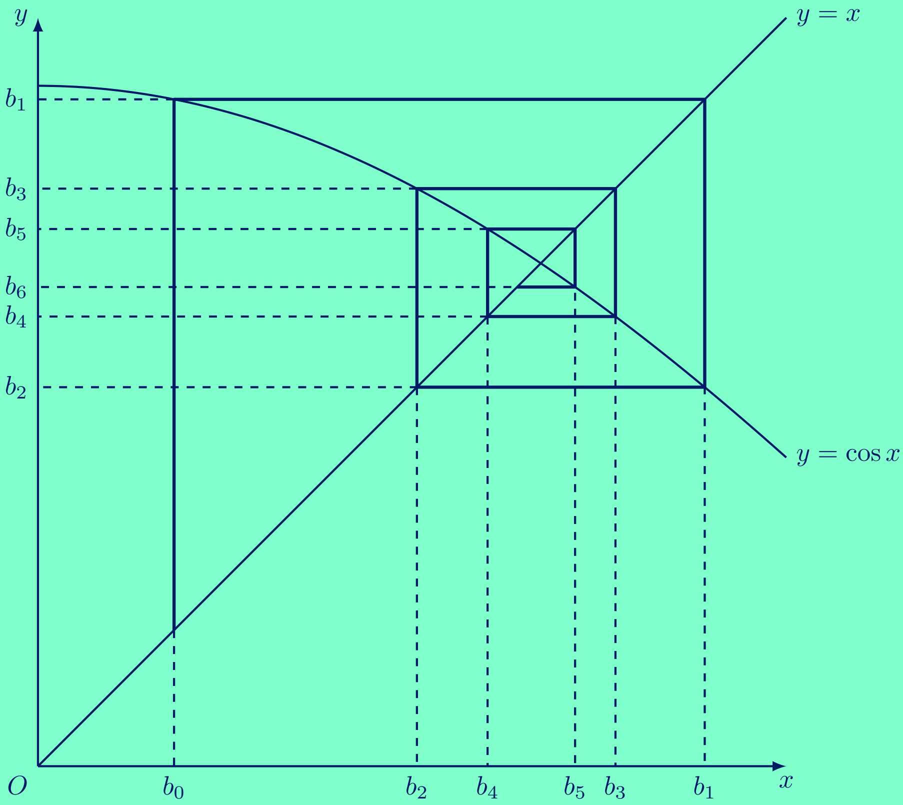
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2012 年第 3 期　　总第 10 期



目录

趣味数学

1.1 中国象棋棋盘——赵国瑞

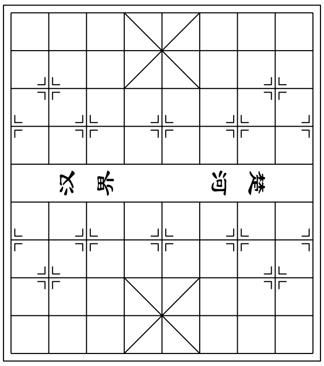
下面是一张中国象棋棋盘，上面有 $9\times10=90$ 个交叉点。布鲁斯博士虽然不会下中国象棋，但对这张棋盘产生了浓厚的兴趣。他问自己：以这些交叉点为顶点，可以连成多少个正方形呢？

他想了一会儿，发觉这问题比原先估计的要复杂，这里不但有正着放的正方形，而且有斜着放的正方形，不但有倾斜 $45°$ 的正方形，而且有其他倾斜度的正方形。

博士想着想着脑袋就有点发胀，便躺到床上想休息一下，谁知这一躺竟睡着了。这个问题只好留给你了。

你知道这样能连出多少个正方形吗？

提示：先考虑正着放的正方形，然后考虑被“套”在正着放的正方形内的斜着放的正方形。



答案 首先考虑以棋盘上竖线和横线为边的正方形（其中竖线虽然在河界处断了，但在考虑时可把它们连上，因为题目问的是以棋盘中各交叉点为顶点的正方形，而不是以棋盘中各线段为边的正方形，这些交叉点之间有没有连线，连线是竖线还是横线抑或斜线，都没有关系），这些正方形都是“正放”的正方形。以棋盘中小方格的边长为单位边长，这些“正放”的正方形包括：

1×1 的正方形 $8\times9=72$ 个；

2×2 的正方形 $7\times8=56$ 个；

3×3 的正方形 $6\times7=42$ 个；

4×4 的正方形 $5\times6=30$ 个；

5×5 的正方形 $4\times5=20$ 个；

6×6 的正方形 $3\times4=12$ 个；

7×7 的正方形 $2\times3=6$ 个；

8×8 的正方形 $1\times2=2$ 个。

加起来，一共有 $72+56+42+30+20+12+6+2=240$ 个“正放”的正方形。

其次考虑那些以棋盘上交叉点为顶点的“斜放”的正方形。注意每个这样“斜放”的正方形，总是被“套”在一个上面那种“正放”的正方形内，或者说，总是内接于一个“正放”的正方形，因此我们可以反过来考虑，即对于上面每种“正放”的正方形，考虑其内部可以有几个内接的以交叉点为顶点的“斜放”的正方形。显然，1×1 的“正放”正方形中不可能有这样的内接“斜放”正方形，因此我们从 2×2 的“正放”正方形开始。

每个 2×2 的“正放”正方形中有 1 个这样的“斜放”正方形；

每个 3×3 的“正放”正方形中有 2 个这样的“斜放”正方形；

每个 4×4 的“正放”正方形中有 3 个这样的“斜放”正方形；

每个 5×5 的“正放”正方形中有 4 个这样的“斜放”正方形；

每个 6×6 的“正放”正方形中有 5 个这样的“斜放”正方形；

每个 7×7 的“正放”正方形中有 6 个这样的“斜放”正方形；

每个 8×8 的“正放”正方形中有 7 个这样的“斜放”正方形。

其中 2×2 和 3×3 的“正放”正方形中的情况如图 1.1.1 所示，读者应不难想像其他“正放”正方形中的情况。

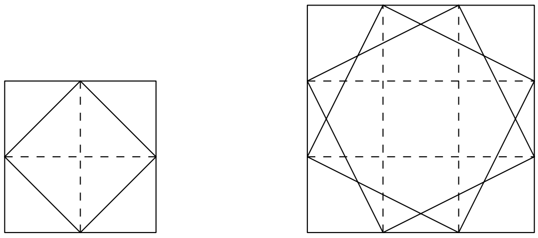


图 1.1.1

因此，“斜放”正方形一共有 $1 \times 56 + 2 \times 42 + 3 \times 30 + 4 \times 20 + 5 \times 12 + 6 \times 6 + 7 \times 2 = 56 + 84 + 90 + 80 + 60 + 36 + 14 = 420$ 个，加上“正放”的 240 个，总共是 660 个。

因此，总共能连成 660 个正方形。

1.2 从“不安心的狗”谈起——赵国瑞

我国著名数学家苏步青教授，一次在德国访问，一位有名的德国数学家在电车上给他出了一道名叫“不安心的狗”的数学趣题：“甲和乙分别从 A、B 两地同时出发，相对而行，两地相距 100 里，甲每小时走 6 里，乙每小时走 4 里。如果甲带一只狗，和甲同时出发，狗以每小时 10 里的速度向乙奔去，遇到乙后即回头向甲奔去，遇到甲后又回头向乙奔去，直到甲乙两人相遇时狗才停住。这只狗共跑了多少里路？”

解答这道题时，苏步青爷爷抓住“狗从开始到停止跑的时间与甲乙二人相遇时间相同”，从而使问题巧妙求出答案：$10 \times [100 \div (6+4)] = 100$（里）。

如果题目其他条件不变，而把狗跑的方式改变为“如果甲带一只狗，和甲同时出发，以每小时 10 里的速度不停地往返于 A、B 两地。”你能求出乙从出发直到 A 地与狗相遇的次数及相遇时间和地点吗？

这个问题当然可以用列方程的方法求解。

设经过 x 小时乙与狗第一次相遇于 C 点（如图 1.2.1），则 $AC = 10x$，$BC = 4x$，根据 $AC + BC = AB$ 列方程得 $10x + 4x = 100$，得 $x = \dfrac{50}{7}$（小时），$AC = \dfrac{50}{7} \times 10 = \dfrac{500}{7}$（里）；

设经过 y 小时乙与狗第二次相遇于 D 点（如图 1.2.2），则 $BD = 4y$，$AB + BD = 10y$，即 $100 + 4y = 10y$，解得 $y = \dfrac{50}{3}$（小时），$AD = AB - BD = 100 - \dfrac{50}{3} \times 4 = \dfrac{100}{3}$（里）；

设经过 z 小时乙与狗第三次相遇于 E 点（如图 1.2.3），则 $BE = 4z$，$2AB + AE = 10z$，即 $200 + AE = 10z$，所以 $AE = 10z - 200$。又因为 $AE = AB - BE = 100 - 4z$，所以 $10z - 200 = 100 - 4z$，解得 $z = \dfrac{150}{7}$（小时），$AE = 100 - \dfrac{150}{7} \times 4 = \dfrac{100}{7}$（里）；

设经过 t 小时乙与狗第四次相遇于 F 点（如图 1.2.4），则 $BF = 4t$，$3AB + BF = 10t$，即 $300 + 4t = 10t$，解得 $t = 50$。由于乙从出发直到 A 地共需 25 小时，在这段时间内乙与狗不可能第四次相遇，所以这种情况不存在。

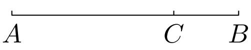


图 1.2.1

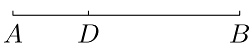


图 1.2.2

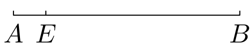


图 1.2.3

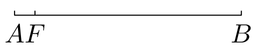


图 1.2.4

综上所述，乙从出发直到 A 地与狗一共相遇三次，第一次在出发 $\dfrac{50}{7}$ 小时后相遇，此时与 A 地相距 $\dfrac{500}{7}$ 里；第二次在出发 $\dfrac{50}{3}$ 小时后相遇，此时与 A 地相距 $\dfrac{100}{3}$ 里；第三次在出发 $\dfrac{150}{7}$ 小时后相遇，此时与 A 地相距 $\dfrac{100}{7}$ 里。

以上我们通过画图列方程并分情况讨论的办法，求出了乙从出发直到 A 地与狗相遇的次数及相遇时间和地点。这种方法比较麻烦，需要有扎实的基础知识，如果稍不留神，非常容易出错。有没有一种简便易行的方法呢？回答是肯定的，在我们学习了一次函数的知识后，就可利用一次函数的知识求解。

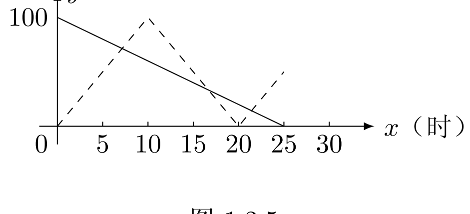


图 1.2.5

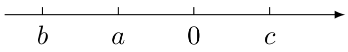
如图 1.2.5，用实线表示乙与 A 地的距离，用虚线表示狗与 A 地的距离，那么实线和虚线的交点坐标即表示狗与乙相遇时的时间及与 A 地的距离，从图 5 可以清楚地看到实线和虚线一共有 3 个交点，所以乙从出发直到 A 地与狗一共相遇 3 次，再分别求出三个交点坐标，即可求出相遇时间和相遇地点。显然这种通过作一次函数图象的方法来解这类较难的相遇问题非常简捷，体现了利用函数图象解决问题的优越性。

数学竞赛

2.1　2012 年全国初中数学竞赛试题（正题）

一、选择题（共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分。每道小题均给出了代号为 A、B、C、D 的四个选项，其中有且只有一个选项是正确的。请将正确选项的代号填入题后的括号里，不填、多填或错填都得 0 分）

1（甲）．如果实数 a，b，c 在数轴上的位置如图所示，那么代数式 $\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$ 可以化简为　（　）



（第 1（甲）题）

（A）$2c-a$　（B）$2a-2b$　（C）$-a$　（D）a

1（乙）．如果 $a=-2+\sqrt{2}$，那么 $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+a}}$ 的值为　（　）

（A）$-\sqrt{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）$2\sqrt{2}$

2（甲）．如果正比例函数 $y=ax$（$a\neq 0$）与反比例函数 $y=\dfrac{b}{x}$（$b\neq 0$）的图象有两个交点，其中一个交点的坐标为 $(-3,-2)$，那么另一个交点的坐标为　（　）

（A）$(2,3)$　（B）$(3,-2)$　（C）$(-2,3)$　（D）$(3,2)$

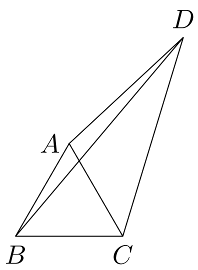
2（乙）．在平面直角坐标系 xOy 中，满足不等式 $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$ 的整数点坐标 (x,y) 的个数为　（　）

（A）10　（B）9　（C）7　（D）5

3（甲）．如果 a，b 为给定的实数，且 $1<a<b$，那么 1，$a+1$，$2a+b$，$a+b+1$ 这四个数据的平均数与中位数之差的绝对值是　（　）

（A）1　（B）$\dfrac{2a-1}{4}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{1}{4}$

3（乙）．如图，四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 是对角线，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\angle ADC=30^\circ$，$AD=3$，$BD=5$，则 CD 的长为　（　）



（第 3（乙）题）

（A）$3\sqrt{2}$　（B）4　（C）$2\sqrt{5}$　（D）4.5

4（甲）．小倩和小玲每人都有若干面值为整数元的人民币。小倩对小玲说：“你若给我 2 元，我的钱数将是你的 n 倍”；小玲对小倩说：“你若给我 n 元，我的钱数将是你的 2 倍”，其中 n 为正整数，则 n 的可能值的个数是　（　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

4（乙）．如果关于 x 的方程 $x^2-px-q=0$（p，q 是正整数）的正根小于 3，那么这样的方程的个数是　（　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8

5（甲）．一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上的数字分别是 1，2，3，4，5，6。掷两次骰子，设其朝上的面上的两个数字之和除以 4 的余数分别是 0，1，2，3 的概率为 p_0，p_1，p_2，p_3，则 p_0，p_1，p_2，p_3 中最大的是（　）

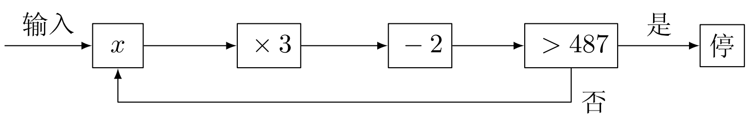
（A）p_0　　（B）p_1　　（C）p_2　　（D）p_3

5（乙）．黑板上写有 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\cdots$，$\frac{1}{100}$ 共 100 个数字。每次操作先从黑板上的数中选取 2 个数 a，b，然后删去 a，b，并在黑板上写上数 $a+b+ab$，则经过 99 次操作后，黑板上剩下的数是（　）

（A）2012　　（B）101　　（C）100　　（D）99

二、填空题（共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

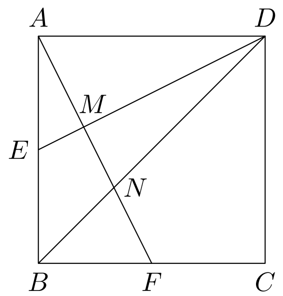
6（甲）．按如图的程序进行操作，规定：程序运行从“输入一个值 x”到“结果是否 >487?”为一次操作。如果操作进行四次才停止，那么 x 的取值范围是________。



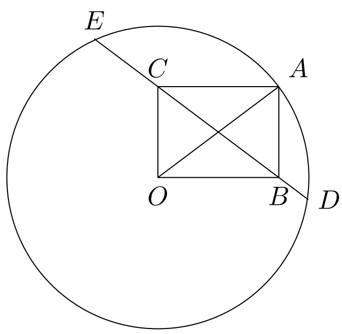
（第 6（甲）题）

6（乙）．如果 a，b，c 是正数，且满足 $a+b+c=9$，$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$，那么 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的值为________。

7（甲）．如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{15}$，E，F 分别是 AB，BC 的中点，AF 与 DE，DB 分别交于点 M，N，则 $\triangle DMN$ 的面积是________。



（第 7（甲）题）



（第 7（乙）题）

7（乙）．如图，$\odot O$ 的半径为 20，A 是 $\odot O$ 上一点。以 OA 为对角线作矩形 $OBAC$，且 $OC=12$。延长 BC，与 $\odot O$ 分别交于 D，E 两点，则 $CE-BD$ 的值等于________。

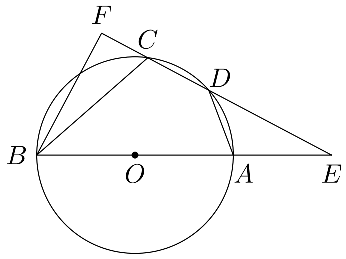
8（甲）．如果关于 x 的方程 $x^2+kx+\frac{3}{4}k^2-3k+\frac{9}{2}=0$ 的两个实数根分别为 x_1，x_2，那么 $\frac{x_1^{2011}}{x_2^{2012}}$ 的值为________。

8（乙）．设 n 为整数，且 $1\leqslant n\leqslant 2012$。若 $(n^2-n+3)(n^2+n+3)$ 能被 5 整除，则所有 n 的个数为________。

9（甲）．2 位八年级同学和 m 位九年级同学一起参加象棋比赛，比赛为单循环，即所有参赛者彼此恰好比赛一场。记分规则是：每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分；平局各得 1 分。比赛结束后，所有同学的得分总和为 130 分，而且平局数不超过比赛局数的一半，则 m 的值为________。

9（乙）．如果正数 x，y，z 可以是一个三角形的三边长，那么称 (x,y,z) 是三角形数。若 (a,b,c) 和 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ 均为三角形数，且 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $\frac{a}{c}$ 的取值范围是________。

10（甲）．如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，AB 是直径，$AD=DC$。分别延长 BA，CD，交点为 E。作 $BF\perp EC$，并与 EC 的延长线交于点 F。若 $AE=AO$，$BC=6$，则 CF 的长为________。



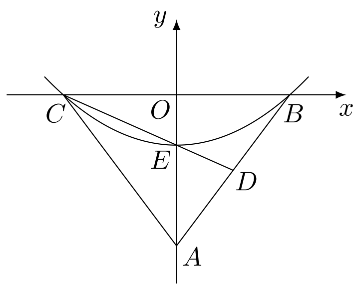
（第 10（甲）题）

10（乙）．已知 n 是偶数，且 $1 \leqslant n \leqslant 100$。若有唯一的正整数对 (a, b) 使得 $a^2 = b^2 + n$ 成立，则这样的 n 的个数为________。

三、解答题（共 4 题，每题 20 分，共 80 分）

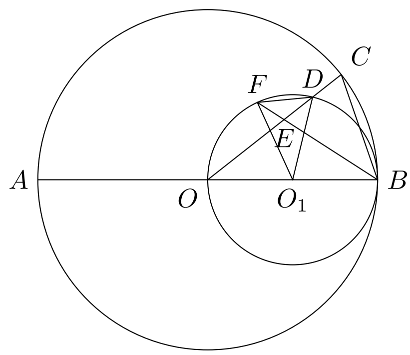
11（甲）．已知二次函数 $y = x^2 + (m+3)x + m + 2$，当 $-1 < x < 3$ 时，恒有 $y < 0$；关于 x 的方程 $x^2 + (m+3)x + m + 2 = 0$ 的两个实数根的倒数和小于 $-\dfrac{9}{10}$。求 m 的取值范围。

11（乙）．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，$AO = 8$，$AB = AC$，$\sin\angle ABC = \dfrac{4}{5}$。$CD$ 与 y 轴交于点 E，且 $S_{\triangle COE} = S_{\triangle ADE}$。已知经过 B，C，E 三点的图象是一条抛物线，求这条抛物线对应的二次函数的解析式。



（第 11（乙）题）

12（甲）．如图，$\odot O$ 的直径为 AB，$\odot O_1$ 过点 O，且与 $\odot O$ 内切于点 B。C 为 $\odot O$ 上的点，OC 与 $\odot O_1$ 交于点 D，且 $OD > CD$。点 E 在 OD 上，且 $DC = DE$，BE 的延长线与 $\odot O_1$ 交于点 F，求证：$\triangle BOC \sim \triangle DO_1F$。

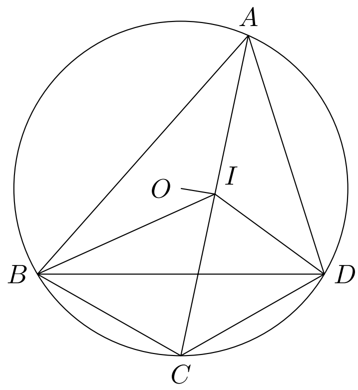


（第 12（甲）题）

12（乙）．如图，$\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 是它的对角线，AC 的中点 I 是 $\triangle ABD$ 的内心。求证：

（1）OI 是 $\triangle IBD$ 的外接圆的切线；

（2）$AB + AD = 2BD$。



（第 12（乙）题）

13（甲）．已知整数 a，b 满足：$a-b$ 是素数，且 ab 是完全平方数。当 $a \geqslant 2012$ 时，求 a 的最小值。

13（乙）．凸 n 边形中最多有多少个内角等于 150°？并说明理由。

14（甲）．求所有正整数 n，使得存在正整数 x_1，x_2，$\cdots$，x_{2012}，满足 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2012}$，且 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}+\cdots+\dfrac{2012}{x_{2012}}=n$。

14（乙）．将 2，3，$\cdots$，n（$n \geqslant 2$）任意分成两组，如果总可以在其中一组中找到数 a，b，c（可以相同）使得 $a^b=c$，求 n 的最小值。

2.2 2012 年全国初中数学竞赛试题（正题）参考答案

一、选择题

1（甲）. C

解 由实数 a，b，c 在数轴上的位置可知 $b<a<0<c$，且 $|b|>c$，所以

$$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|=-a+(a+b)+(c-a)-(b+c)=-a。\qquad\square$$

1（乙）. B

解 $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+a}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$。 $\square$

2（甲）. D

解 由题设知，$-2=a\cdot(-3)$，$(-3)\cdot(-2)=b$，所以 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=6$。

解方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}x,\\ y=\dfrac{6}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\ y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\ y=2。\end{cases}$ 所以另一个交点的坐标为 $(3,2)$。 $\square$

注：利用正比例函数与反比例函数的图象及其对称性，可知两个交点关于原点对称，因此另一个交点的坐标为 $(3,2)$。

2（乙）. B

解 由题设 $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$，得 $0\leqslant(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$。因为 x，y 均为整数，所以有

$$\begin{cases}(x-1)^2=0,\\(y-1)^2=0;\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)^2=0,\\(y-1)^2=1;\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)^2=1,\\(y-1)^2=0;\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)^2=1,\\(y-1)^2=1。\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\y=0;\end{cases}\ \begin{cases}x=0,\\y=1;\end{cases}\ \begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}\ \begin{cases}x=0,\\y=2;\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\y=0;\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\y=2。\end{cases}$$

以上共计 9 对 (x,y)。 $\square$

3（甲）. D

解 由题设知，$1<a+1<a+b+1<2a+b$，所以这四个数据的平均数为

$$\frac{1+(a+1)+(a+b+1)+(2a+b)}{4}=\frac{3+4a+2b}{4},$$

中位数为

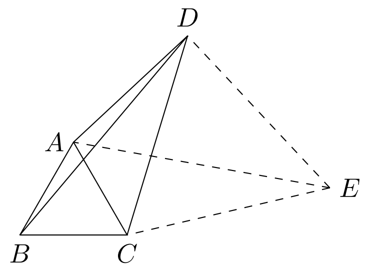
$$\frac{(a+1)+(a+b+1)}{2}=\frac{4+4a+2b}{4},$$

于是

$$\frac{4+4a+2b}{4}-\frac{3+4a+2b}{4}=\frac{1}{4}。\qquad\square$$

3（乙）. B

解 如图，以 CD 为边作等边 $\triangle CDE$，连接 AE。



（第 3（乙）题）

由于 $AC=BC$，$CD=CE$，$\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD=\angle ACE$，所以 $\triangle BCD\cong\triangle ACE$，$BD=AE$。

又因为 $\angle ADC=30^\circ$，所以 $\angle ADE=90^\circ$。

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE=5$，$AD=3$，于是 $DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=4$，所以 $CD=DE=4$。 □

4（甲）．D

解 设小倩所有的钱数为 x 元，小玲所有的钱数为 y 元，x，y 均为非负整数。由题设可得

$$\begin{cases} x+2=n(y-2), \\ y+n=2(x-n), \end{cases}$$

消去 x 得

$$(2y-7)n=y+4 \implies 2n=\frac{(2y-7)+15}{2y-7}=1+\frac{15}{2y-7},$$

因为 $\dfrac{15}{2y-7}$ 为正整数，所以 $2y-7$ 的值分别为 1，3，5，15，所以 y 的值只能为 4，5，6，11。从而 n 的值分别为 8，3，2，1；x 的值分别为 14，7，6，7。 □

4（乙）．C

解 由一元二次方程根与系数关系知，两根的乘积为 $-q<0$，故方程的根为一正一负。由二次函数 $y=x^2-px-q$ 的图象知，当 $x=3$ 时，$y>0$，所以 $3^2-3p-q>0$，即 $3p+q<9$。由于 p，q 都是正整数，所以 $p=1$，$1\leqslant q\leqslant 5$；或 $p=2$，$1\leqslant q\leqslant 2$，此时都有 $\Delta=p^2+4q>0$。于是共有 7 组 (p,q) 符合题意。 □

5（甲）．D

解 掷两次骰子，其朝上的面上的两个数字构成的有序数对共有 36 个，其和除以 4 的余数分别是 0，1，2，3 的有序数对有 9 个，8 个，9 个，10 个，所以 $p_0=\dfrac{9}{36}$，$p_1=\dfrac{8}{36}$，$p_2=\dfrac{9}{36}$，$p_3=\dfrac{10}{36}$，因此 p_3 最大。 □

5（乙）．C

解 因为 $a+b+ab+1=(a+1)(b+1)$，所以每次操作前和操作后，黑板上的每个数加 1 后的乘积不变。

设经过 99 次操作后黑板上剩下的数为 x，则

$$x+1=(1+1)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{100}+1\right),$$

解得 $x+1=101$，$x=100$。 □

二、填空题

6（甲）. $7 < x \leqslant 19$

解 前四次操作的结果分别为

$$3x-2，3(3x-2)-2=9x-8，3(9x-8)-2=27x-26，3(27x-26)-2=81x-80。$$

由已知得

$$\begin{cases} 27x-26 \leqslant 487, \\ 81x-80 > 487, \end{cases}$$

解得 $7 < x \leqslant 19$。

容易验证，当 $7 < x \leqslant 19$ 时，$3x-2 \leqslant 487$，$9x-8 \leqslant 487$，故 x 的取值范围是 $7 < x \leqslant 19$。 □

6（乙）. 7

解 由已知可得

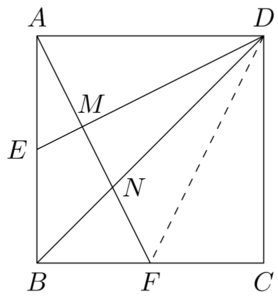
$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{9-b-c}{b+c}+\frac{9-c-a}{c+a}+\frac{9-a-b}{a+b} \\ &= \frac{9}{b+c}+\frac{9}{c+a}+\frac{9}{a+b}-3 \\ &= 9\times\frac{10}{9}-3=7。 \end{aligned}$$ □

7（甲）. 8

解 连接 DF，记正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$。由题设易知 $\triangle BFN \sim \triangle DAN$，所以

$$\frac{AD}{BF}=\frac{AN}{NF}=\frac{DN}{BN}=\frac{2}{1},$$

由此得 $AN=2NF$，所以 $AN=\frac{2}{3}AF$。



（第 7（甲）题）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，因为 $AB=2a$，$BF=a$，所以 $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$，于是

$$\cos\angle BAF=\frac{AB}{AF}=\frac{2\sqrt{5}}{5}。$$

由题设可知 $\triangle ADE \cong \triangle BAF$，所以

$$\angle AED=\angle AFB,$$

$$\angle AME=180^\circ-\angle BAF-\angle AED=180^\circ-\angle BAF-\angle AFB=90^\circ,$$

于是

$$AM = AE \cdot \cos\angle BAF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a,$$

$$MN = AN - AM = \frac{2}{3}AF - AM = \frac{4\sqrt{5}}{15}a,$$

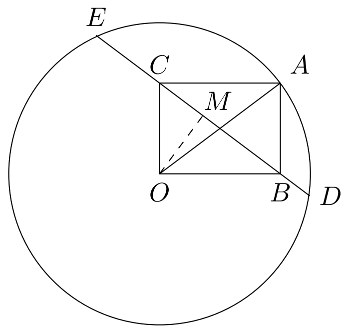
$$\frac{S_{\triangle MND}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{MN}{AF} = \frac{4}{15},$$

又 $S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2}\cdot(2a)\cdot(2a) = 2a^2$，所以 $S_{\triangle MND} = \frac{4}{15}S_{\triangle AFD} = \frac{8}{15}a^2$。

因为 $a = \sqrt{15}$，所以 $S_{\triangle MND} = 8$。 □

7（乙）．$\frac{28}{5}$

解 如图，设 DE 的中点为 M，连接 OM，则 $OM \perp DE$。因为 $OB = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$，所以 $OM = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{16 \times 12}{20} = \frac{48}{5}$，$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \frac{36}{5}$，$BM = \frac{64}{5}$。



（第 7（乙）题）

所以 $CE - BD = (EM - CM) - (DM - BM) = BM - CM = \frac{64}{5} - \frac{36}{5} = \frac{28}{5}$。 □

8（甲）．$-\frac{2}{3}$

解 根据题意，关于 x 的方程有

$$\Delta = k^2 - 4\left(\frac{3}{4}k^2 - 3k + \frac{9}{2}\right) \geqslant 0,$$

由此得 $(k-3)^2 \leqslant 0$。又 $(k-3)^2 \geqslant 0$，所以 $(k-3)^2 = 0$，从而 $k = 3$。此时方程为 $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$，解得 $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$。故 $\frac{x_1^{2011}}{x_2^{2012}} = \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{3}$。 □

8（乙）．1610

解 因为 $(n^2 - n + 3)(n^2 + n + 3) = n^4 + 5n^2 + 9 = (n-1)(n+1)(n^2+1) + 5n^2 + 10$。

当 n 被 5 除余数是 1 或 4 时，$n-1$ 或 $n+1$ 能被 5 整除，则 $(n^2 - n + 3)(n^2 + n + 3)$ 能被 5 整除；

当 n 被 5 除余数是 2 或 3 时，n^2+1 能被 5 整除，则 $(n^2 - n + 3)(n^2 + n + 3)$ 能被 5 整除；

当 n 被 5 除余数是 0 时，$(n^2 - n + 3)(n^2 + n + 3)$ 不能被 5 整除。

所以符合题设要求的所有 n 的个数为 $\frac{2010}{10} \times 8 + 2 = 1610$。 □

9（甲）．8

解 设平局数为 a，胜（负）局数为 b，由题设知 $2a+3b=130$，由此得 $0\leqslant b\leqslant 43$。

又 $a+b=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$，所以 $2a+2b=(m+1)(m+2)$。于是

$$0\leqslant b=130-(m+1)(m+2)\leqslant 43,$$

$$87\leqslant(m+1)(m+2)\leqslant 130,$$

由此得 $m=8$，或 $m=9$。

当 $m=8$ 时，$b=40$，$a=5$；当 $m=9$ 时，$b=20$，$a=35$，$a>\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{55}{2}$，不合题设。

故 $m=8$。 □

9（乙）．$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<\dfrac{a}{c}\leqslant 1$

解 由题设得

$$\begin{cases} a+b>c, \\ \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

所以

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c}+\frac{1}{b}>\frac{1}{a},$$

即

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{c-a}>\frac{1}{a},$$

整理得

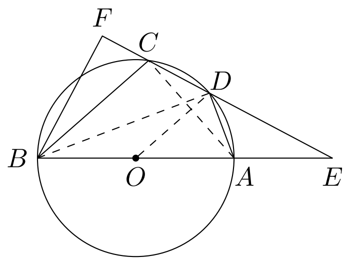
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2-3\left(\frac{a}{c}\right)+1<0,$$

由二次函数 $y=x^2-3x+1$ 的图象及其性质，得 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<\dfrac{a}{c}<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$。

又因为 $\dfrac{a}{c}\leqslant 1$，所以 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<\dfrac{a}{c}\leqslant 1$。 □

10（甲）．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

解 如图，连接 AC，BD，OD。



（第 10（甲）题）

由 AB 是 $\odot O$ 的直径知 $\angle BCA=\angle BDA=90^\circ$。

依题设 $\angle BFC=90^\circ$，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，所以 $\angle BCF=\angle BAD$，所以 $\text{Rt}\triangle BCF\sim\text{Rt}\triangle BAD$，因此 $\dfrac{BC}{CF}=\dfrac{BA}{AD}$。

因为 OD 是 $\odot O$ 的半径，$AD=CD$，所以 OD 垂直平分 AC，$OD\parallel BC$，于是 $\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{OE}{OB}=2$。因此

$$DE=2CD=2AD，CE=3AD。$$

由 $\triangle AED \sim \triangle CEB$，知 $DE \cdot EC = AE \cdot BE$。因为 $AE = \dfrac{BA}{2}$，$BE = \dfrac{3}{2}BA$，所以 $2AD \cdot 3AD = \dfrac{BA}{2} \cdot \dfrac{3}{2}BA$，$BA = 2\sqrt{2}AD$，故

$$CF = \frac{AD}{BA} \cdot BC = \frac{BC}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}。$$ □

10（乙）. 12

解 由已知有 $(a-b)(a+b) = n$，且 n 为偶数，所以 $a-b$，$a+b$ 同为偶数，于是 n 是 4 的倍数。设 $n = 4m$，则 $1 \leqslant m \leqslant 25$。

（I）若 $m = 1$，可得 $b = 0$，与 b 是正整数矛盾。

（II）若 m 至少有两个不同的素因数，则至少有两个正整数对 (a, b) 满足 $\dfrac{a-b}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} = m$；若 m 恰是一个素数的幂，且这个幂指数不小于 3，则至少有两个正整数对 (a, b) 满足 $\dfrac{a-b}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} = m$。

（III）若 m 是素数，或 m 恰是一个素数的幂，且这个幂指数为 2，则有唯一的正整数对 (a, b) 满足 $\dfrac{a-b}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} = m$。

因为有唯一正整数对 (a, b)，所以 m 的可能值为 2，3，4，5，7，9，11，13，17，19，23，25，共有 12 个。 □

三、解答题

11（甲）.

解 因为当 $-1 < x < 3$ 时，恒有 $y < 0$，所以

$$\Delta = (m+3)^2 - 4(m+2) > 0,$$

即 $(m+1)^2 > 0$，所以 $m \neq -1$。 …………（5 分）

当 $x = -1$ 时，$y \leqslant 0$；当 $x = 3$ 时，$y \leqslant 0$，即

$$(-1)^2 + (m+3)(-1) + m + 2 \leqslant 0，且\ 3^2 + 3(m+3) + m + 2 \leqslant 0,$$

解得 $m \leqslant -5$。 …………（10 分）

设方程 $x^2 + (m+3)x + (m+2) = 0$ 的两个实数根分别为 x_1，x_2，由一元二次方程根与系数的关系得

$$x_1 + x_2 = -(m+3)，x_1x_2 = m + 2。$$

因为 $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} < -\dfrac{9}{10}$，所以

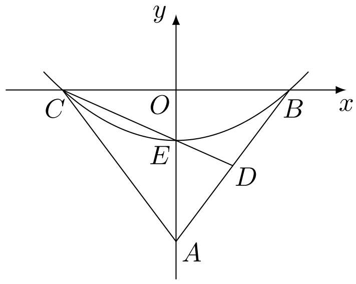
$$\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{m+3}{m+2} < -\frac{9}{10},$$

解得 $m < -12$，或 $m > -2$。

因此 $m < -12$。 …………（20 分）□

11（乙）.

解 因为 $\sin\angle ABC = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{4}{5}$，$AO = 8$，所以 $AB = 10$。由勾股定理，得 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 6$。



（第 11（乙）题）

易知 $\triangle ABO \cong \triangle ACO$，因此 $CO = BO = 6$。于是 $A(0,-8)$，$B(6,0)$，$C(-6,0)$。

设点 D 的坐标为 (m,n)，由 $S_{\triangle COE} = S_{\triangle ADE}$，得 $S_{\triangle CDB} = S_{\triangle AOB}$。所以

$$\frac{1}{2}BC \cdot |n| = \frac{1}{2}AO \cdot BO \iff \frac{1}{2} \times 12(-n) = \frac{1}{2} \times 8 \times 6$$

解得 $n = -4$。

因此 D 为 AB 的中点，点 D 的坐标为 $(3,-4)$。 …………（10 分）

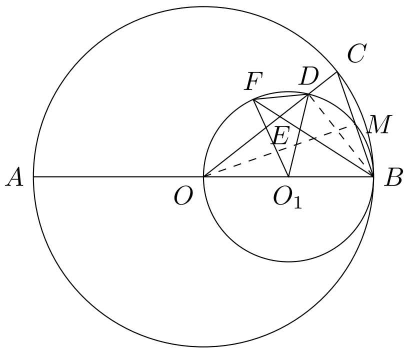
因此 CD，AO 分别为 AB，BC 的两条中线，点 E 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以点 E 的坐标为 $(0,-\frac{8}{3})$。

设经过 B，C，E 三点的抛物线对应的二次函数的解析式为 $y = a(x-6)(x+6)$。将点 E 的坐标代入，解得 $a = \frac{2}{27}$。

故经过 B，C，E 三点的抛物线对应的二次函数的解析式为 $y = \frac{2}{27}x^2 - \frac{8}{3}$。 …………（20 分）□

12（甲）.

证明 连接 BD，因为 OB 为 $\odot O_1$ 的直径，所以 $\angle ODB = 90^\circ$。又因为 $DC = DE$，所以 $\triangle CBE$ 是等腰三角形。 …………（5 分）



（第 12（甲）题）

设 BC 与 $\odot O_1$ 交于点 M，连接 OM，则 $\angle OMB = 90^\circ$。又因为 $OC = OB$，所以

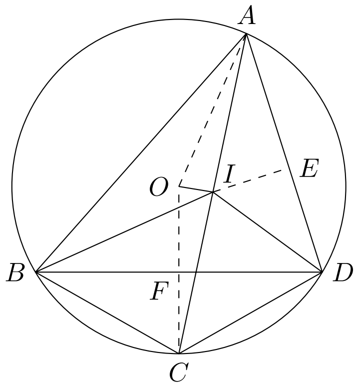
$$\angle BOC = 2\angle DOM = 2\angle DBC = 2\angle DBF = \angle DO_1F。$$ …………（15 分）

又因为 $\angle BOC$，$\angle DO_1F$ 分别是等腰 $\triangle BOC$，等腰 $\triangle DO_1F$ 的顶角，所以 $\triangle BOC \sim \triangle DO_1F$。 …………（20 分）□

12（乙）.

证明 （1）如图，根据三角形内心的性质和同弧上圆周角的性质知

$$\angle CID = \frac{\angle BAD}{2} + \frac{\angle BDA}{2} = \angle CDI,$$



（第 12（乙）题）

所以 $CI = CD$。同理，$CI = CB$。故点 C 是 $\triangle IBD$ 的外心。

连接 OA，OC，因为 I 是 AC 的中点，且 $OA = OC$，所以 $OI \perp AC$，即 $OI \perp CI$。

故 OI 是 $\triangle IBD$ 外接圆的切线。　…………（10 分）

（2）如图，过点 I 作 $IE \perp AD$ 于点 E，设 OC 与 BD 交于点 F。

由 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$，知 $OC \perp BD$。

因为 $\angle CBF = \angle IAE$，$BC = CI = AI$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle BCF \cong \mathrm{Rt}\triangle AIE$，所以 $BF = AE$。

又因为 I 是 $\triangle ABD$ 的内心，所以 $AB + AD - BD = 2AE = BD$。

故 $AB + AD = 2BD$。　…………（20 分）□

13（甲）.

解　设 $a - b = m$（m 是素数），$ab = n^2$（n 是正整数）。因为

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2,$$

所以

$$(2a-m)^2 - 4n^2 = m^2,$$

$$(2a-m+2n)(2a-m-2n) = m^2。$$　…………（5 分）

因为 $2a-m+2n$ 与 $2a-m-2n$ 都是正整数，且 $2a-m+2n > 2a-m-2n$（m 为素数），所以

$$2a-m+2n = m^2，2a-m-2n = 1,$$

解得

$$a = \frac{(m+1)^2}{4}，n = \frac{m^2-1}{4},$$

于是

$$b = a - m = \frac{(m-1)^2}{4}。$$　…………（10 分）

又 $a \geqslant 2012$，即 $\dfrac{(m+1)^2}{4} \geqslant 2012$。又因为 m 是素数，解得 $m \geqslant 89$。此时，$a \geqslant \dfrac{(89+1)^2}{4} = 2025$。

当 $a = 2025$ 时，$m = 89$，$b = 1936$，$n = 1980$。

因此，a 的最小值为 2025。　…………（20 分）□

13（乙）.

解 假设凸 n 边形中有 k 个内角等于 150°，则不等于 150° 的内角有 $n-k$ 个。

（1）若 $k=n$，由 $n\times 150^\circ=(n-2)\times 180^\circ$，得 $n=12$，正十二边形的 12 个内角都等于 150°；

…………（5 分）

（2）若 $k<n$，且 $n\geqslant 13$，由 $k\times 150^\circ+(n-k)\times 180^\circ>(n-2)\times 180^\circ$，可得 $k<12$，即 $k\leqslant 11$。

当 $k=11$ 时，存在凸 n 边形，其中的 11 个内角等于 150°，其余 $n-k$ 个内角都等于

$$\alpha=\frac{(n-2)\times 180^\circ-11\times 150^\circ}{n-11}=\left(6-\frac{1}{n-11}\right)\times 30^\circ，0^\circ<\alpha<180^\circ，\alpha\neq 150^\circ。$$ …………（10 分）

（3）若 $k<n$，且 $8\leqslant n\leqslant 11$。

当 $k=n-1$ 时，设另一个角等于 α。存在凸 n 边形，其中的 $n-1$ 个内角等于 150°，另一个内角 $\alpha=(n-2)\times 180^\circ-(n-1)\times 150^\circ=(n-7)\times 30^\circ$。

由 $n\leqslant 11$ 可得 $\alpha=(n-7)\times 30^\circ<180^\circ$；由 $n\geqslant 8$ 可得 $\alpha=(n-7)\times 30^\circ>0^\circ$，且 $\alpha\neq 150^\circ$。

…………（15 分）

（4）若 $k<n$，且 $3\leqslant n\leqslant 7$，由（3）可知 $k\leqslant n-2$。当 $k=n-2$ 时，存在凸 n 边形，其中 $n-2$ 个内角等于 150°，另两个内角都等于 $(n-2)\times 15^\circ$。

综上，当 $n=12$ 时，k 的最大值为 12；当 $n\geqslant 13$ 时，k 的最大值为 11；

当 $8\leqslant n\leqslant 11$ 时，k 的最大值为 $n-1$；当 $3\leqslant n\leqslant 7$ 时，k 的最大值为 $n-2$。 …………（20 分）□

14（甲）.

解 由于 x_1，x_2，$\cdots$，x_{2012} 都是正整数，且 $x_1<x_2<\cdots<x_{2012}$，所以

$$x_1\geqslant 1，x_2\geqslant 2，\cdots，x_{2012}\geqslant 2012，$$

于是

$$n=\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\cdots+\frac{2012}{x_{2012}}\leqslant\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{2012}{2012}=2012。$$ …………（10 分）

当 $n=1$ 时，令 $x_1=2012$，$x_2=2\times 2012$，$\cdots$，$x_{2012}=2012\times 2012$，则

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\cdots+\frac{2012}{x_{2012}}=1。$$ …………（15 分）

当 $n=k+1$ 时，其中 $1\leqslant k\leqslant 2011$，令 $x_1=1$，$x_2=2$，$\cdots$，$x_k=k$，$x_{k+1}=(2012-k)(k+1)$，$x_{k+2}=(2012-k)(k+2)$，$x_{2012}=(2012-k)\times 2012$，则

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\cdots+\frac{2012}{x_{2012}}=k+(2012-k)\cdot\frac{1}{2012-k}=k+1=n。$$

综上，满足条件的所有正整数 n 为 1，2，$\cdots$，2012。 …………（20 分）□

14（乙）.

解 当 $n=2^{16}-1$ 时，把 2，3，$\cdots$，n 分成如下两个数组：

$$\left\{2,3,2^8,2^8+1,\cdots,2^{16}-1\right\} 和 \left\{4,5,\cdots,2^8-1\right\}。$$

在数组 $\left\{2,3,2^8,2^8+1,\cdots,2^{16}-1\right\}$ 中，由于 $3^3<2^8$，$(2^8)^2>2^{16}-1$，所以其中不存在数 a，b，c，使得 $a^b=c$。

在数组 $\left\{4,5,\cdots,2^8-1\right\}$ 中，由于 $4^4>2^8-1$，所以其中不存在数 a，b，c，使得 $a^b=c$。

所以，$n\geqslant 2^{16}$。 …………（10 分）

下面证明当 $n=2^{16}$ 时，满足题设条件。

不妨设 2 在第一组，若 $2^2=4$ 也在第一组，则结论已经成立。故不妨设 $2^2=4$ 在第二组。同理可设 $4^4=2^8$ 在第一组，$(2^8)^2=2^{16}$ 在第二组。

此时考虑数 8。如果 8 在第一组，我们取 $a=2$，$b=8$，$c=2^8$，此时 $a^b=c$；如果 8 在第二组，我们取 $a=4$，$b=8$，$c=2^{16}$，此时 $a^b=c$。

综上，$n=2^{16}$ 满足题设条件。

所以，n 的最小值为 2^{16}。 …………（20 分）□

数学评书

3.1 《智慧宝典》第三部第一回　三角山上分两路　象限角里见真功——陈海峰

前面说到，两位小英雄从函谷关、平面村和圆国处获得《智慧宝典》的大部分，一路上加以温习，两个都觉得身体的内力大增，对付一些原来认为的高手现在却不在话下了。经人指点，三角山处见过部分宝典，于是两人奔三角山而去。

这日到了三角山山脚下，只见三角山这时分成很明显的两块。找人一打听，原来这儿有两个部落两个酋长，一个是弧度，一个是角度。据说两人虽是孪生兄弟，同属三角首领管理，然而两边却制度森严，如果到了弧度部落，穿的是角度的衣服就会被判死刑，反之亦然。虽然如此，三角山却被治理得井井有条，一派生机勃勃的景象。

小英立刻拨出神算子，画出下面的一个人身穿的衣服：$\theta = 2k\pi + 30^\circ$，$\theta = 360^\circ k + \frac{\pi}{6}$（$k \in \mathbb{Z}$）这样就会被杀头吧。

那人说：“正是，他们认为这种是不伦不类，不忠于自己的部落，就要被斩首示众。”此时小豪叹息说道：“真是太怪异了呀！”

这时他俩见到一个书生模样的人正在低头沉思，忽而摇摇头，忽而站起来转了一转，忽而又叹息不止。两位小英雄好奇心又起，凑了过去，才知道原来这边正在竞选“接班人”。现在此人已进入最后一关，可是自己离答题时间只剩下两天了，所以……

究竟是什么问题，说来听听，两位小英雄异口同声道。

书生道：“已知 α 所在的象限，如何确定 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的位置？”

小豪说：“我还以为是什么问题呢，我来帮你。第一步就是 n 等于几，就将每个象限进行 n 等分，第二步就从 x 轴正半轴逆时针起开始顺次周期性地标上一、二、三、四，则 α 是第几象限角，就是坐标系中找出标号是几的区域，则所有满足条件的区域的位置就是 $\frac{\alpha}{n}$ 所有可能的位置。”

书生道：“还是不明白，你能不能举个例子呢？”

“还是我来吧！”小英拨出神算子，画出下面的图。

例 3.1.1. 已知 α 在第三象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限的角？

解　先将直角坐标系的每个象限进行两等分，标上相应的区域，如图 3.1.1 所示。

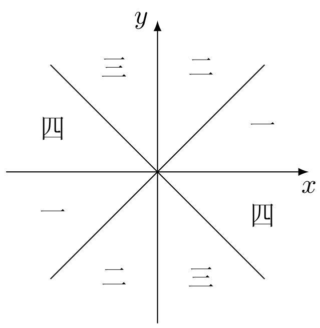


图 3.1.1

由已知找到“三”这个区域，可以发现“三”落在第二象限或第四象限，故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限的角。 □

书生道：“嗯，由图 3.1.1 我们是不是也可得：若 α 在第一象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一或第三象限；若 α 在第二象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一或第三象限；若 α 在第四象限，则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第二或第四象限这样的结论。”

小豪道：“没错，看来你反应挺快的，有首领风范，那如果将 2 改为 3 呢？你来试试！”

例 3.1.2. 已知 α 在第三象限，则 $\dfrac{\alpha}{3}$ 是哪个象限的角？

书生说："来得好！"

解 首先将直角坐标系的每个象限进行三等分，然后标上相应的区域，如图 3.1.2 所示。

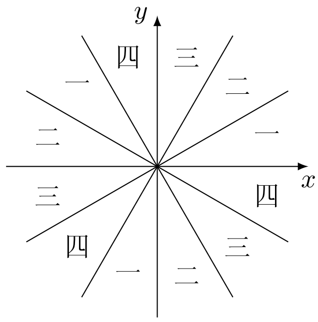


图 3.1.2

由题意可知"三"落在第一、第三、第四象限上，故 $\dfrac{\alpha}{3}$ 是第一、三、四象限的角。 □

书生道："两位高人，这样做对不对呀？怎么有那么多象限呀？"

小豪道："没错的，同理我们可以得出，如果 α 在一象限，则 $\dfrac{\alpha}{3}$ 是第一、二、三象限的角。其余类推。"

书生道："高人，如果是倍角呢？也就是如果知道了 α 所在的象限位置，那么能不能知道 2α 所在的位置呀。比如 α 在第三象限，则 2α 是哪个象限的角？"

小英道："这个问题问得好！首领的素质首先就要善于思考，你先说说看？"

书生道："从图 3.1.1 可看出，位于第三象限的角上标有"一"和"二"，也就是说 2α 应该是第一或第二象限角，是吗？"

两个小英雄同时伸出大拇指，真棒！

书生又问："这个方法是不是对所有的角度都适用呢？"

小豪说："看来我们帮你帮对了，做首领就是要明察秋毫，才能服众的。不是的，当 α 不是在某个象限，而是一个相对具体的范围，如 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，那么这种方法就不适用了。"

只见此时书生眉头顿展，不再有刚才的模样，变得十分自信，上前道："敢问两位小英雄大名！"

两位小英雄已骑马而去，只见传来声音——不必急于打听，我们还后会有期呢！

欲知后事如何，请见下回分解。

3.2 《智慧宝典》第三部第二回 上山途过鬼见愁 地图咒语救樵夫——陈海峰

话说两位小英雄帮助书生后骑马向三角山挺进，他俩经过弧度部落，告知来意后，弧度酋长对他们招待一番，立刻指明了山顶方向。只见一路崎岖，马匹难于通行，只好将马匹交于弧度酋长保管，两人徒步前行。此处不表。

单说两人边走边欣赏山顶景色，这时不知不觉来到一个地方，只见一群人在那边躺着，面黄肌瘦。有人软弱无力地说道："看来我们只能在这边'安享晚年'，回不去了！"这时两位小英雄走来，众人觉得十分诧异。两位小英雄从他们的口中得知，这些人都是山下的人家，来山上砍柴，结果都被困于此，还好有山中的野果充饥，得以维持生命。两个小英雄知道，应该这就是"鬼见愁"了，据说好象中了邪门，一般人走不出去的。

这时两位小英雄拿出一个地图。小英道："我先给你们一张地图，如图 3.1.1 所示，有四种三角函数依次标在等腰梯形（除下底为上底的两倍外，其余三边都相等）的四个顶点上，要求从左到右是'正 $\to$ 余'的关系，从上到下是'弦 $\to$ 切'的关系，等腰梯形的下底中点标注 1，下面就按上到下逐一阐述，你们要注意以下几个路口。"小英接着进行了详细的讲解。

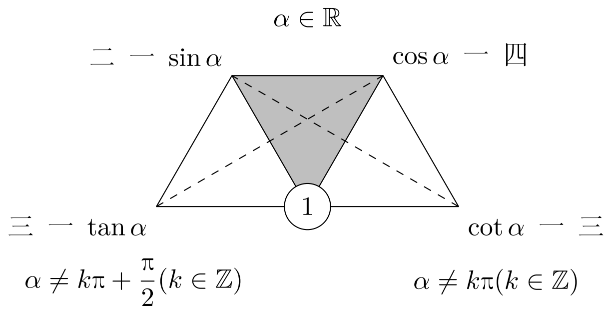


图 3.2.1

路口一、平方关系

图 3.2.1 中阴影部分的等边三角形体现了这个平方关系，这个等边三角形的左右两个顶点的平方和等于等第三个顶点的平方，即 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^2$，下面用定义法简证之。$\dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{x^2}{r^2} = \dfrac{y^2 + x^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$。

路口二、商数关系（乘积关系）

图 3.2.1 中顶角为 120° 且两腰在梯形的边上的两个等腰三角形分别反映了两个商数关系（乘积关系），即 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$（$\cos\alpha\tan\alpha = \sin\alpha$）和 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$（$\sin\alpha\cot\alpha = \cos\alpha$）。这些等式都可用定义法证之，但需注意记忆方法：$120^\circ$ 所对应顶点的三角函数等于另两个顶点的三角函数的乘积。

路口三、倒数关系

图 3.2.1 中等腰梯形的底边两顶点对应的三角函数的乘积为 1，它们互为倒数。

路口四、符号问题

四种三角函数在直角坐标平面内第一象限的符合都是"+"之外，$\sin\alpha$ 在第二象限的符号为"+"，$\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 在第三象限的符号为"+"，$\cos\alpha$ 在第四象限的符号为"+"，所以你们可根据图 3.2.1 那样从上到下，依次标上序数"二、三"和"四、三"。除了符号为正的象限外，这种三角函数在另外两个象限的符号都为负，终边落在坐标轴上的角为特殊角，其三角函数值为特殊值。若 α 的终边落在坐标轴上，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 中必有一个为零，另一个为 1 或 -1。反之，若其中一种函数值为 1 或 -1，另一种函数值必为零。

路口五、取值范围

三角函数中自变量的取值范围也是不好走的"一段路"，你们根据图中最外层的"最上方"和"最下方"就不会错了。正、余弦函数自变量的取值范围都是 $\mathbb{R}$；由定义可以发现正切函数 $\tan\alpha$ 的分母为 x，因此，其终边不能落在 y 轴上，故 $\alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$（$k \in \mathbb{Z}$），这些我都标在图 3.2.1 中，非常方便掌握。

小豪说道："我再教诸位一句咒语。在走路时心中默念：符号看象限，奇变偶不变。"

众人道："这是何意呀？"

小豪接道："其实诱导你们出现幻觉是诱导公式，这是破解的咒语。这句话是破解诱导公式的精辟概括，但需对照理解。'符号看象限'的含义是：首先确定这个角的终边在哪个象限，如 $\sin\dfrac{11}{6}\pi=\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}$ 中，$\dfrac{11}{6}\pi$ 的终边在第四象限，而第四象限的正弦为负数，故在等号右边添了一个负号，这是第一步，然后将任意一个角 β 写成 $k\times\dfrac{\pi}{2}+\alpha$（即 $\beta=k\times\dfrac{\pi}{2}+\alpha$，$k\in\mathbb{Z}$）的形式，把 α 当成锐角，在化简过程中，若 k 为奇数，则改变函数名，若 k 为偶数，则不改变函数名。改变函数名的含义是：正弦变名后为余弦，余弦变名后为正弦，正切变名的为余切，余切变名后为正切，如 $\dfrac{11}{6}\pi=3\times\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}$，此时由于 $k=3$ 为奇数，化简后将正弦改名为余弦。又如 $\sin\left(\dfrac{7}{3}\pi+\alpha\right)=\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$，也就是将 $\dfrac{\pi}{3}+\alpha$ 当作锐角，则 $\dfrac{7}{3}\pi+\alpha$ 就是第一象限角，而第一象限的正弦的正的，又 $\dfrac{7}{3}\pi+\alpha=4\times\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\alpha$，由于 $k=4$ 为偶数，所以等号前后都是正弦，未改变函数名。"

这时听到一些人口中就念道："奇变偶不变，符号看象限。"

两位小英雄急忙要求他们改正过来，并要求他们不要随意的改动这句咒语的顺序，否则就可能过不了鬼见愁了，这个道理我们就不明说了，请大家自己体会。

列位看官，你能体会到它们的区别吗？

欲知后事如何？且听下回分解。

助力高考

4.1 ab1962 解题集精选（十）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 451 ~ 500 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 4.1.1. 双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2，P 为双曲线上的任意一点，求证：$|PF_1|$, $|PO|$, $|PF_2|$ 成等比数列。

证明 设 $P(x,y)$，则 $y^2=x^2-a^2$，$|PO|^2=x^2+y^2=2x^2-a^2$。

因 $x^2-y^2=a^2$ 的离心率为 $e=\sqrt{2}$，准线为 $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{2}a}=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，故

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=e\left|x+\frac{a}{\sqrt{2}}\right|\cdot e\left|x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right|=|2x^2-a^2|=|PO|^2,$$

即 $|PO|^2|=|PF_1|\cdot|PF_2|$，所以 $|PF_1|$, $|PO|$, $|PF_2|$ 成等比数列。 □

kuing 评注：对于一般的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，仿上可得

$$|PO|^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-b^2,$$
$$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2,$$

从而有关系式

$$|PO|^2=|PF_1|\cdot|PF_2|+a^2-b^2,$$

由此可见 $|PF_1|$, $|PO|$, $|PF_2|$ 成等比数列当且仅当 $a^2=b^2$（即等轴双曲线）。

题目 4.1.2. 设有边长为 1 的正方形，试在这个正方形的内接等边三角形中，找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出它们的面积。

解 如图 4.1.1 所示，建立平面直角坐标系。

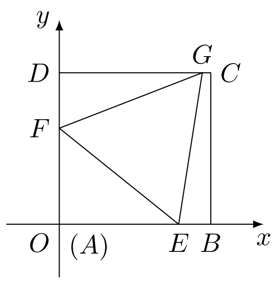


图 4.1.1

设正方形的内接等边三角形 EFG 的三个顶点对应的复数分别是 m, ni, $p+i$（其中 m, n, $p\in[0,1]$），记向量 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数为 $z(AB)$，则 $z(FG)=z(FE)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$，即

$$p+i-ni=(m-ni)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

即

$$p+(1-n)i=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n\right)i,$$

故 $p=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n$，$1-n=\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n$，由此得 $n=2-\sqrt{3}m$，故

$$S_{\triangle EFG}=\frac{\sqrt{3}}{4}|EF|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(m^2+n^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[m^2+\left(2-\sqrt{3}m\right)^2\right]=\sqrt{3}\left[\left(m-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right],$$

因 $0\leqslant m\leqslant 1$，故当 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时 $S_{\triangle EFG}$ 取最小值 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，此时 $n=\frac{1}{2}$，$p=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $m=1$ 时 $S_{\triangle EFG}$ 取最大值 $\sqrt{3}\left(1^2-\sqrt{3}+1\right)=2\sqrt{3}-3$，此时 $n=2-\sqrt{3}$，$p=\sqrt{3}-1$。 □

kuing 评注：上述解法中，等式“$z(FG)=z(FE)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$”用的是复数乘法的几何意义，可是现在都不教了，实在可惜，其实这是很有用的工具，有兴趣的可以自行查阅相关资料。

请注意，上述解法最后的求最值是有问题的，对于 $\left(m-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 来说，如果仅由 $0\leqslant m\leqslant 1$，那么最大值应该在 $m=0$ 时取得才对，但从图形来看显然 m 不能为 0，因此上述解法中还欠缺对 m 的取值范围的确定。

事实上，由 $p=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n$，$1-n=\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n$，得 $n=2-\sqrt{3}m$，$p=\sqrt{3}-m$，那么由 $n,\ p\in[0,1]$，得 $0\leqslant 2-\sqrt{3}m\leqslant 1,\ 0\leqslant\sqrt{3}-m\leqslant 1$，再结合 $0\leqslant m\leqslant 1$，这三组不等式解出来的才是 m 的取值范围 $\left[\sqrt{3}-1,1\right]$。这样，注意到 $\frac{\sqrt{3}-1+1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\left(m-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 取最大值当且仅当 $m=\sqrt{3}-1$ 或 $m=1$。

其实上述解法可以简单一些，在得到 $p=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n$，$1-n=\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n$ 后，消去 n 可得 $\frac{p+m}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即得 EG 的中点是一个定点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，这样，所求的最大值及最小值的情形是显然的。

而更简单的方法，其实还是纯平几方法，因为本题本来就是初中题。

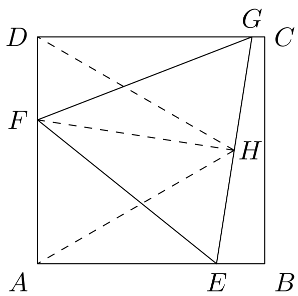


图 4.1.2

如图 4.1.2 所示，取 EG 的中点 H，连结 HA、HD、HF，由于 $FH\perp EG$，所以 A、E、H、F 四点共圆，因此 $\angle FAH=\angle FEH=60^\circ$，同理可得 $\angle FDH=\angle FGH=60^\circ$，所以 $\triangle ADH$ 是等边三角形，即 H 是定点，下略。

题目 4.1.3. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，证明不等式

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<3。$$

证明 当 $n=1$ 时原不等式成立，当 $n\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\sqrt{n}}&=\frac{2}{n\sqrt{n}+n\sqrt{n}}\\&<\frac{2}{(n-1)\sqrt{n}+n\sqrt{n-1}}\\&=\frac{2\left[(n-1)\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}\right]}{(n-1)^2n-n^2(n-1)}\\&=\frac{2\left[(n-1)\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}\right]}{-(n-1)n}\end{aligned}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \\
&< 1 + 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 3。
\end{aligned}$$

综上，原不等式成立。 □

kuing 评注：一开始放缩后的化简步骤可以更简单一点点

$$\frac{2}{(n-1)\sqrt{n} + n\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n(n-1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{2}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}。$$

题目 4.1.4. 已知抛物线 $y = ax^2$（$a > 0$）的焦点为 F，一过 F 的直线交抛物线于两点 M, N，设 $|MF| = r$, $|NF| = R$。求 $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R}$。

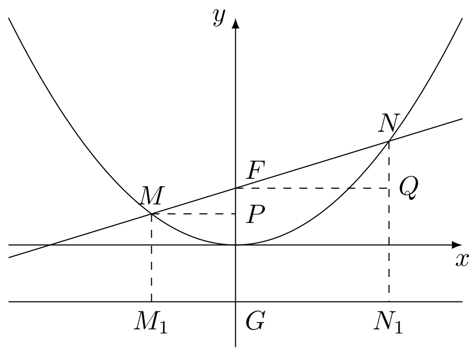


图 4.1.3

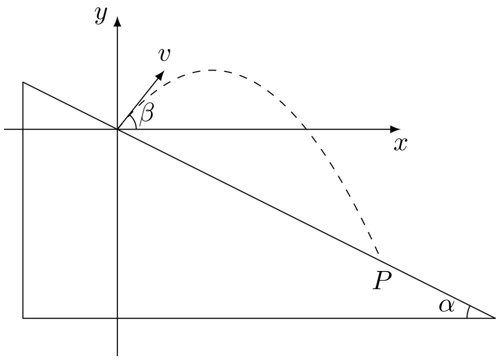
解 如图 4.1.3 所示，设抛物线的准线与 y 轴交于 G，分别过 M、N 作准线的垂线，垂足分别为 M_1、N_1，过 M 作 y 轴的垂线，垂足为 P，过 F 作 NN_1 的垂线，垂足为 Q。由抛物线定义得 $MM_1 = FM = r$，$NN_1 = FN = R$ 且 $FG = \dfrac{1}{2a}$，由三角形相似，得

$$\begin{aligned}
\frac{FM}{FN} = \frac{FP}{NQ} \iff \frac{r}{R} &= \frac{\dfrac{1}{2a} - r}{R - \dfrac{1}{2a}} \\
&\iff Rr - \frac{r}{2a} = \frac{R}{2a} - Rr \\
&\iff 2Rr = \frac{r}{2a} + \frac{R}{2a} \\
&\iff 4a = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}。
\end{aligned}$$
□

kuing 评注：缺少斜率为 0 时的说明，不过这并无伤大雅。此题可谓经典，此解法更是经典。上述结论可推广到一般的圆锥曲线，并且此解法仍然适用，结果是 $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R} = \dfrac{2}{ep}$，其中 e 是离心率，p 是焦点到准线的距离，大家可以仿上证一下。至于其他解法，比较简单的还有极坐标法，相对麻烦一点的还可以用直线的参数方程，或者用最基本的设直线联立方程组用韦达定理的方法，都是可以的，这里就不详写了，有兴趣的不妨自己试一下。

题目 4.1.5. 有一足够长的斜坡，坡角为 α。人在坡上以固定初速度 v，与水平面夹角为 β 的方向抛球。设球落到斜坡上的一点为 P，则当 P 与人的水平距离最大时，α 与 β 是何关系？（忽略人的高度、空气阻力等，球视为质点）

解 有两种情况：



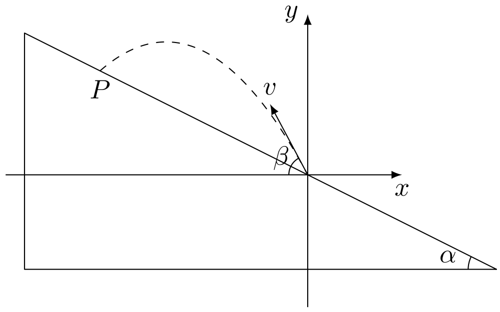


图 4.1.4　　图 4.1.5

情况 1：自上往下抛，如图 4.1.4 所示建立平面直角坐标系。

设球在抛出时间 t 时的坐标为 (x, y)（$x > 0$），则

$$x = (v\cos\beta)t，\ y = (v\sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2，$$

消去 t 得

$$y = x\tan\beta - \frac{g}{2v^2\cos^2\beta}x^2，$$

斜坡所在的直线方程是

$$y = (-\tan\alpha)x，$$

消去 y 得

$$x\tan\beta - \frac{g}{2v^2\cos^2\beta}x^2 = (-\tan\alpha)x，$$

由于 P 点的横坐标 $x \neq 0$，因此

$$\frac{g}{2v^2}x = (\tan\beta + \tan\alpha)\cos^2\beta = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 + \tan^2\beta}，$$

设 $m = \tan\beta + \tan\alpha$，则

$$\begin{aligned}\frac{g}{2v^2}x &= \frac{m}{1 + (m - \tan\alpha)^2}\\ &= \frac{m}{\sec^2\alpha + m^2 - 2m\tan\alpha}\\ &= \frac{1}{\dfrac{\sec^2\alpha}{m} + m - 2\tan\alpha}\\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\sec^2\alpha} - 2\tan\alpha}\\ &= \frac{1}{2\sec\alpha - 2\tan\alpha}，\end{aligned}$$

故 $x \leqslant \dfrac{v^2}{g(\sec\alpha - \tan\alpha)}$，当且仅当 $\dfrac{\sec^2\alpha}{m} = m$ 即 $m = \sec\alpha$ 时上式取等号，此时 $m = \tan\beta + \tan\alpha = \sec\alpha$ 即 $\tan\beta = \sec\alpha - \tan\alpha$；

情况 2：自下往下抛，如图 4.1.5 所示建立平面直角坐标系。

设球在抛出时间 t 时的坐标为 (x,y)（$x<0$），则

$$x=(-v\cos\beta)t，y=(v\sin\beta)t-\frac{1}{2}gt^2，$$

消去 t 得

$$y=-x\tan\beta-\frac{g}{2v^2\cos^2\beta}x^2，$$

斜坡所在的直线方程是

$$y=(-\tan\alpha)x，$$

消去 y 得

$$-x\tan\beta-\frac{g}{2v^2\cos^2\beta}x^2=(-\tan\alpha)x，$$

由于 P 点的横坐标 $x\neq 0$，因此

$$-\frac{g}{2v^2}x=(\tan\beta-\tan\alpha)\cos^2\beta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan^2\beta}，$$

设 $m=\tan\beta-\tan\alpha$，则

$$\begin{aligned}-\frac{g}{2v^2}x&=\frac{m}{1+(m+\tan\alpha)^2}\\&=\frac{m}{\sec^2\alpha+m^2+2m\tan\alpha}\\&=\frac{1}{\dfrac{\sec^2\alpha}{m}+m+2\tan\alpha}\\&\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\sec^2\alpha}+2\tan\alpha}\\&=\frac{1}{2\sec\alpha+2\tan\alpha}，\end{aligned}$$

故 $-x\leqslant\dfrac{v^2}{g(\sec\alpha+\tan\alpha)}$，当且仅当 $\dfrac{\sec^2\alpha}{m}=m$ 即 $m=\sec\alpha$ 时上式取等号，此时 $m=\tan\beta-\tan\alpha=\sec\alpha$ 即 $\tan\beta=\sec\alpha+\tan\alpha$。 □

kuing 评注： 水平距离最大也相当于 P 与人的距离最大，此结果可以说是水平面上斜抛 45° 角时最远的推广。

题目 4.1.6. 已知 $B(0,6)$, $C(0,2)$ 两点，A 是 x 轴负半轴上的一点，问 A 在何处时，$\angle BAC$ 有最大值，并求出最大值。

解 设 $A(-a,0)$（$a>0$），则 $k_{AB}=\dfrac{6}{a}$，$k_{AC}=\dfrac{2}{a}$，于是

$$\tan\angle BAC=\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}k_{AC}}=\frac{\dfrac{6}{a}-\dfrac{2}{a}}{1+\dfrac{12}{a^2}}=\frac{4}{a+\dfrac{12}{a}}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}，$$

当且仅当 $a=\dfrac{12}{a}$ 即 $a=2\sqrt{3}$ 时上式取等号，因此 $A\big(-2\sqrt{3},0\big)$ 时，$\angle BAC$ 取最大值 $\dfrac{\pi}{6}$。 □

kuing 评注： 此题本是初中题，可以用初中平几知识解决，由圆周角相等可知点 A 就是使 $\triangle ABC$ 的外接圆与 x 轴相切的点，所以由切割线定理得 $OA^2=OB\cdot OC=12$，得 $A\big(-2\sqrt{3},0\big)$，再由 $\dfrac{OB}{OA}=\sqrt{3}$ 得 $\angle BAO=60^\circ$，从而 $\angle CAO=\angle BAC=30^\circ$。

4.2 2012 年辽宁高考理科数学第 21 题的解法分析——齐建民、丁一飞、郭子伟

2012 年高考题理科数学第 21 题是一道函数与不等式、导数交汇的综合题，官方参考答案提供了两种解题方法，都用到了不等式的性质进行放缩，因而显得有一定难度，也给一线教师带来一些困扰，为什么要用放缩法，如何想到放缩的，能否不用放缩法？

作为一道难题，我们不但应该向学生讲清楚怎么做，更重要的是要让学生意识到，“这样做”是自然的、合理的，这样学生才不会觉得解法是天上掉下来的。

本文尝试对该题作一些解法分析，与大家共同探讨。

2012 年辽宁理数第 21 题 设 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b$（$a,b\in\mathbb{R}$，$a,b$ 为常数），曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\dfrac{3}{2}x$ 在点 $(0,0)$ 相切。

（I）求 a,b 的值。

（II）证明：当 $0<x<2$ 时，$f(x)<\dfrac{9x}{x+6}$。

第（I）问易得 $a=0,b=-1$，过程略去，以下只讲第二问，即要证明：当 $0<x<2$ 时成立如下不等式

$$\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1<\frac{9x}{x+6}。\tag{4.2.1}$$

我们来思考这么几个问题：

一、为什么想到使用放缩？

形如式 (4.2.1) 的函数不等式，相信我们给学生做过大批量的练习，一个常见的思路是：要证明当 $x>0$ 时 $g(x)<0$，可以考虑证明 $g'(x)<0$ 且 $g(0)=0$。对式 (4.2.1) 来说，函数 $g(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1-\dfrac{9x}{x+6}$ 满足 $g(0)=0$ 显然，问题是要证明 $g'(x)<0$ 很可能比较困难，因为函数式里面掺杂了对数、根式，求导计算势必很繁琐，这样促使我们思考，能否把函数式进行某种转化，达到形式上的简化，于是放缩的需求就这样产生了！

二、如何放缩？

我们把目光聚焦到 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1$ 身上，如何放缩，有两个思路：

思路 1 那个根号很讨厌，想法把它放缩掉！

我们猜测 $\sqrt{x+1}<kx+b$，放缩成一次函数总会计算简单吧。

那么如何确定 k,b 的值呢？现在的问题相当于我们要构造一个不等式 $\sqrt{x+1}<kx+b$，使其解集为 $(0,2)$ 或者比这个区间大，从函数角度，$f_1(x)=\sqrt{x+1}<f_2(x)=kx+b$，意味着函数 $f_2(x)$ 的图象在 $f_1(x)$ 的上方，但二者不能相差太大，也就是函数图象在 $(0,2)$ 这段尽量贴近，这就促使我们去想 $f_2(x)=kx+b$ 是 $f_1(x)=\sqrt{x+1}$ 在某点处的切线，注意到有取等条件 $f(0)=0$，所以我们选择切点在 $x=0$ 处，易得曲线 $\sqrt{x+1}$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $f_2(x)=\dfrac{1}{2}x+1$，这样我们可以得到以下证法：

证明 (齐建民) 易证当 $x>0$ 时有

$$\sqrt{x+1}<\frac{1}{2}x+1,$$

（标答也是这样放缩的，用基本不等式得到这个式子）进而 $\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1<\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}x$，我们自然希望有

$$\ln(x+1)+\frac{1}{2}x<\frac{9x}{x+6},$$

这个不等式是否对 $(0,2)$ 内的 x 都成立呢？先粗略估计下特殊值是否成立，取 $x=1$，是否有 $\ln 2+\dfrac{1}{2}<\dfrac{9}{7}$？要判断这个式子成立与否也不是太容易，算了吧，往下做做看。

下面我们按照常规思路构造函数，求导，有

$$h(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x-\frac{9x}{x+6}\implies h'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}-\frac{54}{(x+6)^2},$$

通分得

$$h'(x)=\frac{2(x+6)^2+(x+1)(x+6)^2-108(x+1)}{2(x+1)(x+6)^2}=\frac{x(x^2+15x-36)}{2(x+1)(x+6)^2},$$

由 $0<x<2$ 易得 $x^2+15x-36<0\implies h'(x)<0$，而 $h(0)=0$，所以在 $(0,2)$ 上有 $h(x)<0$，从而命题得证。 □

思路 2 那个对数很讨厌，想法把它放缩掉！

从 $\ln(x+1)$ 这个结构下手，容易想到经典不等式"$\ln x<x-1$（$x>1$）"于是得 $\ln(x+1)<x$，要证明的不等式变为 $x+\sqrt{x+1}-1<\dfrac{9x}{x+6}$，而这个不等式当 $x=1$ 时，$\sqrt{2}<\dfrac{9}{7}$ 不成立，因此放缩失败！

若想采取思路 1 的方法，也找不到合适的 $\ln(x+1)<kx+b$ 使之放缩成功，这是因为不等式 $\ln(x+1)<x$ 反映的已经是 $\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 的切线，这条切线放缩不成功，别的肯定也不行。

再仔细观察 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1$，不难发现函数的结构中出现了 $\sqrt{x+1}$ 与 $x+1$，结构具备相似性，具体说来，就是 $f(x)$ 可以写成 $2\ln\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-1$，再利用那个经典不等式，于是产生了下面的解法：

证明 (齐建民) 因为 $0<x<2$，由经典不等式 $\ln x<x-1$，有 $\ln\sqrt{x+1}<\sqrt{x+1}-1$，于是

$$\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1=2\ln\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-1<3\big(\sqrt{x+1}-1\big),$$

我们希望有

$$3\big(\sqrt{x+1}-1\big)<\frac{9x}{x+6},$$

上式取 $x=1$，成立，有戏！再往下化简，等价于

$$3\big(\sqrt{x+1}-1\big)(x+6)<9x\iff 9(x+1)(x+6)^2<\big(9x+3(x+6)\big)^2\iff 9x^2(3-x)>0,$$

显然成立，故命题得证。 □

注：最后的化简也可以用分子有理化去处理；"经典不等式"的证明可以参考官方参考答案的证法二。

三、不用放缩法可以吗？

前面提到不放缩可能由于有对数和根号会比较困难，但花点心思，事实上还是能做得出来，下面提供一个没有用到放缩法的解法，请读者体会其解法的精准之处。

证明 (丁一飞) 令 $g(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1-\dfrac{9x}{x+6}$，则 $g(0)=0$，于是只要证明当 $0<x<2$ 时有

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{54}{(x+6)^2}<0。$$

（1）当 $x\in(0,1]$ 时，有

$$\frac{1}{x+1}-\frac{36}{(x+6)^2}=\frac{x(x-24)}{(x+1)(x+6)^2}<0,\tag{4.2.2}$$

以及

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{18}{(x+6)^2}=\frac{(x+6)^2-36\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}(x+6)^2},$$

令 $t=\sqrt{x+1}$，$t\in\left(1,\sqrt{2}\right]$，则

$$\frac{(x+6)^2-36\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}(x+6)^2}=\frac{(t-1)(t^3+t^2+11t-25)}{2t(t^2+5)^2}<0\implies\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{18}{(x+6)^2}<0,\tag{4.2.3}$$

由式 (4.2.2)、(4.2.3) 得到

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{54}{(x+6)^2}<0,$$

所以此时有 $g'(x)<0$；

（2）当 $x\in(1,2)$ 时，有

$$\frac{1}{x+1}-\frac{\frac{49}{2}}{(x+6)^2}=\frac{(x-1)(2x-23)}{(x+1)(x+6)^2}<0,\tag{4.2.4}$$

以及

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\frac{32}{\sqrt{3}}}{(x+6)^2}=\frac{(x+6)^2-\frac{64}{\sqrt{3}}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}(x+6)^2},$$

令 $t=\sqrt{x+1}$，$t\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，则

$$\frac{(x+6)^2-\frac{64}{\sqrt{3}}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}(x+6)^2}=\frac{\left(t-\sqrt{3}\right)\left(t^3+\sqrt{3}t^2+13t-\frac{25}{\sqrt{3}}\right)}{2t(t^2+5)^2}<0\implies\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\frac{32}{\sqrt{3}}}{(x+6)^2}<0,\tag{4.2.5}$$

由式 (4.2.4)、(4.2.5) 得到

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\frac{\frac{49}{2}+\frac{32}{\sqrt{3}}}{(x+6)^2}<\frac{54}{(x+6)^2},$$

所以此时也有 $g'(x)<0$。

综上所述，原不等式得证。 □

四、试试其他方法

在前面讲放缩法的时候提到想去根号，于是用了切线放缩的方法，其实还有一个常用的去根号方法，那就是换元法。

上面丁一飞老师的证法中已经可以看到换元的效果，只不过他是先求导再换元，后面还分类计算了几个式子显得有点麻烦。

然而，其实更容易想到的是先换元再求导，因为我们可以很容易地预见到，一开始换元就没了根式，再求导便连对数也没了，完全变成有理式，接下来应该不难处理。个人认为这种思路比起先求导再换元来说更自然一些，经验也告诉我，先从形式上得到化简再作求导等等操作，多数会比反过来的要简单一些[①]。

下面提供的是先换元再求导的解法。

证明 (kuing) 为方便计算，下面证明：当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时都有

$$\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1\leqslant\frac{9x}{x+6},$$

且等号成立当且仅当 $x=0$。

之所以将 x 的上限扩大到 3，是因为如果照原来的范围，换元后的变量范围会出现根号，不便于处理，况且当 $x=3$ 时显然也满足原不等式，故此可以大胆这样尝试。

[①]在本题来说，由于根号的求导只是根号移到了分母，所以这种差别不太显著，但如果是别的式子就不一定了。

令 $\sqrt{x+1}=t$，由 $0\leqslant x\leqslant 3$ 得 $1\leqslant t\leqslant 2$。代入原不等式化简，等价于

$$G(t)=10-t-\frac{54}{5+t^2}-2\ln t\geqslant 0,$$

注意到 $G(1)=0$，于是只要证明 $G(t)$ 在 $[1,2]$ 上单调增。求导得

$$G'(t)=-1+\frac{108t}{(5+t^2)^2}-\frac{2}{t},$$

变成有理式了，但分母的次数有点高，不易判断，如果直接通分也可能麻烦[①]，于是还是尝试放缩以达到降次，又注意到 $G'(1)=0$，所以在放缩的时候也应注意取等。降次常常考虑均值，比如 $1+t^2\geqslant 2t$，但如果这样作用于分母会反向，因此应该想一个反过来的才行，考虑到 t 的范围，我们用 $(t-1)(t-2)\leqslant 0\iff t^2\leqslant 3t-2$，这样就能降次且方向是对的，至于会不会放过头，我当时没目测出来，但我估计高考题应该不会逼得太紧，不妨试一下

$$\begin{aligned}G'(t)&=-1+\frac{108t}{(5+t^2)^2}-\frac{2}{t}\\&\geqslant -1+\frac{108t}{(3+3t)^2}-\frac{2}{t}\\&=-1-\frac{12}{(1+t)^2}+\frac{12}{1+t}-\frac{2}{t}\\&\geqslant -1-\frac{3}{t}+\frac{12}{1+t}-\frac{2}{t}\\&=\frac{(5-t)(t-1)}{t(t+1)}\\&\geqslant 0,\end{aligned}$$

结果说明我的估计没错，用了那个降次后再均值了一次仍然没放缩过头，所以不等式其实是很松的。这样我们就得到了当 $t\in[1,2]$ 时恒有 $G'(t)\geqslant 0$，且不难看出只有当 $t=1$ 时才取等，因此原不等式得证，等号成立当且仅当 $x=0$。 $\square$

既然扩大范围后不等式也成立且数据更简单，促使我尝试改进丁一飞老师的证法，具体来说就是改进该证法的情况（2）使数据简化一点，其实也没什么实质性改变。我们将情况（2）中 x 的范围扩大到 $x\in(1,3)$，仍然用式 (4.2.4)，另一式则改为

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\frac{81}{4}}{(x+6)^2}=\frac{2(x+6)^2-81\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}(x+6)^2},$$

令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $t>1$ 且 $t<2$，故

$$\frac{2(x+6)^2-81\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}(x+6)^2}=\frac{(t-2)(2t^3+4t^2+28t-25)}{4t(t^2+5)^2}<0\implies\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\frac{81}{4}}{(x+6)^2}<0,\tag{4.2.6}$$

由式 (4.2.4) 及式 (4.2.6) 得到

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\frac{\frac{49}{2}+\frac{81}{4}}{(x+6)^2}<\frac{54}{(x+6)^2},$$

这样就相对简洁了一点点。

[①] 花点心思，通分其实还是不难得到结果的，事实上，$-1+\dfrac{108t}{(5+t^2)^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t-1)\big(108+(t-1)(2-t)(t^2+6t+29)\big)}{t(5+t^2)^2}\geqslant 0$，就能完成证明。这里只是为了让大家更好接受，才仍然回到放缩的方向。

五、再来品味一下官方参考答案

最后附上官方参考答案对第（II）问的两个证法，他们的共同点是都是求导后再进行放缩的，过中的技巧，请大家仔细品味。

证法一 由均值不等式，当 $x>0$ 时，$2\sqrt{(x+1)\cdot 1}<x+1+1=x+2$，故

$$\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1。$$

记 $h(x)=f(x)-\dfrac{9x}{x+6}$，则

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{54}{(x+6)^2} \\ &= \frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2} \\ &< \frac{x+6}{4(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2} \\ &= \frac{(x+6)^3-216(x+1)}{4(x+1)(x+6)^2}。\end{aligned}$$

令 $g(x)=(x+6)^3-216(x+1)$，则当 $0<x<2$ 时，

$$g'(x)=3(x+6)^2-216<0。$$

因此 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内是递减函数，又由 $g(0)=0$，得 $g(x)<0$，所以 $h'(x)<0$。因此 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内是递减函数，又 $h(0)=0$，得 $h(x)<0$，于是当 $0<x<2$ 时，$f(x)<\dfrac{9x}{x+6}$。 □

证法二 由均值不等式，当 $x>0$ 时，$2\sqrt{(x+1)\cdot 1}<x+1+1=x+2$，故

$$\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1。\tag{4.2.7}$$

令 $k(x)=\ln(x+1)-x$，则 $k(0)=0$，$k'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}<0$，故 $k(x)<0$，即

$$\ln(x+1)<x。\tag{4.2.8}$$

由式 (4.2.7)、(4.2.8) 得，当 $x>0$ 时，$f(x)<\dfrac{3}{2}x$。

记 $h(x)=(x+6)f(x)-9x$，则当 $0<x<2$ 时，

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)+(x+6)f'(x)-9 \\ &< \frac{3}{2}x+(x+6)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)-9 \\ &= \frac{1}{2(x+1)}\big[3x(x+1)+(x+6)\big(2+\sqrt{x+1}\big)-18(x+1)\big] \\ &< \frac{1}{2(x+1)}\left[3x(x+1)+(x+6)\left(3+\frac{x}{2}\right)-18(x+1)\right] \\ &= \frac{x}{4(x+1)}(7x-18)<0。\end{aligned}$$

因此 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递减，又 $h(0)=0$，所以 $h(x)<0$，即 $f(x)<\dfrac{9x}{x+6}$。 □

4.3 2012 年高考数学试题选解赏析——张培强

2012 年高考已经落下帷幕，高考题库再次得以更新，诸多妙题美解接踵而至，使笔者大饱眼福、手福、脑福，特选理科试卷的一些试题加以解析赏叹，以抛砖引玉。

江苏卷

9. 如图 4.3.1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值是________。

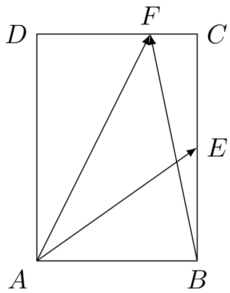


图 4.3.1

思路 1 线性表示

解法 1 因为

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=\sqrt{2},$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=\sqrt{2}-2,$$

所以

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}-2+2=\sqrt{2}。$$ □

解法 2 因为

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}=\sqrt{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=-2+\sqrt{2}+2=\sqrt{2}。\end{aligned}$$ □

解法 3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}^2\\&=\sqrt{2}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AF}-2,\end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right)=2$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{2}$。 □

思路 2 基底思想

解法 4 令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，设 $\overrightarrow{DF}=x\overrightarrow{AB}=x\vec{a}$，则 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=x\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BF}=(x-1)\vec{a}+\vec{b}$，由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\vec{a}\cdot\left(x\vec{a}+\vec{b}\right)=\sqrt{2}$ 可知，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\vec{a}^{2}+\frac{1}{2}\vec{b}^{2}=\sqrt{2}。$$ □

思路 3 数量积的几何意义

解法 5 考虑 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的几何意义是 $\overrightarrow{AF}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影乘以 $\overrightarrow{AB}$ 的模，可知 $\left|\overrightarrow{DF}\right|=1$，而 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 可用 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{AE}$ 方向上的投影乘以 $\overrightarrow{AE}$ 的模，易知 $AE\perp BD$，由 $\frac{DF}{DC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 可知，$\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{AE}$ 方向上的投影为 $\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $\left|\overrightarrow{AE}\right|=\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$。 □

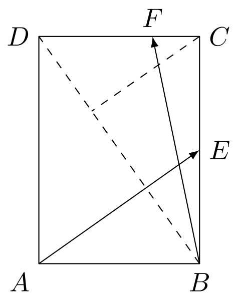


图 4.3.2

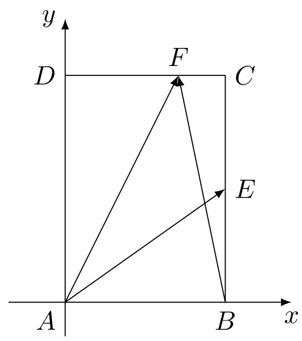


图 4.3.3

思路 4 坐标化

解法 6 如图 4.3.3，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $\overrightarrow{AE}=\left(\sqrt{2},1\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{2},0\right)$，设 $\overrightarrow{AF}=(x,2)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}x=\sqrt{2}$，所以 $x=1$，所以 $\overrightarrow{BF}=\left(1-\sqrt{2},2\right)$，故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)+2=\sqrt{2}$。 □

赏题 一道好题，会勾起你诸多遐想，产生许多想法，或对数学思想方法有更进一步的认识。

13. 函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的值域是 $[0,+\infty)$，若关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 的解集是 $(m,m+6)$，则 $c=$________。

解法 1 由 $f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$ 可知，$\frac{4b-a^2}{4}=0$，即 $b=\frac{a^2}{4}$，所以不等式 $f(x)<c$ 即 $x^2+ax+\frac{a^2}{4}-c<0$，解得

$$\frac{-a-2\sqrt{c}}{2}<x<\frac{-a+2\sqrt{c}}{2},$$

所以 $\frac{-a+2\sqrt{c}}{2}-\frac{-a-2\sqrt{c}}{2}=2\sqrt{c}=6$，故 $c=9$。 □

解法 2 由 $f(x)<c$ 的解集是 $(m,m+6)$ 可知，方程 $f(x)=c$ 的两根之差为 6，由韦达定理得

$$6=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2-4\left(\frac{a^2}{4}-c\right)}=2\sqrt{c},$$

解得 $c=9$。 □

解法 3 易得 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2$，其对称轴为 $x_0=-\dfrac{a}{2}$，由抛物线的对称性可知，点 $\left(-\dfrac{a}{2}+3,c\right)$ 在该函数图象上，即

$$f\left(-\frac{a}{2}+3\right)=\left(-\frac{a}{2}+3+\frac{a}{2}\right)^2=c,$$

故 $c=9$。 □

解法 4 考虑特殊，$a=b=0$，此时不等式 $f(x)<c$ 的解集必关于 y 轴对称，即 $m=-3$，所以 $f(x)$ 过点 $(3,c)$，故 $c=f(3)=3^2=9$。 □

本源 对于函数 $f(x)=x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}$，其图象与直线 $y=c$ 的两个交点间距离 L 和 c 的关系是 $L=2\sqrt{c}$。

赏题 貌似未知量过多，消元之后可见，函数 $f(x)$ 由 a 来唯一确定，长度为 6 的解集的起止值也由 a 来唯一确定，一切在变，一切又都是定局，妙就妙在可特殊可一般。

浙江卷

13. 设公比为 $q(q>0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n。若 $S_2=3a_2+2$，$S_4=3a_4+2$，则 $q=$________。

解法 1 若 $q=1$，条件可化为 $\begin{cases}2a_1=3a_1+2,\\4a_1=3a_1+2,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a_1=-2,\\a_1=2,\end{cases}$ 所以 $q\neq1$，所以

$$\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}=3a_1q+2,\\[2mm]\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3a_1q^3+2,\end{cases}$$

两式作差得，$\dfrac{a_1(q^2-q^4)}{1-q}=3a_1q^3-3a_1q$，即 $\dfrac{a_1q^2(1-q^2)}{1-q}=3a_1q(q^2-1)$，即 $\dfrac{q}{1-q}=-3$，解得 $q=\dfrac{3}{2}$。 □

解法 2 化为基本量 $\begin{cases}S_2=3a_2+2,\\S_4=3a_4+2,\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}a_1+a_1q=3a_1q+2,\\a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=3a_1q^3+2,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a_1=2a_1q+2,\\a_1+a_1q+a_1q^2=2a_1q^3+2,\end{cases}$$

两式作差得，$a_1q+a_1q^2=2a_1q^3-2a_1q$，即 $2q^2-q-3=0$，解得 $q=\dfrac{3}{2}$ 或 $q=-1$（舍），故 $q=\dfrac{3}{2}$。 □

解法 3 考虑

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=-\frac{q}{1-q}a_n+\frac{a_1}{1-q},$$

这表明 S_n 是关于 a_n 的一次函数，由 $S_2=3a_2+2$，$S_4=3a_4+2$ 可知，$\begin{cases}-\dfrac{q}{1-q}=3,\\[2mm]\dfrac{a_1}{1-q}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}q=\dfrac{3}{2},\\[2mm]a_1=-1,\end{cases}$

故 $q=\dfrac{3}{2}$。 □

赏题 试题构造的本质即是 S_n 和 a_n 关系，而此关系在这里特殊存在，题意简单，解法灵活。

15. 在 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________。

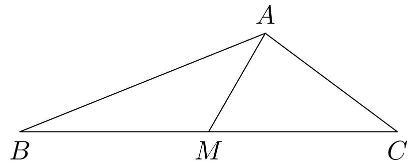


图 4.3.4

解法 1 在 $\triangle ABM$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$，在 $\triangle ACM$ 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)\\&=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}\\&=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}\\&=9-25=-16。\end{aligned}$$
□

解法 2 由 $AM=3<\dfrac{BC}{2}$ 可知，$\angle BAC$ 为钝角，过 C 作直线 AB 的垂线，垂足为 D，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AD$，在 $\triangle BAM$ 中，由余弦定理可知，$AM^2=BM^2+BA^2-2BM\cdot BA\cos B$，即 $9=25+BA^2-10BA\cos B$，所以 $BA^2-10BA\cos B=-16$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times(10\cos\theta-AB)=AB^2-10AB\cos B=-16$。 □

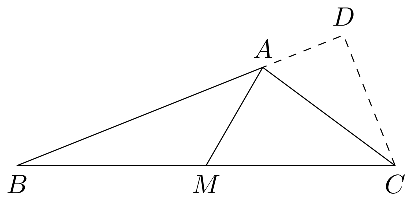


图 4.3.5

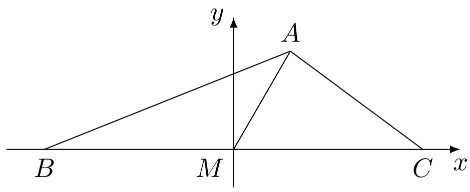


图 4.3.6

解法 3 以 M 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $B(-5,0)$，$C(5,0)$，设 $\angle AMC=\theta$，则 $A(3\cos\theta,3\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(-5-3\cos\theta,-3\sin\theta)$，$\overrightarrow{AC}=(5-3\cos\theta,-3\sin\theta)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-5-3\cos\theta)(5-3\cos\theta)+9\sin^2\theta=-16$。 □

解法 4 取 $AB=AC$，则 $AB=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{34}$，$\cos\angle MAC=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，所以 $\cos\angle BAC=2\cos^2\angle MAC-1=2\times\dfrac{9}{34}-1=-\dfrac{8}{17}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{34}\times\sqrt{34}\times\left(-\dfrac{8}{17}\right)=-16$。 □

赏题 一个可变的三角形，两个随着变化的向量，进行数量积运算后却是一个定值，奇妙的向量。

kuing 路过评注：其实还可以用 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2=\overrightarrow{AM}^2-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2$ 搞定。

天津卷

8. 设 m，$n \in \mathbb{R}$，若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切，则 $m+n$ 的取值范围是 （　）

（A）$\left[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right]$　　（B）$\left(-\infty, 1-\sqrt{3}\right] \bigcup \left[1+\sqrt{3}, +\infty\right)$

（C）$\left[2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\right]$　　（D）$\left(-\infty, 2-2\sqrt{2}\right] \bigcup \left[2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$

解法 1　由直线与圆相切可得

$$\frac{|(m+1)\times 1+(n+1)\times 1-2|}{\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}}=1,$$

则 $|m+n|=\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}$，两边平方并整理得，$mn=m+n+1$，由基本不等式可知，$m+n+1 \leqslant \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$，当且仅当 $m=n$ 时取等，解得 $m+n \leqslant 2-2\sqrt{2}$ 或 $m+n \geqslant 2+2\sqrt{2}$，故选 D。 □

解法 2　由直线与圆相切可得

$$\frac{|(m+1)\times 1+(n+1)\times 1-2|}{\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}}=1,$$

则 $|m+n|=\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}$，两边平方并整理得，$mn=m+n+1$，设 $m+n=t$，则 $n=t-m$，代入得，$m(t-m)=t+1$，即 $m^2-tm+t+1=0$，此方程关于 m 有解，则 $t^2-4t-4 \geqslant 0$，解得 $t \leqslant 2-2\sqrt{2}$ 或 $t \geqslant 2+2\sqrt{2}$，即 $m+n \leqslant 2-2\sqrt{2}$ 或 $m+n \geqslant 2+2\sqrt{2}$，故选 D。 □

解法 3　由直线与圆相切可得

$$\frac{|(m+1)\times 1+(n+1)\times 1-2|}{\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}}=1,$$

则 $|m+n|=\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}$，两边平方并整理得，$mn=m+n+1$，即 $n=\frac{m+1}{m-1}$（$m \neq 1$），考虑几何意义，在可行域（双曲线）中寻求线性目标函数 $m+n=t$ 的可行解，如图 4.3.7，在两切线上（下）均满足，易得 $m+n \leqslant 2-2\sqrt{2}$ 或 $m+n \geqslant 2+2\sqrt{2}$，故选 D。 □

赏题　试题将二元不等式问题融合在直线与圆的位置关系中，确是很好的尝试，这样的小应用题确实能训练学生的应用意识。

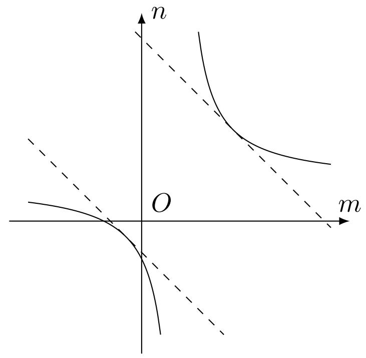


图 4.3.7

14. 已知函数 $y=\frac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx-2$ 的图象恰有两个交点，则实数 k 的取值范围是________。

解法 1 由题意可得，$\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=kx-2$ 有两个不同实根，即 $|x^2-1|=(kx-2)(x-1)$ 有两个非 1 的实根，当 $x^2-1>0$，即 $x\in(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$ 时，原方程即 $x+1=kx-2$，根为 $x=\dfrac{3}{k-1}$；当 $x^2-1\leqslant 0$，即 $x\in[-1,1)$ 时，原方程即 $-x-1=kx-2$，根为 $x=\dfrac{1}{k+1}$。

由 $\begin{cases}\dfrac{3}{k-1}\neq\dfrac{1}{k+1},\\ \left(\dfrac{3}{k-1}\right)^2-1>0,\\ \left(\dfrac{1}{k+1}\right)^2-1\leqslant 0,\end{cases}$ 可得，$k\in(0,1)\bigcup(1,4)$。 □

解法 2 考虑

$$y=\frac{|x^2-1|}{x-1}=\begin{cases}x+1, & x\in(-\infty,-1]\bigcup(1,+\infty),\\ -x+1, & x\in(-1,1),\end{cases}$$

作出图象，而动直线 $y=kx-2$ 过定点 $(0,-2)$，由图易得 $k\in(0,1)\bigcup(1,4)$。 □

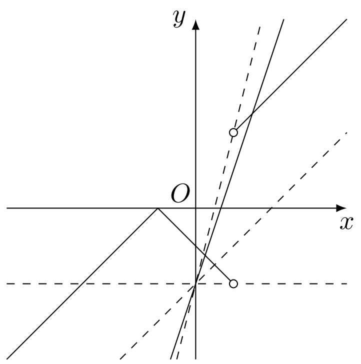


图 4.3.8

赏题 绝对值函数实际上是分段函数，而此题中的分段函数又分得彻底（图象是断开的），这更能充分体现出数形结合的直观妙用。

上海卷

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，边 AB、AD 的长分别为 2、1，若 M、N 分别是边 BC、CD 上的点，且满足 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是________。

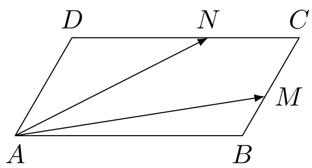


图 4.3.9

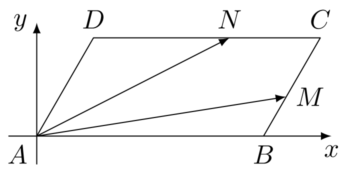


图 4.3.10

解法 1　设 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\lambda$（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}&=\left(\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=\lambda\overrightarrow{AD}^2+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+(1+\lambda-\lambda^2)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=4-3\lambda+(1+\lambda-\lambda^2)\times2\cos\frac{\pi}{3}\\&=-\lambda^2-2\lambda+5\in[2,4]。\end{aligned}$$ □

解法 2　以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立如图 4.3.10 所示的平面直角坐标系，设 $BM=\lambda$（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），则 $CN=2\lambda$，所以

$$\overrightarrow{AM}=\left(2+\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)，\overrightarrow{AN}=\left(\frac{5}{2}-2\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)，$$

则

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(2+\frac{\lambda}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}-2\lambda\right)+\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4-2\lambda\in[2,4]。$$ □

赏题　一个熟知的图形，从一个特殊情况（求具体位置的向量数量积）变为一般情况的探究，改得好！

安徽卷

14. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant3$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值是________。

解法 1　由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant3$ 可得，$4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\leqslant9$，即 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-9\geqslant4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|-9$，当且仅当 $2|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时取等。

（1）当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$0=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|-9$，此时 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant\dfrac{9}{4}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

（2）当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant4\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}-9$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\left(\dfrac{1}{\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}-1\right)\leqslant\dfrac{9}{4}$，由 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[-1,0)\bigcup(0,1]$ 可得，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\in\left[-\dfrac{9}{8},0\right)\bigcup(0,+\infty)$。

综上可得，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\in\left[-\dfrac{9}{8},+\infty\right)$。故当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向，且 $2|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\dfrac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 有最小值是 $-\dfrac{9}{8}$。 □

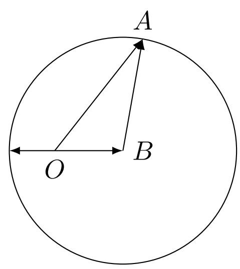


图 4.3.11

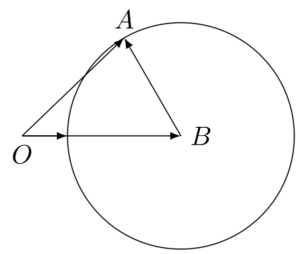


图 4.3.12

解法 2　考虑 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant3$ 的几何意义，作 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}$，考虑 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影与 $|\boldsymbol{b}|$ 的乘积，故当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，且 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 能取最小。

（1）当 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=3$ 时，易知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 最小为 0；

（2）当 $\left|\overrightarrow{OB}\right|<3$ 时，如图 4.3.11，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant-\left|\overrightarrow{OB}\right|\times\dfrac{3-\left|\overrightarrow{OB}\right|}{2}\geqslant-\dfrac{9}{8}$，当 $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{9}{8}$；

（3）当 $\left|\overrightarrow{OB}\right|>3$ 时，如图 4.3.12，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant\left|\overrightarrow{OB}\right|\times\dfrac{\left|\overrightarrow{OB}\right|-3}{2}>0$；

综上可得，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值是 $-\dfrac{9}{8}$。 □

赏题 题干简洁，内蕴丰厚，解法灵活，具有对思维能力的良好考查功能。

广东卷

8. 对任意两个非零的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，定义 $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$，若两个非零的平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$ 中，则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=$ （ ）

（A）$\dfrac{5}{2}$ （B）$\dfrac{3}{2}$ （C）1 （D）$\dfrac{1}{2}$

解法 1 由 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可知，$\cos\theta\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cos\theta$，$\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\theta$，令 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=t$，则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，$\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2t}\right)$，对正整数 t，都有 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}t>\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2t}>\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<t<\sqrt{2}$，所以 $t=1$，则 $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，选 D。 □

解法 2 由题意 $(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\times\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\cos^2\theta$，其值为 $\dfrac{mn}{4}$，m，$n\in\mathbb{Z}$，由 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可知，$\cos\theta\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\cos^2\theta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，故 $\dfrac{mn}{4}$ 只能取 $\dfrac{1}{4}$（$m=n=1$），因此，$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，选 D。 □

解法 3 考虑新定义 $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}$ 的几何意义，$\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{\beta}=\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{|\boldsymbol{\beta}|}$，当 $\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\geqslant0$ 时，其值表示的是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 上的投影长度与 $|\boldsymbol{\beta}|$ 之比。作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，固定线段 OB，则点 A 只能在夹角为 45° 的两射线之间，且在线段 OB 的中垂线及其右侧，结合图形分析，易得结果应选 D。 □

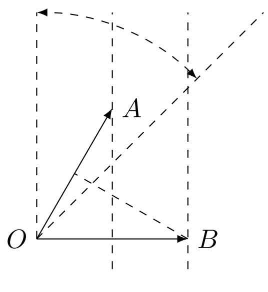


图 4.3.13

赏题 新定义问题，重在转化，用已学知识解决未见问题，是为对学生应用能力较好的考查。

湖南卷

8. 已知两条直线 $l_1:y=m$ 和 $l_2:y=\dfrac{8}{2m+1}$（$m>0$），l_1 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 A，B，l_2 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 C，D。记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a，b。当 m 变化时，$\dfrac{b}{a}$ 的最小值为 （ ）

（A）$16\sqrt{2}$ （B）$8\sqrt{2}$ （C）$8\sqrt[3]{4}$ （D）$4\sqrt[3]{4}$

解法 1 解 $m=\log_2 x$ 得，$x_B=2^m$，解 $m=-\log_2 x$ 得，$x_A=\dfrac{1}{2^m}$，解 $\dfrac{8}{2m+1}=\log_2 x$ 得，$x_D=2^{\frac{8}{2m+1}}$，解 $\dfrac{8}{2m+1}=-\log_2 x$ 得，$x_C=\dfrac{1}{2^{\frac{8}{2m+1}}}$。当 $m>\dfrac{8}{2m+1}$ 时，$a=x_C-x_A$，$b=x_B-x_D$；当 $m<\dfrac{8}{2m+1}$ 时，$a=x_A-x_C$，$b=x_D-x_B$，所以

$$\frac{b}{a}=\left|\frac{x_D-x_B}{x_A-x_C}\right|=\left|\frac{2^{\frac{8}{2m+1}}-2^m}{\dfrac{1}{2^m}-\dfrac{1}{2^{\frac{8}{2m+1}}}}\right|=2^{\frac{8}{2m+1}}\times 2^m=2^{m+\frac{8}{2m+1}}=2^{\left(m+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}\geqslant 2^{4-\frac{1}{2}}=8\sqrt{2},$$

当且仅当 $m=\dfrac{3}{2}$ 时，$\dfrac{b}{a}$ 有最小值为 $8\sqrt{2}$，故选 B。 □

解法 2 考虑 $y=|\log_2 x|$ 的图象性质，易得 $x_Ax_B=1$，$x_Cx_D=1$，所以

$$\frac{b}{a}=\left|\frac{x_D-x_B}{x_A-x_C}\right|=\left|\frac{x_D-x_B}{\dfrac{1}{x_B}-\dfrac{1}{x_D}}\right|=x_Bx_D=2^m\times 2^{\frac{8}{2m+1}}=2^{m+\frac{8}{2m+1}}=2^{\left(m+\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{2m+1}-\frac{1}{2}}\geqslant 2^{4-\frac{1}{2}}=8\sqrt{2},$$

当且仅当 $m=\dfrac{3}{2}$ 时，$\dfrac{b}{a}$ 有最小值为 $8\sqrt{2}$，故选 B。 □

赏题 从几何构图出发，考虑其中的数量关系，不是能一眼看到问题实质的题目，完全体现了新课程的理念，具有考查学生应用意识的良好功能。

朝花夕拾

5.1 【封面故事】狂按计算器上的 cos 键——郭子伟

现代的实体计算器已经越来越先进了，一般都能直接输入一个完整的表达式再计算，甚至可以作图、编程等。但下面并不是要讲这种先进的实体计算器，而是很多年前相对简单的实体计算器，以下称其为“旧式计算器”。除了四则运算外，旧式计算器的输入顺序与现代计算器通常是不同的，比如在旧式计算器的要计算 $\sin 30^\circ$，要先输入 30，再按 sin 键，就会出现结果 0.5，而现代计算器就更符合书写顺序，直接输入 sin 再输入 30，按等号之类的才显示结果。

进入正题，我相信很多用过旧式计算器的人在拿着计算器没事干时可能会试过这样的操作：先随便输入一个数（或不输入，用默认的 0），然后不断地只按 cos 键。结果会发现，虽然屏幕上显示的数字一开始是变来变去的，但按到一定次数之后，总会变成一个定数之后怎么按也不变，这个数是 0.999847742。

以上说的是当旧式计算器处于默认状态的情形，即在“角度制状态”下的结果，而如果先将计算器切换到“弧度制状态”，再作同样的操作，最后也会出现一个定数 0.739085133。

尽管很多人发现过这一点，但我不知道又有多少人会去思考其原因，甚至去严格地证明它。其实这涉及到递推数列问题，我们分“角度制状态”和“弧度制状态”两种情况讨论。

（1）在“角度制状态”下，假设一开始输入的数为 a_0，记第 n 次按 cos 键后出现的结果为 a_n，那么数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_{n+1} = \cos(a_n{}^\circ) = \cos\frac{a_n\pi}{180};$$

（2）在“弧度制状态”下，假设一开始输入的数为 b_0，记第 n 次按 cos 键后出现的结果为 b_n，那么数列 $\{b_n\}$ 满足递推关系

$$b_{n+1} = \cos b_n。$$

于是上述现象归结为：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在。

图 5.1.1（即本期封面图）展示的就是第（2）种情况下的数列 $\{b_n\}$ 变化的示意图，这里我不打算对该图作解释，希望读者自己看明白它。

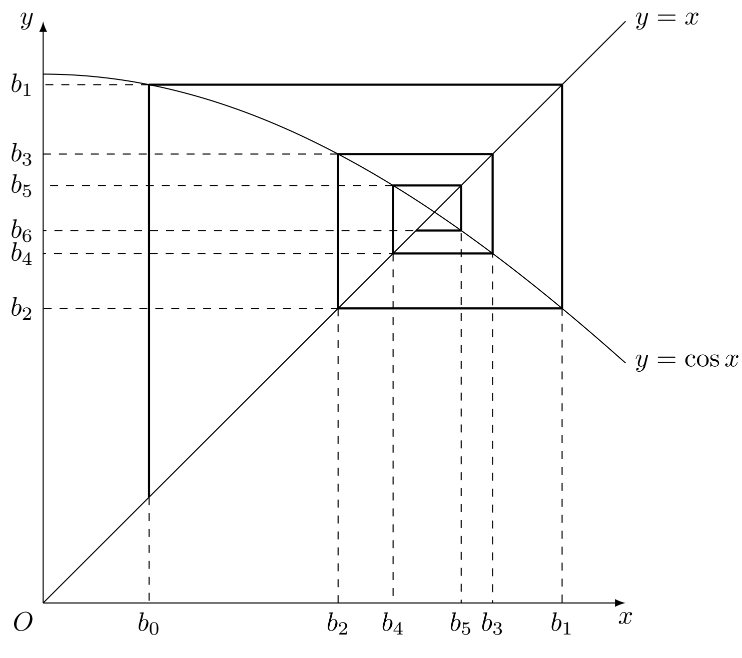


图 5.1.1

从图 5.1.1 不难想象出，那条折线最后总会绕到 $y=x$ 与 $y=\cos x$ 的交点上，所以从这一点已经可以看出 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在而且其值就是 $x=\cos x$ 的解。当然了，图形并不能代表证明，我们还是需要用数学知识去严格地证明它。下面我只证第（2）种情况，读者可仿之自行证明情况（1）。

证明 首先不难证明方程 $x=\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有且只有一个实数解（也请读者自行证之），我们将这个解记为 $\beta(\approx 0.739085133)$，则

$$|b_{n+1}-\beta|=|\cos b_n-\cos\beta|=2\left|\sin\frac{b_n-\beta}{2}\sin\frac{b_n+\beta}{2}\right|,$$

由递推式知，对任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都有 $b_n\in[-1,1]$，所以有

$$\left|\frac{b_n+\beta}{2}\right|<1<\frac{\pi}{2}\implies\left|\sin\frac{b_n+\beta}{2}\right|<\sin 1,$$

结合已知不等式 $|\sin x|\leqslant|x|$，得到

$$2\left|\sin\frac{b_n-\beta}{2}\sin\frac{b_n+\beta}{2}\right|<2\left|\frac{b_n-\beta}{2}\right|\sin 1=\sin 1\cdot|b_n-\beta|,$$

所以

$$|b_{n+1}-\beta|<\sin 1\cdot|b_n-\beta|,$$

进而有

$$|b_n-\beta|<(\sin 1)^{n-1}\cdot|b_1-\beta|,$$

因为 $0<\sin 1<1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin 1)^{n-1}=0$，故由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}|b_n-\beta|=0\iff\lim_{n\to\infty}b_n=\beta。$$

这样，情况（2）的结论就得到了证明。 □

如果你仿上证得了情况（1）的结论，你会发现其收敛速度比情况（2）的快得多，图形画出来也看不清，故此才没作出情况（1）的图形。另外还需要补充说明一个细节，尽管在计算器上最后显示的数字怎么按也不变，但理论上 b_n 还是在变的，并不会停下来，除非初始值就是 β，只不过计算器精确度有限所以才这样。

最后附上图 5.1.1 的 LaTeX 源代码，需加载 tikz 宏包。

```
\begin{tikzpicture}[scale=7,domain={0:1.1}]
    \draw[samples=50,smooth] plot (\x,{cos(\x r)}) node [right] {$y=\cos x$};
    \draw (0,0)--(1.1,1.1) node [right] {$y=x$};
    \draw[->] (0,0)--(0,1.1) node [left] {$y$};
    \draw[->] (0,0)--(1.1,0) node [below] {$x$};
    \node at (0,0) [below left] {$O$};
    \newcommand{\x}{0.2}
    \newcounter{j}
    \foreach \i in {0,...,5}{%
       \pgfmathparse{cos(\x r)}
       \let\y\pgfmathresult
       \draw[dashed] (\x,\x)--(\x,0) node [below] {$b_\i$};
       \pgfmathsetcounter{j}{\i+1}
       \draw[dashed] (\x,\y)--(0,\y) node [left] {$b_{\arabic{j}}$};
       \draw[thick] (\x,\x)--(\x,\y)--(\y,\y);
       \global\let\x\y}
\end{tikzpicture}
```