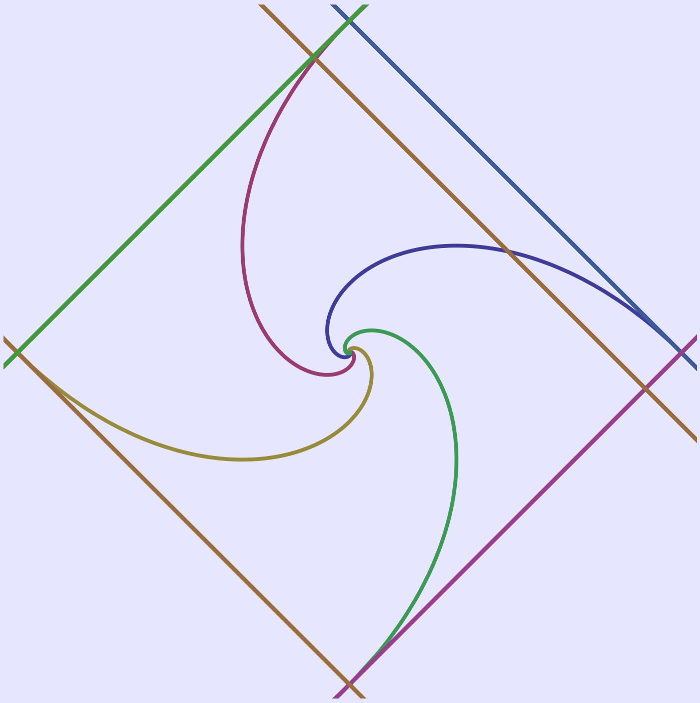
数学空间——人教数学网刊

高中数学

2011 年第 6 期



目录

数学评书

1.1 《智慧宝典》第二部第三回　解难平面村　药水显奇效——陈海峰

话说小英与小豪两人离开魔幻界后，一路往前走，突然发现一个村庄，感觉甚是诧异，这个村庄与别处不同，房屋都是长条形，扁平型，连种的树也很奇特，也是扁平，多数像那种扁平的仙人掌一样，两人寻到村长，才知这叫“平面村”。两人觉得村长看人的眼神异样，小豪用“奎星笔”在地上画了图 1.1.1 所示的图形。请村长回答，你看到什么?

村长道:“这是什么呀? 不就是好像一个打鱼用的网那个窟窿吗? ”

小豪道:“还有吗? ”

只见村长摇了摇头。

小豪又用“奎星笔”在刚刚的那个图形上画出了一个直线 l 和一个点 O 如图 1.1.2，问道:“老人家，你看到那条线是在点 O 的前面还是后面[1]? ”

村长道:“我看到的既不是在前面，也不是在后面，就是在下面呀! ”

小豪又用笔画出了如图 1.1.3，接着问:“现在你看到那条线是在点 O 的前面还是后面? ”

村长依旧回答:“还是在下面呀! ”

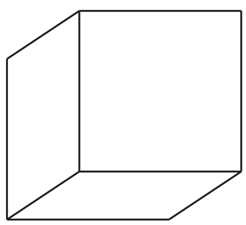


图 1.1.1

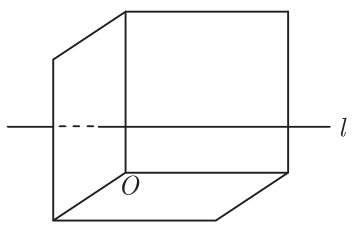


图 1.1.2

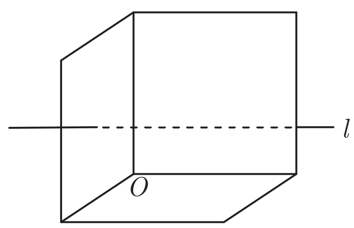


图 1.1.3

这时两位小英雄终于明白过来了，这是患了一种江湖上极其罕见的“平面症”，就是看到的东西都是平面的，怪不得都没有一部车辆。原来与此有关。小英拿出师傅给的一种特制的药水，滴到村长的眼里，小豪运功帮助，过了半晌，只见村长眼睛睁开，这时小豪又叫村长重新指认刚刚的图形。

村长道:“图 1.1.1 好像是一个墙角模型。图 1.1.2 可以看出点 O 在直线 l 的后面，也就是看起来是凹进去的，对图 1.1.3，显然是 O 在直线 l 的前面，这个图形就是凸向我们。哎呀，我现在看图和以前不同了，那种感觉真美妙! 是你们让我拥有这份感觉。”

这时村民闻讯赶来，纷纷向两位小英雄致谢。两位小英雄又配制了很多药水，村民们互相转告，我们的病有救了。

村长挽留了几日，两位小英雄看到花儿种类多了，知道村民们的眼睛恢复了，倍感欣慰。

要离开的那天，村民们夹道欢送，连送数程。这正是:

点睛疗眼寻常事，公道自在世人心!

究竟还会发生何事，且听下回分解。

[1]此处的“前面”与“后面”是指视觉上的前方与后方，即距离观察者相对较近者称之为前面，反之则为后面，下同

1.2 《智慧宝典》第二部第四回 误陷蜘蛛阵 智斗小精灵——陈海峰

话说小豪与小英离开“平面村”以后，心中不免有很多感触，心道：知识改变命运，也更增添了取到《智慧宝典》的信心与决心。拐过了两座大山后，来到一个地方，只见地形颇为奇特，所有的建筑都是单一的线，正在这时，一阵声音传来：“哈哈，你们已陷入‘蜘蛛阵’，不久将成为我的‘晚餐’。”两人循声望去，是一个小精灵。两人运功定睛一看，就是一些线构成的网阵，主要关口是如下几个：

例 1.2.1. 已知异面直线 a 与 b 所成的角为 $50°$，P 为空间的一点，则：
①过点 P 与 a、b 所成的角都是 $30°$ 的直线有几条?
②过点 P 与 a、b 所成的角都是 $65°$ 的直线有几条?
③过点 P 与 a、b 所成的角都是 $90°$ 的直线有几条?
④过点 P 与 a、b 所成的角都是 $70°$ 的直线有几条?
⑤过点 P 与 a、b 所成的角都是 $20°$ 的直线有几条?

两人商议了一下，这个蜘蛛阵的关卡很相似，只能使用“乾坤大挪移”的功夫，因为将异面直线平移时不会改变它们所成的角，所以只须过点 P 作两条相交直线 a'、b'，并使它们的交角成 $50°$，然后只要对付过点 P 与直线 a'、b' 所成的角都是 $30°$ 的直线有几条即可。

小豪拿起“奎星笔”，开始突围。

解 ①将 a'、b' 平移后作一个平面 α，如图 1.2.1 所示。

然后先考虑在平面 α 是否有符合题意的直线，作出它们的角平分线（虚线，为表述起见，分里、外、左、右），发现 L' 与直线 a'、b' 都成 $25°$（左右两侧），而里外两侧显然不符题意，故在平面 α 内找不到符合题意的直线。然后，将 L'“掀”离平面，发现其角度比原来加大，因为分左右两侧，所以有两条符合题意的直线。

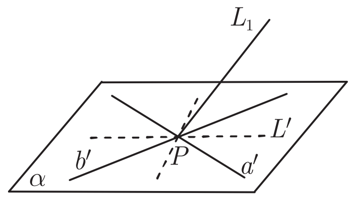


图 1.2.1

②同上述方法，发现在平面 α 内有一条直线符合题意（从里外穿过的虚线），然后也是将 L'“掀”离平面，同样地，左右两侧可找到两条直线符合题意。而在里外两侧因为原来已经成 $65°$，“掀”离平面只会使角度加大，综上共有三条符合题意的直线。 □

这边的小英也不示弱，便拨“神算子”突围：

解 ③符合题意的显然只有一条，就是过点 P 垂直于平面 α 的那一条直线。

④从左右两边那条虚线“掀”离平面有两条，从里外那条虚线的“掀”离平面也有两条。故有四条符合题意。

⑤在平面内显然角最小是 $25°$，“掀”离平面时角度只会加大，故不存在这样的线。 □

两人同时高呼：①有两条，②有三条，③有一条，④有四条，⑤的不存在。

这时小精灵大叫一声，这张蜘蛛网破了。以后我靠什么生活呀！只听“嗖”的一声逃走了。

小精灵此去是不是去请救兵，且听下回分解。

助力高考

2.1　ab1962 解题集精选（六）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 251 ∼ 300 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看第一期。

题目 2.1.1. 直角三角形 ABC 中，E, F 分别是直角边 AB, AC 上的任意点，自 A 向 BC, CE, EF, FB 引垂线，垂足分别为 M, N, P, Q。求证：M, N, P, Q 四点共圆。

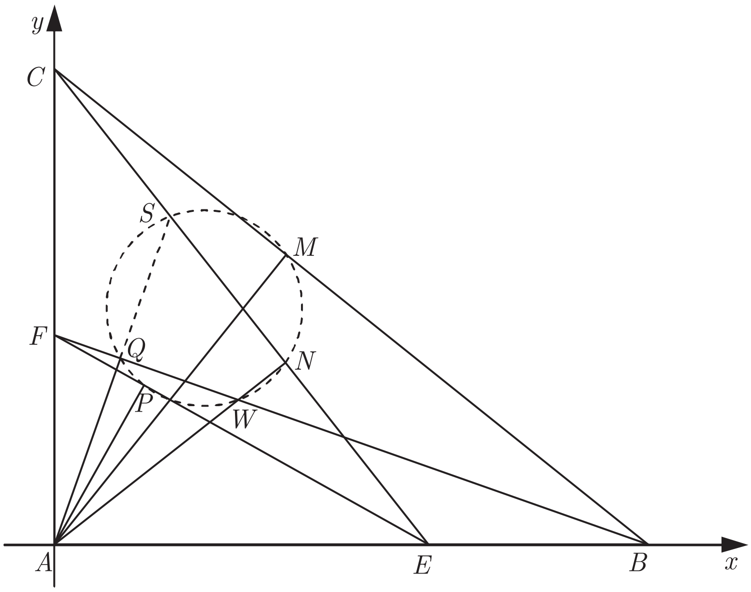


图 2.1.1

证明　如图 2.1.1 建立直角坐标系，设 $B(b,0)$, $C(0,c)$, $E(e,0)$, $F(0,f)$。

因为 $AN\perp CE$，所以直线 AN 的方程为
$$y=\frac{e}{c}x,\tag{2.1.1}$$
因为直线 BF 的方程为
$$\frac{x}{b}+\frac{y}{f}=1,\tag{2.1.2}$$
联立方程 (2.1.1), (2.1.2) 得直线 AN 与直线 BF 的交点
$$W\left(\frac{bcf}{be+cf},\frac{bef}{be+cf}\right)。$$

同理得直线 AQ 与直线 CE 的交点
$$S\left(\frac{cef}{be+cf},\frac{bec}{be+cf}\right)。$$

因为 $\angle WQS=\angle WNS=90^\circ$，故 Q,N 在以 WS 为直径的圆上，此圆的方程是
$$\left(x-\frac{bcf}{be+cf}\right)\left(x-\frac{cef}{be+cf}\right)+\left(y-\frac{bef}{be+cf}\right)\left(y-\frac{bec}{be+cf}\right)=0。\tag{2.1.3}$$

因为 $AM \perp BC$，所以直线 AM 的方程为

$$y = \frac{b}{c}x, \tag{2.1.4}$$

因为直线 BC 的方程为

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1, \tag{2.1.5}$$

联立方程 (2.1.4), (2.1.5) 得交点

$$M\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}, \frac{b^2c}{b^2+c^2}\right),$$

代入式 (2.1.3) 可知成立，故点 M 在 WS 为直径的圆上。

同理可证点 P 也在 WS 为直径的圆上。

综上，M, N, P, Q 四点共圆。 □

kuing 评注： 事实上，纯平几证法也很容易，略证如下。

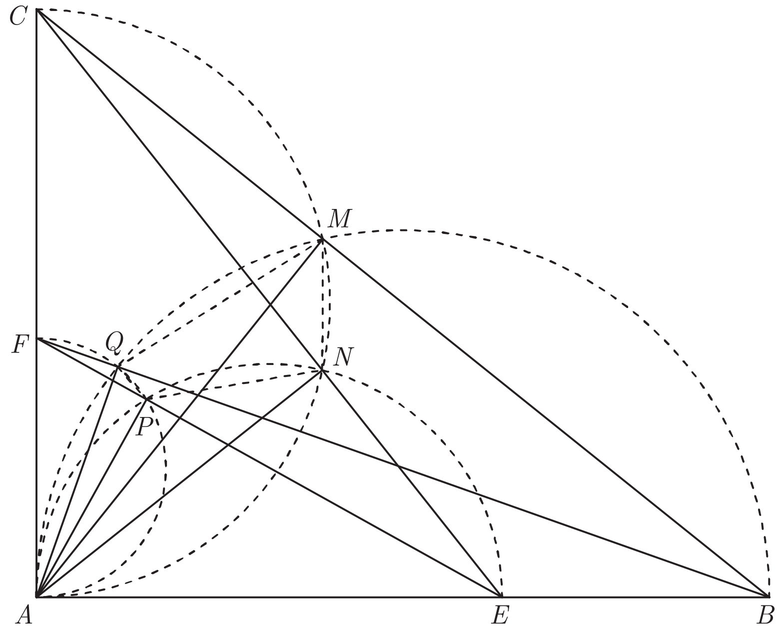


图 2.1.2

证明 如图 2.1.2 所示，由各种垂直，易证 A, B, M, Q 四点共圆，A, E, N, P 四点共圆，A, C, M, N 四点共圆，A, F, Q, P 四点共圆。于是

$$\angle QMN = \angle QMA + \angle AMN = \angle QBA + \angle ACN,$$

即

$$\angle QMN = \angle ABF + \angle ACE。\tag{2.1.6}$$

又

$$\angle QPN = 360^\circ - (\angle QPA + \angle NPA) = 360^\circ - (180^\circ - \angle QFA + 180^\circ - \angle NEA) = \angle QFA + \angle NEA,$$

即

$$\angle QPN = \angle AFB + \angle AEC。\tag{2.1.7}$$

将式 (2.1.6) 和式 (2.1.7) 相加得

$$\angle QMN + \angle QPN = \angle ABF + \angle AFB + \angle ACE + \angle AEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

由此可见M, N, P, Q 四点共圆。 □

题目 2.1.2. 已知 $a>1$，$n\geq 2$ 且 $n\in\mathbb{N}^+$。求证：$a^n-\dfrac{1}{a^n}>n\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$。
（发贴人注：我想到了数学归纳法，可卡在了第二步，求高手帮忙。另外，还有其他证法吗？谢谢解答！）

证明

$$\begin{aligned}\frac{a^n-\dfrac{1}{a^n}}{a-\dfrac{1}{a}}&=\frac{a(1-a^{2n})}{a^n(1-a^2)}\\&=\frac{1}{a^n}(a+a^3+\cdots+a^{2n-1})\\&>\frac{1}{a^n}n(a\cdot a^3\cdots a^{2n-1})^{\frac{1}{n}}\\&=\frac{1}{a^n}n\left(a^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\\&=n,\end{aligned}$$

故原式成立。 □

kuing 评注： 用数学归纳法是可以的。

证明 当 $n=2$ 时，有

$$\frac{a^2-\dfrac{1}{a^2}}{a-\dfrac{1}{a}}=a+\frac{1}{a}>2,$$

不等式成立。

假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $a^k-\dfrac{1}{a^k}>k\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{a^{k+1}-\dfrac{1}{a^{k+1}}}{a-\dfrac{1}{a}}&=\frac{a\left(a^k-\dfrac{1}{a^k}\right)+\dfrac{1}{a^k}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)}{a-\dfrac{1}{a}}\\&>ka+\frac{1}{a^k}\\&=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{k\text{ 个}}+\frac{1}{a^k}\\&>(k+1)\cdot\sqrt[k+1]{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{k\text{ 个}}\cdot\frac{1}{a^k}}\\&=k+1,\end{aligned}$$

可见当 $n=k+1$ 时不等式也成立，由数学归纳法知原不等式成立。 □

题目 2.1.3. 若 $\left[x+\dfrac{19}{100}\right]+\left[x+\dfrac{20}{100}\right]+\cdots+\left[x+\dfrac{91}{100}\right]=546$，求 $[100x]$ 的值。
这里 $[y]$ 表示不大于 y 的最大整数，如 $[0.1]=0,\ [2.9]=2,\ [-0.2]=-1$。

解 在已知等式中，共有 $91-18=73$ 个加数，$546\div 73=7$ 余 35，故 $[x]=7$ 且后面 35 个加数中的值为 $[x]+1$。由于

$$[x]+\left[x+\frac{1}{100}\right]+\left[x+\frac{2}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{99}{100}\right]=[100x]\,,\tag{2.1.8}$$

所以

$$[100x]=7\times 100+35+8=743。$$ □

kuing 评注： 上述解答过程比较简略，有些地方缺少说明，这里我补充说明一下。

首先，当 $0<r<1$ 时，$[x+r]$ 的值要么是 $[x]$ 要么是 $[x]+1$，故此在已知等式左边的加数中，将有 $73-k$ 个 $[x]$ 和 k 个 $[x]+1$，其中 k 为不大于 73 的某个自然数，故总和为 $(73-k)[x]+k\big([x]+1\big)=73[x]+k$，因此由 $546\div 73=7$ 余 35 就可以知道 $[x]=7$ 且 $k=35$。

其次，式 (2.1.8) 是由"厄米特恒等式"所得，更一般形式为：$x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^{+}$，则

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]。\tag{2.1.9}$$

恒等式 (2.1.9) 的证明可以构造函数

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx],$$

易见

$$f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f\left(x+\frac{2}{n}\right)=\cdots,$$

所以 $f(x)$ 是以 $\frac{1}{n}$ 为周期的周期函数。容易验证当 $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 时 $f(x)$ 恒为 0，所以恒等式成立。

最后想说的是，其实完全可以不用那个恒等式，因为由已知等式中 $[x]=7$ 且后面 35 个加数的值为 $[x]+1$，可得

$$\left[x+\frac{56}{100}\right]=7 \text{ 且 } \left[x+\frac{57}{100}\right]=8,$$

从而得到

$$x\in\left[7+\frac{43}{100},7+\frac{44}{100}\right) \iff 100x\in[743,744) \iff [100x]=743。$$

题目 2.1.4. 已知椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），过中心 O 作互相垂直的两条弦 AC、BD，设点 A、B 的离心角分别为 θ_1、θ_2，求 $|\cos(\theta_1-\theta_2)|$ 的取值范围。

解 由点 A、B 的离心角为 θ_1 和 θ_2 可得

$$A(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)，B(a\cos\theta_2,b\sin\theta_2),$$

因 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故

$$a^2\cos\theta_1\cos\theta_2+b^2\sin\theta_1\sin\theta_2=0。\tag{2.1.10}$$

设 $t=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1-\theta_2)$，代入式 (2.1.10) 得

$$a^2\cos\theta_1\cos\theta_2+b^2(t-\cos\theta_1\cos\theta_2)=0,$$

解得

$$\cos\theta_1\cos\theta_2=-\frac{tb^2}{a^2-b^2},$$
$$\sin\theta_1\sin\theta_2=t-\cos\theta_1\cos\theta_2=t+\frac{tb^2}{a^2-b^2}=\frac{ta^2}{a^2-b^2},$$

故

$$|\cos(\theta_1+\theta_2)|=|\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2|=\left|-\frac{tb^2}{a^2-b^2}-\frac{ta^2}{a^2-b^2}\right|=\left|\frac{t(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\right|\le 1,$$

所以

$$|t|\le\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}。$$

□

kuing 评注： 上述解答还差一点说明，那就是最小值以及取等条件，因为原题是问取值范围。事实上，当 A,B 取椭圆端点时满足条件且 $|\cos(\theta_1-\theta_2)|=0$ 取得最小值；当 A,B 关于 y 轴对称时 $\theta_1+\theta_2=0$ 为最大值的取等条件。又显然当 AC,BD 转动时离心角都是连续变化的，故此取值范围就是 $\left[0,\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$。

此外，其实由式 (2.1.10) 及积化和差公式，可得

$$(a^2-b^2)\cos(\theta_1+\theta_2)+(a^2+b^2)\cos(\theta_1-\theta_2)=0,$$

从而立得结论。

题目 2.1.5. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 和抛物线 $y=x^2-2$ 上三个不同点 A,B,C，若 AB 和 AC 和圆相切，求证 BC 也和圆相切。

证明 设抛物线 $y=x^2-2$ 上三个不同点 $A(x_1,x_1^2-2)$，$B(x_2,x_2^2-2)$，$C(x_3,x_3^2-2)$，则直线 AB 的方程为

$$y-x_1^2+2=(x_1+x_2)(x-x_1) \iff (x_1+x_2)x-y-x_1x_2-2=0,$$

与圆相切，则

$$\frac{|x_1x_2+2|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}}=1,$$

故

$$(x_1^2-1)x_2^2+2x_1x_2+3-x_1^2=0,$$

同理

$$(x_1^2-1)x_3^2+2x_1x_3+3-x_1^2=0,$$

故 x_2,x_3 是方程 $(x_1^2-1)x^2+2x_1x+3-x_1^2=0$ 的两根，故有

$$x_2+x_3=-\frac{2x_1}{x_1^2-1},\ x_2x_3=\frac{3-x_1^2}{x_1^2-1}.$$

直线 BC 的方程为

$$(x_2+x_3)x-y-x_2x_3-2=0,$$

圆心到直线 BC 的距离

$$d=\frac{|x_2x_3+2|}{\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}}=\frac{\left|\dfrac{3-x_1^2}{x_1^2-1}+2\right|}{\sqrt{\dfrac{4x_1^2}{(x_1^2-1)^2}+1}}=\frac{\left|\dfrac{x_1^2-1}{x_1^2-1}\right|}{\sqrt{\dfrac{(x_1^2+1)^2}{(x_1^2-1)^2}}}=1,$$

故直线 BC 与圆 $x^2+y^2=1$ 也相切。 □

2.2 不等式“恒成立·能成立”问题梳理（二）——窦国栋

题型三：二主元一参量——两个主元不全来自于函数定义（子）区间

A. 两个主元都任取，求第三个参数范围

例 2.2.1. （2008 天津）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+b\,(x\neq 0)$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=3x+1$，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若对于任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，不等式 $f(x)\leq 10$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上恒成立，求 b 的取值范围。

（1）（2）略；

（3）分析：本题可以等价叙述为：若对于任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 不等式 $f(x)\leq 10$ 恒成立，求 b 的取值范围。

解 由（2）知，$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 与 $f(1)$ 的较大者，又不等式 $f(x)\leq 10$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上恒成立（此时 x 作为主元，a 作为常数看待），当且仅当

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{4}\right)\leq 10, \\ f(1)\leq 10, \end{cases} \iff \begin{cases} b\leq \dfrac{39}{4}-4a, \\ b\leq 9-a, \end{cases}$$

此时问题转化为对任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，不等式 $b\leq\dfrac{39}{4}-4a$ 恒成立且不等式 $b\leq 9-a$ 恒成立。分离参数可解得 $b\leq\dfrac{7}{4}$，所以满足条件的 b 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right]$。 □

注：当两个变量都任取时，我们一般先讨论一个，另一个看做常数，讨论结束后再作为变量进一步讨论。

拓展练习：（2004 福建卷 21）已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}$（$x\in\mathbb{R}$）在区间 $[-1,1]$ 上是增函数。

（1）求实数 a 的值组成的集合 A；

（2）设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1、x_2。试问：是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geq|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立？若存在，求 m 的取值范围；若不存在，请说明理由。

解 （1）略，其中 $A=\{a|-1\leq a\leq 1\}$。

（2）由 $\dfrac{2x-a}{x^2+2}=\dfrac{1}{x}$，得 $x^2-ax-2=0$，因为 $\Delta=a^2+8>0$，所以 x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两非零实根，故

$$\begin{cases} x_1+x_2=a, \\ x_1x_2=-2, \end{cases} \implies |x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8},$$

要使不等式 $m^2+tm+1\geq|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，首先对任意 $a\in A$，不等式 $m^2+tm+1\geq\sqrt{a^2+8}$ 恒成立，又 $\sqrt{a^2+8}\leq 3$，所以只需 $m^2+tm+1\geq 3$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立即可。

设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$，则等价于

$$\begin{cases} g(-1)=m^2-m-2\geq 0, \\ g(1)=m^2+m-2\geq 0, \end{cases}$$

解得 $m\geq 2$ 或 $m\leq -2$。所以，存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geq|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，其取值范围是 $\{m|m\geq 2$ 或 $m\leq -2\}$。 □

B. 两个主元一个任取一个存在，求第三个参数的范围

例 2.2.2. （2009 南京市高考模拟题）已知定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的最小值为 3，且当 $x \geq 0$ 时，$f(x) = 3e^x + a$（a 为常数）。

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求最大整数 m（$m > 1$），使得存在实数 t，对任意的 $x \in [1, m]$，都有 $f(x+t) \leq 3ex$。

解 （1）略，$f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x \geq 0, \\ 3e^{-x}, & x < 0。\end{cases}$

（2）由（1）的解析式又可以写成 $f(x) = 3e^{|x|}$，所以 $f(x+t) \leq 3ex$ 即 $3e^{|x+t|} \leq 3ex$，所以原题变为 $3e^{|x+t|} \leq 3ex$ 对 $x \in [1, m]$ 恒成立，即 $|x+t| \leq 1 + \ln x$ 对 $x \in [1, m]$ 恒成立，即 $-1 - \ln x - x \leq t \leq 1 + \ln x - x$ 对 $x \in [1, m]$ 恒成立。

令 $g(x) = -1 - \ln x - x$，有 $g'(x) = -\dfrac{1}{x} - 1 < 0$，所以 $g(x)_{\max} = g(1) = -2$。

令 $h(x) = 1 + \ln x - x$，有 $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 \leq 0$，所以 $h(x)_{\min} = h(m) = 1 + \ln m - m$。

要使 t 存在，只要 $-2 \leq 1 + \ln m - m$，即 $\ln m - m + 3 \geq 0$。

令 $k(m) = \ln m - m + 3$，则 $k'(m) = \dfrac{1}{m} - 1 \leq 0$，所以 $k(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为单调减函数，且 $k(3) = \ln 3 > 0$，$k(4) = \ln 4 - 1 > 0$，$k(5) = \ln 5 - 2 < 0$，所以 m 的最大整数是 4。 □

题型四：证明二元不等式问题

这种问题也可以看成题型三的一个子分类，在证明时往往使用前几问所证结论，或者使用二元选主元，化二元为一元等方法证明。

例 2.2.3. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{1+x}$。

（1）求 $f(x)$ 的极小值；

（2）若 $a, b > 0$，求证 $\ln a - \ln b \geq 1 - \dfrac{b}{a}$。

解 （1）$f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{1+x}$，所以 $f'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$，又 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$，在 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，在 $-1 < x < 0$ 时，$f'(x) < 0$，所以当 $x = 0$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(0) = 0$；

（2）**方法一：运用第一问的结论**

由（1）知当 $x = 0$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f(0) = 0$，由题知此极小值也是最值，所以 $f_{\min}(x) = 0$，于是 $f(x) \geq f(0)$，从而 $\ln(x+1) \geq \dfrac{x}{1+x}$ 在 $x > -1$ 时恒成立。

令 $1 + x = \dfrac{a}{b} > 0$ 则 $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x} = 1 - \dfrac{b}{a}$，因此 $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{b}{a} \geq 1 - \dfrac{b}{a}$ 在 $a, b > 0$ 成立，得证。

方法二：二元换一元

原题即证 $\ln \dfrac{b}{a} \geq 1 - \dfrac{b}{a}$，令 $\dfrac{a}{b} = x \geq 0$，即证 $\ln x \geq 1 - \dfrac{1}{x}$，即证 $\ln x + \dfrac{1}{x} - 1 \geq 0$。

令 $g(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1$，则 $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1-x}{x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数，在 $(1, +\infty)$ 上是增函数，所以在 $x = 1$ 处取得最小值，即 $g_{\min}(x) = g(1) = 0$，所以 $g(x) \geq 0$，得证。

方法三：二元选主元

原题即证 $\ln b - \dfrac{b}{a} + 1 - \ln a \leq 0$。

令 $g(x) = \ln x - \dfrac{x}{a} + 1 - \ln a\,(x > 0)$，则 $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-x}{ax}$，所以 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上是增函数，在 $(a, +\infty)$ 上是减函数，所以 $g(x)$ 在 $x = a$ 处取得最大值 $g(a) = 0$，所以 $g(x) \leq 0$，得证。 □

拓展练习：

1.（2004 全国 II）已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=x\ln x$。

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）设 $0<a<b$，证明：$0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$。

注： 本题第二问可以使用（1）的结论证明，也可以选用二元选主元的方法证明，其中不等式的左侧部分是证明 $g(x)$ 的凸凹性的，等价于"任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，求证：$g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$"。

2.（2010 湖南卷）已知函数 $f(x)=x^2+bx+c\,(b,c\in\mathbb{R})$，对任意的 $x\in\mathbb{R}$，恒有 $f'(x)\le f(x)$。

（1）证明：当 $x\ge 0$ 时 $f(x)\le(x+c)^2$；

（2）若对满足题设条件的任意 b,c，不等式 $f(c)-f(b)\le M(c^2-b^2)$ 恒成立，求 M 的最小值。

注： 本题应用二元化为一元的策略。

参考文献

[1] 邵贤虎.《一道导数压轴题的突破过程》[J]. 中学数学研究. 2011.(1):33-34

[2] 黄凤圣.《高考奥赛全程对接——高考数学》[M]. 北京，机械工业出版社. 2006.9:11-13

[3] 吴剑.《高考常考题型分类总结（导数）》. 数学空间 1、2、3 期

[4] 窦国栋.《用导数证明二元不等式》. 中学生学习报（教研版）225 期

[5] 蒋寿荣.《新高考中的全称量词和存在量词》[J]. 数学通讯. 2009.5:38-40

2.3　2011 年高考数学四川卷理科最后三题评析——蒋明斌

1. 第 22 题　已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$，$h(x)=\sqrt{x}$。

（I）设函数 $F(x)=f(x)-h(x)$，求 $F(x)$ 的单调区间与极值；

（II）设 $a\in\mathbb{R}$，解关于 x 的方程 $\log_4\left(\dfrac{3}{2}f(x-1)-\dfrac{3}{4}\right)=\log_2 h(a-x)-\log_2 h(4-x)$；

（III）试比较 $f(100)h(100)-\displaystyle\sum_{k=1}^{100}h(k)$ 与 $\dfrac{1}{6}$ 的大小。

评析：这就是传说中的压轴题，压轴题出这样的题有点莫明其妙，严格说来不算综合题，三个小题各不相干，唯一的联系是函数符号 $f(x),g(x)$，实际上就是把三个不相干的问题硬捆在一起。

（I）题，导数应用的基本问题，简单。

（II）也不太难，方程两化为同底的对数，去掉对数，转化为

$$\begin{cases}(x-1)(4-x)=a-x,\\ 1\le x\le 4,\\ x\le a,\end{cases}\iff\begin{cases}-(x-3)^2+5=a,\\ 1\le x\le 4,\\ x\le a,\end{cases}$$

然后利用图象，按线段 $y=a(1\le x\le 4,x\ge a)$ 与抛物线的一段 $y=-(x-3)^2+5(1\le x\le 4,x\le a)$ 的交点个数分情况即可得出结论。

（III）是稍难，解它的关键是，先一般化，把 100 换成 n，即解更一般的问题：

当 $n\in\mathbb{N}^+$，比较 $f(n)h(n)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}h(k)$ 与 $\dfrac{1}{6}$ 的大小。

令

$$g(n)=f(n)h(n)-\sum_{k=1}^{n}h(k)-\frac{1}{6}=\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)-\frac{1}{6},$$

试算

$$g(1)=0,$$

$$g(2)=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{6}=\frac{5\sqrt{2}-7}{6}>0,$$

$$g(3)=\left(\frac{6}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{11\sqrt{2}}{6}+\frac{5\sqrt{2}-7}{6}=\frac{\sqrt{243}-\sqrt{242}}{6}+\frac{5\sqrt{2}-7}{6}>0,$$

可以猜测，当 $n\in\mathbb{N},n\ge 2$ 有

$$g(n)=\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)-\frac{1}{6}>0。\tag{2.3.1}$$

参考答案是先将 $\left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\dfrac{1}{6}$ 化为一个数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，然后再比较 a_n 与 $\sqrt{n}$，由 $a_n-\sqrt{n}>0$ 证得 (2.3.1)，这一般考生难以想到。

实际上按常规方法，证明 (2.3.1) 首先想到的应该是数学归纳法，况且用数学归纳法证 (2.3.1) 并不难。

证明 1　用数学归纳法。

1）当 $n=2$ 时，$g(2)=\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{2}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}-7}{6}>0$；

2）假设当 $n=k$ 时，$g(k)>0$，即

$$-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}\right)-\frac{1}{6}>\left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k}=\frac{4k+3}{6}\sqrt{k},$$

那么当 $n=k+1$

$$\begin{aligned}g(k+1)&=\left(\frac{2(k+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k+1}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)-\frac{1}{6}\\&=\left(\frac{4k+7}{6}\right)\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}\right)-\frac{1}{6}\\&>\frac{4k+1}{6}\sqrt{k+1}-\frac{4k+3}{6}\sqrt{k}\\&=\frac{1}{6}\left((4k+1)\sqrt{k+1}-(4k+3)\sqrt{k}\right)>0,\end{aligned}$$

后一不等号成立，是因为

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1)-k(4k+3)^2&=(4k+1)^2+k\left((4k+1)^2-(4k+3)^2\right)\\&=16k^2+8k+1+k(8k+4)(-2)=1>0,\end{aligned}$$

即 $g(k+1)>0$，故当 $n\in\mathbb{N},n\geq 2$，有

$$g(n)=\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)-\frac{1}{6}>0。$$ □

如是觉得用数学归纳写起来有点啰嗦，也可以直接证明 $\{g(n)\}$ 是单调递增数列。

证明 2 因为当 $n\in\mathbb{N},n\geq 2$ 时

$$g(n+1)-g(n)=\frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\frac{1}{6}\left((4n+1)\sqrt{n+1}-(4n+3)\sqrt{n}\right)>0,$$

后一不等号成立，是因为

$$\begin{aligned}(4n+1)^2(n+1)-n(4n+3)^2&=(4n+1)^2+n\left((4n+1)^2-(4n+3)^2\right)\\&=16n^2+8n+1+n(8n+4)(-2)=1>0,\end{aligned}$$

所以，当 $n\in\mathbb{N},n\geq 3$ 时，

$$g(n)>g(n-1)>\cdots>g(3)>g(2),$$

而 $g(2)=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{6}=\frac{5\sqrt{2}-7}{6}>0$，故当 $n\in\mathbb{N},n\geq 2$ 时 $g(n)\geq g(2)>0$。

取 $n=100$，即得 $f(100)h(100)-\sum\limits_{k=1}^{100}h(k)>\frac{1}{6}$。 □

2. 第 20 题 设 d 为非零实数，$a_n=\frac{1}{n}\left(C_n^1d+2C_n^2d^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}d^{n-1}+nC_n^nd^n\right)(n\in\mathbb{N}^+)$。

（I）写出 a_1,a_2,a_3 并判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列，若是，给出证明；若不是，说明理由；

（II）设 $b_n=nda_n(n\in\mathbb{N}^+)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

分析:（I）容易得出 $a_1=d,a_2=d(1+d),a_3=d(1+d)^2$，由此，可猜测 $a_n=d(1+d)^{n-1}$，要证明这个结果需用到 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，很多考生由于没记住这公式，到此就止步了。

实际上，这公式推导并不难：$kC_n^k=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$。

在教材中有道习题：$1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$，证明它就要用这公式。

（II）属求一等差数列与一等比数列相应项的积的和，一般用错位相减法求。

如果注意到由二项式定理 $(1+d)^n=C_n^0+C_n^1d+C_n^2d^2+\cdots+C_n^{n-1}d^{n-1}+C_n^nd^n$ 及幂函数的导数 $(x^n)'=nx^{n-1}$，则（I）、（II）都可以用导数求解。

解 （I）注意到 $a_n = \dfrac{d}{n}\left(C_n^1 + 2C_n^2 d + \cdots + (n-1)C_n^{n-1}d^{n-2} + nC_n^n d^{n-1}\right)$，记 $f(d) = (1+d)^n$，由二项式定理有

$$f(d) = (1+d)^n = C_n^0 + C_n^1 d + C_n^2 d^2 + \cdots + C_n^{n-1}d^{n-1} + C_n^n d^n,$$

所以

$$f'(d) = n(1+d)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 d + \cdots + (n-1)C_n^{n-1}d^{n-2} + nC_n^n d^{n-1},$$

代入得

$$a_n = \frac{d}{n}\cdot n(1+d)^{n-1} = d(1+d)^{n-1},$$

所以，当 $d=-1$ 时，$a_1 = d, a_n = 0 (n \geq 2)$，$\{a_n\}$ 不成等比数列；当 $d \neq -1$ 时，$\{a_n\}$ 是首项为 d，公比为 $1+d$ 的成等比数列；

（II）当 $d=-1$ 时，$S_n = b_1 = 1$；

当 $d \neq -1$ 时，$S_n = d^2\left(1 + 2(1+d) + 3(1+d)^2 + \cdots + n(1+d)^{n-1}\right)$。

令 $g(d) = (1+d) + (1+d)^2 + \cdots + (1+d)^n$，注意到 $d \neq 0$，则 $d+1 \neq 1$，

$$g(d) = \frac{(1+d)\left((1+d)^n - 1\right)}{(1+d)-1} = d^{-1}(1+d)^{n+1} - d^{-1} - 1,$$

即

$$g(d) = (1+d) + (1+d)^2 + \cdots + (1+d)^n = d^{-1}(1+d)^{n+1} - d^{-1} - 1,$$
$$g'(d) = 1 + 2(1+d) + \cdots + n(1+d)^{n-1},$$

又

$$g'(d) = -d^{-2}(1+d)^{n+1} + d^{-1}(n+1)(1+d)^n + d^{-2},$$

所以

$$1 + 2(1+d) + \cdots + n(1+d)^{n-1} = -d^{-2}(1+d)^{n+1} + d^{-1}(n+1)(1+d)^n + d^{-2},$$
$$S_n = d^2\left(-d^{-2}(1+d)^{n+1} + d^{-1}(n+1)(1+d)^n + d^{-2}\right) = -(1+d)^{n+1} + d(n+1)(1+d)^n + 1。$$

□

注： 数列 $\{(kn+b)q^n\}$ 的前 n 项和，都可以用导数求得。

3. 第 21 题 椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点。并与 x 轴交于 P，直线 AC 与直线 BD 交于点 Q。

（I）当 $|CD| = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ 时，求直线 l 的方程；

（II）当点 P 异于 A、B 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值。

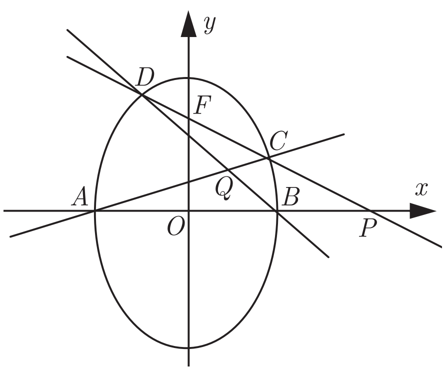


图 2.3.1

（I）容易求解。

（II）的结论可以推广到有心圆锥（椭圆、圆和双曲线），我们有

命题 2.3.1. （I）设椭圆（或圆）K 的中心为 O，其一对称轴与 K 交于 A、B 两点，$|AB|=2r$，直线 L 与 K 交于 C、D 两点，与直线 AB 交于 P，直线 AC 与直线 BD 交于 Q，则当点 P 异于 A、B 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值。

（II）设双曲线 K 的中心为 O，顶点为 A、B，$|AB|=2r$，直线 L 与 K 交于 C、D 两点，与直线 AB 交于 P，直线 AC 与直线 BD 交于 Q。则当点 P 异于 A、B 两点时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值。

证明 （I）如图 2.3.1，以 K 中心为原点，对称轴 X 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设 K 的方程为 $\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{s^2}=1$，则 $A(-r,0),B(r,0)$，设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$。

1）当直线 L 的斜率存在时，设 L 的方程为 $y=kx+m$，显然 $k\neq 0$，则 $P\left(-\dfrac{m}{k},0\right)$。$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{s^2}=1,\\ \qquad\quad y=kx+m,\end{cases}$$

的解，消去 y，并整理得 $\left(s^2+k^2r^2\right)x^2+2r^2kmx+r^2(m^2-s^2)=0$，则

$$x_1+x_2=-\frac{2r^2km}{s^2+k^2r^2},\ x_1x_2=\frac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}。$$

直线 AC、BD 的分别方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+r}(x+r)$，$y=\dfrac{y_2}{x_2-r}(x-r)$，点 Q 的坐标 (x,y) 是方程组

$$\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+r}(x+r),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-r}(x-r),\end{cases}$$

的解，消去 y 得 $\dfrac{x+r}{x-r}=\dfrac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}$。

由 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$ 在椭圆 K 上，则 $y_1^2=\dfrac{s^2}{r^2}(r^2-x_1^2),y_2^2=\dfrac{s^2}{r^2}(r^2-x_2^2)$，因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+r}{x-r}\right)^2&=\left(\frac{x_1+r}{x_2-r}\right)^2\cdot\frac{r^2-x_2^2}{r^2-x_1^2}=\frac{(x_1+r)(x_2+r)}{(x_1-r)(x_2-r)}=\frac{x_1x_2+r(x_1+x_2)+r^2}{x_1x_2-r(x_1+x_2)+r^2}\\&=\frac{\dfrac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}+r\left(-\dfrac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}\right)+r^2}{\dfrac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}-r\left(-\dfrac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}\right)+r^2}=\left(\frac{m-kr}{m+kr}\right)^2,\end{aligned}$$

注意到 $-r<x_1,x_2<r$，有 $\dfrac{x_1+r}{x_2-r}<0$，由 $\dfrac{x+r}{x-r}=\dfrac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}$，知 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 异号。

由

$$\begin{aligned}y_1y_2&=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2\\&=k^2\frac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}+km\left(-\frac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}\right)+m^2\\&=\frac{s^2(m^2-k^2r^2)}{s^2+k^2r^2}=\frac{s^2(m+kr)^2}{s^2+k^2r^2}\cdot\frac{m-kr}{m+kr},\end{aligned}$$

知 y_1y_2 与 $\dfrac{m-kr}{m+kr}$ 同号，而 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 异号，所以 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{kr-m}{kr+m}$ 同号，那么

$$\frac{x+r}{x-r}=\frac{kr-m}{kr+m},$$

解得 $x=-\dfrac{k}{m}r^2$，即 $Q\left(-\dfrac{k}{m}r^2,y\right)$，那么

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{m}{k}\left(-\frac{k}{m}r^2\right)=r^2;$$

2）当直线 L 的斜率不存在时，设 L 的方程为 $x=m$，显然 $m\neq0$，则 $P(m,0)$，$x_1=x_2=m, y_2=-y_1$，与 1）类似可得

$$\frac{x+r}{x-r}=\frac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\frac{y_2}{y_1}=-\frac{m+r}{m-r},$$

解得 $x=\dfrac{r^2}{m}$，即 $Q\left(\dfrac{r^2}{m},y\right)$，那么 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=m\cdot\dfrac{r^2}{m}=r^2$。

综上有，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=r^2$（定值）。

（II）以 K 中心为原点，AB 对所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设 K 的方程为 $\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{s^2}=1$，则 $A(-r,0),B(r,0)$，设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$。

1）当直线 L 的斜率存在时，设 L 的方程为 $y=kx+m$，显然 $k\neq0$，则 $P\left(-\dfrac{m}{k},0\right)$。$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{s^2}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$$

的解，消去 y，并整理得 $\left(s^2-k^2r^2\right)x^2-2r^2kmx-r^2(m^2+s^2)=0$，则

$$x_1+x_2=\frac{2r^2km}{s^2-k^2r^2},\quad x_1x_2=\frac{-r^2(m^2+s^2)}{s^2-k^2r^2}。$$

直线 AC、BD 的分别方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+r}(x+r)$，$y=\dfrac{y_2}{x_2-r}(x-r)$，点 Q 的坐标 (x,y) 是方程组

$$\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+r}(x+r),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-r}(x-r),\end{cases}$$

的解，消去 y 得 $\dfrac{x+r}{x-r}=\dfrac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}$。

由 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$ 在双曲线 K 上，则 $y_1^2=\dfrac{s^2}{r^2}(x_1^2-r^2),y_2^2=\dfrac{s^2}{r^2}(x_2^2-r^2)$，因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+r}{x-r}\right)^2&=\left(\frac{x_1+r}{x_2-r}\right)^2\cdot\frac{x_2^2-r^2}{x_1^2-r^2}=\frac{(x_1+r)(x_2+r)}{(x_1-r)(x_2-r)}=\frac{x_1x_2+r(x_1+x_2)+r^2}{x_1x_2-r(x_1+x_2)+r^2}\\&=\frac{\dfrac{-r^2(m^2+s^2)}{s^2-k^2r^2}+r\dfrac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}+r^2}{\dfrac{-r^2(m^2+s^2)}{s^2-k^2r^2}-r\dfrac{2r^2km}{s^2-k^2r^2}+r^2}=\left(\frac{m+kr}{m-kr}\right)^2。\end{aligned}$$

不妨设 $x_1\leq x_2$，当 C,D 在双曲线同一支时，$x_1\leq x_2<-r$ 或 $r<x_1\leq x_2$，则 $\dfrac{x_1+r}{x_2-r}>0$，因而 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 同号；

当 C,D 分别在双曲线不同支时，$x_1<-r<r<x_2$，则 $\dfrac{x_1+r}{x_2-r}<0$，因而 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 异号。

又

$$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$$

$$
\begin{aligned}
&= k^2\frac{r^2(-m^2-s^2)}{s^2-k^2r^2}+km\frac{2r^2km}{s^2-k^2r^2}+m^2\\
&= \frac{s^2(m^2-k^2r^2)}{s^2-k^2r^2}=\frac{s^2(m+kr)^2}{s^2-k^2r^2}\cdot\frac{m-kr}{m+kr}。
\end{aligned}
$$

当 C,D 在双曲线同一支时，由 $x_1x_2=\dfrac{-r^2(m^2+s^2)}{s^2-k^2r^2}>0$，有 $s^2-k^2r^2<0$，则 y_1y_2 与 $\dfrac{m-kr}{m+kr}$ 异号，此时 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 同号，所以 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{kr-m}{kr+m}$ 同号；

当 C,D 分别在双曲线不同支时，由 $x_1x_2=\dfrac{-r^2(m^2+s^2)}{s^2-k^2r^2}<0$，有 $s^2-k^2r^2>0$，则 y_1y_2 与 $\dfrac{m-kr}{m+kr}$ 同号，此时 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 异号，所以 $\dfrac{x+r}{x-r}$ 与 $\dfrac{kr-m}{kr+m}$ 同号。

因此，$\dfrac{x+r}{x-r}=\dfrac{kr-m}{kr+m}$，解得 $x=-\dfrac{k}{m}r^2$，即 $Q\left(-\dfrac{k}{m}r^2,y\right)$，那么

$$
\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{m}{k}\left(-\frac{k}{m}r^2\right)=r^2;
$$

2）当直线 L 的斜率不存在时，设 L 的方程为 $x=m$，显然 $m\neq 0$，则 $P(m,0)$，$x_1=x_2=m, y_2=-y_1$，与 1）类似可得

$$
\frac{x+r}{x-r}=\frac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\frac{y_2}{y_1}=-\frac{m+r}{m-r},
$$

解得 $x=\dfrac{r^2}{m}$，即 $Q\left(\dfrac{r^2}{m},y\right)$，那么 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=m\cdot\dfrac{r^2}{m}=r^2$。

综上有，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=r^2$（定值）。 □

2.4 例谈不等式证明的十种常用方法——李明

不等式的证明是在已知不等关系中变量范围的前提下，运用一定的方法技巧，结合不等式的性质及相关定理来推理出不等关系的成立。在不等式的证明中，除了“对实数 x，$x^2 \geq 0$”等极其一般的原理外，统一的方法并不太多。但是，对具有共同结构特征的不等式，我们还是可以尝试一些固定的不等式证法。本文将给出初等数学中十种常用的不等式证明方法，并针对每种证明方法列举若干典型实例，希望对正在学习或复习不等式证明的中学生有所帮助。

A. 比较法

比较法是证明不等式的基本方法，它是直接作出所求证不等式两边的差（或商），然后

通过因式分解、配方、乘法公式等工具进行代数变形，最后通过比较推出结论的方法。如：$a > b \iff a - b > 0$；当 $b > 0$ 时，$a > b \iff \dfrac{a}{b} > 1$；当 $b < 0$ 时，$a > b \iff \dfrac{a}{b} < 1$。

例 2.4.1. 已知：$a, b, c > 0$，求证：$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$（当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立）。

证明

$$\begin{aligned} \text{原式} &\iff a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \\ &\iff (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) \geq 0 \\ &\iff \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0\text{。} \end{aligned}$$

显然 $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0$ 成立，且当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立，所以原不等式成立，当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立。 □

例 2.4.2. 已知：$a, b > 0$，求证：$a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$（当且仅当 $a = b$ 时等号成立）。

证明 原式 $\iff \dfrac{a^a b^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}} \geq 1 \iff \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} \geq 1$。当 $a > b > 0$ 或 $b > a > 0$ 时，均有 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$；当且仅当 $a = b > 0$ 时，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} = 1$。所以原不等式成立，当且仅当 $a = b$ 时等号成立。 □

B. 综合法

综合法是“由因导果”，它是从已知条件出发，利用公理、定理及已知的基本不等式，逐步推导，最后得到要证不等式的方法。

例 2.4.3. 设$a, b, c > 0$，求证：$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$（当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立）。

证明 由两个正数的算术–几何平均值不等式可得

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\text{（当且仅当 } a = b \text{ 时等号成立），}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}\text{（当且仅当 } b = c \text{ 时等号成立），}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}\text{（当且仅当 } c = a \text{ 时等号成立），}$$

三者相乘可得 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$（当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立）。 □

例 2.4.4. 已知：$a^2 + b^2 = 1$，求证：$a\sin\theta + b\cos\theta \leq 1$。

证明 因为 $a^2 + \sin^2\theta \geq 2a\sin\theta$，$b^2 + \cos^2\theta \geq 2b\cos\theta$，所以

$$a^2 + \sin^2\theta + b^2 + \cos^2\theta \geq 2a\sin\theta + 2b\cos\theta,$$

于是 $a\sin\theta + b\cos\theta \leq 1$。 □

C. 分析法

分析法是“执果索因”，它与综合法的证明过程相反，是从要证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题。如果能肯定这些充分条件都已成立，那么就能断定原不等式成立。

例 2.4.5. 设 a, b 为实数，求证：$\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \geq \dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}$。

证明 欲证 $\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \geq \dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}$，只需证

$$(|a|+|b|)(1+|a+b|) \geq |a+b|(1+|a|+|b|),$$

又只需证

$$|a|+|b| \geq |a+b|,$$

显然成立。于是，原不等式成立。 □

例 2.4.6. 设 $2 \leq n \in \mathbb{N}^{+}$，求证：$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n} > n!$。

证明 欲证 $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n} > n!$，只需证

$$\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

又只需证

$$\frac{n(n+1)}{2} > n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

即证

$$1+2+3+\cdots+n > n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

由 n 个正数的算术-几何平均值不等式知上式成立。于是，原不等式成立。 □

D. 反证法

反证法的基本思路是“否定结论，推出矛盾”，具体地说，它是先假设要证的结论不成立，然后利用公理、定义、定理等条件，得到与已知条件、公理（或已证明过的定理）相矛盾的结论，以此说明所作的假设不成立，从而原结论正确。

例 2.4.7. 设 $0 < a, b, c < 1$，求证：$(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a$ 不可能同时大于 $\dfrac{1}{4}$。

证明 假设 $(1-a)b > \dfrac{1}{4}, (1-b)c > \dfrac{1}{4}, (1-c)a > \dfrac{1}{4}$，则三式相乘得

$$(1-a)b \cdot (1-b)c \cdot (1-c)a > \frac{1}{64}。$$

又因为

$$(1-a)b \cdot (1-b)c \cdot (1-c)a \leq \left(\frac{(1-a)+b+(1-b)+c+(1-c)+a}{6}\right)^{6} = \frac{1}{64},$$

与上式矛盾，所以，假设不成立，从而 $(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a$ 不可能同时大于 $\dfrac{1}{4}$。 □

例 2.4.8. 设 $a+b+c > 0$，$ab+bc+ca > 0$，$abc > 0$，求证： $a > 0, b > 0, c > 0$。

证明 由 $abc > 0$ 得 $a \neq 0$，若 $a < 0$，则 $bc < 0$。又因为 $a+b+c > 0$，所以 $b+c > -a > 0$，所以 $ab+bc+ca = a(b+c)+bc < 0$，这与 $ab+bc+ca > 0$ 相矛盾，所以 $a > 0$。同理可证 $b > 0$，$c > 0$。 □

E. 放缩法

为证明不等式，有时可通过舍去或添加一些项，使不等式一边适度地放大或缩小，利用不等式的传递性达到证明的目的，这种证明方法称为放缩法。

例 2.4.9. 已知 a,b,c,d 为正数，求证：$1<\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}<2$。

证明 设 $m=\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}$。
因为 a,b,c,d 为正数，所以把分母均放大为 $a+b+c+d$ 可得

$$m>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1。$$

另一方面，我们把前两项的分母缩小成 $a+b$，把后两项的分母缩小成 $c+d$，便有

$$m<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=2。$$

□

例 2.4.10. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，求证：$\dfrac{n(n+1)}{2}<\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\dfrac{(n+1)^2}{2}$。

证明 因为 $k<\sqrt{k(k+1)}<k+\dfrac{1}{2}$（$k\in\mathbb{N}^+$），所以

$$\sum_{k=1}^{n}k<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}<\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}k+\frac{n}{2},$$

即 $\dfrac{n(n+1)}{2}<\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\dfrac{(n+1)^2}{2}$。 □

F. 换元法

换元法是根据不等式的结构特征，选取适当的变量代换，从而实现化繁为简或实现某种转化，以便证明。如：三角换元、增量换元等等。

例 2.4.11. 已知 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），求证：$x+y\le\sqrt{a^2+b^2}$。

证明 设 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$（$0\le\theta<2\pi$），则

$$x+y=a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)\le\sqrt{a^2+b^2},$$

其中 φ 满足 $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 和 $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。 □

例 2.4.12. 已知：$a,b>0, a+b=1$，求证：$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\ge\dfrac{25}{4}$。

证明 令 $a=\dfrac{1}{2}+t, b=\dfrac{1}{2}-t$（$-\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{1}{2}$），于是

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}{ab}=\frac{t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}-t^2}\ge\frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4}。$$

□

G. 数学归纳法

证明某些与自然数有关的命题时，可分为两个推理步骤：

①证明当 n 取初始值 n_0（如 $n_0=0, n_0=1$ 等）时，命题成立。

②假设当 $n=k$（$n_0 \leq k \in \mathbb{N}$）时命题成立，由此推出当 $n=k+1$ 时命题也成立，这时就说对于任何的自然数 $n \geq n_0$，原命题都成立。

这种证明方法称为数学归纳法，它在证明很多与自然数有关的不等式时颇为有效。

例 2.4.13. 求证：$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$（$n \in \mathbb{N}^+$）。

证明 （1）当 $n=1$ 时，$1<2\sqrt{1}=2$，不等式成立。

（2）假设当 $n=k$（$k \in \mathbb{N}^+$）时，不等式成立，即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k},$$

于是，当 $n=k+1$ 时，便有

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

又由于

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2\sqrt{k+1}=-\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2}{\sqrt{k+1}}<0,$$

于是，

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1},$$

于是，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时不等式成立。

由（1）、（2）可知，不等式 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$（$n \in \mathbb{N}^+$）成立。 □

例 2.4.14. 求证：$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{ 层根号}}<\sqrt{a+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}$（$a>0, n \in \mathbb{N}^+$）。

证明 （1）当 $n=1$ 时，$\sqrt{a}<\sqrt{a+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}$，不等式成立。

（2）假设当 $n=k$（$k \in \mathbb{N}^+$）时，不等式成立，即

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k\text{ 层根号}}<\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2},$$

于是，当 $n=k+1$ 时，便有

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k+1\text{ 层根号}}=\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k\text{ 层根号}}}<\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}=\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2},$$

即当 $n=k+1$ 时不等式成立。

由（1）、（2）可知，不等式 $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{ 层根号}}<\sqrt{a+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}$（$a>0, n \in \mathbb{N}^+$）成立。 □

H. 构造法

构造法是通过构造函数、向量、几何图形等来证明不等式的方法。

例 2.4.15. 已知：$|a|<1,|b|<1,|c|<1$，求证：$abc+2>a+b+c$。

证明 构造一次函数 $f(x)=(bc-1)x+2-b-c$，其中 $|x|<1,|b|<1,|c|<1$，于是 $bc<1$。

因为 $f(-1)=(1-bc)+(1-b)+(1-c)>0$，$f(1)=(b-1)(c-1)>0$，又 $-1<x<1$，所以一次函数 $f(x)=(bc-1)x+2-b-c$ 的图象在 x 轴上方，于是 $f(a)=(bc-1)a+2-b-c>0$，即 $abc+2>a+b+c$ 成立。 □

例 2.4.16. 已知：$a,b,c>0$，求证：$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$。

证明 构造向量 $\boldsymbol{m}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{b+c}},\dfrac{b}{\sqrt{c+a}},\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{b+c},\sqrt{c+a},\sqrt{a+b}\right)$。于是

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=a+b+c,\quad |\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|=\sqrt{\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}}\cdot\sqrt{2(a+b+c)}。$$

又 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\leq|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|$，所以

$$a+b+c\leq\sqrt{\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}}\cdot\sqrt{2(a+b+c)},$$

化简整理得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}。$$ □

例 2.4.17. 已知：$x,y,z>0$，求证：$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{y^2+z^2-yz}\geq\sqrt{x^2+z^2+xz}$。

证明 构造图形如图 2.4.1：令图中 $AB=x,AC=y,AD=z,\angle BAC=\angle CAD=60^\circ$，则由余弦定理得

$$BC=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ}=\sqrt{x^2+y^2-xy}。$$

同理，

$$CD=\sqrt{y^2+z^2-yz},$$
$$BD=\sqrt{x^2+z^2+xz}。$$

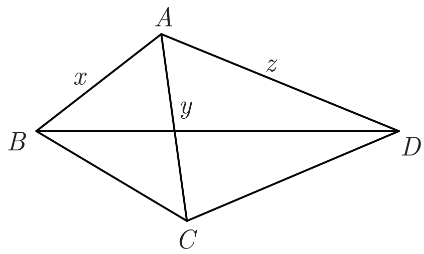


图 2.4.1

因为 B,C,D 三点构成三角形或共线，所以 $BC+CD\geq BD$，即

$$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{y^2+z^2-yz}\geq\sqrt{x^2+z^2+xz}。$$ □

I. 均值不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数，则代数式

$$H_n=\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}},$$
$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$
$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

依次称为 n 元调和平均、n 元几何平均、n 元算术平均和 n 元平方平均，关于这四个平均，我们有著名的均值不等式如下：

$$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n \text{（当且仅当 } a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ 等号成立）。}$$

例 2.4.18. 证：$n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$（$n \in \mathbb{N}^+$）。

证明 证明原式等价于证明

$$\sqrt[n]{n+1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + n,$$

即证

$$\sqrt[n]{n+1} < 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n},$$

由均值不等式显然成立。 □

例 2.4.19. 已知：$a, b > 0$ 且 $a + b = 1$，求证：$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \ge \frac{25}{4}$。

证明

$$\begin{aligned}
\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) &= ab + \frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\
&= ab + \frac{1}{16ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{15}{16ab} \\
&\ge 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \\
&= \frac{25}{4}\text{。}
\end{aligned}$$

□

例 2.4.20. 饮料厂打算设计圆柱形密度均匀的易拉罐装饮品，设易拉罐的容积固定为 V_0，上底和下底的厚度均为侧面的 2 倍，问底面半径 r 和高 h 为多少时，易拉罐用料最省?

解 设易拉罐用料体积为 V，设侧面厚度为 d，则上底和下底的厚度为 $2d$，又 $\pi r^2 h = V_0$，于是

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi r^2 \cdot 2d + 2\pi rh \cdot d \\
&= d\left(4\pi r^2 + \pi rh + \pi rh\right) \\
&\ge 3d \cdot \sqrt[3]{(4\pi r^2) \cdot \pi rh \cdot \pi rh} \\
&= 3d \cdot \sqrt[3]{4\pi\left(\pi r^2 h\right)^2} \\
&= 3d \cdot \sqrt[3]{4\pi V_0^2}\text{（常数）。}
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $4\pi r^2 = \pi rh$，即 $h = 4r$，代入 $\pi r^2 h = V_0$ 解得

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{4\pi}},\ h = \sqrt[3]{\frac{16V_0}{\pi}},$$

此时，易拉罐用料最省。

实际生活中，我们发现可乐、啤酒等饮品易拉罐的高大约为底面直径的 2 倍，一个原因就是为了节省用料。 □

J. Cauchy 不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为实数，则

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2,$$

其中等号成立 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$（当某 $b_i=0$ 时，认为 $a_i=0$，$i=1,2,\cdots,n$）。

例 2.4.21. 设 $a,b,c>0$，求证：$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{3}{2}$。

证明 欲证 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{3}{2}$，只需证明

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a} \geq \frac{9}{2},$$

即证

$$((a+b)+(b+c)+(c+a)) \cdot \left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9,$$

即证

$$\left(\left(\sqrt{a+b}\right)^2+\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)^2\right) \geq 9,$$

由 Cauchy 不等式显然成立，故原不等式得证。 □

例 2.4.22. 设 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$，且 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1$，求证：$\dfrac{x_1^2}{1+x_1}+\dfrac{x_2^2}{1+x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{1+x_n} \geq \dfrac{1}{n+1}$。

证明 因为

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x_1^2}{1+x_1}+\frac{x_2^2}{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1+x_n}\right) \cdot ((1+x_1)+(1+x_2)+\cdots+(1+x_n)) \\
=&\left(\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n}}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{1+x_1}\right)^2+\left(\sqrt{1+x_2}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{1+x_n}\right)^2\right) \\
\geq&\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1}} \cdot \sqrt{1+x_1}+\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2}} \cdot \sqrt{1+x_2}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n}} \cdot \sqrt{1+x_n}\right)^2 \\
=&\left(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n\right)^2 \\
=&1,
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{x_1^2}{1+x_1}+\dfrac{x_2^2}{1+x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{1+x_n} \geq \dfrac{1}{n+1}$。 □

例 2.4.23. 如图 2.4.2，已知凸四边形 $ABCD$ 的 4 条边长依次为 a,b,c,d，又知道对角线 AC 与 BD 垂直相交于点 O，求此四边形面积 S 的最大值?

解

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}AC \cdot BD \\
&=\frac{1}{2}(OA+OC) \cdot (OB+OD)
\end{aligned}$$

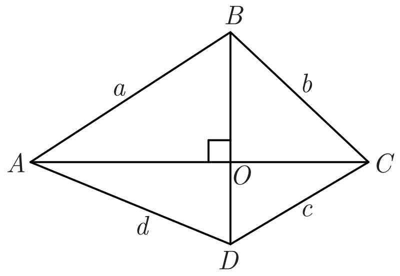


图 2.4.2

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left((OA \cdot OB + OC \cdot OD) + (OA \cdot OD + OC \cdot OB)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{OA^2 + OD^2} \cdot \sqrt{OB^2 + OC^2} + \sqrt{OA^2 + OB^2} \cdot \sqrt{OD^2 + OC^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(ac + bd)\text{。}
\end{aligned}
$$

故 $S_{\max} = \frac{1}{2}(ac + bd)$。 □

能力提升

3.1 由一个轮换对称不等式引发的研究与发现过程——郭子伟

话说某日与某网友讨论一道不等式题目的时候，谈到了如下简单不等式：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c, \tag{3.1.1}$$

其中 a,b,c 为任意正数，下同。当时我给出的证明是配方法，将式 (3.1.1) 作如下变形

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c \iff \sum\left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right)\geq 0 \iff \sum\frac{(a-b)^2}{b}\geq 0,$$

于是不等式显然成立。随后该网友又提出下式如何

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c, \tag{3.1.2}$$

我仍然依照上面的配方法，给出如下变形

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c \iff \sum\left(\frac{a^3}{b^2}-3a+2b\right)\geq 0 \iff \sum\frac{(a-b)^2(a+2b)}{b^2}\geq 0,$$

不等式也成立。配完后我再尝试提高次数，得到下式

$$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\geq a+b+c \iff \sum\left(\frac{a^4}{b^3}-4a+3b\right)\geq 0 \iff \sum\frac{(a-b)^2\left(a^2+2ab+3b^2\right)}{b^3}\geq 0,$$

系数是如此有规律，我再试更高次的配方也是如此，这使我立即提出并证得如下的恒等式定理。

定理 3.1.1. 当 $b\neq 0$ 时，对于任意正整数 n，有

$$\frac{a^{n+1}}{b^n}-(n+1)a+nb=\frac{(a-b)^2\left(a^{n-1}+2a^{n-2}b+3a^{n-3}b^2+\cdots+nb^{n-1}\right)}{b^n}。 \tag{3.1.3}$$

对于此定理的证明，当时最先想到的是将右边分子直接展开整理，过程如下：

证法一 去分母，即要证

$$a^{n+1}-(n+1)ab^n+nb^{n+1}=(a-b)^2\left(a^{n-1}+2a^{n-2}b+3a^{n-3}b^2+\cdots+nb^{n-1}\right),$$

展开右边，有

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2\left(a^{n-1}+2a^{n-2}b+3a^{n-3}b^2+\cdots+nb^{n-1}\right)\\
=\ &\left(a^2-2ab+b^2\right)\sum_{k=1}^{n}ka^{n-k}b^{k-1}\\
=\ &\sum_{k=1}^{n}ka^{n-k+2}b^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}2ka^{n-k+1}b^{k}+\sum_{k=1}^{n}ka^{n-k}b^{k+1}\\
=\ &a^{n+1}+2a^nb+\sum_{k=3}^{n}ka^{n-k+2}b^{k-1}-2a^nb-\sum_{k=2}^{n-1}2ka^{n-k+1}b^k-2nab^n+\sum_{k=1}^{n-2}ka^{n-k}b^{k+1}+(n-1)ab^n+nb^{n+1}\\
=\ &a^{n+1}-(n+1)ab^n+nb^{n+1}+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)a^{n-k+1}b^k-\sum_{k=2}^{n-1}2ka^{n-k+1}b^k+\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)a^{n-k+1}b^k
\end{aligned}$$

$$= a^{n+1} - (n+1)\,ab^n + nb^{n+1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left((k+1)\,a^{n-k+1}b^k - 2ka^{n-k+1}b^k + (k-1)\,a^{n-k+1}b^k \right)$$

$$= a^{n+1} - (n+1)\,ab^n + nb^{n+1},$$

于是恒等式得证。 □

后来发现其实从左边入手更简单，过程如下：

证法二　令 $a = tb$，则恒等式等价于

$$t^{n+1} - (n+1)t + n = (t-1)^2(t^{n-1} + 2t^{n-2} + 3t^{n-3} + \cdots + n),$$

左边化简如下

$$\begin{aligned} t^{n+1} - (n+1)t + n &= t(t^n - 1) + n(1-t) \\ &= t(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + 1) + n(1-t) \\ &= (t-1)(t^n + t^{n-1} + \cdots + t - n) \\ &= (t-1)(t^n - 1 + t^{n-1} - 1 + \cdots + t - 1) \\ &= (t-1)\left((t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + 1) + (t-1)(t^{n-2} + t^{n-3} + \cdots + 1) + \cdots + t - 1 \right) \\ &= (t-1)^2(t^{n-1} + 2t^{n-2} + 3t^{n-3} + \cdots + n), \end{aligned}$$

于是恒等式得证。 □

再试试两边一起来，用积分：

证法三　令 $a = tb$，若 $t = 1$ 则等式显然成立，当 $t \neq 1$ 时恒等式等价于

$$\frac{t^{n+1} - (n+1)t + n}{(t-1)^2} = t^{n-1} + 2t^{n-2} + 3t^{n-3} + \cdots + n,$$

两边减去 $(n+1)\dfrac{t^n - 1}{t-1}$ 可整理为

$$\frac{(n+1)t^n(t-1) - (t^{n+1} - 1)}{(t-1)^2} = nt^{n-1} + (n-1)t^{n-2} + \cdots + 1,$$

注意到

$$\int \frac{(n+1)t^n(t-1) - (t^{n+1} - 1)}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{t^{n+1} - 1}{t-1} + C_1,$$

且

$$\int \left(nt^{n-1} + (n-1)t^{n-2} + \cdots + 1 \right) \mathrm{d}\,t = t^n + t^{n-1} + \cdots + t + C_2 = \frac{t^{n+1} - 1}{t-1} + C_2 - 1,$$

由此可见恒等式成立。 □

由定理 3.1.1 即得最开始提及的简单不等式的 n 次简单推广，即

$$\frac{a^{n+1}}{b^n} + \frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{c^{n+1}}{a^n} \geq a + b + c$$

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立。

然后我再进一步思考，考虑

$$f(n)=\frac{a^{n+1}}{b^n}+\frac{b^{n+1}}{c^n}+\frac{c^{n+1}}{a^n}\quad (n\in\mathbb{N}^+)$$

的单调性。事实上，由定理 3.1.1，是容易决解此问题的。具体地，我们有

$$\begin{aligned}
f(n+1)-f(n)&=\sum\left(\frac{a^{n+2}}{b^{n+1}}-(n+2)\,a+(n+1)\,b\right)-\sum\left(\frac{a^{n+1}}{b^n}-(n+1)\,a+nb\right)\\
&=\sum\frac{(a-b)^2\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka^{n+1-k}b^{k-1}}{b^{n+1}}-\sum\frac{(a-b)^2\sum\limits_{k=1}^{n}ka^{n-k}b^{k-1}}{b^n}\\
&=\sum\frac{(a-b)^2\left(a^n+\sum\limits_{k=1}^{n}\left((k+1)\,a^{n-k}b^k-ka^{n-k}b^k\right)\right)}{b^{n+1}}\\
&=\sum\frac{(a-b)^2\left(a^n+\sum\limits_{k=1}^{n}a^{n-k}b^k\right)}{b^{n+1}}\\
&=\sum\frac{(a-b)^2\sum\limits_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k}{b^{n+1}}\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

由此可见 $f(n)$ 关于正整数 n 是递增的，除非 a,b,c 相等时 $f(n)$ 为恒值。由此可得

$$a+b+c\leq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\leq\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\leq\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\leq\cdots$$

以上解决了次数为正整数的三元情形，而我证完之后立即发现其方法能推广到多元，即如下定理。

定理 3.1.2. 设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,m,m\in\mathbb{N}^+$，$a_{m+1}=a_1$，记

$$g(n)=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k^{n+1}}{a_{k+1}^n}\quad (n\in\mathbb{N}^+),$$

则 $g(n)$ 关于正整数 n 是递增的，除非 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 都相等时 $g(n)$ 为恒值。

由于用证三元时的方法完全照搬即可证上述定理，这里就不再详写了。

继续思考一般化的思路，承接元数的一般化，应该轮到次数一般化了，前面研究的都是正整数次数，接下来继续扩展到实数次数的情况。

回忆起在 `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=51&t=361993` 一贴中所得到的一个不等式，发现与本文中所研究的问题有莫大关联，下面先将在该贴中得到的不等式引入。

定理 3.1.3. 设 $a_i,b_i>0,i=1,2,\cdots,m,m\in\mathbb{N}^+$，$\alpha,\beta,r,s\in\mathbb{R}$，则对任意的 $t\in[0,1]$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^\alpha}{b_i^r}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^\beta}{b_i^s}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{t\alpha+(1-t)\beta}}{b_i^{tr+(1-t)s}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{(1-t)\alpha+t\beta}}{b_i^{(1-t)r+ts}}\right)。\tag{3.1.4}$$

我们用 Hölder 不等式来证明此定理。

证明 由 Hölder 不等式，有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^\alpha}{b_i^r}\right)^t\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^\beta}{b_i^s}\right)^{1-t}\geq\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{t\alpha+(1-t)\beta}}{b_i^{tr+(1-t)s}},\tag{3.1.5}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{\alpha}}{b_i^{r}}\right)^{1-t}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{\beta}}{b_i^{s}}\right)^{t}\geq\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{(1-t)\alpha+t\beta}}{b_i^{(1-t)r+ts}},\tag{3.1.6}$$

两式相乘即得式 (3.1.4)。 □

定理 3.1.3 表明，当两组相同项数的和式相乘时，保持指数和不变，则指数越接近时乘积越小，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时右边最小，此时正相当于柯西不等式。此性质可以归结为几何凸性。

由此即可对定理 3.1.2 中的 $g(n)$ 给出另一种性质

$$g(0)g(2n)\geq g(1)g(2n-1)\geq\cdots\geq\big(g(n)\big)^2,$$

并且 n 也不必限为正整数，左边还可以往负数扩展。

下面再由定理 3.1.3 导出另一个形式极好的不等式。设 $p,q\geq 0$，在定理 3.1.3 中，取 $\alpha=0,\ \beta=p+q,\ r=-q,\ s=p,\ t=\dfrac{p}{p+q}$ 代入整理可得：

推论 3.1.3.1. 设 $a_i,b_i>0,i=1,2,\cdots,m,m\in\mathbb{N}^+$，$p,q\geq 0$，则有

$$\frac{a_1^{p+q}}{b_1^p}+\frac{a_2^{p+q}}{b_2^p}+\cdots+\frac{a_m^{p+q}}{b_m^p}\geq\frac{a_1^q+a_2^q+\cdots+a_m^q}{b_1^q+b_2^q+\cdots+b_m^q}\cdot\left(\frac{a_1^p}{b_1^{p-q}}+\frac{a_2^p}{b_2^{p-q}}+\cdots+\frac{a_m^p}{b_m^{p-q}}\right)。\tag{3.1.7}$$

在推论 3.1.3.1 中，取 $b_1=a_2,b_2=a_3,\cdots,b_{m-1}=a_m,b_m=a_1$ 则得

$$\frac{a_1^{p+q}}{a_2^p}+\frac{a_2^{p+q}}{a_3^p}+\cdots+\frac{a_m^{p+q}}{a_1^p}\geq\frac{a_1^p}{a_2^{p-q}}+\frac{a_2^p}{a_3^{p-q}}+\cdots+\frac{a_m^p}{a_1^{p-q}}。\tag{3.1.8}$$

前面的定理 3.1.2 正是式 (3.1.8) 中当 $q=1,p\in\mathbb{N}^+$ 的特例，可见式 (3.1.8) 比定理 3.1.2 更进了一步。

然而，尽管式 (3.1.8) 已初步将指数向实数化推广了，但是还没能给出任意次数的单调性质，下面动用导数的方法去寻找更一般化的单调性。

设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,m,m\in\mathbb{N}^+$，$a_{m+1}=a_1$，$q$ 为给定正实数，记

$$h(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{q+x}}{a_{i+1}^x}-\sum_{i=1}^{m}a_i^q,$$

若所有的 a_i 都相等，显然函数为常数函数，没什么研究意义，所以这里假定 a_i 不全相等。

为研究 $h(x)$ 的性质，我们先求一下 $h(x)$ 的任意阶导数，有

$$h'(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{q+x}}{a_{i+1}^x}(\ln a_i-\ln a_{i+1}),$$

$$h''(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{q+x}}{a_{i+1}^x}(\ln a_i-\ln a_{i+1})^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$h^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{q+x}}{a_{i+1}^x}(\ln a_i-\ln a_{i+1})^n,$$

可以看到 $h^{(2k)}(x)>0\ \big(k\in\mathbb{N}^+\big)$，所以 $h(x)$ 是严格下凸函数，并且易知

$$h(0)=h(-q)=0,$$

由罗尔定理可知存在 $x_0\in(-q,0)$ 使得 $h'(x_0)=0$，故此得到

（1）当 $x<x_0$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 递减；当 $x>x_0$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 递增；

（2）$h(x)\geq 0\iff x\in(-\infty,-q]\bigcup[0,+\infty)$；$h(x)<0\iff x\in(-q,0)$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=+\infty$。

这样，指数为实数范围上的问题就基本得到了解决，只是极值点 x_0 以及最小值 $h(x_0)$ 未能求出具体解析式，仍然有待研究。

3.2 二次根式开方的化简——何万程

若 $\sqrt[n]{a+b\sqrt{k}}$ 能化简，则必然有 $a+b\sqrt{n}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)^n$ 或 $a+b\sqrt{n}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)^n\sqrt{k}$，$t$ 是有理数，x、y 是整数。以下 $[m]$ 表示不超过 m 的最大整数。

若 $a+b\sqrt{n}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)^n$，则得

$$\begin{cases} t\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i k^i x^{n-2i} y^{2i}=a, & (3.2.1)\\ t\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i k^i x^{n-2i-1} y^{2i+1}=b。 & (3.2.2)\end{cases}$$

两方程相除，化简，得

$$b\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i k^i \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2i}-a\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i k^i \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2i-1}=0,$$

即方程

$$b\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i k^i u^{n-2i}-a\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i k^i u^{n-2i-1}=0$$

必定有有理数解，设这个有理数解是 $\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$ 是既约分数），令 $x=p$，$y=q$，代入 (3.2.1) 或 (3.2.2) 其中之一中便可求得 k 的值，此时就有

$$\sqrt[n]{a+b\sqrt{k}}=\begin{cases}\left(p+q\sqrt{k}\right)\sqrt[n]{t} & n\text{ 是奇数，}\\ \left|p+q\sqrt{k}\right|\sqrt[n]{t} & n\text{ 是偶数。}\end{cases}$$

若 $a+b\sqrt{n}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)^n\sqrt{k}$。则当 n 是奇数时若满足 $a+b\sqrt{n}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)^n$ 时必然满足前面所述的式子，这是因为 $\left(x+y\sqrt{k}\right)^n=\dfrac{\left(yk+x\sqrt{k}\right)^n\sqrt{k}}{k^{\frac{n+1}{2}}}$，所以对 n 是奇数时仅需讨论上面的情况即可。当 n 是偶数时则得

$$\begin{cases} t\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i k^i x^{n-2i} y^{2i}=b, & (3.2.3)\\ t\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i k^{i+1} x^{n-2i-1} y^{2i+1}=a。 & (3.2.4)\end{cases}$$

两方程相除，化简，得

$$a\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i k^i \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2i}-b\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i k^{i+1} \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2i-1}=0,$$

即方程

$$a\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i k^i u^{n-2i}-b\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i k^{i+1} u^{n-2i-1}=0$$

必定有有理数解，设这个有理数解是 $\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$ 是既约分数），令 $x=p$，$y=q$，代入 (3.2.3) 或 (3.2.4) 其中之一中便可求得 k 的值，此时就有

$$\sqrt[n]{a+b\sqrt{k}}=\left|p+q\sqrt{k}\right|\sqrt[n]{t\sqrt{k}}\quad n\text{ 是偶数。}$$

若不满足上述要求，则 $\sqrt[n]{a+b\sqrt{k}}$ 写成 $\left(x+y\sqrt{k}\right)\sqrt[n]{t}$ 或 $\left(x+y\sqrt{k}\right)\sqrt[n]{t\sqrt{k}}$ 的形式比 $\sqrt[n]{a+b\sqrt{k}}$ 复杂得多，并没达到化简得目的。

下面讨论 $\sqrt{a+b\sqrt{k}}$ 能化简得情形。由上面的讨论知，若 $\sqrt{a+b\sqrt{k}}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)$，必然 $bu^2-2au+bk=0$ 有有理数解，于是其判别式必然为完全平方数，即 $a^2-b^2k=v^2$（v 是正整数），此时 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a\pm v}{b}$，令 $x=a+v$，$y=b$，则 $t=\dfrac{a-v}{2b^2k}$，由此得

$$\sqrt{a+b\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{a+v}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-v}{2}}。$$

类似上面的讨论，得若 $\sqrt{a+b\sqrt{k}}=t\left(x+y\sqrt{k}\right)\sqrt{k}$，则必然 $-a^2+b^2k=v^2k$（v 是正整数），并得

$$\sqrt{a+b\sqrt{k}}=\left(\sqrt{\frac{b+v}{2}}\pm\sqrt{\frac{b-v}{2}}\right)\sqrt[4]{k}。$$

以上两个 $\pm$ 号选取与 ab 同号的那个符号。

例 3.2.1. 化简

（1）$\sqrt{2+\sqrt{3}}$；

（2）$\sqrt{5-\sqrt{21}}$；

（3）$\sqrt{-12+11\sqrt{2}}$。

解 （1）$2^2-1^2\times 3=1^2$，所以

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}。$$

（2）$5^2-1^2\times 21=2^2$，所以

$$\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{5+2}{2}}-\sqrt{\frac{5-2}{2}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}。$$

（2）$-12^2+11^2\times 2=7^2\times 2$，所以

$$\sqrt{-12+11\sqrt{2}}=\left(\sqrt{\frac{11+7}{2}}-\sqrt{\frac{11-7}{2}}\right)\sqrt[4]{2}=3\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}。$$ □

例 3.2.2. 化简 $\sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}$。

解 设 $10-7\sqrt{2}=t\left(x+y\sqrt{2}\right)^3$（$t$ 是有理数，x、y 是整数），于是得

$$\begin{cases} t\left(x^3+6xy^2\right)=10, \\ t\left(3x^2y+2y^3\right)=-7, \end{cases}$$

两方程相除，化简，得

$$7\left(\frac{x}{y}\right)^3+30\left(\frac{x}{y}\right)^2+42\cdot\frac{x}{y}+20=0,$$

方程

$$7u^3+30u^2+42u+20=0$$

仅有一个有理数解 $u=-2$，令 $x=2$，$y=-1$，代入 $t\left(x^3+6xy^2\right)=10$ 中求得 $t=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[6]{2}。$$ □

若 a、b、ab 都是非完全平方数的正整数，则 $\sqrt[n]{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a\pm\sqrt{ab}}}{\sqrt[2n]{a}}$，$\sqrt[n]{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 是否能化简就转化成上面的问题了。

若 a、b 都是非完全平方数的正整数，对 $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\pm\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 有

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\pm\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}&=\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\pm\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2}\\&=\sqrt{2\sqrt{a}\pm2\sqrt{a-b}},\end{aligned}$$

对于 $\sqrt{2\sqrt{a}\pm2\sqrt{a-b}}$ 是否能继续化简，则可转换成上面的情形了。

若 a、b 都是非完全平方数的正整数，令 $x=\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$，则有

$$x^3=3\sqrt[3]{a-b}x+2\sqrt{a},$$

令 $x=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a-b}}y$，则得

$$ay^3-3\left(a-b\right)y-2(a-b)=0,$$

这个方程仅有一个实数解，若有有理数解，设置为 $y=u$，则 $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 将能化简成 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a-b}}u$；若无有理数解，则 $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 不能化简。

例 3.2.3. 化简 $\sqrt[3]{189+25\sqrt{57}}+\sqrt[3]{189-25\sqrt{57}}$。

解 令 $x=\sqrt[3]{189+25\sqrt{57}}+\sqrt[3]{189-25\sqrt{57}}$，则

$$x^3=6\sqrt[3]{12}x+378,$$

令 $x=\dfrac{y}{\sqrt[3]{12}}$，代入上面的方程，化简得

$$y^3-72y-4536=0,$$

该方程只有一个实数根 $y=18$，所以

$$\sqrt[3]{189+25\sqrt{57}}+\sqrt[3]{189-25\sqrt{57}}=\frac{18}{\sqrt[3]{12}}=3\sqrt[3]{18}。$$ □

3.3 中心对称、轴对称的计算，一元多项式函数的对称性——何万程

中心对称、轴对称的计算

定理 3.3.1. 求点 $P(x_0, y_0)$ 关于点 (p, q) 的对称点 Q 的坐标是 $(2p - x_0, 2q - y_0)$。

定理 3.3.1 的证明留给读者自行完成。

定理 3.3.2. 求点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $Ax + By + C = 0$ 的对称点 Q 的坐标是

$$\left(x_0 - \frac{2A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}, y_0 - \frac{2B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}\right)。$$

证明 设点 Q 的坐标是 (x_1, y_1)，直线 PQ 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}t, \\ y = y_0 + \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}t, \end{cases}$$

其中 t 是直线 PQ 上的到点 P 的有向距离。把 $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}t, \\ y = y_0 + \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}t, \end{cases}$ 代入 $Ax + By + C = 0$，得到线 $Ax + By + C = 0$ 与直线 PQ 的交点的参数 t 是

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

所以点 Q 的参数 t 是

$$t = -\frac{2(Ax_0 + By_0 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

因此点 Q 的坐标是

$$\left(x_0 - \frac{2A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}, y_0 - \frac{2B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}\right)。$$

□

一元多项式函数的对称性

常数函数和一次函数的图象必定既是中心对称图形也是轴对称图形，这个很容易由直线的性质得到。下面只讨论次数比一大的一元多项式函数的图形的对称性。

定理 3.3.3. 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，$n \geq 2$，$f(x) = g(x - a) + b$。其中 $g(x)$ 是一个 n 次多项式，并且 $n - 1$ 次项系数和常数项都是 0。那么

（1）如果 n 是奇数，并且 $g(x)$ 的偶数次项系数都是 0，那么函数 $y = f(x)$ 的图象是中心对称图形但不是轴对称图形，并且对称中心是 (a, b);

（2）如果 n 是偶数，并且 $g(x)$ 的奇数次项系数都是 0，那么函数 $y = f(x)$ 的图象是轴对称图形但不是中心对称图形，并且对称轴是 $x = a$;

（3）不满足（1）、（2）的条件时，函数 $y = f(x)$ 的图象既不是中心对称图形也不是轴对称图形。

证明 中心对称情形:

如果函数 $y = f(x)$ 的图象是中心对称图形，并且对称中心是 (x_0, y_0)，那么 $y = 2y_0 - f(2x_0 - x)$ 的图象与 $y = f(x)$ 的图象重合，即 $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$ 对任意实数 x 都成立。若 $f(x)$ 的 n 次项系数是 a_0，那

么 $2y_0 - f(2x_0 - x)$ 的 n 次项系数是 $(-1)^{n+1} a_0$，所以 n 是偶数时函数 $y = f(x)$ 的图象必定不是中心对称图形。

当 n 是奇数时，则函数 $y = f(x)$ 的图象是函数 $y = g(x)$ 的图象经过平移得到的，所以只需要讨论函数 $y = g(x)$ 的图象的对称性。如果此时函数 $y = g(x)$ 的图象是中心对称图形，并且对称中心是 (x_0, y_0)，因此 $g(x) = 2y_0 - g(2x_0 - x)$ 对任意实数 x 都成立。而 $2y_0 - g(2x_0 - x)$ 的 n 次项系数是 $-2x_0$，所以如果 $y = g(x)$ 的图象是中心对称图形，必须 $x_0 = 0$。此时 $g(x) = 2y_0 - g(-x)$ 对任意实数 x 都成立，于是得 $g(x)$ 的偶数次项系数都是 0，并且 $y_0 = 0$，也就是说对称中心是 $(0,0)$，再由图形平移得到 $y = f(x)$ 的图象的对称中心是 (a,b)。

轴对称情形：

如果 $y = f(x)$ 的图象是轴对称图形，并且对称轴是 $Ax + By + C = 0$，其中 A 、B 不全是 0，那么对任意实数 x 必然有 $y - 2Bu(x,y) = f(x - 2Au(x,y))$ 其中 $u(x,y) = \dfrac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$。因为 $y - 2Bu(x,y) = f(x - 2Au(x,y))$ 的图象与 $y = f(x)$ 的图象重合，所以 $y - 2Bu(x,y) = f(x - 2Au(x,y))$ 中的 y 也对任意实数 x 必定满足 $y = f(x)$。若 $f(x)$ 的 n 次项系数是 a_0，那么 $f(x - 2Au(x,y)) - (f(x) - 2Bu(x,y)) = 0$ 对任意实数 x 都成立，即 x 的任意非负整数次项系数都是 0，而 $f(x - 2Au(x,y)) - (f(x) - 2Bu(x,y)) = 0$ 的最高次项系数是 $a_0 \left(\dfrac{2ABa_0}{A^2 + B^2}\right)^n$，所以必须 $A = 0$ 或 $B = 0$。但 $A = 0$ 时，因为 $y = f(x)$ 的图象不会与直线 $By + C = 0$ 重合，若点 $(x, f(x))$ 不在直线 $By + C = 0$ 上时，关于直线 $By + C = 0$ 对称的点的 y 坐标也是自变量 x 的函数值，这两个值不相等，这是不可能的，所以 $A = 0$ 是不可能的。

当 $B = 0$ 时，类似中心对称情形中的证明，可得当 n 是奇数时，函数 $y = f(x)$ 的图象不是轴对称图形；当 n 是偶数，并且 $g(x)$ 的奇数次项系数是 0，那么函数 $y = f(x)$ 的图象是轴对称图形但不是中心对称图形，并且对称轴是 $x = a$；当 n 是偶数，并且 $g(x)$ 的奇数次项系数有一个不是 0，那么函数 $y = f(x)$ 的图象不是轴对称图形。

综合以上两种情形，命题就得到证明。 □

推论 3.3.3.1. 一元二次函数的图象必定是轴对称图形，一元三次函数的图象必定是中心对称图形。

推论 3.3.3.2. 如果 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，$n \geq 2$，其 n 次项系数是 a_0，$n-1$ 次项系数是 a_1，则

（1）如果 $y = f(x)$ 的图象是中心对称图形，其对称中心是 $\left(-\dfrac{a_1}{na_0}, f\left(-\dfrac{a_1}{na_0}\right)\right)$；

（2）如果 $y = f(x)$ 的图象是轴对称图形，其对称轴是 $x = -\dfrac{a_1}{na_0}$。

朝花夕拾

4.1 牛顿对三次曲线的分类——何万程

在牛顿之前，也没有人能够像把非退化二次曲线分成椭圆、双曲线与抛物线那样对三次曲线分类。牛顿从 1664 年起试图追随笛卡儿按方程次数对曲线分类的思路来解决这一课题。1667–1668 年和 1678–1679 年间，他又两度回到高次曲线的研究并获重大进展。但如其一贯所为，牛顿迟疑于结果的发表，直到 1695 年，他才将以前的结果总结成专论《三次曲线枚举》（Enumeratio linearum tertii ordinis）并作为《光学》的附录发表（1704）。

《三次曲线枚举》首先根据平面曲线与直线相交所产生的交点数来定义曲线的阶，同时指出圆锥曲线的许多概念与性质可以被推广至高次曲线。例如牛顿提出了适合高次曲线的一般直径理论（在这理论中 n 次曲线的直径被定义为该曲线与一平行直线簇中每一条的 n 个交点的重心轨迹）和一般渐近线理论等。《三次曲线枚举》的这个引论部分以著名的“牛顿定理”为高潮，牛顿定理相当于说：平面上的点关于一三次曲线的三个纵坐标之积与相应的三横坐标之积保持常数比。

这里并不打算对三次曲线的牛顿分类作详细的介绍，只讨论一下如何从一般方程通过仿射变换转化成牛顿标准方程。

一般三次曲线的方程如下：

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j=0,$$

其中 a、b、c、d 不全为零。下面讨论其通过仿射变换化简的情形。

$b\neq 0$ 或 $d\neq 0$

当 $a+b+c+d\neq 0$ 时，令

$$\begin{cases} x=x_1+py_1, \\ y=x_1+qy_1, \end{cases}$$

则 $x_1^2y_1$ 的系数是 $(3a+2b+c)\,p+(b+2c+3d)\,q$， y_1^3 的系数是 $ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3$，令

$$\begin{cases} (3a+2b+c)\,p+(b+2c+3d)\,q=0, \\ ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=0, \end{cases}$$

该方程组必定有实数解且无 $p=q$ 的解。

当 $a+b+c+d=0$ 且 $b+2c+3d\neq 0$ 时，令

$$\begin{cases} x=px_1+y_1, \\ y=qx_1+y_1, \end{cases}$$

则 $x_1^2y_1$ 的系数是 $-(p-q)\left((2b+3c+3d)\,p+(c+3d)\,q\right)$， y_1^3 的系数是 0。若 $2b+3c+3d$、$c+3d$ 都等于 0，则 p、q 任取两个不同的实数即可；若 $2b+3c+3d$、$c+3d$ 不全等于 0，则取 $p:q=-(c+3d):(2b+3c+3d)$，此时必定存在 p、q 都是实数的解，且 $p\neq q$。

当 $a+b+c+d=0$ 且 $b+2c+3d=0$ 时，此时有 $a=-b-c-d$，$b=-2c-3d$，且

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=(x-y)^2\left((c+2d)\,x+dy\right)。$$

因为此时 c、d 不能同时为 0（否则将有 $a=b=c=d=0$），当 $c+3d\neq 0$ 时，令

$$\begin{cases} x-y=y_1, \\ (c+2d)\,x+dy=x_1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + dy_1}{c + 3d}, \\ y = \dfrac{x_1 - (c + 2d)\, y_1}{c + 3d}; \end{cases}$$

当 $c + 3d = 0$ 时，

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = -d\,(x - y)^3 \text{。}$$

令

$$\begin{cases} x_1 = x - y, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = x_1 + y_1, \\ y = y_1\text{。} \end{cases}$$

由此可得，此时 $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$ 通过仿射变换，一定能变成 $a_1x^3 + c_1xy^2 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 + h_1x + i_1y + j_1 = 0$。

若 $c_1 \neq 0$，则令 $x_1 = c_1x + g_1$，即 $x = \dfrac{x_1 - g_1}{c_1}$，此时 $a_1x^3 + c_1xy^2 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 + h_1x + i_1y + j_1 = 0$ 变为 $a_1'x_1^3 + x_1y^2 + e_1'x_1^2 + f_1'x_1y + h_1'x_1 + i_1'y + j_1' = 0$。若 $f_1' \neq 0$，则令 $y = y_1 - \dfrac{f_1'}{2}$，此时 $a_1'x_1^3 + x_1y^2 + e_1'x_1^2 + f_1'x_1y + h_1'x_1 + i_1'y + j_1' = 0$ 变为 $a_1''x_1^3 + x_1y_1^2 + e_1''x_1^2 + h_1''x_1 + i_1''y_1 + j_1'' = 0$。

若 $c_1 = 0$，则变为 $b_1 = c_1 = d_1 = 0$ 的情形。

$b = c = d = 0$，$f \neq 0$ 或 $g \neq 0$

当 $g \neq 0$ 时，令 $y = -\dfrac{f}{2g}x + y_1$，则 $ax^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$ 变为 $a'x^3 + e'x^2 + gy_1^2 + h'x + i'y_1 + j' = 0$。若 $i' \neq 0$，再令 $y_1 = y_2 - \dfrac{i'}{2g}$，则 $a'x^3 + e'x^2 + gy_1^2 + h'x + i'y_1 + j_1 = 0$ 变为 $a''x^3 + e''x^2 + gy_2^2 + h''x + j'' = 0$。

当 $f \neq 0$，$g = 0$ 时，令 $x = -\dfrac{i}{f}x_1$，则 $ax^3 + ex^2 + fxy + hx + iy + j = 0$ 变为 $a'x_1^3 + e'x_1^2 + fx_1y + h'x_1 + i'y + j' = 0$。

由此可知，此时方程一定能变为 $a_1x^3 + e_1x^2 + g_1y^2 + h_1x + j_1 = 0$ 或 $a_1x^3 + e_1x^2 + f_1xy + h_1x + j_1 = 0$。

$b = c = d = f = g = 0$，$i \neq 0$

此时方程就是 $ax^3 + ex^2 + hx + iy + j = 0$。

由上面的讨论可知，三次曲线通过仿射变换，必定能变成下面四个标准方程之一：

（A）$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

（B）$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

（C）$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$，

（D）$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$。

三次曲线跟二次曲线有很多不同的地方，这里仅举一个例子：

我们知道没有四点在同一直线上的五个点确定唯一的二次曲线，这是因为一般二次曲线方程 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 有六个系数，其中独立的是五个。这种理解对吗？相信不少人都是这样理解的，但这种理解并不正确，下面的例子我们可以看到一般非退化三次曲线有不能仅用九个点确定：

$$512x^3+576x^2y+216xy^2+27y^3+384x^2-54y^2-2=0,$$

$$144x^2y+144xy^2-144x^2-216xy+72y^2+27x-117y+31=0,$$

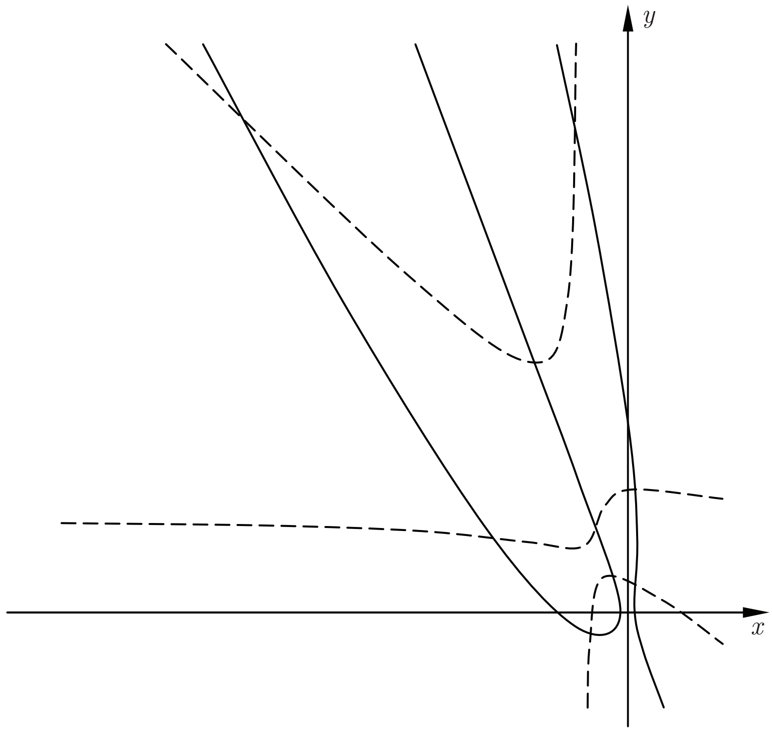


图 4.1.1

图 4.1.1 的实线是三次曲线 $512x^3+576x^2y+216xy^2+27y^3+384x^2-54y^2-2=0$ 的图象，虚线是三次曲线 $144x^2y+144xy^2-144x^2-216xy+72y^2+27x-117y+31=0$ 的图象，这两条三次曲线都是非退化的，它们有九个公共点。

4.2 【封面故事】对数螺线简介——郭子伟

本期封面图来源于如下的经典题目。

题目 4.2.1. 四只小蜗牛所在的位置成一个正方形，每一只蜗牛同时向逆时针方向的相邻的蜗牛出发爬去，并且在爬行过程中每只蜗牛始终保持对准自己的目标且爬行速率不变。求它们的爬行轨迹。

此题的答案是著名的对数螺线。

为什么说它是著名的？因为它不仅有着很多美妙的性质，而且在自然界也普遍存在这种曲线，也有应用。比如：蜗牛壳、螺壳等像对数螺线；菊的种子排列成对数螺线；蜘蛛网的构造与对数螺线相似；旋涡星系的旋臂也类似于对数螺线，等等。而在工业、农业中也有对数螺线的应用，比如：把抽水机的涡轮片的曲面制作成对数螺线的形状，抽水就均匀；把轧刀的刀口弯曲成对数螺线的形状，它就会按特定的角度来切割草料，又快又好，等等。

下面介绍一些对数螺线的基本性质，这些性质可以解释部分以上所列的现象或应用。

对数螺线的表达式

一般对数螺线的极坐标方程为

$$\rho = Ce^{m\theta+b}。 \tag{4.2.1}$$

其中 C, m, b 为常数且 $Cm \neq 0$。

封面图中的四条对数螺线的方程分别为

$$\rho = e^{-\theta+\frac{k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1, 2, 3)。$$

若改题目改成 $n, n \geq 3$ 只蜗牛，那么相应的 n 条对数螺线的方程将会是

$$\rho = e^{\left(\cot\frac{2\pi}{n}-\csc\frac{2\pi}{n}\right)\left(\theta-\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)。$$

对数螺线的等角性

一条对数螺线上的每一点处的切线与其极径（该点与极点的连线）所成的夹角为定值。

证明 设所成夹角为 α，则

$$\tan\alpha = \frac{\rho\,\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,\rho} = \frac{Ce^{m\theta+b}}{mCe^{m\theta+b}} = \frac{1}{m}, \tag{4.2.2}$$

所以 α 为定值。 □

因为此性质，对数螺线也被称为“等角螺线”。

本文开头的题目正可以利用这等角性质得到简单的解法，皆因由对称性可知四只蜗牛总是关于原正方形的中心对称地爬行，而且总是保持着正方形位置，所以任一时刻每只蜗牛的速度方向与其到正方形中心连线的夹角总是成 $45°$，如图 4.2.1 所示。

又因为速度方向也是轨迹上的切线方向，也即在轨迹上的任一切线与切点到正方形中心连线的夹角都成 $45°$，故此由上述等角性可知所求轨迹就是对数螺线。

此外，由速度恒定，可知每只蜗牛的速度对正方形中心的分量大小也总是相等的，所以可以求出四只蜗牛由出发到相遇[1]所用的时间和路程。更多关于此题的讨论见 `http://bbs.pep.com.cn/thread-991116-1-1.html`。

[1]当看成质点时，即理想状态下的相遇，是当 $\theta \to +\infty$ 时相遇于极点

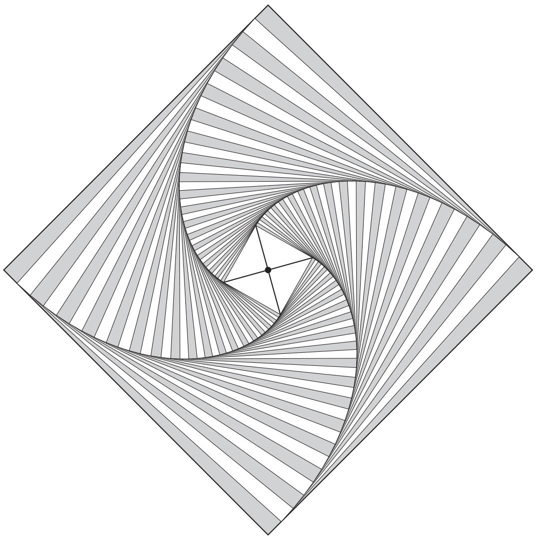


图 4.2.1

对数螺线的自相似性

对数螺线是自相似的，即对数螺线经任意放大或缩小后与原图完全相同。

证明 设将对数螺线 $\rho = Ce^{m\theta+b}$ 的图象放缩 k 倍到 $\rho = kCe^{m\theta+b}$，其中 k 为任意正数，然而

$$\rho = kCe^{m\theta+b} = Ce^{\ln k+m\theta+b} = Ce^{m\left(\theta+\frac{\ln k}{m}\right)+b},$$

可见通过对原对数螺线旋转 $\dfrac{\ln k}{m}$ 角即可得到放大或缩小后的对数螺线，从而得证。 □

这个性质表明，将对数螺线旋转时，可以产生放大或缩小的视觉效果，点击此链接 http://bbs.pep.com.cn/attachments/month_1109/20110902_9a6e985a4af4cad07da0WjvaZdjrhNzg.gif 可观看效果。

对数螺线的有限长度与无限转角

从对数螺线上的任意一点沿对数螺线往极点方向的线长有限，但已绕极点转过无限次。

证明 由自相似性，我们只需考虑 $\rho = e^{m\theta}$ 的对数螺线。又由于当 $\rho = e^{m\theta}$ 与 $\rho = e^{-m\theta}$ 只是图象反了过来，但形状是一样的，故此不妨设 $m < 0$。

此时要到极点，需要 $\theta \to +\infty$，可见转过无限次。线长方面，设从 $\theta = \theta_0$ 上的点出发，则线长为

$$\int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\,\theta = \int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{\left(e^{m\theta}\right)^2 + \left(me^{m\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\,\theta = \sqrt{1+m^2}\int_{\theta_0}^{+\infty} e^{m\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \sqrt{1+m^2}\cdot\frac{e^{m\theta_0}}{-m},$$

可见为有限值。 □

关于对数螺线的基本性质就暂时介绍到这里，更多其他性质大家可以自己研究或查阅相关文献。