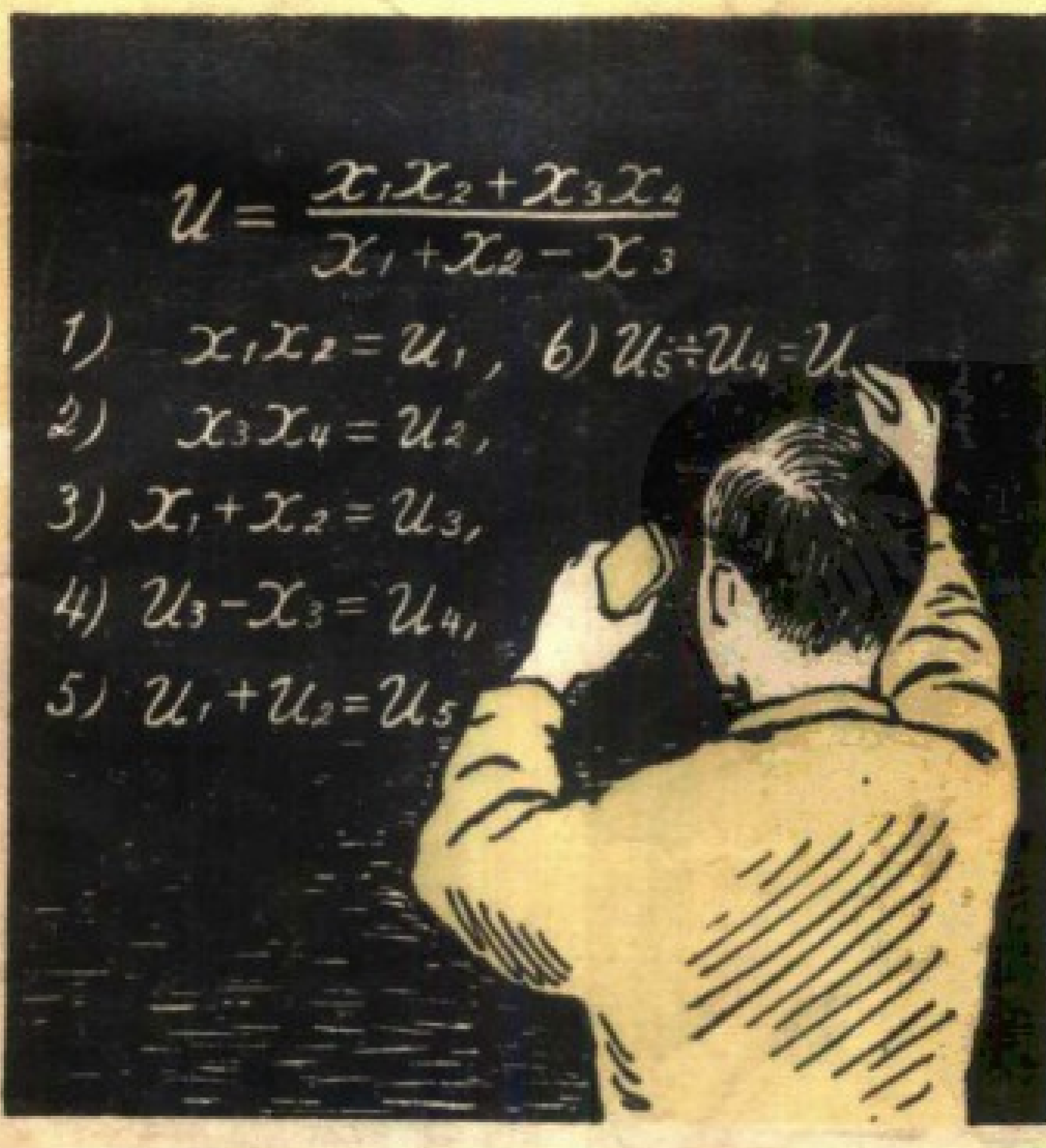
蘇聯青年科學叢書

數學歸納法

索明斯基著



中国青年出版社

序

這本小册子裏所要講的數學歸納法在各門數學中都廣泛的應用到；從最基本的學校裏的課程起，一直到最後幾年所鑽研的科目裏都用到它．因此就很清楚，沒有掌握這種方法，學校裏的數學課程便不可能學習得好．不僅如此，數學歸納的思想方法具有相當大的一般教育意義，因此即使對數學和數學應用沒有什麼關係的人，對這種方法加以認識也是一件有益的事．

數學歸納法的基本內容以及最簡單的例題是包含在第一章以及第二章第一節裏，要懂得這一部份，只要具備七年制學校的程度就够了．至於了解其餘部份，對於一個具有中學程度*的讀者來說，也完全不成問題．

這本小册子的對象是中學高年級的學生，師範學院、大學及技術專科學校的初年級學生．除此以外，本書也可用來作中學裏數學討論會的資料．

以下的幾篇文章是討論關於數學歸納法的：

謝平斯基(Серпинский С. В.)，論數學歸納法，載‘數學及物理教學法’1936年第3期．

別西考維奇(Безикович Я. С.)，數學歸納法，載‘數學教學

---

*蘇聯的七年制學校相當於我國的初級中學，這裏所說的中學程度，相當於我國的高級中學程度——譯者註

法'1946年第1期.

索明斯基(Соминский И. С.),論中學裏數學歸納法的學習,載'數學教學法,方法論文集'第2卷,列寧格拉省教師進修學院,1947年出版.

納基賓(Нагибин Ф. Ф.),中學課程裏的數學歸納法,載'數學教學法'1949年第4期.

關於數學歸納法的練習題,讀者可在下列的書裏找到:克雷契馬爾(Кречмар В. А.),代數習題,第二版,國家技術理論書籍出版局,1950.

И. С. 索明斯基 一九五〇,八,二五

第二版序

在第二版裏補充了一個例題（例題8），並且加了例題10的另一個解答。

除了略作文字上的修改以及把少數誤植更正了以外，其他部份可以說是沒有更動。

И.С.索明斯基 一九五一，一〇，二五

內 容 提 要

在許多數學部門裏，都用到了數學歸納法。若不能掌握這種方法，就不能認眞學好數學課程。本書先介紹了數學歸納法的基本意義，然後列舉各種各樣的例題來說明在不同的場合下，數學歸納法是怎樣被使用着的。本書主要爲中學高級班的同學寫的，但對於較高程度的學生也很有用處，最適宜於作爲學校中數學討論會的參考資料。

И. С. СОМИНСКИЙ
МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ
ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1952

目　次

前　　言

命題可以分爲一般的和特殊的．我們舉幾個一般命題的例子如下：

任何一個蘇聯公民都有受教育的權利．

在**任何**一個平行四邊形中，對角線的交點必定平分對角線．

任何一個個位爲零的數必定可被 5 除盡．

下面是幾個和上述的一般命題相對應的特殊命題：

彼特羅夫有受教育的權利．

在平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線的交點平分對角線．

140 可被 5 除盡．

由一般命題過渡到特殊命題，稱爲**演繹**．例如：

1．任何一個蘇聯公民都有受教育的權利．

2．彼特羅夫是蘇聯公民．

3．彼特羅夫有受教育的權利．

由一般命題 1，借助於命題 2，而得到特殊命題 3．

由特殊命題過渡到一般命題稱爲**歸納**．歸納可以引到正確的結論，也可以引到不正確的結論．舉兩個例子來闡明這一點．

1．140 可被 5 除盡．

2．任何一個個位爲零的數必定可被 5 除盡．

由特殊命題1得到一般命題2. 這裏命題2是正確的.

1. 140可被5除盡.

2. 任何一個三位數必定可被5除盡.

由特殊命題1得到一般命題2. 這裏命題2是不正確的.

於是就發生了這樣的問題,如何在數學中用歸納法,使得所得到的結論全是正確的呢?這本小書就要回答這一個問題.

一 數學歸納法

1. 首先我們研究兩個數學裏所不允許的歸納的例子.

〔例1〕 令

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

我們容易證明:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}=\frac{3}{4},$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}=\frac{4}{5}.$$

根據所得的這些結果就斷言,對於任何自然數 n

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

〔例2〕 我們研究三項式 x^2+x+41; 這個例是著名數學家,彼得堡科學院最早的院士之一 Л. 歐拉所指出的. 在這個三項式裏以零代 x, 得到一個質數41. 現在,再對於同一個

三項式以1代x,又得一個質數43. 在這個三項式裏,繼續以2,3,4,5,6,7,8,9,10代x,每次都得到一個質數,分別爲47,53,61,71,83,97,113,131,及151. 根據所得的這些結果斷言,以任何一個正整數代替這個三項式裏的x,必定得到一個質數.

爲什麼在以上兩個例子中所作的推論是數學裏所不允許的呢? 我們所作的推論,不正確的地方究竟在哪裏呢?

問題在這裏,就是在以上的推論中,我們只根據了這些命題對於某些數值的n(在例2中的x)是眞確的,就推出關於任意數值的n(或x)的一般命題.

歸納在數學裏是被廣泛的應用着的,不過用時必須小心. 粗心地對待歸納會招致不正確的結論.

如果說,我們在例1中所作的一般命題幸而是對了,這點將要在例5中證明,那麼我們在例2中的一般命題卻是錯的.

實際上,更深入地考察三項式 x^2+x+41 就會發現,當$x=0,1,2,\cdots\cdots,39$時,所得的全是質數,可是當$x=40$時,三項式的數值爲41^2,就是一個合數.

2. 在例2中我們已遇到這樣一個命題,對四十個特別的情形都眞確,可是對一般的情形是不眞確的.

再舉兩個例說明有些命題在某些特別情形是眞確的,可是一般並不眞確.

〔例3〕 二項式x^n-1,這裏n是一個自然數,是很使數學家們感興趣的. 舉出這一點就足以說明了,就是這個二項式和幾何裏的把圓周n等分的問題有密切關係. 因此,這個二項式在數學裏曾經被深入地鑽研過,也就沒有什麼可以奇怪

的了．數學家們對於把這個二項式分解爲具有整數係數的因子的問題，特別有興趣．

考慮了對於 n 的許多特殊數值的分解以後，數學家們觀察到，在所有分解出來的因子中，各個係數的絕對值都不超過一．事實上，

$$x-1=x-1,$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

……………………………………………………

人們並且造出表來，在表的限度以內，各係數都具有上述的性質．企圖證明這個事實對 n 的任何數值都成立的種種嘗試，都沒有成功．

1938 年，在雜誌‘數學科學的成就’(第 4 卷)上，發表了著名蘇聯數學家，蘇聯科學院通訊院士 Н. Г. 契波塔列夫的一篇短文，在其中他建議我們的數學家來搞清楚這個問題．

這個問題爲 В. 伊凡諾夫所解決* 證明了，當 n 小於 105 時，二項式 x^n-1 具有上述的性質．不過 $x^{105}-1$ 的因子當中有一個是下面的多項式：

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}$$
$$+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}$$

*‘數學科學的成就’，第 4 卷，313—317 頁，1941.

$$+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1,$$

已經不再具有上述的性質.

〔例 4〕 設有 n 個平面，經過同一個點，並且其中沒有三個平面經過同一直線. 這 n 個平面把空間分成多少部份?

先看這個問題最簡單的幾個情形. 一個平面把空間分成 2 部份. 經過一點的兩個平面把空間分成 4 部份. 經過一點而不經過同一直線的三個平面把空間分成 8 部份.

初看起來好像當平面的數目增加一個的時候，空間被分成的部份數是原來的 2 倍，於是就得到，四個平面分空間成 16 部份，五個平面分空間成 32 部份，等等. 一般地說，n 個平面會把空間分成 2^n 部份.

但是事實上並不是這樣，而是四個平面分空間成 14 部份，五個平面分空間成 22 部份. 一般地說，n 個平面分空間成 $n(n-1)+2$ 部份*.

由以上的例使我們有可能作出一個簡單同時又是極重要的結論.

命題可以對於一系列很多的特別情形是真確的，但是一般並不真確.

3. 現在就產生了這樣的問題. 有些命題在某些特殊情形是真確的. 但是不可能把所有的特殊情形都考慮到. 如何去斷定在一般情況之下這命題是否真確呢?

這個問題有時可借助於一種特別的推理方法來得到完滿的解決，就是借助於所謂數學歸納法（完全歸納法）.

* 解答見後第 24 頁（例題 11）.

這個方法是根據數學歸納的原理，內容如下：

假若：(1) 命題當 $n=1$ 時是眞確的，並且 (2) 由命題當 n 等於任一自然數 k 時是眞確着推出它對於 n 等於 $k+1$ 時也是眞確的，那麼這命題對於所有的自然數 n 都是眞確的。

證明：如果不是這樣的話，就是說這命題並非對於所有的自然數 n 都是眞確的，那麼必然存在一個自然數 m，適合下面兩個條件：(1) 命題當 $n=m$ 時並不眞確，(2) 對於所有小於 m 的自然數 n，命題都是眞確的（換句話說，m 是第一個使命題不眞確的自然數）。

顯然 $m>1$，因為 $n=1$ 時命題是眞確的（條件 1）。因此，$m-1$ 也是自然數。這樣就得出，對於自然數 $m-1$ 命題是眞確的，而對於緊接着的自然數 m 命題不眞確。這和條件 2 矛盾。

注意： 在證明數學歸納的原理時，我們用到了這樣一點，就是任意一組自然數當中必定包含一個最小數。反過來也容易看出，這個性質也可以由數學歸納的原理推引出來。因此，這兩個命題是等價的。其中任意一個可以採取作為規定自然數的意義的公理，其他一個就成了一條定理。通常，數學歸納的原理是被採作公理的。

4. 根據數學歸納原理的證明，稱為用**數學歸納法的證明**。這種證明必然包含着兩個部份，形成兩個獨立的定理：

〔定理 1〕 命題當 $n=1$ 時是眞確的。

〔定理 2〕 k 是任意一個自然數，若命題當 $n=k$ 時是眞確的，則命題當 $n=k+1$ 時也是眞確的

如果這兩個定理都證明了，則根據數學歸納的原理，命題對所有的自然數 n 都是真確的．

〔例 5〕 求下面的和（見例 1）：

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

我們知道

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{3}{4},\quad S_4=\frac{4}{5}.$$

現在，我們不再重複在例 1 當中所作的錯誤，我們並不一上來就作斷言說，對於所有的自然數 n，

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

我們要謹慎些，在這裏只說，由 S_1，S_2，S_3，S_4 的形式，使我們有可能猜想（假設）$S_n=\dfrac{n}{n+1}$ 對所有的自然數 n 都成立． 我們已經知道這個假設在 $n=1,2,3,4$ 時都是真確的．爲了要驗證這個假設，我們用數學歸納法．

定理 1： 當 $n=1$ 時這假設是真確的，因爲 $S_1=\dfrac{1}{2}$．

定理 2： 假定上面的假設對於 $n=k$ 時是真確的，也就是說

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

這裏 k 是某一個自然數．我們要證明當 $n=k+1$ 時這假設仍然是真確的，也就是說

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

實際上， $S_{k+1}=S_k+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$，

由定理中已設的條件，就得到

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

兩個定理都證明了．現在，根據數學歸納的原理我們可以肯定

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

對於所有的自然數 n 都成立．

注意 1： 必須着重指出，用數學歸納法的證明，無條件地要求上面的兩條定理 1 和 2 都加證明．

我們已經看到，忽視了定理 2 部份會引到怎樣的結果（例 2）．現在我們來指明，忽略了定理 1，也是不行的．看下面的例．

〔例 6〕．**定理：任何一個自然數等於緊隨在它後面的那個自然數．**

用數學歸納法來證明．假設

$$k=k+1, \tag{i}$$

要證明

$$k+1=k+2. \tag{ii}$$

實際上，在等式（i）的等號兩邊各加上1就得到等式（ii）．由此可知，若命題當 $n=k$ 時是眞確的，則當 $n=k+1$ 時也眞確．定理就證明了．

系： 所有的自然數都相等．

錯誤究竟發生在哪裏呢？錯誤就發生在，用數學歸納法證明所不可缺少的定理 1，這裏並未證明，而只是證明了一個

定理 2，其實定理 1 在這裏是不眞確的．

定理 1 和 2 各有其特別的意義．定理 1 構成所謂歸納的**基礎**．定理 2 給這個基礎以正確的無限度的**自動推演**，從已知的情形**正確地推演**到下一個情形，從 n 到 $n+1$．

如果沒有證明定理 1 而證了定理 2（見例 6），因而缺乏歸納的基礎，那麼定理 2 的應用便是無意義的，因爲要推演的東西根本就沒有．

如果沒有證明定理 2 而只證了定理 1（見例 1 及 2），那麼雖然有了歸納的基礎，可是正確地推演這個基礎仍然是不可能的．

注意 2：上面所說的是數學歸納法最簡單的情形．在比較複雜的情形，定理 1 和定理 2 的形式可能有相當的改變．

有時候，在證明的第二部份中不僅說當 $n=k$ 時命題是眞確的，而是說命題當 $n=k$ 及 $n=k+1$ 時是眞確的，則當 $n=k+2$ 時也眞確．這時，在第一部份證明中就必須對兩個接續的自然數 n 來驗證命題的眞確性（見第 17 頁的例題 5）．

有時候，所要證的命題不僅僅是關於所有的自然數，而是關於所有大於某一個整數 m 的整數而說的．在這種情形之下，證明的第一部份就是要來驗證 $n=m+1$ 時命題的眞確性，並且，遇有必要時，還要對於緊接着 n 的一些整數來作這個工作（見第 20 頁的例題 8）．

5．在結束本章時，我們再一次回到例 1 來闡明數學歸納法的一個要點．

對於各個不同的 n，研究下面的和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)},$$

我們得到

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{3}{4},\quad S_4=\frac{4}{5},\cdots\cdots,$$

這些結果導引我們來猜想，對於任意數値的 n

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

要證明這個猜想，我們用了數學歸納法.

我們是被引到了一個我們所說的猜想，這個猜想後來是證實了的. 如果當初我們所作的猜想是不合適的，那麼這個猜想的謬誤會在定理 2 的證明中發現出來.

〔例 7〕 我們知道

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \tag{i}$$

假若，在研究 S_n 時作下面的猜想:

$$S_n=\frac{n+1}{3n+1}. \tag{ii}$$

當 $n=1$ 時公式(ii)是眞確的，因爲 $S_1=\frac{1}{2}$. 假定公式(ii)當 $n=k$ 時是眞確的，就是說

$$S_k=\frac{k+1}{3k+1}.$$

我們試來證明，公式(ii)對於 $n=k+1$ 也眞確，就是說

$$S_{k+1}=\frac{k+2}{3k+4}.$$

我們實際算一下，便有

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^3+4k^2+8k+3}{(k+1)(k+2)(3k+1)},$$

就是所得到的結果和原來所預料的不同.

因此,從公式(ii)對於$n=k$時的眞確性推不出公式(ii)對於$n=k+1$時的眞確性. 我們這就發現公式(ii)是不眞確的.

這樣,在尋找一般性的法則時,數學歸納法使我們能够來試驗事先對這法則所作的種種猜想,拋開錯誤的,肯定正確的.

二　例題及習題

爲了要學會運用數學歸納法,必須研究足够多的問題.

在這一章裏列舉了52個問題,其中22個例題作了詳細的解答,另外30個習題留給讀者自己去試解,它們的解答附在本書最後.

1. 〔例題1〕 所有的奇數依照遞增的次序可以寫成1,3,5,7,…….記第一個爲u_1,第二個爲u_2,第三個爲u_3,等等,也就是說

$$u_1=1,\quad u_2=3,\quad u_3=5,\quad u_4=7,\cdots\cdots$$

我們現在提出這樣一個問題. 造一個公式把奇數u_n用它的序數n表示出來.

〔解〕 第一個奇數u_1可以寫成:

$$u_1=2\cdot1-1;\qquad\text{(i)}$$

第二個奇數u_2可以寫成:

$$u_2=2\cdot 2-1; \qquad \text{(ii)}$$

第三個奇數 u_3 可以寫成:

$$u_3=2\cdot 3-1. \qquad \text{(iii)}$$

把等式(i),(ii),(iii)仔細一看,就可以作這樣的猜想,要得出任意一個奇數只消把它的序數兩倍減去 1,也就是說,第 n 個奇數可以用下面的公式表示:

$$u_n=2n-1. \qquad \text{(iv)}$$

現在來證明這個公式是真確的.

定理 1: 等式(i)說明,當 $n=1$ 時公式(iv)是真確的.

定理 2: 假定公式(iv)當 $n=k$ 時是真確的,就是說,第 k 個奇數具有形式

$$u_k=2k-1.$$

證明公式(iv)對於第 $k+1$ 個奇數仍然是真確的,就是說,第 $k+1$ 個奇數具有形式

$$u_{k+1}=2(k+1)-1,$$

或寫成

$$u_{k+1}=2k+1.$$

要得到第 $k+1$ 個奇數,只消把第 k 個奇數加 2,就是說,$u_{k+1}=u_k+2$. 由條件 $u_k=2k-1$,可知

$$u_{k+1}=(2k-1)+2=2k+1,$$

這就是所要證的.

答: $u_n=2n-1$.

〔例題 2〕 求最初 n 個奇數之和.

〔解〕 所要求的和記爲 S_n,就是說

$$S_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1).$$

關於解這類問題，數學中已有很多現成的公式．我們解這個問題的興趣並不在借助於現成的公式，而是要運用數學歸納法．爲了這個目的，首先必須作一個猜想，就是，嘗試去猜一下答案．

先依次地把所要求的和就 n 爲 $1,2,3,\cdots\cdots$ 求出來，一直做到我們已掌握足够的材料，能够作出一個或多或少比較可靠的猜想來．剩下的事就是用數學歸納法來驗證這個猜想．

我們有

$$S_1=1,\quad S_2=4,\quad S_3=9,\quad S_4=16,\quad S_5=25,\quad S_6=36.$$

現在，能否準確地解決這個問題就完全依賴於從一些特殊結果來猜出一般結果的能力．

從上面算出的一些情形，很容易注意到

$$S_1=1^2,\quad S_2=2^2,\quad S_3=3^2,\quad S_4=4^2.$$

以這個爲基礎，就可以猜想一般的情形是

$$S_n=n^2.$$

我們來證明這個猜想是眞確的．

定理 1: 對於 $n=1$，所求的和僅包含一項，等於 1．而 n^2 當 $n=1$ 時也就是 1．因此知道 $n=1$ 時這猜想是眞確的．

定理 2: 若這猜想對於 $n=k$ 是眞確的，就是說 $S_k=k^2$．證明這猜想在 $n=k+1$ 時也是眞確的，就是說

$$S_{k+1}=(k+1)^2.$$

事實上，

$$S_{k+1}=S_k+(2k+1).$$

但是 $S_k=k^2$,所以

$$S_{k+1}=k^2+(2k+1)=(k+1)^2,$$

這就是所要證的.

答: $S_n=n^2$.

〔習題 1〕 已知 $u_1=1$,並且對所有的自然數 $k>1$

$$u_k=u_{k-1}+3.$$

求 u_n.

提示: $u_1=3\cdot1-2$, $u_2=3\cdot2-2$.

〔習題 2〕 求下面的和

$$S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}.$$

提示: (1)$S_1=2-1$; $S_2=2^2-1$; $S_3=2^3-1$ 或 (2) 考慮 $2S_n-S_n$.

〔例題 3〕 證明最初 n 個自然數之和等於$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

〔解〕 這個問題和先前的不同,是在用不着事先去猜想,因爲結果已經告訴你了. 只要證明所給的結果是眞確的就行了.

記所要求的和爲 S_n,就是說

$$S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n.$$

定理 1: $n=1$ 時,所給的結果是眞確的.

定理 2: 令

$$S_k=1+2+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

求證
$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

事實上，

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

問題就解決了.

〔習題 3〕 證明最初 n 個自然數的平方的和等於

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

〔例題 4〕 證明

$$S_n=1-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n^2$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

〔解〕 **定理 1:** $n=1$時，結果顯然是眞確的〔$(-1)^0=1$〕.

定理 2: 令

$$S_k=1-2^2+3^2-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

求證

$$S_{k+1}=1-2^2+3^2-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2$$
$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

事實上，

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2$$
$$=(-1)^k\left[(k+1)-\frac{k}{2}\right](k+1)=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

〔習題 4〕 證明

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

〔習題 5〕 證明最初 n 個自然數的立方的和等於

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

〔習題 6〕 證明

$$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\quad(x\neq1).$$

〔習題 7〕 證明

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

〔習題 8〕 證明

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

〔習題 9〕 證明

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

〔習題 10〕 證明

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

〔習題 11〕 證明

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

〔習題 12〕 證明

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

〔習題 13〕 證明

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$$
$$=\frac{n}{a(a+n)}.$$

〔例題 5〕 若 $v_0=2$, $v_1=3$, 並且對於任意一個自然數 k 設

$$v_{k+1}=3v_k-2v_{k-1},$$

證明 $v_n=2^n+1$.

〔解〕 由題目所給的假設知道當 $n=0$ 及 $n=1$ 時命題是眞確的. 設

$$v_{k-1}=2^{k-1}+1;\quad v_k=2^k+1.$$

則

$$v_{k+1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1.$$

〔習題 14〕 若

$$u_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\qquad u_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}\qquad(\alpha\neq\beta),$$

並且對於任意一個自然數 $k>2$, 設

$$u_k=(\alpha+\beta)u_{k-1}-\alpha\beta u_{k-2},$$

證明

$$u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

〔例題 6〕 乘積 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$ 通常記爲 $n!$, 讀作 n 的'階乘'. 我們最好記住 $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$.

求下面的和:

$$S_n=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots\cdots+n\cdot n!.$$

〔解〕

$$S_1=1\cdot1!=1,$$

$$S_2=1\cdot1!+2\cdot2!=5,$$

$$S_3=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!=23,$$

$$S_4=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!=119.$$

把這些結果仔細一看，就可以注意到

$$S_1=2!-1,\quad S_2=3!-1,\quad S_3=4!-1,\quad S_4=5!-1.$$

這就使我們有可能來猜想

$$S_n=(n+1)!-1.$$

現在來證實這個猜想.

定理1: $n=1$ 時這個猜想是眞確的，因爲

$$S_1=1\cdot 1!=2!-1.$$

定理2: 令

$$S_k=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1,$$

來證明

$$S_{k+1}=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!$$
$$=(k+2)!-1.$$

事實上，

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)\cdot(k+1)!=[(k+1)!-1]+(k+1)\cdot(k+1)!$$
$$=(k+1)![1+(k+1)]-1=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1.$$

〔習題 15〕 證明下面的恆等式

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

〔例題 7〕 已知

$$\alpha+\beta=m,\quad \alpha\beta=a,\quad A_2=m-\frac{a}{m-1},$$

$$A_2=m-\frac{a}{m-\frac{a}{m-1}},\quad A_3=m-\frac{a}{m-\frac{a}{m-\frac{a}{m-1}}},$$等等,

就是,對於自然數 $k>1$

$$A_{k+1}=m-\frac{a}{A_k}\qquad (m\neq 1;\ \alpha\neq\beta).$$

證明

$$A_n=\frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}. \tag{i}$$

〔解〕 **定理 1:** 先證明公式(i)當 $n=2$ 時是眞確的. 由假設

$$A_2=m-\frac{a}{m-1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}.$$

由公式(i)

$$A_2=\frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)}.$$

將這個分式上下消去 $\alpha-\beta$ 就得到

$$A_2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1},$$

這正是所要證的.

定理 2: 設公式(i)當 $n=k$ 時是眞確的,就是說

$$A_k=\frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}. \tag{ii}$$

我們證明,當 $n=k+1$ 時它也成立,就是說

$$A_{k+1}=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

事實上，　$A_{k+1}=m-\dfrac{a}{A_k}$　或　$A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\dfrac{\alpha\beta}{A_k}$.

利用公式(ii)，我們得到

$$A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta[(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$

$$=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

定理就證明了.

〔習題 16〕 簡化下面的多項式:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

答: $(-1)^n\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)}{n!}$.

〔例題 8〕 試證明，多於 7 個盧布的任意一筆整數個數盧布的款項，都可以用 3 盧布及 5 盧布的鈔票來付而用不着換錢.

〔解〕 當款項是 8 盧布時，命題是眞確的.

設命題對 k 盧布時是眞確的，其中 k 是一個大於或等於8的整數.

有兩種可能的情形發生: (1) k 個盧布的款可以完全用 3 盧布的鈔票來付以及(2)以鈔票來付這 k 盧布的款，至少要用到一張 5 盧布的鈔票.

在第一種情形之下 3 盧布的鈔票至少有三張，因爲 $k>8$. 要付 $k+1$ 個盧布的款，只要把原來的三張 3 盧布的鈔票換以兩張 5 盧布的鈔票就可以了.

在第二種情形，要付 $k+1$ 個盧布的款，只要把原來的某

一張5盧布鈔票換以兩張3盧布的鈔票就可以了.

〔例題9〕　證明連接的三個自然數的立方的和，必定可被9除盡.

〔解〕　$1^3+2^3+3^3$ 的和，可以被9除盡. 因此知道，當三個連接的自然數起首的一個爲1時，這命題是眞確的.

設和數 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 可被9除盡，其中 k 爲某一個自然數. 則和數

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$$
$$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$$

是兩項之和，每一項都可被9除盡. 因此整個都可以被9除盡.

〔習題17〕　試證明，對於整數 $n\geqslant0$,

$$A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$$

可被133除盡.

〔例題10〕　從 $2n$ 個數：1, 2, ……, $2n$，中任意取 $n+1$ 個數出來. 試證明，在這取出來的 $n+1$ 個數中，至少有這樣的兩個數存在，其中一個可以除盡另外的那一個.

〔解〕*　設若從 $2n$ 個數：1, 2, ……, $2n$, $(n\geqslant2)$，中可以取出這樣一組 $n+1$ 個數，其中任意一個都除不盡另外的任何一個. 這一組數的全體我們記作 M_{n+1}　那麼就可以證明，從 $2n-2$ 個數：1, 2, ……$2n-2$，中可以取出 n 個數來，仍然是其中任意一個都除不盡另外的任何一個.

這有四種可能的情形發生：

* 這個解法是列寧格拉國立 A. И. 蓋爾欽師範學院的學生 M. 弗里德曼告訴作者的.

(1) M_{n+1} 不包含 $2n-1$ 也不包含 $2n$.

(2) M_{n+1} 包含 $2n-1$ 但不包含 $2n$.

(3) M_{n+1} 包含 $2n$ 但不包含 $2n-1$.

(4) M_{n+1} 包含 $2n-1$ 也包含 $2n$.

第一種情形: 由 M_{n+1} 中任意除掉一個數. 剩下 n 個數,其中每一個都不比 $2n-2$ 大. 並且這些數中的任何一個都不能被其餘的任一個除盡.

第二種情形: 由 M_{n+1} 中除掉 $2n-1$ 這個數. 剩下 n 個數,其中每一個都不比 $2n-2$ 大. 這 n 個數中的任何一個都不能被其餘的任一個除盡.

第三種情形: 由 M_{n+1} 中除去 $2n$ 這個數,仍然得到和上面一樣的結果.

第四種情形: 首先注意,M_{n+1} 一定不包含 n 這個數,因爲不然的話,M_{n+1} 中就有這樣兩個數($2n$ 與 n),其中一個可以被另外的一個除盡.

由 M_{n+1} 中除掉 $2n-1$ 和 $2n$ 這兩個數. 剩下的 $n-1$ 個數的全體我們用 M_{n-1} 表示. 再把 n 這個數添到 M_{n-1} 裏去,得到 n 個數,其中任意一個都不大於 $2n-2$. 我們要來指明,這 n 個數當中沒有可以被另外的任意一個除盡.

在 M_{n+1} 中不可能有兩個數,其中的一個可以被另外的一個除盡. 因此知道在 M_{n-1} 中也是如此. 餘下來要證的只是,在 M_{n-1} 中添入了 n 以後,這個性質仍然保留.

要了解這一點,只要注意以下的事實:(1) M_{n-1} 中的任意一個數都不能被 n 除盡,(2) n 不能被 M_{n-1} 中的任意一個數

除盡.

第一點是由於 M_{n-1} 中所包含的數都不大於 $2n-2$.

第二點是由於 $2n$ 這個數不能被 M_{n-1} 中的任何一個數除盡.

因此,如果我們假設命題對於 $2n$ 個數: $1,2,\cdots\cdots,2n$,是不眞確的,則對於 $2(n-1)$ 個數: $1,2,\cdots\cdots,2n-2$,也是不眞確的. 由這裏就知道,如果命題對於 $2(n-1)$ 個數: $1,2,\cdots\cdots,2n-2$,是眞確的,則對於 $2n$ 個數: $1,2,\cdots\cdots,2n$ 也是眞確的.

對於兩個數: 1,2, 命題是眞確的,因此知道,當 n 是任意一個自然數時,命題對於 $2n$ 個數: $1,2,\cdots\cdots,2n$,是眞確的.

注意,這個問題有下面的簡單解法. 由 $2n$ 個數 $1,2,\cdots\cdots,2n$,中任意取出 $n+1$ 個數. 這 $n+1$ 個數的全體記作 M_{n+1}.

M_{n+1} 中的每一個偶數可以寫成一個 2 的冪和一個奇數的乘積. 這些奇數和 M_{n+1} 中原有的奇數合併起來的全體記作 $\bar{M}_{n+1}$. $\bar{M}_{n+1}$ 中一共包含 $n+1$ 個奇數,其中每一個都小於 $2n$.

因爲小於 $2n$ 的正奇數總共只有 n 個,所以在 $\bar{M}_{n+1}$ 中至少有兩個數相同. 這兩個相同的數就以 k 來代表.

從這個結果就知道,在 M_{u+1} 中至少有這樣兩個數: $2^s k$ 與 $2^t k$. 其中的一個可以被另外的一個除盡.

〔習題 18〕 證明,平面上通過同一點的 n 條直線,分平面爲 $2n$ 部份.

〔習題 19〕 平面上 n 條直線把平面分成若干區域. 證明,如果以黑白兩種顏色來塗這些區域,必定有方法使任意兩個相鄰的區域(所謂兩個相鄰的區域就是指它們有公共線段)都塗上不同的顏色.

2. 〔例題 11〕 設有 n 個平面經過同一個點，並且其中沒有三個平面經過同一直線，試證明這 n 個平面把空間分成 $A_n=n(n-1)+2$ 個部份.

〔解〕 (1) 一個平面分空間成 2 部份，卽 $A_1=2$. 故命題對於 $n=1$ 是眞確的.

(2) 設命題對於 $n=k$ 是眞確的，就是說，k 個平面把空間分成 $k(k-1)+2$ 個部份. 我們來證明 $k+1$ 個平面把空間分成 $k(k+1)+2$ 個部份.

事實上，設 P 是第 $k+1$ 個平面. 平面 P 與早先的 k 個平面中每一個平面相截於某一直線，因而平面 P 被經過同一點的 k 條不同的直線分成若干部份. 由習題 18，我們可以推知，平面 P 被分成 $2k$ 個部份，其中每一部份代表一個平面角，角的頂點卽各平面共同經過的點.

早先的 k 個平面把空間分成一些多面角. 這些多面角中有一些被平面 P 分成兩部份.

兩個這樣的部份的公共面，就是由 P 與該多面角的面相截而成的兩條直線所範圍的部份平面，也卽是平面 P 被分成的 $2k$ 個平面角中的一個.

這就說明，被平面 P 分成兩個部份的那種多面角的數目不能多於 $2k$ 個.

另一方面，平面 P 被分成的 $2k$ 個部份中的每一部份，由於它是 P 與早先的 k 個平面相截而成的，所以它是兩個多面角的公共面，因而把由早先 k 個平面作成的多面角分成兩部份.

這就說明，被平面 P 分成兩部份的那種多面角的數目，不能少於 $2k$ 個.

由此可知，平面 P 把由早先 k 個平面所形成的空間中分成兩部份的，恰好有 $2k$ 個部份. 因此，若 k 個平面把空間分成 $k(k-1)+2$ 個部份，則 $k+1$ 個平面把空間分成

$$[k(k-1)+2]+2k=k(k+1)+2$$

個部份. 命題卽已證明.

〔例題 12〕 證明恆等式

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cdots\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

〔解〕 (1) 對於 $n=0$ 這個恆等式是眞確的，因

$$\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}.$$

(2) 設這恆等式對於 $n=k$ 是眞確的，就是說

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cdots\cdots\cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha},$$

要證明它對於 $n=k+1$ 也眞確. 事實上，

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cdots\cdots\cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha$$
$$=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}=\frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

〔例題 13〕 若我們已知 $A_1=\cos\theta$; $A_2=\cos 2\theta$, 並且對於所有的自然數 $k>2$，有這樣關係

$$A_k=2\cos\theta A_{k-1}-A_{k-2},$$

試證明 $A_n=\cos n\theta$.

〔解〕 (1) 命題對於 $n=1$ 和 $n=2$ 顯然眞確.

(2) 分

$$A_{k-2}=\cos(k-2)\theta,\quad A_{k-1}=\cos(k-1)\theta,$$

則 $$A_k=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos(k-2)\theta=\cos k\theta.$$

〔例題 14〕 試證明

$$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}.$$

〔解〕 (1) 命題對於 $n=1$ 顯然眞確.

(2) 令

$$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}.$$

則 $$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin kx+\sin(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+\sin(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{k+1}{2}x,$$

這是因爲

$$2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{k}{2}x.$$

〔習題 20〕　試證明

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

〔習題 21〕　試證明

$$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots\cdots+n\sin nx$$
$$=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

〔習題 22〕　試證明

$$\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+n\cos nx$$
$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

〔習題 23〕　試證明

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x \quad (x\neq m\pi).$$

〔習題 24〕　試證明

$$\operatorname{arc\,cot}3+\operatorname{arc\,cot}5+\cdots\cdots+\operatorname{arc\,cot}(2n+1)$$
$$=\operatorname{arc\,tan}2+\operatorname{arc\,tan}\frac{3}{2}+\cdots\cdots+\operatorname{arc\,tan}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arc\,tan}1.$$

〔例題 15〕　試證明

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

〔解〕　(1)　當 $n=1$ 時這命題是眞確的，因爲

$$1+i=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

(2) 令

$$(1+i)^k=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right).$$

則

$$(1+i)^{k+1}=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)\cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

〔習題 25〕 試證明

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

〔例題 16〕 證明定理:

若 u 是由有限次數的有理運算(就是加、減、乘、除)施於複素數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 得出來的一個數,則將同樣的運算施於共軛複素數 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots\cdots, \bar{x}_n$ 所得的數 $\bar{u}$ 與 u 是共軛的。

〔解〕 我們首先指出,命題對於將這四個運算中的任一個施於兩個複素數的情形是眞確的. 令

$$x_1=a+bi, \quad x_2=c+di.$$

則

$$x_1+x_2=(a+c)+(b+d)i=u;$$

$$\bar{x}_1+\bar{x}_2=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i=\bar{u}.$$

對於減法、乘法和除法,可同樣證明這命題眞確.

現設某一個由複素數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 所成的有理式. 我們已知,這樣的式子的計算可以經過一系列的演算,每一演算

是將這四個運算中的一個施於兩個複素數，每一次這樣的運算結果依次以 $u_1, u_2, \cdots\cdots$ 表之。

例如設

$$u=\frac{x_1x_2+x_3x_4}{x_1+x_2-x_3}.$$

要計算 u，我們只須實施運算：

(1) $x_1x_2=u_1$,　　(4) $u_3-x_3=u_4$,

(2) $x_3x_4=u_2$,　　(5) $u_1+u_2=u_5$,

(3) $x_1+x_2=u_3$,　　(6) $u_5\div u_4=u$.

我們假定，對於所有那種不需要比 k 次更多的'運算'即可計算出來的式子，命題是眞確的. 這裏'運算'一辭是指兩個複素數的相加，或相減，或相乘，或相除. 我們現在指出，對於需要 $k+1$ 次'運算'的式子，命題也一定是眞確的.

事實上，我們把最後的第 $k+1$ 次'運算'施於數 u_i 與 u_j 上，這兩個數自身不需要多於 k 次'運算'就可以算出.

我們把數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 用它們的共軛數來代替，則結果，數 u_i 與 u_j 即爲其共軛數 $\overline{u}_i$ 與 $\overline{u}_j$ 所代替，因而將第 $k+1$ 次'運算'實施於它們所得的數，即 u，也同樣爲它的共軛數 $\overline{u}$ 所代替.

〔習題 26〕　試證明對於任一自然數 n，

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx.$$

〔例題 17〕　試證明對於任何自然數 $n>1$，

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

〔解〕　我們用 S_n 來記不等式的左邊.

(1) $S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$,故對於 $n=2$,不等式是眞確的.

(2) 設對於某一數 k 有 $S_k>\frac{13}{24}$. 我們現在來證明同樣有 $S_{k+1}>\frac{13}{24}$. 我們有

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k},$$

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2},$$

比較 S_k 和 S_{k+1},得

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1},$$

就是

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

對於任何一個自然數 k,上面的不等式右邊都是正的. 故 $S_{k+1}>S_k$. 但 $S_k>\frac{13}{24}$, 這就指出 $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

〔習題 27〕 試找出錯誤.

命題: 對於任何一個自然數 n,不等式

$$2^n>2n+1$$

是眞確的.

證: 設不等式對於 $n=k$ 是眞確的,這裏 k 是任意一個自然數,就是說

$$2^k>2k+1. \quad \text{(i)}$$

我們來證明不等式對於 $n=k+1$ 也是眞確的,就是說

$$2^{k+1}>2(k+1)+1. \tag{ii}$$

事實上，對於任何自然數 k, 2^k 不小於 2. 我們現將不等式(i)的左邊加上 2^k，而在右邊加上 2. 則不等式

$$2^k+2^k>2k+1+2,$$

或

$$2^{k+1}>2(k+1)+1.$$

是眞確的. 命題卽已證明.

〔習題 28〕 對於怎樣的自然數 n，不等式

$$2^n>2n+1$$

是眞確的呢？

〔例題 18〕 對於怎樣的自然數 n，不等式

$$2^n>n^2$$

是眞確的呢？

〔解〕 因 $2^1>1^2$，故不等式對於 $n=1$ 眞確.
因 $2^2=2^2$，故不等式對於 $n=2$ 不眞確.
因 $2^3<3^2$，故不等式對於 $n=3$ 不眞確.
因 $2^4=4^2$，故不等式對於 $n=4$ 不眞確.
因 $2^5>5^2$，故不等式對於 $n=5$ 眞確.
因 $2^6>6^2$，故不等式對於 $n=6$ 眞確.
從上面看出不等式對於 $n=1$ 及 $n>4$ 或許是眞確的. 我們現在來證明這一點.

(1) 對於 $n=5$，不等式是眞確的.

(2) 令

$$2^k>k^2 \tag{i}$$

這裏 k 是某一個大於 4 的自然數.

我們來證明

$$2^{k+1}>(k+1)^2. \qquad \text{(ii)}$$

我們知道,對於 $k>4$, $2^k>2k+1$ (習題 28). 因此,若我們在不等式(i)的左邊加上 2^k,右邊加上 $2k+1$,就可以知道不等式(ii)是眞確的.

答: 當 $n=1$ 及 $n>4$, $2^n>n^2$ 時.

〔例題 19〕 試證明

$$(1+a)^n>1+na,$$

這裏 $a>-1$, $a\neq0$, n 是大於 1 的自然數.

〔解〕 (1) 對於 $n=2$, 因 $a^2>0$, 故不等式是眞確的.

(2) 設不等式對於 $n=k$ 眞確,這裏 k 是某一個自然數,就是說

$$(1+a)^k>1+ka. \qquad \text{(i)}$$

我們來證明這不等式對於 $n=k+1$ 也眞確,就是說

$$(1+a)^{k+1}>1+(k+1)a. \qquad \text{(ii)}$$

事實上,由假設, $1+a>0$, 故不等式

$$(1+a)^{k+1}>(1+ka)(1+a) \qquad \text{(iii)}$$

是眞確的,這可由不等式(i)的兩邊各乘以 $1+a$ 得到. 我們將不等式(iii)改寫成:

$$(1+a)^{k+1}>1+(k+1)a+ka^2.$$

將上面的不等式右邊捨去正項 ka^2, 就可知道不等式(ii)是眞確的.

〔習題 29〕 試證明,對於任一個自然數 $n>1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

〔習題 30〕 試證明，對於任一個自然數 $n>1$，

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

〔例題 20〕 試證明

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n, \tag{i}$$

這裏 $a+b>0$，$a\neq b$，n 是大於 1 的自然數.

〔解〕 (1) 對於 $n=2$，不等式(i)成爲

$$2(a^2+b^2)>(a+b)^2, \tag{ii}$$

因 $a\neq b$，故不等式

$$(a-b)^2>0 \tag{iii}$$

是眞確的. 將不等式(iii)兩邊各加 $(a+b)^2$，則得不等式(ii).

這就證明了對於 $n=2$，不等式(i)是眞確的.

(2) 設不等式(i)對於 $n=k$ 眞確，這裏 k 是某一個自然數，就是說

$$2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k. \tag{iv}$$

我們來證明不等式(i)對於 $n=k+1$ 也一定眞確，就是說

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1}. \tag{v}$$

將不等式(iv)的兩邊各乘以 $a+b$，因爲假設 $a+b>0$，故所得的不等式

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1} \tag{vi}$$

眞確.

爲了要證明不等式(v)眞確，我們只須指出

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b), \qquad \text{(vii)}$$

也就是

$$a^{k+1}+b^{k+1}>a^kb+ab^k. \qquad \text{(viii)}$$

不等式(viii)可以改寫成

$$(a^k-b^k)(a-b)>0. \qquad \text{(ix)}$$

若$a>b$,則$a^k>b^k$,因而不等式(ix)的左邊是兩個正數的積．若$a<b$,則$a^k<b^k$,因而不等式(ix)的左邊是兩個負數的積．在這兩種情形,不等式(ix)都是眞確的．

這就證明了,如不等式(i)對於$n=k$是眞確的,對於$n=k+1$也是眞確的．

〔例題 21〕 試證明,對於任何$x>0$及任何自然數n,下列不等式眞確:

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1. \qquad \text{(i)}$$

〔解〕 (1,a) 對於$n=1$,不等式(i)成爲

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2. \qquad \text{(ii)}$$

不等式(ii)可由簡易不等式

$$(x-1)^2\geqslant 0$$

得出．

(1,б) 對於$n=2$,不等式(i)成爲

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3. \qquad \text{(iii)}$$

不等式(ii)對於任何$x>0$都眞確,也就說明,若用x^2去代替x,它仍是眞確,卽

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2.$$

將上面的不等式兩邊各加上 1，就得出不等式(iii)．

(2) 假設不等式(i)對於 $n=k$ 眞確，這裏 k 是某一個自然數，就是說

$$x^k+x^{k-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1. \qquad \text{(iv)}$$

我們來證明，不等式(i)對於 $n=k+2$ 也眞確，就是說

$$x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3. \qquad \text{(v)}$$

在不等式(ii)中，用 x^{k+2} 代替 x，則得

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2. \qquad \text{(vi)}$$

將不等式(iv)與(vi)邊邊相加，就得不等式(v)．

我們現在總結如下：

在(1,a)部份及(1,б)部份中，我們已證明不等式(i)對於 $n=1$ 及 $n=2$ 是眞確的．

在(2)部份中我們已證明，如不等式(i)對於 $n=k$ 是眞確的，它對於 $n=k+2$ 也眞確．換句話說，(2)部份使我們可以從 $n=k$ 推演到 $n=k+2$．

(1,a)部份與(2)部份的結果使我們可以肯定，不等式(i)對於任何奇數 n 都是眞確的．同理，(1,б)部份與(2)部份的結果使我們可以肯定，不等式(i)對於任何偶數 n 都是眞確的．總而言之，我們可以肯定，不等式(i)對於任何的自然數 n 都是眞確的．

〔例題 22〕 證明定理：

正數的幾何平均數不大於其算術平均數，就是說，若 a_1、a_2，……，a_n 是正數，則

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}. \qquad \text{(i)}$$

〔解〕 (1) 對於 $n=2$，不等式(i)成爲

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}. \qquad \text{(ii)}$$

對於任何正數 a_1 和 a_2，不等式

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$$

是眞確的．由這個不等式就容易得出不等式(ii)．

不等式(ii)具有簡單的幾何意義．在直線 AB 上取線段 a_1 與 a_2，使其互相連接但不相重．用它們的和作直徑畫圓．則 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 是此圓的半徑，而 $\sqrt{a_1 a_2}$ 是它在 a_1 與 a_2 的分點上與直徑相垂直的弦的一半．

(2) 我們假定不等式(i)對於 $n=k$ 是眞確的．

我們來證明它對於 $n=2k$ 也是眞確的．事實上，

$$\begin{aligned}\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_{2k}} &= \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \cdots\cdots a_{2k}}} \\ &\leqslant \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \cdots\cdots a_{2k}}}{2} \\ &\leqslant \frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1}+\cdots\cdots+a_{2k}}{k}}{2} \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+\cdots\cdots+a_{2k}}{2k}.\end{aligned}$$

不等式(i)對於 $n=2$ 已經證明是眞確的，因而我們可以

肯定，它對於$n=4,8,16$，等等，一般對於$n=2^s$也是眞確的，這裏s是自然數.

(3) 爲了要證明不等式(i)對於所有的自然數都眞確，我們現證明如不等式對於$n=k$眞確，它對於$n=k-1$也眞確.

設$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{k-1}$是某些正數. 設$\lambda$是某一個未確定的正數，而

$$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}\lambda}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}+\lambda}{k}.$$

我們這樣地選擇λ，使得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}+\lambda}{k}=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1},$$

就是說，我們取 $\lambda=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}$.

則有

$$\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1})}{k-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}$$

或*

$$\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}.$$

---

* 從不等式

$$\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1})}{k-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1},$$

因爲$a_1,a_2\cdots\cdots$都是正數，兩邊各k次方，可得下列不等式：

$$\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1})}{k-1}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^k,$$

兩邊各用$\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}$除，得

$$a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}$$

兩邊各開$(k-1)$次方，就得到下面一個不等式.——譯者註

現在設 m 是任意一個自然數．若 $m=2^s$，則由(2)部份，不等式對於 $n=2^s$ 是眞確的．若 $m\neq 2^s$，則我們可取 s 使 2^s 大於 m，而由(2)部份與(3)部份，我們可以肯定不等式對於 $n=m$ 是眞確的．

三　應用數學歸納法證明初等代數的一些定理

〔定理 1〕 **多項式的平方，等於它的各項的平方和加上它的所有各項兩兩之積的二倍**，就是說

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$
$$+2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n).\qquad\text{(i)}$$

對於 $n=2$，公式(i)由直接乘出就可以證明．

設公式(i)對於 $n=k-1$ 是眞確的，就是說

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1})^2=a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_{k-1}^2+2S,$$

這裏 S 是 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_{k-1}$ 各數的所有兩兩之積的和．我們來證明

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}+a_k)^2$$
$$=a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_{k-1}^2+a_k^2+2S_1,$$

這裏 S_1 是 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_{k-1},a_k$ 各數的所有兩兩之積的和，就是

$$S_1=S+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1})a_k.$$

事實上，

$$(a_1+\cdots\cdots+a_{k-1}+a_k)^2=[(a_1+\cdots\cdots+a_{k-1})+a_k]^2$$
$$=(a_1+\cdots\cdots+a_{k-1})^2+2(a_1+\cdots\cdots+a_{k-1})a_k+a_k^2$$

$$=a_1^2+\cdots+a_{k-1}^2+2S+2(a_1+\cdots+a_{k-1})a_k+a_k^2$$

$$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2S_1.$$

〔定理 2〕 **算術級數的第 n 項可以用公式**

$$a_n=a_1+d(n-1) \tag{i}$$

算出，這裏 a_1 是首項，d 是級數差（公差）．

公式（i）對於 $n=1$ 是眞確的．

假定公式（i）對於 $n=k$ 是眞確的，就是說

$$a_k=a_1+d(k-1).$$

則

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+d(k-1)+d=a_1+dk,$$

就是，公式（i）對於 $n=k+1$ 也是眞確的．

〔定理 3〕 **幾何級數的第 n 項可以用公式**

$$a_n=a_1q^{n-1} \tag{i}$$

算出，這裏 a_1 是首項，q 是級數比（公比）．

公式（i）對於 $n=1$ 是眞確的．

令

$$a_k=a_1q^{k-1}.$$

則

$$a_{k+1}=a_kq=a_1q^k.$$

〔定理 4〕 **m 個不同物件的排列數目可用公式**

$$P_m^m=m! \tag{i}$$

算出

我們先注意，$P_1^1=1$，因而對於 $m=1$，公式（i）是眞確的．

設 $P_k^k=k!$．我們來證明

$$P_{k+1}^{k+1}=(k+1)!.$$

從 $k+1$ 個物件 $a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k,a_{k+1}$ 中，我們只取出最先的 k 個，從這 k 個，我們作一切可能的排列．由假設，這樣的排列數是 $k!$ 種．

在每一種這樣的排列中，我們把物件 a_{k+1} 相繼地放在第一個物件的前面，第二個物件的前面，……，第 k 個物件的前面，以及第 k 個物件的後面。由此，我們從一種 k 個物件的排列卽得出 $k+1$ 種 $k+1$ 個物件的排列．合起來，我們有

$$k!(k+1)=(k+1)!$$

種 $k+1$ 個物件的排列．

我們還必須說明：

(1) 在這 $(k+1)!$ 種排列中，沒有兩種是一樣的；

(2) 所有 $k+1$ 個物件的排列，我們都已得到．

(1) 假定在這 $(k+1)!$ 種排列中有兩種是一樣的．叫它們做 p_1 與 p_2． 設在排列 p_1 中，物件 a_{k+1} 是佔從左邊數起的第 s 個位置． 則在 p_2 中，物件 a_{k+1} 也是佔從左邊數起的第 s 個位置．

我們從 p_1 與 p_2 中將物件 a_{k+1} 除去． 則得兩種 k 個物件的同樣排列：$\overline{p_1}$ 與 $\overline{p_2}$．

由此可知，為了要得到 p_1 與 p_2，我們在 k 個物件 a_1, a_2, ……，a_k 的同一種排列中已兩次在同一個位置放上物件 a_{k+1}。這與我們做成排列的規則不相合．

(2) 假定有某一種 $k+1$ 個物件的排列 p 我們沒有得到．設在 p 中，物件 a_{k+1} 是佔從左起的第 s 個位置． 從 p 中除去

物件a_{k+1}．則得最先k個物件的一種排列$\bar{p}$．這就說明，要想得到p，我們只須取出排列$\bar{p}$而將物件a_{k+1}放在它的從左起的第s個位置上卽可．

我們不可能不曾取到排列$\bar{p}$，因爲我們曾經取過了最先k個物件的一切排列．我們不可能不曾將物件a_{k+1}放在所說的位置上，因爲我們已經把它放在從左起的第一個，第二個，……，和第$k+1$個位置上．

因此，我們所做出的排列是全不相同的，並且$k+1$個物件的一切排列我們都已得到．

由上所說的，就得到

$$P_{k+1}^{k+1}=(k+1)!$$

〔定理5〕 **由m個物件取n個的排列數目可用公式**

$$\boldsymbol{P_n^m=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)} \qquad \text{(i)}$$

算出．

我們首先注意$P_1^m=m$，故公式(i)對於$n=1$是眞確的．假定

$$P_k^m=m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1),$$

這裏$k<m$．我們來證明

$$P_{k+1}^m=m(m-1)\cdots\cdots(m-k).$$

要想得到從m個物件中取$k+1$個的一切排列，我們只須把從m個物件中取k個的一切排列取出，然後在其中各種排列的後面附上剩下的$m-k$個物件中的一個．不難看出，這樣做成的從m個物件中取$k+1$個的排列全不相同，而且，**從m個物件中取$k+1$個做成的一切排列都包含在我們所得的排**

列中．

由此就得到

$$P_{k+1}^m = P_k^m(m-k) = m(m-1)\cdots(m-k).$$

〔定理 6〕 **從 m 個物件中取 n 個所做成的組合的數目可用公式**

$$C_n^m = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}. \qquad \text{(i)}$$

算出．

我們首先注意 $C_1^m = m$，故公式（i）對於 $n=1$ 是眞確的．設

$$C_k^m = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots k}.$$

我們來證明

$$C_{k+1}^m = \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdots\cdots k(k+1)}.$$

爲了要得到從 m 個物件中取 $k+1$ 個所作的一切組合，我們將從 m 個物件中取 k 個的一切組合寫出，然後對其中每一種組合加上剩下的 $m-k$ 個物件中的一個作爲第 $k+1$ 個物件．

顯而易見，用這樣的方法會得到從 m 個物件中取 $k+1$ 個的一切組合，但是其中每一種組合卻出現 $k+1$ 次．

事實上，像 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k, a_{k+1}$ 這樣的一種組合，當在組合 $a_2, a_3, \cdots\cdots, a_k, a_{k+1}$ 中加上 a_1 時出現，在組合 $a_1, a_3, \cdots\cdots, a_k, a_{k+1}$ 中加上 a_2 時也出現，等等，最後，在組合 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ 中加上 a_{k+1} 時也出現．因此

$$C^m_{k+1}=C^m_k\frac{m-k}{k+1}=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k)}{1\cdot 2\cdots\cdots k(k+1)}.$$

〔定理 7〕 **對於任何數 a 與 b 以及任何自然數 n，我們有公式**

$$(a+b)^n=a^n+C^n_1a^{n-1}b+\cdots\cdots+C^n_sa^{n-s}b^s+\cdots\cdots +C^n_{n-1}ab^{n-1}+b^n \qquad (\text{i})$$

（牛頓二項式定理）.

對於 $n=1$，我們有 $a+b=a+b$，故對於這種情形公式(i)是真確的. 設

$$(a+b)^k=a^k+C^k_1a^{k-1}b+C^k_2a^{k-2}b^2+\cdots\cdots+b^k.$$

則

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)^k(a+b)\\&=(a^k+C^k_1a^{k-1}b+\cdots\cdots+b^k)(a+b)\\&=a^{k+1}+(1+C^k_1)a^kb+(C^k_1+C^k_2)a^{k-1}b^2+\cdots\cdots\\&\qquad+(C^k_s+C^k_{s+1})a^{k-s}b^{s+1}+\cdots\cdots+b^{k+1}.\end{aligned}$$

由 $C^k_s+C^k_{s+1}=C^{k+1}_{s+1}$，就得到

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+C^{k+1}_1a^kb+C^{k+1}_2a^{k-1}b^2+\cdots\cdots +C^{k+1}_{s+1}a^{k-s}b^{s+1}+\cdots\cdots+b^{k+1}.$$

附錄 習題解答

1. 假設: $u_n=3n-2$.

(1) 對於 $n=1$,假設是眞確的.

(2) 令 $u_k=3k-2$.

則 $u_{k+1}=u_k+3=3k-2+3=3(k+1)-2$.

2. 假設: $S_n=2^n-1$.

(1) 對於 $n=1$,假設是眞確的.

(2) 令 $S_k=2^k-1$.

則 $S_{k+1}=S_k+2^k=2^{k+1}-1$.

3. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

則

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

4. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

則

$$1^2+3^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$$

$$=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

5. (1) 對於 $n=1$,命題是真確的.

(2) 設 $1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$

則 $$1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$
$$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

6. (1) 對於 $n=1$,命題是真確的.

(2) 設 $1+x+x^2+\cdots\cdots+x^k=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$

則

$$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^k+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

7. (1) 對於 $n=1$,命題是真確的.

(2) 設

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

則 $1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

8. (1) 對於 $n=1$,命題是真確的.

(2) 設

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

則

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

9. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

則

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

10. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

則

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=(k+1)\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

11. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}.$$

則

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

12. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}.$$

則

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

13. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}.$$

則 $$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$$

$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

14. (1) 對於$n=1$和$n=2$,命題是眞確的.

(2) 設 $u_{k-2}=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}$, $u_{k-1}=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$.

則 $$u_k=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}.$$

15. (1) 對於$n=0$,

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}.$$

這一命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

則

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

16. 對於$n=1$, $$1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1}.$$

對於$n=2$,

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

對於$n=3$,

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}.$$

這就提示了假設：

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-n+1)}{n!}$$
$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)}{n!}.$$

(1) 對於 $n=1$，假設是眞確的.

(2) 設

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^k\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-k+1)}{k!}$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-k)}{k!}.$$

則

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^k\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-k+1)}{k!}$$
$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-k)}{(k+1)!}$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-k)}{k!}$$
$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-k)}{(k+1)!}$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-k)}{k!}\left[\frac{x}{k+1}-1\right]$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}.$$

17. (1) 對於 $n=0$，命題是眞確的.

(2) 假定命題對於 $n=k$ 眞確，就是說，

$$A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$$

可被 133 除盡．則

$$A_{k+1}=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}$$

$$=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}$$

$$=11\cdot 11^{k+2}+133\cdot 12^{2k+1}+11\cdot 12^{2k+1}$$

$$=11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}$$

$$=11A_k+133\cdot 12^{2k+1}.$$

我們已將 A_{k+1} 表示成兩項之和，其中每一項都可被133除盡．這就說明 A_{k+1} 可被 133 除盡．

18. 因爲一直線把平面分成兩部份，故命題對於 $n=1$ 是眞確的．

假定經過同一點的 k 條不同直線分平面爲 $2k$ 個部份．則經過同一點的第 $k+1$ 條直線將其中的兩部份各分成 2 部份，因而平面被分成 $2(k+1)$ 個部份．

19. (1) 直線 AB 將平面 P 分成兩部份 P_1 與 P_2．將 P_1 塗成白色，而將 P_2 塗成黑色，就滿足問題的要求．

故對於 $n=1$，命題是眞確的．

(2) 設命題對於 $n=k$ 是正確的，而將平面 P 依問題的要求塗色．第 $k+1$ 條直線 CD 將整個平面 P 分成兩部份 Q_1 與 Q_2．將 Q_1 中之每一區域保持原來的顏色不變，在 Q_2 中每一區域則將白色改塗成黑色，黑色改塗成白色．

現在設 O_1 與 O_2 是畫過 CD 線之後的任意兩個相鄰區域．O_1 與 O_2 的位置必合於下列兩種情形之一：

(a) O_1 與 O_2 分在 CD 線的兩邊．

(б) O_1 與 O_2 同在 CD 線的一邊.

在第一種情形,O_1 與 O_2,在畫過原來 k 條直線之後,還沒有畫直線 CD 的時候,是構成一個區域的,因而被塗成同一種顏色. 現在其中屬於 Q_1 的部份保持原來的顏色,而屬於 Q_2 的部份,已經改變了顏色. 這就指出,在這種情形,O_1 與 O_2 是已被塗成不同的顏色.

在第二種情形,在畫過原來 k 條直線之後,還沒有畫直線 CD 的時候,O_1 與 O_2 已是兩個不同的相鄰區域,它們公共邊是在原來 k 條直線中的一條上. 這就說明,這時 O_1 與 O_2 已被塗成不同的顏色.

若 O_1 與 O_2 在 Q_1 內,則它們所塗顏色不變,若它們在 Q_2 內,則它們每一個原塗的顏色都已改變. 對於這兩種情形,O_1 與 O_2 現在都已塗成不同的顏色了.

20. (1) 對於 $n=1$,因為

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\cos x,$$

故命題是真確的.

(2) 設

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos kx=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

則

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos kx+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x+2\sin\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x+(\sin\frac{2k+3}{2}x-\sin\frac{2k+1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

21. (1) 對於 $n=1$,因爲

$$\frac{2\sin x-\sin 2x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\sin x,$$

故命題是眞確的.

(2) 設

$$\sin x+2\sin 2x+\cdots\cdots+k\sin kx$$
$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

則

$$\sin x+2\sin 2x+\cdots\cdots+k\sin kx+(k+1)\sin(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}+(k+1)\sin(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x+2(k+1)\sin(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{2(k+1)\cos x\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{(k+1)[\sin(k+2)x+\sin kx]}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x-(k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

22. (1) 對於 $n=1$，因為

$$\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cos x-2\cos^2 x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x(1-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\cos x,$$

故命題是眞確的.

(2) 設 $\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+k\cos kx$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

則

$$\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+k\cos kx+(k+1)\cos(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+(k+1)\cos(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$+\frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{(k+1)[\cos(k+2)x+\cos kx]+1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x-(k+1)\cos(k+2)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

23. (1) 對於 $n=1$，因爲

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2},$$

故命題是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x.$$

則

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\frac{\cot^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\cot\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\cot\frac{x}{2^{k+1}}}-\cot x$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\cot x.$$

24. (1) 我們有

$$\tan(\operatorname{arc}\tan 2-\operatorname{arc}\tan 1)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

因此

$$\operatorname{arc}\tan 2-\operatorname{arc}\tan 1=\operatorname{arc}\tan\frac{1}{3}=\operatorname{arc}\cot 3.$$

這就說明對於 $n=1$，命題是眞確的.

(2) 我們先指出

$$\operatorname{arc}\cot(2k+3)=\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc}\tan 1. \qquad \text{(i)}$$

事實上,

$$\tan\left(\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc}\tan 1\right)=\frac{\frac{k+2}{k+1}-1}{1+\frac{k+2}{k+1}}=\frac{1}{2k+3}.$$

這就說明,

$$\operatorname{arc}\tan\frac{1}{2k+3}=\operatorname{arc}\cot(2k+3)=\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc}\tan 1.$$

假設這命題對於 $n=k$ 是眞確的,就是說

$$\operatorname{arc}\cot 3+\operatorname{arc}\cot 5+\cdots\cdots+\operatorname{arc}\cot(2k+1)$$

$$=\operatorname{arc}\tan 2+\operatorname{arc}\tan\frac{3}{2}+\cdots\cdots+\operatorname{arc}\tan\frac{k+1}{k}-k\operatorname{arc}\tan 1.\quad\text{(ii)}$$

我們來證明它對於 $n=k+1$ 也是眞確的,就是說

$$\operatorname{arc}\cot 3+\operatorname{arc}\cot 5+\cdots\cdots+\operatorname{arc}\cot(2k+3)$$

$$=\operatorname{arc}\tan 2+\cdots\cdots+\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-(k+1)\operatorname{arc}\tan 1.\quad\text{(iii)}$$

將等式(i)與(ii)邊邊相加就得等式(iii).

25. (1) 對於 $n=1$,因為

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

故命題是眞確的.

(2) 設

$$(\sqrt{3}-i)^k=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right).$$

則

$$(\sqrt{3}-i)^{k+1}=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

26. (1) 對於 $n=1$,命題是眞確的.

(2) 設 $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$.

則

$$(\cos x+i\sin x)^{k+1}=(\cos kx+i\sin kx)(\cos x+i\sin x)$$
$$=\cos(k+1)x+i\sin(k+1)x.$$

27. 錯誤的是最後一句話:'命題卽已證明'. 眞正證明的是:若不等式 $2^n>2n+1$

對於 $n=k$ 是眞確的,則它對於 $n=k+1$ 也眞確,這裏 k 是任何自然數.

但這個不等式卽使對於 n 中的一個值是否眞確都還沒得到證明,更說不到對於任何的自然數了.

簡單說來,錯誤是包含在:所已證明的僅是定理 2,而定理 1 則沒有加以考慮,因而歸納法的基礎未曾建立.

28. 容易看出,3 是 n 的値中使不等式 $2^n>2n+1$ 眞確的最小自然數.

旣然已經知道,如不等式對於 $n=k$ 眞確,它對於 $n=k+1$ 也眞確(習題 27),則我們可以肯定,不等式對於任何自然數 $n\geqslant 3$ 都眞確.

29. (1) 對於 $n=2$,因為

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2},$$

故不等式是眞確的.

(2) 設

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}. \qquad (\text{i})$$

我們來證明

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}. \qquad \text{(ii)}$$

對於任何 $k\geqslant 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \qquad \text{(iii)}$$

事實上,不等式(iii)可由不等式

$$1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}>1$$

兩邊各乘以$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$就可以得出.將不等式(i)與(iii)邊邊相加,就得不等式(ii).

30. (1) 對於$n=2$,不等式成為$\frac{16}{3}<6$,因此它是眞確的.

(2) 設

$$\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

這裏$k\geqslant 2$.不難證明,對於$k>0$,

$$\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}.$$

因此

$$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

就是

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学归纳法
作者＝（苏联）索明斯基著　　高彻译
页数＝５８
ＳＳ号＝１１０２０２７１
出版日期＝１９５３年０６月第１版