\ \ 0<x<1.$$

当$n=1$时，$B_1=x-1/2=\varphi_1\left(x\right)$。其他可利用$B_n'\left(x\right)=nB_{n-1}\left(x\right)$(此处不作证明)以及(205)由归纳法求得。

4.2 K函数

K函数是hyper阶乘函数在复数上的扩展，如同Γ函数是阶乘函数在复数上的扩展。K函数的定义为：

$$K\left(z\right)=\left(2\pi\right)^{\left(-z-1\right)/2}\exp\left[\binom{z}{2}\int_{0}^{z-1}\ln\left(t!\right)dt\right]. \tag{212}$$

还可以写成闭合形式：

$$K\left(z\right)=\exp\left[\zeta'\left(-1,z\right)-\zeta'\left(-1\right)\right].$$

其中$\zeta'\left(z\right)$表示黎曼ζ函数的导函数，而$\zeta'\left(a,z\right)$则表示赫维茨ζ函数的导函数，即

$$\zeta'\left(a,z\right)=\left[\frac{\mathrm{d}\zeta\left(s,z\right)}{\mathrm{d}s}\right]_{s=a}.$$

另一种使用多伽玛函数的表示形式是：

$$K\left(z\right)=Ae^{\psi\left(-2,z\right)+\frac{z^{2}-z}{2}}.$$

其中A表示Glaisher常数.

K函数与Γ函数和巴尼斯G函数关系密切。对于自然数n，我们有：

$$K\left(n\right)=\frac{\left(\Gamma\left(n\right)\right)^{n-1}}{G\left(n\right)}.$$

还可以更简单地写为：

$$K\left(n+1\right)=1^{1}2^{2}3^{3}\cdots n^{n}.$$

前几项为：1、4、108、27648、86400000、4031078400000、3319766398771200000⋯⋯

4.3 巴尼斯G函数

巴尼斯G函数是超级阶乘函数(这里不作说明)在复数上的扩展。它与Γ函数，K函数以及Glaisher常数有关。以数学家欧尼斯特·巴尼斯(Ernest William Barnes)的名字命名。巴尼斯G函数可以通用魏尔施特拉斯分解定理的形式定义为：

$$G\left(z+1\right)=\left(2\pi\right)^{z/2}e^{-\left[z(z+1)+\gamma z^{2}\right]/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}e^{-z+z^{2}/(2n)}\right]. \tag{213}$$

4.3.1 差分方程、函数方程与特殊值

巴尼斯G函数满足差分方程

$$G\left(z+1\right)=\Gamma\left(z\right)G\left(z\right).$$

特殊地，$G(1)=1$。从此方程可推出G取整数自变量时有：

$$G\left(n\right)=\begin{cases}0 & \text{if } n=0,-1,-2,\cdots\\ \prod_{i=0}^{n-2}i! & \text{if } n=1,2,\cdots\end{cases}$$

因此，

$$G\left(n\right)=\frac{\left(\Gamma\left(n\right)\right)^{n-1}}{K\left(n\right)}.$$

另外，在满足条件$\frac{d^{3}}{dx^{3}}G\left(x\right)\geq0$时，差分方程唯一确定一个G函数。
由G函数的差分方程和Γ函数的函数方程可以得到(由Hermann Kinkelin提出)：

$$G\left(1-z\right)=G\left(1+z\right)\frac{1}{\left(2\pi\right)^{z}}\exp\int_{0}^{z}\pi x\cot\pi x dx.$$

4.3.2 乘法公式

与Γ函数一样，G函数也有其乘法公式：

$$G\left(nz\right)=K\left(n\right)n^{n^{2}z^{2}/2-nz}\left(2\pi\right)^{-\frac{n^{2}-n}{2}z}\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}G\left(z+\frac{i+j}{n}\right). \tag{214}$$

其中K是一个常数，定义为：

$$K\left(n\right)=e^{-\left(n^{2}-1\right)\zeta'(-1)}\cdot n^{\frac{5}{12}}\cdot\left(2\pi\right)^{(n-1)/2}=\left(Ae^{-\frac{1}{12}}\right)^{n^{2}-1}\cdot n^{\frac{5}{12}}\cdot\left(2\pi\right)^{(n-1)/2}.$$

$\ln G\left(z+1\right)$可渐近展开为(由巴尼斯提出)：

$$\ln G\left(z+1\right)=\frac{1}{12}-\ln A+\frac{z}{2}\ln\left(2\pi\right)+\left(\frac{z^{2}}{2}-\frac{1}{12}\right)\ln z$$
$$-\frac{3z^{2}}{4}+\sum_{k=1}^{N}\frac{B_{2k+2}}{4k\left(k+1\right)z^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2N+2}}\right).$$

其中B_k为伯努利数，需要注意的是，在巴尼斯的时代，伯努利数B_{2k}习惯写成$\left(-1\right)^{k+1}B_k$。

5 结语

阶乘，这么一个简单的基于整数的数学概念，俨然是一座冰山，我们日常看到的只是它浮在水面上的一角。而数学家们眼光犀利，看出这座山并非只有整数的一角，他们逐步地深入挖掘探索，挖出了神奇的伽马函数，把深藏在冰山下的实数域、复数域、甚至有限域都给挖了出来。而挖掘出来的伽玛函数真是一个魔术师，它跨越了人们的直觉想象，使得许多数学概念能够神奇地从整数延拓到分数；而伽玛函数同时又在现代数学的各个分支中表演着自己的神奇技艺。有许多人认为数学的概念是静态的：这些数学概念产生于历史上某一个时刻，某一位数学大家之手，之后就几乎一成不变了。对于大多数非数学专业的人而言，这种感觉貌似很自然，毕竟普通读者所接触的几何、代数、微积分这些数学知识都已经体系成熟，存在了几百甚至上千年。然而数学的发展其实是先有探索的阶段，然后才有逻辑与体系，只是我们的数学课本历来偏重后者而忽视前者。而如果我们对数学知识的探索过程有所了解的话，会发现这些探索也犹如冰山掩藏在水面之下的部分，甚至比露出的尖角还更具魅力。

这个函数在数学上魅力独特，不仅能够被一个理科本科生很好的理解，它本身又足够的深刻，具有很多漂亮的数学性质，历史上吸引了众多一流的数学家对它进行探索研究。美国数学家Philip J.Davis 在1959年在《美国数学月刊》上发表了一篇很有名的介绍伽玛函数的文章，文中对伽玛函数一些特性发现的历史进行了详细的描述，这篇文章获得了Chauvenet Prize(美国数学会颁发的数学科普奖)。他在文中最后总结道：

Each generation has found something of interest to say about the gamma function. Perhaps the next generation will also. (每一代人都发现了一些伽马函数的有趣性质，也许下一代人也会有所发现。)
－Philip J.Davis

参考文献

[1] Victor S. Adamchik. PolyGamma Functions of Negative Order

[2] Olivier Espinosa Victor H. Moll. A Generalized polygamma function. Integral Transforms and Special Functions Vol. 15, No. 2, April 2004, pp. 101 – 115

[3] E.W.Barnes, "The theory of the G-function", Quarterly Journ. Pure and Appl. Math. 31 (1900), 264-314

[4] M.F.Vigneras, L'equation fonctionelle de la fonction zeta de Selberg du groupe mudulaire SL$(2, Z)$, Asterisque 61, 235-249 (1979).

[5] Philip J. Davis, Leonhard Euler’s Integral: A Historical Profile of the Gamma Function, The American Mathematical Monthly, vol. 66, pp. 849-869, 1959

[6] Jacques Dutka, The Early History of the Factorial Function, Archive for History of Exact Sciences, 43 (3), pp. 225-249, 1991

[7] Detlef Gronnau, Why is the gamma function so as it is?, Teaching Mathematics and Computer Science, 2003

[8] Emil Artin, The Gamma function(English Traslation), Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964

[9] George E. Andrews et al., Special Functions, Cambridge University Press, 2001

[10] Ian Tweddle, James Stirling’s Methodus Differentialis: An Annotated Translation of Stirling’s Text, Springer, 2003

[11] M. Zelen and N. C. Severo. in Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1972.

[12] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling. Numerical Recipes in C. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992. Second edition. (See section 6.4)

[13] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, (1964) Dover Publications, New York. ISBN 0-486-61272-4 .

[14] Frank Oliver, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 2010

[15] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition, Academic Press, 2007

[16] 高木贞治，高等微积分(第三版)，人民邮电出版社，2011

[17] Γ.M.菲赫金哥尔茨，微积分学教程(第二卷)，高等教育出版社，2006

[18] 王竹溪，郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社，1965

[19] 火光摇曳Flickering，神奇的伽马函数(上)(下)，2014