1. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 级正定矩阵，而

$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}A\boldsymbol{\beta}'$.

1) 证明：在这个定义之下，$\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间；

2) 求单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$ 的度量矩阵；

3) 具体写出这个空间中的柯西－布涅柯夫斯基不等式.

2. 在 $\mathbf{R}^4$ 中，求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$（内积按通常定义）. 设

1）$\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$；

2）$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$；

3）$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,2)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,0)$.

3. $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 通常称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离，证明：$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

4. 在 $\mathbf{R}^4$ 中求一单位向量与 $(1,1,-1,1)$，$(1,-1,-1,1)$，$(2,1,1,3)$ 正交.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，证明：

1）如果 $\boldsymbol{\gamma}\in V$ 使 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0, i=1,2,\cdots,n$，那么 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$；

2）如果 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\in V$ 使对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 有 $(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$，那么 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$.

6. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是三维欧氏空间中一组标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3),\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3),\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$$

也是一组标准正交基.

7. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5$ 是五维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$，求 V_1 的一组标准正交基.

8. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间(作为 $\mathbf{R}^5$ 的子空间)的一组标准正交基.

9. 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 中定义内积为 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. 求 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组标准正交基(由基 $1, x, x^2, x^3$ 出发作正交化).

10. 设 V 是一 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 是 V 中一固定向量.

1）证明：$V_1=\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=0,\boldsymbol{x}\in V\}$ 是 V 的一子空间；

2）证明：V_1 的维数等于 $n-1$.