第 1 篇　高等数学

第 1 章　函数、极限和连续

基础知识与规律总结

1.1　函　　数

一、函数的基本概念

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意的 $x \in D$，变量 y 按照对应法则 f 总有一个确定的实数值与之对应，则称 y 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，D 称为函数的定义域，有时记为 D_f.

全体函数值的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

注 ① 函数是一个变量对另一个变量的依赖关系.

如，函数 $y = x^2$，$y = \sin x + 1$，$y = \ln x$，$y = \ln x^2$ 等.

② $y = c$（c 为常数）称为常函数.

2. 函数的定义域的求解

（1）若函数是用解析式表示的，则定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合；

（2）若函数是根据实际问题建立的，则定义域就是具有实际意义的实自变量值的集合.

常用函数的定义域：

$y = \dfrac{1}{x}$，定义域为：$x \neq 0$；$y = \sqrt[2n]{x}\ (n \in \mathbf{N})$，定义域为：$x \geqslant 0$；

$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$，定义域为：$x > 0$；

$y = \sin x$ 或 $y = \cos x$，定义域为：$(-\infty, +\infty)$；

$y = \tan x$，定义域为：$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$；

$y = \cot x$，定义域为：$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$；

$y = \arcsin x$ 或 $y = \arccos x$，定义域为：$[-1, 1]$.

【例 1.1】求下列函数的定义域：

(1) $y = \log_{x-1}(9-x^2)$；　　(2) $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}$.

【解】(1) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$，故函数的定义域为：$\{x \mid 1<x<2 \text{ 或 } 2<x<3\}$.

(2) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases} \arcsin x-\frac{\pi}{4}\geqslant 0 \\ |x|\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$，故函数的定义域为：$\left\{x \,\middle|\, \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

注 一般给出函数表达式时，并不写出它的定义域，但是隐含定义域。

如，给出函数 $y=\frac{1}{x}$，就隐含了 $x\neq 0$.

3. 函数的值域的求解

(1) 由多项式表达的函数，一般用配方法或判别式法求函数的值域.

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ 有实数解 $\Leftrightarrow \Delta=b^2-4ac\geqslant 0$.

若 $\Delta=b^2-4ac<0$，则 $f(x)$ 无实数解.

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域.

(3) 若含三角函数，可利用某些三角函数的有界性.

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域(1.3 节讲).

【例 1.2】求下列函数的值域：

(1) $y=3-\sqrt{x^2-4x+9}$；　　(2) $y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}$；

(3) $y=\frac{x+1}{x+2}$；　　(4) $y=3-2\sin(3x-\frac{\pi}{4})$；

(5) $y=\frac{5}{2x^2-4x+3}$.

【解】(1) 应用配方法，则 $y=3-\sqrt{(x-2)^2+5}$，

故函数的值域为 $(-\infty,3-\sqrt{5}]$.

(2) $y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}=1-\frac{4}{\sin x+2}$，而 $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$.

所以 $1\leqslant \sin x+2\leqslant 3$，$\frac{1}{3}\leqslant \frac{1}{\sin x+2}\leqslant 1$，

即 $-3\leqslant y\leqslant -\frac{1}{3}$，故函数的值域为 $\left[-3,-\frac{1}{3}\right]$.

(3) 当 $x\neq -2$ 时，由原式可得 $x=\frac{1-2y}{y-1}$，即 $y\neq 1$.

故函数的值域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(4) 由原式可得：$x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3-y}{2}+\frac{\pi}{12}$，因为 $\left|\frac{3-y}{2}\right|\leqslant 1$，

所以函数的值域为 $[1,5]$.

(5) 变形为 $2yx^2-4yx+3y-5=0$，则

$$\Delta=16y^2-8y(3y-5)\geqslant 0\Rightarrow y(y-5)\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant y\leqslant 5.$$

4. 函数概念的两个要素：定义域和对应法则

(1) 定义域：自变量 x 的取值范围.

$y=\arcsin(x^2+2)$ 不是函数，因为 $x^2+2>1$.

(2) 对应法则：给定 x 值，求 y 值的方法.

注 ① 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数（或称两个函数等价），否则表示两个不同的函数.

② 函数的表示法只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示无关，这称为函数表示的无关特性. 此法常用来求函数的表达式.

【例 1.3】在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组.

(1) $y=x^0$ 与 $y=1$； (2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$； (4) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$.

【解】(1) $y=x^0$ 的定义域为 $\{x\neq 0\}$；$y=1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x\geqslant 0\}$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x\neq 0\}$，且对应法则相同，故该组的两个函数等价.

(4) 要使 $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$，即定义域为 $\{x\geqslant 3\}$；要使 $y=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}\frac{x-3}{x-2}\geqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$，即定义域为 $\{x\geqslant 3$ 或 $x<2\}$，故该组的两个函数不等价.

【例 1.4】设 $f(\tan x)=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}$，求 $f(x)$.

【分析】对 $f(g(x))=h(x)$，一般令 $g(x)=t$，求出 x 关于 t 的表达式，代入 $h(x)$，然后利用函数的表示无关特性求函数的表达式.

【解】$f(\tan x)=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x+\tan^2 x=1+2\tan^2 x$，令 $\tan x=t$，有 $f(t)=1+2t^2$.

于是 $f(x)=1+2x^2$.

【例 1.5】设 $f(\cos^2 x)=\cos 2x-\cot^2 x$，$0<x<1$，求 $f(x)$.

【解】$f(\cos^2 x)=2\cos^2 x-1-\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$.

令 $t=\cos^2 x$，则 $f(t)=2t-1-\frac{t}{1-t}$，$\cos^2 1<t<1$.

故 $f(x)=2x-1-\dfrac{x}{1-x}=2x-\dfrac{1}{1-x},\cos^2 1<x<1.$

二、函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)(\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 为关于自变量 x 的偶函数(或奇函数).

注 ① 奇、偶性是函数的整体性质，对整个定义域而言，奇、偶函数的定义域一定关于原点对称. 如果一个函数的定义域不关于原点对称，则这个函数一定不是奇(或偶)函数. 所以判断函数的奇偶性，首先是检验其定义域是否关于原点对称，然后再严格按照奇、偶性的定义经过化简、整理，再与 $f(x)$ 比较得出结论. 如，$f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0\\-1, x=0\end{cases}$，因为其定义域关于原点不对称，它就不具有奇偶性.

② 偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.

③ $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 是奇函数的有效方法. 若 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

④ $f(x)\equiv 0$ 既是奇函数又是偶函数. $f(x)\equiv c(c\neq 0)$ 是偶函数.

(2) 奇偶函数的运算性质.

① 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或任意多个偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数之积为奇函数.

③ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

④ 非零的一个奇函数和一个偶函数的和是非奇非偶的.

常见的偶函数：常函数 $y=c$，$|x|$，$\cos x$，x^{2n}(n 为正整数)，e^{x^2}，$e^{|x|}$，$e^{\cos x}$，….

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\dfrac{1}{x}$，x^{2n+1}(n 为正整数)，$\arcsin x$，$\arctan x$，$\operatorname{sgn} x$，….

【例 1.6】 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2) $f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0, a\neq 1$，$F(x)$ 为奇函数；

(3) $f(x)=\begin{cases}x(1-x), x>0\\x(1+x), x<0\end{cases}$.

【解】 (1) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$，

则 $f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\ln 1=0.$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $G(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，

则 $G(-x)=\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^x}{1-a^x}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，

则 $G(x)+G(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$.

所以 $G(x)$ 是奇函数，又 $F(x)$ 是奇函数，而偶数个奇函数的乘积是偶函数，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 当 $x>0$ 时，$f(-x)=-x[1+(-x)]=-x(1-x)=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$f(-x)=-x[1-(-x)]=-x(1+x)=-f(x)$.

故 $f(x)$ 是奇函数.

【例 1.7】 证明：定义在对称区间 $(-a,a)$ 内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【证】 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内有定义，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

因为 $\varphi(-x)=-\varphi(x)$，$\psi(-x)=\psi(x)$，

所以 $\varphi(x)$ 是奇函数，$\psi(x)$ 是偶函数，而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$.

故命题得证.

注 这个结论要记住，以后用起来方便.

2. 周期性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D，若存在一个与 x 无关的正数 T，使得对任意 $x\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. $f(x-T)=f(x)$ 也是成立的.

(2) 周期函数的运算性质.

① 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x)$、$g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

③ 若 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 T_1，$T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 一般是以 T_1，T_2 的最小公倍数为周期的周期函数（正弦函数与余弦函数的和或差不满足此性质，如 $|\sin x|+|\cos x|$ 的周期为 $\dfrac{\pi}{2}$）.

常见的周期函数：$\sin x$，$\cos x$，其周期 $T=2\pi$；$\tan x$，$\cot x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$，其周期 $T=\pi$.

【例 1.8】 求 $f(x)=x-[x]$ 的最小周期.

【解】 设 $x=n+r$，m 为正整数，则

$$f(x+m)=f(m+n+r)=m+n+r-[m+n+r]$$

$$= m + n + r - m - [n + r] = n + r - [n + r] = f(x),$$

故一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期，且最小周期为 1.

注 周期函数并不一定有最小周期. 如对于常函数，任意正数都是它的周期；对于狄利克莱函数，任意正有理数都是该函数的周期，所以常函数和狄利克莱函数都不存在最小正周期.

【例 1.9】设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a, x = b$ 均对称($a < b$)，求证：$y = f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

【证】由题设，$f(a + x) = f(a - x), f(b + x) = f(b - x)$，

于是 $f(x) = f[a + (x - a)] = f[a - (x - a)] = f(2a - x)$

$= f[b + (2a - x - b)] = f[b - (2a - x - b)]$

$= f[x + 2(b - a)]$.

故 $y = f(x)$ 是周期函数，且周期 $T = 2(b - a)$.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在 $M > 0$，使得对任意 $x \in D$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界，数 M 称为 $f(x)$ 的一个界；若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

若存在 M_1，对任意 $x \in D$，恒有 $f(x) \leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界，且 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在 M_2，对任意 $x \in D$，恒有 $f(x) \geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界，且 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

注 ① 有界性是相对于某个区间而言的，是局部概念.

如，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的，但在 $[0.01,2]$ 上是有界的.

② 函数在 D 上有界的充分必要条件是函数在 D 上既有上界又有下界.

六个常见的有界函数：

$|\sin x| \leqslant 1$；$|\cos x| \leqslant 1, x \in (-\infty, +\infty)$；

$|\arcsin x| \leqslant \pi/2$；$|\arccos x| \leqslant \pi, x \in [-1,1]$；

$|\arctan x| < \pi/2$；$|\operatorname{arccot} x| < \pi, x \in (-\infty, +\infty)$.

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)(\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

注 函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加时，$x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相同，即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0.$$

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调减少时，$x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相反，即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0.$$

注2 ① 单调性也是相对于某个区间而言的，是局部概念.

② 单调函数的反函数仍单调，且单调性相同.

③ 复合函数 $f(g(x))$ 的单调性有如下结论.

若 f、g 的单调性相同，则 $f(g(x))$ 单增；若 f、g 的单调性相反，则 $f(g(x))$ 单减.

【例 1.10】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a,a)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内也单调增加.

【证】 任取 $x_1,x_2\in(-a,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in(0,a)$ 且 $-x_1>-x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加，故 $f(-x_1)>f(-x_2)$.

又由于 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内是奇函数，则 $-f(x_1)>-f(x_2)$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内也单调增加.

注 奇函数若在某区间单调增加(或减少)，则在对称区间单调增加(或减少)；

偶函数若在某区间单调增加(或减少)，则在对称区间单调减少(或增加).

三、反函数、隐函数和复合函数

1. 反函数

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f. 若对任意 $y\in Z_f$，有唯一确定的 $x\in D_f$ 满足 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数，记为

$$x=f^{-1}(y)(\text{或 } x=\varphi(y)),$$

并称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$.

注 ① $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合；而 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(均在同一坐标系中).

② $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域.

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数. 定义域上单调的函数必有反函数. 要求函数的反函数，只能求它的单调区间上的反函数.

④ $y=f(f^{-1}(y))$，$x=f^{-1}(f(x))$.

⑤ 奇函数的反函数也是奇函数.

⑥ 函数与其反函数具有相同的单调性.

(2) 计算反函数的步骤：

① 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出，得到 $x=f^{-1}(y)$；

② 将刚才得到的表达式中的字母 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$，注意要写出定义域.

注 若求分段函数的反函数，只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

【例 1.11】 求 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.

【解】当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时，原式变形为：

$$y(\sqrt{2x+1}+1)=\sqrt{2x+1}-1,\text{即}\sqrt{2x+1}=\frac{1+y}{1-y}.$$

解得 $x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-1\right]=\frac{2y}{(1-y)^2}$，且 $\frac{1+y}{1-y}\geq 0 \Rightarrow -1\leq y<1$.

故反函数为 $y=\frac{2x}{(1-x)^2}$，且 $-1\leq x<1$.

【例 1.12】设 $f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ x^2, & 1\leq x\leq 4 \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

【解】由 $y=x$，$-\infty<x<1$ 可得 $x=y$，$-\infty<y<1$；

由 $y=x^2$，$1\leq x\leq 4$ 可得 $x=\sqrt{y}$，$1\leq y\leq 16$；

由 $y=2^x$，$4<x<+\infty$ 可得 $x=\log_2 y$，$16<y<+\infty$；

将以上所得各式中的字母 x 与 y 对换，则得到 $f(x)$ 的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x}, & 1\leq x\leq 16 \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty \end{cases}.$$

2. 隐函数

前面我们接触到的都是显函数，即 y 等于含自变量 x 的式子，如 $y=\ln(x+1)$ 等，只要知道了 x 的值，立刻就能得到 y 的值. 但有的函数方程不能这么表达，即 y 不能用 x 的式子表示；x 也不能用 y 的式子表示. x 和 y 的对应关系由一个方程 $F(x,y)=0$ 表示.

如果变量 x，y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间的任一值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

注 有的隐函数可以化成显函数，如，$x-y^3+1=0$ 是一个隐函数，它也可以化成显函数，即 $x=y^3-1$ 或 $y=\sqrt[3]{x-1}$. 但有的隐函数不能表示成显函数的形式. 如，隐函数 $e^x+e^y+xy=0$.

3. 复合函数

(1) 定义.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $Z_\varphi\subset D_f$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

注 复合的条件：$Z_\varphi\subset D_f$，即外层函数的定义域包含内层函数的值域.

如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 不能复合为 x 的函数. 因为 $|u|\leq 1$，$x^2+2\geq 2$，所以 $y=\arcsin(x^2+2)$ 无意义.

(2) 求复合函数的定义域.

已知 $f(x)$ 的定义域为 D_f，求函数 $f(g(x))$ 的定义域只需求满足 $g(x)\in D_f$ 的 x 的集合.

【例 1.13】设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(\cos x)$；　　(2) $f(x+a)+f(x-a),a>0$.

【解】(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，所以 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

即 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

故定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) 记 $F(x)=f(x+a)+f(x-a)$，若 x 为 $F(x)$ 定义域内的点，由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，可得

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}\Rightarrow a\leqslant x\leqslant 1-a\quad(a>0).$$

因此，当 $a<1-a$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $[a,1-a]$；

当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\left\{x=\dfrac{1}{2}\right\}$；

当 $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\varnothing$.

(3) 求解复合函数的基本方法：直接代入法，分析法和图示法.

① 直接代入法.

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法. 该法适用于初等函数的复合.

② 分析法.

所谓分析法就是根据最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法. 该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

③ 图示法.

所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法. 该法适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合. 具体解题程序为：

ⓐ 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图像；

ⓑ 把 $y=f(u)$ 的分界点在 xOu 平面上画出(是若干条平行于 x 轴的直线)；

ⓒ 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间；

ⓓ 将 ⓒ 所得结果代入 $y=f(u)$ 中，便得到复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的表达式及相应的 x 的变化区间.

【例 1.14】设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f(f(x))$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

【解】利用直接代入法求解.

$$f(f(x))=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}.$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{1}{1-(1-x^2)^2}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.15】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(\varphi(x))$.

【解】 由题设知，$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$，下面根据外层函数的定义域包含内层函数的值域求具体表达式.

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时.

若 $x<0$，且使 $\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}$，得 $x<-1$；

若 $x\geqslant 0$，且使 $\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}$，得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时.

若 $x<0$，且使 $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}$，得 $-1\leqslant x<0$；

若 $x\geqslant 0$，且使 $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}$，得 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述，有 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.

【例 1.16】 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, x<0\\ 1, \quad x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(f(x))$.

【分析】 对分段函数的复合，也可用图示法.

【解】 令 $f(x)=u$，则 $f(u)=\begin{cases}1+u, u<0\\ 1, \quad u\geqslant 0\end{cases}$.

① 作出 $u=f(x)=\begin{cases}1+x, x<0\\ 1, \quad x\geqslant 0\end{cases}$ 的图像，见图 1-1.

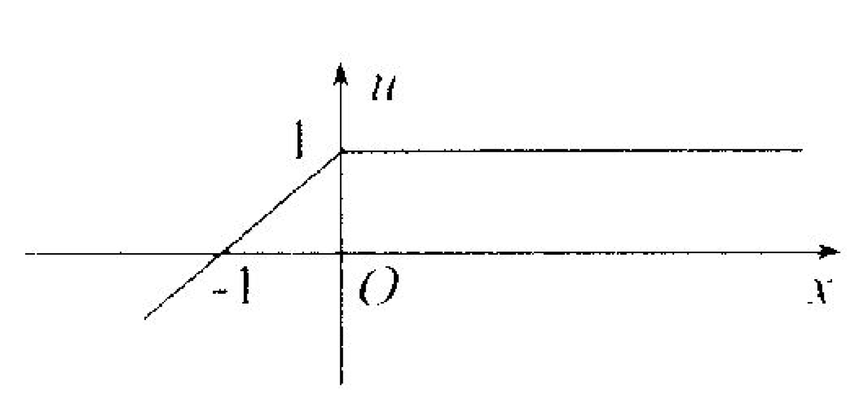


图 1-1

② 再在图 1-1 中作出 $y=f(u)=\begin{cases}1+u, u<0\\ 1, \quad u\geqslant 0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图像（x 轴）；

③ 从图中可以看出，当 $x<-1$ 时，$u<0$；当 $x\geqslant -1$ 时，$u\geqslant 0$；

④ 将 ③ 的结果代入 $y=f(u)$ 中，得 $f(f(x))=\begin{cases}2+x, x<-1\\ 1, \quad x\geqslant -1\end{cases}$.

四、分段函数

用解析法表示的函数，若在其定义域 D 的各个不相交的子集上，分别用不同的式子表示，则该函数称为分段函数. 如，$y=\begin{cases} f_1(x), x \geq x_0 \\ f_2(x), x < x_0 \end{cases}$.

常见的分段函数：

(1) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

(2) 最大函数 $\max\{f_1(x), f_2(x)\}=\begin{cases} f_1(x), \{x \mid f_1(x) \geq f_2(x)\} \\ f_2(x), \{x \mid f_1(x) < f_2(x)\} \end{cases}$.

最小函数 $\min\{f_1(x), f_2(x)\}=\begin{cases} f_2(x), \{x \mid f_1(x) \geq f_2(x)\} \\ f_1(x), \{x \mid f_1(x) < f_2(x)\} \end{cases}$.

(3) 取整函数 $[x]$ 或 $\mathrm{int}\, x$.

(4) 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

(5) 狄利克莱(Dirichlet) 函数 $y=D(x)=\begin{cases} 1, x \text{ 是有理数} \\ 0, x \text{ 是无理数} \end{cases}$.

五、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 是常数)；

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)；

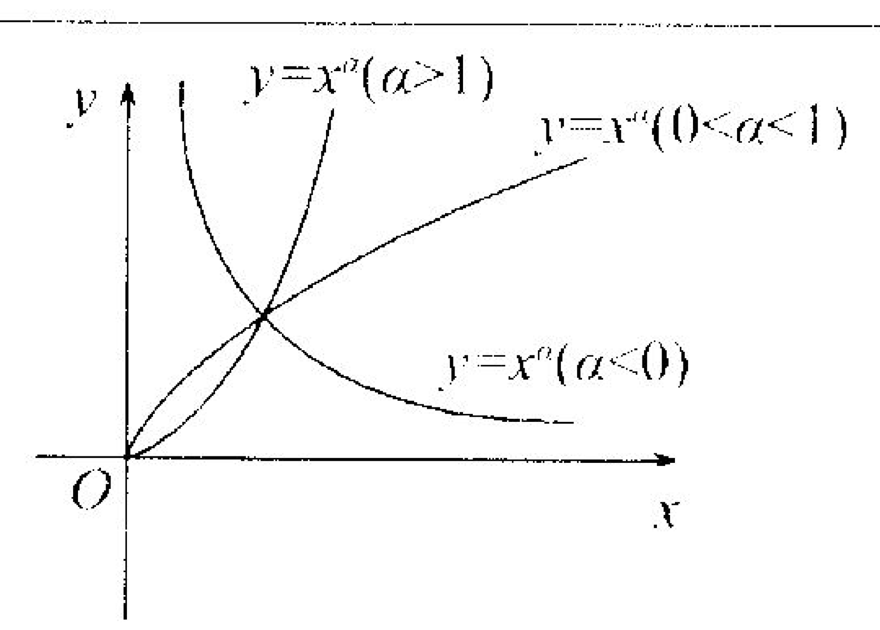
(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$)；

(4) 三角函数，如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 等；

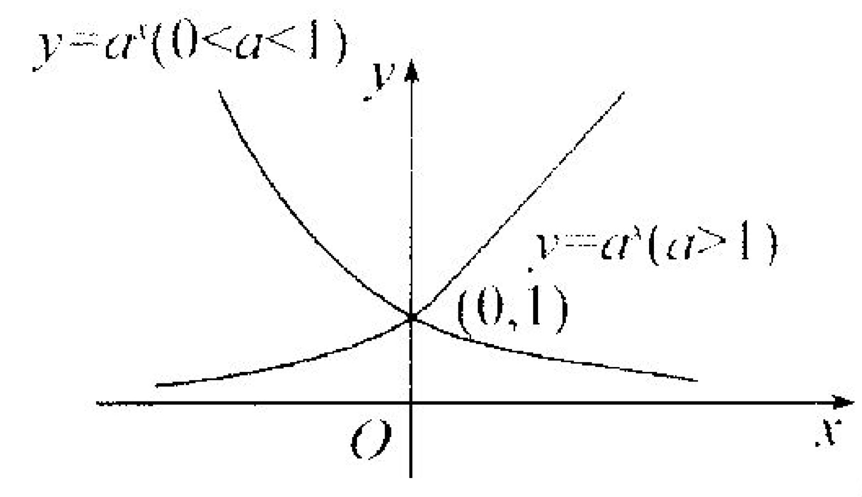
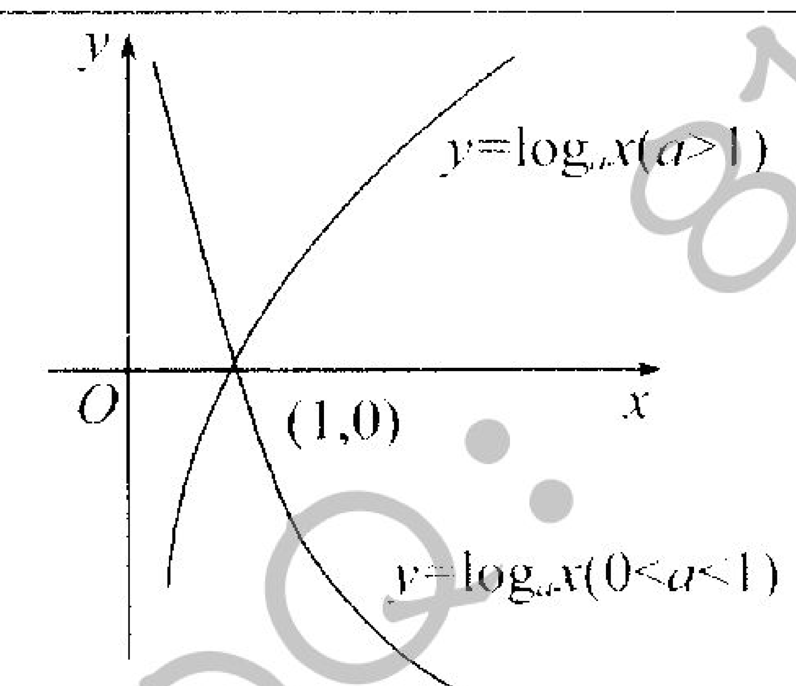
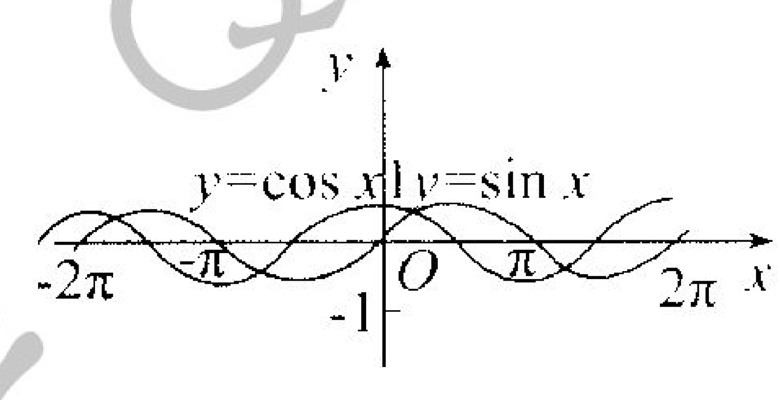
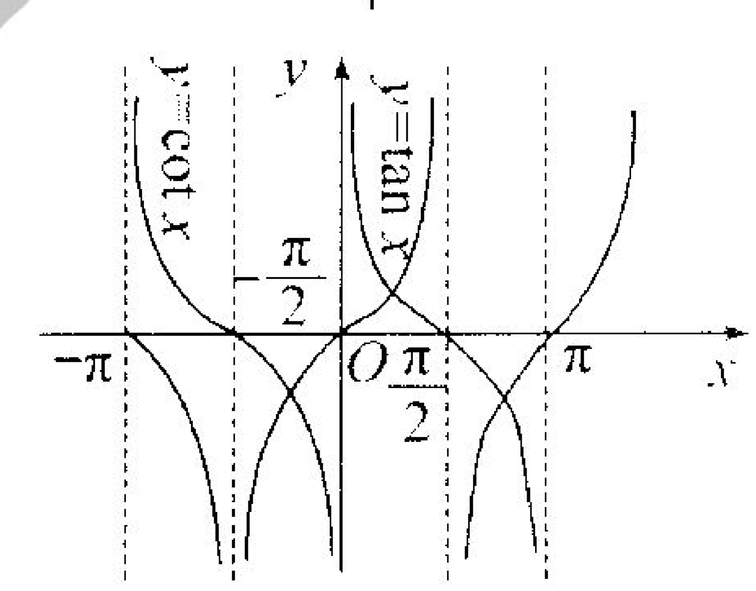
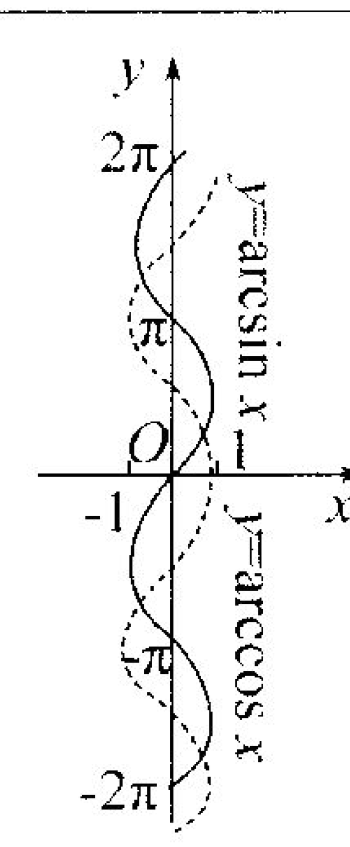
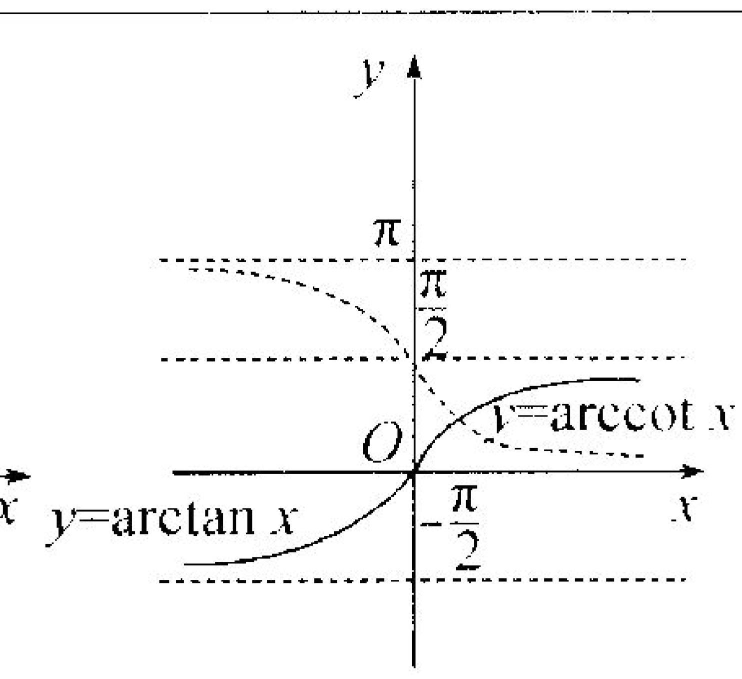
(5) 反三角函数，如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 等.

以上五类函数统称为基本初等函数. 如表 1-1 所示.

表 1-1

函数类型	图形
幂函数 $y=x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$ 是常数)	

续表

函数类型	图形
指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$	
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$	
三角函数 $y=\sin x,y=\cos x$ $y=\tan x,y=\cot x$	
反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x$ $y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$	

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

注 ① 一般地，分段函数不是初等函数.

② $y=1+x+x^2+x^3+\cdots,y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}$ 都不是初等函数.

③ 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是初等函数，则 $f(x)^{g(x)}$ 称为幂指函数. 幂指函数可以通过对数恒等式写成如下形式：

$$f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

1.2 极　　限

一、数列的极限

1. 数列极限的概念

$\{x_n\}$ 可以看作定义域为自然数集的函数.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon > 0$，总存在 $N \in \mathbf{Z}^+$，使得当 $n > N$ 时，恒有不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

即有极限的数列 $\{x_n\}$ 称为是收敛的，否则称为发散的.

注 ①ε 是任意小的正数，否则不足以说明 x_n 与 a 的接近程度；我们愿意多么接近都可以. ε 是任意的，所以 $2\varepsilon, 3\varepsilon, \varepsilon^2$ 也是任意正数，可以代替 ε.

如，"对于任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

由定义直接可得(C).

② 对于任意给定的 ε，N 只要存在即可. ε 一旦给定，N 就暂时不变，N 由 ε 确定.

如数列 $\left\{x_n = \dfrac{n}{n+1}\right\}$，极限是 1. 对任意的 ε，

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

若 $\varepsilon = 0.1$，取 $N = 10$ 即可；若 $\varepsilon = 0.001$，取 $N = 1\,000$ 即可，不管多小的 ε，都可以找到 N.

③ 一般 N 与 ε 有关，但是并不唯一，因为若 N 满足，$N+1, N+2, \cdots$ 肯定也满足. ε 越小，N 通常越大.

④x_n 趋近于 a 的方式不限，可以单调增加(或减少)趋于 a，也可时而大于 a 时而小于 a 地趋于 a. 如，$x_n = \dfrac{1}{n} \to 0, x_n = -\dfrac{1}{n} \to 0, x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0 (n \to \infty)$.

⑤ 当 $n > N$ 时，恒有不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 意味着下标大于 N 的 a_n 都落在 a 的邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，即只有有限个点位于 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 以外. 从这一点可看出，改变数列的有限项，不会改变数列的收敛性和极限值. 但是反过来，若数列 $\{x_n\}$ 有无穷个点位于 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，数列则不一定收敛. 如 $x_n = (-1)^n$.

⑥ 如何求 N 呢？给定 ε，通过 $|x_n - a| < \varepsilon$ 求解 N.

如，数列 $\left\{x_n = \dfrac{n}{n+1}\right\}$ 极限是 1.

对任意的 ε，$|x_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. 取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ 即可.

2. 收敛数列的性质

(1) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一；

(2) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，但其逆不真.

如，$x_n=(-1)^n$，$\{x_n\}$ 有界，但 $\{x_n\}$ 发散.

【例 1.17】 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(C) 既非充分也非必要条件

【解】 由性质(2) 可知应选(B)，即必要条件.

(3)(比较定理) 设有两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

想一下：是否可换成严格不等号？请考虑 $x_n=\dfrac{1}{n+1}$，$y_n=\dfrac{1}{n}$.

(4) 设有两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且 $A\leqslant B$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n\leqslant y_n$.

(5)(保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$(或 <0)，则对满足 $A>A'>0$(或 $A<A'<0$) 的任意实数 A'，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>A'>0$(或 $x_n<A'<0$).

即收敛数列从某项起，与极限值同符号，且都大于某正数(或小于某负数).

(6) 收敛数列 $\{x_n\}$ 若收敛于 a，则它的任一子数列也都收敛，且极限也是 a. 其逆一般不成立，若子数列单调，则其逆成立.

注 若数列的一个子序列发散或两个不同的子序列收敛于不同的值，则该数列发散. 这是判定数列极限不存在的一个常用方法.

如，$x_n=(-1)^n$，因为 $x_{2n}=1$，$x_{2n+1}=-1$，所以 $x_n=(-1)^n$ 发散；

$x_n=n^{(-1)^n}$，因为 $\{x_{2k}=2k\}$ 发散，所以 $x_n=n^{(-1)^n}$ 发散.

(7) 对数列 $\{x_n\}$，如果 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 都收敛于 a，则 $\{x_n\}$ 也收敛于 a.

3. 极限存在的两个准则

准则 1(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，就称 $\{x_n\}$ 是单调增加的；如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$，就称 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

推论：单调增加有上界或单调减少有下界的数列必有极限.

注 ① 该准则说明：如果数列不仅有界，并且是单调的，那么这个数列的极限必定存在，也就是这数列一定收敛.

② 在利用单调有界准则证明有关数列收敛的命题时，我们一般利用推论.

【例 1.18】 (08 年真题) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $f(\{x_n\})$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $f(\{x_n\})$ 收敛

(C) 若 $f(\{x_n\})$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $f(\{x_n\})$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

【解】 若 $\{x_n\}$ 单调，而由题设可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，则 $f(\{x_n\})$ 单调有界，故收敛，选(B).

注 ① 对于其他选项，可举反例排除.

函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，取 $x_n=n$，则 $f(\{x_n\})$ 收敛，单调，但

$\{x_n\}$ 不收敛，故排除选项(C)，(D)．

$f(x)=\begin{cases}\arctan x+1, x\geqslant 0\\ \arctan x, x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，取 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$，则 $\{x_n\}$ 收敛，

但 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{2k})=1$，$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{2k+1})=0$，故 $f(\{x_n\})$ 不存在，即排除选项(A)．

② 单调有界准则适用于求给出数列通项表达式的情形．

【例 1.19】设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【解】$x_1=10$，$x_2=\sqrt{6+x_1}=4$，可知 $x_1>x_2$．

设 $x_k>x_{k+1}$，则 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$，于是由数学归纳法可知对一切自然数 n，有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调减少．

又由题设可知 $x_n>0$，$n=1,2,\cdots$，即 $\{x_n\}$ 有下界，故由单调减少有下界可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取 $n\to\infty$ 时的极限，得 $l=\sqrt{6+l}$，解之得 $l=3$，$l=-2$(舍去)．

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$．

准则 2(夹逼准则) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，且有 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n\,(n=1,2,3,\cdots)$，则数列 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$．

复习一些不等式的知识：

(1) $a<b\Rightarrow a+c<b+c$；

(2) $a<b, c>0\Rightarrow ac<bc$；

(3) $a<b, c<0\Rightarrow ac>bc$，$-a>-b$；

(4) $a<b<0$ 或 $0<a<b\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

(5) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

常用数列极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0)$，特例为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

$\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0\,(|p|<1)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$，$(k>0)$．

【例 1.20】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$．

【解】记 $I=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$，

则
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant I\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即
$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant I\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

【例 1.21】 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)^n$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+4}\right)^n$.

【解】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\frac{n+1}{3}}\right]^{\frac{n+1}{3}\cdot\frac{3}{n+1}\cdot n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}}=\mathrm{e}^3$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+4}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+4}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{-\frac{n+4}{3}}\right]^{\left(-\frac{n+4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{n+4}\right)\cdot n}$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3n}{n+4}\right)}=\mathrm{e}^{-3}$.

二、函数的极限

1. 函数极限的概念

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，恒有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

注 ① 定义与数列极限类似.

② 一般 δ 与 ε 有关，ε 越小，δ 通常越小.

③ $0<|x-x_0|$ 说明不用考虑 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 是否有定义或取何值的问题.

④ 极限表示在自变量的一个变化过程中函数(因变量)的变化趋势.

⑤ 极限若存在则唯一，且是一个常数.

【例 1.22】 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 有定义，是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限的

(A) 必要条件 (B) 充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 无关的条件

【解】 由极限定义知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关，故选(D).

【例 1.23】 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且满足 $f(x)=5x^3+3x^2-x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求 $f(x)$.

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是常数，令 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，代入方程，然后方程的两边求 $x\to x_0$ 的极限，得出 l，然后将 l 代回方程，即得 $f(x)$.

【解】 令 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=l$，代入方程可得 $f(x)=5x^3+3x^2-xl$.

两边求 $x\to1$ 时的极限，得

$$l=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(5x^3+3x^2-xl)$$
$$=5+3-l=8-l.$$

解之得 $l=4$，将 l 代回方程可得 $f(x)=5x^3+3x^2-4x$.

2. 左极限和右极限

左极限：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

右极限：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

3. 函数极限的性质

性质 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

注 本性质经常用于求分段函数的极限或函数在区间端点的左右极限.

【例 1.24】设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1\\ x^2-2, & |x|>1\end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $x\to 1$ 与 $x\to -1$ 时的极限.

【解】$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-2)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x^2-2)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$.

注 请记住特殊函数的左右极限：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$；$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.

若遇到 $x\to\infty$ 时，极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq1)$，特别是 e^x，$\arctan x$，$\operatorname{arccot}x$，或 $|x|$（或 $x\to0$ 时，极限式中含 $e^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\dfrac{1}{x}$，$\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$，或 $|x|$），一定分别求出 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时（或 $x\to0^+$，$x\to0^-$ 时）的极限，若两者相等，则 $x\to\infty$（或 $x\to0$）时的极限存在，否则不存在.

【例 1.25】求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

【解】(1) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}x\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$；

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}x\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$；

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

性质 2 （保号性定理） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）；

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

【例 1.26】设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则一定存在 x_0 的一个去心邻域，在此邻域内

(A) $f(x)<0$　　(B) $f(x)>0$

(C) $f(x)\leqslant 0$　　(D) $f(x)\geqslant 0$

【解】由极限的保号性质就可知 $f(x)>0$，故选(B).

性质 3 （局部有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|\leqslant M\quad (M>0).$$

性质 4 （函数极限与数列极限的关系） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应地函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

注 ① 本性质提供了一种求解数列极限的办法.求数列极限时，可令 $n=x$.

② 此外，也提供了证明函数极限不存在的方法，只要找到一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 不收敛或找到两个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，但 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 极限不同，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

【例 1.27】求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$.

【解】取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$；取 $y_n=2n\pi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=0$.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

注 同理可证得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

性质 5 （夹逼定理或迫敛准则） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$，且在 x_0 的邻域内恒有 $f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

注 条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$ 说明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在且相等.

【例 1.28】设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

【解】令 $\varphi(x)=1-e^{-x^2}$，$f(x)=1$，$g(x)=1+e^{-x^2}$，则

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)，且\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0.$$

此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$，可排除(A)(C)选项.

令 $\varphi(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$，$f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)=0]$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2$ 不存在，

可排除(B)，故选(D).

事实上，本题中，条件 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 推不出 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 存在，所以不满足夹逼定理的条件，不能得出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在.

4. 极限的四则运算法则

设有函数 $f(x)$，$g(x)$，如果在自变量的同一变化过程中，有 $\lim f(x)=a$，$\lim g(x)=b$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=ab$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}\quad(b\neq 0)$；

(4) $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=ca$，其中 c 为常数.

推论：若 $\lim f(x)$ 存在，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

注1 ① 极限的四则运算法则可以推广到任意有限多个函数；

② 对数列极限也适用.

注2 对于(1)，若两个函数中有一个极限不存在，则其代数和的极限必不存在；若两个极限都不存在，则其代数和的极限是否存在不能确定，要具体问题具体分析.

如，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}$ 均不存在，但

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

注3 运用极限四则运算法则时需注意：

① 参加运算的是有限个函数；

② 每个函数的极限都存在；

③ 商的极限要求分母不为零；

④ ∞ 不要随便参加运算.

【例 1.29】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=-1$.

5. 重要的极限公式

公式 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$

若极限式具有如下两个特点.

① 是$\dfrac{0}{0}$型极限；

②$\sin\square$与分数线下面对应变量$\square$形式一致，则$\lim\dfrac{\sin\square}{\square}=1.$

注 ① 当函数为$\dfrac{\sin x}{x}$时，注意自变量的变化过程，如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$中自变量的变化过程是$x\to 0$，其他过程不能利用该公式．如$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0(\neq 1),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2}{\pi}(\neq 1).$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$

【例 1.30】求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.$

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$

公式 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$

特点：① 是1^∞型极限；

② 括号中1后的变量（包括符号）与指数幂互为倒数．

【例 1.31】计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$

【解】(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\mathrm{e}^{-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+a}(x+a+b)^{x+b}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{x+a}\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{x+b}}=\mathrm{e}^{-(a+b)}.$

注 1^∞型极限的快速解法：

若幂指函数$[1+u(x)]^{v(x)}$的底呈$(1+u(x))$形式或易化为这种形式（其中$u(x)\to 0$），幂$v(x)\to\infty$，则

$$\lim(1+u(x))^{v(x)}=\lim\mathrm{e}^{v(x)\ln(1+u(x))}=\mathrm{e}^{\lim v(x)u(x)}\qquad(\ln(1\pm u(x))\sim\pm u(x)).$$

即$\lim(1+u(x))^{v(x)}=\mathrm{e}^A$，其中$A=\lim v(x)u(x)$.

【例 1.32】求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^x$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$.

【解】(1) $I=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{-1}{2x}\cdot\left(\frac{-2x}{1}\right)\cdot\frac{3}{\sin x}}=e^{-6}$.

或 $A=\lim\limits_{x\to 0}(-2x)\cdot\dfrac{3}{\sin x}=-6$，所以 $I=e^{-6}$.

(2) $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2c}{x+c}\right)^{\frac{x+c}{-2c}\cdot\left(\frac{-2c}{x+c}\right)\cdot x}=e^{-2c}$.

或 $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{2c}{x+c}\right)\cdot x=-2c$，所以 $I=e^{-2c}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\csc^2 x}$.

而 $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\csc^2 x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}=e^{-\frac{1}{2}}$.

注 由以上解答可看出，1^∞ 型极限的快速解法很简便.

公式 3 （抓大头准则）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}.$$

即求 $x\to\infty$ 的极限时，抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项，而把其余的项略掉；而求 $x\to 0$ 的极限时，正好相反. 如，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(100x^{100}+5x+3)}{\ln(2x^{20}+3x^2-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(100x^{100})}{\ln(2x^{20})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 100+100\ln x}{\ln 2+20\ln x}=5.$$

注 该公式对数列也适用.

【例 1.33】求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+4x+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$.

【解】(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{30}x^{30}3^{20}x^{20}}{2^{50}x^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{20}$.

【例 1.34】求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{\sqrt{2x^2-3x+1}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{\sqrt{2x^2-3x+1}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-4+\frac{5}{x}}{\sqrt{2x^2-3x+1}}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

注 公式 3 的思想是“抓大头”，即抓住起决定性作用的项，因此，有时使用该公式并不拘泥于形式，如下例.

【例 1.35】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{1+x}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=0$.

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x}{n^x}=1, & x>0\\ 0, & x=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^{-x}}{n^{-x}}=-1, & x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

【例 1.36】 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-8x^3}{2x^2+3x+1}=4$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=8$，求 $f(x)$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-8x^3}{2x^2+3x+1}=4$，根据“抓大头准则”可设 $f(x)=8x^3+8x^2+ax+b$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=8$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\Rightarrow b=0$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{8x^3+8x^2+ax}{x}=8\Rightarrow a=8,$$

故 $f(x)=8x^3+8x^2+8x$.

【例 1.37】 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，求常数 a,b.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(b-a)x+1+b}{x+1}=3$，由“抓大头法则”可得 $1-a=0$，$b-a=3$，故 $a=1$，$b=4$.

三、无穷小、无穷大和无穷小量阶的比较

1. 无穷小量

以零为极限的函数称为无穷小量，简称无穷小.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$.

注 ① 0 是无穷小量，但是任意小的常数不是无穷小量.

② 无穷小量是对某一过程而言的，一定要说明自变量的变化趋势.

如，函数 $y=x$，因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以 $y=x$ 是 $x\to0$ 时的无穷小量. 而 $\lim\limits_{x\to1}x=1$，所以 $y=x$ 不是 $x\to1$ 时的无穷小量.

对数列来说，只有 $n\to\infty$ 这个过程，所以 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ 都是无穷小量.

2. 无穷小的运算

(1) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

如：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]=(-1)^n\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，$|(-1)^n|\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi=0$.

(2) 常数与无穷小的乘积是无穷小；

(3) 有限个无穷小的和是无穷小；

(4) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

注 (4) 的逆命题不成立，即由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$ 不一定能推出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

如，$f(n)=1+(-1)^n$，$g(n)=1-(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)g(n)=0$，但数列 $\{f(n)\}$，$\{g(n)\}$ 均不收敛.

【例 1.38】计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{2}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

【解】(1) 当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小量，$\left|\sin\dfrac{2}{x}\right|\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{2}{x}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$，且 $|\cos x|\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}=0$.

定理　极限和无穷小的关系：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

3. 无穷大量(实际上是极限不存在的一种形式)

在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为这一变化过程中的无穷大量.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow$ 对于任意 $M>0$，存在一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow$ 对于任意 $M>0$，存在一个 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$.

注 ① 无穷大与有限数的和仍为无穷大；

② 两个无穷大的和不一定是无穷大. 如当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=x$，$g(x)=-x$.

4. 无穷大与无穷小的关系定理

在同一变化趋势下，无穷大的倒数为无穷小；非“0”的无穷小的倒数为无穷大.

5. 无界变量和无穷大量的区别

无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

如，数列 0，2，0，4，0，6，0，8，… 是无界变量，但不是无穷大量.

又如：$f(x)=x\sin x$ 是无界变量，但不是无穷大量. 因为取 $x=x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 n 充分大时，$f(x_n)$ 可以大于任意一个预先给定的正数 M，由此可见 $f(x)$ 是无界变量；而取 $x=x_n=2n\pi$ 时，$f(x_n)=0$，由此可见，$f(x)$ 不是无穷大量.

6. 无穷小量的比较

设在自变量的同一变化趋势下，$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小量.

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量，记为 $\alpha(x)=O(\beta(x))$；当 $C=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(4) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

【例 1.39】 当 $x\to 0$ 时，将下列函数与 x 进行比较，哪些是高阶无穷小量？哪些是低阶无穷小量？哪些是同阶无穷小量？哪些是等价无穷小量？

(1) $\sqrt{1+x^2}-1$；　　(2) $x+x^2\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $x^3+\sin 2x$；　　(4) $3\tan\dfrac{x}{3}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$.

故当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1$ 是比 x 高阶的无穷小量.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

故当 $x\to 0$ 时，$x+x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x 是等价无穷小量.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$.

故当 $x\to 0$ 时，$x^3+\sin 2x$ 与 x 是同阶无穷小量.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan\dfrac{x}{3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\dfrac{x}{3}}{\dfrac{x}{3}}=1$.

故当 $x\to 0$ 时，$3\tan\dfrac{x}{3}$ 与 x 是等价无穷小量.

常见的等价无穷小量：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^{\frac{1}{m}}-1\sim\dfrac{1}{m}x$.

注　在求某些函数乘积的极限时，可利用等价无穷小量代换.

定理　**（等价无穷小量代换）** 如果在同一变化过程中，$\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 都是无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，则

梦飞翔考研工作室 QQ：81321659

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \lim\left[\frac{\alpha}{\beta} f(x)\right] = \lim\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1} f(x)\right], \lim \alpha f(x) = \lim \alpha_1 f(x).$$

简言之，在极限式中，分子或分母中的乘积因子若是无穷小，可用等价无穷小代换.

注 ① 只有乘除运算才可以作等价无穷小代换，加减运算不可以作等价无穷小代换.

② 只有无穷小量才可以作等价无穷小代换. 如，$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$ 是错误的. 因为当 $x \to \infty$ 时，$\sin x$ 和 x 根本就不是无穷小量. 正确解法如下：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0.$$

【例 1.40】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 4x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$.

【例 1.41】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+x} + 2\sin x}{\tan x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+x} + 2\sin x}{\tan x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} + 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} + 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = \frac{5}{2}$.

1.3 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

1. 函数在某点连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 Δx，相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

定义 2 设函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

注 ① 定义 1 和定义 2 等价. 定义 1 主要用于证明，定义 2 用于计算.

② 初等函数在其定义域内的区间内连续. 注意不是定义域.

③ 函数若在某点连续，则函数在该点必有定义，反之不成立.

2. 左连续和右连续

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左侧（右侧）邻域内（含点 x_0）有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$），则称函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左连续（或右连续）.

定理 函数在一点 x_0 连续的充要条件是：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

注 该定理常用来判断分段函数在分段点的连续性.

【例 1.42】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-x, 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的连续性.

【解】当 $0\leqslant x<1$ 或 $1<x\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 都是初等函数，是连续的.

又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$；$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$，$f(1)=2$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，即函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的.

故函数在其定义域内处处连续.

【例 1.43】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】去掉绝对值号，函数为：

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin x}{x}, x<0\\ 1, \quad x=0.\\ \dfrac{\sin x}{x}, \quad x>0\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{\sin x}{x}\right)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$f(0)=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，但 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，仅右连续.

【例 1.44】设函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, x<1\\ 3, \quad x=1\\ 2a-bx, \quad x>1\end{cases}$，求 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

【解】$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx)=a+b$，

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2a-bx)=2a-b$.

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，必须有 $f_-(1)=f_+(1)=f(1)=3$，即

$$\begin{cases}a+b=3\\ 2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}.$$

定义 3 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

定义 4 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续（$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$），在 $x=b$ 处左连续（$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$），则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

3. 连续函数的性质

(1) 任意有限多个连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍连续；

(2) 连续函数的反函数仍连续；

(3) 连续函数的复合函数仍连续.

设 $y=f(\varphi(x))$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

推论：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=f(x_0)$. 若没有说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，即极限符号和函数符号不能交换顺序.

【例 1.45】求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}x^{\cos x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2^x$.

【解】(1) $\lim\limits_{x\to\pi}x^{\cos x}=\lim\limits_{x\to\pi}e^{\cos x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\cos x\ln x}=e^{\cos\pi\ln\pi}=e^{-\ln\pi}=\dfrac{1}{\pi}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(2^x)=\sin(\lim\limits_{x\to 0}2^x)=\sin 2^0=\sin 1$.

4. 初等函数的连续性

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的. 初等函数在其定义域内的区间内都是连续的.

如，$y=\arcsin\sqrt{x^2+1}$ 定义域为$\{0\}$，是一个孤立点，不是区间，该函数在定义域内不连续.

5. $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 连续性的关系

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $|f(x)|$ 在$[a,b]$上连续.

注 逆命题不成立，即：

函数 $|f(x)|$ 在$[a,b]$上连续，函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上不一定连续.

如，$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$|f(x)|\equiv 1$ 在 $x=0$ 处连续，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

二、间断点

1. 定义

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处出现如下三种情形之一：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点. 函数不连续的点即为间断点.

2. 间断点的类型

第一类间断点：$x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 其中：

(1) 跳跃型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；

(2) 可去型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$.

第二类间断点：$x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 之中至少有一个不存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点. 其中：

(1) 无穷型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个为 ∞.

(2) 振荡型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 为振荡型，极限不存在.

注 单调有界函数无第二类间断点.

设 $x=x_0$ 为单调增加函数 $f(x)$ 的间断点，在 $(x_0-\delta,x_0)\subset(a,b)$ 内，$f(x)$ 单调增加有上界，因此由极限存在准则可知 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在；同样也可证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在. 所以 $f(x)$ 无第二类间断点.

【例 1.46】求下列函数的间断点，并判断其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$；　　(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$.

【解】(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点为：$\sin x=0$，即 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1,\lim_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}=\infty\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots),$$

所以 $x=0$ 是可去型间断点；$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是无穷型间断点.

(2) 显然，$x\neq0,x\neq-1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}=\begin{cases}-x, & |x|<1\\ x^2, & |x|>1\\ 0, & x=1\end{cases}$.

因为 $f(0-0)=f(0+0)=0$；

$f(1-0)=-1,f(1+0)=1$；

$f(-1-0)=f(-1+0)$，但 $f(-1)$ 不存在.

所以 $x=0,x=-1$ 是可去型间断点；$x=1$ 为跳跃型间断点.

三、闭区间上连续函数的性质

1. 最值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续（常用 $f(x)\in C[a,b]$ 表示），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值 M 和最小值 m.

注 ① 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的端点处不连续，那么它在该区间不一定有最值.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $0<x\leqslant1$ 内都连续，但在此区间它没有最大值.

② 一个不连续函数（即使有界）也不一定有最大值和最小值.

例如，在区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 上，定义 $f(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\ 是无理数\\ \dfrac{1}{2}, & 当\ x\ 是有理数\end{cases}$，这个函数取值在 0 和 1 之间，如果取接近于 0 或 1 的无理数，则函数值也接近于 0 或 1，但是永远不会取 0 和 1. 当 x 是有理数时，函数值为 $\dfrac{1}{2}$，从而 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内无最大值和最小值.

③ 最大值和最小值可能相等，如常函数 $y=c$，$y=\operatorname{sgn}x(x>0)$ 等.

2. 有界性定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界.

注 利用该定理可估计 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的界. 上界为最大值，下界为最小值.

尤其是单调时，$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$（单增），$f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)$（单减）.

【例 1.47】函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上

(A) 有上界无下界　　(B) 有下界无上界

(C) 有界，且 $2\ln\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant0$　　(D) 有界，且 $\ln\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{4}$

【解】函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，则 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一定有界.

因为 $\ln\dfrac{1}{2}\leqslant\ln x\leqslant 0,x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，且 $1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 2$，于是有

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\ln x\leqslant 0,$$

又
$$1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2\Rightarrow 2\ln\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}<0\right).$$

所以 $2\ln\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\ln x=f(x)\leqslant 0$，故选(C).

注 用函数的单调增减性计算会更简便(见第 3 章内容).

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\leqslant f(1)$，即

$$2\ln\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0.$$

3. 介值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$，$a<\xi<b$.

推论：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m、M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，对 $m\leqslant\mu\leqslant M$，则在闭区间 $[a,b]$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$，$a\leqslant\xi\leqslant b$. 即闭区间上连续的函数将取遍介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

【例 1.48】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$c_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，证明：存在一个 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{c_1f(x_1)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$.

【证】 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m.

于是

$m\leqslant f(x_1)\leqslant M$，$c_1>0$，$\Rightarrow c_1m\leqslant c_1f(x_1)\leqslant c_1M$；

$m\leqslant f(x_2)\leqslant M$，$c_2>0$，$\Rightarrow c_2m\leqslant c_2f(x_2)\leqslant c_2M$；

…

$m\leqslant f(x_n)\leqslant M$，$c_n>0$，$\Rightarrow c_nm\leqslant c_nf(x_n)\leqslant c_nM$；

$\Rightarrow(c_1+c_2+\cdots+c_n)m\leqslant c_1f(x_1)+\cdots+c_nf(x_n)\leqslant(c_1+c_2+\cdots+c_n)M$

$$\Rightarrow m\leqslant\frac{c_1f(x_1)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\leqslant M.$$

则由介值定理可得，至少存在一个 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

4. 零点定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

或这样描述：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 严格异号，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根.

【例 1.49】 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

【分析】 已知 $f(a)-g(a)<0$，$f(b)-g(b)>0$，要证 $f(\xi)-g(\xi)=0$，就要作辅助函数

$$F(x)=f(x)-g(x).$$

【证】 作辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，由已知有 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)<0$，$F(b)>0$，则由零点定理得在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.

【例 1.50】 证明方程 $2^x x=1$ 至少有一个正根.

【证】 设 $f(x)=2^x x-1$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，则由零点定理可知：在 $(0,1)$ 内至少存在一个 ξ，使 $f(\xi)=0$，故方程 $2^x x=1$ 至少有一个正根.

习　题　一

一、单项选择题

1. 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$，$\varphi(x)=\ln x-1$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为

A. $(0,1]$.　　B. $[0,1)$.　　C. $(e,e^2]$.　　D. $[e,e^2)$.　　【　】

2. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中与 x 不等价的是

A. $x-10x^2$.　　B. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.　　C. e^x-2x^2-1.　　D. $\sin(2\sin x+x^2)$.　　【　】

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+1})=1$，则 a,b 的值分别为

A. $a=1,b=2$.　　B. $a=2,b=1$.

C. $a=2$，b 任意.　　D. $a=1$，b 任意.　　【　】

4. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$g(x)$ 有间断点，则下列函数中必然有间断点的是

A. $f(g(x))$.　　B. $g(f(x))$.　　C. $f(x)g(x)$.　　D. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.　　【　】

5. 若 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=A$，则对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式________时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

A. $0<|x-x_0|<\delta$.　　B. $0<|x-2|<\delta$.

C. $0<x-2<\delta$.　　D. $0<2-x<\delta$.　　【　】

6. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{1-x}$ 是

A. 单调增加的无界函数.　　B. 单调减少的无界函数.

C. 单调增加的有界函数.　　D. 单调减少的有界函数.　　【　】

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n$ 是

A. 一定存在的. B. 等于 a 的.

C. 不一定存在的. D. 一定不存在的. 【 】

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2a]$，则 $f(x+a)$ 的定义域为 ______.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f(f(x))=$ ______.

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$，则 $c=$ ______.

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ______.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{(x^2+x)\tan\dfrac{x}{2}}=$ ______.

6. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{kn}=e$，则 $k=$ ______.

7. 已知当 $x\to -1$ 时，x^2+ax+5 与 $x+1$ 是同阶无穷小量，则 $a=$ ______.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+bx+2}{1-x}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ______.

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x+\cos x-1}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq 0)$.

3. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的间断点.

4. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\{a_n\}$ 存在并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2}, & x>2\end{cases}$ 的连续性.

四、证明题

1. 试证明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$，其中 $a>0$，$b>0$.

2. 证明方程 $x^3-3x-2=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一实根.

参考答案

一、1. D 2. D 3. C 4. D 5. D 6. B 7. C

二、1. $[-a,a]$ 2. 1 3. ln 2 4. 2 5. 0 6. $-\frac{1}{2}$ 7. 6 8. 1，-3 9. 1

三、1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x+\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x+\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x+\cos x-1}$，

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x+\cos x-1}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\dfrac{a^2}{2}$.（提示：先通分）

3. 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$，显然其间断点为：$x=k\pi(k\neq 0)$.

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1=f(0)$，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

故函数的间断点为 $x=k\pi(k\neq 0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

4. $a_1=2$，对 $n=1,2,\cdots$，有 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}=1$；

并且 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0$，即 $a_{n+1}\leqslant a_n$.

所以数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则在 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ 两边同时取 $n\to\infty$ 时的极限，则

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{l}\right),$$

解之得 $l=1$.

5. 连续区间为 $(-\infty,+\infty)$.

四、1. 提示：令 $F(x)=x-a\sin x-b$，利用零点定理.

2. 提示：利用零点定理.