蘇聯青年科學叢書

不等式

科羅夫琴著

中國青年出版社

譯者的話

我國高級中學的代數學教本中，對於不等式大都祇講到一次不等式的基本性質，而舊有流行的參考書籍都偏於解決艱深的、不切實際的難題，如上野清的大代數學講義便是典型的例子．這一類的參考書一方面對於數學成績好的同學容易養成好高騖遠、鑽牛角尖或捨本逐末的習慣；另方面對於數學基礎較差的同學往往造成不良影響，更視數學如畏途，望而卻步．

蘇聯科羅夫琴（П. П. Коровкин）同志所著的‘不等式’小册子，說理明暢，深入淺出，活潑生動，與受有英美資本主義思想影響的刻板文章式的數學書籍有基本精神上的差異．凡是對於高中代數學學習得較好的同學都能夠看得懂．該書從求一數的‘整數部分’講起，首先將不等式與級數結合起來；再一步引進了我們已知道的算術中項、幾何中項（即等差中項、等比中項）等． 從這個大家熟悉的基礎上推論到諸數若干次冪的中項的一般情形，從諸正數的幾何中項小於該諸數的算術中項這一事實，證明了另一個應用更廣的定理：$(1+x)^a \geqslant 1+ax$（這定理的詳情請閱正文）．然後應用這定理解決了許多極大、極小的實際問題，以及求收斂級數極限值問題．書中穿插着許多有趣味的練習題，較難題目的解決方法都給予了

提示，書後並附有練習題的解答. 科羅夫琴同志特別親切的告訴我們：獨立的解決問題比依賴題解要強得多.

這本小册子不僅充實了高中同學所讀不等式、極大、極小與級數的內容，而且對於同學們進一步學習高深的數學起了很好的橋樑作用. 同時給予我國中學程度數學書籍的作者們以很好的啓發與借鏡. 譯者才疏識淺，深感未能傳達原文的精神，尙望國內讀者，尤其是青年同學們，提出寶貴的意見，予以批評指正.

許 琛 一九五一年十一月

原　　序

在中學的數學課程中，同學們學習了不等式的性質及怎樣解簡單的一次和二次不等式的方法.

在這本小册子裏，作者不再講到不等式的重要性質；僅對同學們一方面提供一些重要的不等式，這些不等式在高等數學中都是有用的；另方面利用不等式來計算一些極大值、極小值與極限值的問題.

全書中提供 62 個例題，其中 36 個的重要解決步驟都寫出來了，還有 26 個例題分配在第一、第四及第五節的末尾當作練習；它們的解法附在書末.

同學們自己獨立的去設法解決一些難題，無疑是比解決許多容易的題目能得到更多的益處. 因此，我們建議同學們最好不要先看書後的解答，而自己獨立的去解決這些練習題. 如果能用作者提示的解法以外的其他方法來解這些問題，那就更加可貴了.

П. П. 科羅夫金

目　錄

一 求數的整數部分

如果有一數 x，那未不超過 x 的最大整數，叫做 x 的整數部分，通常用 $[x]$ 來表示.

按照上述的定義，$[x]$ 既不超過 x，故 $[x]\leqslant x$；而 $[x]$ 又是小於 x 的最大整數，故必須適合不等式 $[x]+1>x$.

因此，$[x]$ 是一個整數，他適合條件

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

例如，從下列各不等式

$$3<\pi<4,\quad 5<\frac{17}{3}<6,\quad -2<-\sqrt{2}<-1,\quad 5=5<6,$$

可以得到

$$[\pi]=3,\quad \left[\frac{17}{3}\right]=5,\quad [-\sqrt{2}]=-2,\qquad [5]=5.$$

〔例 1〕 求 $$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$$
的整數部分.

〔解〕 已知

$$1\leqslant 1\leqslant 1,\qquad 0.7<\sqrt{\frac{1}{2}}<0.8,$$

$$0.5<\sqrt{\frac{1}{3}}<0.6,\quad 0.5\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}}\leqslant 0.5,$$

$$0.4<\sqrt{\frac{1}{5}}<0.5$$

(開平方時準確到小數點後第一位，左右兩限值相差 0.1). 上

述諸式左右兩端各相加，可得

$$1+0.7+0.5+0.5+0.4<x<1+0.8+0.6+0.5+0.5,$$

即 $3.1<x<3.4$，故得 $[x]=3$.

〔例 2〕 求

$$y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

的整數部分.

〔解〕 此例與上例不同之處，祇在於項數的增多. 上例祇有 5 項，此例有 1000000 項. 將這一百萬項中每項的兩限值羅列出來，然後再求和，實際上是太繁瑣而辦不到的.

為了要解這個問題，我們且來研究 n 項的和:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

為了求此和的整數部分，必須要證明不等式

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}. \tag{1}$$

因為 $$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

及 $$\sqrt{n+1}>\sqrt{n},$$

故得 $$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

這證明了 (1) 式左端的不等式；同樣可以證明右端的不等式.

在 (1) 式中順次設 $n=2, 3, 4, \cdots\cdots, n$，便得

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{5}-2\sqrt{4}<\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

諸式左右兩端各相加，在所得的和上各加 1，便得

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1$$

$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \qquad (2)$$

因爲 $2\sqrt{2}<3$，又 $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$，故從 (2) 式得

$$2\sqrt{n}-2$$

$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1. \qquad (3)$$

在 (3) 式中令 $n=1000000$，便得到

$$2\sqrt{1000000}-2$$

$$<y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2\sqrt{1000000}-1,$$

即 $$1998<y<1999.$$

由此得 $[y]=1998$.

〔例 3〕 證明不等式

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

〔解〕 令 $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{100}{101}$.

因爲 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, ……, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$,

故 $x<y$, 而

$$x^2<xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101}.$$

取不等式兩端的平方根，乃得

$$x<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

練 習 題

1. 證明不等式

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

2. 證明不等式

$$1800<\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<1800.02.$$

3. 求 $[50z]$ 的值，式中

$$z=\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

答 $[50z]=90000$.

4. 用數學歸納法證明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. 證明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

二 幾個重要不等式及其應用

本節中將證明一些重要的不等式,利用這些不等式可以解決更多的問題.

從不等式 $(x_1-x_2)^2\geqslant 0$ 得到 $x_1^2+x_2^2\geqslant 2x_1x_2$, 等號在 $x_1=x_2$ 時適用,並且僅在 $x_1=x_2$ 時適用.

設 x_1 及 x_2 是兩個正數,以兩者的乘積除上述不等式的兩端,得

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geqslant 2. \tag{4}$$

利用 (4) 式立刻可以證明**若二正數的積是 1, 則兩者的和必不小於 2.**

設 $xy=1$, 則 $y=\frac{1}{x}$. 在 (4) 式中,若設 $x_1=x$, $x_2=1$, 便有 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$, 即 $x+y\geqslant 2$.

現在來證明下述的定理:

〔定理 1〕 **若 n 個正數的積是 1, 則此 n 數的和必不小於 n.**

這定理的另一種敍述是這樣: 若 $x_1x_2x_3\cdots\cdots x_n=1$, 則 $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n\geqslant n$, 在 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ 不全相等時, $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n>n$.

〔證〕 用數學歸納法來證明.

對於兩個正數 $(n=2)$, 定理 1 已知是眞確的.

設這定理在 $n=k\geqslant 2$ 時仍眞確, 卽當 $x_1x_2x_3\cdots\cdots x_k=1$ 時,

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k\geqslant k.$$

我們必須證明這定理在 $n=k+1$ 時也眞確, 卽設

$$x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k\,x_{k+1}=1,$$

而且 $x_1>0, x_2>0, x_3>0, \cdots\cdots, x_k>0, x_{k+1}>0$, 則

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}\geqslant k+1.$$

設 $$x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k\,x_{k+1}=1,$$

則必有兩種可能情形, 卽

(1) 所有的乘數 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_k, x_{k+1}$ 都相等, 卽

$$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_k=x_{k+1}.$$

(2) 不是所有的乘數都等於 1.

在第一種情形, 所有的乘數都等於 1, 它們的和是 $k+1$,

卽 $$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}=k+1.$$

在第二種情形, 在這個乘積 $x_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k\,x_{k+1}$ 內必定有一個乘數大於 1, 一個乘數小於 1 (若所有的乘數都小於 1, 則其積也必小於 1).

假設這二數是 $x_1<1$, 及 $x_{k+1}>1$, 則乘積可以寫成

$$(x_1\,x_{k+1})x_2\,x_3\cdots\cdots x_k=1.$$

令 $y_1=x_1\,x_{k+1}$, 則得

$$y_1\,x_2\,x_3\cdots\cdots x_k=1.$$

這是 k 個正數的乘積等於 1,故按假設,它們的和必不小於 k,

$$y_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k\geqslant k.$$

但

$$\begin{aligned} & x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1} \\ &=(y_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k)+x_{k+1}-y_1+x_1 \\ &\geqslant k+x_{k+1}-y_1+x_1=(k+1)+x_{k+1}-y_1+x_1-1. \end{aligned}$$

因為 $y_1=x_1\,x_{k+1}$, 故得

$$\begin{aligned} & x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1} \\ &\geqslant(k+1)+x_{k+1}-x_1\,x_{k+1}+x_1-1 \\ &=(k+1)+(x_{k+1}-1)(1-x_1). \end{aligned}$$

因為 $x_1<1$, 但 $x_{k+1}>1$, 故 $(x_{k+1}-1)(1-x_1)>0$, 由此得

$$\begin{aligned} & x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1} \\ &\geqslant(k+1)+(x_{k+1}-1)(1-x_1)>k+1. \end{aligned}$$

到這裏,定理 1 已證明完畢.

〔例 1〕 設 $x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots,x_n$ 都是正數,證明

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n,$$

等號在 $x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$ 時適用,並且僅在這時適用.

〔解〕 因為 $\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{x_2}{x_3}\cdots\cdots\dfrac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\dfrac{x_n}{x_1}=1,$

故按照定理 1, 就能得所要證明的不等式. 這不等式顯然在

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1,$$

即在 $x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$ 時能變為等式; 並且僅在這時才能變為等式.

〔例 2〕 證明不等式

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2.$$

〔解〕 令

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

因爲等式右端兩項的積等於 1，故這兩項的和不小於 2. 僅在 $x=0$ 時，這和才等於 2.

〔例 3〕 設 $a>1$，證明

$$\log_{10} a+\log_a 10\geqslant 2.$$

〔解〕 因爲 $\log_{10} a\cdot\log_a 10=1$，故

$$\log_{10} a+\log_a 10=\log_{10} a+\frac{1}{\log_{10} a}\geqslant 2.$$

〔例 4〕 證明不等式

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

〔解〕 用 x^2 除上式左端的分子與分母，就得

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}.$$

因 $\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$，故 $\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2$，由是得

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

〔定義〕 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 是 n 個正數，$g=\sqrt[n]{x_1 x_2\cdots\cdots x_n}$ 叫做這 n 個正數的幾何平均數，$a=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}$ 叫做

這 n 個正數的算術平均數.

〔定理 2〕 **許多正數的幾何平均數不大於它們的算術平均數.**

若數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 不全相等時,則它們的幾何平均數小於它們的算術平均數.

〔證〕 從等式 $g=\sqrt[n]{x_1 x_2\cdots\cdots x_n}$ 得 $1=\sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\cdots\cdots\frac{x_n}{g}}$,

或 $\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\cdots\cdots\frac{x_n}{g}=1$. 因爲 n 個正數的積等於 1,故它們的和不小於 n (定理 1), 於是得 $\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{g}\geqslant n.$

這不等式的兩端以 g 乘再以 n 除,就得

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\geqslant g.$$

在 $\frac{x_1}{g}=\frac{x_2}{g}=\cdots\cdots=\frac{x_n}{g}=1$, 即 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=g$ 時,並且僅在這時才能適用等號,成 $a=g$. 如果這 n 個數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 不全相等,則 $a>g.$

〔例 5〕 相交於長方體的一頂點的三稜長度之和爲一定時,哪一種長方體的體積爲最大?

〔解〕 令 $m=a+b+c$ 表相交於一頂點的三稜長度之和, $V=abc$ 表長方體的體積,則

$$\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}=\frac{m}{3},$$

故 $V\leqslant\frac{m^3}{27}$. 等式在 $a=b=c=\frac{m}{3}$ 時,並且僅在這時適用,因此體積最大的長方體是立方體.

〔例 6〕 證明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n\geqslant 2. \tag{5}$$

〔解〕 從定理 2，得

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$$

$$<\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n}=\frac{(n+1)n}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

上式兩端各取 n 次乘方，便得 (5) 式.

〔定義〕 如果有一數是

$$c_\alpha=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

那末這數叫做是 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 等數的 α **次的冪平均數**. 有幾種特殊的冪平均數，像

$$c_1=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

叫做 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的**算術平均數**;

$$c_2=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

叫做 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的**平方平均數**;

$$c_{-1}=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

叫做 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的**調和平均數**.

〔例 7〕 證明，若 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 都是正數，又 $\alpha<0<\beta$，則

$$c_\alpha\leqslant g\leqslant c_\beta. \tag{6}$$

這就是說，負指數的冪平均數不大於幾何平均數，正指數的冪

平均數不小於幾何平均數.

〔解〕 因為諸正數的幾何平均數不大於它們的算術平均數,故得 $$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha\cdots\cdots a_n^\alpha}\leqslant\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}.$$

上式兩端各取$\frac{1}{\alpha}$次乘方,記住$\frac{1}{\alpha}<0$, 得

$$g=\sqrt[n]{a_1\,a_2\cdots\cdots a_n}\geqslant\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=c_\alpha.$$

這證明了 (6) 式左端的不等式,右端的可用類似的方法證明.

從不等式 (6) 可知,諸正數的調和平均數不大於它們的算術平均數.

〔例 8〕 設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 都是正數,證明

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

〔解〕 因為 $c_{-1}\leqslant g\leqslant c_1$, 故

$$c_{-1}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=c_1,$$

從這不等式得

$$n^2\leqslant(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

〔例 9〕 對於二任意正數 $a, b\ (a\neq b)$, 證明這個不等式成立: $$\sqrt[n+1]{ab^n}<\frac{a+nb}{n+1}.$$

〔解〕

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{a\underbrace{bb\cdots\cdots b}_{n}}<\frac{a+\overbrace{b+b+\cdots\cdots+b}^{n}}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}.$$

〔例 10〕　當 n 增加時，證明下列二數

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ 及 } z_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

之值亦隨之增長，即

$$x_n<x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad z_n<z_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

〔解〕　在例 9 的不等式中，令 $a=1,\ b=1+\frac{1}{n}$，則得

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

上式兩端各取 $(n+1)$ 次乘方便得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ 即 } x_n<x_{n+1}.$$

第二個不等式 $z_n<z_{n+1}$ 可用類似的方法證明之.

〔例 11〕　證明數

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

之值隨 n 的增加而減少，即

$$y_n>y_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

〔解〕

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{z_{n+1}}$$

(參閱例 10). 因為 z_n 之值隨 n 的增加而增長，故 y_n 之值隨 n 的增加而減少.

從例 10 及例 11 得

$$x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2<x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=2.25<x_3<\cdots\cdots<x_n<\cdots\cdots,$$
$$y_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^2=4>y_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=3.375>y_3>\cdots\cdots>y_n>\cdots\cdots.$$

另一方面，

$$2=x_1<x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=y_n<y_1=4.$$

因此 x_n 之值的變化適合兩個條件：

(1) x_n 之值隨 n 之增加作單調的增長，

(2) x_n 之值限於 2，4 之間，即 $2<x_n<4$.

我們知道一個單調上昇而又有限制的變值，一定有個極限值．且來看 x_n 的極限值是什麽．這極限值用字母 e 表示，即

$$e=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

因爲 x_n 隨 n 之增加而漸增至其極限值，故必小於其極限值，

即
$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e. \tag{7}$$

不難證明 $e<3$．若 n 很大

$$x_n<y_n<y_5=\left(1+\frac{1}{5}\right)^6=2.985984.$$

由此得
$$e=\lim_{n\to\infty}x_n\leqslant 2.985984<3.$$

在數學中，e 及 π 這兩個數是很重要的．e 是自然對數的底數．以 e 爲底時，N 的對數用符號 $\ln N$ 表示(讀作 N 的自

然對數，也可以用 $\log_e N$ 表示）.

我們都知道 e 及 π 都是無理數. 現在這兩個數都已被人們算到準確到小數點後的 808 位，如

$$e=2.7182818284590\cdots\cdots$$

現在再證明 y_n 的極限值也是 e.

$$\lim y_n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

但因 y_n 是單調減少而漸近於 e 的（例 11），故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e. \tag{8}$$

〔例 12〕 證明不等式

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{9}$$

〔解〕 我們用數學歸納法證明不等式 (9). $n=1$ 時，這不等式顯見成立，因為 $1!=1>\left(\frac{1}{e}\right)^1.$

設不等式 (9) 對於 $n=k$ 也成立，即 $k!>\left(\frac{k}{e}\right)^k.$

將上述不等式的兩端以 $(k+1)$ 乘之，則得

$$(k+1)\cdot k!=(k+1)!>\left(\frac{k}{e}\right)^k(k+1)=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.$$

但從 (7) 式得 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$，故

$$(k+1)!>\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\frac{e}{e}=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1},$$

即不等式 (9) 對於 $n=k+1$ 也能成立. 這一串的證明步驟證明了不等式 (9) 對於任何 n 的值都能成立.

因爲 $e<3$，故從不等式 (9) 得 $\quad n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n.$

又在此式中令 $n=300$ 便得 $\quad 300!>100^{300}.$

同樣可用數學歸納法證明 $\quad n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$

〔例 13〕 證明不等式

$$na_1a_2\cdots\cdots a_n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots\cdots+a_n^n, \tag{10}$$

式中 $a_1>0,\ a_2>0,\cdots\cdots,a_n>0.$

〔解〕 因爲諸正數的幾何平均數不大於它們的算術平均數，故有

$$a_1a_2\cdots\cdots a_n=\sqrt[n]{a_1^na_2^n\cdots\cdots a_n^n}\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots\cdots+a_n^n}{n}.$$

兩端各以 n 乘之，便得不等式 (10).

從不等式 (10) 得

$$2a_1a_2\leqslant a_1^2+a_2^2,\quad 3a_1a_2a_3\leqslant a_1^3+a_2^3+a_3^3,$$

$$4a_1a_2a_3a_4\leqslant a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4,$$

即**二正數之積的兩倍不大於它們各數平方之和，三正數之積的三倍不大於它們各數立方之和等等.**

三 應用更廣的定理

前節中在解許多例題時，我們應用了諸正數的幾何平均數不大於它們的算術平均數這個定理，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n},$$

僅在 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 時，等號才能適用.

仍從這定理所證明得的下面一個重要定理,在解例題時更是常常被應用到的.

〔定理 3〕 設 $x\geqslant -1$, 又 $0<a<1$, 則

$$(1+x)^a\leqslant 1+ax. \tag{11}$$

若 $a<0$ 或 $a>1$, 則

$$(1+x)^a\geqslant 1+ax. \tag{12}$$

(11)(12)兩式中的等號在 $x=0$ 時,並且僅在這時才能適用.

〔證〕 設 a 是有理數,且 $0<a<1$, 則令 $a=\frac{m}{n}$, 式中 m 及 n 是正整數,且 $1\leqslant m<n$, 則得

$$(1+x)^a=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^m\cdot 1^{n-m}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots\cdots(1+x)}_{m}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots\cdots 1}_{n-m}}$$

$$\leqslant\frac{(1+x)+(1+x)+\cdots\cdots+(1+x)+1+1+\cdots\cdots+1}{n}$$

$$=\frac{m(1+x)+n-m}{n}=\frac{n+mx}{n}=1+\frac{m}{n}x=1+ax.$$

等號僅當根號下諸乘數都相等時,卽僅當 $1+x=1$ 或 $x=0$ 時才能適用. 設 $x\neq 0$, 則 $(1+x)^a<1+ax.$

這樣我們證明了定理的前半部,但 a 僅限於是有理數.

設 a 是一個無理數, $0<a<1$. 令 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n, \cdots\cdots$ 是 a 的連續的有理數的近似值,且 $0<r_n<1$.

剛才已證明過,當指數 r_n 是有理數時下列諸不等式成立:

$$(1+x)^{r_n}\leqslant 1+r_n x,\quad x\geqslant -1,\quad n=1,2,3,\cdots\cdots.$$

從這些不等式得

$$(1+x)^{a}=\lim_{r_n\to a}(1+x)^{r_n}\leqslant\lim_{r_n\to a}(1+r_n x)=1+ax.$$

a 是無理數時，不等式 (11) 也被證明了能適合．現在還須證明的是當 $x\neq0$, 且 $0<a<1$ 時， $(1+x)^a<1+ax$,

卽當 $x\neq0$ 時，(11) 式的等號不適用．從有理數 r, r 適合不等式 $a<r<1$, 顯見

$$(1+x)^a=\left[(1+x)^{\frac{a}{r}}\right]^r.$$

但因 $0<\frac{a}{r}<1$, 故從上面已經證明過的得到

$$(1+x)^{\frac{a}{r}}\leqslant1+\frac{a}{r}x,$$

由此得
$$(1+x)^a\leqslant\left(1+\frac{a}{r}x\right)^r.$$

若 $x\neq0$, 則 $\left(1+\frac{a}{r}x\right)^r<1+r\cdot\frac{a}{r}x=1+ax$, 故

$$(1+x)^a<1+ax.$$

到此，定理的前半部已完全證明了．

現在再來證明定理的後半部．

設 $a>1$. 若 $1+ax<0$ [若 x 是負數，這是可能的；例如 $a=4$, $x=-\frac{1}{2}$, 則 $1+ax=1+4(-\frac{1}{2})=-1<0$], 則不等式 (12) 顯然成立，因爲它的左端不會是負數，而右端是負數．

若 $1+ax\geqslant0$, $ax\geqslant-1$, 則從前半部定理得

$$(1+ax)^{\frac{1}{a}}\leqslant1+\frac{1}{a}ax=1+x,$$

等號在 $x=0$ 時才能適用．將上式兩端各乘 a 次方，乃得

$$1+\alpha x\leqslant(1+x)^{\alpha}.$$

設 $\alpha<0$. 若 $1+\alpha x<0$, 則不等式 (12) 顯然成立. 若 $1+\alpha x\geqslant0$, 則可取一個正整數 n 使適合不等式 $-\frac{\alpha}{n}<1$. 根據這定理的前半部, 得

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}\leqslant1-\frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}}\geqslant\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x}\geqslant1+\frac{\alpha}{n}x$$

(後一不等式是從不等式 $1\geqslant1-\frac{\alpha^2}{n^2}x^2$ 導來的). 將上式兩端各乘 n 次方, 得不等式

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant\left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^n\geqslant1+n\frac{\alpha}{n}x=1+\alpha x.$$

等號僅在 $x=0$ 時才能適用.

定理 3 到此已完全證明了.

〔定理 4〕 **若 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 都是正數, 又 $\alpha<\beta$, 則 $c_\alpha\leqslant c_\beta$; 僅在 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ 時, $c_\alpha=c_\beta$ 才能成立.**

〔證〕 當 α 與 β 有不同符號時, 這定理在前面已經證明了(參閱前節例 7 及 c_α, c_β 的定義). 現在我們所要證明的是當 α 與 β 有相同符號時的情形.

設 $0<\alpha<\beta$, 取

$$k=c_\alpha=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

用 k 去除 c_β, 得

$$\frac{c_\beta}{k}=\frac{c_\beta}{c_\alpha}=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta+\left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta+\cdots\cdots+\left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

取 $d_1=\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha,\ d_2=\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha,\ \cdots\cdots,\ d_n=\left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha,$

則得
$$\frac{c_\beta}{k}=\left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots\cdots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{13}$$

但因

$$\left(\frac{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha+\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha+\cdots\cdots+\left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{k}c_\alpha=\frac{1}{c_\alpha}c_\alpha=1,$$

故 $\frac{d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n}{n}=1,\quad d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n=n.$

取 $d_1=1+x_1,\ d_2=1+x_2,\cdots\cdots,\ d_n=1+x_n.$

從等式 $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n=n$ 得 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=0.$

應用定理 3（因爲 $\frac{\beta}{\alpha}>1$），得

$$\left.\begin{aligned}
d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}&=(1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_1,\\
d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}&=(1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}&=(1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_n.
\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

將這些不等式的兩端各相加，得

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots\cdots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}$$
$$\geqslant n+\frac{\beta}{\alpha}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n) \tag{14}$$

從 (13) 及 (14) 兩式得

$$\frac{c_\beta}{k}\geqslant\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=1,\quad c_\beta\geqslant k=c_\alpha.$$

注意,僅當 (i) 式的 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 時,式中的等號才能適用,而 $c_\beta=k=c_\alpha$ (定理 3). 在這種情形下, $d_1=d_2=\cdots\cdots=d_n$, 因而得 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=k.$

即僅在 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ 時,才能 $c_\alpha=c_\beta$. 若 n 個正數 a_1, $a_2,\cdots\cdots,a_n$ 不全相等,則 $c_\beta>c_\alpha.$

當 $0<\alpha<\beta$ 時,我們證明了定理 4.

若 $\alpha<\beta<0$, 則 $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$. 證明的步驟如上,我們所得到的 (i) 及 (14) 諸式的不等號都反向.

因為 $\beta<0$, 故從不等式

$$\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots\cdots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\leqslant 1$$

得
$$\frac{c_\beta}{k}=\left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots\cdots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant 1^{\frac{1}{\beta}}=1,$$

即
$$c_\beta\geqslant k=c_\alpha.$$

到此定理 4 已完全證明了.

以後我們稱幾何平均數為零次冪的平均數,即取 $g=c_0$.

注意定理 4 對於任何次冪,包括零次冪,都能適用,因為根據上節的例 7, 我們已經證明, 若 $\alpha<0$, 則 $c_\alpha\leqslant g=c_0$; 若 $\beta>0$, 則 $c_\beta\geqslant g=c_0$.

特別是對於 $c_{-1}\leqslant c_0\leqslant c_1\leqslant c_2,$

這定理直接告訴我們，調和平均數不大於幾何平均數，幾何平均數不大於算術平均數，算術平均數不大於平方平均數. 例如設 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4$, 則

$$c_{-1}=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}=1.7\cdots\cdots,$$

$$c_0=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\sqrt[3]{1\cdot2\cdot4}=2,$$

$$c_1=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2.3\cdots\cdots,$$

$$c_2=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1+4+16}{3}}=\sqrt{7}=2.6\cdots\cdots,$$

由此得 $c_{-1}=1.7\cdots\cdots<2=c_0<2.3\cdots\cdots=c_1<2.6\cdots\cdots=c_2$.

〔例 1〕 證明若 $x+y+z=6$, 則 $x^2+y^2+z^2\geq12$.

〔解〕 因爲算術平均數不大於平方平均數，故

$$\frac{x+y+z}{3}\leqslant\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\quad 即\quad x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}.$$

以已知的和數 6 代入，得 $x^2+y^2+z^2\geq\frac{6^2}{3}=12$. 等號僅在 $x=y=z=2$ 時適用.

〔例 2〕 證明若 $x,\ y,\ z$ 爲正數，且 $x^2+y^2+z^2=8$, 則

$$x^3+y^3+z^3\geq16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

〔解〕 因爲 $c_2\leqslant c_3$, 故 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$

以已知的和數 8 代入，得 $$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\geq\sqrt{\frac{8}{3}},$$

即 $$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3\cdot\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}=16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

〔例 3〕 證明正數 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 適合下列不等式:

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^\alpha \leqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha),\quad \alpha\geqslant 1, \tag{15}$$

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^\alpha \geqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha),\quad 0<\alpha\leqslant 1. \tag{16}$$

〔解〕 若 $\alpha>1$，則

$$c_\alpha=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=c_1.$$

從這個不等式立刻可得不等式 (15)，同法可以證明不等式 (16). 從 (15) 及 (16) 兩式可以得到如下的特例:

$$(x+y)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha+y^\alpha),\quad \alpha\geqslant 1,\quad x>0,\ y>0;$$

$$(x+y)^\alpha \geqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha+y^\alpha),\quad 0<\alpha\leqslant 1,\quad x>0,\ y>0.$$

〔例 4〕 證明若 $x>0, y>0, z>0$，且 $x^3+y^3+z^3=81$，則

$$x+y+z\leqslant 9.$$

〔解〕 因為 $(x+y+z)^3 \leqslant 3^2(x^3+y^3+z^3)=9\cdot 81=729$ [不等式 (15)]，故得 $$x+y+z\leqslant\sqrt[3]{729}=9.$$

〔例 5〕 證明若 $0>\alpha>-1$，則

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<n^\alpha<\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \tag{17}$$

〔解〕 因為 $0<\alpha+1<1$，則從不等式 (11) 得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}<1+\frac{\alpha+1}{n},\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}<1-\frac{\alpha+1}{n}.$$

以 n^{a+1} 乘上面二式的兩端，得

$$(n+1)^{a+1}<n^{a+1}+(a+1)n^{a},$$

$$(n-1)^{a+1}<n^{a+1}-(a+1)n^{a}.$$

從這兩個不等式立刻便得到不等式 (17).

〔例 6〕 證明若 $0>a>-1$，則

$$\frac{(n+1)^{a+1}-m^{a+1}}{a+1}$$

$$<m^{a}+(m+1)^{a}+\cdots\cdots+n^{a}<\frac{n^{a+1}-(m-1)^{a+1}}{a+1}. \qquad (18)$$

〔解〕 設在 (17) 式中順次令 $n=m,\ m+1,\cdots\cdots,n$，則得

$$\frac{(m+1)^{1+a}-m^{1+a}}{1+a}<m^{a}<\frac{m^{1+a}-(m-1)^{1+a}}{1+a},$$

$$\frac{(m+2)^{1+a}-(m+1)^{1+a}}{1+a}<(m+1)^{a}<\frac{(m+1)^{1+a}-m^{1+a}}{1+a},$$

$$\frac{(m+3)^{1+a}-(m+2)^{1+a}}{1+a}<(m+2)^{a}<\frac{(m+2)^{1+a}-(m+1)^{1+a}}{1+a},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{(n+1)^{1+a}-n^{1+a}}{1+a}<n^{a}<\frac{n^{1+a}-(n-1)^{1+a}}{1+a}.$$

將上述諸不等式的兩端各相加，便得不等式 (18).

〔例 7〕 求數 x 的整數部分：

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}.$$

〔解〕 在 (18) 式中，令 $m=4,\ n=1000000,\ a=-\dfrac{1}{3}$，

則得

$$\frac{1000001^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}<x<\frac{1000000^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}},$$

即　　$\frac{3}{2}\cdot 1000001^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{2}{3}}<x<\frac{3}{2}\cdot 1000000^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$.

因爲　$\frac{3}{2}\cdot 1000001^{\frac{2}{3}}>\frac{3}{2}\cdot 1000000^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\cdot 10000=15000$,

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{54}<4, \qquad \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}>\frac{3}{2}\sqrt[3]{8}=3,$$

故得　　$15000-4<x<15000-3$, 即　　$14996<x<14997$.

從這不等式得 $[x]=14996$.

四　用不等式解極大極小問題

在本節中,我們用上面討論過的不等式來解決極大、極小的問題.

〔例 1〕　求下列函數的極小值:

$$x^a-kx,\ k>0,\ x\geqslant 0,\ a>1.$$

〔解〕　當 $a=2$ 時,這問題立刻便能解決. 因爲

$$x^2-kx=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4},$$

故當 $x=\frac{k}{2}>0$ 時,這函數有極小值,它的值是 $-\frac{k^2}{4}$.

當討論一般情形 $a>1$ 時,需要用定理 3 的不等式 (12).

因爲 $a>1$, 故　　　$(1+z)^a\geqslant 1+az,\quad z\geqslant -1,$

等號僅在 $z=0$ 時適用. 取 $1+z=y$, 則得

$$y^a\geqslant 1+a(y-1),\ y^a-ay\geqslant 1-a,\ y\geqslant 0,$$

等號僅在 $y=1$ 時適用. 將上列不等式的兩端用 c^a 乘之,得

$$(cy)^a-ac^{a-1}(cy)\geqslant (1-a)c^a,\quad y\geqslant 0.$$

取 $x=cy$ 及 $ac^{a-1}=k$, $c=\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}$,

則得 $x^a-kx\geqslant(1-a)c^a=(1-a)\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}$,

等號僅在 $x=c=\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}$時適用.

因此,函數 x^a-kx, $a>1$, $k>0$, $x\geqslant 0$

當 $x=\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}$時,有一極小值等於 $(1-a)\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}$. 例如設 $a=2$, 則函數 x^2-kx 當 $x=\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}}=\frac{k}{2}$時,有一極小值等於 $(1-2)\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{2-1}}=-\frac{k^2}{4}$. 這結果和前面所得的一樣. 又如設 $a=3$, $k=27$, 則函數 x^3-27x 當 $x=\left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}}=3$ 時,有一極小值 $(1-3)\left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}}=-54$.

注意 注意函數 $kx-x^a=-(x^a-kx)$,

式中 $k>1$, $a>0$, $x\geqslant 0$, 當 $x=\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}$時,有一極大值等於

$$(a-1)\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}.$$

〔例 2〕 從圓柱形的木材切出一條橫截面是矩形的樑,問如何切法樑的強度最大?

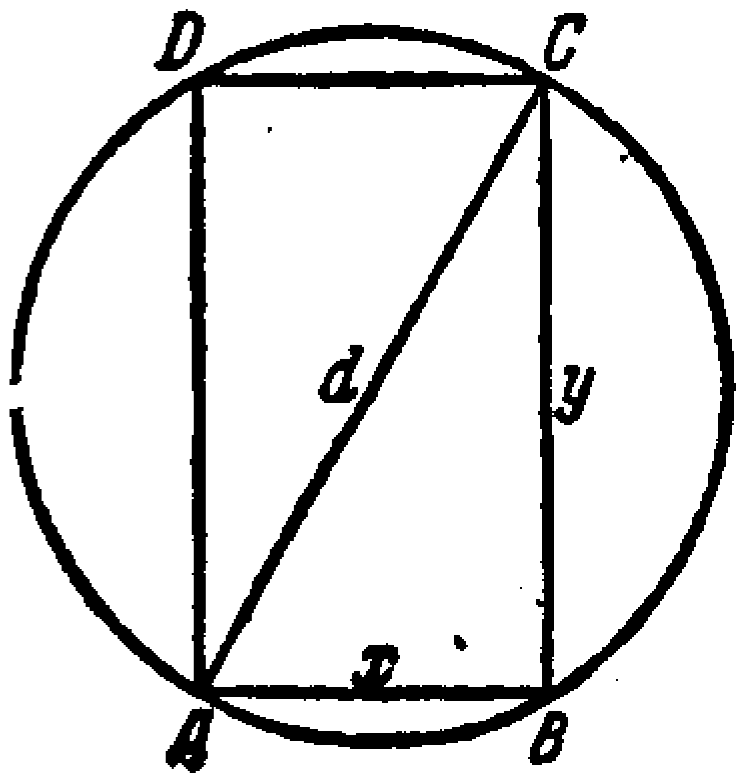

圖 1

〔解〕 如圖 1 所示是樑的橫截面,

設樑寬 $AB=x$, 樑高 $BC=y$, $AC=d$ 表示圓面的直徑. 因爲樑的強度與樑寬成正比例,與樑高的平方亦成正比例,設此強度爲 P, 則得

$$P=kxy^2=kx(d^2-x^2)=k(d^2x-x^3).$$

函數 d^2x-x^3 有一極大值,當

$$x=\left(\frac{d^2}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}}=\frac{d}{\sqrt{3}},\quad y^2=d^2-x^2=\frac{2}{3}d^2,$$

$$y=\frac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{2}=x\sqrt{2}\approx 1.4\,x=\frac{7}{5}x.$$

故當樑高是樑寬的$\frac{7}{5}$倍時,樑的強度爲最大.

〔例 3〕 求函數 $y=\sin x\sin 2x$ 的極大值.

〔解〕 因爲 $\sin 2x=2\sin x\cos x$, 故

$$\sin x\sin 2x=2\cos x\sin^2 x=2\cos x(1-\cos^2 x)=2(z-z^3),$$

式中 $z=\cos x$, 且 $-1\leqslant z\leqslant 1$. 若 $-1\leqslant z<0$, 則函數 $z-z^3=z(1-z^2)$ 的值是負,若 $0<z\leqslant 1$, 則這函數的值是正. 故這函數的極大值應當存在於 $0<z\leqslant 1$ 的情形之下.

從例 1, 得知函數 $z-z^3$, $z\geqslant 0$ 在

$$z=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

時,有一極大值

$$\sin x\sin 2x=2z(1-z^2)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

因此函數 $y=\sin x\sin 2x$ 當 $z=\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 時,有一極大

值 $\frac{4}{3\sqrt{3}}$. $y=\sin x\sin 2x$ 的曲線如圖 2 所示.

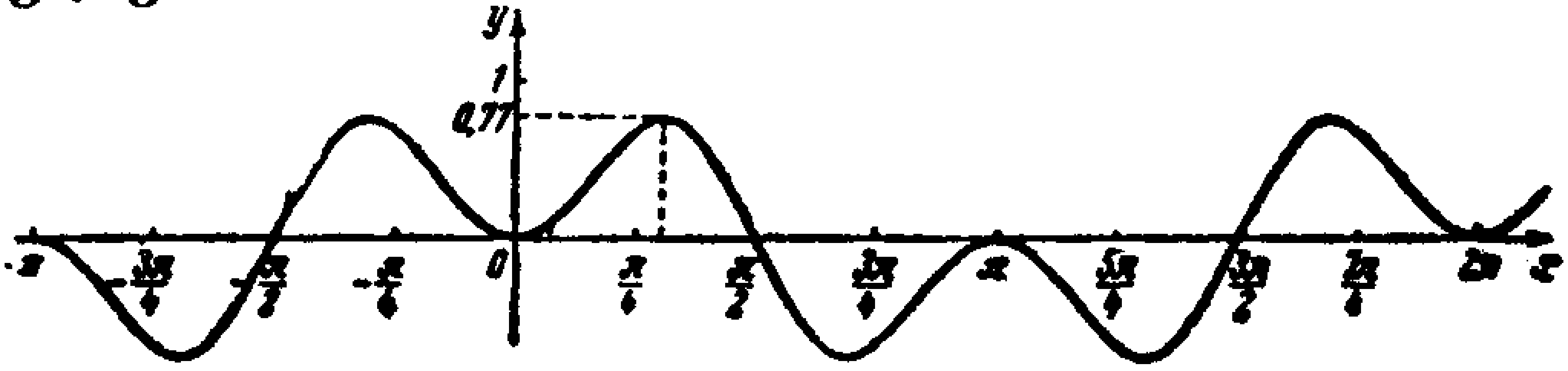

圖 2

〔例 4〕 求函數 $y=\cos x\cos 2x$ 的極大值.

〔解〕 這函數的值不大於 1, 因為 $\cos x$ 及 $\cos 2x$ 之值都不大於 1. 但當 $x=0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ……時

$$\cos x\cos 2x=1.$$

因此函數 $y=\cos x\cos 2x$ 當 $x=0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ……時, 有其極大值等於 1. 其曲線圖形如圖 3 所示.

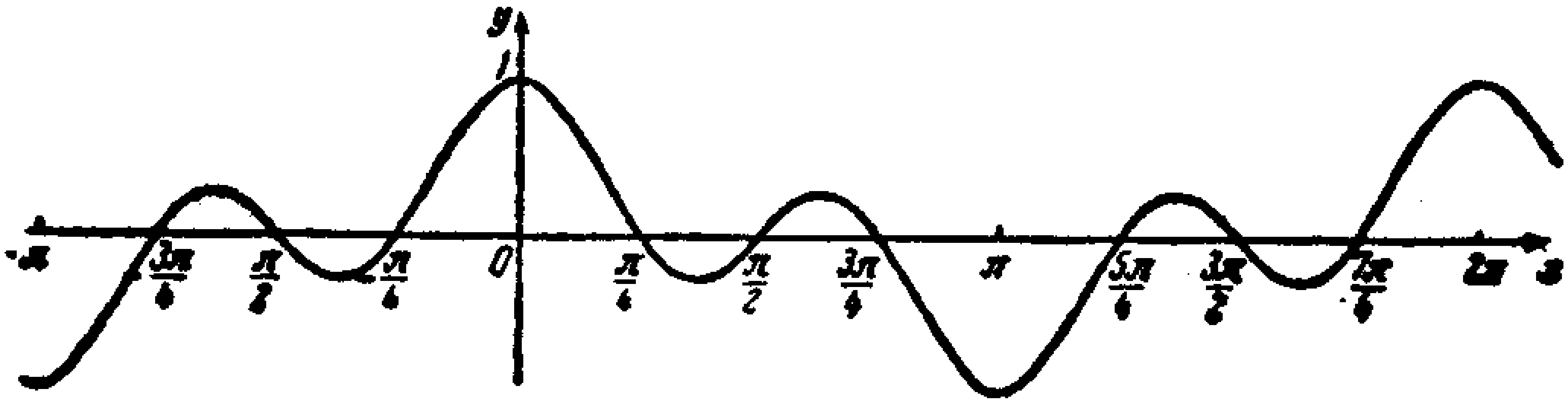

圖 3

〔例 5〕 求函數 x^a+kx 的極小值, 式中 $k>0, a<0, x\geqslant 0$.

〔解〕 因為 $a<0$, 故從不等式 (12) 得

$$(1+z)^a\geqslant 1+az,$$

等號僅在 $z=0$ 時才能適用. 取 $1+z=y$, 即 $z=y-1$, 則得

$$y^a\geqslant 1+a(y-1),\quad y\geqslant 0,$$

等號僅在 $y=1$ 時才能適用. 從上面不等式得到

$$y^a-ay\geqslant 1-a,\quad (cy)^a-ac^{a-1}(cy)\geqslant(1-a)c^a.$$

取 $k=-ac^{a-1}, x=cy$，則得

$$x^a+kx\geqslant(1-a)c^a=(1-a)\left(\frac{k}{-a}\right)^{\frac{a}{a-1}},$$

等號僅在 $x=c=\left(\frac{k}{-a}\right)^{\frac{1}{a-1}}$時才能適用.

因此函數 x^a+ax 當 $x=\left(\frac{k}{-a}\right)^{\frac{1}{a-1}}$時有一極小值，等於

$$(1-a)\left(\frac{k}{-a}\right)^{\frac{a}{a-1}}.$$

例如，函數 $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+27x,\quad x\geqslant0$$

當 $x=\left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{3}-1}}=\frac{1}{27}$時有一極小值，等於

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{27}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-1}}=4.$$

〔例 6〕 做圓柱形的罐子，其容積一定時，問怎樣做法所用材料最省(有上下底的罐子)？

〔解〕 令 $V=\pi r^2h$ 爲罐子的容積. 式中 r 爲罐子上下底的半徑，h 爲罐高. 這時罐子的全面積爲

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

因爲 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，故

$$S=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

取 $x=\frac{1}{r}$，則得

$$S=2\pi x^{-2}+2Vx=2\pi\left(x^{-2}+\frac{V}{\pi}x\right).$$

函數 $x^{-2}+\dfrac{V}{\pi}x$ 當 $x=\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{-2-1}}=\sqrt[3]{\dfrac{2\pi}{V}}$ 時有極小值. 由 x 的值得

$$\frac{1}{r}=\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}},\quad r^3=\frac{V}{2\pi}=\frac{\pi r^2 h}{2\pi},\quad r=\frac{h}{2},\quad h=2r=d.$$

故若圓柱形罐的容積一定,當罐高等於罐底的直徑時,所用的材料最節省.

練 習 題

6. 求函數 $x(6-x)^2$ 的極大值.

提示 取 $y=6-x$.

7. 從邊長是 $2a$ 的正方形的四角,各截去一小塊邊長是 x 的正方形,再摺起來做成一個無蓋的方底盒子(見圖 4). 問 x 是什麼值時,盒的容積最大?

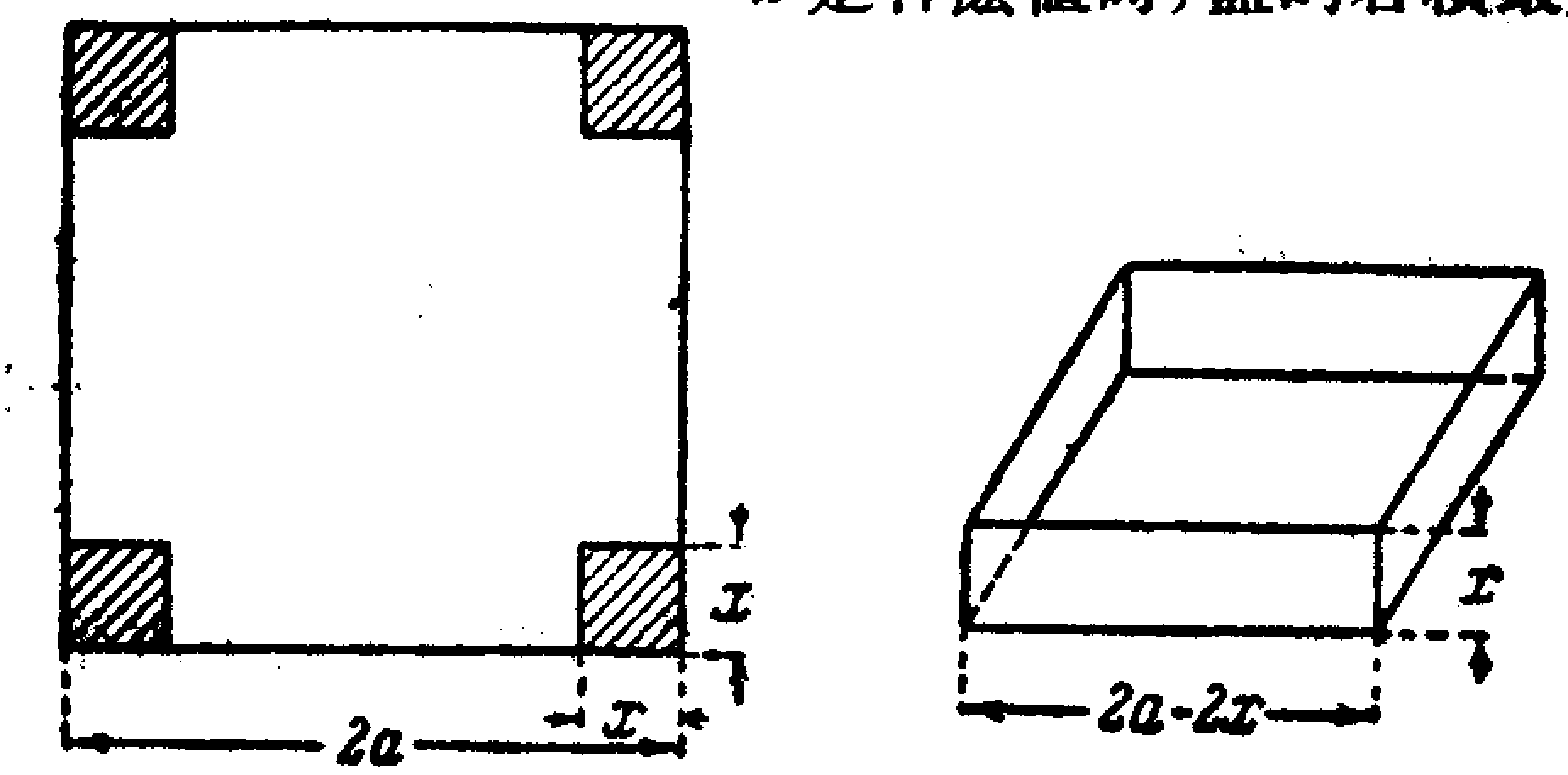

圖 4

8. 求函數 x^6+8x^2+5 的極小值.

9. 求函數 x^6-8x^2+5 的極小值.

10. 設 $0<a<1$, $k>0$, $x\geqslant 0$, 求函數 x^a-kx 的極大值.

11. 證明不等式 $$\sqrt[4]{x}\leqslant\frac{3}{8}+2x.$$

12. 證明,當 $n\geqslant 3$ 時,不等式 $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$ 成立.

提示 利用不等式 (7).

13. 在下列各數中求最大者:

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\cdots\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots\cdots$$

14. 證明不等式 $$\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

15. 設諸數 a_i 有同符號且不小於 -1, 證明不等式

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n.$$

16. 證明不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2). \qquad (19)$$

提示 先證明多項式

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots\cdots+(a_nx-b_n)^2$$
$$=x^2(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)-2x(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)$$
$$+(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)$$

不會有兩個不同的實根.

17. 利用不等式 (19) 證明算術平均數不大於平方平均數.

18. 證明不等式 $$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

19. 利用上題的不等式,證明下列不等式:

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

20. 求函數 $\frac{x^3}{x^4+5}$ 及 $x^6-0.6x^{10}$ 的極大值.

答 $\frac{3}{4\sqrt[4]{15}}$; 0.4.

21. 當 a 爲何值時, 函數 $\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}$ 有一極小值等於 2.5?

答 $a=8$.

五 用不等式求極限值

本節內我們再來提已經證明過的一些重要的不等式, 並且用它們來計算一些極限值.

〔例 1〕 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x>0$, $y>0$, 則

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}. \tag{20}$$

〔解〕 在上節的例 1 中, 我們曾證明過, 若 $a>1$, $k>0$, $x\geqslant 0$, 則

$$x^a-kx\geqslant(1-a)\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}$$

在此不等式中取 $a=p$, $k=py$, 則得

$$x^p-(py)x\geqslant(1-p)\left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}=(1-p)y^{\frac{p}{p-1}}. \tag{21}$$

因爲 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 故

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p},\quad q=\frac{p}{p-1},\quad p-1=\frac{p}{q}.$$

將這些等值代入 (21) 式, 便得

$$x^p-pyx\geqslant-\frac{p}{q}y^q.$$

上式兩端同以 p 除，再施行移項，便得不等式 (20).

〔例 2〕 若 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 都是正數，而 p 及 q 適合例 1 的條件，證明

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)$$
$$\leqslant(a_1^p+a_2^p+\cdots\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+b_2^q+\cdots\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}. \quad (22)$$

〔解〕 取

$$a_1^p+a_2^p+\cdots\cdots+a_n^p=A^p,\quad b_1^q+b_2^q+\cdots\cdots+b_n^q=B^q,$$

則 (22) 式的右端將等於

$$(A^p)^{\frac{1}{p}}(B^q)^{\frac{1}{q}}=AB.$$

現在令 $a_1=Ac_1,\ a_2=Ac_2,\ \cdots\cdots,\ a_n=Ac_n,$

$b_1=Bd_1,\ b_2=Bd_2,\ \cdots\cdots,\ b_n=Bd_n.$

因爲 $A^p=a_1^p+a_2^p+\cdots\cdots+a_n^p=A^pc_1^p+A^pc_2^p+\cdots\cdots+A^pc_n^p$

$$=A^p(c_1^p+c_2^p+\cdots\cdots+c_n^p),$$

故 $$c_1^p+c_2^p+\cdots\cdots+c_n^p=1.$$

同理可以得到 $$d_1^q+d_2^q+\cdots\cdots+d_n^q=1.$$

利用不等式 (20)，得

$$\left.\begin{aligned}
a_1b_1&=AB(c_1d_1)\leqslant AB\left(\frac{c_1^p}{p}+\frac{d_1^q}{q}\right),\\
a_2b_2&=AB(c_2d_2)\leqslant AB\left(\frac{c_2^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
a_nb_n&=AB(c_nd_n)\leqslant AB\left(\frac{c_n^p}{p}+\frac{d_n^q}{q}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

從這 n 個不等式，兩端各相加，得

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n$$

$$\leqslant AB\left(\frac{c_1^p+c_2^p+\cdots\cdots+c_n^p}{p}+\frac{d_1^q+d_2^q+\cdots\cdots+d_n^q}{q}\right)$$

$$=AB\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=AB$$

(因爲$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$c_1^p+c_2^p+\cdots\cdots+c_n^p=1$，$d_1^q+d_2^q+\cdots\cdots+d_n^q=1$).

由此得不等式 (22) 的左端不大於 AB，即不大於 (22) 式的右端.

不難求得 (22) 式的等號何時才能適用. 因 (21) 式的等號在

$$x=\left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{\frac{q}{p}}, \quad x^p=y^q$$

時，並且僅在這時才能適用(參考上節例 1)，故對於 (i) 中的各等式，僅在

$$c_1=d_1^{\frac{q}{p}}, \quad c_2=d_2^{\frac{q}{p}}, \quad \cdots\cdots, \quad c_n=d_n^{\frac{q}{p}},$$

即僅在 $\quad c_1^p=d_1^q, \quad c_2^p=d_2^q, \quad \cdots\cdots, \quad c_n^p=d_n^q$

時，才能適用等號.

最後，用 A^pB^q 乘這些等式，得到

$$B^q(A\,c_1)^p=A^p(B\,d_1)^q, \quad \text{即} \quad B^qa_1^p=A^pb_1^q,$$

$$\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{A^p}{B^q}, \quad \frac{a_2^p}{b_2^q}=\frac{A^p}{B^q}, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{a_n^p}{b_n^q}=\frac{A^p}{B^q}.$$

因此，(22) 式的等號僅在

$$\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{a_2^p}{b_2^q}=\cdots\cdots=\frac{a_n^p}{b_n^q}$$

時，才能適用.

注意　設在不等式 (22) 中，令 $p=2$, $q=2$, 便得不等式 (19) (參考練習題 16):

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n$$
$$\leqslant\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)}.$$

〔例 3〕　證明不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}. \tag{23}$$

〔解〕　從第二節的不等式 (7) 與 (8), 得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

各項都取以 e 爲底的自然對數，得

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e=1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

〔例 4〕　取 $z_1=1+\frac{1}{2}$,　　$z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$,

$$z_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6},\quad z_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\cdots\cdots,$$
$$z_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 之值.

〔解〕　將 (23) 式的左端不等式中的 n 換爲 $n-1$, 則得

$$\frac{1}{n}<\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\ln\frac{n}{n-1}.$$

從這個不等式及 (23) 式的右端不等式，得

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}. \tag{24}$$

從不等式 (24)，可以得到下列諸不等式：

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1},\qquad \ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n},$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2}<\frac{1}{n+2}<\ln\frac{n+2}{n+1},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\ln\frac{2n+1}{2n}<\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}.$$

各端相加，再利用‘諸數的對數和等於諸數的積的對數’的定理，便得

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(2n+1)}{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots 2n}$$

$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots 2n}{(n-1)n(n+1)\cdots\cdots(2n-1)},$$

即
$$\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}. \tag{25}$$

因爲 $\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

同樣因爲$\frac{2n}{n-1}=2+\frac{2}{n-1}$，故得

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n}{n-1}=\ln 2.$$

既然不等式 (25) 前後兩端的極限值都是 $\ln 2$，所以中間的極限值也必定是 $\ln 2$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}z_n=\ln 2.$$

〔例 5〕 取 $x_1=1$，$x_2=1-\frac{1}{2}$，$x_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，……，

$$x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 之值.

〔解〕 因爲

$$\begin{aligned}x_{2n}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\\&\qquad-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\\&\qquad\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n},\end{aligned}$$

在前例中我們取　$z_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$.

因而得 $x_{2n}=z_n-\frac{1}{n}$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\ln 2$，故

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(z_n-\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

又因爲 $x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2n+1}$ 故

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

因此 $$\lim_{n\to\infty} x_n=\ln 2.$$

注意 數 $x_1=a_1$, $x_2=a_1+a_2$, $x_3=a_1+a_2+a_3$, ……, $x_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 叫做級數

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

的**部分和**. 若級數的一連串的部分和有一定的極限值時,這級數叫做**收斂的**. 在這種情形,數 $S=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 叫做級數的和.

如例 5, 級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots$$

是收斂的,且其和等於 $\ln 2$.

〔例 6〕 級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 叫做**調和級數**. 試證明調和級數是不收斂的,即**發散的**.

〔解〕 從不等式 (23), 得 $$\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}.$$

取 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$, 可得 n 個不等式

$$1>\ln\frac{2}{1},\quad \frac{1}{2}>\ln\frac{3}{2},\quad \frac{1}{3}>\ln\frac{4}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\quad \frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}.$$

將它們相加,得

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>\ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}=\ln(n+1).$$

從這個不等式得 $$\lim_{n\to\infty} x_n\geqslant\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty,$$

由此可以證明調和級數是發散的.

〔例 7〕 證明級數

$$1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^a}+\cdots\cdots \tag{26}$$

當 $a>1$ 時是收斂的.

〔解〕 這級數的連續的部分和是

$$x_1=1,\quad x_2=1+\frac{1}{2^a},\quad x_3=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a},$$

$$x_4=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_n=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^a}$$

等等. 在這些部分和中,後者大於前者,可稱做單調的增加,即

$$x_1<x_2<x_3<x_4<\cdots\cdots<x_n<\cdots\cdots.$$

另一方面,如果我們能證明這些單調增加的連續部分和 x_n 有一定的極限值,便證明了級數 (26) 是收斂的. 取

$$y_{2n}=1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}-\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}-\frac{1}{6^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a}-\frac{1}{(2n)^a}.$$

因爲

$$y_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^a}-\frac{1}{3^a}\right)-\left(\frac{1}{4^a}-\frac{1}{5^a}\right)-\cdots\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{(2n-2)^a}-\frac{1}{(2n-1)^a}\right)-\frac{1}{(2n)^a}$$

而每一括弧內之值爲正,故

$$y_{2n}<1.$$

另一方面,

$$y_{2n}=1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}-\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}-\frac{1}{6^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a}-\frac{1}{(2n)^a}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a}+\frac{1}{(2n)^a}\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{6^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^a}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^a}+\frac{1}{(2n)^a}\right)$$

$$-\frac{2}{2^a}\left(1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^a}\right)$$

$$=x_{2n}-\frac{2}{2^a}x_n.$$

現在，因爲 $x_{2n}>x_n$，$y_{2n}<1$，故

$$1>y_{2n}>x_n-\frac{2}{2^a}x_n=\frac{2^a-2}{2^a}x_n.$$

由此得
$$x_n<\frac{2^a}{2^a-2},$$

卽當 $a>1$ 時 x_n 有極限值．由此證明級數 (26) 是收斂的，且其和不大於 $\frac{2^a}{2^a-2}$.

例如 $a=2$ 時，

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2^2}{2^2-2}=2,$$

$$S=\lim_{n\to\infty}x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\leqslant 2.$$

在高等代數學中，證明得

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (27)$$

練習題

22. 求下列級數的和:

$$S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

提示 利用等式 (27).

答 $S=\frac{\pi^2}{12}$.

23. 證明不等式

$$\frac{n^{a+1}}{a+1}<1+2^a+3^a+\cdots\cdots+n^a<\frac{(n+1)^{a+1}}{a+1}, \quad a>0.$$

24. 令 $x_n=1+2^a+3^a+\cdots\cdots+n^a$,

證明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{a+1}}=\frac{1}{a+1}, \qquad a>0.$$

25. 若 a_k, b_k, c_k 等都是正數,證明不等式

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots\cdots+a_nb_nc_n)^3$$
$$\leqslant(a_1^3+a_2^3+\cdots\cdots+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+\cdots\cdots+b_n^3)(c_1^3+c_2^3+\cdots\cdots+c_n^3).$$

提示 利用不等式 (10),並用證明不等式 (22) 所用的方法.

26. 設 $x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{kn}$, 式中的 k 是正整數,證明 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\ln k.$$

提示 用解本節例 4 所用的方法.

附錄　練習題解答

1. 在不等式(1)中(第2頁),順次令$n=m,m+1,\cdots\cdots,n$,

則得
$$2\sqrt{m+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}<2\sqrt{m}-2\sqrt{m-1},$$

$$2\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1}<\frac{1}{\sqrt{m+1}}<2\sqrt{m+1}-2\sqrt{m},$$

$$2\sqrt{m+3}-2\sqrt{m+2}<\frac{1}{\sqrt{m+2}}<2\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

將這些不等式加起來,便得

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\frac{1}{\sqrt{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

2. 在第1題的不等式中,令$m=10000$, $n=1000000$,便得

$$2\sqrt{1000001}-2\sqrt{10000}<\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2\sqrt{1000000}-2\sqrt{9999}.$$

因爲　$2\sqrt{1000001}>2\sqrt{1000000}=2000$, $2\sqrt{10000}=200$,

$$2\sqrt{9999}=\sqrt{39996}>199.98$$

(最後一個不等式的平方根準確到0.01),故得

$$2000-200=1800<\frac{1}{\sqrt{10000}}+\frac{1}{\sqrt{10001}}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2000-199.98=1800.02.$$

3. 將第2題的不等式乘50，便得 $90000<50z<90001$，

故得
$$[50z]=90000.$$

4. 當 $n=1$ 時，不等式顯然成立，即

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3\cdot1+1}}=\frac{1}{2}.$$

現在設 $n=k$ 時這不等式也成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}},\qquad(a)$$

要證明這不等式在 $n=k+1$ 時也能成立，即證明

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.\qquad(b)$$

將不等式 (a) 的兩端用 $\frac{2k+1}{2k+2}$ 乘之，得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

顯見必須證明不等式

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

成立．將這不等式的兩端用 $(2k+2)\sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$ 乘，再將所得的不等式兩端各平方，便得

$$(2k+1)^2(3k+4)<(2k+2)^2(3k+1),$$

或
$$12k^3+28k^2+19k+4<12k^3+28k^2+20k+4.$$

因爲 $k \geqslant 1$，上述不等式顯然成立.

因此對於一切 n 的值，下列不等式可以證明是對的：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

5. 在第 4 題中令 $n=50$，便得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{\sqrt{3\cdot 50+1}}=\frac{1}{\sqrt{151}}<\frac{1}{\sqrt{144}}=\frac{1}{12}.$$

6. 令 $y=6-x$，$x=6-y$，我們來求函數

$$(6-y)y^2=6y^2-y^3$$

的極大值，當 $0<y<6$. 再令 $y^2=z$，則變換爲求函數

$$6z-z^{\frac{3}{2}}$$

的極大值. 從第四節的例 1，知道這函數在

$$z=\left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}=4^2$$

時有一極大值 $\qquad 6\cdot 4^2-(4^2)^{\frac{3}{2}}=32.$

故得函數 $x(6-x)^2$ 在 $x=6-y=6-\sqrt{z}=6-4=2$ 時有一極大值 32.

7. 盒的容積（參考原題的圖）等於

$$V=x(2a-2x)^2=4x(a-x)^2,\quad 0<x<a.$$

令 $y=a-x$，$y^2=z$，就得 $\qquad V=4(az-z^{\frac{3}{2}}).$

這函數在 $\qquad z=\left(\frac{a}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}=\left(\frac{2a}{3}\right)^2$

時有一極大值. 這時

$$y=\sqrt{z}=\frac{2a}{3},\quad x=a-y=a-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3}.$$

因此，當盒高爲原正方形每邊長的六分之一時，所成盒的容積爲最大.

8. 函數 x^6+8x^2+5，當 $x=0$ 時，有一極小值是 5.

9. 令 $y=x^2$，則變換爲對於 y 爲正數時，求這個函數的極小值：

$$y^3-8y+5.$$

在第四節例 1 中，我們已證明函數 y^3-8y 的極小值等於

$$(1-3)\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}}=-2\cdot\frac{8^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}=-\frac{32\sqrt{6}}{9}.$$

所以函數 x^6-8x^2+5，或 y^3-8y+5 的極小值等於

$$-\frac{32\sqrt{6}}{9}+5=-3.6\cdots\cdots$$

10. 令 $y=x^a$，得到函數

$$y-ky^{\frac{1}{a}}=k\left(\frac{1}{k}y-y^{\frac{1}{a}}\right),\quad k>0,\quad \frac{1}{a}>1.$$

從第四節的例 1，得函數 $\frac{1}{k}y-y^{\frac{1}{a}}$ 的極大值等於

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-1}}=\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{a}\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}.$$

以 k 乘這一個值，便得到所要求的極大值

$$(1-a)\frac{k}{a}\cdot\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}}=(1-a)\left(\frac{k}{a}\right)^{1+\frac{1}{a-1}}=(1-a)\left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}}.$$

11. 函數 $\sqrt[4]{x}-2x$，$x\geqslant 0$，$\alpha=\frac{1}{4}$，$k=2$ 有一極大值，

等於 $$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}}=\frac{3}{4}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}.$$

因此，對於 $x\geqslant 0$ 的一切值，下列不等式成立：

$$\sqrt[4]{x}-2x\leqslant\frac{3}{8},\quad 或\quad \sqrt[4]{x}\leqslant\frac{3}{8}+2x.$$

12. 將第二節的不等式 (7) 寫下來：

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e,\quad (n+1)^n<en^n.$$

若 $n\geqslant 3>e$，則 $$(n+1)^n<en^n<3n^n\leqslant nn^n=n^{n+1}.$$

上式的兩端各取 $\frac{1}{n(n+1)}$ 次方，便得

$$\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}.$$

13. 因為 $1<\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3}$，故 $\sqrt[3]{3}$ 是三數 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ 中最大的一個；又從上一題，知道在 $\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[4]{4}$，……，$\sqrt[n]{n}$，……諸數中，後者總是小於前者．因此可知在諸數 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[4]{4}$，……，$\sqrt[n]{n}$，……中，$\sqrt[3]{3}$ 是最大的一個．

14. 令 $\sqrt[n]{n}=1+a_n$，$a_n>0$．兩端各取 n 次方，得

$$n=(1+a_n)^n=[(1+a_n)^{\frac{n}{2}}]^2.$$

設 $n\geqslant 2$，$\frac{n}{2}\geqslant 1$，應用定理 3，得

$$(1+a_n)^{\frac{n}{2}}>1+\frac{n}{2}a_n;\quad n>\left(1+\frac{n}{2}a_n\right)^2=1+na_n+\frac{n^2}{4}a_n^2.$$

由此得

$$n>\frac{n^2}{4}a_n^2,\quad a_n^2<\frac{4}{n},\quad a_n<\frac{2}{\sqrt{n}},\quad \sqrt[n]{n}=1+a_n<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

注意　用二項式定理，立刻便可證得

$$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

證法是這樣：

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n=1+n\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}+\cdots\cdots$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}=n,$$

從而得

$$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

15. 當 $n=1$ 及 $a_i>-1$ 時，不等式顯然成立，即

$$1+a_1\geqslant 1+a_1.$$

設這不等式直到 $n=k$ 時都成立，即

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_k)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k.$$

用 $(1+a_{k+1})$ 乘上式兩端，得

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$$

$$\geqslant(1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)(1+a_{k+1})$$

$$=1+a_1+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1}+a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots\cdots+a_ka_{k+1}.$$

因爲 $a_1,\ a_2,\cdots\cdots,\ a_k,\ a_{k+1}$ 是同符號的，故

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots\cdots+a_ka_{k+1}\geqslant 0$$

從而得

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$$

$$\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1},$$

可見這不等式在 $n=k+1$ 時也成立.

故這不等式對於一切 n 值都成立，即

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n.$$

16. 若多項式 $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots\cdots+(a_nx-b_n)^2$ 有實根 $x=x_1$ 即

$$(a_1x_1-b_1)^2+(a_2x_1-b_2)^2+\cdots\cdots+(a_nx_1-b_n)^2=0.$$

則 $a_1x_1-b_1$, $a_2x_1-b_2,\cdots\cdots,a_nx_1-b_n$ 各數都等於零，即

$$0=a_1x_1-b_1=a_2x_1-b_2=\cdots\cdots=a_nx_1-b_n,$$

$$x_1=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots\cdots=\frac{b_n}{a_n}.$$

這便證明了多項式

$$\begin{aligned}(a_1x-b_1)^2&+(a_2x-b_2)^2+\cdots\cdots+(a_nx-b_n)^2\\&=x^2(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)-2x(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)\\&\qquad+(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)\end{aligned}$$

不能有兩個不同的實根，因此

$$\begin{aligned}&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2\\&\qquad-(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)\leqslant 0.\end{aligned}$$

移項便得不等式 (19)

$$\begin{aligned}&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2\\&\qquad\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2).\end{aligned}$$

等號僅在所提及的多項式有一個實根時，即僅在

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

時才適用.

17. 從不等式 (19)，得

$$c_1^2=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)^2=\left(\frac{a_1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\frac{a_1^2}{n}+\frac{a_2^2}{n}+\cdots\cdots+\frac{a_n^2}{n}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n}$$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2}{n}=c_2^2,$$

故得 $$c_1\leqslant c_2,$$

即算術平均數不大於平方平均數.

18. 從不等式

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2=n+1+2\sqrt{n^2-1}+n-1$$
$$=2n+2\sqrt{n^2-1}<2n+2\sqrt{n^2}=4n,$$

得 $$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}.$$

以 2 乘不等式的兩端，得

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

19. 在第 18 題的不等式中，令 $n=2,\ 3,\cdots\cdots,n$，則得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}-1,\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}<\sqrt{4}-\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}}<\sqrt{5}-\sqrt{3}, \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}<\sqrt{6}-\sqrt{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

相加得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}-1.$$

兩端各加 1，得

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}.$$

注意 在第一節中，我們曾證明

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1.$$

二數 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1$ 的差小於 0.42，兩者中的任一個都可以用來作爲

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=z_n$$

的近似值.

注意 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}$ 與 z_n 的差小於 z_n 與 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1$ 的差. 證明步驟不寫了.

20. 當 $x<0$ 時，函數 $\dfrac{x^3}{x^4+5}$ 的值是負. 因此該函數的極大值在 x 是正數時才會有.

因爲
$$\frac{x^3}{x^4+5}=\frac{1}{5\left(\frac{1}{5}x+x^{-3}\right)},$$

故在函數$\frac{1}{5}x+x^{-3}$的值爲極小時，$\frac{x^3}{x^4+5}$的值爲極大．從第四節的例 5，得函數$\frac{1}{5}x+x^{-3}$的極小值等於

$$(1+3)\left(\frac{\frac{1}{5}}{3}\right)^{\frac{-3}{-3-1}}=4\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

故得函數$\frac{x^3}{x^4+5}$的極大值是

$$\frac{1}{5\cdot4\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{15^{\frac{3}{4}}}{20}=\frac{15}{20\sqrt[4]{15}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{15}}.$$

爲了求函數 $x^6-0.6\,x^{10}$ 的極大值，令 $y=x^6$．顯然 $y\geqslant0$.

函數 $$y-0.6\,y^{\frac{10}{6}}=0.6\left(\frac{10}{6}y-y^{\frac{10}{6}}\right)$$

的極大值（參考第四節例 1）等於

$$0.6\left(\frac{10}{6}-1\right)\left(\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-1}}=0.4.$$

21. 令 $y=\frac{1}{x^2}$，則得

$$\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}=y^{-\frac{1}{4}}+ay.$$

從第四節例 5，得函數 $y^{-\frac{1}{4}}+ay$ 的極小值等於

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)(4\,a)^{\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}(4\,a)^{\frac{1}{5}}.$$

令 $\frac{5}{4}(4\,a)^{\frac{1}{5}}=2.5$，則得

$$(4\,a)^{\frac{1}{5}}=2,\quad 4\,a=32,\quad a=8.$$

22. 利用等式 (27)，得

$$S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{2}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$$

23. 因爲 $a>0$，故 $a+1>1$，且

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+a}>1+\frac{1+a}{n},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1+a}>1-\frac{1+a}{n}.$$

兩不等式的兩端同以 n^{1+a} 乘，得

$$(n+1)^{1+a}>n^{1+a}+(1+a)n^a,$$

$$(n-1)^{1+a}>n^{1+a}-(1+a)n^a.$$

從這兩個不等式得

$$\frac{n^{1+a}-(n-1)^{1+a}}{1+a}<n^a<\frac{(n+1)^{1+a}-n^{1+a}}{1+a}.$$

在上述不等式中，令 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$，則得

$$\frac{1}{1+a}<1<\frac{2^{1+a}-1}{1+a},$$

$$\frac{2^{1+a}-1}{1+a}<2^a<\frac{3^{1+a}-2^{1+a}}{1+a},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n^{1+a}-(n-1)^{1+a}}{1+a}<n^a<\frac{(n+1)^{1+a}-n^{1+a}}{1+a}.$$

相加得

$$\frac{n^{1+a}}{1+a}<1+2^a+3^a+\cdots\cdots+n^a<\frac{(n+1)^{1+a}-1}{1+a}<\frac{(n+1)^{1+a}}{1+a}.$$

24. 從第 23 題得

$$\frac{1}{1+a}<\frac{1+2^a+3^a+\cdots\cdots+n^a}{n^{1+a}}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+a}}{1+a}.$$

這不等式的左端是一個定值$\frac{1}{1+a}$，又當 n 無限增加時，右端趨向於極限值$\frac{1}{1+a}$. 所以中間式的極限值（當 n 無限增加時）也必定是$\frac{1}{1+a}$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^a+3^a+\cdots\cdots+n^a}{n^{1+a}}=\frac{1}{1+a}.$$

25. 令

$$A^3=a_1^3+a_2^3+\cdots\cdots+a_n^3,$$

$$B^3=b_1^3+b_2^3+\cdots\cdots+b_n^3,$$

$$C^3=c_1^3+c_2^3+\cdots\cdots+c_n^3,$$

$$x_1=\frac{a_1}{A},\quad x_2=\frac{a_2}{A},\cdots\cdots,x_n=\frac{a_n}{A};$$

$$y_1=\frac{b_1}{B},\quad y_2=\frac{b_2}{B},\cdots\cdots,y_n=\frac{b_n}{B};$$

$$z_1=\frac{c_1}{C},\quad z_2=\frac{c_2}{C},\cdots\cdots,z_n=\frac{c_n}{C}.$$

則從不等式 (10) 得

$$a_1b_1c_1=ABCx_1y_1z_1\leqslant ABC\frac{x_1^3+y_1^3+z_1^3}{3},$$

$$a_2b_2c_2=ABCx_2y_2z_2\leqslant ABC\frac{x_2^3+y_2^3+z_2^3}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a_nb_nc_n=ABCx_ny_nz_n\leqslant ABC\frac{x_n^3+y_n^3+z_n^3}{3}.$$

將這些不等式左右兩端各相加，得

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots\cdots+a_nb_nc_n)$$

$$\leqslant ABC\left(\frac{x_1^3+x_2^3+\cdots\cdots+x_n^3}{3}+\frac{y_1^3+y_2^3+\cdots\cdots+y_n^3}{3}+\frac{z_1^3+z_2^3+\cdots\cdots+z_n^3}{3}\right).$$

但 $$x_1^3+x_2^3+\cdots\cdots x_n^3=\frac{a_1^3+a_2^3+\cdots\cdots+a_n^3}{A^3}=\frac{A^3}{A^3}=1,$$

$$y_1^3+y_2^3+\cdots\cdots+y_n^3=1,\quad z_1^3+z_2^3+\cdots\cdots+z_n^3=1,$$

故得 $$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots\cdots+a_nb_nc_n)$$

$$\leqslant ABC\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=ABC.$$

兩端各乘3次方，便得

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots\cdots+a_nb_nc_n)^3\leqslant A^3B^3C^3$$

$$=(a_1^3+a_2^3+\cdots\cdots+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+\cdots\cdots+b_n^3)(c_1^3+c_2^3+\cdots\cdots+c_n^3).$$

26. 對於不同的 n 之值寫出不等式 (24)，得

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1},$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\ln\frac{kn+1}{kn}<\frac{1}{kn}<\ln\frac{kn}{kn-1}.$$

相加得

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(kn+1)}{n(n+1)\cdot\cdots\cdot kn}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{kn}$$

$$<\ln\left[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\cdots\cdots\frac{kn}{kn-1}\right],$$

即 $$\ln\frac{kn+1}{n}=\ln\left(k+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{kn}$$

$$<\ln\frac{kn}{n-1}=\ln\left(k+\frac{k}{n-1}\right).$$

若 n 無限增加，則 $\ln\left(k+\frac{1}{n}\right)$ 及 $\ln\left(k+\frac{k}{n-1}\right)$ 都趨向於同一極限值 $\ln k$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{kn}\right)=\ln k$$

[General Information]
书名=不等式
作者=（苏联）科罗夫琴著　　许槑译
页数=54
SS号=11020337
出版日期=1952年08月第1版