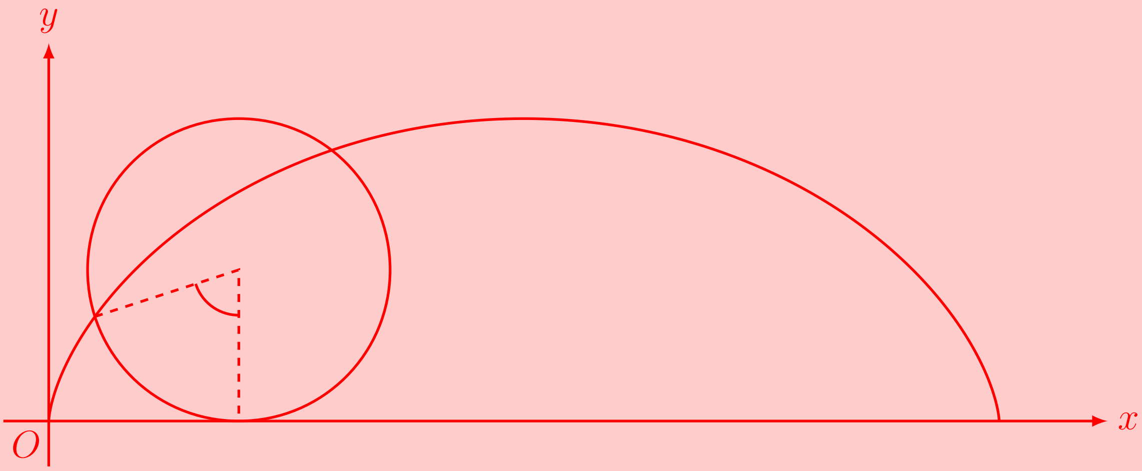
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2012 年第 1 期　　总第 8 期



目录

数学评书

1.1 《智慧宝典》第二部第七回 巧过双线桥 脱身溺水河——陈海峰

上回说到小豪与小英路过桃花岛，破了桃花阵后，天地忽然开朗了很多，原来是一条大河挡住了去路，他们才知道，所谓的桃花岛是这条大河形成的湖泊上的陆地部分。只见有人喊道：“我在这里等你们多时了”，两人定睛一看，原来是他们的手下败将——小精灵，“现在我架了双线桥，每条只能承受一个人的重量，只有一个支撑点可以过河。下面的那条河叫溺水河，不管你的本领多大，陷下就不能脱身了。我等你们的消息吧！”说完脸上露出一副幸灾乐祸的样子。

两人也不敢怠慢，细细查看这两座桥：

桥梁一 已知点 $A(-2,3)$，点 $B(1,1)$，试在直线 $l: x-y-2=0$ 上求一点 P，使线段 PA 与 PB 距离之和最小；

桥梁二 已知点 $A(-2,3)$，点 $B(1,1)$，试在直线 $l: x-y-2=0$ 上求一点 P，使线段 PA 与 PB 距离之差最大。

只见小豪快如闪电，“奎星笔”一出，就找到了那个支撑点。

解 （1）如图 1.1.1 所示，作 A 的关于直线 l 的对称点 A'，连结 $A'B$ 与直线交于一点 P，则 P 即为所求。设 $A'(x_0,y_0)$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{3-y_0}{-2-x_0}\times 1=-1, \\ \dfrac{-2+x_0}{2}-\dfrac{3+y_0}{2}-2=0, \end{cases}$$

解得 $x_0=5$，$y_0=-4$，即 $A'(5,-4)$，所以直线 $A'B$ 的方程是 $5x+4y-9=0$。联立

$$\begin{cases} 5x+4y-9=0, \\ x-y-2=0, \end{cases}$$

解得 $P\left(\dfrac{17}{9},-\dfrac{1}{9}\right)$； □

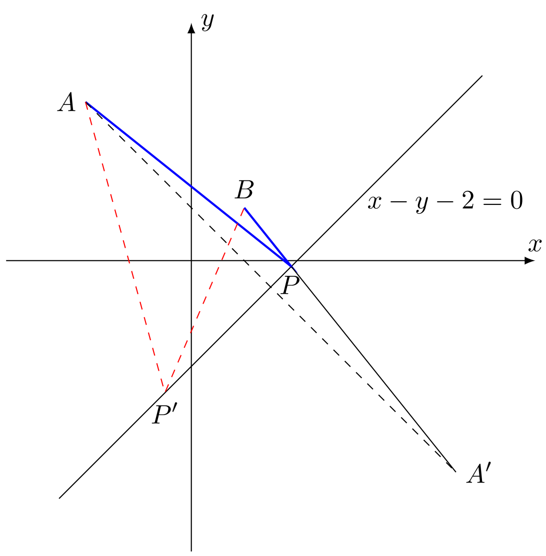


图 1.1.1

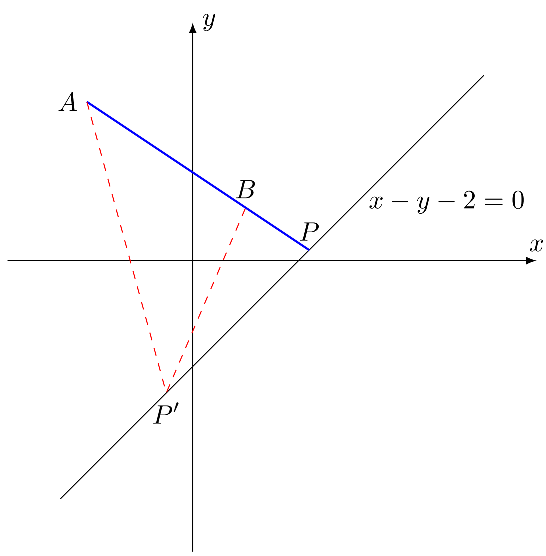


图 1.1.2

这边看到小豪已经过桥，谁知小英更快，只见她用神算子一拨，算出那个支撑点。

解 （2）由已知得直线 AB 的方程是 $2x+3y-5=0$，联立

$$\begin{cases} 2x+3y-5=0, \\ \quad x-y-2=0, \end{cases}$$

解得 $P\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{1}{5}\right)$。 □

只听小精灵连声说不服，不服，为什么你们知道那两个点，它们是怎么来的，能不能给出证明?

小豪说：看我的吧。

证明 （1）如图 1.1.1 所示，假设还有最短的一点是 P'，则有 P' 与 P 不重合。那么我们连结 AP' 与 $P'B$，也就是比较一下 $AP'+P'B$（两条红线之和）与 $AP+BP$（两条蓝线之和）的大小。在 $\triangle BP'A'$ 中，显然有 $A'P'+BP'>A'B$。而 $A'P=A'P'$，$A'B=A'P+PB=AP+PB$，故 P' 不可能。这样我就证明了点 P 即为所求了。 □

小英清声一笑，你可看清楚了。

证明 （2）如图 1.1.2 所示，假设有另外一点 P'（异于点 P），使得线段 $P'A$ 与 $P'B$ 距离之差最大。但是在 $\triangle ABP'$ 中，我们有 $P'A-P'B<AB$（三角形的两边之差小于第三边），而 $AB=PA-PB$，显然我们有 $P'A-P'B<PA-PB$，至此，我证明了为什么 P 即为所求了，当然如果这些点在直线 l 的两侧，我想也没问题了吧！ □

这时小精灵已经是心服口服了，说道：“愿助你们一臂之力！”，究竟小精灵有什么话说，且听下回分解。

1.2 《智慧宝典》第二部第八回 军营失火急煞人 教条主义险误事——陈海峰

上回说道两位小英雄过了双线桥，终于使小精灵心服口服。小精灵对他俩说："我会帮助你们，后会有期。"于是不见踪影。

两位小英雄就往前赶路，刚刚到达一个居民区，这时只见另外一个地方火光冲天，这时又听到一阵锣鼓声，有人喊"集合，紧急集合"，很快居民们聚集在一起。只听台上有人说："前方接到驻军处发生火灾，希望我们紧急救援，如果每人挑水一桶，就能熄灭火灾，现在我们大家都要齐心协力，我们的河正好是这样的。大家快看地图（如图 1.2.1），我根据数学的对称原理，找到了我们居民区的对称点，然后观察了这个地形，只要到那个大树下取水处（见图 1.2.1）最好，所以大家马上出发，到那个地方取水最快，也能最快到达军营，听见了没有！只听大家齐喊"明白了"。

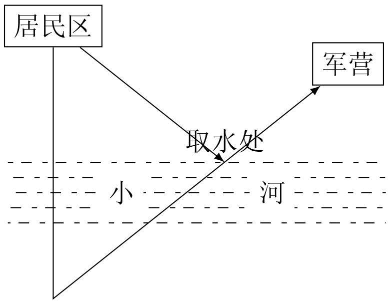


图 1.2.1

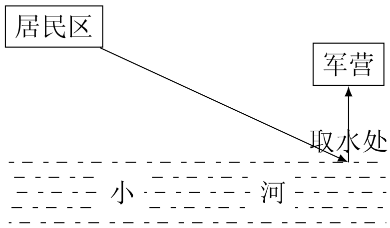


图 1.2.2

说时迟，那时快，只听两位小英雄大喝一声："且慢！"大家都用吃惊看着这两位不速之客。只见小豪说："请大家听我说，刚刚这位仁兄说的取水点不对！"这时台下一片哗然。只见刚刚发话的人有点生气，红着眼睛看着他俩。这时小豪接着说："如果是要河边取一小瓶矿泉水到军营，刚刚那位仁兄说的是对的，那是一条最短的路径，我就不多说，可是大家现在也知道，我们现在是用水桶取水，那么重量都不轻的。所以我们当然希望桶加入水时提的距离越短越好，而提着空桶多走一点又何妨！刚刚那位仁兄可能没有想到这个问题，所以应该是——"只见小豪用"奎星笔"一划（见图 1.2.2）"只要垂直于军营那个地方即可"，"这个我知道，是一块大石头"，只听底下有人喊："支持这个小英雄的看法！"刚刚发言的那位仁兄这时也站出来说："我只考虑到让大家走的距离短一点，却没有考虑到另外一个情况，这位小英雄所言极是！"这时小豪与小英齐说："那我们大家快出发吧！"

两位小英雄也加入了救火的大军中，他们都到大石头处取水，果然很快把火熄灭了。

救火结束后两位小英雄才知道，刚刚发话的人就是这里的居民老大，那位老大对他们更是敬佩有加，说"我就是以为利用所学的知识来应用，犯了教条主义的毛病，险些误了大事！还好两位小英雄赶来，多谢了！"这正是：纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。

欲知后事如何，且听下回分解。

趣味数学

2.1 “鸟儿捉鱼”问题蕴含的定理——王建新

十一世纪的一位阿拉伯数学家曾提出一个“鸟儿捉鱼”的问题：小溪边生长了两棵棕榈树，恰好隔岸相望。一棵树高 30 肘尺（肘尺是古代的长度单位），另外一棵高 20 肘尺，两棵棕榈树的树干间的距离是 50 肘尺。每棵树的树顶上都有一只鸟。忽然，两只鸟同时看见棕榈树间的水面上游出一条鱼，它们立刻飞下去抓鱼，它们的速度相同并且同时到达目标。问这条鱼出现的地方与比较高的棕榈树之间的距离有多远?

解析 首先应将题目抽象成数学问题，画出图形。如图 2.1.1，AB、CD 分别表示矮树和高树，AC 表示两树之间的距离，点 E 表示鸟儿抓鱼的地方，$AB=20$，$CD=30$，$AC=50$。

由于两只鸟同时看见并去抓鱼，它们的速度相同并且同时到达目标，所以 $BE=DE$。设 $CE=x$，则 $AE=50-x$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得 $20^2+(50-x)^2=BE^2$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理，得 $30^2+x^2=DE^2$。

因为 $BE=DE$，所以 $20^2+(50-x)^2=30^2+x^2$，化简整理，得 $100x=2000$，即 $x=20$（肘尺）。

所以鱼出现的地方与比较高的棕榈树之间的距离有 20 肘尺。 □

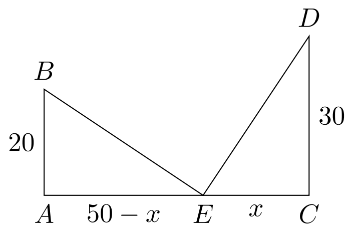


图 2.1.1

做到这里，你是否觉得问题已经圆满解决，可以松一口气。如果做到这里就此止步，你将错失一次发现问题的好机会！观察计算结果不难发现：$AE=CD$，$CE=AB$，为什么这些线段会相等呢? 注意到 $AB+CD=20+30=50$，$AC=AE+CE=50$，即 $AB+CD=AE+CE$。于是我们可以猜想：如果 $AB+CD=AE+CE$，那么必有 $AE=CD$，$AB=CE$。这个猜想是否正确，让我们一起探究。

为了叙述问题方便，不妨设 $AB=m$，$CD=n$（其中 $m<n$），则 $AC=m+n$。

由勾股定理，得 $AE^2+m^2=CE^2+n^2$，即 $AE^2-CE^2=n^2-m^2$。

即 $(AE-CE)(AE+CE)=(n-m)(n+m)$。

由 $AE+CE=AC=m+n$，得 $AE-CE=n-m$。

所以 $\begin{cases} AE+CE=m+n, \\ AE-CE=n-m, \end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases} AE=n, \\ CE=m, \end{cases}$ 所以 $AE=CD=n$，$AB=CE=m$。

因此我们的猜想正确。而由 $AE=CD$，$AB=CE$ 易证 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle CED$，由此我们得到一个直角三角形全等的判定定理。

定理 2.1.1. 如果两个直角三角形的斜边相等，且各取它们的一条直角边作和，得到的两个和相等，那么这两个直角三角形全等。

如图 2.1.2，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，$\angle C=\angle F=90^\circ$，$AB=DE$，$AC+EF=BC+DF$，那么 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle DEF$。

同学们可以模仿“鸟儿捉鱼”问题的解决方法进行证明。

注意到定理中的条件“$AC+EF=BC+DF$”可变形为“$AC-DF=BC-EF$”，由此我们又可以得到直角三角形全等的判定定理的一个推论。

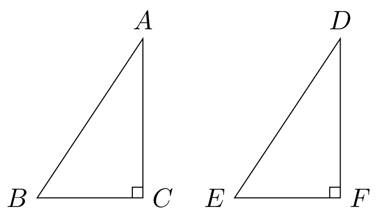


图 2.1.2

推论 2.1.1.1. 如果两个直角三角形的斜边相等，且各取它们的一条直角边作差，得到的两个差相等，那么这两个直角三角形全等。

注意到定理中的条件“$AC+EF=BC+DF$”还可变形为“$AC-BC=DF-EF$”，由此我们又可以得到直角三角形全等的判定定理的一个推论。

推论 2.1.1.2. 如果两个直角三角形的斜边相等，且其中一个直角三角形的两条直角边的差与另一个直角三角形的两条直角边的差相等，那么这两个直角三角形全等。

对于等式 $AC - BC = DF - EF$，由完全平方公式可得 $(AC - BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC$，$(DF - EF)^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF$。

而 $AC - BC = DF - EF$，所以 $AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF$。

又由勾股定理，得 $AC^2 + BC^2 = AB^2$，$DF^2 + EF^2 = DE^2$。

而 $AB = DE$，所以 $AC^2 + BC^2 = DF^2 + EF^2$。

所以 $-2AC \cdot BC = -2DF \cdot EF$，即 $AC \cdot BC = DF \cdot EF$。

反之，我们又可由 $AC \cdot BC = DF \cdot EF$ 推出 $AC - BC = DF - EF$ 或 $AC - BC = EF - DF$，两种情况都可以推出两个直角三角形全等，由此我们又可以得到直角三角形全等的判定定理的一个推论。

推论 2.1.1.3. 如果两个直角三角形的斜边相等，且其中一个直角三角形的两条直角边的**积**与另一个直角三角形的两条直角边的**积**相等，那么这两个直角三角形全等。

由 $AC \cdot BC = DF \cdot EF$，得 $2AC \cdot BC = 2DF \cdot EF$。

又 $AC^2 + BC^2 = DF^2 + EF^2$，所以 $AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC = DF^2 + EF^2 + 2DF \cdot EF$。

即 $(AC + BC)^2 = (DF + EF)^2$。所以 $AC + BC = DF + EF$。

反之，我们也可由 $AC + BC = DF + EF$ 推出 $AC \cdot BC = DF \cdot EF$，由此我们又得到直角三角形全等的判定定理的一个推论。

推论 2.1.1.4. 如果两个直角三角形的斜边相等，且其中一个直角三角形的两条直角边的**和**与另一个直角三角形的两条直角边的**和**相等，那么这两个直角三角形全等。

如果再能注意到直角三角形的面积等于两直角边的乘积的一半，而 $S_{\mathrm{Rt}\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC$，$S_{\mathrm{Rt}\triangle DEF} = \frac{1}{2}DF \cdot EF$。由 $AC \cdot BC = DF \cdot EF$，得 $S_{\mathrm{Rt}\triangle ABC} = S_{\mathrm{Rt}\triangle DEF}$。

反之，我们也可由 $S_{\mathrm{Rt}\triangle ABC} = S_{\mathrm{Rt}\triangle DEF}$ 推出 $AC \cdot BC = DF \cdot EF$，由此我们又得到直角三角形全等的判定定理的一个推论。

推论 2.1.1.5. 如果两个直角三角形的斜边和**面积**都相等，那么这两个直角三角形全等。

若设 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高为 h_1，$\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 斜边上的高为 h_2，则 $S_{\mathrm{Rt}\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h_1$，$S_{\mathrm{Rt}\triangle DEF} = \frac{1}{2}DE \cdot h_2$，由 $S_{\mathrm{Rt}\triangle ABC} = S_{\mathrm{Rt}\triangle DEF}$，$AB = DE$，得 $h_1 = h_2$。

反之，我们也可由 $h_1 = h_2$ 推出 $S_{\mathrm{Rt}\triangle ABC} = S_{\mathrm{Rt}\triangle DEF}$，由此我们又得到直角三角形全等的判定定理的一个推论。

推论 2.1.1.6. 如果两个直角三角形的斜边和**斜边上的高**都相等，那么这两个直角三角形全等。

面积和周长在三角形的学习中有着重要的应用。由推论 2.1.1.4 我们又可以得到一个重要的推论。

推论 2.1.1.7. 如果两个直角三角形的斜边和**周长**都相等，那么这两个直角三角形全等。

数学家坦普・倍尔有句名言："数学的伟大使命在于从混沌中发现秩序。"我想，从"鸟儿捉鱼"问题中发现直角三角形全等的判定定理，透过数学现象揭示数学规律和数学本质正是我们要做的。

2.2 “数学王子”的新发现——王建新

在数学兴趣小组课外活动上，素有“数学王子”美誉的李亚楠同学向其他成员展示了她的新发现。

李亚楠：我的叔叔在举世震惊的“唐山大地震”那年出生，也就是 1976 年出生，他是一位数学爱好者，我从他那里还学到了不少的数学知识呢。在学习了整式的乘法后，他让我随便写两个最后两位数字是 76 的两位数相乘，看看会有什么发现。我随便写了一些最后两位数字是 76 的两位数相乘，发现了一个奇怪的现象，任何两个自然数，只要它们的最后两位数是 76，那么其乘积的最后两位数字也必然是 76。如 $376\times576=216576$，$176\times876=154176$ 等等。

赵老师：事实上，“76”是一个很特殊的数。任何两个正整数，只要它们的最后两位数是 76 的话，那么其乘积的最后两位数字也必然是 76。人们称这样的数为“自守数”。关于“自守数”的发现，还有一个故事呢。

1776 年，美国第一任总统华盛顿宣布建立美利坚合众国。1976 年，美国举行了建国 200 周年纪念活动。在某中学的黑板报《一日一题》栏中有一道有趣的题目：1776^{200} 的最后两位数字是什么？学生马克看完题不假思索地说：“很简单，是 76。”马克实际上就抓住了 76 是一个“自守数”的特性，从而快速判断 1776^{200} 的最后两位数字是 76。

在学习了整式的乘法后，你能对“自守数”现象进行揭秘吗?

李亚楠：（沉思片刻）设 m、n 是任意自然数，$\overline{m76}$、$\overline{n76}$ 表示最后两位数是 76 的自然数，则

$$
\begin{aligned}
\overline{m76}\times\overline{n76}&=(100m+76)(100n+76)=10000mn+7600m+7600n+5776\\
&=10000mn+7600m+7600n+5700+76=100\times(100mn+76m+76n+57)+76,
\end{aligned}
$$

由于 m、n 是任意自然数，显然最后两位数字一定是 76。

赵老师：太棒了！自然数中这样的自守数还有很多，如 5，6，376，625 等等。我们的“数学王子”勤于思考，善于动脑的精神应该值得大学学习！最后请大家运用运用自守数的知识解答下面问题：

（1）如果 3776×4676 的积是一个八位数，它的前六位数字是 176565，不用计算器，请你快速写出 $3776\times4676=$____。

（2）25 的四次幂的最后三位数字是____。

（3）设 a、b 是任意自然数，$\overline{a376}$、$\overline{b376}$ 表示最后两位数是 76 的自然数，则 $\overline{a376}\times\overline{b376}=1000\times$____$+$____。由此说明____是一个自守数。

答案及提示：（1）17656576；（2）由于 $25^4=(25^2)^2=625^2$，而 625 是一个自守数，所以 625^2 的最后三位数字是 625；（3）$(1000ab+376a+376b+141)$，376，376。

数学竞赛

3.1 一道全国初中数学联赛题的几点启示——赵国瑞

先看 2007 年全国初中数学联赛题第一试选择题第 6 题：

袋中装有 5 个红球、6 个黑球、7 个白球，从袋中摸出 15 个球，摸出的球中恰好有 3 个红球的概率是（ ）

A. $\dfrac{1}{10}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{3}{10}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

它的标准解答如下：

解 设摸出的 15 个球中有 x 个红球、y 个黑球、z 个白球，则 x，y，z 都是正整数，且 $x \leqslant 5$，$y \leqslant 6$，$z \leqslant 7$，$x+y+z=15$。

因为 $y+z \leqslant 13$，所以 x 可取值 2，3，4，5。

当 $x=2$ 时，只有 1 种可能，即 $y=6$，$z=7$；

当 $x=3$ 时，$y+z=12$，有 2 种可能，即 $y=5$，$z=7$ 或 $y=6$，$z=6$；

当 $x=4$ 时，$y+z=11$，有 3 种可能，即 $y=4$，$z=7$ 或 $y=5$，$z=6$ 或 $y=6$，$z=5$；

当 $x=5$ 时，$y+z=10$，有 4 种可能，即 $y=3$，$z=7$ 或 $y=4$，$z=6$ 或 $y=5$，$z=5$ 或 $y=6$，$z=4$。

因此，共有 $1+2+3+4=10$ 种可能的摸球结果，其中摸出的球中恰好有 3 个红球的结果有 2 种，所以所求的概率为 $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$。故选（B）。 □

表面上看，标准解答似乎天衣无缝，实则不然。摸球的结果确实如标准解答给出的一样，有 10 种情况，而且恰好有 3 个红球也占两种情况，但是标准解答错在把 10 种不是等可能结果的情况当成等可能结果的情况来计算了，这样求出的概率显然不对。

或许有的同学不太相信，那么请你不妨用标准解答的方法来解这一道题：袋中装有 1 个红球、100 个黑球，从袋中摸出 2 个球，摸出的球中恰好有 1 个红球的概率是多少?

解 摸出的 2 个球中有 x 个红球、y 个黑球，则 x，y 都是正整数，且 $x \leqslant 1$，$y \leqslant 100$，$x+y=2$，所以 x 可取值 0，1。当 $x=0$ 时，$y=2$；当 $x=1$ 时，$y=1$，这样求出摸出的球中恰好有 1 个红球的概率是 $\dfrac{1}{2}$。 □

这是不可能的，因为摸出的球中恰好有 1 个红球的概率明显很小。

那么应该怎样解答这道概率竞赛题呢?

本题若用高中的排列组合知识，解答并不困难。无奈这是一道初中数学竞赛题，学生还没有学过排列组合知识，怎么办呢? 由于从袋中摸出的球数太多，列表法已无用武之地，树形图法也显得无能为力，分析至此，问题似乎已经陷入僵局。不要紧，一个好的办法是分类。

在分类之前，我们先对原问题进行适当的转化：一共有 18 个球，从袋中摸出 15 个球后，袋中就只剩下 3 个球了，因为摸出的球中恰好有 3 个红球，而一共有 5 个红球，那么剩下的 3 个球中必然有 2 个红球。而且这时 18 个球被分成了两部分：摸出的 15 个球（其中有 3 个红球）和袋中剩下的 3 个球（其中有 2 个红球），而且这两部分的概率应该相等。于是问题转化为“袋中有 5 个红球，6 个黑球，7 个白球，从袋中摸出 3 个球，摸出的球中恰好有 2 个红球的概率是多少? ”由于摸出的球数少多了，这样问题就变得相对简单了。

摸出的球数是变少了，可总球数没有变，列表法和树形图法仍然无法派上用场，看来只能用列举法了。由于所有等可能结果一共有 $18 \times 17 \times 16$ 种，所以我们只需列举出 3 个球中有 2 个红球的结果数。怎样列举出所有符合要求的结果呢? 因为一共从袋中摸出 3 个球，第一个球可能是红色，也可能是黑色或白色，所以可以分情况列举：

一、第一个球是红球

假设第一个球是红$_1$，

①如果第二个球仍是红球，

若第二个球是红$_2$，则第三个球是黑$_1$，黑$_2$，黑$_3$，黑$_4$，黑$_5$，黑$_6$，白$_1$，白$_2$，白$_3$，白$_4$，白$_5$，白$_6$，白$_7$中的其中之一，一共有 13 种符合要求的结果；同理第二个球是红$_3$或红$_4$或红$_5$时，都有 13 种符合要求的结果，因此第二个球是红球时一共有 13×4 种符合要求的结果；

②如果第二个球是黑球，

若第二个球是黑$_1$，则第三个球是红$_2$，红$_3$，红$_4$，红$_5$中的其中之一，一共有 4 种符合要求的结果；同理第二个球是黑$_2$或黑$_3$或黑$_4$或黑$_5$或黑$_6$时，都有 4 种符合要求的结果，因此第二个球是黑球时一共有 4×6 种符合要求的结果；

③如果第二个球是白球，

若第二个球是白$_1$，则第三个球是红$_2$，红$_3$，红$_4$，红$_5$中的其中之一，一共有 4 种符合要求的结果；同理第二个球是白$_2$或白$_3$或白$_4$或白$_5$或白$_6$或白$_7$时，都有 4 种符合要求的结果，因此第二个球是白球时一共有 4×7 种符合要求的结果；

所以第一次摸到红$_1$时一共有 $13\times4+4\times6+4\times7=13\times4+13\times4=13\times4\times2$ 种符合的结果，因此第一次摸到红球时有 $13\times4\times2\times5$ 种符合要求的结果。

二、第一个球是黑球

假设第一个球是黑$_1$，

①如果第二个球是红球，

若第二个球是红$_1$，则第三个球是红$_2$，红$_3$，红$_4$，红$_5$中的其中之一，一共有 4 种符合要求的结果；同理第二个球是红$_2$或红$_3$或红$_4$或红$_5$时，都有 4 种符合要求的结果，因此第二个球是红球时一共有 5×4 种符合要求的结果；

②如果第二个球是黑球，共有 0 种符合要求的结果；

③如果第二个球是白球，共有 0 种符合要求的结果；

所以第一次摸到黑$_1$时有 5×4 种符合要求的结果，因此第一次摸到黑球时有 $5\times4\times6$ 种符合要求的结果。

三、第一个球是白球

假设第一个球是白$_1$，

①如果第二个球是红球，

若第二个球是红$_1$，则第三个球是红$_2$，红$_3$，红$_4$，红$_5$中的其中之一，一共有 4 种符合要求的结果；同理第二个球是红$_2$或红$_3$或红$_4$或红$_5$时，都有 4 种符合要求的结果，因此第二个球是红球时一共有 4×5 种符合要求的结果；

②如果第二个球是黑球，共有 0 种符合要求的结果；

③如果第二个球是白球，共有 0 种符合要求的结果；

所以第一次摸到白$_1$时有 4×5 种符合要求的结果，因此第一次摸到白球时有 $4\times5\times7$ 种符合要求的结果。

所以一共有 $13\times4\times2\times5+5\times4\times6+4\times5\times7=13\times4\times2\times5+4\times5\times13=60\times13$ 种符合要求的结果。

而所有等可能结果一共有 $18\times17\times16$ 种，因此从袋中摸出 3 个球，摸出的球中恰好有 2 个红球的概率是 $\dfrac{60\times13}{18\times17\times16}=\dfrac{65}{408}$，即从袋中摸出 15 个球，摸出的球中恰好有 3 个红球的概率是 $\dfrac{65}{408}$，这才是原题的正确答案！

那么，原标准解答是否就一无是处，对我们没有任何参考价值呢？回答是否定的。原标准解答为我们提供了一种解答此类摸球个数和次数较多的概率竞赛题的思路：分类讨论。只要我们求出各种情况中包含的等可能结果数，就可求出摸出的球中恰好有 2 个红球的概率。当然，为了简化问题，我们仍然只需求出“从袋中摸出 3 个球，摸出的球中恰好有 2 个红球的概率”。

模仿标准解答的方法，设摸出的 3 个球中有 a 个红球、b 个黑球、c 个白球，再利用标准解答的答案，不难求出：

当 $a=3$ 时，$b=0$，$c=0$；

当 $a=2$ 时，$b=1$，$c=0$ 或 $b=0$，$c=1$；

当 $a=1$ 时，$b=2$，$c=0$ 或 $b=1$，$c=1$ 或 $b=0$，$c=2$；

当 $a=0$ 时，$b=3$，$c=0$ 或 $b=2$，$c=1$ 或 $b=1$，$c=2$ 或 $b=0$，$c=3$。

利用树形图法，可以求出：

（1）当 $a=3$，$b=0$，$c=0$ 时，有 60 种结果；

（2）当 $a=2$ 时，

①若 $b=1$，$c=0$，有 360 种结果；

②若 $b=0$，$c=1$，有 420 种结果；

共有 $360+420=780$ 种结果；

（3）当 $a=1$ 时，

①若 $b=2$，$c=0$，有 450 种结果；

②若 $b=1$，$c=1$，有 1260 种结果；

③若 $b=0$，$c=2$，有 630 种结果；

共有 $450+1260+630=2340$ 种结果；

（4）当 $a=0$ 时，

①若 $b=3$，$c=0$，有 120 种结果；

②若 $b=2$，$c=1$，有 630 种结果；

③若 $b=1$，$c=2$，有 756 种结果；

④若 $b=0$，$c=3$，有 210 种结果；

共有 $120+630+756+210=1716$ 种结果；

因此一共有种 $60+780+2340+1716=4896$ 种结果，而且这些结果发生的可能性相等，因此从袋中摸出 3 个球，摸出的球中恰好有 2 个红球的概率是 $\dfrac{780}{4896}=\dfrac{65}{408}$，即从袋中摸出 15 个球，摸出的球中恰好有 3 个红球的概率是 $\dfrac{65}{408}$。

从上面的求解过程我们也不难理解，虽然摸球结果有 10 种情况，而且摸到红球的结果有 2 种情况，但这 10 种情况包含的等可能结果数不尽相同（只有 $a=1$，$b=0$，$c=2$ 和 $a=0$，$b=2$，$c=1$ 时结果相同，其它 8 种情况都不相同），因而不能用类似于标准解答的方法求概率。只有将种各种情况包含的等可能结果数全部算出，然后才能用摸到红球的等可能结果数除以全部的等可能结果数，这样求出的才是摸到红球的概率！

当然，在求出了摸到 2 个红球的等可能结果数后，也可由 $18\times17\times16$ 直接算出所有等可能的结果数，而没有必要采用将各种情况的结果数都算出来然后再相加的办法求所有等可能的结果总数，毕竟那样麻烦。我们之所以求出各种情况下的等可能结果数，目的就是为了让同学们明白标准解答包含的 10 种情况，每种情况包含的等可能结果数并不相同。

感悟：

1. 对于一道复杂或看似困难的问题，要注意在认真分析、深刻理解题意的基础设法将其转化为相对简单的问题，从而降低解答难度，如本例将“从袋中摸 15 出个球”的情形转化为“从袋中摸 3 出个球”的情形，大大减少了摸球的数量。

2. 分类讨论思想是一种重要的数学思想，对于一个较为复杂的数学问题，通过恰当的分类，将其转化为若干较为简单的问题，然后对每个较为简单的问题各个击破，从而使整个问题最终获解。分类时要做到既不重复也不能遗漏，而且一次分类只能按一个标准。如在列举“从袋中摸出 3 个球，摸出的球中恰好有 2 个红球的结果”时，我们按照第一个球是红球、黑球、白球三种情况进行分类（一级分类），在讨论第一个球是红球的情况时，我们又按照第二个球是红球、黑球、白球三种情况进行分类（二级分类），在讨论第三个球的情况时，我们又按照第三个球是红球、黑球、白球三种情况进行分类（三级分类）。

3. 在运用概率公式 $P(A)=\dfrac{m}{n}$ 计算概率时，一定要注意事件 A 包含的各种结果发生的可能性相等，如果发生的可能性不相等，就不能运用概率计算公式，否则就会犯类似标准解答那样的错误！

4. 本题作为一道全国数学竞赛题，竟然是一道没有正确答案的错题，因此对已有的数学结论和解题过程同学们要能提出自己的见解，能独立思考，不盲从，不轻信课本，不迷信数学权威，要能发现自己和同学乃至老师的原有认识中的错误和不足，不断地加以修正和完善，提高自己批判性思维的能力。

3.2 一道 TI 杯全国初中数学竞赛题的多种解法——赵国瑞

在数学竞赛中，我们常碰到根据条件确定代数对称式取值范围的问题。解这类问题，除了运用一元二次方程、不等式等方面的知识，还要用到一些解题技巧。现结合一道竞赛题的多种解法，谈谈求解此类问题的一些常用思考方法。

例 3.2.1. （2011 年 TI 杯全国初中数学竞赛题）已知实数 a、b 满足 $a^2+ab+b^2=1$，且 $t=ab-a^2-b^2$，那么 t 的取值范围是____________________。

分析 1 由于 a、b 的对称式总可变为 $a+b$ 和 ab 的形式，所以此类问题通常设参数构造一元二次方程，利用一元二次方程有实数根的条件求解。

解法 1

$$a^2+ab+b^2=1, \tag{3.2.1}$$

$$ab-a^2-b^2=t, \tag{3.2.2}$$

$(3.2.1)+(3.2.2)$，得 $2ab=t+1$，所以 $ab=\dfrac{t+1}{2}$，所以

$$(a+b)^2=(a^2+ab+b^2)+ab=1+ab=1+\frac{t+1}{2}=\frac{t+3}{2},$$

因为 $(a+b)^2\geqslant 0$，所以 $t+3\geqslant 0$，$t\geqslant -3$。此时 $a+b=\pm\sqrt{\dfrac{t+3}{2}}$。

a、b 是关于 x 的方程 $x^2\mp\sqrt{\dfrac{t+3}{2}}x+\dfrac{t+1}{2}=0$ 的两根。由一元二次方程有实数根的条件，得

$$\left(\sqrt{\frac{t+3}{2}}\right)^2-4\times\frac{t+1}{2}\geqslant 0,$$

解得 $t\leqslant -\dfrac{1}{3}$，所以 $-3\leqslant t\leqslant -\dfrac{1}{3}$。 □

分析 2 由 $a^2+ab+b^2=1$，得 $a^2+b^2=1-ab$。所以 $t=ab-a^2-b^2=ab-(1-ab)=2ab-1$。求 t 的取值范围关键在于求出 ab 的取值范围。

解法 2 由 $a^2+ab+b^2=1$，得 $(a+b)^2=(a^2+ab+b^2)+ab=1+ab$。
因为 $(a+b)^2\geqslant 0$，所以 $1+ab\geqslant 0$，即 $ab\geqslant -1$。
由 $a^2+ab+b^2=1$，得 $(a-b)^2=(a^2+ab+b^2)-3ab=1-3ab$。
因为 $(a-b)^2\geqslant 0$，所以 $1-3ab\geqslant 0$，即 $ab\geqslant\dfrac{1}{3}$。
所以 $-1\leqslant ab\leqslant\dfrac{1}{3}$，即 $-2\leqslant 2ab\leqslant\dfrac{2}{3}$，即 $-2-1\leqslant 2ab-1\leqslant\dfrac{2}{3}-1$，即 $-3\leqslant t\leqslant -\dfrac{1}{3}$。 □

分析 3 利用二元代换将已知条件转化为二元二次齐次方程，再设法运用不等式的有关知识去求取值范围。

解法 3 设 $a=m+n$，$b=m-n$，代入 $a^2+ab+b^2=1$，得

$$(m+n)^2+(m+n)(m-n)+(m-n)^2=1,$$

整理，得 $3m^2+n^2=1$，所以 $n^2=1-3m^2$。

由 $n^2\geqslant 0$，得 $1-3m^2\geqslant 0$，所以 $0\leqslant m^2\leqslant\dfrac{1}{3}$。而

$$t=ab-a^2-b^2=(m+n)(m-n)-(m+n)^2-(m-n)^2=-m^2-3n^2=-m^2-3(1-3m^2)=8m^2-3,$$

由 $0\leqslant m^2\leqslant\dfrac{1}{3}$，得 $0\leqslant 8m^2\leqslant\dfrac{8}{3}$，所以 $-3\leqslant 8m^2-3\leqslant\dfrac{8}{3}-3$，即 $-3\leqslant t\leqslant -\dfrac{1}{3}$。 □

分析 4　消去常数项得二元二次齐次方程，变形可得一个一元二次方程，然后利用一元二次方程有实数根的条件求解。

解法 4

$$a^2+ab+b^2=1, \tag{3.2.3}$$

$$ab-a^2-b^2=t, \tag{3.2.4}$$

$(3.2.4)\times t$，得

$$ta^2+tab+tb^2=t^2, \tag{3.2.5}$$

$(3.2.5)-(3.2.4)$，得 $(t+1)a^2+(t-1)ab+(t+1)b^2=0$。

由已知易得 a、b 不同时为零，设 $b\neq 0$，两边同时除以 b，得

$$(t+1)\left(\frac{a}{b}\right)^2+(t-1)\left(\frac{a}{b}\right)+(t+1)=0,$$

视上式为关于 $\dfrac{a}{b}$ 的一元二次方程，由一元二次方程有实数根的条件，得 $(t-1)-4(t+1)^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant t\leqslant -\dfrac{1}{3}$。 □

助力高考

4.1 ab1962 解题集精选（八）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 351 ∼ 400 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》第 1 期。

题目 4.1.1. 在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D，AF 平分 $\angle CAB$，交 CD 于点 E，交 CB 于点 F，且 $EG\parallel AB$，交 CB 于点 G。求证：$CF=GB$。

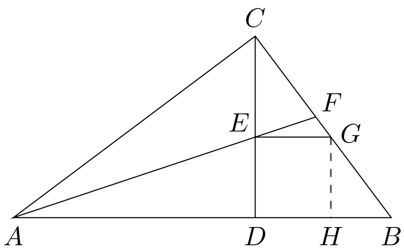


图 4.1.1

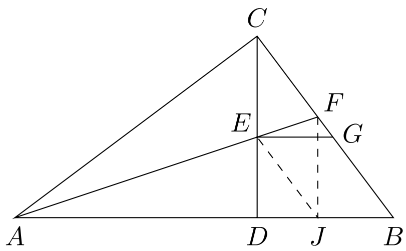


图 4.1.2

证明 如图 4.1.1 所示，过 G 作 $GH\perp AB$ 于 H，则有

$$CF=AC\cdot\tan\frac{\angle BAC}{2},$$

$$BG=\frac{GH}{\sin\angle B}=\frac{ED}{\sin\angle B}=\frac{AD\tan\dfrac{\angle BAC}{2}}{\sin\angle B}=\frac{AC\sin\angle ACD\tan\dfrac{\angle BAC}{2}}{\sin\angle B}=AC\cdot\tan\frac{\angle BAC}{2},$$

故 $CF=BG$。 □

kuing 评注： *也可以如图 4.1.2 所示，作 $FJ\perp AB$ 于 J，再连结 EJ，则显然 $\triangle ACF\cong\triangle AJF$，再由 $FJ\parallel CE$ 可证四边形 $CEJF$ 为菱形，又得四边形 $EGBJ$ 为平行四边形，从而 $CF=EJ=BG$。*

题目 4.1.2. 是否存在这样的 p 值，使适合不等式 $|x^2-4x+p|+|x-3|\leqslant 5$ 的 x 的最大值为 3，若存在，求出此值；若不存在，说明理由。

解 假设存在 p 值满足条件，则 3 必是方程

$$|x^2-4x+p|+|x-3|=5 \tag{4.1.1}$$

的根，由此得 $|p-3|=5$，即 $p=8$ 或 $p=-2$。

（1）当 $p=8$ 时

$$|x^2-4x+p|+|x-3|\leqslant 5 \iff |x^2-4x+8|+|x-3|\leqslant 5 \iff (x-1)(x-3)+|x-3|\leqslant 0,$$

容易求出解集为 $[2,3]$，x 的最大值为 3，适合；

（2）当 $p=-2$ 时

$$|x^2-4x+p|+|x-3|\leqslant 5 \iff |x^2-4x-2|+|x-3|\leqslant 5,$$

易知 $x=4$ 是不等式的解，故 x 的最大值不为 3，舍去。

综上，存在 $p=8$ 满足条件。 □

kuing 评注： 如果不理解为什么解集的最大值是 3 则 3 就是方程 (4.1.1) 的根，你可以假设 3 不是方程 (4.1.1) 的根，记 $f(x)=|x^2-4x+p|+|x-3|$，那么 $f(3)<5$，而对任意 $x>3$ 都有 $f(x)>5$，于是 $f(x)$ 在 $x=3$ 处不连续，这显然矛盾。

题目 4.1.3. 由 3 个 a，5 个 b 和 2 个 c 构成的所有字符串中包含子串“abc”的共有几个?

解 （1）把 1 串 abc 打捆（占成一个位置），与余下的 2 个 a，4 个 b 和 1 个 c 排到 8 个位置上，为打捆 abc 选位有 C_8^1 种选法，为 1 个 c 选位有 C_7^1 种选法，为 2 个 a 选位有 C_6^2 种选法，最后 4 个位置排 4 个 b，排法数有 $C_8^1\cdot C_7^1\cdot C_6^2=840$;

（2）上面的排法把有 2 串 abc 的情况多算了一次，应减去，用上面的方法分别把 2 串 abc 打捆（占 2 个位置），与余下的 1 个 a，3 个 b 排列 6 个位置，排法数有 $C_6^2\cdot C_4^1=60$。

故所求的个数为 $840-60=780$。 □

题目 4.1.4. 已知数列 $b_n=3n-1$，数列 $a_n=\log_a\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)$，$a>1$，$S_n$ 是数列 a_n 的前 n 项和。求证：当 $n\geqslant 2$ 时有 $S_n>\dfrac{\log_a b_{n+1}}{3}$。

证明

$$a_n=\log_a\left(1+\frac{1}{b_n}\right)=\log_a\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)=\log_a\frac{3n}{3n-1},$$

故

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{6}{5}+\cdots+\log_a\frac{3n}{3n-1}=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}\right),$$

由假分数的性质得

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}&=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1},\\ \frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}&>\frac{4}{3}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{3n+1}{3n},\\ \frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}&>\frac{5}{4}\times\frac{8}{7}\times\cdots\times\frac{3n+2}{3n+1},\end{aligned}$$

三式相乘得

$$\left(\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}\right)^3>\frac{3\times4\times5\times\cdots\times(3n+2)}{2\times3\times4\times\cdots\times(3n-1)}=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2\times3},$$

当 $n\geqslant 2$ 时

$$\frac{(3n+1)(3n+2)}{2\times3}>3n+2=b_{n+1},$$

因为 $a>1$，故有

$$3\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}\right)>\log_a b_{n+1},$$

即 $S_n>\dfrac{\log_a b_{n+1}}{3}$。 □

题目 4.1.5. 已知函数 $f(x)=[x[x[x]]]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若其定义域为 $[0,4]$，则其值域为______。

解 当 $0\leqslant x<1$ 时，$[x]=0$，故显然 $f(x)=[x[x[x]]]=0$;

当 $1\leqslant x<2$ 时，$[x]=1$，故 $f(x)=[x[x[x]]]=[x[x]]=[x]=1$;

当 $2\leqslant x<\dfrac{5}{2}$ 时，$[x]=2$，$[2x]=4$，故 $f(x)=[x[x[x]]]=[x[2x]]=[4x]=8$ 或 9;

当 $\dfrac{5}{2}\leqslant x<3$ 时，$[x]=2$，$[2x]=5$，故 $f(x)=[x[x[x]]]=[x[2x]]=[5x]=12$ 或 13 或 14;

当 $3 \leqslant x < \frac{10}{3}$ 时，$[x]=3$，$[3x]=9$，故 $f(x)=[x[x[x]]]=[x[3x]]=[9x]=27$ 或 28 或 29；
当 $\frac{10}{3} \leqslant x < \frac{11}{3}$ 时，$[x]=3$，$[3x]=10$，故 $f(x)=[x[x[x]]]=[x[3x]]=[10x]=33$ 或 34 或 35 或 36；
当 $\frac{11}{3} \leqslant x < 4$ 时，$[x]=3$，$[3x]=11$，故 $f(x)=[x[x[x]]]=[x[3x]]=[11x]=40$ 或 41 或 42 或 43。
综上所述，$f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的值域为 $\{0,1,8,9,12,13,14,27,28,29,33,34,35,36,40,41,42,43\}$。 □

kuing 评注： 原解答后半部分并未完整，以上解答是经我完善后的。

题目 4.1.6. 已知双曲线过点 $M(-2,4)$，$N(4,4)$，它的一个焦点为 $F_1(1,0)$，求另一个焦点 F_2 的轨迹方程。

解 设另一个焦点是 $F_2(x,y)$，则 $(x,y)\neq(1,0)$，且

$$\begin{aligned}&\big||F_2M|-|F_1M|\big|=\big||F_2N|-|F_1N|\big|\\ \iff&\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(1+2)^2+(0-4)^2}\right|=\left|\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(1-4)^2+(0-4)^2}\right|\\ \iff&\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-5\right|=\left|\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}-5\right|,\end{aligned}$$

故

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-5=-\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}+5 \text{ 或 } \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-5=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}-5,$$

即

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} \text{ 或 } \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}=10,$$

注意到几何意义化简得

$$x=1(y\neq0) \text{ 或 } \frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1(y\neq0)。$$ □

题目 4.1.7. 已知 $a,b,c>0$，求证 $a+b-2\sqrt{ab}\leqslant a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$。

证明 只要证

$$c+2\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

由均值不等式，有

$$c+2\sqrt{ab}=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

因此原式成立。 □

kuing 评注： 显然右边可以继续写下去，即

$$a+b-2\sqrt{ab}\leqslant a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\leqslant a+b+c+d-4\sqrt[4]{abcd}\leqslant a+b+c+d+e-5\sqrt[5]{abcde}\leqslant\cdots$$

其中各元均非负。

题目 4.1.8. 点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 上的一点，F_1、F_2 是焦点，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为多少?

解

$$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}PF_1\cdot PF_2\sin\angle F_1PF_2,$$

在 $\triangle F_1PF_2$ 中

$$F_1F_2^2=PF_1^2+PF_2^2-2PF_1\cdot PF_2\cos\angle F_1PF_2$$

$$
\begin{aligned}
&= (PF_1 + PF_2)^2 - 2PF_1 \cdot PF_2 - 2PF_1 \cdot PF_2 \cos\angle F_1PF_2 \\
&= (PF_1 + PF_2)^2 - 2PF_1 \cdot PF_2(1 + \cos\angle F_1PF_2),
\end{aligned}
$$

得到

$$PF_1 \cdot PF_2 = \frac{(PF_1 + PF_2)^2 - F_1F_2^2}{2(1 + \cos\angle F_1PF_2)} = \frac{(2a)^2 - (2c)^2}{2(1 + \cos\angle F_1PF_2)} = \frac{2b^2}{1 + \cos\angle F_1PF_2},$$

从而

$$S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{b^2 \sin\angle F_1PF_2}{1 + \cos\angle F_1PF_2} = b^2 \tan\frac{\angle F_1PF_2}{2} = 64\tan\frac{60^\circ}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{3}。 \qquad \square$$

kuing 评注：上述解答将圆锥曲线常用小结论之一“焦点三角形面积公式”推导了一次，相应地，在双曲线中，也有

$$S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \cot\frac{\angle F_1PF_2}{2},$$

其推导留给读者。

4.2 分子、分母是二次函数的函数值域的另一种求法——郭子伟

在《数学空间》第 1 期的《三类函数的值域初等求法》一文中，何万程已经介绍过求函数 $f(x) = \dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$（$a_1$、$a_2$ 不全为 0，$\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 为既约分式）的值域的两种方法，第一种是判别式法，第二种是将函数变形为 $\dfrac{A}{Bx+C+\dfrac{D}{Bx+C}+E}+F$ 的形式再处理，而且第二种方法对有定义域限制的情况也能使用，可以说是完美地解决了这类函数的值域问题。

而前段时间我又闲来无事地发现求这类函数的值域的另一种方法，虽然未及上述两种方法那么方便实用，但也想写出来分享给大家，如有雷同，实属巧合。下面用两个例子来说明。

例 4.2.1. 求函数 $y = \dfrac{4x^2+5x+6}{x^2+2x+3}$ 的值域。

解 将分母配方，有

$$y = \frac{4x^2+5x+6}{(x+1)^2+2},$$

令 $x = \sqrt{2}t-1$，$t \in \mathbb{R}$，代入函数中化简整理，有

$$\begin{aligned} y &= \frac{8t^2-3\sqrt{2}t+5}{2t^2+2} \\ &= \frac{\frac{13}{2}(t^2+1)+\frac{3}{2}(t^2-1)-3\sqrt{2}t}{2t^2+2} \\ &= \frac{13}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2t}{1+t^2}, \end{aligned}$$

联系万能公式知，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，均存在 $\theta \in (-\pi, \pi)$ 使得

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

反之亦然。代入得

$$y = \frac{1}{4}\big(13-3\cos\theta-3\sqrt{2}\sin\theta\big) = \frac{1}{4}\big(13-3\sqrt{3}\sin(\theta+\varphi)\big),$$

从而值域显然为 $\left[\frac{1}{4}(13-3\sqrt{3}), \frac{1}{4}(13+3\sqrt{3})\right]$。 □

例 4.2.2. 求函数 $y = \dfrac{4x^2+5x+6}{x^2+2x-1}$ 的值域。

解 将分母配方，有

$$y = \frac{4x^2+5x+6}{(x+1)^2-2},$$

令 $x = \sqrt{2}t-1$，$t \in \mathbb{R}$，$t \neq \pm 1$，代入函数中化简整理，有

$$\begin{aligned} y &= \frac{8t^2-3\sqrt{2}t+5}{2t^2-2} \\ &= \frac{\frac{13}{2}(t^2+1)+\frac{3}{2}(t^2-1)-3\sqrt{2}t}{2t^2-2} \\ &= -\frac{13}{4}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2t}{1-t^2}, \end{aligned}$$

联系万能公式知，对于任意 $t\in\mathbb{R}$，$t\neq\pm1$，均有 $\theta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使得

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ \tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2},\end{cases}\tag{4.2.2}$$

反之亦然。代入得

$$y=\frac{1}{4}\left(3-\frac{13}{\cos\theta}+3\sqrt{2}\tan\theta\right)=\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sin\theta-\dfrac{13}{3\sqrt{2}}}{\cos\theta-0},$$

求上式右边的值域已经是常规的问题[①]，求不难得到

$$\frac{\sin\theta-\dfrac{13}{3\sqrt{2}}}{\cos\theta-0}\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{151}}{3\sqrt{2}}\right]\bigcup\left[\frac{\sqrt{151}}{3\sqrt{2}},+\infty\right),$$

从而易得值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{4}(3-\sqrt{151})\right]\bigcup\left[\frac{1}{4}(3+\sqrt{151}),+\infty\right)$。 □

可以看到，这种方法的灵感就是来源于万能公式的逆用，具体操作方法，首先对 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 的分母配方为 $a(x+b)^2+c$，当 $c\neq0$ 时[②]，作适当的换元，总能使得函数化为

$$y=\frac{a_3t^2+b_3t+c_3}{t^2+1}$$

或

$$y=\frac{a_3t^2+b_3t+c_3}{t^2-1}$$

的形式，再将分子凑成 $\dfrac{a_3+c_3}{2}(t^2+1)+\dfrac{a_3-c_3}{2}(t^2-1)+b_3t$，于是对于前者，就可以化为

$$y=\frac{a_3+c_3}{2}-\frac{a_3-c_3}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{b_3}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2},$$

然后用代换 (4.2.1) 化为三角式，合角后即得值域；而对于后者，则可以化为

$$y=-\frac{a_3+c_3}{2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{a_3-c_3}{2}-\frac{b_3}{2}\cdot\frac{2t}{1-t^2},$$

然后用代换 (4.2.2) 化为三角式，再整理为单位圆与定点连结斜率的形式，也可求得值域。

至此，不难发现，这种方法对于分母化成 t^2+1 情况还算方便，而对于 t^2-1 的就相对麻烦了，而且如果限制了定义域的话，还得从代换中求出 t 的范围再判断三角函数的范围，这样就更麻烦了，所以相对于本文开头所述的两种方法来说，这种方法真不怎么样。

[①] 比如通过单位圆与定点连线的斜率分析，或者设 $\dfrac{\sin\theta-\frac{13}{3\sqrt{2}}}{\cos\theta}=m$ 然后去分母整理合角后利用有界性也行。

[②] 若 $c=0$ 则必能化成关于 $\dfrac{1}{x+b}$ 的二次函数，然后就容易了，这里不再阐述。

4.3 等与不等模糊处　深究细品明就里——张培强

题目（2011~2012 学年度徐州市高一上学期期末考试第 14 题）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且 $f(0)=9$，对任意 $x\in\mathbb{R}$，两不等式 $f(x+4)\geqslant f(x)+4$ 与 $f(x+1)\leqslant f(x)+1$ 都成立，若 $g(x)=2[f(x)-x]$，则 $g(2012)=$________。

试题以抽象函数的面貌示人，两个不等式关系又给其蒙上了一层幕，使得常用的赋值法在这里没了用武之地。而一切也就隐藏在这两个不等式中。

思路 1　小题小作——猜想与特殊

如果题中所给的是等式，我们满心欢喜。不妨认定题目中的两个不等式均取等，且显然能恰好同时成立。于是有 $f(x+1)=f(x)+1$，由 $f(0)=9$ 可得 $f(1)=10$，$f(2)=11$，$f(3)=12$，……，猜想有 $f(x)=x+9$，$x\in\mathbb{N}$，故可得 $g(2012)=18$。

注　这里，我们考虑一般问题的特殊情形，取“$x\in\mathbb{R}$”中的“$x\in\mathbb{N}$”，取“$\geqslant$ 和 $\leqslant$”中的相等，避开了确定函数 $g(x)$ 的艰难过程，与赋值法求值恰有异曲同工之妙。

当然，这也说明试题的“信度”不高，毫无头绪的同学或可轻松得到正确答案。

思路 2　小题小作——数形结合

考虑不等式反映在图中的关系，如图 4.3.1，作直线 $l:y=x+9$，由 $f(x+1)\leqslant f(x)+1$ 可知，点 $E(1,f(1))$ 在直线 l 下方（或在直线 l 上）；点 $(2,f(2))$ 在点 F（直线 EF 与直线 l 平行）下方（或与 F 重合）；……；点 $(4,f(4))$ 在点 B 下方（或与 B 重合）。由 $f(x+4)\geqslant f(x)+4$ 可知，点 $(4,f(4))$ 在点 B 上方（或与 B 重合），故 $f(4)=4+9$，即得到了

$$f(x+4)=f(x+3)+1=f(x+2)+2=f(x+1)+3=f(x)+4。$$

如此，很好地解释了思路 1 中的“认定”。

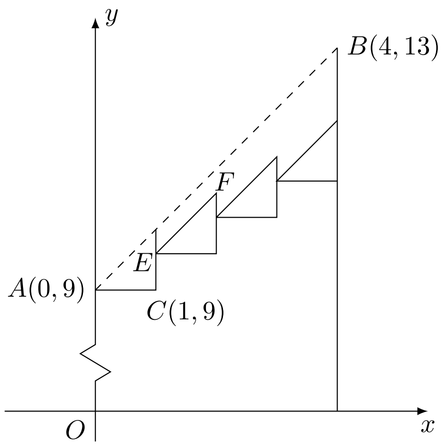


图 4.3.1

思路 3　小题大作——等式的期望

题中所给两不等式是（不等的）递推关系，且方向恰好相反，把两个放在一起或可达到相等的状态：连续使用这两个不等式，有

$$f(x)+4\leqslant f(x+4)\leqslant f(x+3)+1\leqslant f(x+2)+2\leqslant f(x+1)+3\leqslant f(x)+4,$$

所以

$$f(x+1)=f(x)+1,$$

则 $f(2012)=f(0)+2012$，故 $g(2012)=2[f(2012)-2012]=2f(0)=18$。

注　对等式的期望驱使我们将两个不等式连接起来，得到递推关系式后，考查考生合情推理（归纳、找规律）的能力。

思路 4　小题大作——执果索因

考虑要求是函数 $g(x)$ 的函数值，而题目条件主要叙述了函数 $f(x)$ 的条件，从结果出发，先将条件转为描述 $g(x)$ 的。由 $g(x)=2[f(x)-x]$ 可知，$f(x)=\dfrac{1}{2}g(x)+x$，则

$$\begin{cases} f(x+4)\geqslant f(x)+4, \\ f(x+1)\leqslant f(x)+1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}g(x+4)+x+4\geqslant \dfrac{1}{2}g(x)+x+4, \\ \dfrac{1}{2}g(x+1)+x+1\leqslant \dfrac{1}{2}g(x)+x+1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} g(x+4)\geqslant g(x), \\ g(x+1)\leqslant g(x), \end{cases}$$

所以

$$g(x)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+3)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x+1)\leqslant g(x),$$

故 $g(x+1)=g(x)$，因此 $g(2012)=g(0)=2[f(0)-0]=2f(0)=18$。

注　换个角度，不仅解决了问题，更明确了函数 $g(x)$ 的性质——周期为 1。

至此，大概明白，原来考的是周期函数啊！

结论　一般地，$g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的函数，则 $f(x)=x+g(x)$ 满足 $f(x+T)=f(x)+T$。

〖**前世**〗

考题 1（2002 年全国高中数学联赛）已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且 $f(1)=1$，对任意的 $x\in\mathbb{R}$，都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$，$f(x+1)\leqslant f(x)+1$，若 $g(x)=f(x)+1-x$，则 $g(2002)=$________。

考题 2　若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，对任意的实数 x，都有 $f(x+4)\leqslant f(x)+4$ 和 $f(x+2)\geqslant f(x)+2$，且 $f(3)=4$，则 $f(2011)$ 的值是________。

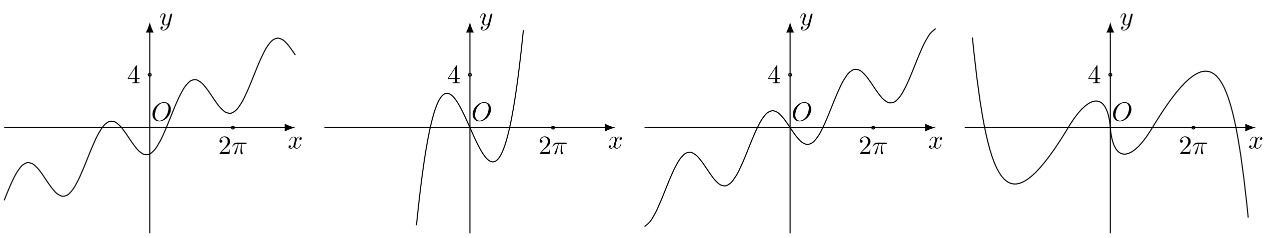
自从 2002 年联赛考过后，类似的题目层出不穷，久考不衰！

〖**今生**〗

考题 3（2011 年上海卷）设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的函数，若 $f(x)=x+g(x)$ 在 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为________。

注　该题少了些隐晦，将条件直白的顺次交代出来，循规蹈矩即可得解。

考题 4（2011 年山东卷）函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}-2\sin x$ 的图象大致是　（　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

注　抽象变具体。易得 $f(x+2\pi)=\dfrac{x+2\pi}{2}-2\sin(x+2\pi)=\dfrac{x}{2}-2\sin x+\pi=f(x)+\pi$，故 $f(x)$ 在长度为 2π 内的图象向右平移 2π 个单位，向上平移 π 个单位所得图象仍在 $f(x)$ 的图象上，因此排除 B、D 选项，又 $f(0)=0$，故选 C。

能力提升

5.1 由两个二元二次方程组成的方程组——何万程

在中学里，我们都会解二元一次方程组、由一个二元一次方程跟一个二元二次方程组成的方程组，对于由两个二元二次方程组成的方程组就很少接触到，而且接触到的只是一些很特殊的可以通过一元二次方程求解的。下面介绍两个二元二次方程组成的方程组的一种一般解法，可以通过消元法变成一元四次方程，从而完全解决这类方程组的求解问题，而一元四次方程的一般解法可参考《数学空间》第 5 期《一元三次方程和一元四次方程的解法》一文。

方程组

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, & (5.1.1)\\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0, & (5.1.2)\end{cases}$$

其中上述两个方程中的二次项系数不全为零。

具体解法如下：

（1）如果满足以下四个条件之中任何一个，则 (5.1.1) 或 (5.1.2) 其中一个是一元二次方程，可以使用一元二次方程的方法求出一个未知数的值，再用代入法求出另外一个未知数的值，可以认为问题已经解决。

（a）$a_1=b_1=d_1=0$；

（b）$b_1=c_1=e_1=0$；

（c）$a_2=b_2=d_2=0$；

（d）$b_2=c_2=e_2=0$。

（2）不满足（1）的条件，但 $a_1=0$ 或 $c_1=0$ 或 $a_2=0$ 或 $c_2=0$

如果 $a_1=0$，则从 (5.1.1) 中求出

$$(b_1y+d_1)\,x=-c_1y^2-e_1y-f_1。$$

（a）若 $b_1\neq 0$ 且 $y=-\dfrac{d_1}{b_1}$ 时 $-c_1y^2-e_1y-f_1=0$，则把 $y=-\dfrac{d_1}{b_1}$ 代入 $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$ 求出 x；

（b）若 $b_1=0$ 或 $y=-\dfrac{d_1}{b_1}$ 时 $-c_1y^2-e_1y-f_1\neq 0$（则此时 $y=-\dfrac{d_1}{b_1}$ 肯定不是方程的根）或 $y\neq-\dfrac{d_1}{b_1}$ 时，这样就得

$$x=-\frac{c_1y^2+e_1y+f_1}{b_1y+d_1},$$

代入 (5.1.2)，就可以得只与 y 有关的方程。

如果 $c_1=0$ 或 $a_2=0$ 或 $c_2=0$，可以用类似上面的方法求解。

（3）$a_1c_1a_2c_2\neq 0$

则利用 (5.1.1)、(5.1.2) 和加减消元法得一个新的方程 $Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=0$ 或 $Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，这个方程和 (5.1.1) 或 (5.1.2) 组成的方程组用（2）的方法求可以求解了。

方程组的实数解个数可由消元后的一元方程判别。

例 5.1.1. 解方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2+x-y-13=0, & (5.1.3)\\ x^2-2xy+3y^2-2x-22y+34=0。 & (5.1.4)\end{cases}$$

解 (5.1.3) 减 (5.1.4)，得

$$3\,(y+1)\,x=2y^2-21y+47,$$

经验证，$y=-1$ 不是方程 $2y^2-21y+47=0$ 的根，所以得

$$x=\frac{2y^2-21y+2}{3(y+1)}, \tag{5.1.5}$$

把 (5.1.5) 代入 (5.1.3)，化简，得

$$19y^4-126y^3+524y^2-1998y+2233=0,$$

解这个方程，得

$$y=3\pm\sqrt{2}\text{ 或 }y=\frac{6\pm5\sqrt{241}i}{19},$$

再把上述值逐一代入 (5.1.5)，得方程组的解是

$$\begin{cases}x=1\mp\sqrt{2},\\ y=3\pm\sqrt{2},\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=\dfrac{-110\mp3\sqrt{241}i}{19},\\ y=\dfrac{6\pm5\sqrt{241}i}{19}。\end{cases}$$

□

5.2 一个多重根式不等式的推广——李明，韩安静，严文兰

文 [1] 给出了如下一个多重根式不等式：

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{n}}}<k+1, \tag{5.2.1}$$

其中，$2\leqslant k\leqslant n-1$。

笔者发现该不等式可从方根次数和被开方数列两个角度同时推广得到如下不等式：

$$\sqrt[m]{a_1\cdot\sqrt[m]{a_2\cdots\sqrt[m]{a_n}}}<1+\frac{(a_1-1)(m-2)+(a_2-1)}{(m-1)^2}, \tag{5.2.2}$$

其中，$2\leqslant n,m\in\mathbb{N}$，$\{a_n\}$是单调递增的正项等差数列且满足末项 $a_n>1$。

证明不等式 (5.2.2) 需借助如下两个引理：

引理 5.2.1. [1] 设$a_k>0$，$q_k>0$，$1\leqslant k\leqslant n$。$0<\sum\limits_{k=1}^{n}q_k<1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kq_k+\left(1-\sum_{k=1}^{n}q_k\right)。$$

引理 5.2.2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列且其公比满足 $0<|q|<1$。则

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\frac{a_1b_1(1-2q)+a_2b_2}{(1-q)^2}。$$

引理 5.2.2 的证明 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,于是,

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k-q\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{1-q}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{k+1}}{1-q}=\frac{a_1b_1+d\sum\limits_{k=2}^{n}b_k-a_nb_{n+1}}{1-q}。$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\frac{a_1b_1+(a_2-a_1)\dfrac{b_2}{1-q}}{1-q}=\frac{a_1b_1(1-2q)+a_2b_2}{(1-q)^2}。$$

□

不等式 (5.2.2) 的证明 由引理 5.2.1 得

$$\sqrt[m]{a_1\cdot\sqrt[m]{a_2\cdots\sqrt[m]{a_n}}}=\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{m^k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{1}{m^k}+\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m^k}\right)=1+\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)\frac{1}{m^k}。 \tag{5.2.3}$$

注意到 $\{a_n\}$ 是单调递增的正项等差数列且满足末项 $a_n>1$，并考虑引理 5.2.2 可得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)\frac{1}{m^k}<\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-1)\frac{1}{m^k}=\frac{(a_1-1)\dfrac{1}{m}\left(1-\dfrac{2}{m}\right)+(a_2-1)\dfrac{1}{m^2}}{\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^2}=\frac{(a_1-1)(m-2)+(a_2-1)}{(m-1)^2}。 \tag{5.2.4}$$

综合 (5.2.3)、(5.2.4) 两式，不等式 (5.2.2) 得证。 □

参考文献

[1] 匡继昌. 常用不等式(第四版)[M]. 济南：山东科学技术出版社, 2010.8:107,13.

5.3 球面的直观图——何万程

课本上球的直观图都是圆，但是大家有没有想过球面斜二测法画成直观图后是不是圆呢？下面就来回答这个问题。

定理 5.3.1. 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 用斜二测法画成直观图后的方程是 $9x^2-2xy+9y^2=10$。

证明 空间的点 $P(x,y,z)$ 经过斜二测法作图后变成点 $Q\left(x+\frac{\sqrt{2}}{4}y,\frac{\sqrt{2}}{4}y+z\right)$，直观图上边界上的点就是射线 OP 的倾斜角一定时到原点距离最大的点 Q。令

$$u=x+\frac{\sqrt{2}}{4}y,\ v=\frac{\sqrt{2}}{4}y+z,$$

则

$$x=u-\frac{\sqrt{2}}{4}y,\ z=v-\frac{\sqrt{2}}{4}y。$$

若 $u=0$，则

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{4}y,\ z=v-\frac{\sqrt{2}}{4}y,$$

代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 化简，得

$$5y^2-2\sqrt{2}vy+4v^2-4=0,$$

这个关于 y 的二次方程的判别式是

$$-8\left(9v^2-10\right),$$

只有

$$-\frac{\sqrt{10}}{3}\leqslant v\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}$$

才能使方程有实数解，所以距离原点最远的点是 $\left(0,\pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$。

若 $v=ku$，其中 k 是定值，则距离原点最远的点等价于 u^2 最大。把

$$x=u-\frac{\sqrt{2}}{4}y,\ z=v-\frac{\sqrt{2}}{4}y$$

代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 化简，得

$$5y^2-2\sqrt{2}(k+1)uy+4\left(\left(k^2+1\right)u^2-1\right)=0。$$

这个关于 y 的二次方程的判别式是

$$-8\left(\left(9k^2-2k+9\right)u^2-10\right),$$

只有

$$\left(9k^2-2k+9\right)u^2-10\geqslant 0$$

才能使方程有实数解，而对任意实数 k，$9k^2-2k+9>0$，所以必须

$$-\sqrt{\frac{10}{9k^2-2k+9}}\leqslant u\leqslant\sqrt{\frac{10}{9k^2-2k+9}},$$

所以 $u=\pm\sqrt{\frac{10}{9k^2-2k+9}}$ 时 u^2 最大，此时 $v=\pm k\sqrt{\frac{10}{9k^2-2k+9}}$。把 $k=\frac{v}{u}$ 代入 $u=\pm\sqrt{\frac{10}{9k^2-2k+9}}$，两边平方并化简，得

$$9u^2-2uv+9v^2=10,$$

即直观图的边界点在 $9x^2-2xy+9y^2=10$ 上，这些点在画成直观图前都在平面 $x-2\sqrt{2}y+z=0$ 上。

因为点 $\left(0,\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$ 也在 $9x^2-2xy+9y^2=10$ 上，所以球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 用斜二测法画成直观图后的方程是 $9x^2-2xy+9y^2=10$，这些点在画成直观图前都在平面 $x-2\sqrt{2}y+z=0$ 上。 □

$9x^2-2xy+9y^2=10$ 的图象是长半轴长为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，短半轴长为 1 的椭圆，与我们的印象中的直观形象不符合。

推论 5.3.1.1. 空间长是 a 的线段用斜二测法画成直观图后的线段长度是 b，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$。

定理 5.3.2. 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 用正等测法画成直观图后的方程是 $x^2+y^2=\dfrac{3}{2}$。

证明 空间的点 $P(x,y,z)$ 经过斜二测法作图后变成点 $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-x+y),-\dfrac{1}{2}(x+y)+z\right)$，点 Q 到原点的距离的平方是

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz,$$

直观图上边界上的点就是射线 OP 的倾斜角一定时到原点距离最大的点 Q。因为

$$xy+xz+yz=\frac{(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}\geqslant-\frac{1}{2},$$

所以

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\leqslant\frac{3}{2},$$

只有 $x+y+z=0$ 时取得等号。而点 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6},\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6},\mp\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 满足

$$-x+y=0，x+y+z=0，x^2+y^2+z^2=1。$$

点 $\left(\pm\dfrac{k+\sqrt{3}}{\sqrt{6\left(k^2+1\right)}},\pm\dfrac{k-\sqrt{3}}{\sqrt{6\left(k^2+1\right)}},\mp\dfrac{2k}{\sqrt{6\left(k^2+1\right)}}\right)$ 满足

$$-\frac{1}{2}(x+y)+z=\frac{\sqrt{3}}{2}(-x+y)k，x+y+z=0，x^2+y^2+z^2=1。$$

所以球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 用正等测法画成直观图后的方程是 $x^2+y^2=\dfrac{3}{2}$，这些点在画成直观图前都在平面 $x+y+z=0$ 上。 □

推论 5.3.2.1. 空间长是 a 的线段用正等测法画成直观图后的线段长度是 b，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$。

所以，一般有旋转体在的几何体直观图中都不使用斜二测法画图，可以使用正等测法画直观图。

朝花夕拾

6.1 中国古今数学家九杰——李明

前言：依据多本数学家传记里的重复度和大众的熟悉程度，以国内权威的《数学辞海》（第六卷）里的“中国数学家”栏目为蓝本，汇总出如下九位杰出的中国籍古今数学家，并根据每个人的特点以七字加以概括。他们代表了我国各个历史时期的数学水平和数学文化。

1. 赵爽（约 3 世纪初，三国吴国人）——千古“弦图”证勾股

注释了《周髀算经》，创立“弦图”证明了勾股定理，这是中国历史上对勾股定理的首次严格证明，该图成为 2002 年北京国际数学家大会会徽，也是目前中国数学会的会徽。

2. 刘徽（约 3 世纪，魏晋山东人）——富含极限“割圆术”

“中国古代最杰出的数学家”，注释了《九章算术》，创立“割圆术”，求得“徽率”$\pi \approx 3.1416$。得到“刘徽公式”，即：$V_{\text{牟合方盖}}/V_{\text{内切球}} = 4/\pi$。

3. 祖冲之（429–500，南北朝江苏人）——七位圆周精诚致

求出 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$，得到密率 335/113（现称为“祖率”）和疏率 22/7。与其子祖暅利用“祖暅原理”求得球体积公式，著《缀术》五卷。1967 年，国际天文学家联合会把月球上的一座环形山命名为“祖冲之环形山”，将小行星 1888 命名为“祖冲之星”。

4. 秦九韶（1202–1261，南宋人）——“众人皆醉我独醒”

著成世界数学名著《数书九章》，标志着中世纪世界数学的最高水平。书中创造的“大衍求一术”，即现代数论中一次同余式组解法，等价于西方 1801 年德国高斯的同余理论，被西方誉为“中国剩余定理”。书中还创造了求任意高次方程数值解的“正负开方术”，等价于 1819 年英国人霍纳的同样解法。给出了多项式求值的“秦九韶算法”。创造了解线性方程组的“首图－终图法”，等价于高斯消元法。给出了求三角形面积的“三斜求积公式”，等价于古希腊数学家海伦于公元 50 年给出“海伦公式”。

5. 李善兰（1811–1882，清朝浙江人）——饱学之士贯中西

“中国近代最杰出的数学家”。通古达今，学贯中西，官居三品，1968 年任京师同文馆（今北京大学）算学总教习直至逝世。证明了“费马小定理”，提出了著名的“李善兰恒等式”，1945 年著《方圆阐幽》提出“尖锥术”。1852–1859 年，与伟烈亚力合译了欧几里得《几何原本》后九卷、《代数学》13 卷、《代微积拾级》18 卷，创造术语：微分、积分、函数、方程、切线、法线、渐近线等。

6. 苏步青（1902–2003，浙江人）——百年热血献教学

1931 年获日本东北帝国大学理学博士学位。1932 年任浙江大学系主任，1955 年当选为中科院院士，1956 年获国家自然科学二等奖，1978 年任复旦大学校长，1980 年任《数学年刊》主编。研究方向：计算几何、微分几何。先后发表论文 150 多篇，著有《计算几何》（1981）、《仿射微分几何》（1982）等专著 9 种，培养了谷超豪、胡和生等著名数学家。1991 年起设“苏步青数学教育奖”，奖励中学数学教育或教学研究的杰出工作者，该奖是国内数学教育的最高奖项。2003 年，国际工业与应用数学会设立了“苏步青奖”，该奖是首个以中国数学家命名的国际数学奖项。

7. 华罗庚（1910–1985，江苏人）——中国数学掌门人

1985 年 6 月在日本东京大学作学术报告时突发心脏病去世。1936 年赴英国剑桥大学进修，期间提出“华罗庚不等式”。1938 年任西南联大教授。1940 年完成巨作《堆垒素数论》。1946 年访问苏联，同年秋任教于美国普林斯顿大学。1950 年回国任教于清华大学，1951–1983 年任中国数学会理事长、中科院数学研究所所长。1956 年获国家自然科学一等奖。1957 年著《数论导引》。1965 年推广“优选法”和“统筹法”。1978 年任中科院副院长。1980 年在第五届国际数学教育会议上作工作报告。1982 年当选为美国全国科学院外籍院士。1983 年当选为第三世界科学院院士。研究方向：解析数论、典型群、矩阵几何、自守函数论、多复变函数论。1983 年得出“华罗庚定理”。培养了陈景润、王元、潘承洞、龚昇、严士健等著名数学家。1991 年起中国数学会设立“华罗庚数学奖”。

8. 吴文俊（1919– ，上海人）——机器证明显神威

1940 年毕业于上海交大，1949 年获法国国家博士学位，1951 年回国任北大教授。1956 年获国家自然科学一等奖，1957 年被增选为中科院院士，1970 年代对中国古代数学史进行了系统研究，1976 年起逐渐完成了定理机械化证明，其算法被国际称为“吴方法”，1980 年任中科院系统研究所副所长。1983–1987 年任中国数学会理事长。1986 年应邀在国际数学家大会作报告（中国数学史）。1990 年当选为第三世界科学院院士。2001 年获首届国家最高科技奖，2002 年担任北京国际数学家大会主席。发表论文 100 多篇，有《几何定理机器证明的基本原理》（1984）等专著。

9. 陈景润（1933–1996，福建人）——哥德巴赫“$1+2$”

1953 年毕业于厦门大学，1956 年由华罗庚调入中科院数学研究所工作，1979 年升为研究员，1980 年当选为中科院院士。研究方向：解析数论。对华林问题、圆（球）内整点问题、塔林问题等著名数论问题作了改进。20 世纪 60 年代证明了哥德巴赫猜想之“$1+2$”，被国际誉为陈氏定理，至今仍是最好结论。1982 年他与王元、潘承洞共获国家自然科学一等奖。著作有《初等数论》、《$1+1$ 除外集》等。

6.2 【封面故事】摆线与最速降线——何万程

摆线最早出现可见于 1501 年出版的 C • 鲍威尔的一本书中。但在 17 世纪，大批卓越的数学家（如伽利略，帕斯卡，托里拆利，笛卡儿，费尔马，伍任，瓦里斯，惠更斯，约翰 • 伯努里，莱布尼兹，牛顿等等）热心于研究这一曲线的性质。

在平面上，一个动圆沿着一条固定的直线作纯滚动时，此动圆上一点的轨迹称为摆线。

下面来推导摆线的方程，以下的角的单位统一使用弧度制。

如图 6.2.1 所示，设动圆半径是 r，定直线为 x 轴，圆上的定最初位置是原点 O。当动圆滚动到 x 轴点 A 的位置时，原来原点的位置转动到点 $B\left(x,y\right)$，圆心移动到 C 处。设 $\angle ACB=\theta$（顺时针方向为正），则 $\overline{OA}$ 是动圆滚动过的有向长度，因此 $\overline{OA}=r\theta$，所以摆线的参数方程是

$$\begin{cases} x=r\left(\theta-\sin\theta\right), \\ y=r\left(1-\cos\theta\right)。\end{cases}$$

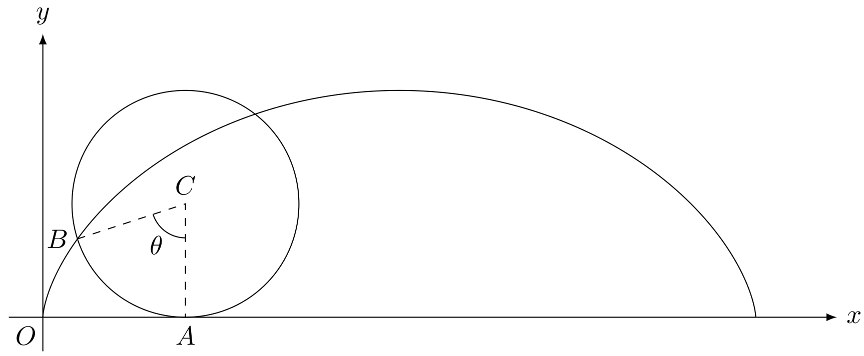


图 6.2.1

某一物体在重力作用下在无摩擦下滑到不在其正下方的某一点时所用的时间最短，则物体滑过的轨迹称为最速降线。

在求最速降线的方程之前我们先来证明 Fermat 原理。

Fermat 原理 物体从水平线 l 上方一点 A 运动到水平线 l 下方的一点 B，物体在水平线 l 上方的运动速度为 v_1，入射角为 i_1，物体在水平线 l 下方的运动速度为 v_2，折射角为 i_2，则运动时间最短时有 $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$。

证明 如图 6.2.2 所示，设水平线上的点 C 满足 $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$，在水平线上另取一点 C_1，过 C_1 分别作 AC、BC 的垂线，垂足分别是 D_1、D_2，那么

$$\begin{aligned}\frac{AC}{v_1}+\frac{BC}{v_2}&=\frac{AD_1}{v_1}-\frac{CD_1}{v_1}+\frac{BD_2}{v_2}+\frac{CD_2}{v_2}\\&<\frac{AC_1}{v_1}-\frac{CC_1\sin i_1}{v_1}+\frac{BC_1}{v_2}+\frac{CC_1\sin i_2}{v_2}\\&=\frac{AC_1}{v_1}+\frac{BC_1}{v_2},\end{aligned}$$

所以运动轨迹为折线 ACB 时运动时间最短。 □

下面来推导最速降线的方程。

设物体最初位置在原点，下落到点 A 所用的时间最短。设物体运动到点 (x,y) 时的折射角为 α，根据 Fermat 原理，有 $\dfrac{v}{\sin\alpha}=C$，其中 C 是待定常数。由机械能守恒定律，得 $v=\sqrt{2gy}$，而 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，

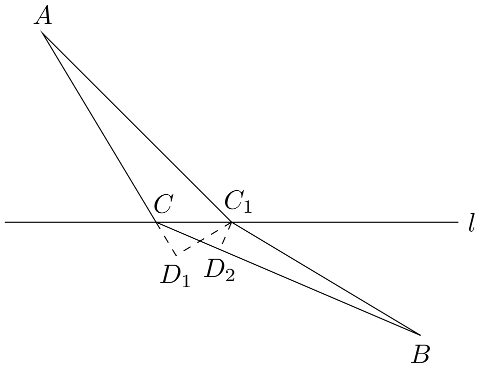


图 6.2.2

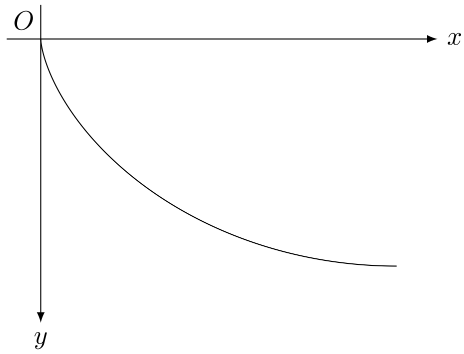


图 6.2.3

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\sqrt{\frac{2gy}{C^2-2gy}},$$

所以

$$x=\int_0^y\sqrt{\frac{2gy}{C^2-2gy}}\,\mathrm{d}\,y,$$

令 $y=\dfrac{C^2}{2g}\sin^2\dfrac{t}{2}$，则得

$$\begin{cases} x=\dfrac{C^2}{4g}\left(t-\sin t\right), \\ y=\dfrac{C^2}{4g}\left(1-\cos t\right), \end{cases}$$

这条曲线就是摆线，常数 C 由点 A 的坐标决定。

摆线名称的由来：荷兰科学家想要找出一条曲线，使摆沿著这样的曲线摆动时，摆动周期完全与摆幅无关。这群科学家放弃了物理实验，纯粹往数学曲线上去研究，经过不少次的失败，这样的曲线终于找到了，数学上把这种曲线叫做“摆线”，“等时曲线”或“旋轮线”。摆线摆动周期完全与摆幅无关这个性质就不详细证明了，有兴趣的可以查阅相关资料。