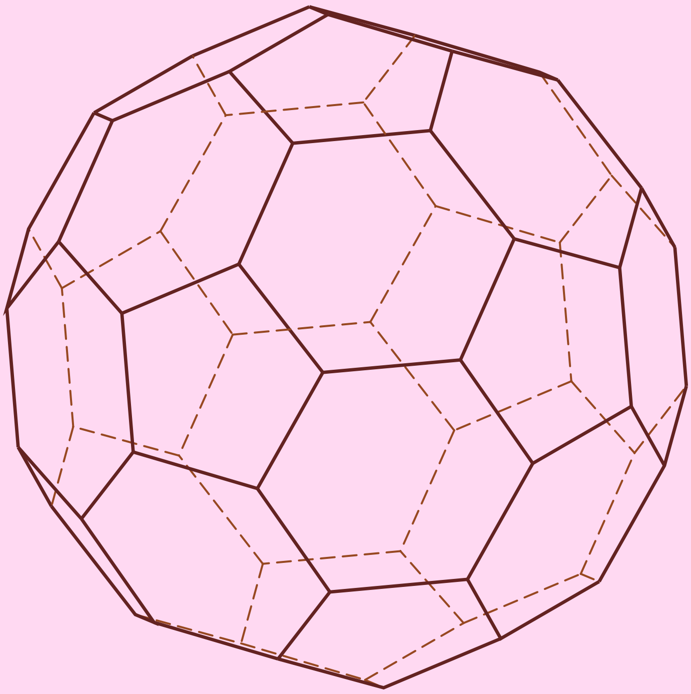
数学空间——人教数学网刊

高中数学

2011 年第 2 期



目录

1　入门篇

1.1　《智慧宝典》第三回　问路函谷关　智慧救迷糊——陈海峰

话说小豪与小英往函谷关方向奔来，到了一个岔路口，两个初次下山，不知要往哪条路走，正在焦急之际，只听“迷糊、迷糊，真迷糊……”，小豪一看，这个老人有些疯癫，不想理他，不料小英却突然手出如电，点中“迷糊”的穴位。小豪正待不解，只听老人“啊”的一声，双眼一亮，似乎清醒过来。

小豪从老人口中得知，他的名字叫“迷糊”。老人说，它被一题目所困，不能自拔，因而神智不清，所以大家就叫他“迷湖”，此时小豪雄心又起，什么题目害了你老人家，请细细说来。只见老人写道：

（1）已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,4]$，求函数 $f(x^2)$ 的定义域。

（2）已知函数 $f(x^2)$ 的定义域是 $[0,4]$，求函数 $f(x)$ 的定义域。

小豪与小英看了题目，心中窃喜，因为恩师正好指点过破敌招数，小豪拿起“奎星笔”，边写边对老人说道：“首先要明确一点的是，不论是求原函数或者是复合函数的定义域都是求自变量 x 的取值范围，而不是求中间变量的取值范围。”老人点头称是，只见小豪又写道：

解　第一问的先知道函数的定义域，然后要求复合函数的定义域，可这样来理解。因为这边都是 x，不利于区分，所以先使用换元，将 $f(x)$ 中的 x 换成 t，注意已知条件的定义域 $[0,4]$ 是中间那个集合哦！（见图 1.1.1）而 $f(x^2)$ 的定义域则是最左边的那个集合即 $[-2,2]$。

第二问正好相反。注意此时复合函数的定义域是最左边的那个集合哦！（见图 1.1.2）而要求的那个 $f(x)$ 的定义域就是中间那个集合了。为了避免混淆，我们要将之换为 t，可见 $t\in[0,16]$，即函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,16]$。 □

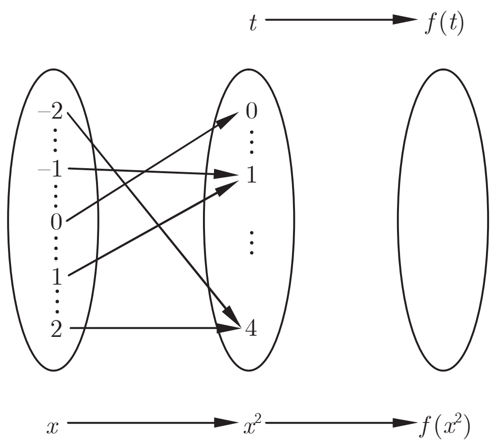


图 1.1.1

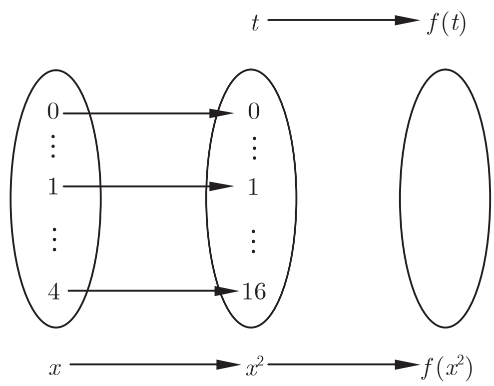


图 1.1.2

小英见小豪说得差不多了，接着说到，老人家，以后对于这种题型，可以用这样的“口诀”：一般地，如果函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，则 $f(g(x))$ 的定义域就是 $g(x)\in[a,b]$ 所组成的集合。就是解不等式 $a\le g(x)\le b$ 中 x 的取值范围；如果函数 $f(g(x))$ 的定义域是 $[a,b]$，则 $f(x)$ 的定义域就是 $x\in[a,b]$ 时 $g(x)$ 的相应值域。“迷糊”老人喜不自胜，如获至宝，瞬时觉得全身透体清爽。

问明来意后，“迷湖”知道他们迷路了，遂指明了道路。两人谢过之后，又疾速前往。

两个小英雄能否到达函谷关，请听下回分解。

1.2 《智慧宝典》第四回　池潭遇凶险　分步巧通关——陈海峰

话说小豪与小英听了迷糊老人的指点，马不停蹄往函谷关奔来．忽然路由窄变宽，赫然出现一个池潭，只见上面有一个个浮桩，清风吹过，浮桩微微摇动。兄妹俩明白此处一定藏有某些玄机。

兄妹俩合计，先由小豪走在前面，如果谁出现险情，小英迅速采取行动，争取等一时间排除险情，将对方救出。小豪开始用脚踩上第一个桩，只见有个大桩浮现上来了。小豪仔细一看，上面写了一些字：欢迎你到了“万陷潭”，务必小心过关，每个桩下沉的速度只有一分钟，请你仔细分辨。如果脚踩对了，那些桩就是实了，尽管走过就是了，否则……

只见下面出现如下问题：

例 1.2.1. 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ 是（　）

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 既是奇函数又是偶函数

小豪见过之后，拿起奎星笔，脚踩过 B 号桩，只见他刚踩下，觉得身体正在下降，大叫不好。小英正好跟着，运起轻功将师兄提起，越到了 D 号桩。只见桩牢靠如山，只听小英说：“刚刚你不敢踩 D，是何原因？”

小豪道：“我开始有一种感觉，哪有既是奇函数又是偶函数的呀，这不是互相矛盾了吗？”

小英说：“师傅不是告诉我们，判断是奇函数或偶函数的前提条件是什么？”

小豪答：“定义域关于原点对称！”

小英说：“没错哦。定义域是 $x\in\{-1,1\}$，显然它们关于原点对称，在图象上是两个点，就是 $(1,0)$，$(-1,0)$ 这两个点，它们既关于 y 轴对称，又关于原点对称，所以它既是奇函数又是偶函数。如果我们用定义证明，可得 $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}+\sqrt{(-x)^2-1}=f(x)$，这个说明是偶函数，而根据函数的定义域 $x\in\{-1,1\}$，此时的值域是 0，故有 $f(-x)=f(x)$ 是显然两个也都符合的。”

小豪尴尬地说：“其实这个我也清楚的，可能受中文影响吧，所以就踩了 B 号桩了，下次还得当心哦，我想沉入该潭的人肯定和我犯同样的毛病吧。”

他们两人也不敢怠慢，迅速地开始寻找一下个实桩，这时又有一个巨桩浮了上来，只见又写了一题：

例 1.2.2. 函数 $f(x)=f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ 是（　）

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 既是奇函数又是偶函数

还是小豪抢在前头，踩下了 C 号桩，只见桩纹丝不动，显然是对了。

小英笑道：“有何体会？”

小豪说：“这个就容易些了。很明显定义域关于原点是不对称的，如果将此时的点描出来，在图象上就是 $(1,0)$。”

小英说道：“正是，所以我们判断是奇函数或是偶函数一要先看前提条件是否定义域关于原点对称是否满足，然后才是根据定义来判断，当然也可借助函数的图象来判断更加直观些！”

只见此后浮现的桩都是实的，他们也觉得心中之石放了很多，跳过最后一桩，说来神奇，那桩自动将人送到岸边。小豪豪心又起，拿起奎星笔在路旁石头上书——小豪、小英到此一游。谁知这一写，又惹恼了一个人，……

欲知后事如何？请听下回分解。

2 高考篇

2.1 高考常考题型分类总结（导数二）——吴剑

题型三、函数图象交点个数问题

例 2.1.1. 已知函数 $f(x)=16\ln(1+x)+x^2$ 与 $g(x)=10x+b$ 的图象有三个不同的交点，求 b 的取值范围。

解 $f(x),g(x)$ 图象要有 3 个公共点，即 $16\ln(1+x)+x^2=10x+b$ 有 3 个不同的解，即 $16\ln(1+x)+x^2-10x=b$ 有 3 个不同的解。

设 $h(x)=16\ln(1+x)+x^2-10x$，则

$$h'(x)=\frac{16}{x+1}+2x-10=\frac{2\left(x^2-4x+3\right)}{1+x}。$$

当 $x\in(-1,1)\bigcup(3,+\infty)$ 时 $h'(x)>0$，当 $x\in(1,3)$ 时 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 的单调增区间是 $(-1,1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调减区间是 $(1,3)$，所以 $h(x)$ 的极大值为 $h(1)=16\ln 2-9$，极小值为 $h(3)=32\ln 2-21$。

又当 $x\to -1$ 时 $h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时 $h(x)\to+\infty$，故可得到 $h(x)$ 的草图，如图 2.1.1。

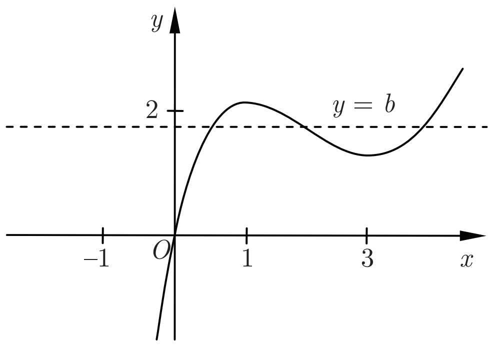


图 2.1.1

由题意可得，方程要有 3 个不同的解，也就是要求 $h(x)$ 的图象与 $y=b$ 要有 3 个不同交点，图中可得 b 的取值范围应该介于两极值之间，故 $b\in(32\ln 2-21,16\ln 2-9)$。 □

评注：此题可能会有同学按照题目意思直接先求导得到 $f(x)$ 的草图，再利用直线 $g(x)=10x+b$ 平行移动去看与 $f(x)$ 图象的极限位置，由于我们得到的只是 $f(x)$ 的草图，所以并不能够精确地反映出什么时候可以交 3 个点。

而解法中也是利用图象，但是先利用方程思想变成一个方程解的个数问题，然后再将方程进行同解变形，最后再转变为两个图象交点个数的问题。只是直线变成一条与 x 轴平行的动直线 $y=b$，这样再看交点情况只要有 $h(x)$ 的单调性极值的情况，而不需要精确的图象。

然而要实现这一步，需要先将参数分离到方程的一边，另一边构成一个不含参数的函数。

另外，注意到那两个极限的说明很有必要，这样才能够体现出函数在一些没意义的点处的走势（以下几例同）。比如该例题，$x=-1$ 就是函数 $h(x)$ 的一条渐近线。

变式一、$f(x)=16\ln(1+x)+x^2,g(x)=10x+b$ 图象只有一个交点，求实数 b 的范围。

解 由图可知 $b\in(-\infty,32\ln 2-21)\bigcup(16\ln 2-9,+\infty)$。 □

变式二、$16\ln(1+x)=-x^2+10x+b$ 有 3 个不同实数根，求实数 b 的取值范围。

解 将原方程整理成为 $16\ln(1+x)+x^2-10x=b$，同例题解法。 □

例 2.1.2. 若 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+ax-a$ 的图象与 x 轴只有一个公共点，求 a 的取值范围。

解 即是方程 $\dfrac{x^3}{3}-x^2+ax-a=0$ 只有一个解，即 $\dfrac{x^3}{3}-x^2=-a(x-1)$。显然，$x=1$ 不是方程的根，故方程可同解变形为 $\dfrac{\dfrac{x^3}{3}-x^2}{x-1}=-a$。

令 $g(x)=\dfrac{\dfrac{x^3}{3}-x^2}{x-1}$，该问题等价于 $g(x)$ 的图象与 $y=-a$ 的图象只有一个公共点。

因 $g'(x)=\dfrac{2x(x^2-3x+3)}{9(x-1)^2}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $g'(x)<0$，当 $x\in(0,1)\bigcup(1,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，可知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单减，在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内单增，且由 $x\to\infty$ 时 $g(x)\to+\infty$，$x\to1^+$ 时 $g(x)\to-\infty$，$x\to1^-$ 时 $g(x)\to+\infty$，可得到草图，如图 2.1.2。

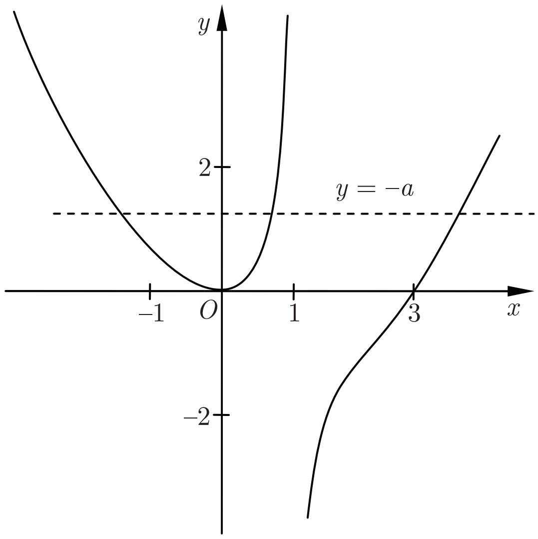


图 2.1.2

由图可知，$-a<g(0)=0\implies a>0$。 □

评注：本题采用例 2.1.1 的方法，分离参数。

例 2.1.3. 已知 $a>0,f(x)=ax^2-2x+1+\ln(x+1)$，$l$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(0,f(0))$ 处的切线。
（1）求 l 的方程;
（2）若切线 l 与曲线 $y=f(x)$ 有且只有一个公共点，求 a 的值。

解 （1）$f'(x)=2ax-2+\dfrac{1}{x+1}$，则 $f'(0)=-1,f(0)=0$，故 $l:y=-x+1$;
（2）由题意，即方程 $ax^2-2x+1+\ln(x+1)=-x+1\implies ax^2-x+\ln(x+1)=0$ 只有一个根。
令 $g(x)=ax^2-x+\ln(x+1)$，则

$$g'(x)=2ax-1+\frac{1}{x+1}=\frac{2ax\left(x+1-\dfrac{1}{2a}\right)}{x+1}。$$

注意到 $g(0)=0$，则

①若 $\frac{1}{2a}-1>0$，则 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 增，在 $\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$ 减。由于 $g(0)=0$，则在 $\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$ 内 $g(x)<0$，而在 $\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 内，当 $x\to\infty$ 时 $g(x)>0$，故由零点存在定理可得在 $\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 内肯定还有一根，与题目矛盾；

②若 $\frac{1}{2a}-1<0$，则 $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{2a}-1\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 增，在 $\left(\frac{1}{2a}-1,0\right)$ 减。同样注意到 $g(0)=0$，则在 $\left(\frac{1}{2a}-1,0\right)$ 内 $g(x)>0$，当 $x\to-1$ 时 $g(x)<0$，则在 $\left(-1,\frac{1}{2a}-1\right)$ 内肯定还有一根；

③若 $\frac{1}{2a}-1=0\implies a=\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $(-1,0)$ 减，在 $(0,+\infty)$ 增，又 $g(0)=0$，故此时只有一个根 $x=0$。

综上所述，$a=\frac{1}{2}$。 □

评注：此例没有利用前两例的分离参数的方法主要是因为分离后得到的新函数不容易得到其草图，并且此例函数的导数能够直接求得并且能够因式分解得到极值点，进而对函数的单调性取值正负等进行讨论。

题型四、函数最值及一些不等式的证明

例 2.1.4. 求函数 $f(x)=2\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}$ 的最值。

解 定义域为 $[-3,4]$，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$，令 $\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=0$ 得 $x=\frac{13}{5}$。又 $f(3)=\sqrt{7},f(4)=2\sqrt{7},f\left(\frac{13}{5}\right)=\sqrt{35}$，故最大值为 $\sqrt{35}$，最小值为 $\sqrt{7}$。 □

评注：求函数最值是导数的一大运用，此例也可以采用均值不等式、柯西不等式、三角代换等方法去做，但是思维量大，学生需要有意识地运用导数，充分发挥其在函数问题中的工具作用。

例 2.1.5. 已知 a 是实数，函数 $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$，求 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值。

解 函数定义域为 $[0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}$。

（1）$a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 增，则 $f_{\min}(x)=f(0)=0$；

（2）$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 减，在 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 增，此时需要对 $\frac{a}{3}$ 与区间 $[0,2]$ 的位置进行讨论。

当 $\frac{a}{3}\le 2\implies 0<a\le 6$ 时，$f_{\min}(x)=f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$；

当 $\frac{a}{3}>2\implies a>6$ 时，$f_{\min}(x)=f(2)=\sqrt{2}(2-a)$。

综上得到：

当 $a\le 0$ 时，$f_{\min}(x)=0$；当 $0<a\le 6$ 时，$f_{\min}(x)=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$；当 $a>6$ 时，$f_{\min}(x)=\sqrt{2}(2-a)$。 □

评注：此例的函数中含有一参数，但是求最值的方法还是不变，只是涉及到单调区间和所给区间的关系进行讨论。

例 2.1.6. 求证：当 $x>0$ 时，$\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$。

证明 原不等式即为 $\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}>0\ (x>0)$。

令 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}$，则只要说明 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的值都大于 0 即可。

因为 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 增，且 $g(x)$ 连续，故 $g(x)>g(0)=0$，所以 $\ln(x+1)>\dfrac{2x}{x+2}$。 □

评注：这类带有对数，指数或者三次函数的不等式证明，往往可以利用本例的想法操作。

具体方法为：要证明 $f(x)>(\text{或}<)g(x), x\in A$ 成立，即是证 $f(x)-g(x)>0(\text{或}<0), x\in A$ 成立。则只要求出新函数 $f(x)-g(x)$ 在 $x\in A$ 内的最小值（或最大值），只要最值满足不等式即可（以下几例同此法）。这也是导数知识与不等式知识的一个结合。

例 2.1.7. 已知定义在正实数集上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$，$g(x)=3a^2\ln x+b$，其中 $a>0$。设两曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 有公共点，且在该点处的切线相同。

（1）将 b 表示成 a 的式子；

（2）求证：$f(x)\geq g(x)\ (x>0)$。

解 （1）设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)\ (x>0)$ 在公共点 (x_0,y_0) 处的切线相同。

因为 $f'(x)=x+2a$，$g'(x)=\dfrac{3a^2}{x}$，由题意 $f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$，即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}x_0^2+2ax_0=3a^2\ln x_0+b,\\ x_0+2a=\dfrac{3a^2}{x_0},\end{cases}$$

由 $x_0+2a=\dfrac{3a^2}{x_0}$ 得 $x_0=a$ 或 $x_0=-3a$（舍去）。即有 $b=\dfrac{1}{2}a^2+2a^2-3a^2\ln a=\dfrac{5}{2}a^2-3a^2\ln a$。

（2）设 $F(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax-3a^2\ln x-b\ (x>0)$，则

$$F'(x)=x+2a-\frac{3a^2}{x}=\frac{(x-a)(x+3a)}{x},$$

故 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 单减，在 $(a,+\infty)$ 单增，于是函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为

$$\begin{aligned}F_{\min}(x)=F(a)&=\frac{1}{2}a^2+2a^2-3a^2\ln a-b=\frac{5}{2}a^2-3a^2\ln a-b\\&=\frac{5}{2}a^2-3a^2\ln a-\left(\frac{5}{2}a^2-3a^2\ln a\right)=0,\end{aligned}$$

故当 $x>0$ 时，有 $f(x)-g(x)\geq 0$，即当 $x>0$ 时，$f(x)\geq g(x)$。 □

例 2.1.8. $f(x)=x\ln x, a>0, b>0$，求证：$f(a)+f(b)+(a+b)\ln 2\geq f(a+b)$。

证明 要证明的不等式即为

$$a\ln a+b\ln b+(a+b)\ln 2\geq (a+b)\ln(a+b)。$$

不妨假设 $a\geq b>0$，令 $h(a)=a\ln a+b\ln b+(a+b)\ln 2-(a+b)\ln(a+b)$，则

$$h'(a)=\ln a+1+\ln\frac{2}{a+b}-1=\ln\frac{2a}{a+b}\geq 0,$$

故 $h(a)$ 在 $[b,+\infty)$ 内不减，则 $h(a)\geq h(b)=0$，命题得证。 □

评注：此例的形式可以利用琴生不等式进行证明。实际上换个角度，既然此题叫证明对于任意的正数 a,b 都成立，那么不妨把其中一个字母作为变量，就是函数不等式的典型例子。

例 2.1.9. 证明对任意的正整数 n，不等式 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) > \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$ 都成立。

解 设 $\frac{1}{n} = x$，则 $0 < x \le 1$，于是只要证

$$\ln(x+1) > x^2 - x^3, x \in (0,1]。$$

令 $h(x) = x^3 - x^2 + \ln(x+1)$，则 $h'(x) = \frac{3x^3 + (x-1)^2}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒正，所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x \in (0,+\infty)$ 时，恒有 $h(x) > h(0) = 0$。

即当 $x \in (0,+\infty)$ 时，有 $x^3 - x^2 + \ln(x+1) > 0$，即 $\ln(x+1) > x^2 - x^3$，故原不等式成立。 □

评注： 此题看似一个与自然数 n 有关的不等式，但是不等式左右两边并没有出现前 n 项和这样的式子，而是几个关于 n 的初等函数，那么这样的不等式可以尝试利用函数观点去求证。

例 2.1.10. 已知 $a > 0, a \neq 1$，求证 $\frac{a}{a^2-1}(a^n - a^{-n}) > n$。

证明 设 $f(x) = \frac{a}{a^2-1}\frac{a^x - a^{-x}}{x}$ $(x \ge 1)$，注意到 $f(1) = 1$，那么只要能够证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单增，则原不等式即得证。由

$$f'(x) = \frac{a}{a^2-1}\frac{\ln a(a^x + a^{-x})x - (a^x - a^{-x})}{x^2},$$

下证 $f'(x) > 0$ 在 $[1,+\infty)$ 成立。

（1）当 $a > 1$ 时，只需证 $h(x) = \ln a(a^x + a^{-x})x - (a^x - a^{-x})$ 为正。而

$$h'(x) = \ln a\left(\ln a(a^x - a^{-x})x + (a^x + a^{-x})\right) - \ln a(a^x + a^{-x}) = (\ln a)^2(a^x - a^{-x})x,$$

当 $a > 1$，很明显 $h'(x) > 0$，则 $h(x)$ 单增，则 $h(x) > h(0) = 0$，故 $f'(x) > 0$;

（2）当 $0 < a < 1$ 时，只需证 $h(x) = \ln a(a^x + a^{-x})x - (a^x - a^{-x})$ 为负。由（1）的过程易得，故此时 $f'(x) > 0$。

综上，$f(x) = \frac{a}{a^2-1}\frac{a^x - a^{-x}}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 单增，故 $f(x) > f(1) = 1$，所以 $\frac{a}{a^2-1}(a^x - a^{-x}) > x$，原不等式得证。 □

评注： 此题反复利用导数证明不等式，注意当中的那两个特殊的端点值。

例 2.1.11. 已知 p 是 $(0,1)$ 内一给定常数，求证：$5^p + 7^p > 3^p + 9^p$。

证明 构造函数 $g(x) = (6-x)^p + (6+x)^p, 1 < x < 6$。则

$$g'(x) = p\left(\frac{1}{(6+x)^{1-p}} - \frac{1}{(6-x)^{1-p}}\right) < 0,$$

所以 $g(x)$ 减，则 $g(1) > g(3)$，即 $5^p + 7^p > 3^p + 9^p$。 □

评注： 此题是一自主招生考题，最初的想法本想把 p 作为变量，来构造函数证明，但是发现几个底数都不同，后来观察底数的关系都是以 6 作为中间数，所以想到构造那个函数利用导数得到其单调性。读者可以继续证明 $5^p + 15^p + 25^p + 35^p < 9^p + 11^p + 27^p + 33^p$。

例 2.1.9 以后这几个问题表面上感觉和导数无关，其实稍作分析都是带有函数背景的问题，这样就为导数的运用提供了大环境。学生也应该在其中多体会导数的工具作用以及在各章节中的渗透。

2.2 三角函数公式微型整理——郭子伟

本文的普通正文内容为高中阶段所接触到的一些三角函数基本公式的小型收集整理，适用于普通高中生，而选读内容（楷书字体部分）则会稍作加深，意在给有能力的同学或老师及数学爱号者阅读，随你看不看。

在以下这大堆公式中，有不少是熟知的，但也有些是笔者自己收集或推导的，总之尽可能整点新东西出来，以免太闷。

一、诱导公式

对于 $\dfrac{k\pi}{2} \pm x$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的三角函数值的化简，我们有口诀：**符号看象限，奇变偶不变。**

如 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$，首先将 x 看成锐角看看函数值的正负，由于此时 $\dfrac{3\pi}{2} - x$ 在第三象限所以函数值是负的就取负号，然后因为 $\dfrac{3\pi}{2}$ 即 $k = 3$ 为奇数，于是将 $\sin$ 变成 $\cos$，最终化简结果就是 $-\cos x$。

又如 $\cos(x + \pi)$，将 x 看成锐角看函数值正负，此时 $x + \pi$ 在第三象限函数值是负，取负号，因 $\pi = \dfrac{2\pi}{2}$ 即 $k = 2$ 为偶数，即 $\cos$ 不变，最终化简为 $-\cos x$。

也许大家会觉得怎么好像与以前学的口诀顺序反了过来，其实这是有原因的，事实上这个 idea 也不是我想出来的，详情请参考论坛这一贴：`http://bbs.pep.com.cn/thread-264288-1-1.html`。

二、和差角关系

两角和差展开公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \qquad \cot(\alpha \pm \beta) = -\frac{1 \mp \cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

由正余弦的和差展开式可得如下的“积化和差”与“和差化积”公式：

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right) \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

以上的公式属于书本上的公式，故此就不写推导了。“积化和差”和“和差化积”公式虽然据说只要求了解不要求记忆，不过我觉得还是不妨一记，因为挺有用的，至少本文中多次用到。另外扯一题外话，不要总以为学得少或不用记就是减负，其实有时学多点记多点有价值的定理和方法，熟悉运用之后不但不是负担，更会成为你解决问题的兵器，所以换个角度来看，适当学多点也可以是减负。

选读：三个角的和的展开公式：

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\alpha\tan\gamma - \tan\beta\tan\gamma}$$

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma}{1 - \cot\alpha\cot\beta - \cot\alpha\cot\gamma - \cot\beta\cot\gamma}$$

以上公式只需两次运用两角和的展开式即可得到，读者可以试试证明。

例 2.2.1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$。

证明 由积化和差公式及诱导公式，有

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}&=-\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)\\&=-\frac{1}{2}\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\&\le-\frac{1}{2}\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\\&=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\\&\le\frac{1}{8}。\end{aligned}$$

□

类似地也可以证明 $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$、$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$、$\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$、$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$、$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ 等等，读者不妨试试。

例 2.2.2. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>2$。

证明 我们先证明

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}>1+\cos\frac{A+B}{2}。$$

利用和差化积公式及两倍角公式，可知

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}>1+\cos\frac{A+B}{2}&\iff 2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}>2\cos^2\frac{A+B}{4}\\&\iff\cos\frac{A-B}{4}>\cos\frac{A+B}{4}\\&\iff 2\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}>0,\end{aligned}$$

显然成立。因此我们有

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>1+\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C}{2}=1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

因为 $\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，故必有 $\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>1+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2,$$

这样就得到了原不等式。 □

选读： 利用内切圆系统进行代数化处理也可以证明此上述不等式：

另证 由内切圆代换，可令 $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(z+x)}}$ 等等，其中 $x,y,z>0$。则原不等式等价于

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(z+x)}}>2&\iff\sum_{cyc}\frac{\sqrt{(x+y)(z+x)}-\sqrt{x(x+y+z)}}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}<1\\&\iff\sum_{cyc}\frac{(x+y)(z+x)-x(x+y+z)}{\left(\sqrt{(x+y)(z+x)}+\sqrt{x(x+y+z)}\right)\sqrt{(x+y)(z+x)}}<1\end{aligned}$$

$$\iff \sum_{cyc}\frac{yz}{(x+y)(z+x)+\sqrt{x(x+y)(z+x)(x+y+z)}}<1,$$

由于

$$\sum_{cyc}\frac{yz}{(x+y)(z+x)+\sqrt{x(x+y)(z+x)(x+y+z)}}<\sum_{cyc}\frac{yz}{(x+y)(z+x)},$$

故只需证

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{yz}{(x+y)(z+x)}\le 1 &\iff \sum_{cyc}yz(y+z)\le(x+y)(y+z)(z+x)\\ &\iff 0\le 2xyz,\end{aligned}$$

显然成立，故原不等式成立。 □

例 2.2.3. 对任意四个实数 x,y,z,w，求证：

$$\sin(x-y)\sin(z-w)+\sin(y-w)\sin(z-x)+\sin(w-x)\sin(z-y)=0,$$
$$\sin(x-y)\cos(z-w)+\sin(y-w)\cos(z-x)+\sin(w-x)\cos(z-y)=0。$$

证明 由积化和差公式得

$$\begin{aligned}\sin(x-y)\sin(z-w)&=\frac{1}{2}\cos(w+x-y-z)-\frac{1}{2}\cos(w-x+y-z),\\ \sin(y-w)\sin(z-x)&=\frac{1}{2}\cos(w-x-y+z)-\frac{1}{2}\cos(w+x-y-z),\\ \sin(w-x)\sin(z-y)&=\frac{1}{2}\cos(w-x+y-z)-\frac{1}{2}\cos(w-x-y+z),\end{aligned}$$

三式相加即得第一式，同理可证第二条式。 □

例 2.2.4. 对任意三个实数 x,y,z，求证：

$$\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2},$$
$$\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)=4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}。$$

证明 两次运用积化和差公式得

$$\begin{aligned}4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}&=2\left(\cos\frac{x-z}{2}-\cos\left(\frac{x+z}{2}+y\right)\right)\sin\frac{z+x}{2}\\ &=\sin x+\sin z+\sin y-\sin(x+y+z),\end{aligned}$$

即得第一式，同理可证第二条式。这个例题的应用将在后面会提到。 □

例 2.2.5. 求 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$ 的值。

解

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}&=\frac{2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\ &=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\left(\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\ &=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\ &=\frac{1}{2}。\end{aligned}$$

□

例 2.2.6. 求 $\sin 18^\circ + \sin 54^\circ$ 的值。

解 因为

$$\begin{aligned}(\sin 18^\circ + \sin 54^\circ)^2 &= \sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ \sin 54^\circ + \sin^2 54^\circ \\ &= \frac{1-\cos 36^\circ}{2} + \cos 36^\circ - \cos 72^\circ + \frac{1+\cos 72^\circ}{2} \\ &= 1 + \frac{\cos 36^\circ + \cos 108^\circ}{2} \\ &= 1 + \frac{2\sin 72^\circ \cos 36^\circ + 2\sin 72^\circ \cos 108^\circ}{4\sin 72^\circ} \\ &= 1 + \frac{(\sin 108^\circ + \sin 36^\circ) + (\sin 180^\circ - \sin 36^\circ)}{4\sin 72^\circ} \\ &= 1 + \frac{\sin 108^\circ}{4\sin 72^\circ} \\ &= \frac{5}{4},\end{aligned}$$

且 $\sin 18^\circ + \sin 54^\circ > 0$，所以

$$\sin 18^\circ + \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}}{2}。$$

□

三、倍角关系

在两角和的展开式中令 $\alpha = \beta = \theta$ 即得两倍角公式:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \cot 2\theta = \frac{\cot\theta - \tan\theta}{2} = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$$

由两倍角公式变形即得半角公式:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

符号的选择由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限确定。

选读：对正余弦的两倍角公式继续变形可得如下的公式:

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

余切的倒数过来也可变为正切，也就是说哪种三角函数都可以化成正切函数的有理式，因此由以上两式与两倍角正切公式合称为“万能公式”，有着广泛的应用。

三倍角公式:

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 4\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta) \\ \cos 3\theta &= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta = 4\cos\theta\cos(60^\circ - \theta)\cos(60^\circ + \theta) \\ \tan 3\theta &= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \tan\theta\tan(60^\circ - \theta)\tan(60^\circ + \theta) \\ \cot 3\theta &= \frac{3\cot\theta - \cot^3\theta}{1 - 3\cot^2\theta} = \cot\theta\cot(60^\circ - \theta)\cot(60^\circ + \theta)\end{aligned}$$

更一般地，还有 n 倍角公式:

$$\begin{aligned}\sin n\theta &= C_n^1\cos^{n-1}\theta\cdot\sin^1\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + C_n^5\cos^{n-5}\theta\cdot\sin^5\theta - \cdots \\ \cos n\theta &= C_n^0\cos^n\theta\cdot\sin^0\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\cdot\sin^4\theta - \cdots\end{aligned}$$

两式相除整理即得

$$\tan n\theta = \frac{C_n^1\tan^1\theta - C_n^3\tan^3\theta + C_n^5\tan^5\theta - \cdots}{C_n^0\tan^0\theta - C_n^2\tan^2\theta + C_n^4\tan^4\theta - \cdots}$$
$$\cot n\theta = \frac{C_n^0\cot^n\theta - C_n^2\cot^{n-2}\theta + C_n^4\cot^{n-4}\theta - \cdots}{C_n^1\cot^{n-1}\theta - C_n^3\cot^{n-3}\theta + C_n^5\cot^{n-5}\theta - \cdots}$$

证明可以用数学归纳法或棣莫佛 (De Moivre) 定理。此外，正余弦的 n 倍角也可以按切比雪夫多项式和伸展多项式去展开，鉴于内容较多而且深，这里就不讲了。

例 2.2.7. 求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 的值。

解

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ &= \frac{8\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}\\ &= \frac{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}\\ &= \frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}\\ &= \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}\\ &= \frac{1}{8}。\end{aligned}$$

□

选读： 本题也可以用三倍角公式求解，

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \cos 20^\circ\cos\left(60^\circ - 20^\circ\right)\cos\left(60^\circ + 20^\circ\right) = \frac{\cos 60^\circ}{4} = \frac{1}{8}。$$

四、平方关系

平方和差为 1 的基本公式：

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta = \csc^2\theta - \cot^2\theta$$

这里的 sec 和 csc 分别称作“正割”和“余割”，分别就是“余弦”和“正弦”的倒数而已，因此不必惊慌。椭圆和双曲线的参数方程就是利用这一公式得到的。

选读： 还有几组“平方差”公式：

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha - \sin^2\beta &= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = -(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\\ \tan^2\alpha - \tan^2\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} = \sec^2\alpha - \sec^2\beta\\ \cot^2\alpha - \cot^2\beta &= -\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \csc^2\alpha - \csc^2\beta\\ \cos^2\alpha - \sin^2\beta &= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\ \cot^2\alpha - \tan^2\beta &= \frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} = \csc^2\alpha - \sec^2\beta\end{aligned}$$

以上公式展开即可证，读者可以试试。

五、合一公式

辅助角公式：

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

其中 $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$。

选读：任意相位移动的合一公式 $a\sin x+b\sin(x+t)=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos t}\cdot\sin(x+\varphi)$ 其中 $\tan\varphi=\dfrac{b\sin t}{a+b\cos t}$。这是因为

$$\begin{aligned}a\sin x+b\sin(x+t)&=(a+b\cos t)\sin x+b\sin t\cos x\\&=\sqrt{(a+b\cos t)^2+(b\sin t)^2}\sin(x+\varphi)\\&=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos t}\sin(x+\varphi),\end{aligned}$$

其中 $\tan\varphi=\dfrac{b\sin t}{a+b\cos t}$。

例 2.2.8. 已知 $\theta\in\mathbb{R}$，$\dfrac{\cos\theta}{a}+\dfrac{\sin\theta}{b}=1$，则下列恒成立的是 （ ）

A.$a^2+b^2\le 1$　　B.$a^2+b^2\ge 1$　　C.$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\le 1$　　D.$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge 1$

解 由辅助角公式有 $1=\dfrac{\cos\theta}{a}+\dfrac{\sin\theta}{b}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}\sin(\theta+\varphi)\le\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$ 即知选 D。 □

这是一道挺常见的简单题，解法很多，上面用辅助角公式属于最基础直接的一种。

六、三角形内的三角恒等式

以下公式中的 A、B、C 如无特别说明，均指一般三角形的三个内角。

利用前面选读内容提到的三个角的和的展开公式，可以得到：

$$\begin{aligned}&\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\text{（非直角三角形）}\\&\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\\&\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1\\&\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1\end{aligned}$$

例 2.2.9. 已知 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，且 $xy+yz+zx=1$，求 $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{z}{z^2+1}$ 的最大值。

解 由条件等式以及要求最值的式子的形式，联系到上述的三角恒等式，我们可以令 $x=\tan\dfrac{A}{2}$，$y=\tan\dfrac{B}{2}$，$z=\tan\dfrac{C}{2}$，其中 A,B,C 为某三角形的三个内角。注意到由万能公式有 $\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$ 以及 $\dfrac{1}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$，于是代入得到

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C),$$

由积化和差公式可知

$$\cos A+\cos B+\sin C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\le 2\sin\frac{C}{2}+\sin C。$$

下面用导数求 $2\sin\dfrac{C}{2}+\sin C$ 的最大值，令 $f(C)=2\sin\dfrac{C}{2}+\sin C, C\in(0,\pi)$，则

$$f'(C)=\cos\frac{C}{2}+\cos C=\left(\cos\frac{C}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{C}{2}-1\right),$$

可见 $f\left(C\right) \le f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，由此即得到

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \le 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

当 $x = y = 2 - \sqrt{3}, z = \sqrt{3}$ 时取等号，故所求的最大值就是 $1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$。 □

在后面的《ab1962 解题集精选（二）》一文中的两个恒等式：

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

详细证明及应用请见该文。

n 倍角三角形正余弦和公式：设 $k, n \in \mathbb{Z}$，对例 2.2.4 中的 x, y, z 分别代入为 nA, nB, nC，整理易得

$$\sin\left(nA\right) + \sin\left(nB\right) + \sin\left(nC\right) = \begin{cases} -4\sin\dfrac{nA}{2}\sin\dfrac{nB}{2}\sin\dfrac{nC}{2} & n = 4k, \\ 4\cos\dfrac{nA}{2}\cos\dfrac{nB}{2}\cos\dfrac{nC}{2} & n = 4k+1, \\ 4\sin\dfrac{nA}{2}\sin\dfrac{nB}{2}\sin\dfrac{nC}{2} & n = 4k+2, \\ -4\cos\dfrac{nA}{2}\cos\dfrac{nB}{2}\cos\dfrac{nC}{2} & n = 4k+3, \end{cases}$$

以及

$$\cos\left(nA\right) + \cos\left(nB\right) + \cos\left(nC\right) = \begin{cases} 4\cos\dfrac{nA}{2}\cos\dfrac{nB}{2}\cos\dfrac{nC}{2} - 1 & n = 4k, \\ 4\sin\dfrac{nA}{2}\sin\dfrac{nB}{2}\sin\dfrac{nC}{2} + 1 & n = 4k+1, \\ -4\cos\dfrac{nA}{2}\cos\dfrac{nB}{2}\cos\dfrac{nC}{2} - 1 & n = 4k+2, \\ -4\sin\dfrac{nA}{2}\sin\dfrac{nB}{2}\sin\dfrac{nC}{2} + 1 & n = 4k+3. \end{cases}$$

再对例 2.2.4 中的 x, y, z 分别代入为 $\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2}$ 又可得半角三角形正余弦和公式：

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{\pi - A}{4}\sin\frac{\pi - B}{4}\sin\frac{\pi - C}{4}$$
$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi - B}{4}\cos\frac{\pi - C}{4}$$

代入其它系数的角也可以得到相应的恒等式，大家可以试试。

例 2.2.10. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin A + \sin B + \sin C$。

证明　由上述公式，分别代入 $n = 1, 2$ 得到

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C,$$

于是原不等式等价于

$$\sin A\sin B\sin C \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

利用两倍角公式，易知上式等价于

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8},$$

这正是例 2.2.1 中证过的熟知不等式。 □

七、周期性

函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b\ (A\omega\neq 0)$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$。余弦、正割、余割的结论一样。

函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)+b\ (A\omega\neq 0)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$。余切的结论一样。

选读： 一般地，函数 $f(x)=A_1\sin\left(\dfrac{p_1}{q_1}\omega x+\varphi_1\right)+A_2\sin\left(\dfrac{p_2}{q_2}\omega x+\varphi_2\right)$，其中 $A_1A_2p_1p_2q_1q_2\omega\neq 0$，$p_1$、$p_2$、$q_1$、$q_2$ 都是整数，$\dfrac{p_1}{q_1}$ 和 $\dfrac{p_2}{q_2}$ 都是既约分数，则 $f(x)$ 的最小正周期是 $2\pi\dfrac{[q_1,q_2]}{(p_1,p_2)|\omega|}$，其中 $[q_1,q_2]$ 和 (p_1,p_2) 分别表示 q_1,q_2 的最小公倍数和 p_1,p_2 的最大公因数。

$f(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$ 中 $A_1A_2\omega_1\omega_2\neq 0$，如果 $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ 是无理数，则 $f(x)$ 不是周期函数。

以上两个性质对正切也有类似的性质，这些性质的证明就省略了，有兴趣的读者可以尝试证明。

一般来说，含绝对值的三角函数的最小正周期是与对应的不含绝对值的三角函数的最小正周期相等或者是对应最小正周期的 $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{4}$。下面举例说明：

例 2.2.11. 求 $f(x)=|\sin x|$ 的最小正周期。

解 假设 $0<T\leq\pi$ 是 $f(x)=|\sin x|$ 的一个周期，则

$$|\sin(x+T)|=|\sin x|,$$

取 $x=0$，则上式变为

$$|\sin T|=\sin T=0,$$

于是 $T=\pi$。

另外，由于

$$|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|,$$

所以 π 是 $f(x)=|\sin x|$ 的最小正周期。 □

例 2.2.12. 求 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期。

解 因为

$$f(x)=|\sin x|+|\cos x|=\sqrt{|\sin x|^2+2|\sin x\cos x|+|\cos x|^2}=\sqrt{1+\sqrt{\sin^2 2x}}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}},$$

所以 $\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的一个周期。

另外，设 $0<T\leq\dfrac{\pi}{2}$ 时恒有 $|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|$，由上式得 $\cos(4x+4T)=\cos 4x$。取 $x=0$，则有 $\cos 4T=1$，只能 $T=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期。 □

OK，这个微型整理暂时先整到这里，其实三角这块还有很多内容可以写下去，比如三角形内的恒等式上面只写到了只含三角函数的恒等式，如果把三边或面积之类也扯上，恒等式将更多，这些等以后有机会再慢慢整理。希望本文对大家有所帮助，感谢阅读。

2.3 ab1962 解题集精选（二）——廖凡

本期的题目及解答依然由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 1 ∼ 100 题中精选出，其余说明与第一期相同。

题目 2.3.1. 已知 $x^2-x+a=0$，$x^2-x+b=0$ 两方程的四根成等差数列且首项为 $\frac{1}{4}$，求 $a+b$ 的值。

解 不妨设 $\frac{1}{4}$ 是方程 $x^2-x+a=0$ 根，则别一个根是 $\frac{3}{4}$，于是

$$a=\frac{3}{16}。$$

设方程 $x^2-x+b=0$ 的两个根分别为 $x_1,x_2,x_1<x_2$，则由韦达定理有

$$x_1+x_2=1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}。$$

由于 $\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$、x_1、x_2 是等差数列的四个项，由等差数列的加法对称性可知这个等差数列为

$$\frac{1}{4}、x_1、x_2、\frac{3}{4},$$

由此得公差 $d=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{4-1}=\frac{1}{6}$ 以及 $x_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$、$x_2=\frac{7}{12}$，因此

$$b=x_1x_2=\frac{35}{144},$$

从而 $a+b=\dfrac{27+35}{144}=\dfrac{31}{72}$。 □

题目 2.3.2. 已知 $a>1$，求证 $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$。

证明

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)-\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)&=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}\\&=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}\\&=\frac{-2}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)}\\&<0,\end{aligned}$$

故原式成立。 □

kuing 注： 本题也可以移项平方去证明：

$$\begin{aligned}\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}<2\sqrt{a}&\iff a+1+2\sqrt{a+1}\sqrt{a-1}+a-1<4a\\&\iff \sqrt{a+1}\sqrt{a-1}<a\\&\iff (a+1)(a-1)<a^2\\&\iff -1<0。\end{aligned}$$

还可以由 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ 可看出单调性从而得到原不等式。

题目 2.3.3. 设集合 $M=\{1,2,3,\ldots,1000\}$，对 M 的任一非空子集 Z，令 αZ 表示 Z 中最大数与最小数之和，那么所有这样的 αZ 的算术平均值是多少?

解 以 1 为最小值的集合有 2^{999} 个，以 2 为最小值的集合有 2^{998} 个，以 3 为最小值的集合有 2^{997} 个,……，以 1000 为最小值的集合有 2^0 个。

因此所有 M 的非空子集的所有最小值的和为

$$1\times 2^{999}+2\times 2^{998}+3\times 2^{997}+\cdots+1000\times 2^0,$$

同理，所有 M 的非空子集的所有最大值的和为

$$1000\times 2^{999}+999\times 2^{998}+998\times 2^{997}+\cdots+1\times 2^0,$$

故所有的 αZ 的和为

$$1001\left(2^{999}+2^{998}+2^{997}+\cdots+2^0\right)=1001\left(2^{1000}-1\right),$$

而 M 的非空子集子有 $2^{1000}-1$ 个，故所有的 αZ 的算术平均数就是 1001。 □

题目 2.3.4. 若锐角 A、B、C 满足 $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$，试证：$A+B+C=\pi$。

证明

$$\begin{aligned}
&\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\iff&\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\iff&-\frac{\cos A+\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\iff&-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\\
\iff&\sin^2\frac{C}{2}-\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=0\\
\iff&\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)=0,
\end{aligned}$$

因 A、B、C 是锐角，于是必有

$$\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2},$$

从而有

$$\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\iff A+B+C=\pi,$$

即获证。 □

kuing 注： 由证明过程不难看出，当反过来有 $A+B+C=\pi$ 时就有原等式成立，那么就有三角形内的恒等式

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1。\tag{2.3.1}$$

若再作角变换 $\dfrac{A}{2}\to\dfrac{\pi}{2}-A$ 等等，又可以得到另一个三角形内的恒等式

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1。\tag{2.3.2}$$

这两个恒等式是很有用的，比如在条件不等式的证明中常常可用作消去约束条件及简化不等式等等，具体可以试试下题：

非负实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2+abc=4$，求证：

$$0\le ab+bc+ca-abc\le 2。$$

题目 2.3.5. 已知 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}$，求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{2}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{100}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f\left(\dfrac{3}{3}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{100}{3}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+f\left(\dfrac{3}{100}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$ 的值。

解 注意到

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{1+x}+\frac{2}{1+x}=2,$$

于是我们将所求式子的所有项摆成如下位置

$$\begin{array}{ccccc}
f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(100)\\
f\left(\dfrac{1}{2}\right) & f\left(\dfrac{2}{2}\right) & f\left(\dfrac{3}{2}\right) & \cdots & f\left(\dfrac{100}{2}\right)\\
f\left(\dfrac{1}{3}\right) & f\left(\dfrac{2}{3}\right) & f\left(\dfrac{3}{3}\right) & \cdots & f\left(\dfrac{100}{3}\right)\\
\cdots & & & & \\
f\left(\dfrac{1}{100}\right) & f\left(\dfrac{2}{100}\right) & f\left(\dfrac{3}{100}\right) & \cdots & f\left(\dfrac{100}{100}\right)
\end{array}$$

将由左上至右下的 100 个 $f(1)=1$ 定为对角线，关于的对角线对称的两数的和是 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2$，故这 10000 个数的和就是 10000。 □

kuing 注： 此解答又是倒序相加的思维方法的杰作。

题目 2.3.6. 已知 $(a+b)\left(a^2+b^2-1\right)=2$ 且 $a,b>0$。求证：$a+b\leq 2$。

证法一 反证法：设 $a+b>2$，则

$$(a+b)\left(a^2+b^2-1\right)\geq(a+b)\left(\frac{1}{2}(a+b)^2-1\right)>2\left(\frac{1}{2}\times 2^2-1\right)=2,$$

与已知矛盾。 □

证法二 设 $a+b=x$，则由 $(a+b)\left(a^2+b^2-1\right)=2$ 可得 $a^2+b^2=\dfrac{2}{x}+1$，则有

$$\begin{aligned}
a^2+b^2\geq\frac{1}{2}(a+b)^2 &\iff \frac{2}{x}+1\geq\frac{1}{2}x^2\\
&\iff (x-2)\left(x^2+2x+2\right)\leq 0,
\end{aligned}$$

因为 $x^2+2x+2>0$，所以 $x-2\leq 0$，即 $a+b\leq 2$。 □

kuing 注： 从证法一可以看出，此题的条件 $a,b>0$ 是可以去掉的，因为证法一中并未使用此条件。而当条件 $a,b>0$ 去掉时，由证法二可以看出此时必有 $a+b>0$。下面尝试将条件改为 $a,b\geq 0$ 再求 $a+b$ 的最小值。

接着证法二的设法，有

$$\begin{aligned}
a^2+b^2\leq(a+b)^2 &\iff \frac{2}{x}+1\leq x^2\\
&\iff x^3-x-2\geq 0,
\end{aligned}$$

利用卡当（Cardano）公式可以解出方程 $x^3-x-2=0$ 有且只有一个实数根为 $x_0=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{27+3\sqrt{78}}+\sqrt[3]{27-3\sqrt{78}}\right)$，于是上式解得

$$x\geq x_0=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{27+3\sqrt{78}}+\sqrt[3]{27-3\sqrt{78}}\right),$$

不难验证当 a,b 中一个为 0 另一个为 x_0 时等号成立，所以此时 $a+b$ 的最小值为 $\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{27+3\sqrt{78}}+\sqrt[3]{27-3\sqrt{78}}\right)$，其近似值约为 1.52138。由此即易知当 $a,b\geq 0$ 时 $a+b$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{27+3\sqrt{78}}+\sqrt[3]{27-3\sqrt{78}}\right),2\right]$。

题目 2.3.7. 计算 $\dfrac{3}{\sin^2 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}+64\sin^2 20^\circ$。

解

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{\sin^2 20^\circ}-\frac{1}{\cos^2 20^\circ}+64\sin^2 20^\circ\\
=&\frac{3\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ+64\sin^2 20^\circ\sin^2 20^\circ\cos 20^\circ}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20}\\
=&\frac{\left(\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ\right)\left(\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ\right)+16\sin^2 20^\circ\sin^2 40^\circ}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20^\circ}\\
=&\frac{4\cos 10^\circ\cos 50^\circ+4\left(1-\cos 40^\circ\right)\left(1-\cos 80^\circ\right)}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20^\circ}\\
=&\frac{4\left(\cos 10^\circ\cos 50^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ\right)+4\left(1-\cos 40^\circ-\cos 80^\circ\right)}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20^\circ}\\
=&\frac{4\cos 40^\circ+4\left(1-\cos 40^\circ-\cos 80^\circ\right)}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}\\
=&\frac{4\left(1-\cos 80^\circ\right)}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}\\
=&\frac{8\sin^2 40^\circ}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}\\
=&32。
\end{aligned}
$$

□

kuing 注： hejoseph 版主给出另解如下

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{\sin^2 20^\circ}-\frac{1}{\cos^2 20^\circ}+64\sin^2 20^\circ&=\frac{6}{1-\cos 40^\circ}-\frac{2}{1+\cos 40^\circ}+32\left(1-\cos 40^\circ\right)\\
&=\frac{4\left(8\cos^3 40^\circ-8\cos^2 40^\circ-6\cos 40^\circ+9\right)}{1-\cos^2 40^\circ}\\
&=\frac{4\left(2\left(4\cos^3 40^\circ-3\cos 40^\circ\right)-8\cos^2 40^\circ+9\right)}{1-\cos^2 40^\circ}\\
&=\frac{4\left(2\cos 120^\circ-8\cos^2 40^\circ+9\right)}{1-\cos^2 40^\circ}\\
&=\frac{4\left(8-8\cos^2 40^\circ\right)}{1-\cos^2 40^\circ}\\
&=32。
\end{aligned}
$$

其中第三行到第四行的等式中利用了三倍角公式 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$。

2.4　数列不等式的证明几种常见类型——窦国栋

一、运用函数的性质

运用 $\sin x \le x$

例 2.4.1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\cos\dfrac{\theta}{2}\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}\,(n=1,2,3\ldots)$。

（1）求 a_2 、a_3；

（2）求 a_n；

（3）设 S_n 为数列 $\left\{\dfrac{\pi}{2}-a_n\right\}$ 的前 n 项的和，证明：$S_n\ge\dfrac{\theta}{2}$。

解　（1）由递推式联系半角公式，又 $a_1=\cos\dfrac{\theta}{2}$，故易得 $a_2=\cos\dfrac{\theta}{2^2}$，$a_3=\cos\dfrac{\theta}{2^3}$。

（2）由（1）猜想 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，用数学归纳法证明即可。

（3）分析：$S_n=\dfrac{n\pi}{2}-\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{4}+\cdots+\cos\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ 无法直接求和，应该先放缩再求和，又所求式子的右侧为 $\dfrac{\theta}{2}$（纯角度），所以注意使用 $\sin x\le x$。

设 $f(x)=x-\sin x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=1-\cos x>0$，因此 $f(x)=x-\sin x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，于是

$$f(x)\ge f(0)=0\implies \sin x\le x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right),$$

于是

$$\cos\frac{\theta}{2^n}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2^n}\right)\le\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2^n}\implies a_n\le\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2^n}\iff\frac{\pi}{2}-a_n\ge\frac{\theta}{2^n},$$

所以

$$S_n\ge\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{\theta}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\cdot\theta=\theta-\frac{\theta}{2^n}\ge\frac{\theta}{2},$$

当 $n=1$ 时取等号。　□

耐克函数 $y=ax^n+\dfrac{b}{x^n}$

例 2.4.2. 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=t,a_2=t^2\,(t>0)$，$x=\sqrt{t}$ 是函数 $f(x)=a_{n-1}x^3-3\left((t+1)a_n-a_{n+1}\right)x+1\ (x\ge2)$ 的一个极值点。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $\dfrac{1}{2}<t<2$，$b_n=\dfrac{2a_n}{1+a_n^2}(n\in\mathbb{N}^+)$，求证：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}<2^n-2^{-\frac{n}{2}}$。

解　（1）易求得 $a_n=t^n$；

（2）由（1）得 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2}\left(t^n+\dfrac{1}{t^n}\right)$，当 $\dfrac{1}{2}<t<2$ 时，记 $g(t)=t^n+\dfrac{1}{t^n}$，由导数知识知 $g(t)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 单调递减，在 $[1,2]$ 单调递增，且

$$g(t)<g(2)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2^n+\frac{1}{2^n}\implies\frac{1}{b_n}<\frac{1}{2}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right),$$

故得

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{1}{2}\left(2+2^2+\cdots+2^n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2\left(1-2^{n}\right)}{1-2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2^{n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^{n}}\right)<2^{n}-\sqrt{1\times\frac{1}{2^{n}}}=2^{n}-2^{-\frac{n}{2}},
\end{aligned}
$$

得证。 □

二、裂项相消

直接裂项相消

例 2.4.3. （06 全国）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{2}{3}$，$n=1,2,\ldots$。

（1）求首项 a_1 与通项 a_n；

（2）设 $T_n=\frac{2^n}{S_n}$，$n=1,2,\ldots$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$。

解 （1）易求得 $a_n=4^n-2^n$；

（2）将 $a_n=4^n-2^n$ 代入 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{2}{3}$ 得

$$S_n=\frac{4}{3}(4^n-2^n)-\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+1}-2\right)=\frac{2}{3}\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n}-1\right),$$

所以

$$T_n=\frac{2^n}{S_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n}{\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n}-1\right)}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^i-1}-\frac{1}{2^{i+1}-1}\right)=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{3}{2},$$

得证。 □

先放缩再裂项

例 2.4.4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，且当 $n\in\mathbb{N}^+$ 时，$(a_{n+1}-1)\left(a_n^2+1\right)=a_n^3$。

（1）比较 a_n 与 a_{n+1} 的大小关系，并证明；

（2）若 $b_n=\left(1-\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}\right)\frac{1}{a_n}$，其中 $n\in\mathbb{N}^+$，证明：$0<\sum\limits_{i=1}^{n}b_i<2$。

解 （1）由已知式解得 $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n^2+1}{1+a_n^2}$，所以

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^3+a_n^2+1}{1+a_n^2}-a_n=\frac{a_n^2+a_n+1}{1+a_n^2}=\frac{\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{1+a_n^2}>0,$$

即 $a_{n+1}>a_n$；

（2）因为 $a_{n+1}>a_n$ 且 $a_1=1$，所以 $a_n>0$，于是

$$
\begin{aligned}
0<b_n=\left(1-\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}\right)\frac{1}{a_n}&=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{a_n a_{n+1}^2}=\frac{(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)}{a_n a_{n+1}^2} \\
&<\frac{2a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)}{a_n a_{n+1}^2}=\frac{2(a_{n+1}-a_n)}{a_n a_{n+1}}=2\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right),
\end{aligned}
$$

下面再求和即可。 □

三、迭代

叠加

例 2.4.5. （05 年湖北理）已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}\left[\log_2 n\right]$，其中 n 为不大于 2 的整数，$\left[\log_2 n\right]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数。设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正且满足 $a_1=b(b>0)$，$a_n\le\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}(n=2,3,4,\ldots)$，证明：$a_n<\frac{2b}{2+b\left[\log_2 n\right]}$，$n=3,4,5,\ldots$。

分析 由条件 $a_n\le\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$ 得 $\frac{1}{a_n}\ge\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$，即

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\ge\frac{1}{n}\ (n\ge 2),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n-1}}&=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\\&\ge\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{b}\\&>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\left[\log_2 n\right]=\frac{2+b\left[\log_2 n\right]}{2b},\end{aligned}$$

即得 $a_n<\frac{2b}{2+b\left[\log_2 n\right]}\ (n\ge 3)$。 □

叠乘

例 2.4.6. （09 陕西理 22）已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},n\in\mathbb{N}^+$。

（1）猜想数列 $\{x_{2n}\}$ 的单调性，并证明你的结论；

（2）证明：$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$。

证明 （1）由已知易计算得 $x_2=\frac{2}{3}$，$x_4=\frac{5}{8}$，$x_4=\frac{13}{21}$，可见 $x_2>x_4>x_6$，猜想：数列 $\{x_{2n}\}$ 是递减数列。下面用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，已证命题成立；假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $x_{2k}>x_{2k+2}$，易知 $x_{2k}>0$，那么

$$\begin{aligned}x_{2k+2}-x_{2k+4}&=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}\\&=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0,\end{aligned}$$

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$，故当 $n=k+1$ 时命题也成立，即命题得证。

（2）当 $n=1$ 时，$|x_{n+1}-x_n|=|x_2-x_1|=\frac{1}{6}$，结论成立；当 $n\ge 2$ 时，易知 $0<x_{n-1}<1$，得

$$x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}>\frac{1}{2},$$

所以

$$(1+x_n)(1+x_{n-1})=\left(1+\frac{1}{1+x_{n-1}}\right)(1+x_{n-1})=2+x_{n-1}\ge\frac{5}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= \left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}\right| = \frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \\ &\le \frac{2}{5}|x_n-x_{n-1}| \le \left(\frac{2}{5}\right)^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \le \cdots \le \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}|x_2-x_1| \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}。\end{aligned}$$

□

四、运用二项式定理

例 2.4.7. （09 湖北卷）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\ (n\in\mathbb{N}^+)$。

（1）令 $b_n=2^na_n$，求证数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）令 $c_n=\frac{n+1}{n}a_n$，$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，试比较 T_n 与 $\frac{5n}{2n+1}$ 的大小，并予以证明。

解 （1）由 $S_n=-a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$ 得 $a_1=-a_1+1 \implies a_1=\frac{1}{2}$，并且

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=-a_{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+2-\left(-a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right)=a_n-a_{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

得到

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2^{n+1}} \implies b_{n+1}=2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+1=b_n+1,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，从而 $b_n=n \implies a_n=\frac{n}{2^n}$。

（2）$c_n=\frac{n+1}{n}a_n=\frac{n+1}{2^n}$，则

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{n+1}{2^n},\\ \frac{1}{2}T_n&=\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

两式相减得

$$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}+\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}},$$

所以 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$，则

$$T_n-\frac{5n}{2n+1}=3-\frac{n+3}{2^n}-\frac{5n}{2n+1}=\frac{(n+2)\left(2^n-2n-1\right)}{2^n\left(2n+1\right)},$$

于是确定 T_n 与 $\frac{5n}{2n+1}$ 的大小等价于比较 2^n 与 $2n+1$ 的大小。

当 $n=1,2$ 时容易验证 $T_n>\frac{5n}{2n+1}$；当 $n\ge3$ 时，由二项式定理有

$$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n>C_n^0+C_n^1+C_n^{n-1}+C_n^n=2n+2>2n+1,$$

即当 $n\ge3$ 时也有 $T_n>\frac{5n}{2n+1}$。综上所述，$T_n>\frac{5n}{2n+1}$。

□

2.5 “同乘向量法”在求解一类问题中的应用——陈婷、邵立人

在平面向量中，经常会遇到这样一类问题“在一定条件下，已知向量关系式 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x,y 的值或求代数表达式 $ax+by$ 的取值范围”，这类问题通常可转化为图形问题或线性规划问题等。笔者通过探究发现，在向量关系两边同乘某个向量是解决这类问题的一种有效方法，现举例如下。

例 2.5.1. 如图 2.5.1 所示，已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $120°$，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角为 $30°$，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=5$，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x,y 的值。

解 在

$$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB} \tag{2.5.1}$$

的两边同乘 $\overrightarrow{OA}$，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}^2+y\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} &\implies 5\cdot1\cdot\cos30°=x+y\cdot1\cdot1\cdot\cos120°\\ &\implies \frac{5}{2}\sqrt{3}=x-\frac{1}{2}y,\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

在式 (2.5.1) 的两边再同乘 $\overrightarrow{OB}$，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OB}^2 &\implies 5\cdot1\cdot\cos90°=x\cdot1\cdot1\cdot\cos120°+y\\ &\implies 0=-\frac{1}{2}x+y,\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

联立方程组 (2.5.2)、(2.5.3)，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{10}{3}\sqrt{3},\\ y=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}。\end{cases}$ □

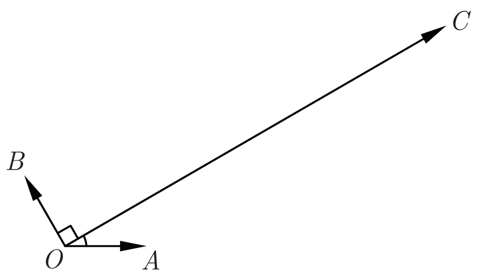


图 2.5.1

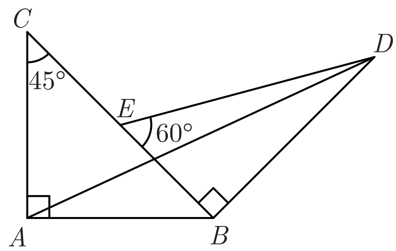


图 2.5.2

例 2.5.2. 如图 2.5.2 所示，两块斜边长相等的直角三角板拼在一起，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x,y 的值。

解 由于 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，从而有

$$\overrightarrow{BD}=(x-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}。$$

不妨设 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$，则 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，仿例 2.5.1，对上式两边分别同乘 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 得

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=(x-1)\cdot\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=(x-1)\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\cdot\overrightarrow{AC}^2\end{cases}\implies\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot1\cdot\cos45°=x-1\\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot1\cdot\cos45°=y\end{cases}\implies\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}。\end{cases}$$ □

评注： 已知向量关系式 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，要求 x,y 两个变量的值时，通常是在向量等式的两边同乘两个向量，得到两个代数等式，再联立成方程组即可求得。

例 2.5.3. 如图 2.5.3 所示，在正六边形 $ABCDEF$ 中，P 是 $\triangle CDE$ 内（包括边界）的动点，设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$ $(x,y\in\mathbb{R})$，试求 $x+y$ 的取值范围。

解 连结 AD，设 $\angle PAD=\theta$，作 $PQ\perp AD$。不妨设边长是 1，则 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=2$，所以

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AD}=x\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+y\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=x+y,$$
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\theta=2\left|\overrightarrow{AQ}\right|,$$

又显然有 $\left|\overrightarrow{AQ}\right|\in\left[\frac{3}{2},2\right]$，所以 $x+y\in[3,4]$。 □

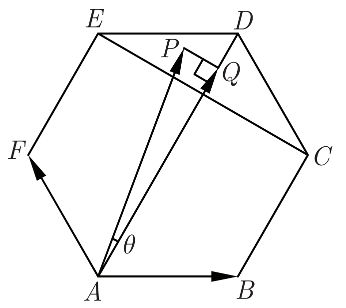


图 2.5.3

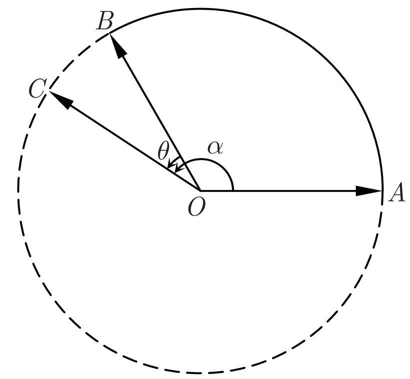


图 2.5.4

例 2.5.4. 如图 2.5.4 所示，在单位圆 O 上的两点 A、B 满足 $\angle AOB=120^\circ$，点 C 是单位圆上的动点，且 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，试求 $x-2y$ 的取值范围。

解 要求 $x-2y$ 的取值范围，需把向量关系转化为数量关系。

由于 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$，$\angle AOB=120^\circ$，设 $\angle BOC=\theta$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OB}^2 &\implies 1\cdot1\cdot\cos\theta=x\cdot1\cdot1\cdot\cos120^\circ+y\cdot1\\ &\implies x-2y=-2\cos\theta\in[-2,2]\,。\end{aligned}$$
□

评注：（1）已知向量关系式 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，要求代数表达式 $ax+by$ 的取值范围时，通常是在向量等式的两边同乘一个向量，将 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 直接转化为 $ax+by$ 或其倍式的代数式。

（2）若在 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的两边同时乘以 $\overrightarrow{OA}$，设 $\angle AOC=\alpha$，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}^2+y\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\implies 1\cdot1\cdot\cos\alpha=x+y\cdot1\cdot1\cdot\cos120^\circ\implies 2x-y=2\cos\alpha$，得 $2x-y\in[-2,2]$。

（3）如果进一步要求 $x-y$ 的范围呢?

由上述求出的 $2x-y=2\cos\alpha$，$x-2y=-2\cos\theta$，两式相加得 $3(x-y)=2(\cos\alpha-\cos\theta)$，规定 α，θ 以逆时针方向为正，则 $\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$，于是 $x-y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\theta-\varphi)\in\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$。

拓展： 若求 $x-3y$ 的范围呢?

由待定系数法，可得 $x-3y=-\frac{1}{3}(2x-y)+\frac{5}{3}(x-2y)$，从而得 $x-3y=-\frac{1}{3}\cdot2\cos\alpha+\frac{5}{3}\cdot2\cos\theta$，化简得 $x-3y=-3\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{2\sqrt{21}}{3}\sin(\theta-\varphi)\in\left[-\frac{2\sqrt{21}}{3},\frac{2\sqrt{21}}{3}\right]$。

依此类推，可求出 $3x-y$ 等等。

2.6 羊の问题门诊——杨洪

实例细节指导——羊の学科门诊 IV

原帖由 蜻蜓 于 2006-8-31 23:31 发表

羊羊老师您好：

看了您写的《高三考前备考》获益匪浅，这些方法具有较强的通融性，很适合广大高中生。我现读高一，我所在地区使用的是全日制普高教科书。考试类型为：3+X，我校规定高一学生在升高二时分科。我经过多方面的分析选择了自己喜爱的文科，这样我就可以有重点的去学。同时，我明白理科知识在今后的生活中很重要且在高一的月考、断考、末考占分值。

三年，弹指一瞬，我不能预知将来的舞台有多大，但我可以估算行程的步数，对吧。

羊羊老师，下面是我的自我分析：

优势：

1. 初中底子较好。
2. 有自学能力，暑假已将高一上下册自学完毕。
3. 有爱好：美术，经过专业培训。
4. 家庭经济条件优越。
5. 处事思想较成熟。

劣势：

1. 性格孤僻，不愿与人交往。
2. 反映能力不强。
3. 有时思绪杂乱。
4. 偶尔心急气躁。
5. 生活小节处理不当。

根据以上分析，可看出我的劣势都是由客观因素引起地。我相信通过正确引导和自身努力可改变，希望羊羊老师能针对以上情况给予良言。其次我不清楚该怎样对待理科？最后期盼老师的答复，我会在明天下晚自习后阅读。

2006 年 8 月 31 日晚

羊复：

我想你现在是高一新生吧，因为看到你上文说过暑假已经自学高一上下册完毕。

针对你列出的几点优劣势，不过你所具有的优势很可能会变成阻碍学习的劣势。

我做出一些评价，包括一些遇到过的典例：

优势分析：

1. 初中底厚

上高中若初中的底子扎实，初高中过度时期走的路走起来会比较顺不会很吃力。

这对于你来说是一件好事，高中和初中的跨度大因而不易适应但你却占了先机。

初中底厚未就是一件好事，见过非常多很自负初中功底的学生死在过分自信上。

过分自信自己的初中基础，在高中学习上一开始就表现出一副骄傲无物的神色。

但是忽略应当付出的努力，其结果是不言而喻的要么突飞猛退要么就根本颓废。
基础好一定要配不懈努力，才能真正把初中的领先优势发挥出来借以扬长避短。
高中生平均素质比初中高，大部分学生被淘汰故剩余的不算精英也是初中先锋。

2. 自学能力

能用暑假好好地啃下书本，把人家需要一年时间且需要老师引导的内容都学完。
若真正达到这点想来不易，但是对于如何达到的以及如何评价达到标准得置疑。
自学完毕达到了什么程度，是指把内容完全看过一遍还是说把习题解完一整遍?
还是有其他的衡量标准如：可以确信能力能达到一般高一结束时的正常能力呢?
如果仅仅是看完一遍的话，那只能说你比较努力并且属于有自学决心毅力的人;
如果说解完一遍题目的话，那才能说有稍微自学能力当然不能否认你学习决心;
如果达到掌握高一的要求，那么才算有比较强的自学能力和比较有学科的天赋。
无论是哪种程度自学完毕，对你后面需要经历的知识和学习都会有极其大帮助。
所以这点上你是占了先机，但是你必须清楚地定位自己的自学程度和自学认识。
否则很可能如第一点所述，由于过分地自负导致藐视课堂课程学习而最终失败。

3. 美术爱好

经过专业培训这点比较好，人人都应当有在课堂以外的爱好以便丰富课余内容。
高中是社会和大学的门槛，有一技之长对以后认识和接受事物有着很大的帮助。
这些平时自己无法察觉到，但是却会在有意识或下意识或无意识中慢慢体现出。
这种东西无法用言语体现，只有通过长时间积累和不断自我反省认识才能体会。
但是一旦你体会到的时候，你就会发觉那岂止是一点感受而是一笔巨大的财富。
和听过的一句话道理类似：当你认识到自己以前是多么幼稚时你已经开始成熟。
但是这也是一种双面之刃，高中学科为主而兴趣必次之否则顶不住独木桥压力。
所以需要调控匹配好时间，由于某些方面有天份而忽略学习的学生最后多艰难。

4. 优越条件

把经济条件发挥到正道上，有钱可以让自己的生活轻松一些的话当然再好不过。
而且可以学习到很多东西，可以认识很多事物甚至可以比别人更好地接触社会。
把心思少花在家庭经济上，而可以把心思和时间多花在学习和接受新生事物上。
但这点也如前面是双向的，很多人倚仗有钱而学习港台电视学坏的真比比皆是。
当然既然你不会是败家子，因为你会上论坛来仔仔细细地问学习方面的东西吧。

5. 处事成熟

高中再不成熟那就太迟了，不过你能意识到这一点对于你来说还是非常重要的。
这不仅仅说明你擅长世道，也更说明你会下意识去考虑一些深层面的上的问题。

不过由于高中年纪的思想，处事的思路是否真的成熟妥当那就是另外一回事了。毕竟人是在不断地成长的，以后会逐步地意识和认识到自己以前的错误和问题。那确也是成熟的现象之一，潜意识中慢慢修正自己后会发觉成熟比不成熟要好。

劣势分析：

1. 性格孤僻

不愿与人交往是性格孤僻？如果你不愿与别人交往那就少交往或者干脆不交往。这个问题算不上什么劣势，只是就目前社会和学校而言更亲睐于那些圆融的人。实际上很多伟人性格孤僻，孤僻可以给带来更大的空间和时间利于更多的思考。且性格孤僻会否言过其实？性格孤僻和所谓的不愿与人交往还是有很大差距的。所以看你真正定位是什么，不愿与人交往还好不过建议你走出己圈去尝试一下。

2. 反映不强

凡是人就无绝对全面强大，自己的劣势只要看得到以后就会不自觉得去改变它。关于反映能力不强的问题，你可以通过一些智力测验以及条件反射训练来开发。那些东西还是有一定价值，另外多看看笑话的话对反映能力也会有显著地提高。

3. 思绪杂乱

你思绪杂乱得要有个说法，比如什么东西杂乱而且你所处的环境究竟是是如何？再比如因素有多少种可能，比如因感情问题而杂乱还是生理问题或繁琐的事情？思绪杂乱也属于正常现象，每个人都有可能发生杂乱的现象就如喜怒哀乐一般。如果处理事情的思绪杂乱，只能找出一个可能说明的问题那就是逻辑能力不强。所有的事物都有因果关系，并且这些因果关系组成了最最基本简单的逻辑关系。一般这些事情都是螺旋式，通过对其他事物多次反思而螺旋式提高故毋须担心。

4. 心急气躁

仅如上者所述同喜怒哀乐，只能遏制其中的一部分因素但是要消灭是不可能的。否则那大家不都是圣人了？建议多学点古文并慢慢从朗诵中陶冶出情操和德性。

5. 小节不当

生活小节的问题并不复杂，只能说尽量多去关心和在意一下自己周围的人和事。在优劣来比较的情况下，说明你是一个功利的学生。注，此处功利并非是坏事。相反学生若不功利，就难有进步的斗志，学生若不虚荣，也就难有前进的动力。要让一个学生高尚然后以高尚的情操为动力去学习并且还要提高，简直说天书。相反简单的功利思想和虚荣奖励之类的催化剂作用之下，的确是可以让人进步。而且我们可以一在进步的途中，慢慢地去陶冶情操，毕竟高尚和功利并非水火。

3 进阶篇

3.1 双曲函数的基本性质及简单应用（下）——吴炜超

（上）篇中我们把双曲函数的基本性质简单地讲了一下，这一期我们接着对双曲函数举几个应用的例子。

三、双曲函数可以有哪些应用?

双曲双曲，看名字就知道它和双曲线可能有关系，的确，第一个应用就在双曲线上。

对于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，我们可以用参数方程 $\begin{cases} x=a\cos(\theta), \\ y=b\sin(\theta), \end{cases}$ 但是到了双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 这招就不管用了，结果在没办法的情况下只好把正切和正割弄上去，变成 $\begin{cases} x=a\sec(\theta), \\ y=a\tan(\theta), \end{cases}$ 显然正切和正割的性质比正弦余弦差远了，现在有双曲函数，那就好办多了，令 $\begin{cases} x=a\operatorname{ch}(t), \\ y=b\operatorname{sh}(t), \end{cases}$ 这个参数方程只表示双曲线的右支，因为 $x=a\operatorname{ch}(t)>0$ 恒成立，左支则只需变成 $x=-a\operatorname{ch}(t)$ 就好了。

例 3.1.1. 点 A、B 都是双曲线 $x^2-y^2=1$ 右支上的点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值。

解 将双曲线变成参数方程形式 $\begin{cases} x=\operatorname{ch}(t), \\ y=\operatorname{sh}(t), \end{cases}$ 设 $A:(\operatorname{ch}(t_1),\operatorname{sh}(t_1)), B:(\operatorname{ch}(t_2),\operatorname{sh}(t_2))$，则

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2)+\operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2)=\operatorname{ch}(t_1+t_2),$$

因此当 $t_1+t_2=0$，也就是 AB 垂直 x 轴时，原式有最小值 1。 □

第二个应用，是在数列方面的，有些数列的通项可以用三角函数去拟合，但是三角函数值域有限，有时数列的首项刚好就超出这个值域，这时双曲函数就可以很好的发挥作用了。

例 3.1.2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-2$，
（1）$a_1=1$，求数列通项;
（2）$a_1=3$，求数列通项。

解 （1）观察得到，当 $a_n=2\cos(x)$ 时，$a_{n+1}=4\cos^2(x)-2=2\cos(2x)$，因此令 $a_n=2\cos\left(2^{n-1}a\right)$，$a_1=2\cos(a)=1$，$a=\dfrac{\pi}{3}$，则

$$a_n=2\cos\left(2^{n-1}a\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}2^{n-1}\right)。$$

（2）如果同样令 $a_n=2\cos\left(2^{n-1}a\right)$，就会碰到 $a_1=2\cos(a)=3, \cos(a)=\dfrac{3}{2}$，然后解不出来（当然，硬来也是可以的，你可以用一些别的方法解出 $a=i\ln\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$，但显然不推荐这样做），这里就应该令 $a_n=2\operatorname{ch}\left(2^{n-1}a\right)$，然后 $a_1=2\operatorname{ch}(a)=3$，$a=\ln\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$，则

$$a_n=2\operatorname{ch}\left(2^{n-1}\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)。$$ □

例 3.1.3. (2006 年全国高中数学联赛加试第二大题) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=x$，$a_1=y$，$a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$，$n=1,2,\ldots$。

（1）对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n\geq n_0$ 时 a_n 恒为常数？

（2）求通项 a_n。

解 第（1）问这里略去，详情见参考答案。这里仅对第（2）问给出异于参考答案的方法，这里利用双曲函数去求通项。

首先观察递推式 $a_{n+1}=\dfrac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$，不难发现与之很像的是双曲余切函数的一个公式——

$$\operatorname{cth}(a+b)=\frac{\operatorname{cth}(a)\operatorname{cth}(b)+1}{\operatorname{cth}(a)+\operatorname{cth}(b)}。$$

于是这里不妨假定

$$a_n=\operatorname{cth}(b_n),$$

为了适应 a_n 的范围，这里我们令 b_n 的范围为复数，这样除非 $a_n=\pm1$，否则都是可以用 b_n 表示。那么，当 $a_n\neq\pm1$ 时，有

$$\operatorname{cth}(b_{n+1})=\frac{\operatorname{cth}(b_n)\operatorname{cth}(b_{n-1})+1}{\operatorname{cth}(b_n)+\operatorname{cth}(b_{n-1})}=\operatorname{cth}(b_n+b_{n-1}),$$

即

$$b_{n+1}=b_n+b_{n-1},$$

由特征根方法解出来可以知道，此类数列通项为

$$b_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

代入 $b_0=\operatorname{arccth}(a_0)=\operatorname{arccth}(x)$，$b_1=\operatorname{arccth}(a_1)=\operatorname{arccth}(y)$ 可解得

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2\sqrt{5}\operatorname{arccth}(y)+(5-\sqrt{5})\operatorname{arccth}(x)}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{(5+\sqrt{5})\operatorname{arccth}(x)-2\sqrt{5}\operatorname{arccth}(y)}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\\&=\operatorname{arccth}(y)F_n+\operatorname{arccth}(x)F_{n-1},\end{aligned}$$

这里 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ 表示斐波那契 (Fibonacci) 数列[1]的第 n 项。

为了方便计算 a_n，我们先计算 e^{b_n}。事实上，由 $\operatorname{arccth}(t)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t+1}{t-1}$，得

$$e^{b_n}=e^{\frac{F_n}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}+\frac{F_{n-1}}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}}=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{\frac{F_n}{2}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{F_{n-1}}{2}},$$

于是

$$\begin{aligned}a_n=\operatorname{cth}(b_n)=\frac{e^{b_n}+e^{-b_n}}{e^{b_n}-e^{-b_n}}=\frac{e^{2b_n}+1}{e^{2b_n}-1}&=\frac{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{F_n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{F_{n-1}}+1}{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{F_n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{F_{n-1}}-1}\\&=\frac{(y+1)^{F_n}(x+1)^{F_{n-1}}+(y-1)^{F_n}(x-1)^{F_{n-1}}}{(y+1)^{F_n}(x+1)^{F_{n-1}}-(y-1)^{F_n}(x-1)^{F_{n-1}}}。\end{aligned}$$

至于 x 或 y 等于 ±1 时，由第一问可知后面都是常数，更简单，这里就不啰嗦了。 □

[1] 这里的斐波那契数列指的是 $\{1,1,2,3,5,8,\ldots\}$，与参考答案中有差别，参考答案中按第 0 项 F_0 开始，故此这里的 F_n 相当于参考答案中的 F_{n-1}。

第三种应用是积分上的，双曲代换。

例 3.1.4. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+1}}$。

解 令 $x=\operatorname{sh}(t)$，则有

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\mathrm{d}\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}=\int \mathrm{d}\,t=t+c\text{，其中 } t=\operatorname{arcsh}(x)\text{，}$$

因此 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+1}}=\operatorname{arcsh}(x)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$。 □

第四种应用，就是后面那些求和式的应用，比较高端，应用面没那么广，可能可以用来解决一些特殊问题。

例 3.1.5. 设 p,q 是一元二次方程 $x^2+2ax-1=0$（$a>0$）的两根，其中 $p>0$，令 $y_1=p-q$，$y_{n+1}=y_n^2-2$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_1y_2}+\cdots+\frac{1}{y_1y_2\cdots y_n}\right)=p$。

证明 p,q 为方程 $x^2+2ax-1=0$ 两根，因此 $p+q=-2a<0$，$pq=-1$，由于 $p>0$，所以 $p+q<0$，$p<-q=-\dfrac{1}{p}$，$p<1$，$y_1=p-q=p+\dfrac{1}{p}$，令 $p=e^{-t}$（$t>0$），然后有 $y_1=2\operatorname{ch}(t)$，同时易证 $y_n=2\operatorname{ch}\left(2^{n-1}t\right)$，所以

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{y_i}=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{2\operatorname{ch}(2^{i-1}t)}=\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\operatorname{ch}(2^{i-1}t)}=\frac{\operatorname{sh}(t)}{2^n\operatorname{sh}(t)}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\operatorname{ch}(2^{i-1}t)}=\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(2^kt)},$$

由此得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{y_i}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(2^kt)}=\operatorname{sh}(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(2^kt)}=\operatorname{sh}(t)\left(\operatorname{cth}(t)-1\right)=\operatorname{ch}(t)-\operatorname{sh}(t)=e^{-t}=p\text{。}$$ □

例 3.1.6. 求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$。

这个以往都是要化成复数来做，现在如果知到三角和双曲的关系，就可以直接化为双曲做了。

解

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)&=-i\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(ikx)\\
&=-i\operatorname{csch}\left(\frac{ix}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{inx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}i\,(n+1)\,x\right)\\
&=-i\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{inx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}i\,(n+1)\,x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{ix}{2}\right)}\\
&=-i\frac{\left(i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\left(i\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\,x\right)\right)}{i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&=\csc\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\,x\right)\text{。}
\end{aligned}$$ □

好了，有关双曲函数的东西就写到这里，希望能对读者有所帮助。

3.2 来自群里的一道三角题——郭子伟

本文中的题目本来打算放到前面的《三角微型整理》一文中作为例题或习题，但后来经过研究，发现了其它简洁漂亮的解法，并且在最后得到了漂亮的不等式链（尽管可能不太强），故此鉴于篇幅以及难度较大，于是决定把解决的过程稍详细地整理成文，写进这“进阶篇”里。

好，废话少说，先来看看“人教论坛数学官方群”里的某网友提供的原题目：

题目 3.2.1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\dfrac{c}{\cos\dfrac{C}{2}} = a\cot B + b\cot A$，判断三角形的形状。

此题在群里几天都没人作详细解答，笔者首先以转化角的方向给出如下繁琐的因式分解方法：

解 由正弦定理及两倍角公式，可知

$$\frac{c}{\cos\dfrac{C}{2}} = a\cot B + b\cot A \iff 2\sin\frac{C}{2} = \frac{\sin A\cos B}{\sin B} + \frac{\sin B\cos A}{\sin A},$$

去分母并利用诱导公式，上式等价于

$$2\sin A\sin B\cos\frac{A+B}{2} = \sin^2 A\cos B + \sin^2 B\cos A。$$

为方便分解，记 $\dfrac{A+B}{2} = x, \dfrac{A-B}{2} = y$，则 $A = x+y, B = x-y$，且易知 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 可得 $\cos x > 0, \cos y > 0$。代入上式并反复利用积化和差、和差化积等公式进行变形，得

$$\begin{aligned}
& 2\sin A\sin B\cos\frac{A+B}{2} = \sin^2 A\cos B + \sin^2 B\cos A \\
\iff & 2\sin(x+y)\sin(x-y)\cos x = \sin^2(x+y)\cos(x-y) + \sin^2(x-y)\cos(x+y) \\
\iff & 2\left(\cos^2 y - \cos^2 x\right)\cos x = \frac{1}{2}\sin(x+y)(\sin 2x + \sin 2y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)(\sin 2x - \sin 2y) \\
\iff & 2\left(\cos^2 y - \cos^2 x\right)\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x(\sin(x+y) + \sin(x-y)) + \frac{1}{2}\sin 2y(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \\
\iff & 2\left(\cos^2 y - \cos^2 x\right)\cos x = 2\sin x\cos x\sin x\cos y + 2\sin y\cos y\cos x\sin y \\
\iff & 2\left(\cos^2 y - \cos^2 x\right)\cos x = 2\cos x\cos y\left(\sin^2 x + \sin^2 y\right) \\
\iff & \cos^2 y - \cos^2 x = \cos y\left(2 - \cos^2 x - \cos^2 y\right) \\
\iff & \cos^3 y + \cos^2 y - 2\cos y = \cos^2 x(1 - \cos y) \\
\iff & \cos y(\cos y - 1)(\cos y + 2) = \cos^2 x(1 - \cos y) \\
\iff & (\cos y - 1)\left(\cos^2 x + (\cos y + 1)^2 - 1\right) = 0,
\end{aligned}$$

由 $\cos y > 0$ 易得

$$\cos^2 x + (\cos y + 1)^2 - 1 > 0,$$

从而必有

$$\cos y = 1 \iff A = B,$$

因此 $\triangle ABC$ 必为等腰三角形。 □

证完后笔者感到有可能兜了大弯，看上去似乎很浅的式子竟然在变形分解时化得如此曲折，最后的峰回路转更是让笔者觉得极有可能有简单方法。于是笔者继续思考，化边会不会简单些？但左边有二分之一角，化边后应该会有根号，不太好办，而如果两边平方升为一倍角，则右边次数太高估计难以分解。再三考虑后决定干脆就用内切圆系统代换，左边带根号就带根号吧，不管如何试试再说。一试之下便得如下的：

题目 3.2.2. 对任意的 $\triangle ABC$，求证：$\dfrac{c}{\cos\dfrac{C}{2}} \le a\cot B + b\cot A$。

其实从前面的证明也可以看出这个不等式成立，不过这里利用内切圆代换系统，对此不等式可以较为轻松地解决，从而由取等条件就可以得到原题目 3.2.1 的结论。为此，这里先给出如下引理：

引理 3.2.1. 三个正数 a,b,c 能构成三角形的充要条件是存在三个正数 x,y,z 使得 $a=y+z, b=z+x, c=x+y$。在此情况下，记 a,b,c 构成 $\triangle ABC$，则有 $\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{xy}{(y+z)(z+x)}}$、$\cos A = 1-\dfrac{2yz}{(z+x)(x+y)}$ 等等。

引理不难证，这里就略去了，读者可以试试。以下由此代换证明此题：

证法一 依然由正弦定理及两倍角公式知

$$\frac{c}{\cos\dfrac{C}{2}} \le a\cot B + b\cot A \iff 2\sin\frac{C}{2} \le \frac{a\cos B}{b}+\frac{b\cos A}{a},$$

由引理，设 $a=y+z, b=z+x, c=x+y, x,y,z>0$，则上式等价于

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}} \le \frac{y+z}{z+x}\left(1-\frac{2zx}{(x+y)(y+z)}\right)+\frac{z+x}{y+z}\left(1-\frac{2yz}{(z+x)(x+y)}\right)\\
\iff &2\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}} \le \frac{(y+z)(y(x+y+z)-zx)+(z+x)(x(x+y+z)-yz)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\
\iff &2(x+y)\sqrt{xy(y+z)(z+x)} \le (x+y+z)\left(x^2+y^2+z(x+y)\right)-2xyz-z^2(x+y)\\
\iff &2(x+y)\sqrt{xy(y+z)(z+x)} \le (x+y)\left(x^2+y^2\right)+z\left((x+y)^2+x^2+y^2\right)-2xyz\\
\iff &2(x+y)\sqrt{xy(y+z)(z+x)} \le (x+y+2z)\left(x^2+y^2\right),
\end{aligned}$$

由均值不等式，有

$$x+y+2z = y+z+z+x \ge 2\sqrt{(y+z)(z+x)},$$

以及

$$x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge (x+y)\sqrt{xy},$$

两式相乘即得

$$(x+y+2z)\left(x^2+y^2\right) \ge 2(x+y)\sqrt{xy(y+z)(z+x)},$$

所以原不等式成立。等号成立当且仅当 $x=y \iff a=b$，于是题目 3.2.1 的结论成立。 □

这个证明虽然比前面的分解要简单，但用内切圆代换感觉还是有点点“暴力”，而且毕竟并不是太多人了解这代换系统。不过有了不等式方向的思考，自然对于笔者来说是有了思路的大开阔，考虑到最后的均值放缩比较松，可能有更强式，经思考后随即得到上题的另一简证：

证法二 依然由正弦定理及两倍角公式知

$$\frac{c}{\cos\dfrac{C}{2}} \le a\cot B + b\cot A \iff 2\sin\frac{C}{2} \le \frac{a\cos B}{b}+\frac{b\cos A}{a}。$$

下面先证明 $\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{c}{a+b}$。事实上，由正弦定理、两倍角公式及和差化积公式，有

$$\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{a+b} \iff \frac{1}{2}\le\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin A+\sin B} \iff \frac{1}{2}\le\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}} \iff \cos\frac{A-B}{2}\le 1,$$

显然成立。由此，我们只需证明如下更强式：

$$\frac{2c}{a+b} \le \frac{a\cos B}{b} + \frac{b\cos A}{a}。 \tag{3.2.1}$$

由余弦定理可知式 (3.2.1) 等价于

$$\frac{2c}{a+b} \le \frac{c^2+a^2-b^2}{2bc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2ca},$$

上式整理为

$$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right) \ge \frac{4c}{a+b} + \frac{1}{c}(a+b)。 \tag{3.2.2}$$

由均值不等式，有

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 4 \implies \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b},$$

以及

$$\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{a} + a \ge 2a + 2b \implies \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \ge a + b,$$

可见式 (3.2.2) 成立，故原不等式成立。不难看出以上各不等式的取等条件均为 $a = b$，于是也可看题目 3.2.1 的结论成立。 □

笔者继续观察更强式，想起射影定理，立得式 (3.2.1) 的更简单证法，余弦定理也省去，计算量极少：

证法三 前面与证法二相同，这里只证式 (3.2.1)。由对称性不妨设 $a \ge b$，则有 $\pi > A \ge B > 0$，于是 $\cos B \ge \cos A$。又由于此时 B 必定为锐角，即 $\cos B > 0$，于是必有 $a\cos B \ge b\cos A$，即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{1}{a}, \\ a\cos B \ge b\cos A。\end{cases}$$

由此，根据排序不等式或切比雪夫不等式，得

$$\frac{a\cos B}{b} + \frac{b\cos A}{a} \ge \frac{1}{2}(a\cos B + b\cos A)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

由射影定理知

$$a\cos B + b\cos A = c,$$

以及由证法二中证得的

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b},$$

所以

$$\frac{1}{2}(a\cos B + b\cos A)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{2c}{a+b},$$

即得式 (3.2.1)。 □

这样，到目前为止，我们综合上述即得如下不等式链：

$$2\sin\frac{C}{2} \le \frac{2c}{a+b} \le \frac{1}{2}(a\cos B + b\cos A)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \le \frac{a\cos B}{b} + \frac{b\cos A}{a}。$$

各等号的取等条件均为 $a = b$ 即等腰三角形。若再变回原题目的式子的形式，就是：

$$\frac{c}{\cos\dfrac{C}{2}} \le \frac{2c}{\sin A + \sin B} \le \frac{1}{2}(a\cos B + b\cos A)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right) \le a\cot B + b\cot A。$$

至此，笔者对上述结果感到较为满意，暂时整理到此，大家也可以继续想下有没有更漂亮的解法或者更强的式子。感谢阅读。

3.3 对一道亚太地区不等式竞赛题的一点研究——郭子伟

2004 亚太：对任意 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，求证：

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)。\tag{3.3.1}$$

这个题目在早前已有文献对其进行加强与推广，比如如下的加强式与系数推广式：

对 $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$，$m\geq 0$，有

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2;\tag{3.3.2}$$

以及

$$(a^2+m)(b^2+m)(c^2+m)\geq \frac{3}{4}m^2(a+b+c)^2。\tag{3.3.3}$$

事实上，当 $m\neq 0$ 时，对式 (3.3.3) 稍作变形为

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{m}}\right)^2+2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{m}}\right)^2+2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{m}}\right)^2+2\right)\geq 3\left(\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{m}}\right)^2,\tag{3.3.4}$$

对比式 (3.3.4) 与式 (3.3.2)，可以看出只是作了代换 $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{m}}\longleftrightarrow a$ 等等，可见此时式 (3.3.2) 与式 (3.3.3) 是等价的，即以上加强与系数推广在本质上可以说是一样的。另外还有文献对式 (3.3.2) 进行了如下的多元推广：

对 $\forall x_i\in\mathbb{R}^+,i=1,2,\ldots,n,n\geq 3,n\in\mathbb{N}$，有

$$(x_1^{n-1}+n-1)(x_2^{n-1}+n-1)\cdots(x_n^{n-1}+n-1)\geq n(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{n-1}。\tag{3.3.5}$$

限于篇幅，以上的加强和推广的证明这里就不再重复了，请见本文最后所列出的参考文献。

本文将对式 (3.3.2) 继续作一系列的加强以及另一种多元推广。先来看如下的优美不等式和猜想：

五个加强：对 $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$，有

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right);\tag{3.3.6}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+2\left((ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\right);\tag{3.3.7}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+\frac{3}{4}\left((ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right);\tag{3.3.8}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+8\left(\frac{ab+bc+ca}{3}-1\right)^2;\tag{3.3.9}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+\left(\frac{a+b+c}{3}-abc\right)^2。\tag{3.3.10}$$

五个猜想：对 $\forall a,b,c\geq 0$，有

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2;\tag{3.3.11}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2;\tag{3.3.12}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2;\tag{3.3.13}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+8\left(\frac{a+b+c}{3}-1\right)^2;\tag{3.3.14}$$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2+(ab+bc+ca-a-b-c)^2。\tag{3.3.15}$$

以下是作者对五个加强式的证明，证法并不多而且相对较暴力，大家不妨尝试自己证一下，希望看到更精彩的证法。后面的五个猜想已用软件验证正确，请大家踊跃试证。

式 (3.3.6) 的证明　由于 a, b, c 这三个数中必有两者同号，由对称性不妨设 $bc \geq 0$。令

$$\begin{aligned}f(a) &= (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \\ &= (b^2c^2+2b^2+2c^2)a^2 - 5(b+c)a + 2b^2c^2 - 5bc + 8,\end{aligned}$$

若 b, c 同时为 0，则 $f(a) = 8 > 0$，不等式恒成立；若 b, c 不同时为 0，则 $f(a)$ 为关于 a 的二次函数并且开口向上，计算其判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= 25(b+c)^2 - 4(b^2c^2+2b^2+2c^2)(2b^2c^2-5bc+8) \\ &= -\left((4bc-5)^2+14\right)(b-c)^2 - 4bc(2bc+7)(bc-1)^2,\end{aligned}$$

由 $bc \geq 0$ 可见 $\Delta \leq 0$，因此得到 $f(a) \geq 0$ 对于任意 $a \in \mathbb{R}$ 成立，即原不等式成立。 □

式 (3.3.7) 证法一　直接左右作差有

$$\begin{aligned}&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2 - 2\left((ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\right) \\ =\ & a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 2 \\ =\ & \frac{\left(ab^2c^2+a-b-c\right)^2 + b^2c^2\left(b-c\right)^2 + 2\left(bc-1\right)^2}{b^2c^2+1} \\ \geq\ & 0,\end{aligned}$$

因此原不等式成立。 □

式 (3.3.7) 证法二　由于 a^2-1, b^2-1, c^2-1 这三个数中必有两者同号，由对称性，不妨设 $(a^2-1)(b^2-1) \geq 0$，则左右作差有

$$\begin{aligned}&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2 - 2\left((ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\right) \\ =\ & a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 2 \\ =\ & c^2(a^2-1)(b^2-1) + (ac-1)^2 + (bc-1)^2 + (a-b)^2 \\ \geq\ & 0,\end{aligned}$$

因此原不等式成立。 □

式 (3.3.8) 的证明　由于 a^2-1, b^2-1, c^2-1 这三个数中必有两者同号，由对称性，不妨设 $(a^2-1)(b^2-1) \geq 0$，则左右作差有

$$\begin{aligned}&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2 - \frac{3}{4}\left((ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right) \\ =\ & c^2(a^2-1)(b^2-1) + \frac{1}{8}\left((3c^2+8)(a-b)^2 + (2ab+3bc+3ca-8)^2\right) \\ \geq\ & 0,\end{aligned}$$

因此原不等式成立。另外，上式也可以配方为

$$c^2(a^2-1)(b^2-1) + \frac{3\left(2(a^2+ab+b^2)c+(a+b)(ab-4)\right)^2 + (a^2b^2+8a^2+8b^2+16)(a-b)^2}{8(a^2+ab+b^2)},$$

同样可得原不等式成立。 □

式 (3.3.9) 的证明　直接左右作差整理，有

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) - 3(a+b+c)^2 - 8\left(\frac{ab+bc+ca}{3} - 1\right)^2$$

$$
= \frac{\left(8(bc-1)^2+(b^2+1)(c^2+1)+9(b^2+c^2)\right)a^2-2(b+c)(8bc+3)a+10b^2c^2+9b^2+9c^2-6bc}{9},
$$

令 $f(a)=\left(8(bc-1)^2+(b^2+1)(c^2+1)+9(b^2+c^2)\right)a^2-2(b+c)(8bc+3)a+10b^2c^2+9b^2+9c^2-6bc$，则 $f(a)$ 为关于 a 的二次函数并且开口向上，计算其判别式为

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (2(b+c)(8bc+3))^2-4\left(8(bc-1)^2+(b^2+1)(c^2+1)+9(b^2+c^2)\right)\left(10b^2c^2+9b^2+9c^2-6bc\right)\\
&= -72(5b^2c^2+2b^2+2c^2)(bc-1)^2-36(9b^2c^2+10b^2+10c^2+4)(b-c)^2\\
&\le 0,
\end{aligned}
$$

因此得到 $f(a)\ge 0$ 对于任意 $a\in\mathbb{R}$ 成立，即原不等式成立。 □

式 (3.3.10) 的证明 直接左右作差整理，有

$$
\begin{aligned}
&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)-3(a+b+c)^2-\left(\frac{a+b+c}{3}-abc\right)^2\\
=&\ \frac{\left(18b^2+18c^2+6bc+8\right)a^2+2(b+c)(3bc-28)a+18b^2c^2+8b^2+8c^2-56bc+72}{9},
\end{aligned}
$$

令 $f(a)=\left(18b^2+18c^2+6bc+8\right)a^2+2(b+c)(3bc-28)a+18b^2c^2+8b^2+8c^2-56bc+72$，则 $f(a)$ 为关于 a 的二次函数并且开口向上，计算其判别式为

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (2(b+c)(3bc-28))^2-4\left(18b^2+18c^2+6bc+8\right)\left(18b^2c^2+8b^2+8c^2-56bc+72\right)\\
&= -144\left(5(b+c)^2+2(b-c)^2+16\right)(bc-1)^2-36\left(16b^2+16c^2+7b^2c^2+36\right)(b-c)^2\\
&\le 0,
\end{aligned}
$$

因此得到 $f(a)\ge 0$ 对于任意 $a\in\mathbb{R}$ 成立，即原不等式成立。 □

那么加强部分就暂时到这里，当然，理论上加强是加不完的，只是我们一般都只要一些形式简洁漂亮的不等式，太复杂的就不管了，大家可以试试自己去建立其它加强式。

接下来的是式 (3.3.2) 的另一种多元推广及其证明：

另一多元推广： 对 $\forall x_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,n, n\in\mathbb{N}^+$，有

$$
\left(x_1^2+n-1\right)\left(x_2^2+n-1\right)\cdots\left(x_n^2+n-1\right)\ge n^{n-2}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2。 \tag{3.3.16}
$$

证明 我们先证明如下引理：

引理 3.3.1. 若 $x_1,x_2,\ldots,x_n\ge -1$ 且符号相同（这里规定有 0 时也认为 0 与正数或负数符号相同，下同），则有

$$
\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)\cdots\left(x_n+1\right)\ge x_1+x_2+\cdots+x_n+1。 \tag{3.3.17}
$$

引理的证明 当 $n=1$ 时，式 (3.3.17) 为恒等式，显然成立；假设当 $n=k$（k 为正整数）时式 (3.3.17) 成立，即

$$
\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)\cdots\left(x_k+1\right)\ge x_1+x_2+\cdots+x_k+1,
$$

则当 $n=k+1$ 时，由已知条件及归纳假设，有

$$
\begin{aligned}
\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)\cdots\left(x_k+1\right)\left(x_{k+1}+1\right) &\ge \left(x_1+x_2+\cdots+x_k+1\right)\left(x_{k+1}+1\right)\\
&= x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+1+x_{k+1}\left(x_1+x_2+\cdots+x_k\right)\\
&\ge x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+1,
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时式 (3.3.17) 也成立，由数学归纳法，引理得证。 □

回到原不等式，由于 $x_1^2-1,x_2^2-1,\dots,x_n^2-1$ 这 n 个数均不小于 -1，而且也必定可以分为符号相同的两组，不失一般性，设这两组为 $x_1^2-1,x_2^2-1,\dots,x_k^2-1$ 和 $x_{k+1}^2-1,x_{k+2}^2-1,\dots,x_n^2-1$，其中 $1\le k\le n$。由引理，有

$$\begin{aligned}\left(x_1^2+n-1\right)\left(x_2^2+n-1\right)\cdots\left(x_k^2+n-1\right)&=n^k\left(\frac{x_1^2-1}{n}+1\right)\left(\frac{x_2^2-1}{n}+1\right)\cdots\left(\frac{x_k^2-1}{n}+1\right)\\&\ge n^k\left(\frac{x_1^2-1}{n}+\frac{x_2^2-1}{n}+\cdots+\frac{x_k^2-1}{n}+1\right)\\&=n^{k-1}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2+n-k\right),\end{aligned}$$

即

$$\left(x_1^2+n-1\right)\left(x_2^2+n-1\right)\cdots\left(x_k^2+n-1\right)\ge n^{k-1}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2+n-k\right),$$

同理可得

$$\left(x_{k+1}^2+n-1\right)\left(x_{k+2}^2+n-1\right)\cdots\left(x_n^2+n-1\right)\ge n^{n-k-1}\left(x_{k+1}^2+x_{k+2}^2+\cdots+x_n^2+k\right),$$

将以上两式相乘并由柯西不等式，有

$$\begin{aligned}&\left(x_1^2+n-1\right)\left(x_2^2+n-1\right)\cdots\left(x_n^2+n-1\right)\\\ge\ &n^{n-2}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2+n-k\right)\left(x_{k+1}^2+x_{k+2}^2+\cdots+x_{k+n}^2+k\right)\\=\ &n^{n-2}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-k\text{ 个}}\right)\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\text{ 个}}+x_{k+1}^2+x_{k+2}^2+\cdots+x_{k+n}^2\right)\\\ge\ &n^{n-2}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2,\end{aligned}$$

即得

$$\left(x_1^2+n-1\right)\left(x_2^2+n-1\right)\cdots\left(x_n^2+n-1\right)\ge n^{n-2}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^2。$$

不等式获证。 □

参考文献

[1] 杜旭安. 一道竞赛题的加强与推广 [J], 数学通讯,2008(5)

[2] 宋庆. 一道亚太地区赛题的加强推广之简证, 数学通讯,2008(11)

[3] 张俊. 一道竞赛题的再探究, 数学通讯,2008(23)

[4] 秦显明. 对一道竞赛题的再推广 [J], 数学通讯,2009(3) 上

3.4 过定点平分三角形周长、面积的直线——何万程

因为三角形的重心与三顶点连线所形成的三个小三角形的面积是原三角形面积的 $\dfrac{1}{3}$，不少读者会认为过某个定点平分三角形面积的直线一定会过三角形的重心。其实这是错误的，下面就来讨论某个定点平分三角形周长或面积的直线作图法和一些相关的结论。

例 3.4.1. 给定 $\triangle ABC$ 和定点 P，求作过点 P 的直线，这条直线平分三角形的周长。

分析 假设 $\triangle ABC$ 的半周长为 p，点 P 在三角形内时，若直线 PA 与 BC 相交于点 D，直线 PB 与 CA 相交于点 B。若 $AB+BD=p$ 或 $AB+AE=p$ 时所求的直线已经得到；若 $AB+BD\neq p$ 且 $AB+AE\neq p$ 时，不妨假设 $AB+BD>p$，$AB+AE>p$，则 Q 点从点 A 沿 AB 向 B 移动，直线 PQ 与 BC 或 CA 相交于 S，那么 PS 分 $\triangle ABC$ 含点 B 一侧的边长度之和从大于 p 连续变化到小于 p，因此在运动过程中必定存在一个位置使长度之和等于 p。

点 P 在其它位置时类似可以证明满足条件的直线必定存在。 □

作图法 （1）分别在射线 AB、AC 上作一点 D、E，使 $AD=AE=\dfrac{AB+BC+CA}{4}$；

（2）分别过点 D、E 作直线 AB、AC 的垂线，两垂线相交于点 F；

（3）过点 P、F 作圆弧，使 PF 所对的圆周角等于 $\angle CAF$；

（4）如果圆弧与线段 AB 相交于点 S，并且直线 PS 与线段 AC 相交，交点是 T，则直线 PS 就是所求的直线。 □

证明 设 $AP=d$，$AS=x$，$AT=y$，$\dfrac{\angle BAC}{2}=\alpha$，则

$$dx\sin\alpha+dy\sin\alpha=xy\sin 2\alpha,$$

这样就有

$$d=\frac{2xy\cos\alpha}{x+y}\leq\frac{x+y}{2}\cos\alpha<\frac{p}{2}。$$

而 $AF>\dfrac{p}{2}$，所以点 P 与点 F 不会重合。连 FS、FT。因为

$$\angle FST=\angle CAF,$$

所以点 A、S、F、T 共圆，于是

$$\angle DSF=\angle ETF。$$

又因为

$$\angle FDS=\angle FET=90^\circ，DF=EF,$$

所以

$$\triangle DFS\cong\triangle EFT,$$

这样就得

$$DS=DT,$$

这样

$$AS+AT=AD+AE=\frac{AB+BC+CA}{2},$$

因此直线 ST 平分 $\triangle ABC$ 的周长。 □

对例 3.4.1 进行推广，我们得如下问题的作图法：

给定 $\angle AOB$、不与点 O 重合的定点 P、线段 l，求作过点 P 的直线与射线 OA、OB 相交于点 C、D，使 $OC+OD=l$。

作图法 （1）分别在射线 OA, OB 上各取一点 E, F，使 $OE = OF = \dfrac{l}{4}$；

（2）过点 E 作 OA 的垂线，过点 F 作 OB 的垂线，两垂线交于点 G；

（3）过点 P、G 作弧，使 PG 所对的圆周角等于 $\angle AOG$；

（4）所作圆弧与 OA, OB 的交点 C, D 即为所求。 □

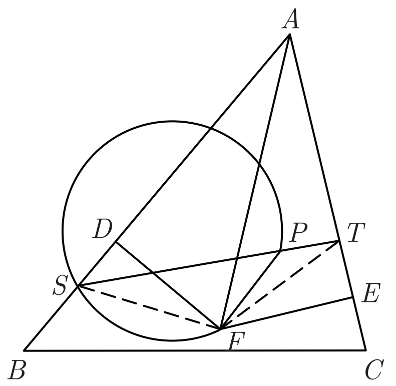


图 3.4.1

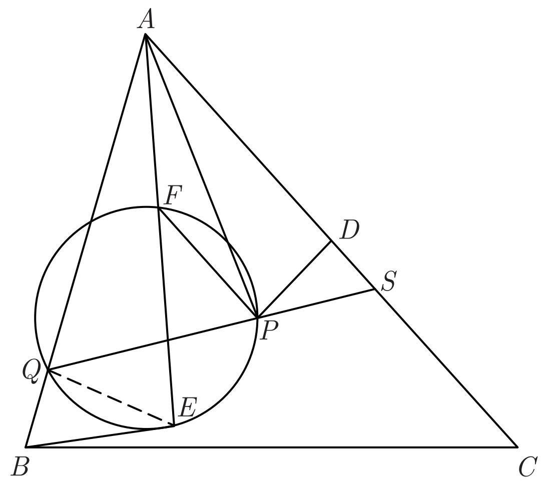


图 3.4.2

例 3.4.2. 给定 $\triangle ABC$ 和定点 P，求作过点 P 的直线，这条直线平分三角形的面积。

解 利用例 3.4.1 的方法可以证明满足条件的直线必定存在。

（1）若点 P 在 $\triangle ABC$ 的一边上，不妨假设在边 CA 上，若能在边 AB 上找到一点 Q，使 $AQ = \dfrac{AB \cdot AC}{2AP}$，则直线 PQ 就是所求的直线。类似地在可以在边 BC 上找符合条件的点。

证明是很容易的，这里就省略了。

（2）若点 P 不在 $\triangle ABC$ 的边上，作 CA 的中点 D，作点 E，使 $\triangle ADP$ 与 $\triangle AEB$ 顺相似。若点 P、E 重合，则 $AP = \sqrt{AB \cdot AD} = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{2\sin 2\alpha}$，设满足条件的直线与 AB 的交点到点 A 的距离是 x，满足条件的直线与 CA 的交点到点 A 的距离是 y，$AP = d$，$\dfrac{\angle BAC}{2} = \alpha$，则

$$dx\sin\alpha + dy\sin\alpha = xy\sin 2\alpha,$$

所以

$$d = \frac{2xy\cos\alpha}{x+y} \leq \sqrt{xy}\cos\alpha = \frac{S_{\triangle ABC}}{4\sin\alpha}。$$

与 $d = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{2\sin 2\alpha}$ 矛盾，所以点 P、E 不会重合。

过点 P、E 作圆，使与点 A 在 PE 同侧的弧所含的圆周角等于 $\angle CAE$，圆与线段 AB 相交于点 Q，如果直线 PQ 与线段 CA 有交点，则直线 PQ 就是所求的直线。类似选取 AB、BC 的中点按上述作图法找符合条件的点。

这是因为 $\triangle ADP \sim \triangle AEB$，所以

$$AD \cdot AB = AP \cdot AE。$$

连结 QE，因为 $\angle EQS = \angle EAS$，故点 A、Q、E、S 四点共圆，所以 $\angle AEQ = \angle ASP$，又得 $\triangle AQE \sim \triangle APS$，这样就得

$$AQ \cdot AS = AP \cdot AE。$$

所以

$$AQ \cdot AS = AD \cdot AB = \frac{1}{2} AB \cdot CA,$$

因此 $\triangle AQS$ 的面积就是 $\triangle ABC$ 的面积的一半。 □

对例 3.4.2 进行推广，我们得如下问题的作图法：

给定 $\angle AOB$、不与点 O 重合的定点 P、线段 a、b，求作过点 P 的直线与射线 OA、OB 相交于点 C、D，使 $OC \cdot OD = a \cdot b$。

作图法　A： 若点 P 在 OA 或 OB 上，则在另一边上截取到点 O 距离为 $\dfrac{ab}{OP}$ 的点，这个点与点 P 的连线就是所求。

B： 若点 P 不在 OA、OB 上，则作图法如下：

（1）分别在 OA, OB 上取点 E, F，使 $OE = a$，$OF = b$;

（2）作点 G，使 $\triangle OEP$ 与 $\triangle OGF$ 顺相似;

（3）过点 P、G 作圆，使与点 A 在 PG 同侧的弧所含的圆周角等于 $\angle EOG$，如果圆与线段 OA 相交于点 C，圆与线段 OB 相交于点 D，则直点 C、D 就是所求的点。 □

定理 3.4.1. （1）若一条直线平分三角形的周长和面积，则这条直线必定过这个三角形的内心;

（2）过三角形内心的直线如果平分三角形的周长，则同时平分三角形的面积;

（3）过三角形内心的直线如果平分三角形的面积，则同时平分三角形的周长。

证明　设 $\triangle ABC$ 中 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$p = \dfrac{a+b+c}{2}$，$\triangle ABC$ 的面积是 S，内心是 I，内切圆半径是 r。

（1）若直线 l 平分 $\triangle ABC$ 的周长和面积，并且与边 BC 和 CA 分别相交于点 D、E，则 $CD + CE = p$，$S_{\triangle CDE} = \dfrac{S}{2}$。设 $\angle C$ 的内角平分线于 l 相交于点 P，点 P 到 $\angle C$ 两边的距离是 x，则 $\dfrac{1}{2}CD \cdot x + \dfrac{1}{2}CE \cdot x = \dfrac{S}{2}$，即 $x = \dfrac{S}{p} = r$，所以点 P 就是 $\triangle ABC$ 的内心。

（2）若直线 l 过 $\triangle ABC$ 的内心并且平分 $\triangle ABC$ 的周长，直线 l 与边 BC 和 CA 分别相交于点 D、E，则 $CD + CE = p$，所以 $S_{\triangle CDE} = \dfrac{1}{2}CD \cdot r + \dfrac{1}{2}CE \cdot r = \dfrac{S}{2}$，所以直线 l 同时平分 $\triangle ABC$ 的面积。

同理可证（3）。 □

下面来讨论同时平分三角形的周长和面积的直线的条数：

（1）当三角形是正三角形时，设边长是 1，平分周长和面积的直线与相邻两边交点到公共顶点的距离分别是 x, y，则得 $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2}, \\ xy = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 解这个方程组，得 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 这条直线就是这个公共顶点对边的中垂线，三条中垂线都满足条件。

（2）当三角形是等腰三角形但不是正三角形时，设腰长是 a，底边长是 b，$a \neq b$，令 $\dfrac{b}{a} = u$。

若平分周长和面积的直线与一腰和底边相交，交点到公共顶点的距离分别是 x, y，则得

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2a+b}{2}, \\ xy = \dfrac{ab}{2}, \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x = a, \\ y = \dfrac{b}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \dfrac{b}{2}, \\ y = a。 \end{cases}$ 当 $u < 1$ 时满足这种条件的直线只有一条；当 $u > 1$ 时满足这种条件的直线有三条。

若平分周长和面积的直线与两腰都相交，交点到公共顶点的距离分别是 x、y，$\begin{cases} x + y = \dfrac{2a+b}{2}, \\ xy = \dfrac{a^2}{2}, \end{cases}$ 要使方程组有实数解必须 $(2a+b)^2 \geq 8a^2$，即 $u \geq 2\sqrt{2} - 2$，满足上述条件时解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a+b-\sqrt{-4a^2+4ab+b^2}}{4}, \\ y = \dfrac{2a+b+\sqrt{-4a^2+4ab+b^2}}{4}, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a+b+\sqrt{-4a^2+4ab+b^2}}{4}, \\ y = \dfrac{2a+b-\sqrt{-4a^2+4ab+b^2}}{4}, \end{cases}$$

此时必须 $\dfrac{2a+b-\sqrt{-4a^2+4ab+b^2}}{4} \leq a$，所以得 $u \leq 1$。当时满足这种条件的直线有两条；当 $2\sqrt{2} - 2 < u < 1$ 时满足这种条件的直线只有一条，此时 $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$；当 $u < 2\sqrt{2} - 2$ 或 $u > 1$ 时候没有满足这种条件的直线。

（3）当三角形不是等腰三角形时，设三边长由小到大分别是 a、b、c，令 $\dfrac{b}{a} = u$，$\dfrac{c}{a} = v$。

若平分周长和面积的直线与长是 a、b 边相交，交点到公共顶点的距离分别是 x, y，则 x、y 是方程 $f_1(t) = 2t^2 - (a+b+c)t + ab = 0$ 的两根，此时 $f_1(0) = ab > 0$，$f_1(a) = a(a-c) < 0$，$f_1(b) = b(b-c) < 0$，这个方程不可能有满足 $x \leq a$，$y \leq b$ 的根。

若平分周长和面积的直线与长是 a、c 边相交，交点到公共顶点的距离分别是 x, y，则 x、y 是方程 $f_2(t) = 2t^2 - (a+b+c)t + ac = 0$ 的两根，此时 $f_2(0) = ac > 0$，$f_2(a) = a(a-b) < 0$，$f_2(c) = c(c-b) > 0$，此时方程有一根在 $(0, a)$ 内，另一根在 (a, c) 内，所以只有满足这种条件的直线只有一条。

若平分周长和面积的直线与长是 b、c 边相交，交点到公共顶点的距离分别是 x, y，则 x、y 是方程 $f_3(t) = 2t^2 - (a+b+c)t + bc = 0$ 的两根，此时 $f_3(0) = bc > 0$，$f_3(b) = b(b-a) > 0$，$f_3(c) = c(c-a) > 0$，要使这个方程有满足 $x \leq b$，$y \leq c$ 的根，必须 $\dfrac{a+b+c}{4} < b$，$(a+b+c)^2 - 8bc \geq 0$，即 $1 + v < 3u$，$u^2 - 6uv + v^2 + 2u + 2v + 1 \geq 0$。因为 $u > 1$，$v > 1$，$1 + u > v$，所以 $1 + v < 2 + u < 3u$，即 $1 + v < 3u$ 这个条件必定能满足。由 $u^2 - 6uv + v^2 + 2u + 2v + 1 \geq 0$ 又得 $v \leq 3u - 1 - 2\sqrt{2u^2 - 2u}$ 或 $v \geq 3u - 1 + 2\sqrt{2u^2 - 2u}$，但 $3u - 1 + 2\sqrt{2u^2 - 2u} > 3u - 1 > u + 1$，与 $1 + u > v$ 矛盾，所以只能 $v \leq 3u - 1 - 2\sqrt{2u^2 - 2u}$。因为当 $u > 1$ 时候必然有 $3u - 1 - 2\sqrt{2u^2 - 2u} < u + 1$，所以只需要满足 $1 < u < \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$u < v \leq 3u - 1 - 2\sqrt{2u^2 - 2u}$。

综合上述讨论就得，当 $1 < u < \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$u < v < 3u - 1 - 2\sqrt{2u^2 - 2u}$ 时满足这种条件的直线有两条；当 $1 < u < \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$v = 3u - 1 - 2\sqrt{2u^2 - 2u}$ 时满足这种条件的直线只有一条；其余情况无满足这种条件的直线。

4 数学家、数学史篇

4.1 增乘开方法与开方的笔算法——何万程

中国古代把开方法与二次、三次或高次数字方程解法统称为开方术。《九章算术》少广章提出了完整的开平方、开立方程序。

开方术曰：

置积为实。借一算。步之。超一等。议所得。以一乘所借一算为法。而以除。除已。倍法为定法。其复除。折法而下。复置借算步之如初。以复议一乘之。所得副。以加定法。以除。以所得副从定法。复除折下如前。

若开之不尽者为不可开，当以面命之。若实有分者，通分内子为定实。乃开之，讫，开其母报除。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之，讫，令如母而一。

开立方术曰：

置积为实。借一算步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数置中行。复借一算置下行。步之，中超一，下超二等。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除。除已，倍下、并中从定法。复除，折下如前。

开之不尽者，亦为不可开。若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之，讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一。

这些文字对现代人来说比较难以理解，对上述方法加以推广，并用现代汉语表述，便得一般的开方笔算方法。这种笔算开方的方法对有计算机计算的今天虽然实用性不大，但从中我们可以看出我们祖先的智慧。

因为负数 a 开 $2k+1$ 次方等于正数 $-a$ 开 $2k+1$ 次方的相反数（其中 k 是正整数），而负数是没有偶数次算术根的。另外，0 开任意 k 次方都是 0，这种情况没有什么讨论的价值。所以我们只需要讨论正数的算术根的笔算方法。

笔算开 n 次方的方法如下：

1. 把被开方的整数部分从个位起向左每隔 n 位为一段，把开方的小数部分从小数点第一位起向由每隔 n 位为一段，用撇号分开；

2. 根据左边第一段里的数，求得开 n 次算术根的最高位上的数，假设这个数为 a；

3. 从第一段的数减去求得的最高位上数的 n 次方，在它们的差的右边写上第二段数作为第一个余数；

4. 把 $n\left(10a\right)^{n-1}$ 去除第一个余数，所得的整数部分试商（如果这个最大整数大于或等于 10，就用 9 做试商）；

5. 设试商为 b。如果 $(10a+b)^n-(10a)^n$ 小于或等于余数，这个试商就是 n 次算术根的第二位；如果 $(10a+b)^n-(10a)^n$ 大于余数，就把试商逐次减 1 再试，直到 $(10a+b)^n-(10a)^n$ 小于或等于余数为止。

6. 用同样的方法，继续求 n 次算术跟的其它各位上的数（如果已经算了 k 位数字，则 a 要取为全部 k 位数字）。

下面对笔算法的原理进行简要的说明。

（1）每 n 位用撇号分开，这是因为 10^n 一共有 n 个 0。

（2）如果已经计算了前 k 位后去掉小数点的整数是 a，设被开方数的前 $k+1$ 段去掉小数点的整数是 x，根据算法的步骤用数学归纳法容易证明：当前步骤的余数就是 $x-(10a)^n$。

（3）假设算术根的第 $k+1$ 位精确值是 y，必然有 $(10a+y)^n\le x$，$(10a+y+1)^n>x$。设余数是 r，则

$$
\begin{gathered}
(10a+y)^n-(10a)^n\le r，\\
(10a+y+1)^n-(10a)^n>r。
\end{gathered}
$$

而

$$
\begin{aligned}
r&\ge(10a+y)^n-(10a)^n=y\left(n\left(10a\right)^{n-1}+\cdots+y^{n-1}\right)\\
&\ge ny\left(10a\right)^{n-1}，
\end{aligned}
$$

设试商是 b，则 $b \geq y$。

如果首次试商就有 $(10a+b)^n-(10a)^n \leq r$，则必然 $b=y$，这是因为若 $b \geq y+1$，则

$$(10a+b)^n-(10a)\,n \geq (10a+y+1)^n-(10a)^n > r,$$

与 $(10a+b)^n-(10a)^n \leq r$ 矛盾。

如果首次试商就有 $(10a+b)^n-(10a)^n > r$，经过调整后的 b 有

$$(10a+b)^n-(10a)^n \leq r,$$
$$(10a+b+1)^n-(10a)^n > r,$$

则必然 $b=y$，这是因为：

（a）若 $b \geq y+1$，则

$$(10a+b)^n-(10a)^n \geq (10a+y+1)^n-(10a)^n > r,$$

与 $(10a+b)^n-(10a)\,n \leq r$ 矛盾；

（b）若 $b \leq y-1$，则

$$(10a+b+1)^n-(10a)^n \leq (10a+y)^n-(10a)^n \leq r,$$

与 $(10a+b+1)^n-(10a)^n > r$ 矛盾。

无论哪种情况，总可得 $b=y$。

根据（1）、（2）、（3）的说明，我们可以肯定笔算开方的方法计算出来的每一位数字都与精确值对应位的数字相同，所以笔算开方的方法是正确的。

下面举例说明笔算方法。

例 4.1.1. 求以下根式的值：

（1）$\sqrt{6167608340089}$；

（2）$\sqrt[3]{178567680163328}$；

（3）$\sqrt[5]{987654321987654321}$（取三位小数的近似值）。

解 （1）$\sqrt{6167608340089}=2483467$。

$$\begin{array}{rl}
2\ \ 4\ \ 8\ \ 3\ \ 4\ \ 6\ \ 7 & \\
\sqrt{6'16'76'08'34'00'89} & \\
4 & \cdots 2^2 \\ \hline
2\ 16 & \cdots 216 \div (2 \times 20)\ \text{的整数部分是 5，但}\ 252-202=225>216\text{，改用 4 作试商} \\
1\ 76 & \cdots 24^2-20^2 \\ \hline
40\ 76 & \cdots 4076 \div (2 \times 240)\ \text{的整数部分是 8，用 8 作试商} \\
39\ 04 & \cdots 248^2-240^2 \\ \hline
1\ 72\ 08 & \cdots 17208 \div (2 \times 2480)\ \text{的整数部分是 3，用 3 作试商} \\
1\ 48\ 89 & \cdots 2483^2-2480^2 \\ \hline
23\ 19\ 34 & \cdots 231934 \div (2 \times 24830)\ \text{的整数部分是 4，用 4 作试商} \\
19\ 86\ 56 & \cdots 24834^2-24830^2 \\ \hline
3\ 32\ 78\ 00 & \cdots 3327800 \div (2 \times 248340)\ \text{的整数部分是 6，用 6 作试商} \\
2\ 98\ 01\ 16 & \cdots 248346^2-248340^2 \\ \hline
34\ 76\ 84\ 89 & \cdots 34768489 \div (2 \times 2483460)\ \text{的整数部分是 7，用 7 作试商} \\
34\ 76\ 84\ 89 & \cdots 2483467^2-2483460^2 \\ \hline
0 &
\end{array}$$

（2）$\sqrt[3]{178567680163328} = 56312$。

$$\begin{array}{l}
\quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\
\sqrt[3]{178'567'680'163'328}
\end{array}$$

125	$\cdots 5^3$
53 567	$\cdots 53567 \div \left(3 \times 50^2\right)$ 的整数部分是 7，但 $57^2 - 50^2 = 60193 > 53567$，改用 6 作试商
50 616	$\cdots 56^3 - 50^3$
2 951 680	$\cdots 2951680 \div \left(3 \times 560^2\right)$ 的整数部分是 3，用 3 作试商
2 837 547	$\cdots 563^3 - 560^3$
114 133 163	$\cdots 114133163 \div \left(3 \times 5630^2\right)$ 的整数部分是 1，用 1 作试商
95 107 591	$\cdots 5631^3 - 5630^3$
19 205 572 328	$\cdots 19205572328 \div \left(3 \times 56310^2\right)$ 的整数部分是 2，用 2 作试商
19 205 572 328	$\cdots 5631^3 - 5630^3$
0	

（3）$\sqrt[5]{987654321987654321} \approx 3971.193$。

$$\begin{array}{l}
\quad 3 \qquad 9 \qquad 7 \qquad 1. \qquad 1 \qquad 9 \qquad 2 \qquad 9 \\
\sqrt[5]{987'65432'19876'54321.00000'00000'00000'00000}
\end{array}$$

243	$\cdots 3^5$
744 65432	$\cdots 74465432 \div \left(5 \times 30^4\right)$ 整数部分是 18，改用 9 作试商
659 24199	$\cdots 39^5 - 30^5$
85 41233 19876	$\cdots 854123319876 \div \left(5 \times 390^4\right)$ 整数部分是 7，用 7 作试商
83 92970 61757	$\cdots 397^5 - 390^5$
1 48262 58119 54321	$\cdots 1482625811954321 \div \left(5 \times 3970^4\right)$ 整数部分是 1，用 1 作试商
1 24265 57094 08851	$\cdots 3971^5 - 3970^5$
23997 01025 45470 00000	$\cdots 23997010254547000000 \div \left(5 \times 39710^4\right)$ 整数部分是 1，用 1 作试商
12433 44352 06091 99551	$\cdots 39711^5 - 39710^5$
11563 56673 39378 00449 00000	$\cdots 1156356673393780044900000 \div \left(5 \times 397110^4\right)$ 整数部分是 9，用 9 作试商
11191 17001 57043 20516 21599	$\cdots 397119^5 - 397110^5$
372 39671 82334 79932 78401 00000	$\cdots 3723967182334799327840100000 \div \left(5 \times 3971190^4\right)$ 整数部分是 2，用 2 作试商
248 70419 01386 56554 83574 43232	$\cdots 3971192^5 - 3971190^5$
123 69252 80948 23377 94826 56768 00000	$\cdots 1236925280948233779482656768000000 \div \left(5 \times 39711920^4\right)$ 整数部分是 9，用 9 作试商
111 91704 90192 14028 71518 74119 30649	$\cdots 39711929^5 - 39711920^5$
11 77547 90756 09349 23307 82648 69351	□

4.2 什么叫做“韩信点兵”？[1]——谈祥柏

韩信点兵也是一个很有趣的猜数游戏，如果你随便拿一把蚕豆（数目约在 100 粒左右），先 3 粒 3 粒地数，直到不满 3 粒时，把余数记下来；第二次再 5 粒 5 粒地数，最后把余数记下来；第三次是 7 粒一数，把余数记下来。然后根据每次的余数，就可以知道你原来拿了多少蚕豆。不信的话，你还可以实地试验一下。

例如：假若 3 个一数余 1 粒，5 个一数余 2 粒，7 个一数余 2 粒，那么，原来有蚕豆多少?

这类题目看起来是很难计算的，可是我过古时却流传着一种算法，它的名称也很多，宋朝周密叫它“鬼谷算”，又名“隔墙算”；杨辉叫它“剪管术”；而比较通行的名称是“韩信点兵”。最初记述这类算法的是一本名叫《孙子算经》的书，后来在宋朝经过数学家秦九韶的推广，又发现了一种算法，叫做“大衍求一术”。这在数学史上是极有名的问题，外国人一般把它称为“中国剩余定理”。至于它的算法，在《孙子算经》上就已经有了说明，而且后来还流传着这么一首歌诀：

三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，
除百零五便得知。

这就是韩信点兵的计算方法，它的意思是说：凡是用 3 个一数剩下的余数，将它用 70 去乘（因为 70 是 5 与 7 的倍数，而又是以 3 去除余 1 的）；5 个一数剩下的余数，将它用 21 去乘（因为 21 是 3 与 7 的倍数，而又是以 5 去除余 1 的）；7 个一数剩下的余数，将它用 15 去乘（因为 15 是 3 与 5 的倍数，而又是以 7 去除余 1 的）；将这些数加起来，若超过 105，就减掉 105，如果剩下的数目还是比 105大，就再减去 105，直到得数比 105 小为止。这样，所得的数就是原来的数了。根据这个道理，你可以很容易地把前面一个题目列成算式：

$$
\begin{aligned}
& 1 \times 70 + 2 \times 21 + 2 \times 15 - 105 \\
= & 142 - 105 \\
= & 37\text{。}
\end{aligned}
$$

因此，你可以知道，原来这一堆蚕豆有 37 粒。

1900 年，德国大数学家大卫・希尔伯特归纳了当时世界上尚未解决的最困难的 23 个难题。后来，其中的第十问题在 70 年代被解决了，这是近代数学的一项重大成就。据证明的人说，在解决问题的过程中，他是受“中国剩余定理”的启发的。

[1]本文引自少年儿童出版社出版的《十万个为什么》（数学 1）