編 者 的 話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

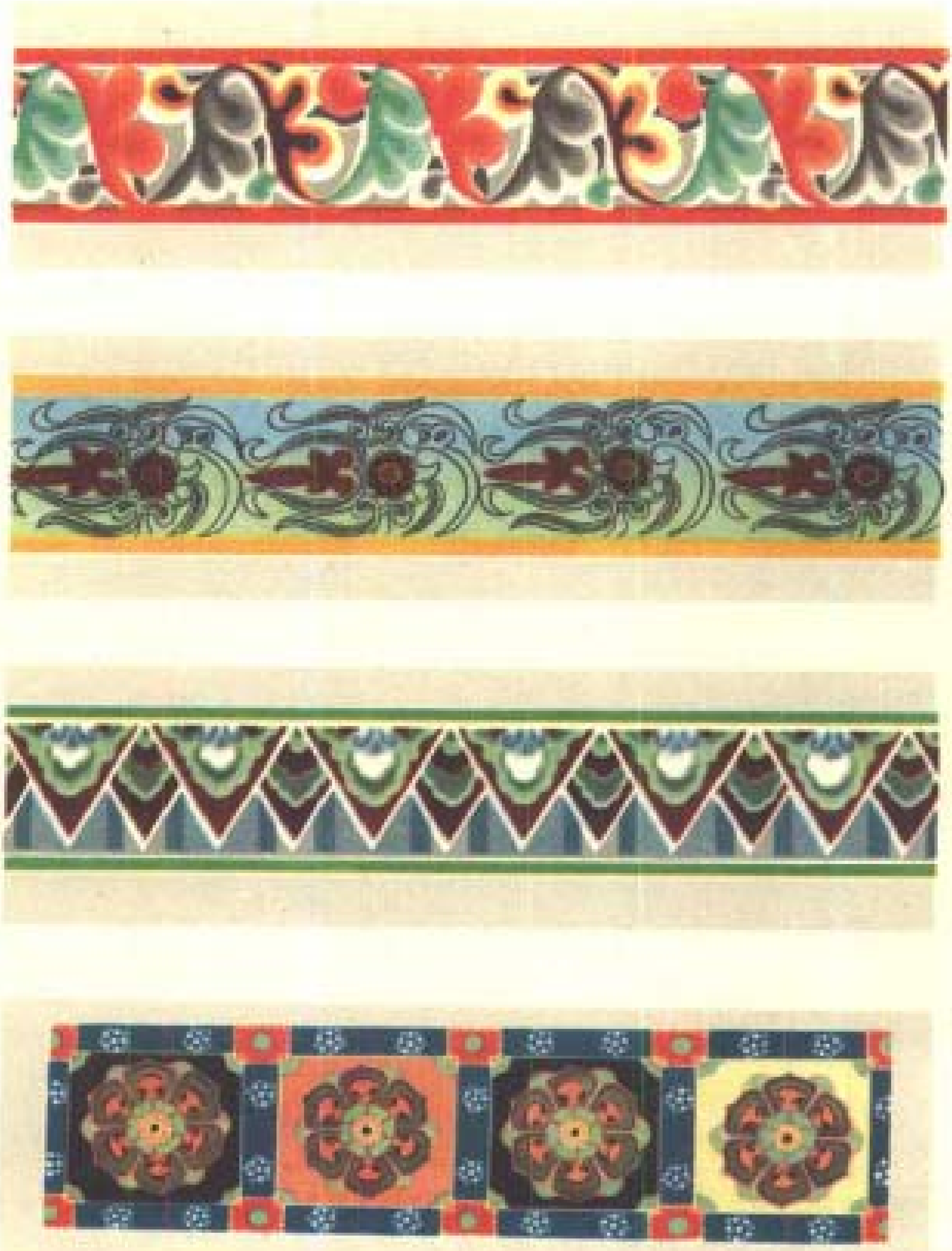
这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　　次



带饰上的对称(敦煌壁画边饰)

写在前面

对称，照字面来講，就是两个东西相对而又相称(或者說相仿，相等)。因此，把这两个东西对换一下，好像沒有动过一样。

对称的概念，可以說和近世代数学中"群"的概念是分不开的。当然，群的一般抽象定义一直到上世紀末才完全确立，就是比較具体而特殊的"排列群"的定义，也只不过早有了几十年光景；而对称的概念，尤其是几何方面对称的概念，却是老早就有了的。实际上，在建筑設計方面，在衣物裝飾方面，对称的概念一直起着重要的作用。自然界中，矿物結晶体显示出对称。人的身体的外形，也是左右对称的。

这本小册子，主要是向大家介紹有关对称的数学：先講代数对称；再講几何对称，包括对于裝飾和結晶体的应用；最后引出群的定义。通过这些內容，还希望能够帮助大家了解：数学理論是由具体实际中抽象出来的，而又有具体实际的应用。一方面，数学理論有高度的抽象性，它往往把一些表面上看来好像沒有什么关系的东西从量的側面很紧密地联系和統一起来。另一方面，数学理論有广泛的实际应用，它往往可以应用到极其广泛而不同的方面去。

一　代数对称——对称多项式和推广

1. 一元二次方程的根的对称多项式

假設 a, b, c 都是实数，而且 $a \neq 0$，又假設 x 是未知数（变数或文字），那末 x 的二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

和

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

依照判别式 $b^2-4ac \gtreqless 0$ 三种不同情况，两根 x_1, x_2 或是不相等的两个实数，或是相等的两个实数，或是共軛的两个复数。

更一般些，假設 $a(\neq 0), b, c$ 是任何复数，x_1, x_2 仍是方程(1)的两个根（因为把它們代进 ax^2+bx+c 就得0），而且也是复数，这是因为任何复数（如 b^2-4ac）的平方根还是复数。

事实上，假設 $a+bi$ 是个复数，这里 a 和 b 是实数。我們也可以写成：

$$a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}. \tag{3}$$

根据棣美弗(De Moivre)公式，有：

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

和

$$\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{4}$$

其中$\sqrt{\rho}$取非負的值.

我們也可以換一个方法来做. 假設

$$\sqrt{a+bi}=c+di, \tag{5}$$

其中 c 和 d 都是实数，那末

$$a+bi=(c+di)^2=(c^2-d^2)+2cdi, \tag{6}$$

所以

$$c^2-d^2=a, \quad 2cd=b \tag{7}$$

由此

$$\begin{aligned} c^2+d^2 &= \sqrt{(c^2+d^2)^2} \\ &= \sqrt{(c^2-d^2)^2+(2cd)^2}=\sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

所以

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0, \\ d^2 &= \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0 \end{aligned} \tag{9}$$

c 有两值，d 有两值，但 c 定后 d 也决定了，因为 $2cd=b$，(可設$b\neq 0$). 这样决定了的两个 $c+di$ 平方起来确实是 $a+bi$，因此就是 $a+bi$ 的两个平方根.

韦达(Viète)定理告訴我們，一元二次方程的两个根有如下的关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{10}$$

x_1+x_2 和 x_1x_2 都有这样性質：把 x_1 和 x_2 对换，結果仍然不变，因为

$$x_1+x_2=x_2+x_1, \quad x_1x_2=x_2x_1. \tag{11}$$

凡是有这样性質的 x_1 和 x_2 的多項式叫做**对称多項式**，例如 $x_1^2+x_2^2$，$x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 等也都是，但是 x_1-x_2 不是. x_1+x_2 和 x_1x_2 叫做**初等对称多項式**. 可以証明，凡是 x_1 和 x_2 的对称多項式都可以用这两个初等对称多項式表出来. 例如(这不是証明!)：

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\left(\therefore =\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)$$

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)\left(\therefore =-\frac{bc}{a^2}\right). \tag{12}$$

2. 一元 n 次方程的根的对称多项式

我们现在来看看一般情况．假设 n 是一个正整数，又假设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是复数，且 $a_0\neq 0$，现在有一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{13}$$

著名的代数基本定理告诉我们，这样的方程有 n 个根，都是复数，假设就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其中可以有相同的．根据因子定理，应有

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{14}$$

这个重要定理的证明方法是很多的．最先一个证明是德国高斯(Gauss)在 1799 年作出的，他还作出了另外三个证明．各个证明有的用初等数学方法但是比较长，有的用高等数学方法(如用复变数函数论)，只有几行，不过无论如何都要用到连续性质，即多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是 x 的连续函数．这就是说，当 x 的值变动得很小的时候，$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的值也变动得很小①．

这是一种存在定理，只是说有，但是没有说怎样求．对于

① 关于代数基本定理的证明，可以参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》(人民教育出版社出版，1960 年合訂本第一版)第 287–294 頁．

$n=3$ 和 4 的情形，求根有一般的公式[①]. 当 $n\geqslant 5$ 的时候，求根没有像二次那样一般的公式. 求出实数根的近似值（即和正确值相接近的值）的一般方法，尤其是当 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数的情形，是我国南宋秦九韶在 1247 年首先作出的，比英国霍纳(Horner)的发现（1819 年）要早得多. 对于复数根的情形，是俄国罗巴切夫斯基（Лобочевский）作出的（1834 年）[②].

和二次的情形相仿，韦达公式给出：

$$
\begin{gathered}
x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},\\
x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}, \quad (15)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.
\end{gathered}
$$

像 $x_1+x_2+\cdots+x_n$，$x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n$，$\cdots$，$x_1x_2\cdots x_n$ 等这样多项式，不论我们把哪两个根 x_i 和 $x_j(i\neq j)$ 对换一下，因之也就是不论我们对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 作怎样的排列（因为任何的排列都可以用两个根 x_i 和 x_j 对换的办法经过几次对换得来）都不变动，所以就叫做 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式. 它们也叫做初等对称多项式，因为根的任一个对称多项式都可以用这些初等对称多项式的多

① 关于三次、四次方程根的公式，参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》第 295–304 頁.

② 关于根的近似計算，参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》第 318–330 頁.

项式表示出来．这就是所谓对称多项式的基本定理，我们在这里不去证明，只提一下，有一种证明是利用所谓字典排列法，那就是说，假定有两个项 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 和 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$，依次比较它们所含的 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ 的指数，如果第一个不是 0 的差 l_i-m_i 是正数，我们就说第一项是在第二项的前面．例如 $x_1^6x_2^3$ 就在 $x_1^6x_2^2x_3x_4$ 的前面，因为 x_1 的指数差是 $6-6=0$，而 x_2 的指数差是 $3-2=1$①．

我们现在证明一个比较简单的情形，就是牛顿（Newton）公式，也就是来证明，

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k\geqslant 1 \text{ 的整数}) \qquad (16)$$

都可以用这些初等对称多项式的多项式表出来．这里符号 s_k 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 k 次方幂的和．

我们先看一看 $n=2$ 的情形．为了简单起见，可以假设 $a=1$，那样就有

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2). \qquad (17)$$

我们已有 $$s_1=x_1+x_2=-b,\quad x_1x_2=c. \qquad (18)$$

因为 $$x_1^2+bx_1+c=0, x_2^2+bx_2+c=0, \qquad (19)$$

相加，得：

$$s_2+bs_1+2c=0,$$

① 关于对称多项式的基本定理的詳細证明，可以参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》第 268-275 頁．

或

$$s_2=-bs_1-2c=b^2-2c. \tag{20}$$

因为 $x_1^3+bx_1^2+cx_1=0,\quad x_2^3+bx_2^2+cx_2=0,$ (21)

相加，得：

$$s_3+bs_2+cs_1=0,$$

或
$$s_3=-bs_2-cs_1=-b^3+3bc, \tag{22}$$

同样
$$s_4+bs_3+cs_2=0,$$

或
$$s_4=b^4-4b^2c+2c^2, \tag{23}$$

$$s_5+bs_4+cs_3=0,$$

或
$$s_5=-b^5+5b^3c-5bc^2. \tag{24}$$

…………………………………………

对于任意 n 的情形，我們也可以同样进行。下面我們引进符号 $\sum$，例如用 $\sum x_1^{k-1}x_2$ 表

$$x_1^{k-1}x_2+\cdots+x_1^{k-1}x_n+x_2^{k-1}x_1+\cdots$$
$$+x_2^{k-1}x_n+\cdots+x_n^{k-1}x_1+\cdots+x_n^{k-1}x_{n-1}.$$

若 $k\leqslant n$，就有

$$s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=s_k+\sum x_1^{k-1}x_2,$$

$$s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)=\sum x_1^{k-1}x_2+\sum x_1^{k-2}x_2x_3, \tag{25}$$

…………………………………

$$s_{k-i}(x_1x_2\cdots x_i+\cdots)=\sum x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i+\sum x_1^{k-i}x_2\cdots x_{i+1},$$

………………………………

$$s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)=\sum x_1^2x_2\cdots x_{k-1}+k\sum x_1x_2\cdots x_k.$$

以 $-1,+1,-1,\cdots$ 依次乘各式，然后加起来，就得到：

$$-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)$$
$$=-s_k+(-1)^{k-1}k\sum x_1x_2\cdots x_k,$$

或

$$s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)$$
$$+(-1)^k k(x_1x_2\cdots x_k+\cdots)=0,$$

或 $$a_0s_k+a_1s_{k-1}+a_2s_{k-2}+\cdots+ka_k=0. \tag{26}$$

若 $k>n$，那末(25)中最后一式应是

$$s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=\sum x_1^{k-n+1}\,x_2\cdots x_n, \tag{27}$$

从而得到

$$s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^n s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=0,$$

或 $$a_0s_k+a_1s_{k-1}+a_2s_{k-2}+\cdots+a_ns_{k-n}=0. \tag{28}$$

对 $k>n$，也可簡单利用下面式子

$$0=x_i^{k-n}(a_0x_i^n+a_1x_i^{n-1}+\cdots+a_n)$$

$$=a_0x_i^k+a_1x_i^{k-1}+\cdots+a_nx_i^{k-n} \tag{29}$$

而得到(28)。利用(26)和(28)等公式，由 $k=1$ 开始，可以依次把 s_k 表为 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的多項式。

我们还可以作一些推广.

设 $n=3$, 那末 $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 等都是对称多项式, 可是 x_1+x_2, x_1-x_2, $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$等都不是. 我们可以更仔细地区别一下:

x_1-x_2 只有当 x_1, x_2, x_3 都不变时才不变, 也就是说, 只对排列$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$才不变.

x_1+x_2 对排列$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$不变.

$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$对排列$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$不变.

这一些事实启发我们去考虑 n 个文字的某些排列的集合, 它们之中任意两个接连实施的结果仍然是原来那些排列中的一个(这叫做群), 并且考虑对于这些排列来讲是不变的或者对称的多项式. 这种想法最初是由法国伽罗华(Galois, 1811–1832)搞清楚的, 并引导着他彻底解决了五次和五次以上的一般方程不能用根式来解的问题. 他不但证明了, 不存在求根的一般公式, 按照这个公式从一般方程的系数出发只经过加, 减, 乘, 除以及开方(根式)等代数运算就能得到根(挪威阿倍尔(Abel, 1802–1829)也解决了这一部分); 而且也证明了, 存在着不能用代数运算来解的具

体方程，还説明了方程能不能用代数运算来解的理由。

我們再举一个例子讓讀者去作練习：$n=4$。$x_1x_2+x_3x_4$ 对于下列八个排列的群不变：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

而 $x_1x_2-x_3x_4$ 只对前面四个排列的群不变。

二　几何对称

1．平面上的对称

在平面上，我們可以考慮对于一直綫的对称（或反射）以及对于一点的对称。

首先，如图 1，点 A 和点 A' 叫做对于直綫 l 是对称的，

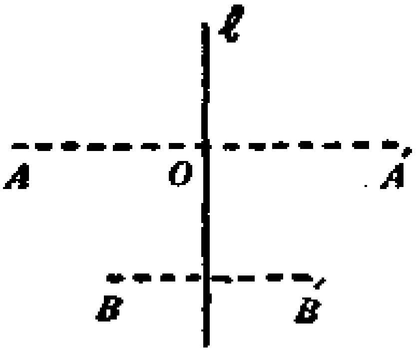


图 1.

或以 l 为**对称軸**，如果：

$$AA'\perp l \text{ 于 } O \text{ 点，}$$

$$\text{且 } AO=OA'.$$

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面在空間中繞 l 作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉（或翻轉）。

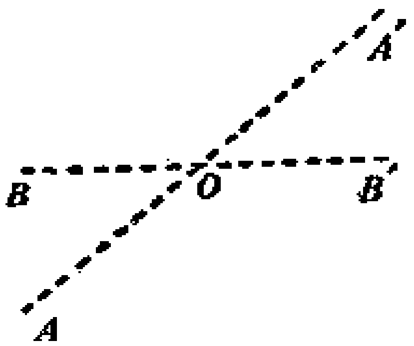


图 2.

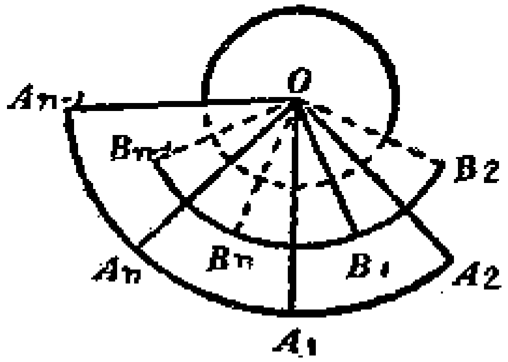


图 3.

其次，如图 2，点 A 和点 A'叫做对于点 O 是对称的，或以 O 为（2 次）**对称心**，如果：

$$AA' \text{ 过 } O \text{ 点，}$$

$$\text{且 } AO = OA'.$$

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面繞点 O 作$\frac{360°}{2}$的旋轉，或平面在空間中繞过点 O 垂直于平面的直綫作$\frac{360°}{2}$的旋轉.

我們可以进一步来考虑对于一个 n 次对称心的对称．如图 3，点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ 以点 O 为 n 次对称心，如果：

$$OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_{n-1} = OA_n,$$

且 $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1 = \frac{360°}{n}$.

由 A_1 到 A_2 的作用也可以看成平面繞点 O 作 $\frac{360°}{n}$ 的旋轉，或平面在空間中繞过点 O 垂直于平面的直綫作$\frac{360°}{n}$的旋轉.

2. 空間中的对称

在空間中，我們可以考虑对于一平面的对称（或反射），对于一点的对称以及对于一直綫的对称.

首先，如图 4，点 A 和点 A' 叫做对于平面 P 是对称的，或以 P 为**对称面**，如果：

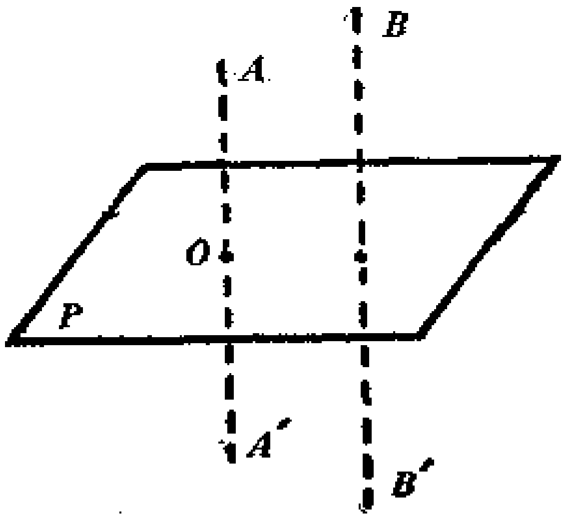


图 4.

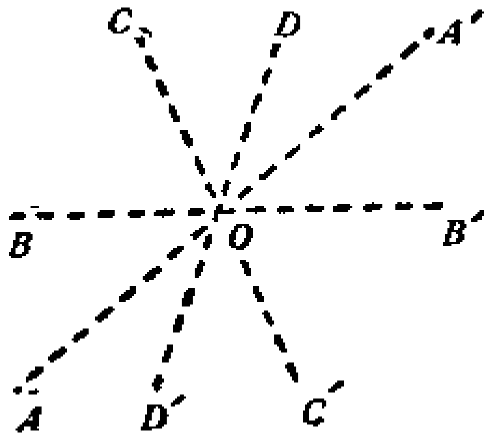


图 5.

$$AA' \perp P \text{ 于 } O \text{ 点},$$

$$\text{且 } AO = OA'.$$

其次，如图 5，点 A 和点 A' 叫做对于点 O 是对称的，或以 O 为对称心，如果：

$$AA' \text{ 过 } O \text{ 点},$$

$$\text{且 } AO = OA'.$$

再次，如图 6，点 A 和点 A' 对于直綫 l 是对称的，或以 l 为(2次)对称軸，如果：

$$AA' \perp l \text{ 于 } O \text{ 点},$$

$$\text{且 } AO = OA'.$$

由 A 到 A' 的作用也就是繞直綫 l 来作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉。

我們也可以进一步考慮对于一个 n 次对称軸的对称，如图 7，那也就是通过直綫 l 的平面繞 l 来作 $\frac{360^\circ}{n}$ 的旋轉。

我們注意，"对于一点的对称"可以看成由"对于一平面的对称"和"对于一直綫的对称"合起来，平面和直綫互相垂直于

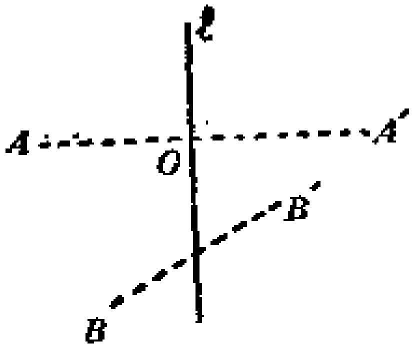


图 6.

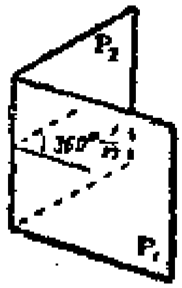


图 7.

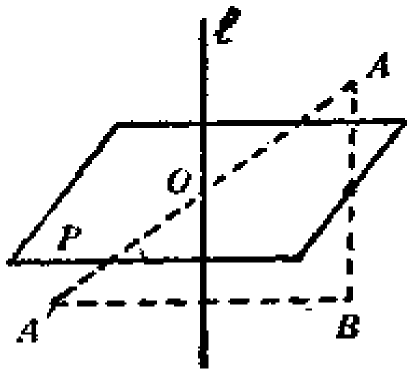


图 8.

該点。如图 8，A 和 A' 对点 O 对称，A 和 B 对平面 P 对称，B 和 A' 对直綫 l 对称，直綫 l 垂直平面 P 于点 O。

3. 正多边形的对称

平面上的图形，如果通过繞某个軸（或某个 n 次心）作旋轉（或翻轉）把自己变换到自己（或者說結果图形不变），就称为对于这个軸（或这个心）对称。在这节中主要来考虑正多边形的对称。正多边形的中心也就是內切圓和外接圓的中心。

（一）首先考虑正三角形 ABC（图 9）：

$$AB=BC=CA.$$

$$\angle CAB=\angle ABC=\angle BCA=\frac{180^\circ}{3}.$$

$\triangle ABC$ 的中心 O 是一个 3 次对称心。

OA, OB, OC 是 3 个对称軸.

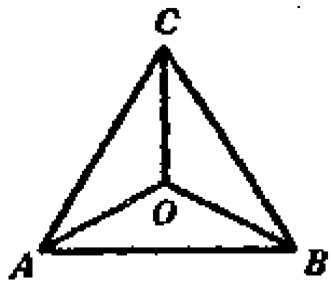


图 9.

不变 $\triangle ABC$ 的动作共有 6 个：

3 轉：$\begin{cases} \text{不动（也可看成繞 } O \text{ 轉 } 0^\circ\text{），} \\ \text{繞 } O \text{ 轉 } 120^\circ. \\ \text{繞 } O \text{ 轉 } 240^\circ; \end{cases}$

$$3\text{ 翻：}\begin{cases}\text{对 } OA \text{ 翻，}\\ \text{对 } OB \text{ 翻，}\\ \text{对 } OC \text{ 翻。}\end{cases}$$

这 6 个动作对于 3 个顶点 A, B, C 的作用：

$$a_1=\begin{pmatrix}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ A & B & C\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ B & C & A\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ C & A & B\end{pmatrix};$$

$$a_4=\begin{pmatrix}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ A & C & B\end{pmatrix},\quad a_5=\begin{pmatrix}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ C & B & A\end{pmatrix},\quad a_6=\begin{pmatrix}A & B & C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ B & A & C\end{pmatrix}.$$

它們恰好是 3 个文字的 6 个排列。

(二)其次考虑正方形 $ABCD$ (图 10)：

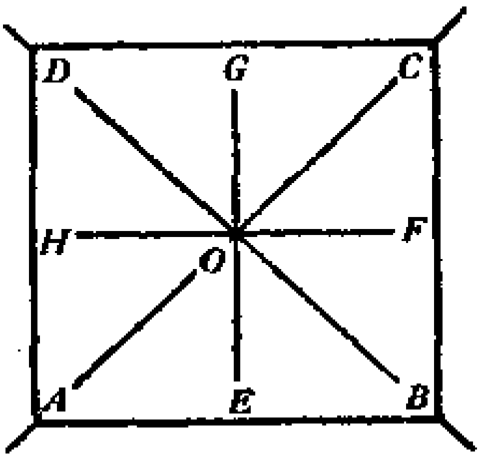


图 10.

$$AB=BC=CD=DA,$$

$$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\frac{360^\circ}{4},$$

$\square ABCD$ 的中心 O 是 4 次对称心。

OA (即 AC)，OB(即 BD)，OE (即 EG)，OF(即 FH)是对称軸。(E, F, G, H 是 AB, BC, CD, DA 各边的中点。)

不变正方形的动作共有 8 个：

$$4\text{ 轉：}\begin{cases}\text{不动(看成繞 } O \text{ 轉 } 0^\circ\text{)，}\\ \text{繞 } O \text{ 轉 } 90^\circ\text{，}\\ \text{繞 } O \text{ 轉 } 180^\circ\text{，}\\ \text{繞 } O \text{ 轉 } 270^\circ\text{；}\end{cases}$$

$$4\text{翻}:\begin{cases}\text{对 } AC \text{ 翻},\\ \text{对 } BD \text{ 翻},\\ \text{对 } EG \text{ 翻},\\ \text{对 } FH \text{ 翻}.\end{cases}$$

这8个动作对于4个顶点的作用：

$$b_1=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ A & B & C & D\end{pmatrix},\qquad b_2=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ B & C & D & A\end{pmatrix},$$

$$b_3=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ C & D & A & B\end{pmatrix},\qquad b_4=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ D & A & B & C\end{pmatrix};$$

$$b_5=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ A & D & C & B\end{pmatrix},\qquad b_6=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ C & B & A & D\end{pmatrix},$$

$$b_7=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ B & A & D & C\end{pmatrix},\qquad b_8=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ D & C & B & A\end{pmatrix}.$$

它們是4个文字的24个排列中的8个。

(三)一般地，我們来考慮正n边形($n\geqslant 3$ 整数)(图11)：

$$A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{n-1}A_n=A_nA_1,$$

$$\angle A_1A_2A_3=\cdots=\angle A_{n-1}A_nA_1=\angle A_nA_1A_2=\frac{n-2}{n}\times 180^\circ.$$

O 是內切圓和外接圓的中心。B_1 是 A_1A_2 的中心，…，B_n 是 A_nA_1 的中心。

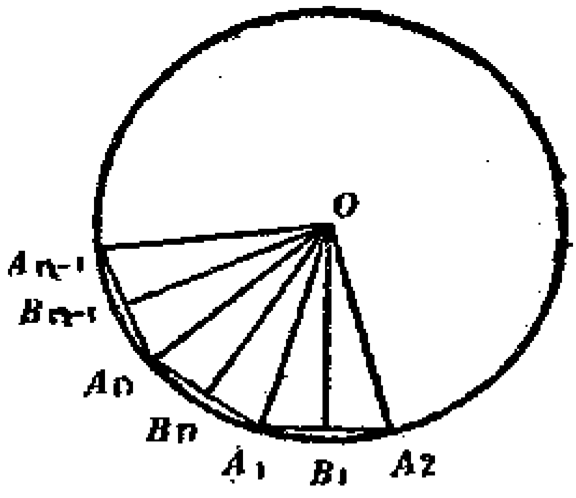


图11.

当 n 是单数，即 $n=3, 5, \cdots$ 时：

O 是 n 次的对称心.

$OA_1, OA_2, \cdots, OA_n$（各通过对边的中心）是对称軸。

不变 $A_1A_2\cdots A_n$ 正 n 边形的动作共有 $2n$ 个：

n 轉：繞 O 轉 $i\cdot\frac{360^\circ}{n}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$，

設为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

n 翻：繞 OA_i 翻 $(i=1, 2, \cdots, n)$，

設为 $C_{n+1}, C_{n+2}, \cdots, C_{2n}$.

这 $2n$ 个动作对于 n 个頂点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的作用是 n 个文字上的所有 $n!=1\cdot 2\cdots n$ 个排列中的 $2n$ 个。

当 n 是双数，卽 $n=4, 6, \cdots$ 时：

O 是 n 次的对称心。

$OA_1, OA_2, \cdots, OA_{\frac{n}{2}}$（各通过对頂点）；$OB_1, OB_2, \cdots, OB_{\frac{n}{2}}$（各通过对边的中心）是对称軸。

不变 $A_1A_2\cdots A_n$ 正 n 边形的动作共有 $2n$ 个：

n 轉：繞 O 轉 $i\cdot\frac{360^\circ}{n}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$，

設为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

n 翻：对 OA_i 翻和对 OB_i 翻 $\left(i=1, 2, \cdots, \frac{n}{2}\right)$，

設为 $C_{n+1}, C_{n+2}, \cdots, C_{2n}$.

这 $2n$ 个动作对于 n 个頂点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的作用是 n 个文字上的所有 $n!=1\cdot 2\cdots n$ 个排列中的 $2n$ 个。

注意：接連实施两个使正多边形不变的动作，結果仍旧是一个使正多边形不变的动作，因此所有这一些动作的集合，对于接連实施这个运算来講，叫做是**封閉**的。C_1（不动的动作，

或者看作绕O 转 0°)对于任何动作都没有影响．任何动作都有个逆动作，动作和逆动作接连实施结果就和不动一样．这样，我们就得到了正多边形的**对称群**．(群的定义，以后再严格讲．)

对于任意的正整数$n\geqslant3$，正n边形都存在，但是正n边形要能够用圆规和直尺(没有刻度的)画出来就必须且只须

$$n=2^s p_1 p_2\cdots p_t,$$

这里$s\geqslant0$是整数，p_1，p_2，…，p_t是不同的奇质数，p_i-1 $(i=1,2,\cdots,t)$都是 2 的方幂并且指数也还是 2 的方幂，就是说，

$$p_i=1+2^{2^{e_i}},$$

其中$e_i\geqslant0$是整数，式中$p_1p_2\cdots p_t$也可以一个都不出现．这是由高斯在1796年首先证明的．特别，$n=3=1+2^{2^0}$，$4=2^2$，$5=1+2^{2^1}$，$6=2\cdot3$，$8=2^3$，$10=2\cdot5$，$12=2^2\cdot3$，$15=3\cdot5$，$16=2^4$，$17=1+2^{2^2}$，和$257=1+2^{2^3}$等时可以画，而$n=7,9,11,13,14,18$等时却不可以画．注意，$65,537=1+2^{2^4}$是质数，而欧拉(Leonhard Euler)证明$4,294,967,297=1+2^{2^5}$有质因子 641(怎样证明?)，因此正 65，537 边形可以用圆规和直尺来画，而正 4，294，967，297 边形却不可以用圆规和直尺画出来①．

(四)现在还补充几点．

若$\triangle ABC$是一个等腰三角形(图 12)而不是一个正三角

① 关于可能用圆規直尺作图的条件問題，参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》第 345–349 頁．

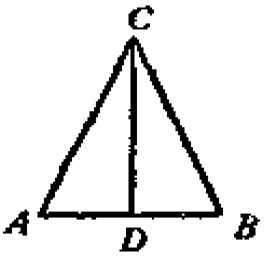


图 12.

图 13.

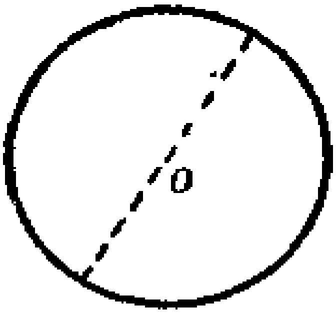


图 14.

形，也就是假設

$$AC = BC \neq AB,$$

$$\angle CAB = \angle ABC \neq \angle ACB.$$

又若 D 是 AB 的中点，那末使 $\triangle ABC$ 不变的动作就只有 2 个：

不动，相当于 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C \end{pmatrix}$，

繞 CD 翻轉，相当于 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & C \end{pmatrix}$.

又若 $\triangle ABC$ 連等腰都不是（图 13），也就是說 AB, BC, CA 中沒有两个相等，那末使 $\triangle ABC$ 不动的动作就只有 1 个：

不动，相当于 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C \end{pmatrix}$.

正 n 边形，当边数 n 无限地增大时，就向圓逼近. 圓的任意直径都是个对称軸，而圓心是对称心（图14），因此使圓不变的动作有无限多个.

4. 正多面体的对称

关于空間中图形的对称問題，这里主要考虑正多面体。

和正多边形情形不同，正多面体只有 5 种．我們在这里先証明欧拉公式（1732 年），然后利用欧拉公式来証明这个事实．

（一）欧拉公式：对于任意多面体（即各面都是平面多边形并且沒有洞的立体），假設 F，E 和 V 分别表示面，稜（或边），角（或頂）的个数，那末

$$F-E+V=2.$$

証明 如图 15（图是立方体，但証明是一般的，是“拓朴”的）：

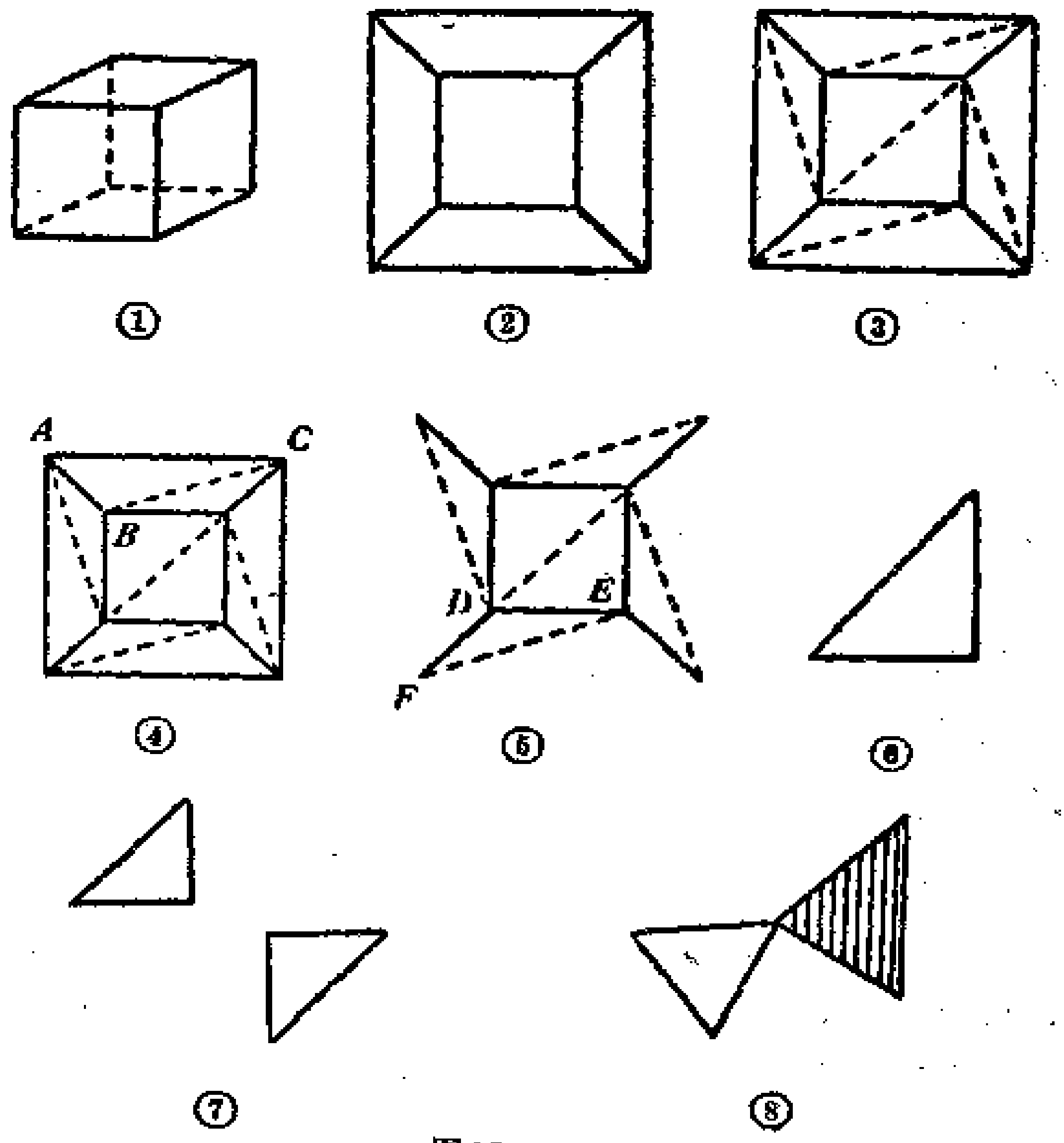


图 15.

（1）把多面体（图中①）看成表面是薄橡皮的中空立体．

（2）去掉多面体的一个面，就可以完全拉开鋪在平面上而得到一个平面中的直綫形，像图中②的样子．假設 F'，E' 和 V' 分別表示这个平面图形的（簡单）多边形、边和頂点的个数，我們只須証明 $F'-E'+V'=1$。

（3）对于这个平面图形，进行三角形分割，也就是說，对于还不是三角形的多边形陸續引进对角綫，一直到成为一些三角形为止，像图中③的样子．每引进一条对角綫，F' 和 E' 各增加 1，而 V' 却不变，所以 $F'-E'+V'$ 不变．因此当完全分割成三角形的时候，$F'-E'+V'$ 的值仍然沒有变．有些三角形有一边或两边在平面图形的边界上．

（4）如果某一个三角形有一边在边界上，例如图④中的 $\triangle ABC$，去掉这个三角形的不属于其他三角形的边，即 AC，这样也就去掉了 $\triangle ABC$．这样 F' 和 E' 各减去 1 而 V' 不变，所以 $F'-E'+V'$ 也沒有变．

（5）如果某一个三角形有二边在边界上，例如图⑤中的 $\triangle DEF$，去掉这个三角形的不属于其他三角形的边，即 DF 和 EF，这样也就去掉 $\triangle DEF$．这样 F' 减去 1，E' 减去 2，V' 减去 1，因此 $F'-E'+V'$ 仍沒有变。

（6）这样繼續进行，直到只剩下一个三角形为止，像图中⑥的样子．这时 $F'=1$，$E'=3$，$V'=3$，因此 $F'-E'+V'=1-3+3=1$。

（7）因为原来图形是連在一起的，中間引进的各种变化也不破坏这事实，因此最后图形还是連在一起的，所以最后不

会是分散在几处的几个三角形，像图中⑦那样。

(8) 如果最后是像图中⑧的样子，我们可以去掉其中的一个三角形，也就是去掉 1 个三角形，3 个边和 2 个顶点．因此 $F'-E'+V'$ 仍然没有变。

(二)我们现在来证明，最多只有 5 个正多面体(图 16)．

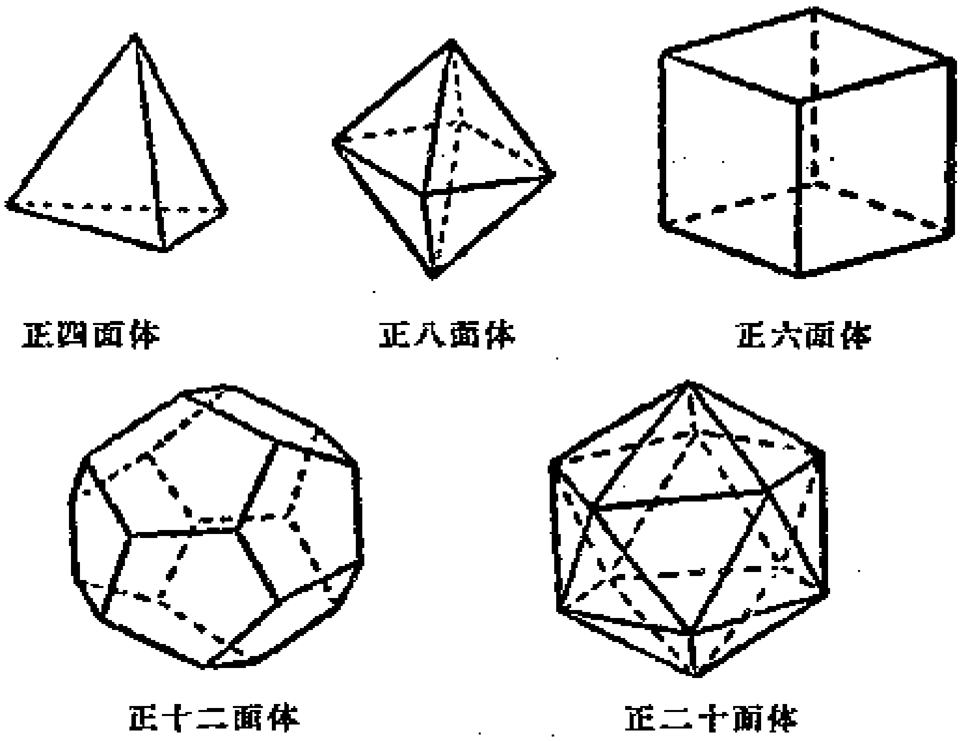


图 16.

至于确有 5 个正多面体存在，那是早就知道的事(希腊纪元前 3-4 世纪)．图形以及制造模型方法，可以参看史泰因豪斯(Steinhaus)著《数学万花镜》①．

证明 对于正多面体，假设它的各面都是正 n 边形，而且每一个顶角处有 r 个边相遇．这样就有：

① 《数学万花镜》，裘光明译，中国青年出版社出版．

$$nF = 2E, \tag{1}$$

$$rV = 2E. \tag{2}$$

(1)的右边系数2是因为每边出現在2面中.(2)的右边系数2是因为每边通过2个頂角. 把(1)和(2)代入欧拉公式中,就得到:

$$\frac{2E}{n} - E + \frac{2E}{r} = 2,$$

或

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{3}$$

显然 $n \geqslant 3$, $r \geqslant 3$,因为多边形至少有三边,而在每頂角处也至少有三边. 但 $n > 3$,且 $r > 3$ 又是不可能的,因为那样就要有 $\frac{1}{n} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,可是 $E > 0$. 所以 r 和 n 中至少有一个等于3.

設 $n = 3$,那末 $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E}$,因此 $r = 3, 4, 5$,由是 $E = 6, 12, 30$,而 $F = 4, 8, 20$,这就給出了正四面体,正八面体和正二十面体.

設 $r = 3$,那末 $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E}$,因此 $n = 3, 4, 5$,由是 $E = 6, 12, 30$,而 $F = 4, 6, 12$,这就給出了正四面体,正六面体(即立方体)和正十二面体. 証完.

(三)我們进一步考虑使每个正多面体不变的动作(不包括空間中对于平面或点的对称或反射). 首先所有正多面体都有1个(对称)中心,也就是內切球或外接球的中心. 一个动作如果使正多面体不变,就也不变这个中心,因而就是一个繞这个中心的旋轉. 根据定理,空間中繞定点的旋轉必然是繞

一个通过这定点的轴的旋转[1]. 因此为了求出所有使正多面体不变的动作，我们只要求出所有的通过中心的对称轴就行了. 每一个对称轴总是或者通过多面体的顶角，或者通过多面体的面的中心，或者通过多面体的棱的中点. 绕每一个 n 次对称轴可以作出的旋转数，除不动外，是 $(n-1)$ 个. 旋转角度是 $\frac{360°}{n}$, $2\cdot\frac{360°}{n}$, $\cdots$, $(n-2)\cdot\frac{360°}{n}$, $(n-1)\cdot\frac{360°}{n}$. 接连实施两个使正多面体不变的动作，结果仍然还是一个使正多面体不变的动作，因此所有这些动作的集合，对于接连实施这运算来讲，是封闭的. 和正多边形的情形相仿：这些动作之中有一个是不动；任何一个不变正多面体的动作都有一个逆动作，和它接连实施结果就和不动一样，而逆动作也不变这正多面体. 这样我们就得到了正多面体的对称群.

（四）我们首先来考虑正四面体（图 17）. 注意正四面体各面的中心联结起来还是正四面体（图 17 左）.

从正四面体的任一顶点向它的底面作垂直线，这个垂直线是 1 个 3 次对称轴. 因为正四面体有 4 个顶点，3 次对称轴就有 4 个（图 17 中）. 这些对称轴也是底面的对称轴.

我们把正四面体中没有公共点的棱叫做对棱. 连接 3 对对棱的中点，我们得到了 3 个 2 次对称轴（图 17 右）.

总起来看，使正四面体不变的动作共有

$$1+4\cdot(3-1)+3\cdot(2-1)=12\text{ 个},$$

这组成正四面体对称群. 可以考虑这些动作对 4 个顶点的作

---

① 关于空间中绕定点的旋转，参看吴光磊编《空间解析几何简明教程》（人民教育出版社出版，1966 年第 1 版，1977 年第 2 次印刷），第 90—91 页.

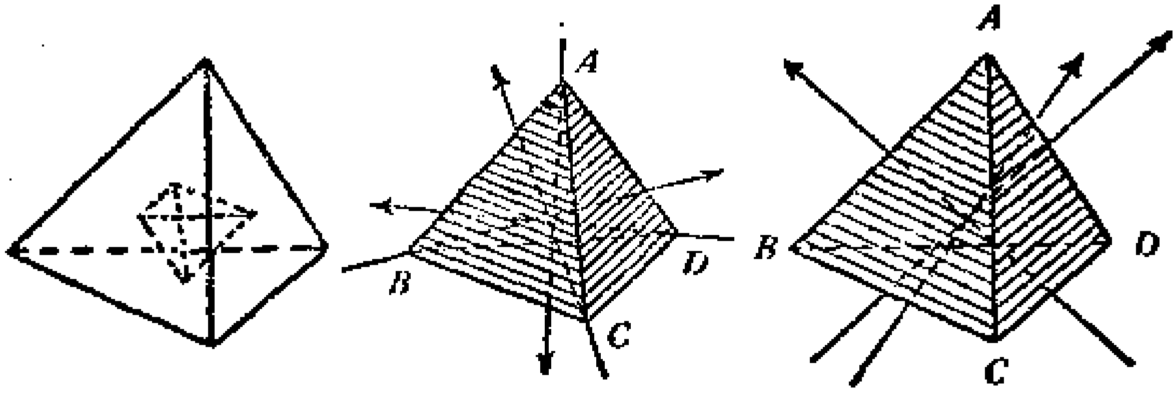


图17.

用.

(五)我們其次考虑正六面体(就是立方体). 由于正六面体各面的中心联結起来成功了正八面体(图 18 左),正八面体各面的中心联結起来又成功了正六面体(图 18 右),所以正八面体不必另外再考虑.

通过立方体的一个頂点,如 A, 和它的对頂点(即不在同一平面上的),如 G,就得到了 1 个 3 次的对称軸(图 19 左).(注意:AG 垂直于平行平面 BDE 和 CHF 并通过立方体的中心.)在繞这个軸旋轉之下,过 A 的 3 个稜 AB,AD,AE 輪換,同时过 G 的 3 个稜 GC,GF,GH 也輪換. 这样,我們得

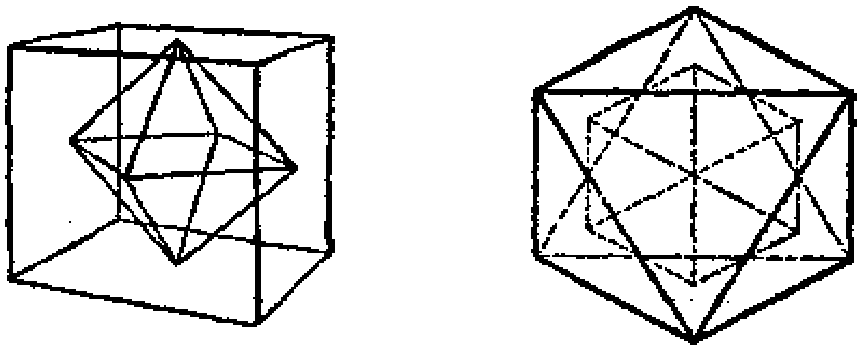


图18.

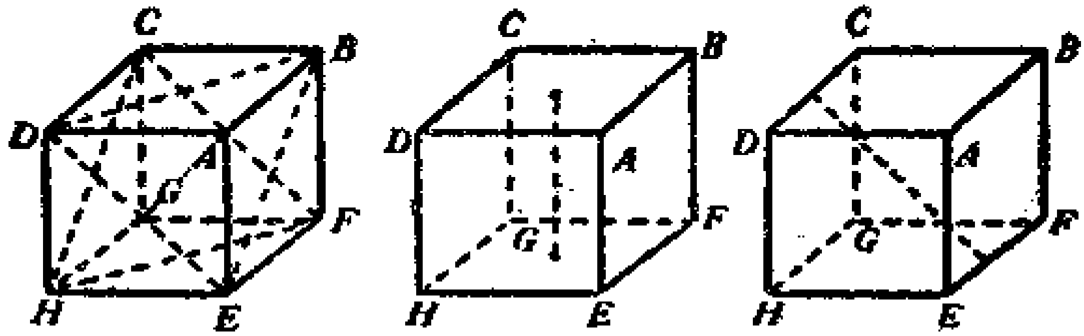


图19.

到了4个3次对称軸。

通过立方体每对对面的中心，可得到1个4次对称軸(图19中)。这样，共得到3个4次对称軸。

通过立方体每对对稜的中心，可得到1个2次对称軸(图19右)。这样，共得到6个2次对称軸。

总起来看，使立方体不变的动作共有

$$1+4\cdot(3-1)+3\cdot(4-1)+6\cdot(2-1)=24\text{个},$$

这組成正六(八)面体对称群。

(六)我們最后来考虑正十二面体。由于正十二面体各面的中心联結起来成功了正二十面体(图20左)，正二十面体各面的中心联結起来又成功了正十二面体(图20右)，所以正二十面体不必另外去考虑。

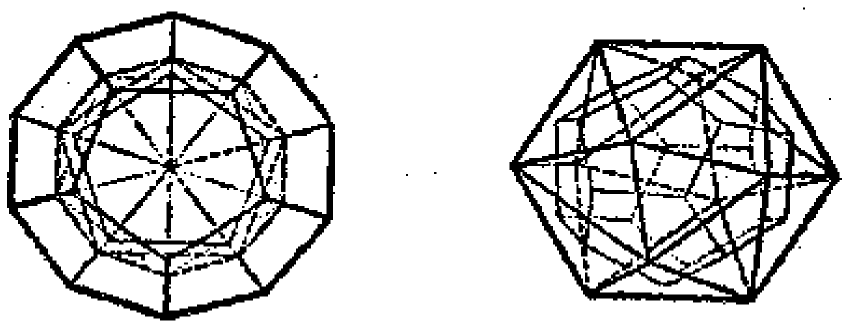


图20.

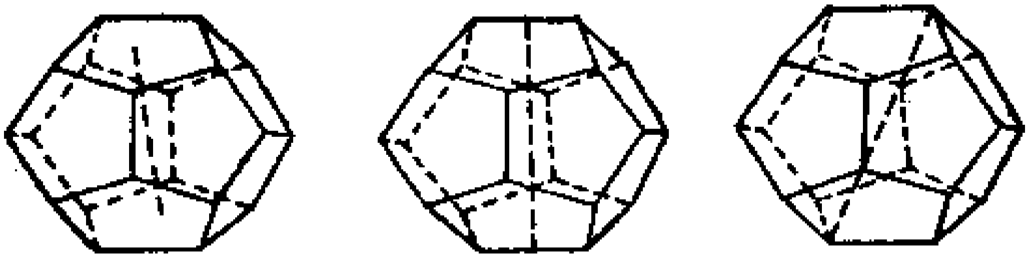


图 21.

每对对面的中心决定 1 个 5 次对称軸，所以共有 $\frac{12}{2}=6$ 个 5 次对称軸(图 21 左).

每对对稜的中点决定 1 个 2 次对称軸，所以共有 $\frac{30}{2}=15$ 个 2 次对称軸(图 21 中).

每对对角的顶点决定 1 个 3 次对称軸，所以共有 $\frac{20}{2}=10$ 个 3 次对称軸(图 21 右).

总起来，使正十二面体不变的动作共有

$$1+6\cdot(5-1)+15\cdot(2-1)+10\cdot(3-1)=60\text{ 个},$$

这組成正十二(二十)面体对称群. 这个群的构造决定了一般五次方程不能用根式来解的重要定理(阿培耳，伽罗华).

5. 带飾、面飾和晶体

(一)带飾.

带指一个平面夹在两条平行直綫中間的部分. **带飾**指带中图形. 和两平行直綫平行并且通过带的正中間的直綫叫**横軸**. 我們設想带飾具有在横軸方向的平移(平行移动)，平移方向以及大小由一向量(即有大小并有方向的量)决定，設这个向量是 a，而 na (n 是整数)是所有的平移. **带飾单位**指带

飾一部分，經过平移可以生成全部带飾．使带飾不变的动作也就是带飾的对称，組成带飾的对称群．可能的情形有以下一些，如图 22：

①只有平移是对称．

②对于横軸的反射也是对称．

③对于一**縱軸**(即垂直于横軸的一直綫)的反射是对称，因此也就有无穷多个縱軸也是反射軸，距离是 $\frac{1}{2}a$．

④有对称中心，各中心的距离是$\frac{1}{2}a$．

⑤上面各种对称都具有．

⑥有滑动反射，滑动的距离是$\frac{1}{2}a$，即对横軸作反射后又

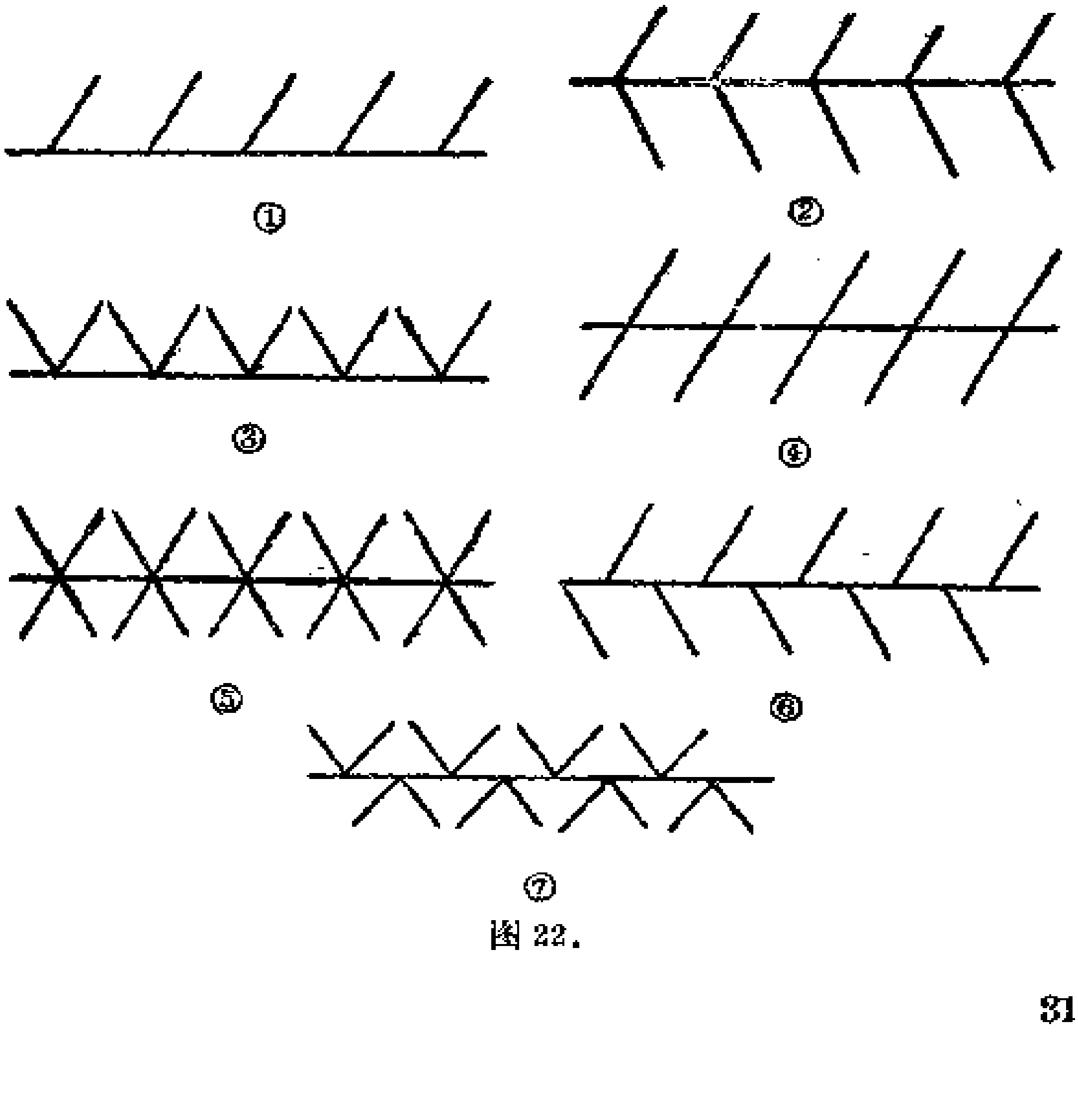


图 22．

沿横軸的方向作 $\frac{1}{2}a$ 的平移。

⑦上面的③④和⑥都具有。

实际上，对于带飾所在的平面还可引进反射的对称，組合成群的可能共有 31 种，不一一来詳列。

我們通常見到很多带飾，例如在花带上，在花边上，以至于在敦煌壁画上(卷首彩图)。图 23、24 就是带飾的一些例子。

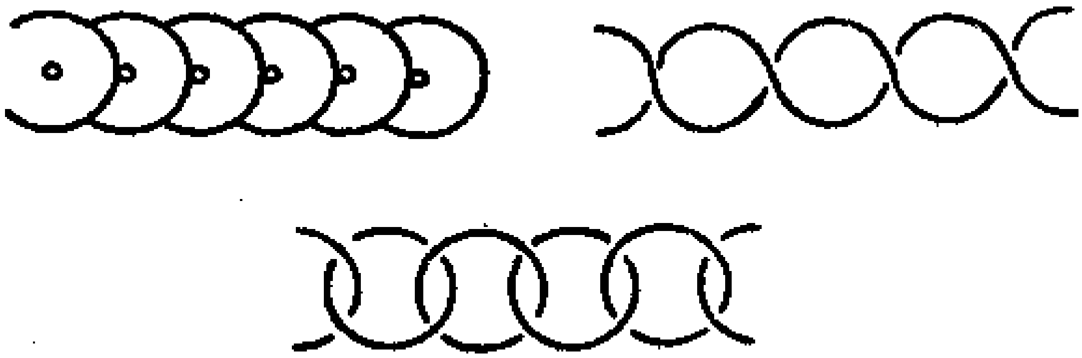


图 23.

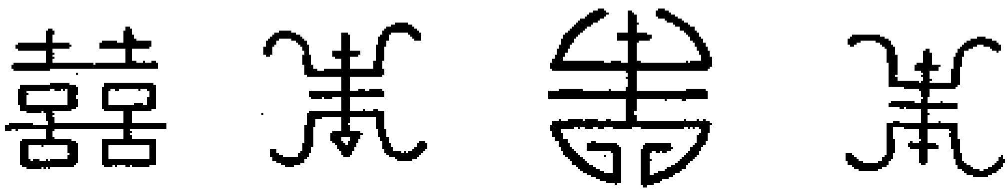


图 24.

(二)面飾。

面飾指平面中图形，由一**面飾单位**(即单位格子)經过兩組不相平行的平移 na 和 mb (n 和 m 都是整数)得来。平面中使一面飾不变的动作(包括平移，旋轉，反射)組成面飾的对称群。除去平移不計，旋轉以及反射都使单位格子不变，因此是繞定点的旋轉，这种可能性是有限的。

不变单位格子的动作共 10 种：

①不动.

②转 $360°\cdot\frac{1}{2}$.

③转 $360°\cdot\frac{1}{3}$.

④转 $360°\cdot\frac{1}{4}$.

⑤转 $360°\cdot\frac{1}{6}$.

⑥对一轴作反射(即翻转).

⑦②和⑥合.

⑧③和⑥合.

⑨④和⑥合.

⑩⑤和⑥合.

此外没有其他可能性(因为如果 $n\geqslant 7$, 正 n 边形的边长小于半径; 又 $n=5$ 也不可能, 因为 $2n=10$ 不可能)[①].

不变面饰的动作, 还可以加上:

①平移.

②滑动反射, 即对一直线作反射后又沿这条直线的方向作平移.

面饰和它的对称群共有 17 种.

如果平面的反射也在考虑之中, 那就有 80 种.

---

① 关于不变单位格子的动作, 有些外文书里讲的比较詳細. 例如有一本德文书, 是施派塞尔(Speiser)所著, 叫《有限群論》(Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung)(1937 年第三版), 第78頁和86頁讲到这个問題; 还有一本英文书, 是外尔(Weyl)所著, 叫《对称》(Symmetry)(1952年版), 第101-102頁也讲到这个問題. 懂德文或英文的讀者如果有兴趣可以去参看. 在施派塞尔的书里, 第 86-91 頁还有关于面飾的材料. 两本书里, 都有不少的图.

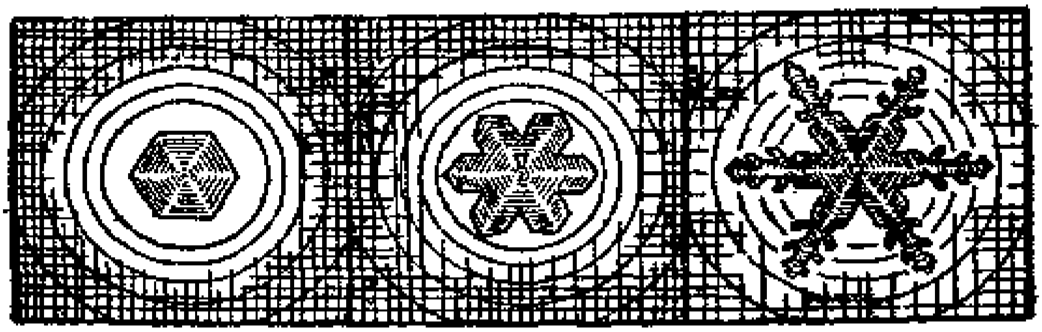


图 25.

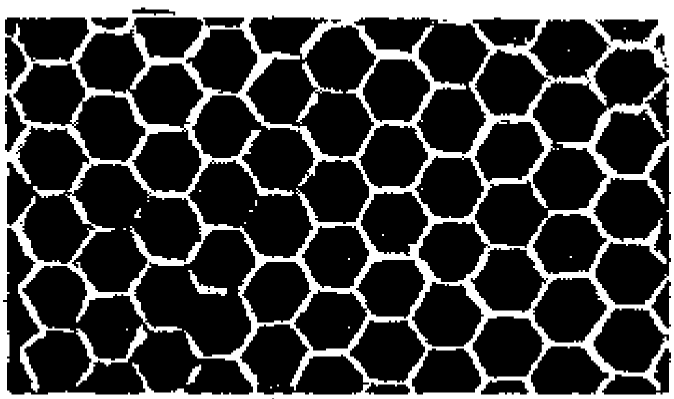


图 26.

自然界中，雪花(图 25 表示雪花形成的过程)和蜂巢(图 26)就是平面中的对称的例子. 至于人类制造物，那就小到衣物装飾，大到房屋建筑(諸如屋頂、墙壁、窗格、地面、雕闌、画栋)，几乎处处都有面飾. 我国敦煌壁画的边飾、項光和藻井，都有极丰富而壮丽的对称. 古代埃及的裝飾物，也是极丰富多彩的. 图 27-29 是一些面飾的例子. 图 29 是窗格.

(三)晶体.

自然界中，几何对称最突出地表現在晶体中，晶体和它的平面的对称可以說是极精巧的. 晶体原子在平衡位置时組成在空間中一个有規則的形体，就是空間单位格子，有一些动作可以不变这种空間单位格子，包括不在一平面中三組平移以

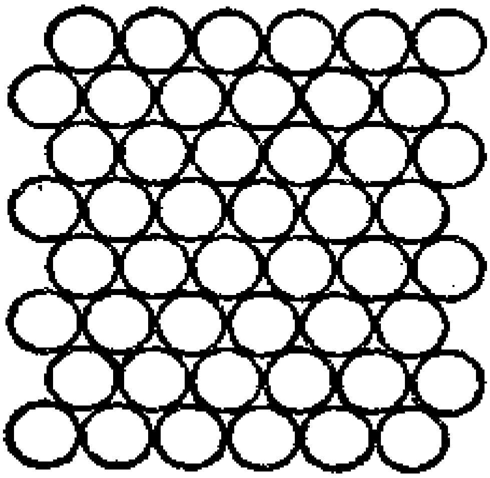


图27.

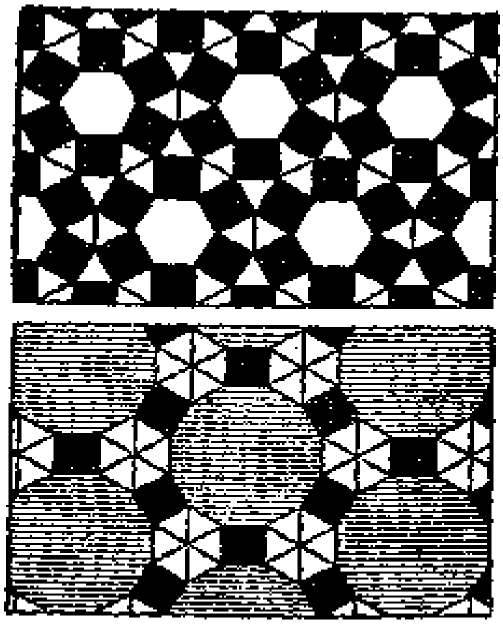


图28.

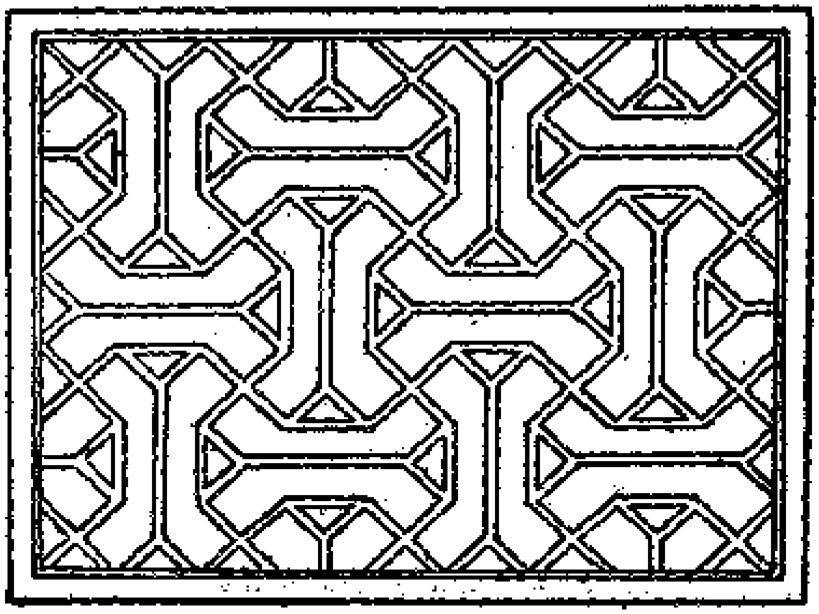


图29.

及一些旋轉和反射，因此空間单位格子經过三方向的平移生成空間格子。 晶体的物理性質和方向有关，它的对称性除由外形表現之外，更多地由它的內在的物理构造表現。

单位格子的对称，即不变单位格子的动作，有：

① 对平面的反射。

② 使中心不变的动作，即繞过中心的軸的旋轉(旋轉的角是$\frac{360^\circ}{2}$，$\frac{360^\circ}{3}$，$\frac{360^\circ}{4}$，$\frac{360^\circ}{6}$)。

③ ①和②相合，得对中心的反射。

空間格子的对称，即不变空間格子的动作，还有：

④ 平移。

⑤ 平移和平面的反射相合，得滑动反射。

⑥ 平移和旋轉相合，得螺旋运动。

晶体的外形，或不变单位格子的对称群，共有 32 种。晶体在空間中沿着可由一个轉动相联系的方向在物理性質上是沒有区别的，例如光在晶体中沿着这样两个方向传播的速度是相同的，而在其他不同方向的传播速度一般却是不同的。

晶体的內部构造，或不变空間格子的对称群(包含不在一平面上的三个方向的平移)，共有 230 种。这是在 1885 年首先由費德洛夫(E.C.Федоров)所决定的。

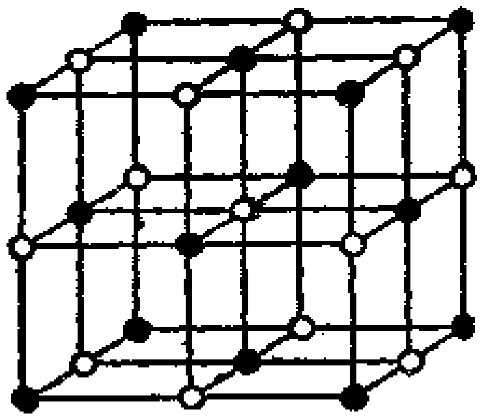


图 30.

图 30 是食盐 NaCl 晶体里原子排列的模型(圓点代表鈉原子，圓圈代表氯原子)；图 31 是二氧化硅 SiO_2 晶体里原子排列的模型(圓点代表硅原子，圓圈代表氧原子)；图 32 是方解石 $CaCO_3$ 晶体里原子排列的模型。

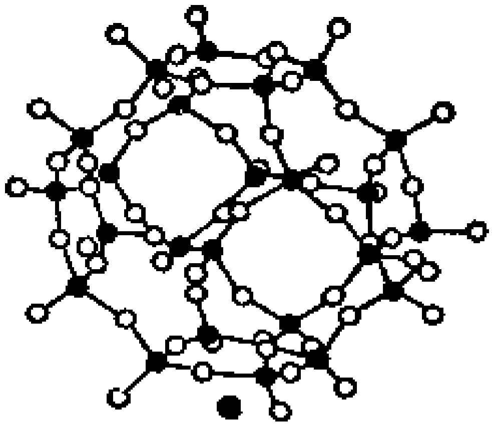


图 31.

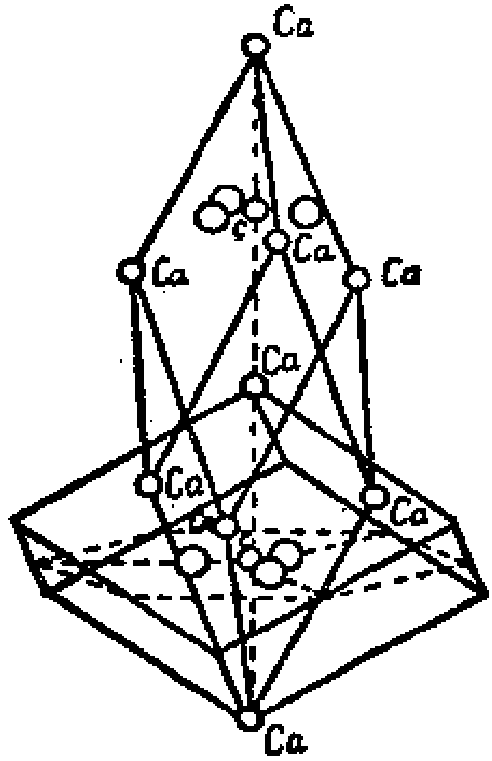


图 32.

三 群的概念

在前面，不論是在代数对称中考慮过的不使一个代数多項式变动的一些（文字的）排列的全体，还是在几何对称中考慮过的不使一个正多边形或正多面体变动的一些动作的全体，这些集合对于接連实施两个排列或两个动作的运算（以・表示）都具有这样的性質：

（1）集合中任意两个元素 A, B 接連实施的結果仍然是集合中一个元素 C（封閉性），即

$$A\cdot B=C.$$

（2）集合中不动元素 I 具有下列性質，即对于集合中任意元素 A 都有：

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

(3)集合中每个元素 A 都有一个逆元素 A^{-1} 仍在集合中，即：

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

(4)集合中任意三个元素 A, B, C 都有結合律，即：

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(注意，集合中任意两个元素 A, B 不一定有交換律，即：

$A \cdot B$ 不一定就等于 $B \cdot A$.)

一般地講，如果我們有任意一些元素的集合，并且有一个运算(用 · 来代表)，而且这个集合中的元素对于这个运算滿足像上面的(1)(2)(3)(4)四个条件，我們就說：这个集合对于这个运算組成一个群.

群的概念是近代数学中最重要的概念之一，上面提到的带飾、面飾和晶体的可能性都可以用群的理論来决定. 它不只对于代数学和几何学，也对于数学分析以至于理論物理学，都有重大的应用.