Shuxue Aosai Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

构造法解题

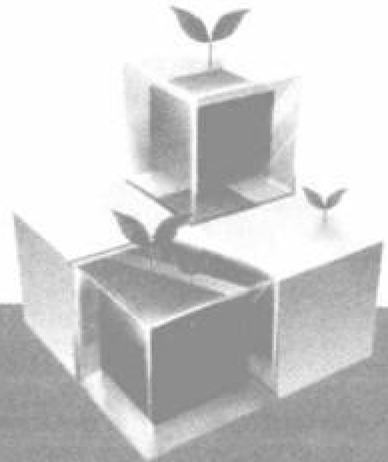
Gouzaofa Jieti

余红兵　严镇军　编著

中国科学技术大学出版社

林吴
氏國

请勿用于商业用途或准商业用途，
请于下载后24小时内删除！如无法遵守此规定，则谢绝下载！！
吴国林 MSN: colin_21st@hotmail.com



数学奥赛辅导丛书

构造法解题

余红兵　严镇军　编著

吴国林印

请勿用于商业用途或准商业用途，
请于下载后24小时内删除！如无法遵守此规定，则谢绝下载！！
吴国林 MSN: colin_21st@hotmail.com

中国科学技术大学出版社

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌．写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也堪称是这方面的范本．

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的亲炙，耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色．

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序．

龚　昇

前　言

这本小册子,通过初等数学,特别是数学竞赛中的问题,介绍解题中的一些构造性思想和方法.

构造法解题,归结起来,大致可以分为两个方面.一方面,它是一种辅助手段,通过构造适当的辅助量(如图形、模型、函数等)转换命题,以帮助解题.在前三节中,我们撷取一些读者较为熟悉的内容来体现构造法的这种特点.另一方面,构造性方法提供了证明存在性命题的一种有效手段,本书的第4节至第7节侧重介绍这种解题思想及常用技巧,第8节则是这些内容的补充.

书中有些问题的解法属于单墫先生,对他允许我们引用这些内容深致谢意.

余红兵

目　　次

1 初等几何中的例子

论证几何命题的过程，可以说是反复运用“构造”——这一辅助手段的过程. 当我们试图证明一个几何命题：若 A（已知条件），则 B（结论）. 即

$$A\Rightarrow B$$

时，首先就应当作一个与问题有关的图，并将图中的点、线等标以适当的字母（记号），这便构造了一个所证命题的辅助模型，然后再对这个模型进行思索和论证.

由于许多几何问题的已知条件与结论之间的关系非常隐蔽，仅从上述模型不容易找到证题的思路. 一般来说，用综合法证明 $A\Rightarrow B$ 时，要经过许多中间的步骤，也就是说，要经过如下的程序：

$$A\Rightarrow \text{中间结论 } C\Rightarrow \text{中间结论 } D\Rightarrow\cdots\Rightarrow B$$

为了得到这些中间结论，我们经常动用辅助手段，即添加辅助线，构造出能揭示已知条件和结论之间关系的辅助图形，从而找到论证的途径.

我们来看勾股定理的下述证法，这是古希腊几何大师欧儿里德作出的，请读者注意论证中所构造的辅助图形.

【例 1】（勾股定理） 证明：任意直角三角形的斜边（弦）长的平方等于两直角边（勾、股）长的平方和.

证 首先,我们作出一个(辅助模型)直角三角形 ABC(图 1),这样,需要证明的便是:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \tag{1}$$

再分别以 AB、BC、AC 为一边向外侧构作(辅助图形)正方形 $ABHI$,$BCFG$,$ACED$(图 2),显然,(1)式等价于(转换命题!):

$$(ABHI) = (ACED) + (BCFG) \tag{2}$$

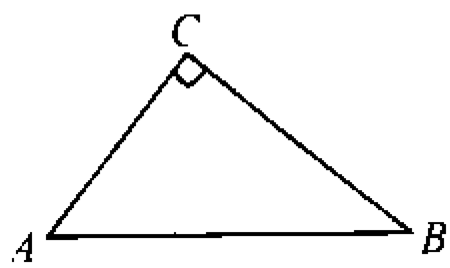


图 1

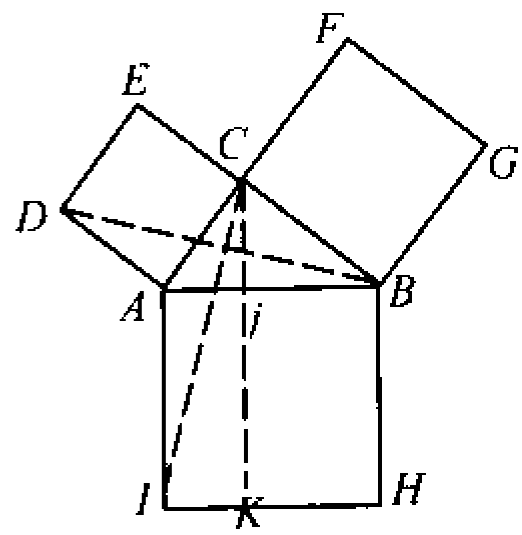


图 2

这里$(ABHI)$表示正方形 $ABHI$ 的面积,其余类似.

为了证明(2),我们作 $CJ \perp AB$,并延长交 HI 于 K,连结 BD,CI. 由这样构作的辅助图形,结论几乎唾手可得. 显然

$$\triangle ABD \cong \triangle AIC$$

所以

$$(ACED) = 2(\triangle ABD) = 2(\triangle AIC) = (AIKJ)$$

同理

$$(BCFG) = (BJKH)$$

又有

$$(AIKJ)+(BJKH)=(ABHI)$$

故(2)式成立.

勾股定理有许多基于构造的证法，图 3 及图 4 提供了两个这方面的例子，请读者自己完成论证.

三角形和圆是欧氏几何中最基本的图形，它们以及它们的组合图形具有十分丰富的性质，在论证中，构造适当的三角形或圆则可期望利用这些性质，因此是一种常能奏效的辅助手段.

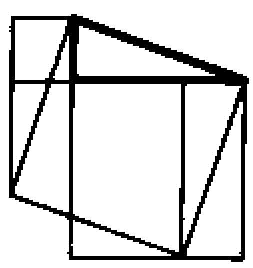


图 3

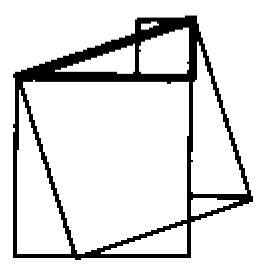


图 4

【例 2】 设 P 是三角形 ABC 中任意一点，证明：

$$AB+AC>PB+PC$$

证 如图 5 所示，延长 BP 交 AC 边于 D 点，我们构造出了对论证有帮助的三角形 ABD 及 CDP，由此易得(中间结论)：

$$AB+AD>BD=BP+PD \tag{1}$$

及

$$PD+DC>PC \tag{2}$$

将(1)与(2)相加，得出(注意 $AD+DC=AC$)：

$$AB+AC>BP+PC$$

【例 3】 如图 6，设 AH 是锐角三角形 ABC 的高，以 AH

为直径的圆分别交 AB,AC 于 M,N(M,N 与 A 不同),过 A 作直线 $L_A \perp MN$;类似地作直线 L_B,L_C,证明:L_A,L_B,L_C 三线共点.

证 作三角形 ABC 的外接圆,设 L_A 与此圆相交于 E 点,连结 BE,则

$$\beta=\delta$$

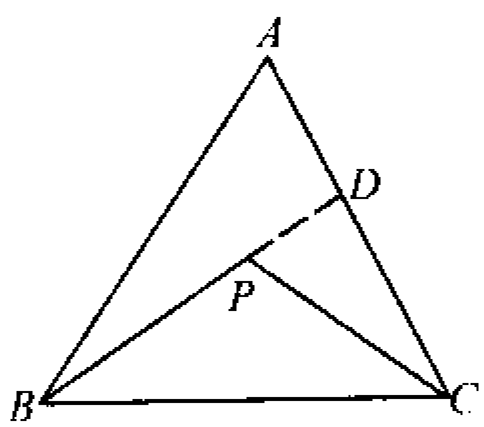


图 5

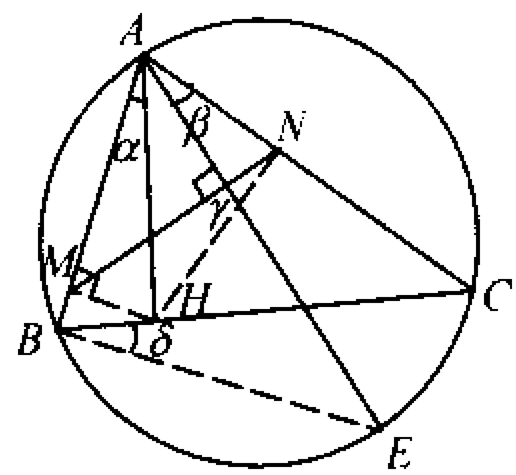


图 6

连结 HM,HN,因 A,M,H,N 四点共圆,故 $\alpha=\gamma$. 又显然 $\beta=\gamma$,所以

$$\alpha=\beta$$

从而

$$\alpha=\delta$$

故

$$\angle ABE=\delta+\angle ABC=\alpha+\angle ABC=90^\circ$$

由此可见,AE 是$\triangle ABC$ 外接圆的直径,即 L_A 通过圆心.

同理可证,L_B,L_C 都过圆心,所以 L_A,L_B,L_C 三线共点.

下面的例子是著名的欧拉定理,请注意论证中辅助圆及辅助三角形的作用.

【例 4】 （欧拉定理） 设三角形 ABC 的外心为 O，内心为 I（图 7），R 及 r 分别是外接圆和内切圆半径，设 $OI=d$. 证明：$d^2=R^2-2Rr$.

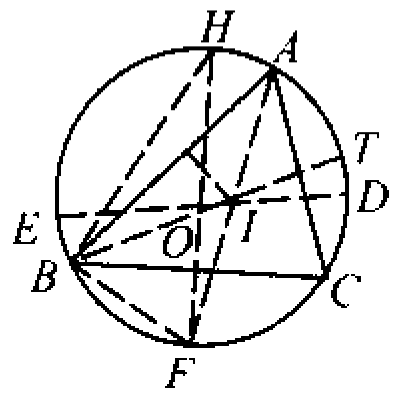


图 7

证 求证的结论等价于

$$(R+d)(R-d)=2Rr$$

我们先在图中构造出长为 $R+d$ 及 $R-d$ 的线段.

画出三角形 ABC 的外接圆，把 OI 两端延长交外接圆于 D,E，则

$$EI=R+d,\qquad DI=R-d$$

于是，问题转化成证明

$$EI\cdot ID=2Rr \tag{1}$$

连结 AI 并延长交外接圆于 F，由相交弦定理，(1)式等价于

$$AI\cdot IF=2Rr \tag{2}$$

作 $IG\perp AB$（G 为垂足），则 $IG=r$，且

$$AI=\frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$$

由(2)式可见，为完成定理的证明，现在就转化为证明

$$IF=2R\sin\frac{A}{2} \tag{3}$$

作直径 FH，连 BF,BH，便构造了一个直角三角形 FBH，且 $\angle H=\angle BAF=\dfrac{\angle A}{2}$，故

$$BF=HF\sin\frac{A}{2}=2R\sin\frac{A}{2} \tag{4}$$

比较(3)、(4)可见，剩下的事情是证明

$$BF = IF$$

而这几乎是显然的，请读者自己考虑.

从上面的例子可以看出，实现几何命题论证的关键在于动用辅助手段，即逐步添加辅助线，以构造出揭示已知与未知关系的图形，限于本书的目的，我们不打算去讨论构作辅助线的各种办法，下面只简要介绍一下引用“参数”来探求辅助线的作法，这种“待定尝试”的想法在第5节中还将提到.

例如，为了证明关于线段的等式

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{e}{f} \tag{1}$$

这 a，b，c，d，e，f 都是已知图形中的线段长，可以引入待定线段 x，使得

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{x} \tag{2}$$

这较(1)要简单.我们设法找出这样的线段 x(例如，利用或制造相似关系)，并证明

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{f} \tag{3}$$

最后将(2)、(3)相乘即得求证等式(1).

【例5】 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 M.证明

$$\frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} = \frac{AM}{CM}$$

证 如图8，令

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{x}$$

利用相似形不难找到末知线段 x. 这只要作 ME 交 AB 于 E，使$\angle AME=\angle ABC$. 则$\triangle ABC\sim\triangle AME$，从而

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{ME} \tag{1}$$

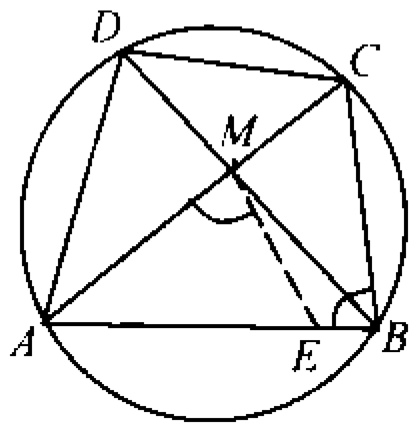


图 8

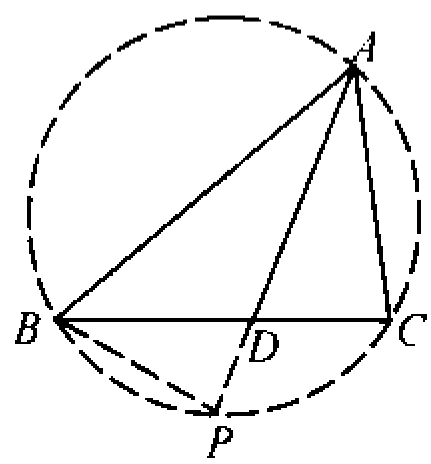


图 9

即 ME 就是要找的末知线段 x. 连结 CE，由 $\angle AME=\angle ABC$，知 B,C,M,E 四点共圆，从而

$$\angle ACE=\angle ABD=\angle ACD$$

又

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-\angle AME=\angle CME$$

所以$\triangle ADC\backsim\triangle EMC$，于是

$$\frac{AD}{CD}=\frac{EM}{CM} \tag{2}$$

(1)、(2)两式相乘即得欲证等式.

【例 6】 如图 9，设 AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，证明

$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$$

证 引进待定线段 x,y，满足

$$
\begin{cases}
AB \cdot AC = AD \cdot x & (1) \\
BD \cdot CD = AD \cdot y & (2) \\
x - y = AD & (3)
\end{cases}
$$

显然,从这三个式子消去 x,y,即得欲证等式.

由(3)式,可将 AD 延长至(待定)点 P,令 $AP=x$,$PD=y$,则 $x-y=AD$. 这时(2)式成为

$$BD \cdot CD = AD \cdot PD$$

即 P,A,B,C 四点共圆,由此得到证明本题的辅助线的作法:延长 AD 使与$\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 P,连结 BP. 由$\triangle ABP \backsim \triangle ADC$,即证得(1)式. 请读者用综合法来表述我们的论证.

完善图形是几何论证中非常有用的辅助手段,特别是常把半个图形完善成整个图形(例如将等腰直角三角形完善成正方形;把半圆完善为圆;等等),便于利用对称性,以找到证题的途径.

【例 7】 如图 10,在三角形 ABC 中,D 是 AB 的中点,点 E,F 分别在 AC,BC 上,证明

$$(\triangle DEF) \leqslant (\triangle ADE) + (\triangle BDF)$$

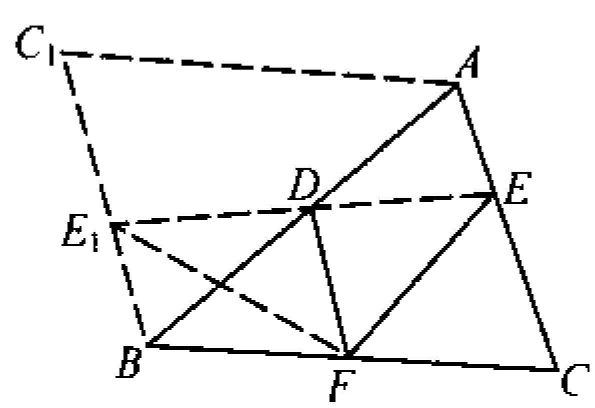


图 10

证 我们先将三角形 ABC 完善成平行四边形. 作 $AC_1 /\!/ BC$,使 $AC_1 = BC$,得到平行四边形 AC_1BC.

在 BC_1 上取 E_1 点,使 $BE_1 = AE$,易于证明

$$\triangle ADE \cong \triangle BDE_1$$

故$\angle ADE=\angle BDE_1$. 从而 E,D,E_1 三点共线，所以

$$\begin{aligned}(\triangle DEF)=(\triangle DE_1F)&\leqslant(BFDE_1)\\&=(\triangle BDE_1)+(\triangle BDF)\\&=(\triangle ADE)+(\triangle BDF)\end{aligned}$$

【例 8】 如图 11，设 $ABCD$ 为半圆，AC 与 BD 相交于 E，$EF\perp AD$（F 为垂足），证明

$$AC\cdot BD+AB\cdot CD=AD(BF+FC)$$

证 将半圆完善成整个圆，作 $CC_1\perp AD$ 交圆于另一点 C_1；连结 AC_1，FC_1，DC_1，则

$$CF=C_1F, AC=AC_1, CD=C_1D$$

由 B,E,F,A 四点共圆及 C,E,F,D 四点共圆，有

$$\begin{aligned}\angle BFA&=\angle BEA=\angle CED\\&=\angle CFD=\angle C_1FD\end{aligned}$$

故 B,F,C 三点共线. 且

$$BF+FC=BC_1$$

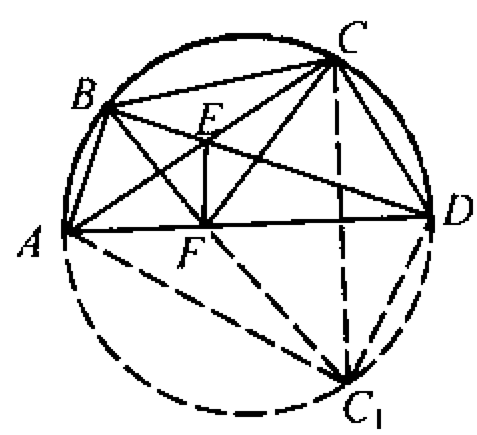


图 11

由托莱密定理，得

$$AB\cdot C_1D+AC_1\cdot BD=AD\cdot BC_1$$

即

$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD(BF+FC)$$

完善图形这种构造性思想，也可用来帮助解决某些立体几何问题，我们特别提一下把四面体完善成平行六面体的两种方法，参看图 12 及图 13（图中 $A\text{-}BCD$ 是给定的四

面体).

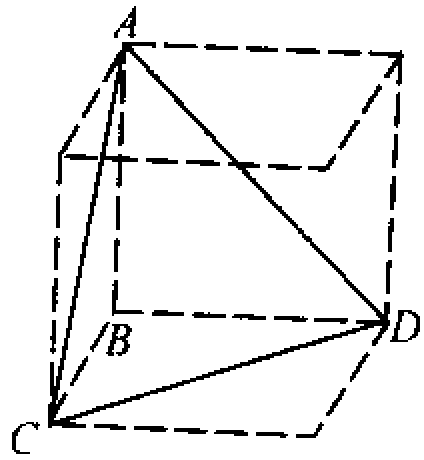


图 12

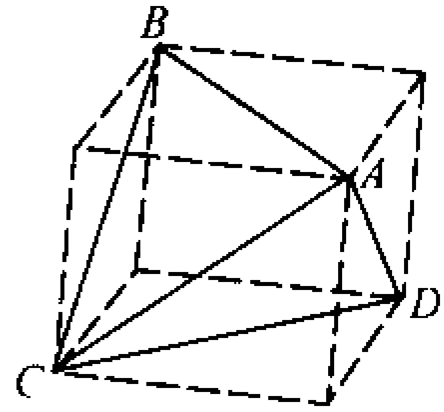


图 13

【例 9】 如图 14,已知四面体 $A_1\text{-}ABD$ 中,棱 AA_1,AB 及 AD 互相垂直,且它们的长度分别为 a,b,c.

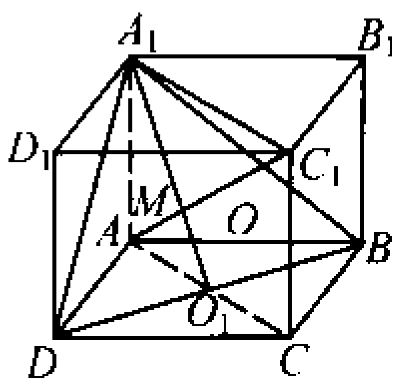


图 14

1)求证:顶点 A,$\triangle A_1BD$ 的重心 M 及此四面体的外接球的球心 O 共线.

2)求外接球的半径.

证 1) 如图,将四面体 $A_1\text{-}ABD$ 完善为直平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$. 于是,四面体的外接球,也是直平行六面体的外接球,且外接球球心 O 位于直平行六面体的对角线 AC_1 上.

设 AC,BD 相交于 O_1,则 AO_1 是$\triangle ABD$ 的边 BD 上的中线。设 AO_1 与 AC_1 相交于 M(AO_1,AC_1 都在矩形 ACC_1A_1 所在平面上). 易知

$$\triangle A_1C_1M \sim \triangle AO_1M$$

故

$$\frac{A_1M}{MO_1}=\frac{AC_1}{AO_1}=2$$

所以，M 即是$\triangle ABD$ 的重心．这就证得 A，M，O 三点共线．

2）由前面的讨论可知，外接球的直径等于直平行六面体的对角线 AC_1 之长，即等于 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

请勿用于商业用途或准商业用途，
请于下载后24小时内删除！如无法遵守此规定，则谢绝下载！！
吴国林 MSN: colin_21st@hotmail.com

2 辅助图形解代数题

本节简要地讨论用构造辅助图形来解决一些代数问题.

众所周知,数与形有着紧密的联系,在一定条件下它们可以互相转化.许多数量关系可以用几何图形来实现.例如,正实数 a,b 在几何上可实现为两条线段长;$a+b,a-b(a>b)$ 可以实现为两条线段长的和与差.我们举几个代数式与几何定理的对应关系(以下各字母均为正数):

$$a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow\text{勾股定理及逆定理}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\\ \text{或 } ad=bc\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{相似三角形对应边成比例}\\ \text{平行线截割定理}\\ \text{相交弦定理,圆幂定理}\end{array}\right.$$

$$x^2=ab\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{射影定理}\\ \text{圆幂定理}\end{array}\right.$$

等等.

用这些基本的对应关系为“元件”,可以将一些代数问题中的数量关系,组合构造出一个辅助图形,以利用几何知识来解决问题.这实质上是构造代数问题的一个几何模型来转化命题,而在这个模型上,问题易于处理.

【例 1】 设 a,b,x,y 均是实数,且满足条件:

$$a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=1,\ ab+xy=0$$

证明：

$$a^2+x^2=1,\ b^2+y^2=1,\ ax+by=0$$

证　无妨设 a,b,x,y 都不为 0. 因为(例如)若 $a=0$,则由已知条件得出 $b=\pm1, y=0, x=\pm1$,欲证的三个等式显然成立.

由 $a^2+b^2=1, x^2+y^2=1$,可以构造出两个直角三角形(图 15):$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$,使得 $AC=1$,　$AB=|a|, BC=|b|, AD=|x|, CD=|y|$. 由 $ax+by=0$,

得　　$$\frac{|a|}{|b|}=\frac{|y|}{|x|}$$

所以,$\triangle ABC\cong\triangle CDA$. 从而 $|a|=|y|, |b|=|x|$. 于是

$$a^2+x^2=1,\ b^2+y^2=1$$

且 $|ab|=|xy|$. 由 $ax+by=0$ 可知,ab 和 xy 异号,故

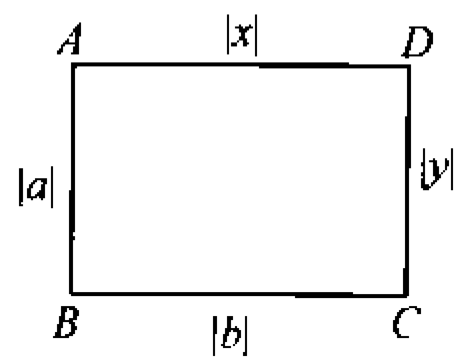


图 15

$$ab+xy=0$$

【例 2】　设正数 x,y,z 满足方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+xz+z^2=16 \end{cases}$$

试求 $xy+2yz+3xz$ 的值.

解　本题若按常规先去求解三元二次方程组,再用代值法求所给代数式的值,并不是一件容易的事,我们将原方程

组变形为

$$\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-2x\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)\cos 150^\circ=5^2 & (1) \\ \left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=3 & (2) \\ z^2+x^2-2xz\cos 120^\circ=4^2 & (3) \end{cases}$$

应用余弦定理和勾股定理可以构造出下述图形(图 16).

视正数 x,y 为已知,由(1)式作$\triangle OAB$,使 $OA=x$,$OB=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$,$\angle AOB=150^\circ$,则 $AB=5$;由(2)作$\triangle BOC$,使 $OC=z$,$\angle BOC=90^\circ$,则 $BC=3$;连结 AC,则$\angle AOC=120^\circ$,且由(3)知 $AC=4$.

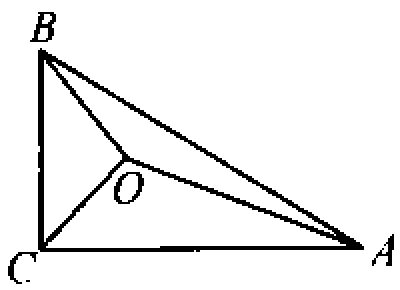


图 16

在$\triangle ABC$中,因 $AB^2=BC^2+AC^2$,故$\angle ACB=90^\circ$,所以

$$(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$$

又

$$\begin{aligned}(\triangle ABC)&=(\triangle AOB)+(\triangle BOC)+(\triangle COA)\\&=\frac{1}{2}x\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\sin 150^\circ+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)z+\frac{1}{2}xz\sin 120^\circ\\&=\frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{yz}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}xz}{4}\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz)\end{aligned}$$

所以

$$xy+2yz+3xz=6\times 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$$

构造图形也可解决某些三角问题.

【例 3】 求证：$\cos 5^\circ+\cos 77^\circ+\cos 149^\circ+\cos 221^\circ+\cos 293^\circ=0$.

证 将待证等式左边的 5 项适当分组，利用三角恒等变形. 不难完成证明，但下面的几何证明更饶有趣味.

首先注意到等式左端的 5 个角恰好构成一个公差为 72° 的等差数列，而 72° 正好是正五边形五个内角的外角的度数，如图 17，作边长为 1 的正五边形 $ABCDE$，过 A 点作直线 l，使 AB 与 l 成倾角 5°，过 D 点作直线 $l_1\perp l$. 设 B_1,C_1,E_1 分别是 B,C,E 在直线 l 上的投影；C_2,E_2 分别是 C,E 在 l_1 上的投影，不难得到

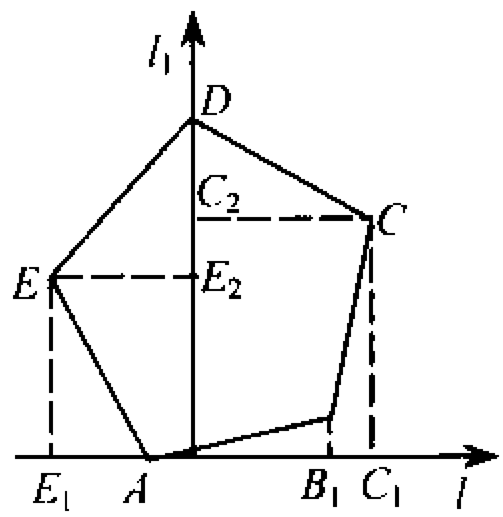


图 17

$$\cos 5^\circ=AB_1,\ \cos 77^\circ=B_1C_1$$
$$\cos 149^\circ=-CC_2$$
$$\cos 221^\circ=-EE_2$$
$$\cos 293^\circ=E_1A$$

所以

$$\begin{aligned}&\cos 5^\circ+\cos 77^\circ+\cos 149^\circ+\cos 221^\circ+\cos 293^\circ\\=&(AB_1+B_1C_1+E_1A)-(CC_2+EE_2)\\=&E_1C_1-E_1C_1=0\end{aligned}$$

注 熟悉向量的读者，由图 17 可见，

$$AB+BC+CD+DE+EA=0$$

而 $\cos5°$,$\cos77°$,$\cos149°$,$\cos221°$,$\cos293°$恰是上式右边五个向量在直线 l 上的投影,由此即得结论.

从上面几个例子可以看出,观察分析问题中的数量关系,并据此构造适当的辅助图形,是解题的一种有效方法.特别是数学竞赛中的一些试题(如例 2 及例 3),由于命题者精心设计的本意常在于要求用这种方法解答问题,以考察竞赛选手的思维能力和灵活性.因而具有这样的构造思想就不无益处.

借助代数式的几何意义,构造适当的辅助图形,还能证明一些代数不等式.

【例 4】 设 a,b,c,d 都是正实数,且 a 为最大者,且$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$,证明:$a+d>b+c$.

证 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$即为$ad=bc$,可以用圆幂定理构造一个辅助图形,如图 18 所示.

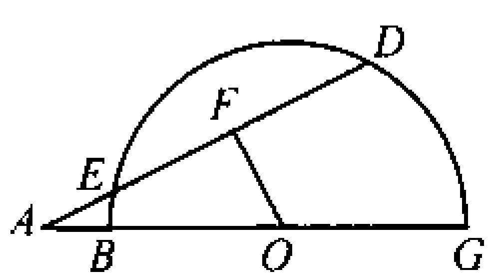


图 18

由 a 最大,取线段 $AC=a$ 作为过直径的割线;在 AC 上取 B 点,使 $AB=d$;以 BC 为直径作半圆 O,并作割线 $AD=b$(不妨设 $b\geq c$)交圆 O 于 E 点;作 $OF\perp AD$,F 为垂足),则由作图及圆幂定理得 $AE=c$.

在直角三角形 AOF 中,有

$$AO > AF$$

而

$$AO = AB + \frac{BC}{2} = d + \frac{a-d}{2} = \frac{a+d}{2}$$

$$AF = AE + \frac{DE}{2} = c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2}$$

所以 $a+d>b+c$.

下面是闵可夫斯基不等式基于辅助图形的证法.

【例 5】 证明(闵可夫斯基不等式):对于任意 $2n$ 个正数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,有

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}$$

等号当且只当$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时成立.

证 待证不等式两边的每一个根式都可以看作是一个直角三角形的斜边长,基于这个特点我们构作如图 19 所示的辅助图形. 由图中可见:

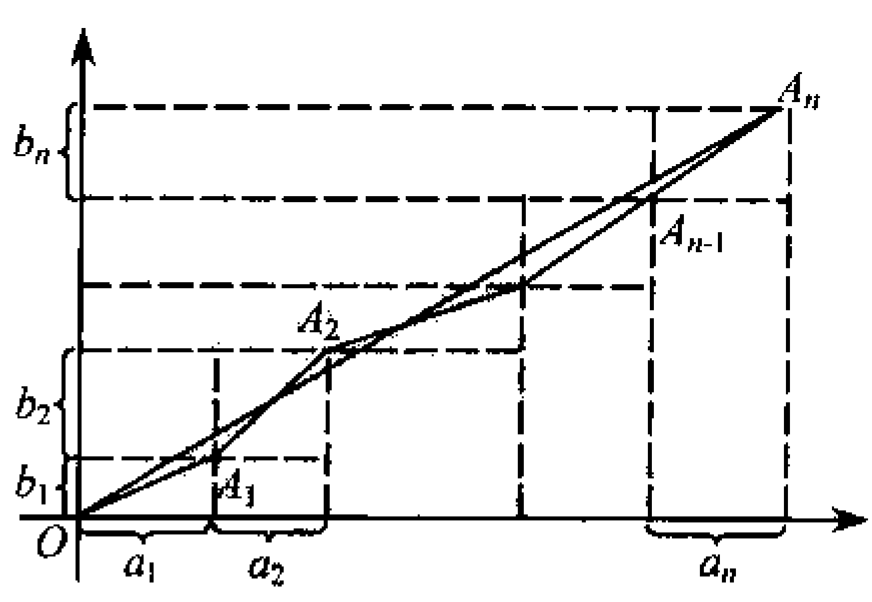


图 19

$$OA_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2},\ A_1A_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2},\cdots$$

$$A_{n-1}A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

所以

$$原式左边=OA_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n$$

$$原式右边=OA_n$$

因为折线 $OA_1\cdots A_n$ 之长不小于直线段 OA_n 之长，即

$$OA_1+A_1A_2+\cdots+A_n+A_{n-1}\geqslant OA_n \tag{1}$$

这就证得了所说的不等式.

当且仅当折线 $OA_1\cdots A_n$ 成为直线段 OA_n，即 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$都在 OA_n 之上时，(1)式成立等号，这显然等价于

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$$

【例 6】 设 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$. 证明不等式：

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$$

$$>\sin2x+\sin2y+\sin2z$$

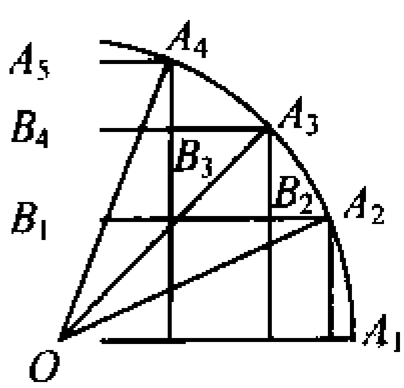


图 20

证 如图 20 所示，作一个圆心角为$\frac{\pi}{2}$，半径为 1 的扇形. 在圆弧上取 A_2，A_3，A_4，使得 $\angle A_1OA_2=x$，$\angle A_1OA_3=y$，$\angle A_1OA_4=z$（我们应用了条件 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$）. 由于扇形面积大于三个矩形 $OA_1A_2B_1$，$B_1B_2A_3B_4$ 及 $B_4B_3A_4A_5$ 的面积之和. 此即

$$\frac{\pi}{4}>\cos x\cdot\sin x+\cos y(\sin y-\sin x)+\cos z(\sin z-\sin y)$$

将上式稍加变形即得求证的不等式.

【例 7】 设有 100 个正数 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_{100}$，满足条件：

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=300$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{100}^2\geqslant(100)^2$$

求证：

$$a_1+a_2+a_3\geqslant 100$$

证 根据题设条件可以构造出图 21.

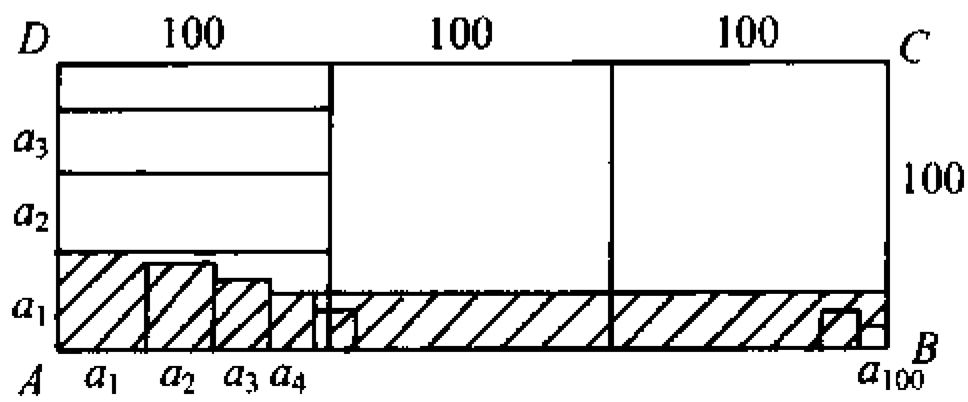


图 21

取一个长方形 $ABCD$，使 $AB=300$，$BC=100$，并将此长方形分成 3 个边长为 100 的正方形. 由于

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=300$$

故可把 AB 分成 100 个小段，其长依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$，再以每条线段 a_i 为边作面积为 a_i^2 的正方形. 因为 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{100}$，这 100 个小正方形的总面积 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$ 不超过图中阴影部分的面积.

现在设 $a_1+a_2+a_3<100$，于是，可将第一个大正方形划

分成 4 个长方形，每个长为 100，而宽依次为 $a_1,a_2,a_3,100-a_1-a_2-a_3$.

由于 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant\cdots$，所以，第二个大正方形内的阴影部分的面积不超过宽为 a_2 的长方形的面积，第三个大正方形内的阴影部分的面积不超过宽为 a_3 的长方形的面积，于是，100 个小正方形的总面积小于第一个大正方形的面积，这与所设条件

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2\geqslant 100^2$$

矛盾，所以 $a_1+a_2+a_3\geqslant 100$.

【例 8】 已知 α,β,γ 都是锐角，且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

求证：$\frac{3\pi}{4}<\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

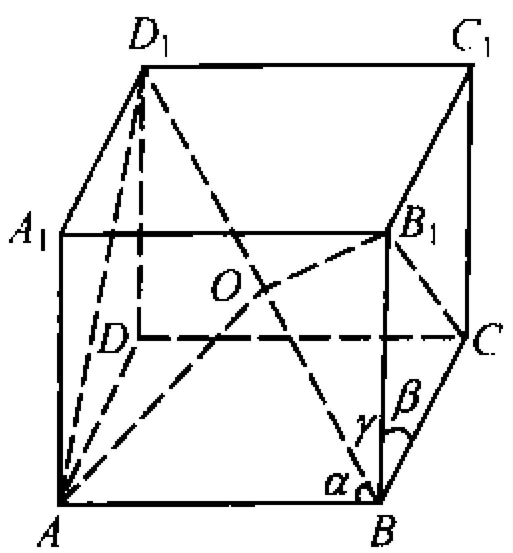


图 22

证 由题设条件，我们来作一个三度为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 的长方体. 如图 22，在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=\cos\alpha$，$BC=\cos\beta$，$BB_1=\cos\gamma$，则此长方体的对角线 $BD_1=1$，由 $\triangle BB_1D_1$ 是直角三角形，有 $\angle B_1BD_1=\gamma$. 同理 $\angle ABD_1=\alpha$，$\angle CBD_1=\beta$.

在三面角 $B\text{-}AD_1C$ 中，有

$$\angle ABD_1+\angle D_1BC>\angle ABC=\frac{\pi}{2}$$

即

$$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$$

同理

$$\beta+\gamma>\frac{\pi}{2},\ \gamma+\alpha>\frac{\pi}{2}$$

三式相加即得

$$\alpha+\beta+\gamma>\frac{3\pi}{4}$$

为了证明 $\alpha+\beta+\gamma<\pi$，我们取 BD_1 的中点 O，则由直角三角形 BB_1D_1，知$\angle BB_1D_1=2\gamma$. 同理

$$\angle AOD_1=2\alpha,\ \angle COD_1=2\beta$$

由 O 是长方体的中心，易证

$$\triangle AOD_1\cong\triangle COB_1$$

从而

$$\angle COB_1=\angle AOD_1=2\alpha$$

再考虑三面角 $O\text{-}CB_1D_1$，有

$$\angle COB_1+\angle B_1OD_1+\angle COD_1<2\pi$$

即

$$2\alpha+2\gamma+2\beta<2\pi$$

所以

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi$$

我们再来看两个稍微难一些的例子，它们直接从代数角度来解答都颇不容易.

【例 9】 若 p,q 为实数，且对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，成立不等式 $|\sqrt{1-x^2}-px-q|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. 证明：$p=-1,q=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

证 将所说的不等式变形为

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\leqslant px+q\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad(0\leqslant x\leqslant1)$$

分别以点 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$,$B\left(0,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$为圆心,作半径为 1 的圆,得圆 A 和圆 B.(请读者根据证明中的叙述画一个图.)

圆 A 的两端点为$\left(0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$,$\left(1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$且位于第一象限内的弧记为 l_1,圆 B 的两端点为 $\left(0,\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$,$\left(1,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$且位于第一、四象限内的弧记为 l_2,则上面变形后的不等式意味着:当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,直线 $y=px+q$ 位于 l_1 和 l_2 之间.

为了确定 p,q,只需注意,连接 l_1 两个端点的直线恰好与圆 B(从而与 l_2)相切.因此直线 $y=px+q$ 必然经过 l_1 的两个端点.从而 $p=-1,q=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

【例 10】 求二元函数 $z=(a-b)^2+\left(\sqrt{2-a^2}-\frac{9}{b}\right)^2$ 的最小值.

解 关键的一步是看出,z 的表达式是直角坐标系中,点 $A(a,\sqrt{2-a^2})$与 $B\left(b,\frac{9}{b}\right)$之间距离的平方.此外,由

$$a^2+(\sqrt{2-a^2})^2=2$$

得知,A 是圆 $x^2+y^2=2$ 上的一点,而

$$b\cdot\frac{9}{b}=9$$

表明 B 是双曲线 $xy=9$ 上的一点.

这样,从几何上看,我们的问题等价于:求圆 $x^2+y^2=2$ 和双曲线 $xy=9$ 之间的最短矩离.由于这两条曲线都关于直线 $y=x$ 对称,故从图形上容易看出,上述最短距离即是点 $A(1,1)$(直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的交点之一)与 $B(3,3)$(直线 $y=x$ 与双曲线 $xy=3$ 的交点之一)的距离,其长为 $2\sqrt{2}$.从而 z 的最小值为 8.

3 辅助函数

构造辅助函数是数学中经常使用的方法，大致地说，其基本想法是：通过构造适当的函数来转化问题，以利用所作函数的性质帮助论证或求解．本节将撷取初等数学中的若干例子，来体现一些构造辅助函数的技巧．

我们从读者熟悉的二次方程（多项式）谈起，这方面的知识，虽然简单却很有用处，灵活地应用它们可以解决不少问题．

【例 1】 已知实数 a,b,c 满足

$$a^2-a-bc+1=0 \tag{1}$$

$$2a^2-2bc-b-c+2=0 \tag{2}$$

证明 $a\geqslant1$.

证 我们来构造一个系数只含 a 且有实根的二次方程，由(1)式得

$$bc=a^2-a+1 \tag{3}$$

用(1)式的 2 倍减去(2)式得到

$$b+c=2a \tag{4}$$

从(3)、(4)可知，实系数二次方程

$$x^2-2ax+a^2-a+1=0$$

有两实根 $x=b$、$x=c$. 故方程的判别式$\geqslant0$，即

$$(-2a)^2-4(a^2-a+1)\geqslant 0$$

由此即得 $a\geqslant 1$.

下面是一个构造辅助的二次多项式证明不等式的例子.

【例 2】 设 a_i,b_i 都是正实数($i=1,\cdots,n$),且

$$a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0\quad 或\quad b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0$$

则

$$(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2)$$
$$\leqslant(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^2$$

证 首先,若 n 个比

$$\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\cdots,\frac{b_n}{a_n}\qquad(1)$$

都相等,记公共值为 k,则 $b_i=ka_i(i=1,2,\cdots,n)$,此时原不等式成为等式,故结论成立.

若(1)中 n 个比值不全相等,无妨设$\frac{b_1}{a_1}\neq\frac{b_2}{a_2}$,即

$$\frac{b_1}{a_1}a_2-b_2\neq 0\qquad(2)$$

令 $A=a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2$,$C=b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2$,$B=a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n$. 显然,我们可以假定 $A>0$ 来论证. 注意到

$$原式右边-左边=B^2-AC$$

这诱导我们构造如下的二次多项式:

$$\begin{aligned}f(x)&=Ax^2-2Bx+C\\&=(a_1x-b_1)^2-a_2x-b_2)^n-\cdots-(a_nx-b_n)^2\quad(3)\end{aligned}$$

$f(x)$的差别式 $\Delta=4(B^2-AC)$. 现在的问题是证明 $\Delta>0$.

由于 $f(x)$的首项系数 $A>0$,如果能找到某个 x_0,使

$f(x_0)<0$,则 $f(x)$ 的图像(开口向上的抛物线)必与 x 轴相交,从而 $\Delta>0$. 事实上,由(2)、(3)两式易于看出,对 $x_0=\dfrac{b_1}{a_1}$,有

$$f\left(\frac{b_1}{a_1}\right)=-\left(a_2\frac{b_1}{a_1}-b_2\right)^2-\cdots-\left(a_n\frac{b_1}{a_1}-b_n\right)^2<0$$

证毕.

【例 3】 设 a,b,c 互不相等,证明

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

证 将左边通分来论证,虽不失为一种方法,但较繁琐,我们的着眼点是考虑

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1 \quad (1)$$

这是关于 x 不超过二次的方程,易于验证,它有三个不同根 $x=a$、$x=b$、$x=c$. 故(1)式是关于 x 的恒等式,即对于任何 x 值,(1)式均成立. 特别地,取 $x=0$,得出了求证的等式.

注 在解答中,我们应用了下面的恒等定理:

如果一个 n 次方程有 n 个以上的根,那么,这个方程便是恒等式,即所有系数皆为零.

这一结论,后面还要用到.

辅助方程(多项式)是比较特殊的辅助函数,解题中应用甚多,值得强调。上面已举了几个构造二次方程(多项式)的例子,现在我们转向高于二次的辅助方程(多项式).

【例 4】 如果 x,y,z,w 满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}+\dfrac{w^2}{2^2-7^2}=1\\[2mm]\dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}+\dfrac{w^2}{4^2-7^2}=1\\[2mm]\dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}+\dfrac{w^2}{6^2-7^2}=1\\[2mm]\dfrac{x^2}{8^2-1^2}+\dfrac{y^2}{8^2-3^2}+\dfrac{z^2}{8^2-5^2}+\dfrac{w^2}{8^2-7^2}=1\end{cases}$$

求 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的值.

解 若将所给方程组看成是关于 x^2,y^2,z^2,w^2 的四元一次方程组,可以先求出 x^2,y^2,z^2,w^2.然后再计算 $x^2+y^2+z^2+w^2$(请参考例 5 的技巧).我们这里的方法是针对问题的特点,把四个方程统一起来,为此设

$$f(t)=1-\frac{x^2}{t-1}-\frac{y^2}{t-9}-\frac{z^2}{t-25}-\frac{w^2}{t-49}$$

其中 x^2,y^2,z^2,w^2 视为常数,由题设知

$$f(4)=f(16)=f(36)=f(64)=0 \qquad (1)$$

再令

$$p(t)=(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)f(t) \qquad (2)$$

易于求出

$$\begin{aligned}p(t)=&(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)\\&-x^2(t-9)(t-25)(t-49)\\&-y^2(t-1)(t-25)(t-49)\\&-z^2(t-1)(t-9)(t-49)\\&-w^2(t-1)(t-25)(t-49)\\=&t^4-(1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2)t^3+\cdots \qquad (3)\end{aligned}$$

这里我们略去了 t 的低于三次的项. 由于 $p(t)$ 是关于 t 的四次多项式,又从(1)、(2)知,$p(4)=p(16)=p(36)=p(64)=0$,即 $p(t)$ 的四个根为 4,16,36,64,由(3)及韦达定理知

$$1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2=4+16+36+64$$

所以 $x^2+y^2+z^2+w^2=36$.

【例 5】 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等,求满足下面方程组的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值.

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{a_1-b_1}+\dfrac{x_2}{a_1-b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_1-b_n}=1\\[2ex] \dfrac{x_1}{a_2-b_1}+\dfrac{x_2}{a_2-b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_2-b_n}=1\\[2ex] \cdots\cdots\\[2ex] \dfrac{x_1}{a_n-b_1}+\dfrac{x_2}{a_n-b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n-b_n}=1\end{cases}$$

解 考虑辅助方程

$$\frac{x_1}{t-b_1}+\frac{x_2}{t-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{t-b_n}$$
$$=1-\frac{(t-a_1)(t-a_2)\cdots(t-a_n)}{(t-b_1)(t-b_2)\cdots(t-b_n)} \qquad (1)$$

在消去分母后,它是 t 的 $n-1$ 次方程,且根据所给方程组可知,它有 n 个不同根 $t=a_1,a_2,\cdots,a_n$. 所以(1)式必定是一个恒等式(见例 3 的注).

将(1)的两边都乘以 $t-b_1$ 后,再令 $t=b_1$,得出

$$x_1=-\frac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\cdots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_n)}$$

类似地有

$$x_2=-\frac{(b_2-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_2-a_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)\cdots(b_2-b_n)}$$

……

$$x_n=-\frac{(b_n-a_1)(b_n-a_2)\cdots(b_n-a_n)}{(b_n-b_1)(b_n-b_2)\cdots(b_n-b_{n-1})}$$

由本例的结论，不难求出例 4 中 x^2,y^2,z^2,w^2 的值，请读者自己完成这件事.

下面几个例子都不容易. 我们有意选择一些难题，以显示构造辅助方程（多项式）的威力.

【例 6】 直角坐标系 xOy 中，n 个点 $M_1(x_1,y_1),\cdots,M_n(x_n,y_n)$ 满足 $y_1>0,\cdots,y_k>0,y_{k+1}<0,\cdots,y_n<0(1\leqslant k\leqslant n)$. 横轴上排列有 $n+1$ 个点 $A_1,\cdots,A_{n+1}$，并且对每个点 $A_j(1\leqslant j\leqslant n+1)$有

$$\sum_{i=1}^{k}\angle M_iA_jX=\sum_{j=k+1}^{n}\angle M_iA_jX$$

这里$\angle M_iA_jX$ 是向量 $\boldsymbol{A_jM_j}$ 和横轴正方向之间的夹角（角度的大小在 0 与 π 之间）.

证明：点集$\{M_1,\cdots,M_n\}$关于横轴对称.

证 将 M_j 视为复平面上的点，其对应的复数为 $z_j=x_j+\mathrm{i}y_j(1\leqslant j\leqslant n)$. 点 A_j 对应的复数仍记为 $A_j(1\leqslant j\leqslant n+1)$. 考虑

$$f(x)=(z_1-x)\cdots(z_n-x)$$

这是关于 x 的 n 次多项式.

由题设条件易知，对每个 $A_j(1\leqslant j\leqslant n+1)$，数 $z_1-A_j,\cdots,z_n-A_j$ 的幅角之和为 0，故 $f(x)$在 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 处的值都

是实数.

现在将 $f(x)$ 写成

$$f(x)=p(x)+\mathrm{i}q(x)$$

的形式. $p(x),q(x)$ 均是次数 $\leqslant n$ 的实系数多项式. 按已经得出的结果, $q(x)$ 在 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 这 $n+1$ 处的值都是 0, 故(由多项式恒等定理) $q(x)\equiv 0$. 即 $f(x)=p(x)$ 是实系数多项式, 所以其根 $z_1,\cdots,z_n$ 的共轭 $\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n$ 也是根, 即 $\{z_1,\cdots,z_n\}=\{\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n\}$. 这就表明, 点集 $\{M_1,\cdots,M_n\}$ 关于横轴对称.

【例 7】 如果 θ/π 和 $\cos\theta$ 同为有理数, 那么 $\cos\theta$ 必为下面五个数之一:

$$-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$$

证 设 $\frac{\theta}{\pi}=\frac{m}{n}$, m,n 都是整数且 $n>0$, 则

$$\cos n\theta=\cos m\pi=(-1)^m \tag{1}$$

论证的关键是先证明, 对任意正整数 n, $2\cos n\theta$ 可以表示成 $2\cos\theta$ 的 n 次整系数多项式, 且首项系数为 1. 即

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_1(2\cos\theta)^{n-1}+\cdots$$
$$+a_{n-1}(2\cos\theta)+a_n \tag{2}$$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是整数. 这个命题可用归纳法证得. 首先, 对 $n=1$ 与 $n=2$ 有

$$2\cos\theta=2\cos\theta\text{、}2\cos 2\theta=(2\cos\theta)^2-2$$

而等式

$$\cos(n+2)\theta=(2\cos\theta)\cos(n+1)\theta-\cos n\theta$$

表明, 若命题对 n 与 $n+1$ 皆成立, 则亦对 $n+2$ 成立. 因已证明

命题在 $n=1$ 及 $n=2$ 时成立,故可推出对任意正整数 n 成立.

由(1)、(2)及已知条件知,$x=2\cos\theta$ 是辅助方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n-2(-1)^m=0$$

的有理根,因方程具有整系数且首项系数为 1,故其有理根必为整数,所以 $2\cos\theta$ 是整数. 但 $-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$,这样,$2\cos\theta$ 必须是 $-2,-1,0,1,2$ 之一,即 $\cos\theta$ 为 $-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$ 之一.

【例 8】 设有两个有理数的 n 元集合(元素允许重复),$\{a_1,\cdots,a_n\}\neq\{b_1,\cdots,b_n\}$. 假定集合

$$\{a_i+a_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\} \text{ 与 } \{b_i+b_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

相等,证明 n 是 2 的方幂.

证 首先,对任意 $c\neq0$,集合 $\{a_1c,\cdots,a_nc\}$ 与 $\{b_1c,\cdots,b_nc\}$ 仍具有问题中说的性质,特别地,取 c 为有理数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 的公分母,则可假定 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 都是整数来论证. 进一步,还可假定 $a_i,b_i(i=1,\cdots,n)$ 都是正整数,因为将所有 a_i,b_i 同加一个足够大的正整数后问题并未改变. 我们施行这些手续的目的是为了应用多项式知识来论证,这在下面可看得很清楚. 设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{a_i},\quad g(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{b_i} \tag{1}$$

因为 $a_i,b_i(i=1,\cdots,n)$ 是正整数,故 $f(x),g(x)$ 都是多项式,并且

$$f^2(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{2a_i}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x^{a_i+a_j}=f(x^2)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x^{a_i+a_j}$$

以及

$$g^2(x) = g(x^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x^{a_i+a_j}$$

这样，已知条件$\{a_i+a_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}=\{b_i+b_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$就转化成为多项式等式

$$f^2(x) - g^2(x) = f(x^2) - g(x^2) \tag{2}$$

由于$\{a_1,\cdots,a_n\}\neq\{b_1,\cdots,b_n\}$，故多项式 $f(x)-g(x)$不恒等于 0，由(2)得出

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} \tag{3}$$

进一步，在(1)中取 $x=1$，得 $f(1)=g(1)=n$，即 $x=1$ 是多项式 $f(x)-g(x)=0$ 的一个根，由多项式分解定理知

$$f(x) - g(x) = (x-1)^k p(x) \tag{4}$$

其中 k 为正整数，$p(x)$是一个多项式且 $p(1)\neq 0$.

由(3)、(4)即得

$$f(x)+g(x)=\frac{(x^2-1)^k p(x^2)}{(x-1)^k p(x)}=(x+1)^k\frac{p(x^2)}{p(x)}$$

在上式中取 $x=1$，便有

$$2n = f(1) + g(1) = (1+1)^k = 2^k\text{，即 } n = 2^{k-1}$$

证毕.

构造辅助函数，当然不只限于方程(多项式)，实际上，各种各样的函数都可能用来作为辅助手段(请见后面的例子)我们特别提一下利用函数性质(单调性、凸凹性等)证明不等式这种标准方法，因为这方面的内容已在许多读物中作了介绍，我们不再赘述.

【例 9】 一个圆周分为六段，每一段(依反时针方向)依

次标上数 1,0,1,0,0,0. 如允许将相邻段上的数同时加 1. 问最终能否得到六个相同的数?

解 稍作尝试便能相信答案是不能. 为了证明,我们设某次操作后所得的六个数 $a_1,a_2,\cdots,a_6$,并考虑(辅助)函数

$$f=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$$

容易验证,f 的值在所说的操作下不变!

初始时,f 的值是 2(或 -2),从而无论操作多少次决不会得到 0,故不能得到六个相同的数.

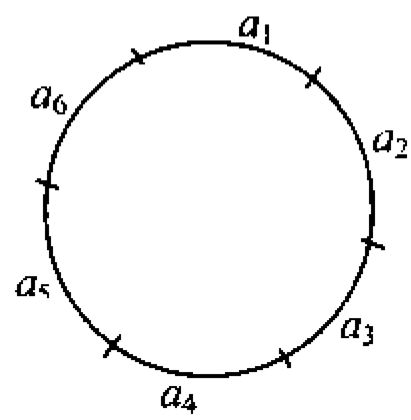


图 23

函数的实质就是映射或者说对应. 上述解答的要点,是将一种“状态”对应一个适当的“量”,而这个量则具有某种好的性状,如不变性,单调性等.

【例 10】 桌上有 m 只茶杯,杯口全部朝上,每次操作将其中 n 只茶杯同时翻转($n\leqslant m$),翻动过的茶杯允许再翻,证明:当 m 为奇数,n 为偶数时,无论操作多少次,都不可能使杯口都朝下.

证 首先,我们将问题数字化:将杯口朝上的茶杯记为 $+1$,杯口朝下的茶杯记为 -1. 这样,每次操作后的状态对应着 m 个由 $+1$ 及 -1 组成的数字.

进一步,我们考察经过 k 次操作后 m 个 $+1$ 的乘积 f_k $(k\geqslant 0)$.

由于 f_{k-1} 等于将 f_k 中的 n 个 ±1 同时改变符号而得的值. 设这 n 个数中有 s 个 $+1$,t 个 -1($s+t=n$),则 $f_{k+1}=(-1)^s(-1)^t f_k=(-1)^n f_k=f_k$(因 n 为偶数),从而对所有 k

$\geqslant 0$，恒有 $f_k=1$.

在操作前，杯口都朝上，即 $f_0=1$，从而对所有 $k\geqslant 0$，均有 $f_k=1$. 而杯口都朝下时，代表茶杯状态的 m 个数都是 -1，它们的积是 $(-1)^m=-1$（因 m 为奇数），所以无论操作多少次，都不能使杯口都朝下.

注　按 m,n 的奇偶性分类，本题还有两种情况，即

1)　n 为奇数，m 是正整数（$n\leqslant m$），

2)　m,n 同为偶数（$n\leqslant m$）

这些情形下，都能经过有限次操作使杯口都朝下，请读者自己给予证明（习题 44）.

下面的例 11 是一道国际数学竞赛题，相当困难.

【例 11】　正五边形的每个顶点对应一个整数，使得这五个整数的和为正. 若其中三个相邻顶点相应的整数依次为 x，y，z，而中间的 $y<0$，则要进行如下的操作：整数 x,y,z 分别换为 $x+y,-y,z+y$. 只要所得的五个整数中至少还有一个为负时，这种操作继续进行. 问：是否这种操作进行有限次后必定终止？

解　回答是肯定的. 证明的关键是构造一个辅助函数，这函数取正整数值，而且在每次操作后，函数值严格减少.

我们将五元数组 (x,y,z,u,v) 与五元函数 $f(x,y,z,u,v)$ 对应，这里

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,u,v)=&|x|+|y|+|z|+|u|+|v|\\
&+|x+y|+|y+z|+|z+u|+|u+v|\\
&+|v+x|+|x+y+z|+|y+z+u|
\end{aligned}
$$

$$+|z+u+v|+|u+v+x|+|v+x+y|$$
$$+|x+y+z+u|+|y+z+u+v|$$
$$+|z+u+v+x|+|u+v+x+y|$$
$$+|v+x+y+z|$$

它显然取正整数值，下面来证明 $f(x,y,z,u,v)$ 的值随着操作而严格减少.

实际上，在 $y<0$ 时，(x,y,z,u,v) 经过操作变为 $(x+y,-y,z+y,u,v)$，而函数的值变为

$$\begin{aligned}
&f(x+y,-y,z+y,u,v)\\
=&|x+y|+|-y|+|y+z|+|u|+|v|+|x|+|z|\\
&+|y+z+u|+|u+v|+|v+x+y|+|x+y+z|\\
&+|z+u|+|x+z+u+v|+|u+v+x+y|\\
&+|v+x|+|x+y+z+u|+|z+u+v|\\
&+|x+2y+z+u+v|+|u+v+x|\\
&+|v+x+y+z|
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&f(x+y,-y,y+z,u,v)-f(x,y,z,u,v)\\
=&|x+2y+z+u+v|-|x+y+u+v|\\
=&|x+2y+z+u+v|-(x+z+u+v)\\
=&\begin{cases}2y<0,\text{若 } x+2y+z+u+v>0\\ -2(x+y+z+u+v)<0,\text{若 } x+2y+z+u+v\leqslant 0\end{cases}
\end{aligned}$$

这就证明了，经过操作后，$f(x,y,z,u,v)$ 的值严格递减，由于这些值都是正整数. 而严格递减的正整数数列只能有有限项，所以操作只能进行有限次.

4 构造法证明存在性命题

我们知道，数学命题最基本的形式是："已知 A，求证 B"，在所有数学分支中都反复出现 B 的这样一种特殊形式，它们可以用"有一个"、"存在某些"等等意义相同的存在量词来表达. 我们看几个这样的命题，请读者注意结论中出现的存在量词.

【例 1】 已知 a、b 都是整数，证明：存在两个整数 x、y，使得 $2(a^2+b^2)=x^2+y^2$.

【例 2】 已知平面上一点 P，证明：存在一个凸四边形，使得 P 在四边形外，并且 P 到四边形四个顶点的距离相等.

【例 3】 证明：十进制整数 $\underbrace{10\cdots01}_{64\text{个}0}$ 是一个合数.

例 3 的结论中虽然没有明显地出现存在量词，但可以改写成这样的形式. 由合数的定义不难看出，上述命题等价于：

已知 $\underbrace{10\cdots01}_{64\text{个}0}$ 是一个十进制整数，证明：存在整数 k，使得 $1<k<\underbrace{10\cdots01}_{64\text{个}0}$，并且 k 整除 $\underbrace{10\cdots01}_{64\text{个}0}$.

我们经常会遇到含有"隐蔽"的存在量词的命题，将这样的命题改写成明显地含有存在量词的等价形式往往是有益的.

一个求证命题的结论若可用存在量词来表达，我们常称

这样的命题为存在性命题. 从上面举过的例子已经能够看到,存在性命题都有相同的基本结构,即具有下面的标准形式:

已知 A,证明:存在具有"某种性质"的事物 B,使得"某件事情发生".

为了证明一个存在性命题,有一种行之有效的方法,这种方法称为构造法,其基本想法是:实际地作出所要求的 B,使它具有命题中所说的"某种性质",并且使命题中说的"某件事情发生". 本节将通过整数及初等几何中的一些例子来说明构造法的大意.

我们先用构造法证明前面提到的三个命题.

例 1 的证明 取 $x=a+b$,$y=a-b$,因为已知 a,b 都是整数,所以 $a+b$,$a-b$ 都是整数,即 x,y 都是整数,不难验证

$$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2=x^2+y^2$$

故所构造的 x,y 符合命题中的要求.

例 2 的证明 任作一个以 P 为中点的线段 MN,以 MN 为直径作半圆. 在圆周上任取四个点 A,B,C,D(异于 M,N). 如图 24 所示,得到凸四边形 $ABCD$,显然,P 点在四边形外部,并且 P 到 A,B,C,D 的距离相等,故我们构作的四边形符合要求.

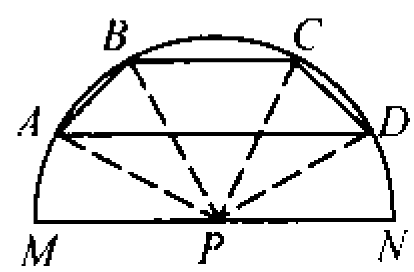


图 24

例 3 的证明 已知 $\underbrace{10\cdots01}_{64个0}$ 是十进制整数,即它等于 $10^{65}+1$. 为了证明存在整数 k,使得 $1<k<10^{65}+1$ 并且 k 整除

$10^{65}+1$，我们通过分解数 $10^{65}+1$ 来构造.

回忆恒等式：若 n 是正奇数，则

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+x^2y^{n-3}-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

在等式中取 $x=10,y=1,n=65$，即得

$$10^{65}+1=11\times(10^{64}-10^{63}+10^{62}-\cdots+10^2-10+1)$$

所以，整数 k 可取为 11.

对 $10^{65}+1$ 作不同的变形或许可构造出（符合要求的）不同的整数 k. 例如，由 $10^{65}+1=(10^{13})^5+1$，并在上面的恒等式中取 $x=10^{13},y=1,n=5$，可见 k 也可取为 $10^{13}+1$.

我们已经看到了构造法的基本特色，为了说清楚这个方法，下面再举几个例子.

【例 4】 证明：任何正有理数都可以表示成若干个有理数的平方和.

证 按定义，正有理数即是可表示成 $\frac{p}{q}$ 形式的实数，这里 p,q 为正整数，易于看出，问题等价于证明：

给定 $\frac{p}{q}$（p,q 都是正整数），存在若干个有理数，使得它们的平方和等于 $\frac{p}{q}$.

我们用构造法，注意如下的恒等式：

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{q^2}p\cdot q=\underbrace{\left(\frac{1}{q}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{q}\right)^2}_{pq\text{个}}$$

$\frac{1}{q}$ 当然是有理数，由此可见，pq 个有理数 $\frac{1}{q}$ 的平方和等于 $\frac{p}{q}$.

【例 5】 证明:存在无穷组正整数 x,y,z,使得 $x\neq y$ 且 $x^3+y^3=z^2$.

证 求得一组解并不困难,例如可取 $x=1,y=2,z=3$.但如何证明存在无穷组解呢?我们的方法是由求得的一组解来构造无穷多组解.从等式

$$1^3+2^3=3^2$$

可见

$$(n^2)^3+(2n^2)^3=(3n^3)^2$$

这里 n 是任意正整数,这显然得出了符合要求的无穷组解.

在上面所举的例子(以及很多其他问题)中,实现构造的诀窍是利用与问题有关的恒等式.请再看一个这样的例子.

【例 6】 设 k 为正整数,M_k 是 $2k^2+k$ 与 $2k^2+3k$ 之间(包括这两个数在内)的所有整数组成的集合,证明:可以把 M_k 分拆成两个(不交)子集 A,B,使得子集 A 中所有数的平方和等于子集 B 中所有数的平方和.

证 我们通过具体地作出符合要求的分拆方式来论证.为此先看两个实例:

当 $k=1$ 时,$M_1=\{3,4,5\}$,而 $3^2+4^2=5^2$;

当 $k=2$ 时,$M_2=\{10,11,12,13,14\}$.易验证,$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2(=365)$.

由此我们猜想:M_k 中的前 $k+1$ 个数的平方和等于后 k 个数的平方和.现在考察

$$(2k^2+2k+1)^2+(2k^2+2k+2)^2+\cdots+(2k^2+3k)^2$$
$$-(2k^2+k)^2-(2k^2+k+1)^2-\cdots-(2k^2+2k)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}((2k^2+2k+1+i)^2-(2k^2+k+i)^2)-(2k^2+2k)^2$$

$$= (k+1)\sum_{i=0}^{k-1}(4k^2+3k+2i+1)-(2k^2+2k)^2$$

$$= k(k+1)(4k^2+3k)+(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}(2i+1)-(2k^2+2k)^2$$

$$= k(k+1)(4k^2+3k)+(k+1)k^2-(2k^2+2k)^2$$

$$= 4k^2(k+1)^2-(2k^2+2k)^2 = 0$$

这表明上述猜想是正确的. 因而把 M_k 的前 $k+1$ 个元素作为子集 A,剩下的元素作为子集 B,这样的分拆符合要求.

下面请读者看几个初等几何中的存在性命题,它们都可用构造法解答. 现在的构造方法基于几何作图(参见例 2 的解法).

【例 7】 已知矩形 $ABCD$ 中有任意一点 M 证明:存在一个凸四边形,其对角线互相垂直并且分别等于 AB 和 BC,而此四边形的边长分别等于 AM, BM, CM, DM.

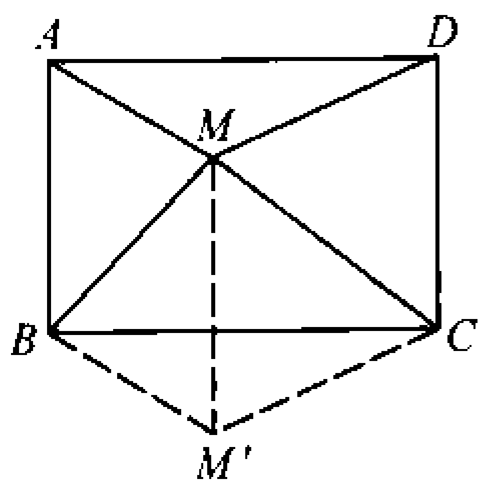


图 25

证 我们来作出符合要求的凸四边形. 如图 25 所示,过 B 点作 BM' 平行且等于 AM. 则四边形 $AMM'B$ 是平行四边形. 所以,MM' 平行且等于 AB,故 $MM' \perp BC$. 又易知 $DM=CM'$. 这样,凸四边形 $BMCM'$ 符合要求.

【例 8】 证明:对任意四面体,其三组对棱之积的数值可

以作为一个三角形的边长.

证 设给定的四面体是 $ABCD$（图 26），在射线 AB,AC,AD 上分别取点 B',C',D'，使得

$$AB' = AC \cdot AD \qquad (1)$$

$$AC' = AB \cdot AD \qquad (2)$$

$$AD' = AB \cdot AC \qquad (3)$$

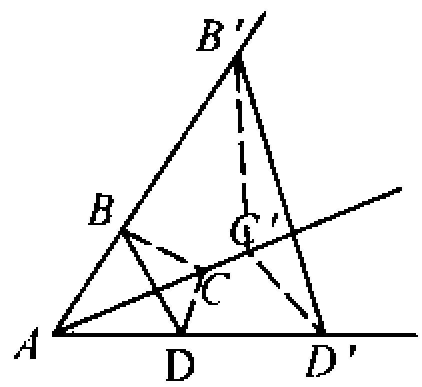


图 26

易见 B',C',D' 是一个三角形的顶点，下面验证 $\triangle B'C'D'$ 满足问题中的要求.

首先，由(1)、(2)两式得到 $\dfrac{AB'}{AC'}=\dfrac{AC}{AB}$，又 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AC'B'$ 有公共角 BAC，故这两三角形相似，从而 $\dfrac{BC}{C'B'}=\dfrac{AB}{AC'}$，结合(2)即有

$$B'C' = \frac{BC}{AB} \cdot AC' = \frac{BC}{AB} \cdot AB \cdot AD = BC \cdot AD$$

即 $\triangle B'C'D'$ 的边 $B'C'$ 等于四面体的对棱 BC 与 AD 之积，类似地，分别考虑 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AD'C'$ 以及 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AD'B'$，可依次得到

$$C'D' = CD \cdot AB, B'D' = BD \cdot DC$$

这就表明，我们作出的 $\triangle B'C'D'$ 符合要求.

在上例中，符合要求的事物显然是唯一确定的，但一般情况下并非如此，有时可以给出命题中需要的不同构造，这很大程度上取决于考虑问题的出发点.

【例 9】 证明：存在无穷多个边长均为整数的直角三角

形，其中任意两个都不相似.

证 用例 5 的技巧容易作出无穷多个整数边长的直角三角形. 从 $3^2+4^2=5^2$ 可见

$$(3n)^2+(4n)^2=(5n)^2$$

这里的 n 为正整数，即三边长为 $3n,4n,5n$ 的三角形为直角三角形. 但不幸的是，如此作出的三角形两两相似.

为了造构出符合要求的解，我们需要采用不同的方法. 设 $n\geqslant 3$ 为整数，恒等式

$$(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$$

表明，三边长为整数 $n^2-1,2n,n^2+1$ 的三角形是直角三角形，这显然有无穷个. 下面用反证法来证明这些三角形中无两个相似.

假设 $k,l\geqslant 3,k\neq l$，而边长为 $k^2-1,2k,k^2+1$ 的三角形与边长为 $l^2-1,2l,l^2+1$ 的三角形相似，则两三角形较长直角边之比等于较短直角边的比，因 $k,l\geqslant 3$，故 $k^2-1>2k,l^2-1>2l$，所以

$$\frac{k^2-1}{l^2-1}=\frac{2k}{2l}$$

即

$$(k-l)(kl+1)=0$$

推出 $k=l$，这与所设 $k\neq l$ 相违. 所以上面作出的三角形互不相似.

利用不同的恒等式可以导出不同的构造，从

$$(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2$$

可见,若 n 为任意正整数,则边长为 $2n^2+2n, 2n+1, 2n^2+2n+1$ 的三角形是直角三角形,这当然有无穷多个.与上面相仿地可以证明这些三角形互不相似.

请注意,现在所作三角形的最短直角边长总是奇数,而前面构造的三角形的最短直角边长都是偶数,故决不能有两个全等.这就给出了符合要求的两种不同的构造.

【例 10】 证明:存在一个由互不相同的正整数组成的数列,使数列中任两项之和都不是完全平方数.

证 容易得知任一个完全平方数被 4 除得的余数只可能为 0 或者 1,从这一点出发可构造出符合要求的数列.

我们取 $a_n=4n+1(n\geqslant 1)$,则数列 $\{a_n\}$ 中的项互不相同,又设 a_i, a_j 是任意两个不同项,则

$$a_i+a_j=4(i+j)+2$$

被 4 除余 2,故 a_i+a_j 不能为完全平方数。数列 $\{a_n\}(n\geqslant 1)$ 符合问题的要求.

换一个角度考虑问题可以得出不同的解.我们取 $b_n=2^{2n}(n\geqslant 1)$,显然 $\{b_n\}$ 中无两项相同.下面证明若有两个不同项 b_i 与 $b_j(i>j)$ 的和为完全平方,将导致矛盾.

因为 $i-j\geqslant 1$,故 2^{2j} 和 $2^{2(i-j)}+1$ 互素(即最大公约数为 1).若 $b_i+b_j=2^{2j}(2^{2(i-j)}+1)$ 是完全平方,由正整数的唯一分解定理推知 $2^{2(i-j)}+1$ 是完全平方.但另一方面,不等式

$$(2^{i-j})^2<2^{2(i-j)}+1<(2^{i-j}+1)^2$$

表明,$2^{2(i-j)}+1$ 介于两个相继的完全平方之间,故它不能也是完全平方,矛盾!因此数列 $\{b_n\}$ 符合要求.

上面的论证实际表明，对任意整数 $C\geqslant 2$，相应的数列 $\{C^{2^n}\}(n\geqslant 1)$ 都是满足问题要求的解.

下面的例子中，问题本身就几乎要求我们用构造法来论证.

【例 11】 证明：可以把直角坐标系中的整点（即横、纵坐标都是整数的点）染成红、白、黑三色之一，使得.

1）每一种颜色都出现在无穷多条平行于横轴的直线上.

2）对任意白点 A、红点 B、黑点 C，都存在一个红点 D 使得 $ABCD$ 是非蜕化的平行四边形.

证 我们来作出符合要求的染色法. 把平面上的整点按横、纵坐标的奇偶性来分类. 坐标为（奇数，奇数）者作一类，这样的点染白色，坐标为（偶数，偶数）的点染黑色；而坐标为（奇数，偶数）或（偶数，奇数）者作为第三类，这类中的点均染红色. 下面来证明，如此的染色法符合要求.

实际上，要求 1）显然是满足的. 至于 2），假设任意给定了白点 $A(x_1,y_1)$，红点 $B(x_2,y_2)$，黑点 $C(x_3,y_3)$. 我们来作出（又一次构造！）一个红点 D，使 $ABCD$ 为平行四边形.

首先，A,B,C 三点不共线，否则将有

$$(y_2-y_1)(x_3-x_1)=(y_3-y_1)(x_2-x_1)$$

但按所说的染色法可见，x_1,y_1 都是奇数，x_3,y_3 都是偶数，而 x_2,y_2 一奇一偶. 这样推知，x_3-x_1 以及 y_3-y_1 都是奇数，而 x_2-x_1,y_2-y_1 一奇一偶，所以 $(y_2-y_1)(x_3-x_1)$ 与 $(y_3-y_1)(x_2-x_1)$ 的奇偶性不同，故不能相等. 这个矛盾表明 A,B,C 三点不共线.

现在取 $x_4=x_1+x_3-x_2$，$y_4=y_1+y_3-y_2$，则 x_4 和 y_4 一奇一偶，按我们的染色法 $D(x_4,y_4)$ 当为红色，再从中点公式可知 $ABCD$ 是平行四边形. 由于 A,B,C 不共线，故这四边形是非蜕化的.

也不难给出一种与上述不同且更简单的染色法：

将纵坐标轴的正半轴上的整点（包括坐标原点）都染成白色，负半轴上的整点均染黑色，平面上其它整点则染成红色.

容易验证，这种染色法符合问题中的要求.

我们已经看到，构造法是处理存在性命题的一种有效方法，但这并不是唯一可用的方法. 实际上，由于技术上及其它的某些原因，许多问题用构造法则很难奏效，我们举两个简单例子.

【例 12】 设 n 为整数且 n^2 为偶数，证明 n 也是偶数.

证 问题等价于证明存在整数 k 使得 $n=2k$. 我们先试试用构造法.

由已知条件可知，存在整数 m 使 $n^2=2m$. 进而有 $n=\sqrt{2m}$. 但是如何作出整数 k 使 $\sqrt{2m}=2k$ 呢? 我们似已走投无路.

然而，用反证法本题结论则极易证明.

若 n 不是偶数（即不存在上述的 k），则 n 为奇数，从而有整数 l 使 $n=2l+1$，这样 $n^2=4l(l+1)+1=2[2l(l+1)]+1$ 也是奇数，和已知矛盾. 故 n 必为偶数，即上述的整数 k 一定存在.

请注意，虽然从逻辑上知道 k 一定存在，但在论证中并未构造出 k 或者说明怎样得到它，这样的证明我们称为非构造性证明.

【例 13】 设 n 为正整数，把多于 n 个弹子任意地放入 n 个抽屉中，证明，存在一个抽屉，其中放入的弹子多于一个.

证 由于弹子任意分放，要具体地指出符合要求的抽屉是不可能的. 我们仍用反证法：

假设结论不对，则每一个抽屉中的弹子数不多于一个，从而 n 个抽屉中的弹子不超过 n 个，这与已知分发的弹子多于 n 相矛盾.

本例即是读者熟悉的"抽屉原理"，我们的论证是非构造性的.

上面的例子和讨论说明了构造法和非构造法的区别，构造法意味着作出需要的事物，或者至少可以指出怎样找到它. 而非构造法（如反证法）则是解决问题的另一途径，我们只要从逻辑上证明符合要求的事物必然存在，而没有实际地构造出来，即所谓"只在此山中，云深不知处". 正因为这个缘故，在一些问题中它比起用构造法要容易得多. 所以，在考虑存在性命题时，我们会考虑：

(1) 应当想到用构造法；

(2) 不应当只想到用构造法.

构造法和非构造法虽然是两种不同精神的方法，但要把它们分割开来则是困难的. 例如前面说的抽屉原理，这是处理存在性命题的一个有力工具，我们知道，由此作出的论证

都是非构造性的，但证明中的辅助手段——“制造抽屉”则可能需要很高的构造技巧．类似地，在例 10 中，为了证明构造的事物符合要求时，作为辅助手段，应用了反证法．

我们已知道，有些问题用非构造法比起构造法来更易于奏效，而对另一些问题则恰好相反(请读者试试用非构造性方法来解答例 1～例 11)．然而，还有一些问题既可用构造法解答，也可以作出非构造性的证明，给予同一命题这两种“相反”特色的论证将是非常有益的，我们举几个例子．

【例 14】 设正三角形 $ABCD$ 内接于半径 r_1 的圆，圆心为 O，圆外一点 P，$PO=r_2(r_2>r_1)$，证明 PA，PB，PC 三线段可构成一个三角形，并计算其面积．

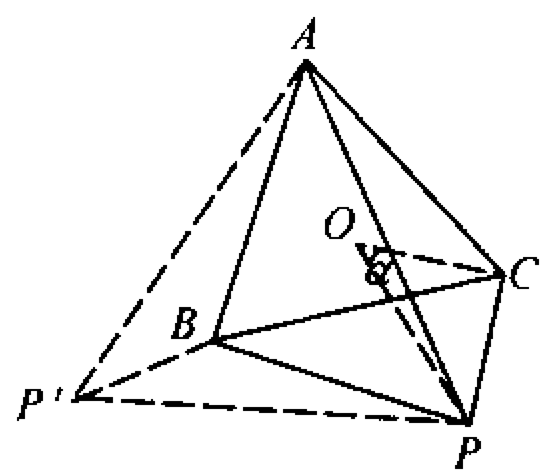


图 27

构造法 由对称性，不妨设 P 点与 A 点分居线段 BC 的两侧(图 27)．将$\triangle ACP$ 绕 A 点顺时针转 60°，得到$\triangle ACP'$，则 $AP'=AP$，$BP'=PC$，$\angle ACP=\angle ABP'$，又$\triangle APP'$是等边三角形。故 $PP'=PA$．

因 P,C,A,B 四点不共圆，所以

$$\angle ABP+\angle ABP'=\angle ABP+\angle ACP\neq 180^\circ$$

即 P',B,P 三点不共线．所以 BP',BP,PP'能构成三角形(不会退化为线段)．从而 PA,PB,PC 可构成三角形，它与图中的$\triangle PBP'$全等．

所求三角形的面积即为$\triangle PBP'$的面积，我们有(设

$\angle POC=\alpha$):

$$
\begin{aligned}
(\triangle PBP') &= (\triangle APP')-(\triangle ABP')-(\triangle ABP) \\
&= (\triangle APP')-(\triangle ABP)-(\triangle ACP) \\
&= (\triangle APP')-(\triangle ABC)-(\triangle BPC) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}PA^2-(\triangle ABC)-(\triangle OBP)-(\triangle OCP) \\
&\quad +(\triangle BOC) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(120^\circ+\alpha)]-\frac{3\sqrt{3}}{4}r_1^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}r_1r_2\sin(120^\circ-\alpha)-\frac{1}{2}r_1r_2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}r_1^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(r_2^2-r_1^2)
\end{aligned}
$$

非构造法　P 点位置同上所设. 因为 P,A,B,C 四点不共圆,由托莱密定理即得

$$PB\cdot AC+PC\cdot AB>PA\cdot BC$$

由于 $AB=BC=AC$ 故有 $PB+PC>PA$,又显然有

$$PA>PB, PA>PC$$

故

$$PA+PC>PB, PA+PB>PC$$

这样就证明了 PA,PB,PC 中任两个之和大于第三者,从而它们构成三角形.

要计算这个三角形的面积,应当先求出 PA,PB,PC 之长,再用海伦公式,计算将是冗长的. 所以就本题而言,构造法较为优越.

【例 15】 设长为 a,b,c 的三线段构成锐角三角形，证明：存在一个对棱相等且分别为 a,b,c 的四面体。并计算其体积.

构造法　由已知条件得知：

$$a^2+b^2-c^2>0$$

$$a^2+c^2-b^2>0$$

$$b^2+c^2-a^2>0$$

我们以长为

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}},z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$$

的线段作一个长方体，按如图 28 方式连结诸面的对角线，得到四面体 $ABCD$. 则

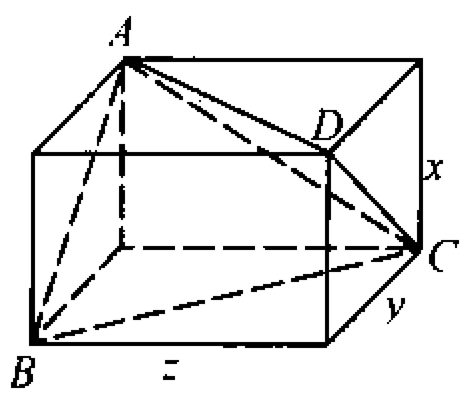


图 28

$$AB^2=CD^2=x^2+y^2=a^2$$

即　　$AB=CD=a$

同理　　$BC=AD=b$

$AC=BD=C$

故四面体 $ABCD$ 符合要求. 其体积显然等于长方体的体积减去四个小直角四面体的体积. 不难求得为

$$xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

非构造法　请参看史坦因豪斯的《一百个数学问题》中的问题 37. 那里的解法是基于连续函数的介值定理作出的.

注　本题中的条件也是必要的，即如果存在对棱相等且分别为 a,b,c 的四面体，则 a,b,c 必然构成锐角三角形．请读者自己来证明这个不困难的结论．

【例 16】 有一张 8×8 的方格表，表中填上 64 个非负整数（每格一数）．所谓进行一次操作是指：从表中任取一个 3×3 或 4×4 的子方格表（所取的各行、各列必须是相连的），并将这个子方格表中的 9 个或 16 个数都加 1．

证明：存在一张填了非负整数的 8×8 方格表，使得无论经过多少次操作都不能把表中的 64 个数全变成 10 的倍数．

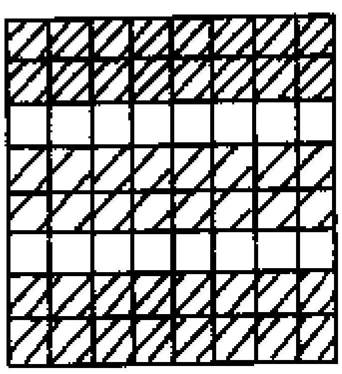


图 29

构造法　考虑图 29 中带阴影线的 48 个方格中的数，容易验证，无论取哪个 3×3 或 4×4 的子方格，这个子方格表中总含有偶数个带阴影的小方格．因此，每进行一次操作，总使带阴影方格中的 48 个数之和增加一个偶数．这样，如果我们一开始在表中填数时，使这 48 个数之和为奇数，则无论进行多少次操作，这 48 个数之和永远是奇数，而如果方格表中的数都是 10 的倍数时，这 48 个数之和应为偶数．所以，上述填法下得到的表符合问题的要求．

非构造法　由于一个数为 10 的倍数等价于其末位数为 0，因此只要考虑每个数的末位数即可，这样问题即为：在填上 64 个一位数（即 $0,1,\cdots,9$）的 8×8 方格表中，一定存在一个，使得无论进行多少次操作，都不能把表中的数都变成“0”（凡一个数变成二位数后，就把它改成末位数，换句话说，我

们依模 10 来考虑问题). 或者反过来看:从一张全 0 表格(即 64 个数都是 0)出发不可能得到上述的所有方格表.

我们的证明方法是所谓的计数论证,这是一种典型的组合技术:

由于每个方格可取十个数(0,1,…,9 之一)所以 8×8 方格表共有 10^{64} 种.

而易知 8×8 表格中恰有 $6\times6=36$ 个 3×3 子方格,以及有 $5\times5=25$ 个 4×4 子方格,即总共有 61 个子方格表. 又每张子方格表只能进行 10 次操作(在模 10 意义下). 于是,从全 0 表出发,最多只能得到 10^{61} 种不同的一位数表.

因为 $10^{61}<10^{64}$,所以必有某个(不知是哪一个!)8×8 方格表不能从全 0 表得到.

吴国林印

请勿用于商业用途或准商业用途,
请于下载后24小时内删除!如无法遵守此规定,则谢绝下载!!
吴国林 MSN: colin_21st@hotmail.com

5 进一步的例子

当我们试着用构造法处理存在性命题时，可能会遇到很大的困难，要想给出应付一切困难的灵丹妙药是不可能的. 为了能成功地应用构造法，解题者必须成为一个“建筑师”，一方面应当记住手头的“建筑材料”，即已知条件提供的信息；另一方面，也不要忘记我们要制造的“建筑”，即符合命题要求的事物.

构造离不开尝试，盲目行事当然很难指望成功，我们可以针对具体问题先选择一条看起来有希望的途径试试，一计不成，再生一计. 这如同摸着石头过河，走一步，看一步，最忌坚持已经陷入困境的道路不回头.

本节选择了一些用构造法解题的例子，某些可能是值得注意的想法包含在解答的讨论中，这在一定程度上也说明了构造的来源.

从试图构造的事物入手是很有用的策略，这类似于通常的分析法.

【例 1】 证明：对 $n\geq 2$，存在正整数 $x_1,\cdots,x_n$，使得 $x_1+\cdots+x_n=x_1\cdots x_n$.

证 假设已有一组正整数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1+\cdots+x_n=x_1\cdot\cdots\cdot x_n \tag{1}$$

由于 $x_1,\cdots,x_n$ 的积一般应当大于它们的和(除非其中有很多个是 1),因此,要使(1)成立,我们可以让 $x_1,\cdots,x_n$ 尽量多地取 1 来尝试.显然,不能取 n 个 1,也不能取 $n-1$ 个 1.下面取 $x_3=\cdots=x_n=1$,而让 x_1,x_2 作为变量,这时(1)式成为(注意 $x_3+\cdots+x_n=n-2$):

$$x_1x_2=x_1+x_2+(n-2)$$

由此得

$$x_1=\frac{x_2+(n-2)}{x_2-1}=1+\frac{n-1}{x_2-1}$$

这样,x_2-1 必须整除 $n-1$ 才能保证 x_1 为正整数,我们可取 $x_2=2$,于是 $x_1=n$.从而得到一组符合要求的正整数,$x_1=n$,$x_2=2,x_3=\cdots=x_n=1$.证毕.

类似于用分析法(或倒推),在上例中,也可以将构造过程"倒叙"以表述解答,即先写出构造好的一组解,然后验证它符合要求.但验证通常包含在构造的来源中,我们只要指出构造过程就够了.

【例 2】 给定平面上一个三角形及一条直线 l.证明:存在一条与 l 平行的直线,它恰好将三角形的面积两等分.

证 如图 30 所示,给定的三角形为 ABC,假设已作出了符合要求的直线,它与 $\triangle ABC$ 的边交于 D,E 两点.我们要确定这两个点.

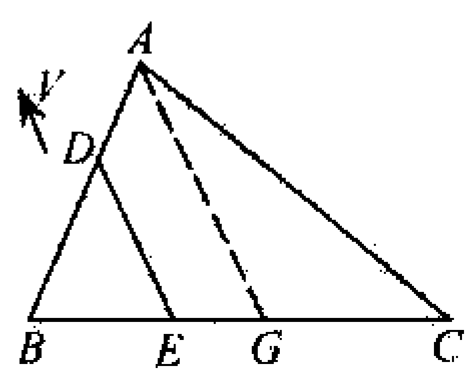


图 30

因为 $(\triangle BDE)=\dfrac{1}{2}(\triangle ABC)$,

由三角形面积公式导出

$$BD \cdot BE=\frac{1}{2}AB \cdot BC \tag{1}$$

设 $BE=x$,作 $AG/\!/l$,则

$$AB \cdot x = BG \cdot BD$$

由(1),(2)推出 $x^2=\frac{1}{2}BG \cdot BC$.

因直线 l 已知,$AG/\!/l$,故 G 为定点. 于是 BG,BC 均为已知量,所以 x 即 BE 长可作出. 这就决定了 E 点及 D 点.

用作图的方法实现构造我们已经见过,请参考第 4 节中例 7 及例 8.

【例 3】 两个圆相交于 A,B 两点,两个动点从 A 点出发,以相等的角速度分别在两圆的圆周上依相同方向移动. 证明:平面上存在一个固定点,它在任何时刻到两动点的距离都相等.

证 如图 31 所示,记两圆的圆心分别为 O_1 及 O_2. 假设 A 为满足要求的点. 当两动点同时转 180°后,分别到达 P,Q 点(特殊位置!),若 A' 点存在,它必位于 PQ 的垂直平分线 l_1 上. 在动点刚出发时,(A 点视为极限点)A' 点在过 A 且平行于 O_1O_2 的直线 l_2 上. 故若 A' 点存在,则应为 l_1 与 l_2 的交点.

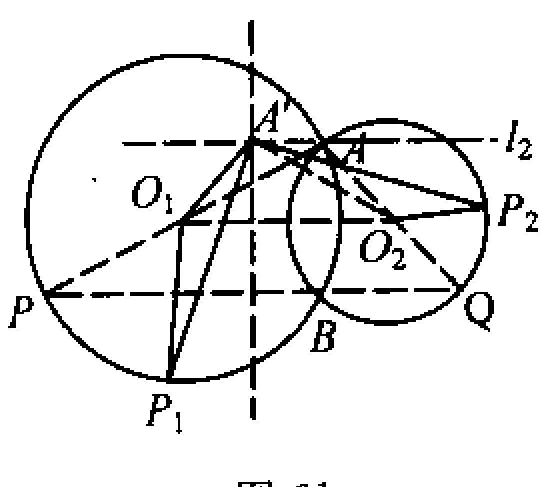


图 31

下面证明,如上所说的 A' 点符合问题中的要求. 即要证明:若$\angle A'O_1P_1=\angle A'O_2P_2$,就有 $A'P_1=A'P_2$.

由于$AB\perp PQ$,由此易证A',A关于O_1O_2的垂直平分线l_3对称,从而

$$A'O_1=AO_2=O_2P_2,\ A'O_2=AO_1=O_1P_1$$

又易知$\angle AO_1A'=\angle AO_2A'$,于是$\angle A'O_1P_1=\angle P_2O_2A'$,故

$$\triangle A'O_1P_1\cong\triangle P_2O_2A'$$

这就证得了$A'P_1=A'P_2$,所以A'满足要求.

上面的解答中,我们是通过两个特殊点来推知A'的位置的.从问题中某些简单、特殊的情况着手,是一种有用的想法,由此常可能诱导出所需的构造.

【例4】 证明:对每个整数$n\geqslant 2$,存在$1,2,\cdots,n$的一个排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得$a_1+\cdots+a_k$被a_{k+1}整除($k=1,2,\cdots,n-1$).

证 先请注意,我们只要考虑n为偶数的情况就够了.因为若对所有的遇数n已作出了符合要求的排列,则对任意奇数$n\geqslant 3$,$n-1$为偶数,设相应于$1,2,\cdots,n-1$的排列为$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$.那么,将$1,2,\cdots,n$排成

$$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},n$$

便符合要求(即取$a_n=n$).

事实上,由上述的关于$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的假设,对$1\leqslant k\leqslant n-2$,$a_1+a_2+\cdots+a_k$自然被$a_{k+1}$整除.而对$k=n-1$,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n-1}{2}\cdot n$$

因$\frac{n-1}{2}$为整数,故$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$被n(即a_n)整除.

为了作出n是偶数时的排列,我们来考察一些特例以寻

找普遍规律:

$n=2$ 时,将 1,2 排成 2,1;

$n=4$ 时,将 1,2,3,4 排成 3,1,4,2;

$n=6$ 时,将 1,2,3,4,5,6 排成 4,1,5,2,6,3;

$n=8$ 时,将 1,2,3,4,5,6,7,8 排成 5,1,6,2,7,3,8,4;

$n=10$ 时,将 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 排成

$$6,1,7,2,8,3,9,4,10,5$$

由此可猜想,当 $n=2m$ 时,将 $1,2,\cdots,2m$ 排成

$$m+1,1,m+2,2,m+3,3,\cdots,m+m,m$$

即取 $a_{2i}=i,a_{2i-1}=m+i(i=1,2,\cdots,m)$ 就符合问题中的要求.我们不难证明这件事.实际上,对 $1\leqslant i\leqslant m$.

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_{2i}\\=&(1+2+\cdots+i)+(m+1+m+2+\cdots+m+i)\\=&i(m+i+1)=i\cdot a_{2i+1}\end{aligned}$$

故 a_{2i+1} 整除 $a_1+a_2+\cdots+a_{2i}$.而

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_{2i-1}\\=&(i-1)(m+i)+(m+i)\\=&i(m+i)=(m+i)a_{2i}\end{aligned}$$

即 a_{2i} 整除 $a_1+a_2+\cdots+a_{2i-1}$.这样,对 $1\leqslant k\leqslant n-1$,$a_{k+1}$ 整除 $a_1+a_2+\cdots+a_k$.故对偶数 n 所作的排列符合要求.按前面的讨论,不难作出相应于奇数 n 的排列.

【例 5】 证明:存在整数系数多项式 $f(x)$,使得对于满足$\frac{1}{10}\leqslant x\leqslant\frac{9}{10}$的实数 x,都有$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^3}$.

证 我们设法选择 $f(x)$，使得对于 $\frac{1}{10}\leqslant x\leqslant\frac{9}{10}$，$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$ 具有便于作出上界估计的形式.

先尝试最简单的情况 $f(x)=x$. 易见对 $\frac{1}{10}\leqslant x\leqslant\frac{9}{10}$，有

$$-\frac{2}{5}\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{2}{5}\text{，即}\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{5}$$

虽然 $\frac{2}{5}$ 小于 1，但它远大于所需的上界 $\frac{1}{10^3}$.

为了改进估计，我们让正整数 n 待定，而考虑多项式 $f(x)=(2x-1)^n+\frac{1}{2}$，此时

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=|2x-1|^n=2^n\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

易知，当 n 很大时，必有 $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{1}{10^3}$.

但是，这一个多项式 $f(x)$ 不具有整系数(常数项不是整数)，然而由此略作修改即可构造出符合要求的多项式.

从二项式定理可知，$(2x-1)^n$ 的展开式中，除常数项为 ±1 外，其余各项系数都是偶数，所以 $\frac{1}{2}[(2x-1)^n+1]$ 是整系数多项式. 取

$$f(x)=\frac{1}{2}[(2x-1)^n+1]\qquad(n\text{ 为待定正整数})$$

则

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}|2x-1|^n\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

只要 n 适当地大，例如当 $n\geqslant 30$ 时，总有 $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{1}{10^3}$. 这个解法实际上构造了无穷个符合要求的多项式.

我们在解答中引进了一个待定参数，这是值得注意的技巧，其益处在于使我们的尝试保持了灵活性. 下面的例 6、例 7 都体现了这种想法.

【例 6】 设 a、b、c 均为非零整数，已知方程 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 有一组不同于 $x=y=z=0$ 的整数解 (x,y,z). 证明：方程 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 有一组有理数解.

证 设不全为零的整数 α、β、γ 满足

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=0 \tag{1}$$

我们来构造 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 的一组有理数解. 为此，取 t 是一个待定参数，选择(不妨设 $\alpha\neq 0$)：

$$x=\alpha(1+t),y=\beta(1-t),z=\gamma(1-t) \tag{2}$$

这种尝试的好处在于 $ax^2+by^2+cz^2$ 中只含有 t 的一次项. 实际上，由(1)、(2)得出

$$\begin{aligned}ax^2+by^2+cz^2&=a\alpha^2(1+t)^2+b\beta^2(1-t^2)+c\gamma^2(1-t)^2\\&=2t(a\alpha^2-b\beta^2-c\gamma^2)=4t\cdot a\alpha^2\end{aligned}$$

由此可见，取 $t=\frac{1}{4a\alpha^2}$，便有 $ax^2+by^2+cz^2=1$. 而由(2)，

$$x=\alpha\left(1+\frac{1}{4a\alpha^2}\right),y=\beta\left(1-\frac{1}{4a\alpha^2}\right),z=\gamma\left(1-\frac{1}{4a\alpha^2}\right)$$

$$=2t(a\alpha^2-b\beta^2-c\gamma^2)=4t\cdot a\alpha^2$$

由此可见，取 $t=\frac{1}{4a\alpha^2}$，便有 $ax^2+by^2+cz^2=1$. 而由(2)，

$$x=\alpha\left(1+\frac{1}{4a\alpha^2}\right),y=\beta\left(1-\frac{1}{4a\alpha^2}\right),z=\gamma\left(1-\frac{1}{4a\alpha^2}\right)$$

显然都是有理数.

基于同样的想法,也可以给出另一种稍有变化的解. 取

$$x=1+\alpha t,\ y=1+\beta t,\ z=1+\gamma t \tag{3}$$

则

$$ax^2+by^2+cz^2=a+b+c+2t(a\alpha+b\beta+c\gamma)$$

我们可以依 a,b,c 的符号来选择(1)中的 α,β,γ 的符号,使得 $a\alpha\geqslant 0,b\beta\geqslant 0,c\gamma\geqslant 0$. 由于 α,β,γ 不全为零,故 $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$. 这样,取 $t=\dfrac{1-a-b-c}{2(a\alpha+b\beta+c\gamma)}$,则由(3)确定的 x,y,z 都是有理数,且满足 $ax^2+by^2+cz^2=1$.

【例 7】 平面上是否存在 100 条直线,使得它们恰好有 1985 个交点?

解 因为 100 条直线最多可得出 $C_{100}^2=4950>1985$ 个交点. 故符合要求的 100 条直线可能存在. 下面用构造法证明,本题的答案是肯定的.

为了便于计算交点个数,我们先尝试一种特殊情况,将 100 条直线分成两簇平行线,设各簇直线数分别为 x 及 $100-x$ 条. 则两簇线交得 $x(100-x)$ 个点. 但很不幸,没有正整数 x 满足 $x(100-x)=1985$,所以这种分法不能奏效.

修改一下上面的想法,我们考虑把 99 条直线分成两簇平行线,利用余下的一条直线来调整交点数,这相当于选择一个参量.

若取 73 条直线作为一簇平行线,另一簇为 26 条,则得出

的交点数为 $73\times26=1898=1985-87$，还差 87 个交点. 我们再用剩下的一条直线来补充交点数，如果能使之与 99 条直线都相交，并且交点中有 12 个是已得的交点就可以了. 事实上，这个想法是能够实现的，下面是一种方案：

在直角坐标系 Oxy 中，取 100 条直线为：

$$x=1,\ x=2,\cdots,\ x=73$$

$$y=1,\ y=2,\cdots,\ y=26$$

$$y=x+14$$

易知直线 $y=x+14$ 与前 99 条都相交，所得的 99 个交点中，12 个点 $(1,15),(2,16),\cdots,(12,26)$ 是两簇平行线中已得的交点，即新产生 87 个交点. 这样，上述 100 条直线共有 $73\times26+87=1985$ 个交点.

【例 8】 平面上放置了 n 条直线，$n\geqslant2$，其中无两条平行，也无三条直线共点，这些直线把平面分成若干个区域，试在每个区域中填一个绝对值 $\leqslant n$ 的非零整数，使得任意一条直线同一侧的区域中所填诸数之和为 0.

解 $n=2$ 时问题容易解决，将"对顶"的区域中填上 $+1$ 及 -1（图 32），这显然符合要求.

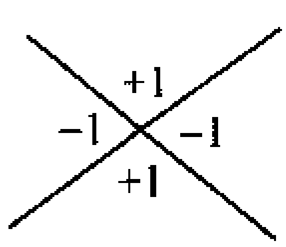


图 32

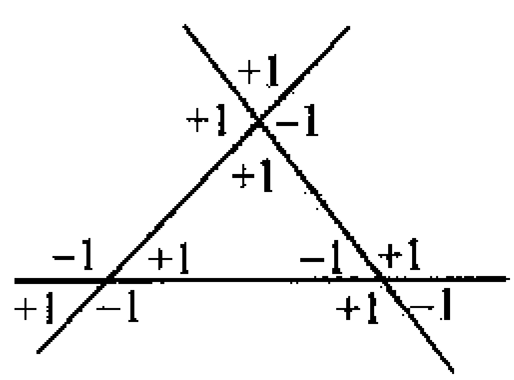


图 33

一般情况下，考察 n 条直线得出的各个交点，每个交点处可以看作 $n=2$ 时的特殊情形. 对任一个交点，将“对顶”的两个区域在顶点处填上 $+1$ 及 -1，这样，任一直线同一侧中区域的诸顶点上 ±1 之和显然是 0(图 33 是 $n=3$ 时的一种填法).

将每个区域在顶点处 $+1$ 及 -1 相加作为该区域中填的整数，由于任一区域至多有 n 个“顶点”，故这数的绝对值 $\leqslant n$，并且任一直线同一侧的区域中所填数之和为 0. 但遗憾的是，这种填法可能会使某些区域中填的数为 0，所以，我们尚未完全得到符合要求的填法.（注意，如果要求所填的数不全是 0，则问题已获得解决.）

现在来修改上面的想法，我们设法让“对顶”相连的诸区域在所有顶点处都填 $+1$ 或都填 -1. 如果能够做到这一点，类似于上面的办法可知，任一区域中填的数都不是 0，且绝对值 $\leqslant n$，并且任一直线同一侧的各区域中所填数之和为 0.

我们需要证明，这种填法是相容的，即每个区域中所填的数是唯一确定的. 不难看出，这等价于下面的问题：

对所说的 n 条直线决定的区域，可以涂上黑白两种颜色，使得任何具有共同线段的相邻两个区域涂的颜色不同.

这可用归纳法来证明. $n=2$ 时结论显然. 设 $=k$ 时命题成立. 当增加一条直线时，它将一些区域分成两部分. 我们将这直线一侧的各区域所涂颜色改变(原来为黑者改涂白色，而原来涂白者改为黑). 而另一侧中区域保留原来的颜色. 由归纳假设，这样的涂色显然使任两个有共同线段的区域涂的颜色不同，即“对角”相连的诸区域涂有相同颜色. 证毕.

上面的解答中，最初在诸顶点填±1的一步很值得注意，虽然并未完全奏效，但由此易保证“任一直线同一侧区域中所填数之和为0”. 从而减少了问题的难点.

【例9】 对任意正整数$n(n\geqslant3)$，平面上存在n个点，使得任两点之间的距离是无理数，而任三点构成一个非退化的，面积为有理数的三角形.

证 我们在直角坐标系Oxy中构造符合要求的n个点. 先请注意，如果不要求任三点构成非退化的三角形，则问题是容易的，这时在x轴上取适当的点就可以了（任三点构成的“三角形”面积为有理数0）. 因此，无三点共线是问题的核心，我们先着手满足它.

不难看出，抛物线$y=x^2$上任三点不会共线，所以在这曲线上随意取n个点（一个充分条件！），就保证了任三点构成非退化的三角形. 特别地，若取这n个点为整点（又一个充分条件！），则所说三角形的面积显然是有理数.

我们选择$y=x^2$上的n个点$P_k(k,k^2)$，$1\leqslant k\leqslant n$. 则对任意$i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$，$P_i$与$P_j$的距离为

$$P_iP_j=\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}=|i-j|\sqrt{(i+j)^2+1}$$

因为当且仅当$(i+j)^2+1$为完全平方时，$\sqrt{(i+j)^2+1}$才是有理数. 而不等式

$$(i+j)^2<(i+j)^2+1<(i+j+1)^2$$

表明$(i+j)^2+1$介于两个相继的完全平方数之间，故它不能是完全平方，所以$\sqrt{(i+j)^2+1}$，从而P_iP_j是无理数. 这就证

明了 $P_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 中任两点的距离都是无理数，从而上面取的 n 个点符合要求.

由上面的讨论不难看出，满足问题中要求的点集远不止解答中作出的一个. 我们是选择抛物线 $y=x^2$ 上的整点来尝试的，这是"任三点构成面积为非零有理数"的充分条件，减少了问题的难点，并且为保证"任两点距离是无理数"，整点也可能更便于处理(参考例 8 的评注).

符合问题中要求的事物经常不止一个，我们可以选择具有特别性质的来尝试，即使之满足适当的充分条件，以保证符合命题中的部分要求. 这种以退求进、舍多取少的想法在构造中经常用得上.

【例 10】 任意给定整数 $n\geqslant 2$，证明：直角坐标系中存在 n 个点的集合，其中无三点共线，并且点集的任何子集的重心为整点.

证 考虑坐标系 Oxy 中 n 个点 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 所成之集合. 对任意整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$，其 k 元子集 $(x_{i_1},y_{i_1}),\cdots,(x_{i_k},y_{i_k})$ 的重心坐标为

$$\left(\frac{x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}}{k},\frac{y_{i_1}+\cdots+y_{i_k}}{k}\right)$$

这里 $1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n$.

要使任何子集的重心为整点就等价于要求，对任意的 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 以及任意的 $i_1,\cdots,i_k(1\leqslant i_1,\cdots,i_k)$，$x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}$ 和 $y_{i_1}+\cdots+y_{i_k}$ 都被 k 整除.

如果让每一个 $x_i,y_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都被所有的 $k(2\leqslant k\leqslant n)$

整除(一个充分条件),则上述要求显然得以满足.

例如,可以取

$x_1=y_1=(n+1)!,x_2=y_2=(n+2)!,\cdots,x_n=y_n=(2n)!$

不过,这样得到的点$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$在一条直线上,还不能完全符合要求.

修改的办法与上例中的技巧一样,只要取

$x_1=(n+1)!,y_1=((n+1)!)^2;\cdots;x_n=(2n)!,y_n=((2n)!)^2$

即$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$在抛物线 $y=x^2$ 上,且其中任意三点均不共线,这样作出的 n 个点便符合问题中的要求.

【例 11】 对任意的$n\geqslant 2$,证明:存在连续 n 个正整数,使得它们都不是一个素数的高于一次的方幂,即都不是 p^k 形式,这里,p 为素数,$k>1$.

证 问题等价于证明,存在连续 n 个正整数,使其中每一个都至少有两个不同的素约数. 我们先选择整数 x,使连续 n 个数

$$x+1,x+2,\cdots,x+n \tag{1}$$

都便于分解.

这只要取 $x=(n+1)!+1$ 就可以了,对这个 x 值,(1)中的数具有形式$(n+1)!+l(2\leqslant l\leqslant n+1)$. 遗憾的是,虽然它可分解成两个整数 l 及$\frac{(n+1)!}{l}+1$ 的积,但这两个数却可能是同一个素数的方幂.

克服这个困难的简单办法是设法选择 x,使(1)中的数均可分解成两个大于 1 且互素的整数之积. 这自然保证了它们

至少有两个不同的素约数.

我们取 $x=((n+1)!)^2+1$,上面考虑的数便具有 $((n+1)!)^2+l$ 的形式,这里 $2\leqslant l\leqslant n+1$. 请注意,

$$((n+1)!)^2+l=l\cdot\left(\frac{((n+1)!)^2}{l}+1\right)$$

显然 l 整除 $\frac{((n+1)!)^2}{l}$,故 l 和 $\frac{((n+1)!)^2}{l}+1$ 互素,且它们都大于 1. 这样,l 及 $\frac{((n+1)!)^2}{l}+1$ 都至少有一个素约数且两者不等,所以 $((n+1)!)^2+l$ 至少有两个不同的素约数,从而 n 个连续正整数

$$((n+1)!)^2+2,\cdots,((n+1)!)^2+(n+1)$$

符合问题中的要求.

在证明符合要求的事物有无穷个时,舍多求少的想法尤能派上用场,我们举几个例子,这种命题的另一种处理方法请见第 6 节.

【例 12】 证明:方程 $x!\cdot y!=z!$ 有无穷多组正整数解 x,y,z,且 $x<y<z$.

证 将问题中的等式改写成

$$x!\cdot y!=z\cdot(z-1)!$$

由此可见,如果(一个充分条件!)

$$x!=z,\quad y=z-1$$

则 x,y,z 便适合要求. 即

$$x=n,\quad y=n!-1,\quad z=n!$$

$n\geqslant 3$ 为任意正整数,给出了无穷多组适合要求的正整数解.

请注意，$x=6$，$y=7$，$z=10$ 也是一组解，但这并不包含在上面作出的解之中.

【例 13】 如果一个正整数的十进制表示式是由一个不从 0 开始的数码块及紧接其后面的一个完全相同的块组成，则称这个数是二重数. 例如 360360，123123 都是二重数，而 36036 则不是二重数. 证明：有无穷个二重数是完全平方数.

证 由定义不难看出，每个二重数可写成

$$l\cdot(10^n+1) \tag{1}$$

的形式，其中 l 是 n 位数，例如 $360360=360\times(10^3+1)$.

如果取 $l=10^n+1$，则(1)就是完全平方，但可惜这时 l 的位数是 $n+1$. 由于 10^n+1 略作缩小就是 n 位数，我们将它除 7^2，再乘 6^2，即令

$$l=\frac{10^n+1}{7^2}\times6^2$$

请注意，对任何 n，10^n+1 不被 $2^2,3^2,4^2,5^2,6^2$ 整除，只有 7^2 才有希望.

如果能选择无穷个 n 使上述 l 为整数，即 $\frac{10^n+1}{7^2}$ 为整数，相应地就得到了无穷个为平方数的二重数，因为

$$10^{n-1}<\frac{10^n+1}{7^2}\times6^2<10^n$$

故 l 为 n 位整数. 所以二重数

$$l(10^n+1)=\left(6\cdot\frac{10^n+1}{7}\right)^2$$

为整数的平方.

由于 $10^3+1=1001$ 被 7 整除，且

$$10^3=-1+7\times 143$$

由二项式定理可见，$10^{21}=(-1+7\times 143)^7$ 被 49 除得的余数为 -1，即 $10^{21}+1$ 被 49 整除，这样，从

$$10^{21(2k-1)}+1=(10^{21}+1)(10^{21\times 2k}-10^{21\times(2k-1)}+\cdots-10+1)$$

可知，对任意正整数 k，$10^{21(2k+1)}+1$ 被 7^2 整除，因此上述的 n 可取为 $n=21(2k+1)$.（$k\geqslant 1$）.

【例 14】 对正整数 $n>1$ 的每个素约数，考虑其不超过 n 的最高次幂，所有这样方幂的和记为 $f(n)$. 例如，$f(100)=2^6+5^2=89$，$f(120)=2^6+3^4+5^2=170$. 证明：存在无穷个 n 使得 $f(n)>n$.

证 我们来构造出无穷个符合要求的 n，为此，先给出 $f(n)$ 的表达式.

设 $p_1,\cdots,p_l$ 是 n 的全部素约数，对每个 p_i（$1\leqslant i\leqslant l$），所谓 p_i 的不超过 n 的最高次幂，就是满足不等式

$$p_i^{a_i}\leqslant n<p_i^{a_i+1} \tag{1}$$

的方幂 $p_i^{a_i}$. 所以

$$f(n)=p_1^{a_1}+p_2^{a_2}+\cdots+p_l^{a_l} \tag{2}$$

为了给出一个使 $f(n)>n$ 的充分条件. 我们来作下面的估计（退一步！），由(1)、(2)得到

$$\begin{aligned}\frac{f(n)}{n}&=\frac{p_1^{a_1}}{n}+\frac{p_2^{a_2}}{n}+\cdots+\frac{p_l^{a_l}}{n}\\&>\frac{p_1^{a_1}}{p_1^{a_1+1}}+\frac{p_2^{a_2}}{p_2^{a_2+1}}+\cdots+\frac{p_l^{a_l}}{p_l^{a_l+1}}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_l}$$

由此可见，若$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_l}>1$（一个充分条件！），即 n 的所有素约数的倒数之和大于 1，则必然有 $f(n)>n$.

因为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}>1$，故我们可以取 $n=(2\cdot3\cdot5)^k=30^k$，$k=1,2,\cdots$. 这就得出了无穷个符合要求的 n.

本题还有一种解法如下：

考虑 $n=2p^m$，$p\geqslant3$ 是素数，m 为正整数，我们来证明$f(2p^m)>2p^m$.

因为对每个 p^m，都有正整数 k 使得

$$2^k<p^m<2^{k+1} \tag{3}$$

故质因子 2 的不超过 $2p^m$ 的最高次幂为 2^{k+1}. 又因 $p\geqslant3$，所以对 $2p^m$ 的质因子 p，其不超过 $2p^m$ 的最高次幂就是 p^m. 由(3)得

$$f(2p^m)=p^m+2^{k+1}>p^m+p^m=2p^m$$

这样，取（例如）$n=2\cdot3^m$（$m=1,2,\cdots$）即得无穷个符合要求的 n. 如果固定 m，让 p 变化，由于素数有无穷个（这里，我们需要稍多一点知识），也得出了无穷个符合要求的 n.

请注意，$2p^m$ 的所有素约数倒数之和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{p}<1$，不满足上面解答中说的充分条件，所以现在得到的是完全不同的解，这也表明，第一种解法中我们舍去了无穷个符合要求的 n.

6 归纳构造

在上一节中，我们已经考虑过一些与正整数 n 有关的存在性命题（例 9，10，11），以及要证明存在的事物有无穷多个的问题（例 12，13，14）. 从所举的例子可以看出，这样的命题都具有下面的基本形式.

已知 A，证明对每个正整数 $n \geqslant l$（l 是固定正整数），都存在具有“某种性质”的“事物”$P(n)$，使得“某件事情发生”.

或者

已知 A，证明存在无穷个“具有某种性质”的“事物”，使得“某件事情发生”.

有时，这类命题可用一种特殊的构造法作出证明，这就是归纳构造法，即用数学归纳法进行构造.

归纳构造法的逻辑依据与通常的归纳证明是相同的，我们简要地说明一下.

从 $n=l$ 开始，相应于每个正整数 n 的“事物”记为 $P(n)$，归纳构造法由下面两个步骤组成：

第一步，构造基础，即作出符合问题要求的事物 $P(l)$.

第二步，假设对 $n \geqslant l$，符合要求的 $P(n)$ 已构造出来，我们通过它来构造 $P(n+1)$，并证明所作出的第 $n+1$ 个事物也合乎问题中的要求.

完成上述两步后，我们便可以从 $P(l)$ 开始，一步一步递推地作出了无穷个事物 $P(l)$，$P(l+1)$，…. 请看下面几个例子.

【例 1】 如果一个正整数的素因数分解中，每个素约数的幂次都大于 1，则称这个整数为好数. 例如，$3^2\times5^4$，$2^3\times7^5$ 是好数. 而 3×5，$2^2\times13$ 则不是好数. 证明：有无穷对相继的好数.

证 我们用归纳法作出无穷对相继的好数 a_1, a_1+1；a_2, a_2+1，…；a_n, a_n+1；….

因为 $8=2^3$，$9=3^2$ 显然是一对相继的好数，故可取 $a_1=8$.

假设 a_n 已作出($n\geqslant1$)，即 a_n, a_n+1 都是好数. 下面来作出 a_{n+1}.

递推的基础是恒等式

$$(2a_n+1)^2-4a_n(a_n+1)=1 \tag{1}$$

因为 $(2a_n+1)^2$ 为完全平方，它当然是好数. 又已归纳假设了 a_n, a_n+1 都是好数，所以两者的乘积也是好数，故 $4a_n(a_n+1)$ 是好数. 等式(1)表明 $(2a_n+1)^2$ 和 $4a_n(a_n+1)$ 是两个相继的好数. 从而可取 $a_{n+1}=4a_n(a_n+1)$. 这就完成了归纳构造.

不难算出，我们作出的前三对相继的好数为 8，9；288，289；332928，332929.

【例 2】 证明方程 $x^2-2y^2=1$ 有无穷组正整数解 (x,y).

证 一种解法是归纳地构造出方程的无穷组正整数解 $x=x_n$，$y=y_n$ ($n\geqslant1$).

显然,第一组解可取为 $x_1=3,y_1=2$. 假设对 $n\geqslant 1$ 已作出了解 (x_n,y_n),即 $x_n^2-2y_n^2=1$. 为了由此构造出解 (x_{n+1},y_{n+1}),需用下面的恒等式

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_2b_1+a_1b_2)^2 \quad (1)$$

这里 a_1,a_2,b_1,b_2 为任意数. 这个等式中取 $a_1=3,b_1=2\sqrt{-2},a_2=x_n,b_2=y_n\sqrt{-2}$,即得出(应用归纳假设!):

$$(3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2=(x_n^2-2y_n^2)(3^2-2\cdot 2^2)=1$$

这表明,可以取 $x_{n+1}=3x_n+4y_n,y_{n+1}=2x_n+3y_n$. 因已假设 x_n,y_n 都是正整数,故 x_{n+1},y_{n+1} 也都是正整数. 又显然 $x_{n+1}>x_n,y_{n+1}>y_n$. 所以由 $x_1=3,y_1=2$,及递推公式

$$x_{n+1}=3x_n+4y_n,y_{n+1}=2x_n+3y_n,(n\geqslant 1)$$

得出方程 $x^2-2y^2=1$ 的无穷组正整数解 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$.

第二种解法的出发点与前面的稍有不同,但实质是一样的(请读者自己思考一下理由).

从二项式定理不难看出,有两个正整数 A_n,及 B_n 使得对 $n\geqslant 1$,有

$$(3+2\sqrt{2})^n=A_n+B_n\sqrt{2} \quad (2)$$

同样可知

$$(3-2\sqrt{2})^n=A_n-B_n\sqrt{2} \quad (3)$$

将(2)、(3)两式相乘得出

$$A_n^2-2B_n^2=[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^n=1$$

故 $x=A_n,y=B_n$ 是方程 $x^2-2y^2=1$ 的正整数解. 由(2)、(3)

可解出

$$A_n=\frac{1}{2}[(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n]$$

$$B_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n]$$

容易证明，对 $n\geqslant 1$ 有 $A_{n+1}>A_n$，这样便得到了无穷组正整数解. 这个证明不必用归纳法.

【例 3】 证明：在 $1,2\cdots,\frac{3^n+1}{2}$ 中可以取出 2^n 个整数，使得其中无三项组成等差数列($n\geqslant 1$).

证 为了寻找一个规律，我们考虑最初几个 n 的值.

$n=1$ 时，只有两个数 1，2，取这 2^1 个数即可.

$n=2$ 时，在 1，2，3，4，5 中取出 2^2 个数

$$1,2,4,5$$

即合要求.

一般地，我们注意，x,y,z 不成等差数列的充分必要条件是，对任意的 $a,a+x,a+y,a+z$ 也不成等差数列，即“平移”一个数后，不改变原来三个数是否成等差.

$n=3$ 时，我们将 $n=2$ 时取出的数 1，2，4，5 以及它们各加上 3^3 合在一起，得出 2^3 个数

$$1,2,4,5,10,11,13,14$$

不难验证这符合要求.

类似地，当 $n=4$ 时，可以在 $1,2,\cdots,40,41$ 中取出符合要求的 2^4 个数：

$$1,2,4,5,10,11,13,14,28,29,31,32,37,38,40,41$$

下面，我们对每个 $n\geqslant 1$，用归纳法构造出集合 $\left\{1,2,\cdots,\frac{3^n+1}{2}\right\}$的一个 2^n 元子集 A_n，使得其中无三数成等差数列.

$n=1$ 时，取 $A_1=\{1,2\}$. 如果对 $n\geqslant 1$，符合要求的子集 A_n 已作出，定义 A_{n+1} 为

$$A_{n+1}=A_n\cup\{A_n+3^n\} \tag{1}$$

这里 A_n+3^n 表示集合$\{a+3^n\mid a\in A_n\}$.

用 a_n 表示 A_n 中的最大元素，则 $a_1=2$. 由(1)可见 $a_{n+1}=a_n+3^n$，由此解得 $a_n=\frac{1}{2}(3^n+1)(n\geqslant 1)$.

我们证明 A_{n+1} 符合问题的要求. 从式(1)易知 A_{n+1} 中元素个数恰为 A_n 中元素个数的两倍. 由归纳假设即知 A_{n+1} 中有 $2\cdot 2^n=2^{n+1}$ 个数.

如果 A_{n+1} 中有三个数成等差数列，设为 $x<y<z$. 由归纳假设，x,y,z 不能都在 A_n 中，按前面说过的，它们也不能都在 A_n+3^n 中. 所以，$x\in A_n$，$z\in A_n+3^n$. 即 $1\leqslant x\leqslant a_n$，$3^n+1\leqslant z\leqslant 3^n+a_n$. 但是

$$y=\frac{1}{2}(x+y)\geqslant\frac{1}{2}(1+3^n+1)>\frac{1}{2}(3^n+1)=a_n$$

表明 $y\notin A_n$. 而不等式

$$y\leqslant\frac{1}{2}(a_n+3^n+a_n)=\frac{1}{2}(2\times 3^n+1)<3^n+1$$

又意味着 $y\notin A_n+3^n$，从而 $y\notin A_{n+1}$，矛盾. 故 A_{n+1} 中无三数成等差数列. 于是 A_{n+1} 符合问题中的要求，这就完成了归

纳构造.

【例 4】 证明:对每个正整数 n,平面内存在具有下述性质的有限非空点集 S:对 S 中的任一点 A,在 S 中恰有 n 个点到 A 的距离为 1.

证 对每个 n,我们将作出由 2^n 个点组成的集合 S. 为此,先对所有的 $n\geqslant 1$,归纳构造出平面上具有下述两个性质的向量集合 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$.

(i) $|u_i|=\frac{1}{2}$,($i=1,2,\cdots,n$).

(ii)若 c_i 任意取 $-1,0,1$ 之一,并且至少有两个 c_i 不为零时,($1\leqslant i\leqslant n$),则

$$|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n|$$

既不等于 0,也不等于$\frac{1}{2}$. 这里 $|u|$ 表示向量 u 的长度. 注意,(ii)中的要求意味着 $n\geqslant 2$,且 $n=2$ 时,c_1,c_2 只能取 $+1$,-1.

首先取一个平面向量 u_1,满足 $|u_1|=\frac{1}{2}$. 假定已取了 k 个满足(i)、(ii)的平面向量 $u_1,u_2,\cdots,u_k$. 考虑坐标为 $\left(x_{k+1},\sqrt{\frac{1}{4}-x_{k+1}^2}\right)$的向量 u_{k+1},这里 $|x_{k+1}|<\frac{1}{2}$.

因为 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 已给定,故在区间 $-\frac{1}{2}<x_{k+1}<\frac{1}{2}$ 内只有有限个 x_{k+1},使得由它决定的向量 u_{k+1} 满足

$$|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k+c_{k+1}u_{k+1}|=0,\text{或}\frac{1}{2}$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_k,c_{k+1}$ 取 $-1,0,1$ 之一，且至少有两个不为 0. 由此可知，我们可以作出 u_{k+1} 使 $u_1,u_2,\cdots,u_k,u_{k+1}$ 符合(ii)中的要求. 又显然，

$$|u_{k+1}|=\sqrt{x_{k+1}^2+\frac{1}{4}-x_{k+1}^2}=\frac{1}{2}$$

即 u_{k+1} 满足(i). 这样便归纳作出了上面说的向量集合.

设我们作出的 n 个向量为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$，则平面上的 2^n 个向量

$$r_0+a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$$

所表示的点组成的集合 S 即符合问题中的要求. 这里，r_0 为任一个取定的平面向量，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 任取 -1 或 $+1$.

对于 S 中任一点 A，它对应的向量为 $r_0+a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$. 即 A 对应了一个 n 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 设 N 是 S 中任一点，它对应的 n 元数组为 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$(b_i=\pm1)$ 当 n 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 有两个或两个以上坐标不同时，则点 N 与 A 的距离为

$$\begin{aligned}&|(a_1-b_1)u_1+(a_2-b_2)u_2+\cdots+(a_n-b_n)u_n|\\=&2|c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n|\end{aligned}$$

这里 $a_i-b_i=2c_i$，即 $c_i=-1,0,1$ 之一，并且至少有两个不为 0，故由(ii)可知，此时 N 到 A 的距离既不为 0，也不等于 1.

当 n 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 仅有一个坐标不同时，由(i)可知，N 到 A 的距离为

$$\begin{aligned}&|(a_1-b_1)u_1+(a_2-b_2)u_2+\cdots+(a_n-b_n)u_n|\\=&|(a_i-b_i)u_i|=2|u_i|=2\cdot\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

又易知这样的数组$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$恰有 n 个,即为$(-a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$(a_1,-a_2,\cdots,a_n)$,$\cdots(a_1,a_2,\cdots,-a_n)$. 故 S 中恰有 n 个点:$r_0-a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$,$r_0+a_1u_1-a_2u_2+\cdots+a_nu_n$,$\cdots$,$r_0+a_1u_1+a_2u_2+\cdots-a_nu_n$ 到 A 的距离为 1. 这就证明了我们作出的 S 符合要求.

例 5 中的问题是赫尔(M. Hall)提出并解答的.

【例 5】 是否存在由不同正整数构成的集合 A,使得任何正整数可以唯一地表示成 A 中一对数的差?

解 回答是肯定的. 请注意,如果不要求表示法唯一,则问题很平凡(例如取 A 为全体正整数之集即可),现在的问题要困难得多. 我们下面来归纳构造一个符合要求的集合

$$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$$

取 $a_1=1,a_2=2$. 假设对 $n\geqslant1$,$a_1,a_2,\cdots,a_{2n-1},a_{2n}$已经定义$(a_1<a_2<\cdots<a_{2n-1}<a_{2n})$,则令 $a_{2n+1}=2a_{2n}$. 显然有正整数(如 a_{2n+1})不能表示成 $a_j-a_i(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$的形式. 取 r_n 是最小的不能表示成这种形式的正整数,我们定义 $a_{2n+2}=a_{2n+1}+r_n$. 这样,便归纳定义了 $a_1,a_2,\cdots$. 这个数列的最初几项是 1,2,4,8,16,21,42,$\cdots$.

由 r_n 的定义,$1,2,\cdots,r_n-1$ 均可表示成 $a_j-a_i(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$形式. 又 $r_n=a_{2n+2}-a_{2n+1}$,故不超过 r_n 的正整数均可表示成$a_j-a_i(1\leqslant i<j\leqslant 2n+2)$. 从而按 r_{n+1} 的定义知,$r_{n+1}>r_n$(对 $n\geqslant1$ 成立). 因此,任何正整数可表示为 a_j-a_i 形式(对适当选择的 i,j).

为了证明如上构造的 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$满足要求,剩下的

只要证明，任何正整数表示为 A 中两数之差的方式必定唯一.

假设相反，我们推出，有正整数 $h,k,l,m(h<k,l<m,k<m)$使得

$$a_k-a_h=a_m-a_l \tag{1}$$

这时，由 $m>k>h\geqslant1$，知 $m\geqslant3$.

如果 m 是奇数，设 $m=2n+1(n\geqslant1)$，则

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=a_l+a_k-a_h<a_l+a_k\leqslant a_{m-1}+a_{m-1}\\&=2a_{m-1}=2a_{2n}=a_{2n+1}(\text{定义!})\end{aligned}$$

这是一个矛盾.

如果 m 为偶数，设 $m=2n+2(n\geqslant1)$，则当 $l=2n+1$ 时，有(按定义)

$$a_m-a_l=a_{2n+2}-a_{2n+1}=r_n$$

结合(1)式知，$r_n=a_k-a_h$，这里 $h<k\leqslant m-1=2n+1$，与 r_n 的定义矛盾.

当 $l<2n+1$ 时(因 $l<m=2n+2$，排除 $l=2n+1$ 后这是仅有的可能性). 若 $k=2n+1$，类似地有

$$a_m-a_k=a_{2n+2}-a_{2n+1}=r_n$$

故 $r_n=a_l-a_h$，但 $h<l\leqslant2n$，这与 r_n 的定义矛盾.

最后，如果 $l<2n+1,k<2n+1$，则

$$\begin{aligned}a_{2n+2}&=a_m=a_l+a_k-a_h<a_l+a_k\\&<a_{2n}+a_{2n}=2a_{2n}=a_{2n+1}\end{aligned}$$

这亦是不可能的.

所以，任何正整数表为 A 中两数之差的方式必然唯一，

从而我们归纳构造的集合 A 符合问题中的要求.

注　在归纳定义中,令 $a_{2n+1}=2a_{2n}$ 并不必要,实际上,只需 $2a_{2n}\leqslant a_{2n-1}$ 就够了. 例如,我们可以改成取 $a_{2n+1}=3a_{2n}$ 等等. 如此定义的集合同样符合要求(稍稍修改上述论证即知).

有时,作归纳构造也需用归纳法的一些变通形式,这当然要根据构造过程来决定,我们举一个例子.

【例 6】 对任意整数 $n\geqslant3$,存在一个正整数的完全立方,使得它可以表示成 n 个不同正整数的立方之和.

证　不难算得 $6^3=3^3+4^3+5^3$,这就作出了 $n=3$ 时符合要求的完全立方数.

假设对 $k\geqslant3$,存在可表成 k 个不同正整数立方之和的完全立方数 m^3,设

$$m^3=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3 \tag{1}$$

这里 $a_1<a_2<\cdots<a_k$ 都是正整数.

由(1),容易看出

$$\begin{aligned}(6m)^3&=(6a_1)^3+(6a_2)^3+\cdots+(6a_k)^3\\&=(3a_1)^3+(4a_1)^3+(5a_1)^3+(6a_2)^3+\cdots+(6a_k)^3\end{aligned}$$

而显然有,$3a_1<4a_1<5a_1<6a_2<\cdots<6a_k$,故它们是不同的正整数. 这表明,我们作出的 $(6m)^3$ 可表示成 $k+2$ 个不同正整数的立方和.

请注意,上这的归纳构造中跳了一步,即从归纳假设 $n=k$ 时存在符合要求的完全立方,推出了 $n=k+2$(而不是 $k+1$)时也存在所说的数. 这样,为了完成归纳构造,构造基础

中应作出前两个 n 值相应的完全立方.

对于 $n=4$，计算 $1^3,2^3,\cdots,12^3,13^3$ 可以看出

$$13^3=5^3+7^3+9^3+10^3$$

即 13^3 可表示成四个不同正整数的立方和.

请读者自己给予一个严谨的证明表述.

不难递推地求出，完全立方数

$6^3,13^3,(6\times6)^3,(6\times13)^3,(6\times6\times6)^3,\cdots$

分别可以表示成为三个、四个、五个、六个、七个、……不同正整数的立方和.

注　可以证明，不存在能表示成两个正整数立方和的完全立方数. 所以，问题中的要求 $n\geqslant3$ 是必要的.

能否成功地完成归纳构造，关键在于我们能否从归纳假设作出的第 n 个事物构造出第 $n+1$ 个事物. 当这样的递推构造不容易实现时，加强归纳假设可能是克服困难的有效途径，其大意是说，通过假设作出的第 n 个事物满足"更强的要求"来构作第 $n+1$ 个事物. 这种方法的实质是代替证明原命题以证明一个更强的命题. 所以，使用这个方法时，构造基础应当满足"更强的要求"，并且还必须证明构造出的第 $n+1$ 个事物也满足"更强的要求".

究竟如何加强原命题，当然要视具体情况而定，不可生搬硬套.

【例 7】　证明，存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$：$a_1<a_2<\cdots$，使得对所有 $n\geqslant1$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 都是完全平方数.

证　把原命题加强成下面的形式将便于归纳构造：

存在正整数的无穷数列都是$\{a_n\}$：$a_1<a_2<\cdots$，使得对所有$n\geqslant1$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 都是奇数的平方.

我们取 $a_1=3$，则 a_1^2 当然是奇数平方. 假设已作出了 n 个正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，使 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 为奇数 $2k+1$ 的平方（k 为整数），即

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=(2k+1)^2$$

从第 4 节例 9 中的恒等式

$$(2k+1)^2+(2k^2+2k)^2=(2k^2+2k+1)^2$$

可见，取 $a_{n+1}=(2k^2+2k)$，则

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2=(2k^2+2k+1)^2$$

也是奇数的平方. 又显然

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-1)>a_n$$

故所作的 a_{n+1} 符合要求.

我们所作数列的前四项是 3，4，12，14280.

【例 8】 给定实数 x_0，令 $f(x)=4x-x^2$，则由 $x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant1)$定义了数列$\{x_n\}(n\geqslant0)$. 证明：任给 $n\geqslant1$，存在 n 个不同的 x_0 值，使得由此确定的数列$\{x_n\}$中只有有限个互不相同的项.

证 当 $x_0=0$ 时，得数列 0，0，…. 无不同项.

解 $4x-x^2=0$，得 $x=0$ 或 4. 当 $x_0=4$ 时，相应的数列为 4，0，0，…. 恰有两项互不相同.

解 $4x-x^2=4$，得 $x=2$. 当 $x_0=2$ 时，数列为 2，4，0，0，…. 有三项互不相同.

解 $4x-x^2=2$，取 $x=2+\sqrt{2}$，则当 $x_0=2+\sqrt{2}$时，数列为 $2+\sqrt{2},2,4,0,0\cdots$. 有四个项互不相同.

一般地，设 $x_0=a_n$ 时相应数列为 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,0,0,\cdots$，则可期望从 $f(a_{n+1})=a_n$ 来决定 a_{n+1}，当 $x_0=a_{n+1}$时，得出的数列为 $a_{n+1},a_n,\cdots,a_1,0,0,\cdots$. 它显然只有有限个项互不相同.

从 $f(a_{n+1})=a_n$ 解得 $a_{n+1}=2\pm\sqrt{4-a_n}$. 由此可见，只有在 $a_n\leqslant 4$ 时，a_{n+1}才是实数. 下面我们归纳构造一个各项互不相同的无穷实数列$\{a_n\}(n\geqslant 1)$，使得当 $x_0=a_n$ 时，相应的数列$\{x_n\}(n\geqslant 0)$为

$$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,0,0,\cdots$$

取 $a_1=4$；得数列 $a_1,0,0,\cdots$. 故 a_1 符合要求. 假设互不相同的 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 已作出，使得当 $x_0=a_i$ 时，$\{x_n\}(n\geqslant 0)$为

$$a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,0,0,\cdots$$

并且 $a_{i+1}=2+\sqrt{4-a_i}(1\leqslant i\leqslant k-1)$，以及 $0<a_i\leqslant 4(1\leqslant i\leqslant k)$.

令 $a_{k+1}=2+\sqrt{4-a_k}$. 由于已假设 $0<a_k\leqslant 4$，故显然 $0<a_{k+1}\leqslant 4$. a_{k+1}必然与 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 都不相同. 因为它不能等于 $a_1=4$(否则 $a_k=0$)；如果有某个 $i,2\leqslant i\leqslant k$ 使 $a_{k+1}=a_i$，由归纳假设得到，

$$2+\sqrt{4-a_k}=2+\sqrt{4-a_{i-1}}$$

推出 $a_k=a_{i-1}$，这与已设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 互不相同矛盾. 从而 a_{k+1}和 $a_i(1\leqslant i\leqslant k)$都不相等. 当 $x_0=a_{k+1}$时，相应的数列

$\{x_n\}(n\geqslant 0)$显然为

$$a_{k-1}, a_k, \cdots, a_2, a_1, 0, 0, \cdots$$

所以,我们得到了 $k+1$ 个符合前述要求的数 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$.

【例 9】 证明:有无穷个正整数 n 使得 n 整除 2^n+2.

证 我们归纳构造出一个正整数的无穷数列$\{a_k\}(k\geqslant 1)$,使得对所有 $k\geqslant 1$,a_k 整除 $2^{a_k}+2$.

取 $a_1=2$. 如果已作出了 $a_k=n$,满足 n 整除 2^n+2,且 n 为偶数,$n-1$ 整除 2^n+1(加强归纳假设!). 请注意 a_1 符合后两项要求. 我们令

$$a_{k+1}=2^{a_k}+2=2^n+2$$

则 a_{k+1}显然是偶数. 下面来证明,a_{k+1}整除 $2^{a_{k+1}}+2$,并且 $a_{k+1}-1$ 整除 $2^{a_{k+1}}+1$.

因为归纳假设了 $n-1$ 整除 2^n+1,故有正整数 l 使 $2^n+1=(n-1)l$(显然,$n-1$,l 都是奇数). 于是 $a_{k+1}=2^n+2=(n-1)l+1$. 故得(分解!,注意 l 为奇整数)

$$\begin{aligned}2^{a_{k+1}}+2&=2^{(n-1)l+1}+2=2(2^{(n-1)l}+1)\\&=2\cdot((2^{n-1})^l+1)\\&=2\cdot(2^{n-1}+1)(2^{(n-1)(l-1)}-2^{(n-1)(l-2)}+\cdots-2^{n-1}+1)\\&=(2^n+2)(2^{(n-1)(l-1)}-2^{(n-1)(l-2)}+\cdots-2^{n-1}+1)\end{aligned}$$

这表明,$a_{k+1}=2^n+2$ 整除 $2^{a_{k+1}}+2$.

又从归纳假设知,n 整除 2^n+2. 故有整数 s 使 $2^n+2=ns$,即 $2(2^{n-1}+1)=ns$. 因 n 为偶数,$2^{n-1}+1$ 是奇数,故 s 是奇数,并且

$$2^{a_{k+1}}+1=2^{ns}+1=(2^n)^s+1$$
$$=(2^n+1)(2^{n(s-1)}-2^{n(s-2)}+\cdots-2^n+1)$$

所以 $a_{k+1}-1=2^n+1$ 整除 $2^{a_{k+1}}-1$

这样，数列$\{a_k\}(k\geqslant 1)$符合要求，其中 $a_1=2, a_{k+1}=2^{a_k}+2(k\geqslant 1)$. 请读者比较一下本例和习题 34 的结论及解法.

吴國林印

请勿用于商业用途或准商业用途，
请于下载后24小时内删除！如无法遵守此规定，则谢绝下载！！
吴国林 MSN: colin_21st@hotmail.com

7 辅助问题

"如果你不能解答所提的问题，那么就去考虑一个适当的与之相关联的辅助问题."波利亚(G. Polya)的这一忠告对于应用构造法也很有帮助，在许多场合下，辅助问题起着一种跳板的作用.

找到并利用辅助问题来实现构造，通常很不容易，这需要相当的经验和运气，它也许是将原问题适当修改而得到的"较简单"的命题(参考例 1 及例 2)；也许是一个能满足问题中要求的"较强命题"(参见例 3、例 4 及例 5)；或者是一些有关的背景知识和某个用得上的定理，等等. 这些都和所考虑的问题有关，仔细地分析和研究它对我们或许能有所提示.

【例 1】 证明：存在整系数多项式 $P(x)$，$Q(x)$，使得

$$\frac{P(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

证 我们来构造整系数多项式 $P(x)$，$Q(x)$，使得当 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$时，有

$$P(x)=Q(x)(x-\sqrt{5})$$

并且 $Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\neq 0$. 将上式改写成

$$P(x)-xQ(x)=-\sqrt{5}Q(x)$$

这样，即要求一个整系数多项式 $A(x)$，使得当 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$时，

$$A(x)=\sqrt{5}Q(x),(A(x)=-P(x)+xQ(x))$$

为了帮助构造，我们来考虑下面一个较简单的（辅助）问题：

找两个整系数多项式 $P_1(x)$，$Q_1(x)$，使得

$$\frac{P_1(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{Q_1(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\sqrt{2}$$

类似于前面的讨论可知，问题即为求整系数多项式 $A_1(x)$，使得当 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$时，

$$A_1(x)=\sqrt{3}Q_1(x),(A_1(x)=-P_1(x)+xQ_1(x))$$

我们不难得出，在 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$时

$$\begin{aligned}0&=(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})\\&=(x-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\\&=x^2-2\sqrt{3}x+1\end{aligned}\tag{1}$$

即 $A_1(x)=x^2+1$，$Q_1(x)=2x$，从而 $P_1(x)=x^3-1$.

从辅助问题的解法可以看出，在 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$时，制造出类似于(1)的等式对本题可能会有帮助. 这件事情并不困难，事实上，当 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$时

$$\begin{aligned}0=&(x-\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})\\&\cdot(x-\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})\\=&((x-\sqrt{5})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2)((x-\sqrt{5})^2\end{aligned}$$

$$-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2)$$

$$=(x^2-2\sqrt{5}x-2\sqrt{6})(x^2-2\sqrt{5}x+2\sqrt{6})$$

$$=(x^2-2\sqrt{5}x)^2-24=x^4-4\sqrt{5}x^3+20x^2-24$$

这样，$A(x)=x^4+20x^2-24$，$Q(x)=4x^3$，从而

$$P(x)=xQ(x)-A(x)=3x^4-20x^2+24$$

【例 2】 已知 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和实数 $q(0<q<1)$. 证明：存在 n 个实数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$，使

a） 对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $a_k<b_k$；

b） 对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$，有

$$q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$$

c） $b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

证 我们先来考虑一个稍为容易的辅助问题：

给定非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $q(0<q<1)$ 找 n 个正实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，使得

a*） 对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $a_k\leqslant b_k$；

b*） 对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$，有

$$qb_k\leqslant b_{k+1}\leqslant\frac{1}{q}b_k$$

c） $b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

为了方便起见，我们把修改后问题的解 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 记为 n 元数组 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，并称之为 n 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的修改解. 先注意下面两个事实，这是将问题简化的基础.

(i)如果 n 元非负数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 及$(a_1',a_2',\cdots,a_n')$的修改解分别是$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 和$(b_1',b_2',\cdots,b_n')$，则$(b_1+b_1',b_2+b_2',\cdots,b_n+b_n')$是$(a_1+a_1',a_2+a_2',\cdots,a_n+a_n')$ 的修改解.

其证明甚为容易，因为已知条件意味着

$$a_k\leqslant b_k,\quad a_k'\leqslant b_k'\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

故

$$a_k+a_k'\leqslant b_k+b_k'$$

再从

$$qb_k\leqslant b_{k+1}\leqslant\frac{1}{q}b_k,\quad qb_k'\leqslant b_{k+1}'\leqslant\frac{1}{q}b_k',(1\leqslant k\leqslant n-1)$$

得知

$$q(b_k+b_k')\leqslant(b_{k+1}+b_{k+1}')\leqslant\frac{1}{q}(b_k+b_k'),(1\leqslant k\leqslant n-1)$$

这表明 n 元数组满足 a^*)，b^*)，同样可知它也满足 c).

(ii)如果 n 元非负数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的修改解为$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则对任意实数 $c>0$，$c(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(cb_1,cb_2,\cdots,cb_n)$是$(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n)$的修改解.

其证明与上述的类似.

现在设$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是原问题中给定的正实数组，我们先来求出它的一组修改解. 因为

$$\begin{aligned}
&(a_1,a_2,\cdots,a_n)\\
=\ &a_1(1,0,0,\cdots,0)+(0,a_2,a_3,\cdots,a_n)\\
=\ &a_1(1,0,\cdots,0)+a_2(0,1,0,\cdots,0)+(0,0,a_3,\cdots,a_n)\\
=\ &a_1(1,0,\cdots,0)+a_2(0,1,\cdots,0)+\cdots\\
&+a_n(0,0,\cdots,0,1)
\end{aligned}\tag{1}$$

由(i)、(ii)可见,要求出$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的修改解,只要求出下面n个n元非负数组

$$(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{k},0,\cdots,0)\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

的修改解就可以了.

这个问题并不困难,我们取

$$b_1'=q^{k-1},b_2'=q^{k-2},\cdots,b_{k-1}'=q$$

$$b_k'=1,b_{k+1}'=q,\cdots,b_n'=q^{n-k}$$

则不难验证$(b_1',b_2',\cdots,b_k',\cdots,b_n')$是$(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{k},0,\cdots,0)$的修改解.

事实上,a')显然满足.又因$0<q<1$,故

$$qb_i'\leqslant b_{i+1}'\leqslant\frac{1}{q}b_i'(1\leqslant i\leqslant n-1)$$

以及

$$\begin{aligned}&b_1'+b_2'+\cdots+b_n'\\&=(1+q+\cdots+q^{k-1})+(q+q^2+\cdots+q^{n-k})\\&<1+2(q+q^2+\cdots+q^n)\\&=2(1+q+q^2+\cdots+q^n)-1<\frac{2}{1-q}-1\\&=\frac{1+q}{1-q}(1+0+0+\cdots+0)\end{aligned}$$

从而b')和c)都满足.

这样,由(1)即求出了$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的一组修改解为$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,其中

$$b_k=a_1q^{k-1}+\cdots+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+\cdots+a_nq^{n-k}(1\leqslant k\leqslant n)$$

下面证明:$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$也是$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的符合原问题要求的解.

显然,对 $1\leqslant k\leqslant n$,恒有 $a_k<b_k$. 再者,对 $1\leqslant k\leqslant n-1$,我们有

$$qb_k-b_{k+1}=a_{k+1}(q^2-1)+\cdots+a_nq^{n-k-1}(q^2-1)<0$$

及

$$qb_{k+1}-b_k=a_1q^{k-1}(q^2-1)+\cdots+a_k(q^2-1)<0$$

所以 $q<\dfrac{b_{k-1}}{b_k}<\dfrac{1}{q}$. 又

$$\begin{aligned}&b_1+b_2+\cdots+b_n\\=&a_1+a_2q+a_3q^2+\cdots+a_nq^{n-1}\\&+a_1q+a_2+a_3q+\cdots+a_nq^{n-2}+\cdots\\&+a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+a_3q^{n-3}+\cdots+a_n\\<&(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1+2q+2q^2+\cdots+2q^{n-1})\\<&(a_1+a_2+\cdots+a_n)\frac{1+q}{1-q}\end{aligned}$$

故 a),b),c)都得以满足.

【例 3】 任给整数 $n\geqslant2$,证明:单位圆上存在 n 个不同点,使得其中任两点间的直线距离都是有理数.

证 考虑单位圆上两个不同点$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$(\cos\beta,\sin\beta)$,这两点的距离为

$$\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=2\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|$$

由此可见，如果 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\beta}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\beta}{2}$都是有理数，则上述距离显然是有理数（一个充分条件!），所以，我们先试着考虑下面的辅助问题：

找 n 个互不相同的角 $2\theta_1, 2\theta_2, \cdots, 2\theta_n$，使得对 $1\leqslant k\leqslant n$，$\sin\theta_k$，$\cos\theta_k$ 都是有理数.

这是能够做到的. 注意等式

$$(k^2-1)^2+(2k)^2=(k^2+1)^2$$

对所有 $1\leqslant k\leqslant n$ 成立. 若取

$$\theta_k=\operatorname{arctg}\frac{k^2-1}{2k}\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

则

$$\sin\theta_k=\frac{k^2-1}{k^2+1},\quad \cos\theta_k=\frac{2k}{k^2+1}\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

都是有理数，又易知对 $1\leqslant k\leqslant n$，$2\theta_k$ 互不相同且 $0\leqslant 2\theta_k<\pi$.（参见第 4 节例 9 中的讨论.）

这样，单位圆上 n 个不同点 $P_1(\cos2\theta_1, \sin2\theta_1)$，$P_2(\cos2\theta_2, \sin2\theta_2)$，$\cdots$，$P_n(\cos\theta_n, \sin2\theta_n)$符合问题中的要求.

【例 4】 设 $a_n=\left[\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right]$，$n=1,2,\cdots$，这里$[x]$表示实数 x 的整数部分. 证明

i) 有无穷个正整数 m，使得 $a_{m+1}-a_m>1$.

ii) 有无穷个正整数 m，使 $a_{m+1}-a_m=1$.

证 如果$(n-1)^2+n^2$ 为完全平方，即有整数 k 使得

$$(n-1)^2+n^2=k^2 \tag{1}$$

则 a_n 特别简单：$a_n=k$. 我们希望能作出无穷个这样的 n. 为

了解决这个辅助问题，先将(1)改写成为

$$(2n-1)^2-2k^2=-1 \tag{2}$$

它关联到方程

$$x^2-2y^2=-1 \tag{3}$$

注意(3)的任一组正整数解(x,y)中的x必是奇数. 从这组解，取$n=\dfrac{x+1}{2}$，$k=y$即得(2)的一组解，下面来证明方程(3)有无穷组正整数解.

在第6节例2中，我们证明了方程

$$x^2-2y^2=1$$

有无穷组正整数解(x_n,y_n). 在其解答中的恒等式里取$a_1=1$，$b_1=\sqrt{-2}$，$a_2=x_n$，$b_2=y_n\sqrt{-2}$，即得

$$(x_n+2y_n)^2-2(x_n+y_n)^2=(1^2-2\cdot1^2)(x_n^2-2y_n^2)=-1$$

这表明，方程(3)有无穷组正整数解$x=x_n+2y_n$，$y=x_n+y_n$ $(n\geqslant1)$.

现在回到本题的证明. 先考虑 i). 取$m>2$使得$(m-1)^2+m^2=k^2$易证$k<2m-1$. 由此可推出

$$(m-1)^2+(m-2)^2<(k-1)^2$$

即
$$\sqrt{(m-1)^2+(m-2)^2}<k-1$$

所以
$$a_{m-1}=[\sqrt{(m-1)^2+(m-2)^2}]<k-1$$

故对这样的m(有无穷多个!)有

$$a_m-a_{m-1}=k-a_{m-1}>k-(k-1)=1$$

至于 ii). 取正整数$m>2$，使得$(m-1)^2+m^2=k^2$，由此可知$m-1<k<2m-1$，不难证明：

$$k^2+2k+1<m^2+(m+1)^2<k^2+4k+4$$

即 $$k+1<\sqrt{m^2+(m+1)^2}<k+2$$

所以，$a_{m+1}=[\sqrt{m^2+(m+1)^2}]=k+1$. 从而对这样的 m，我们有

$$a_{m+1}-a_m=(k+1)-k=1$$

本题还有一种非构造的证法，参见习题 41.

【例 5】 证明：当 n 通过所有正整数时，$[n\sqrt{2}]$中有无穷个完全平方数，这里，$[x]$表示 x 的整数部分.

证 本题可以用构造法来论证，但是并不容易看出上例的方程(3)能够帮助构造.

我们已证明了方程 $x^2-2y^2=-1$ 有无穷组正整数解，任取一组解 $x=u, y=v$，即

$$u^2-2v^2=-1$$

从而

$$2v^2=u^2+1$$

将上式两边同乘以 u^2 得

$$2(uv)^2=u^4+u^2$$

故

$$u^2<\sqrt{2}uv<u^2+1$$

所以$[\sqrt{2}uv]=u^2$ 为一个完全平方数. 这样取 $n=uv$，则得无穷个正整数 n 使得$[n\sqrt{2}]$为完全平方.

【例 6】 证明：存在一个二元二次多项式 $P(x,y)$使得当 x、y 通过所有正整数时，$P(x,y)$取得所有正整数，并且每个

数只取得一次.

证 构造的困难在于，不易看出本题和下面的问题有关：

对任意正整数 n，有唯一的一对整数 m,l，使得

$$n=\frac{m(m-1)}{2}+l \tag{1}$$

这里 $0\leqslant l<m$.

我们先来证明这个结论，考虑数列

$$\frac{1\cdot(1-1)}{2},\frac{2\cdot(2-1)}{2},\cdots,\frac{m(m-1)}{2},\frac{m(m+1)}{2},\cdots$$

正整数 n 必在上述数列的一对相邻项之间，即有正整数 m 使得

$$\frac{m(m-1)}{2}\leqslant n<\frac{m(m+1)}{2}$$

令 $l=n-\frac{m(m-1)}{2}$，则

$$n=\frac{m(m-1)}{2}+l$$

并且

$$l=n-\frac{m(m-1)}{2}\geqslant\frac{m(m-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=0$$

以及

$$l=n-\frac{m(m-1)}{2}<\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=m$$

为了证明 m,l 是唯一的，我们假设又有一对 m_1,l_1，使得

$$n=\frac{m_1(m_1-1)}{2}+l_1,\quad 0\leqslant l_1<m_1$$

若 $m_1\neq m$，不妨假定 $m_1>m$，则有

$$l-l_1\leqslant l<m$$

以及

$$l-l_1=\frac{m_1(m_1-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}$$

$$\geqslant\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=m$$

矛盾. 故 $m_1=m$，从而 $l_1=l$，即(1)中的 m,l 是唯一的. 现在对任意正整数 n，在(1)中令

$$l=x-1,\quad m=x+y-1 \tag{2}$$

则从 $0\leqslant l<m$ 可知，$x\geqslant 1$ 并且 $y=m-l>0$，故有一对正整数 x,y 使得

$$n=x-1+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} \tag{3}$$

另一方面，由(2)可见，任一对正整数 x,y 唯一地确定了一对整数 $l,m(0\leqslant l<m)$. 故从表达式(1)的唯一性推知，不同的正整数对(x,y)确定了(3)中不同的 n. 这表明二元二次多项式

$$P(x,y)=x-1+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$$

符合问题中的要求.

某些与问题有关的背景知识对构造也会有所帮助，虽然这未必是一个具体的辅助问题，但从较高一点的观念出发则可能易于看出尝试的途径.

【例 7】 给定正整数 $k\geqslant 2$,证明:存在一个无理数 r,使得对任意整数 $n\geqslant 1$,k 都整除$[r^n]+1$. 这里,$[x]$表示 x 的整数部分.

证 如果不能很快看出一个符合要求的 r,下面就来寻求它.

无理数就是不满足任何一次方程 $ax+b=0$ 的实数 x(a,b 任意整数,$a\neq 0$). 我们还可以进一步将它们分成两大类,第一类是由不满足任何一个(首项系数为 1)整系数代数方程的无理数组成(称为超越数),剩下的无理数作为第二类,称为代数无理数,即能够作为一个高于一次且首项系数为 1 的整系数代数方程的根. 因此二次方程

$$x^2+ax+b=0 \tag{1}$$

的无理根则是"最简单"的无理数,这里 a,b 都是整数. 我们似有理由先在方程(1)的根中寻找符合要求的 r.

另一方面,$[r^n]$通常不易处理,但若 r 为方程(1)的根,则不难求出 r^n 的某种表达式,这对于我们的目的或许是有益的.

设 r' 是(1)的另一个根,则它必然也是无理数. 分别用 r^n、r'^n 乘等式:

$$r^2+ar+b=0$$

$$r'^2+ar'+b=0$$

的两边. 并令 $u_n=r^n+r'^n(n\geqslant 1)$,得出

$$u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0 \tag{2}$$

因为 $u_1=-a$,$u_2=a^2-2b$ 都是整数,故易从递推公式(2)得

知，所有 u_n 都是整数. 又请注意，若 $0<r'<1$，则对 $n\geqslant1$，$0<r'^n<1$. 这样，

$$u_n-1<u_n-r'^n<u_n$$

即 $u_n-1<r^n<u_n$，故 $[r^n]=u_n-1$. 所以，我们现在的目的是选择适当的整数 a,b（都与 k 有关），使得方程(1)有两个无理根 r,r'，并满足

i) $0<r'<1$.

ii) 对所有 $n\geqslant1$，k 整除 $u_n=r^n+r'^n$.

事实上，（也许在经过尝试之后）取 $a=-2k$，$b=k$ 即符合上面的要求，这时，方程

$$x^2-2kx+k=0$$

的根为 $r=k+\sqrt{k(k-1)}$，$r'=k-\sqrt{k(k-1)}$. 因为

$$(k-1)^2<k(k-1)<k^2$$

故 $\sqrt{k(k-1)}$ 是无理数，即 r,r' 都是无理根. 又易知 $0<r'<1$. 递推公式(2)现在成为

$$u_{n+2}=2ku_{n+1}-ku_n(n\geqslant1) \tag{3}$$

因为 $u_1=2k$，$u_2=4k_2-2k$ 都被 k 整除，由(3)不难用归纳法证明所有 u_n 都被 k 整除，即 $[r^n]+1$ 被 k 整除($n\geqslant1$).

数的进位制也常在构造中派上用场. 我们所熟悉的普通整数都是十进制中的，即用 10 的幂的倍数来表示. 对任意给定的整数 $g(g\geqslant2)$，所有十进制非负整数 N 都有形如：

$$N=a_kg^k+a_{k-1}g^{k-1}+\cdots+a_1g+a_0,(a_k\neq0)$$

的 g 进制表示法，这里 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},a_k$ 都是整数，且 $0\leqslant a_i\leqslant g(a\leqslant i\leqslant k)$.

具体算法是，先用 g 除 N，得余数 a_0，商为 N_1，则

$$N=gN_1+a_0,0\leqslant a_0<g$$

再用 g 除 N_1，得余数 a_1，商为 N_2，即

$$N_1=gN_2+a_1,0\leqslant a_1<g$$

代入上式得到

$$N=g^2N_2+a_1g+a_0$$

将 N_2 再用 g 除，余数为 a_2，如此继续，最后即得出 N 的前述 g 进制表示法.

N 表示成 g 进制的方式必然唯一，这是不难证明的：设 N 另有一个表达式为

$$N=a_l'g^l+a_{l-1}'g^{l-1}+\cdots+a_1'g+a_0'$$

$a\leqslant a_i'<g(0\leqslant i\leqslant l)$，$a_l'\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}&a_kg^k+a_{k-1}g^{k-1}+\cdots+a_1g+a_0\\=&a_l'g^l+a_{l-1}'g^{l-1}+\cdots+a_1'g+a_0'\end{aligned}$$

由此推出 g 整除 a_0-a_0'，但 $0\leqslant|a_0-a_0'|<g$，故必须 $a_0=a_0'$. 上式消去 a_0 后，两边再约去 g，又推出 $a_1=a_1'$，继续下去，最后得知 $k=l$ 以及 $a_i=a_i'(0\leqslant i\leqslant k)$.

了解三进制，下面的问题便比较容易着手.

【例 8】 任给正整数 n，证明：存在 $n+1$ 个正整数 $k_0,k_1,\cdots,k_n$，使得对每个整数 a，$-\frac{3^{n+1}-1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3^{n+1}-1}{2}$，都唯一地确定出取值为 $-1,0,1$ 的数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，满足 $a=a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n$.

证 当 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 互相独立地取 0、1、2 三值之一时，

$$3^n x_n+\cdots+3x_1+x_0 \tag{1}$$

确定了 3^{n+1} 个数，其中最大者为 $2\cdot 3^n+\cdots+2\cdot 3+2=3^{n+1}-1$，最小者显然是 0.(1)中的数实际上是一个整数的三进制表示式，故这 3^{n+1} 个数互不相同. 即它们恰好给出了 $0,1,2,\cdots,3^{n-1}-1$.

在等式

$$\begin{aligned}&3^n x_n+\cdots+3x_1+x_0-(3^n+\cdots+3+1)\\=\ &3^n(x_n-1)+\cdots+3(x_1-1)+(x_0-1)\end{aligned}$$

中，令 $x_i-1=a_i(i=0,1,\cdots,n)$，则当 x_i 取值 0,1,2,时，a_i 取 $-1,0,1$ 之一，反之亦然. 故当 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 互相独立地取 $-1,0,1$ 时，

$$3^n a_n+\cdots+3a_1+a_0$$

给出了 $-\frac{3^{n+1}-1}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{3^{n+1}-1}{2}$（注意 $1+3+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$）. 故对任意 a，$-\frac{3^{n+1}-1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3^{n+1}-1}{2}$，都唯一地决定了 $a_n,a_1,\cdots,a_n$，使得

$$a=3^n a_n+\cdots+3a_1+a_0$$

所以符合问题要求的整数可取为 $k_i=3^i(0\leqslant i\leqslant n)$.

我们也可以用三进制的知识来解答第 6 节中的例 3：

考虑形如

$$3^{n-1}\cdot x_{n-1}+\cdots+3x_1+x_0 \tag{2}$$

的非负整数，其中 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 互相独立地取 0,1 之一，这显然得出 2^n 个数. 因(2)中的数实际上是整数的三进制表达

式，故它们互不相同，记为 $0=b_1<b_2<\cdots<b_{2^n}=\frac{3^n-1}{2}$.

令 $c_i=b_i+1(1\leqslant i\leqslant 2^n)$，则

$$1=c_1<c_2<\cdots<c_{2^n}=\frac{3^n+1}{2}$$

我们证明 $c_1,c_2,\cdots,c_{2^n}$ 中无三项成等差数列. 假若不然，设 $c_i<c_j<c_k$ 使得

$$c_i+c_k=2c_j$$

即

$$b_i+b_k=2b_j \tag{3}$$

但 b_i,b_j,b_k 都是形如(2)的数，其三进制表达式的数码中均不含 2，故 $2b_j$ 的三进制表示式中各项都含有 2. 由三进制表示的唯一性，(3)式只有在 $b_i=b_k$ 时才能成立，与假设 $b_i<b_k$ 矛盾. 故在 $1,2,\cdots,\frac{3^n+1}{2}$ 中取 2^n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_{2^n}$ 即符合问题的要求. 它们与第 6 节例 3 的解法中所取的 2^n 个数完全相同.

在下面的例子中，我们应用了数论中的两个定理，在一定程度上讲，知道这些定理(辅助命题!)是实现我们构造的关键.

【例 9】 证明：数列$\{2^n-3\}(n=2,3,\cdots)$中有一个无穷子数列，其中的项两两互素.（所谓子数列，是指取自原数列里的一些项，并且按原数列中同样的顺序写成的一个数列.）

证 可以用归纳法来构造一个这样的子数列. 我们的解法需要下面的结论：

设 $p\geqslant 3$ 是一个素数，则 p 整除 $2^{p-1}-1$.

这是数论中著名的费尔马小定理的一个特例，不难直接证明如下：

首先注意，对 $1\leqslant k\leqslant p-1$，$C_p^k=\dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ 是一个整数. 因 p 是大于 k 的素数，故 p 不会从 $k!$ 中约去，所以 C_p^k 实际上是 p 的倍数. 这样

$$2^p-2=(1+1)^p-2=C_p^1+C_p^2+\cdots+C_p^{p-1}$$

中各项都被 p 整除，故 p 整除 $2^p-2=2(2^{p-1}-1)$. 因 $p\geqslant 3$，这就推出 p 整除 $2^{p-1}-1$.

现在我们着手构造符合要求的无穷子数列 $\{2^{n_k}-3\}$ $(k\geqslant 1)$.

取 $n_1=2$. 若 $n_1,\cdots,n_k$ 已经取定，且 $2^{n_i}-3(1\leqslant i\leqslant k)$ 两两互素，将它们分解成素数的乘积，设在这些积中出现的所有不同素数为 $p_j(1\leqslant j\leqslant m)$.

令 $n_{k+1}=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)+2$. 对任一个 $j(1\leqslant j\leqslant m)$，$p_j$ 整除 $2^{p_j-1}-1$，故不难得知 p_j 整除 $2^{(p_1-1)\cdots(p_j-1)\cdots(p_m-1)}-1$. 从而 p_j 整除 $4\cdot 2^{(p_1-1)\cdots(p_j-1)\cdots(p_m-1)}-4$. 所以

$$2^{n_{k+1}}-3=(4\cdot 2^{(p_1-1)\cdots(p_m-1)}-4)+1$$

不被 p_j 整除，即 $2^{n_{k+1}}-3$ 与 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 都互素，从而与 $2^{n_i}-1(1\leqslant i\leqslant k)$ 都互素. 这样，数列 $\{2^{n_k}-3\}(k\geqslant 1)$ 就是满足问题要求的一个子数列.

按上面的构造法，我们可以写出子数列的前三项：2^2-

$3, 2^6-3, 2^{242}-3$.

下面的问题与第 5 节例 14 有些关联，请读者将两者比较一下.

【例 10】 对正整数 $n>1$ 的每个素约数，考虑其不超过 n 的最高次幂，所有这样方幂的和记为 $f(n)$. 证明：存在无穷多个 n 使得 $f(n)<n$.

证 通过计算得知：

$f(3\times5)<3\times5, f(5\times7)<5\times7, f(7\times11)<7\times11,$

$f(11\times13)<11\times13, f(13\times17)<13\times17, \cdots$

由这些例子似有理由相信：若 n 为相邻两个奇素数的积，则 $f(n)<n$. 如果这个猜想正确，因素数有无穷多个，显然得出了无穷多个符合问题中要求的 n.

我们用数论中著名的切比雪夫定理来证明上述猜想，设

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_k<p_{k+1}<\cdots$$

是全部素数. 切比雪夫定理断言（见华罗庚著《数论导引》，第五章）：

对所有 $k\geqslant1$，都有 $p_{k+1}<2p_k$.

这样，取 $n=p_kp_{k+1}\ (k>1)$，因为，$p_k\geqslant3$，故

$$p_k^2<p_kp_{k+1}<2p_k^2<p_k^3$$

所以，p_k 不超过 p_kp_{k+1} 的最高次方幂为 p_k^2. p_{k+1} 不超过 p_kp_{k+1} 的最高次幂显然就是 p_{k+1}，故

$$f(p_kp_{k+1})=p_k^2+p_{k+1}$$

因为 p_k、p_{k+1} 都是奇素数，所以 $p_{k+1}\geqslant p_k+2$. 再由上述定理即得

$$f(p_kp_{k+1})=p_k^2+p_{k+1}\leqslant p_k(p_{k+1}-2)+p_{k+1}$$
$$=p_kp_{k+1}-2p_k+p_{k+1}<p_kp_{k+1}$$

这就证明了，若 $n=p_kp_{k+1}(k>1)$，则有 $f(n)<n$.

8　反例与实例

数学中的命题可以为真(称为真命题),也可以为假(称为假命题),说明一个命题为真的办法是所谓的数学证明,即由命题中的条件及已知的公理、定理经过正确的逻辑推理来表明其真实性.要说明一个命题为假,有一种令人信服的直接方法,这种方法称为构造反例,即找一个满足命题条件但使结论不成立的例子,以否定原命题.

我们知道,命题 A 与其否定命题 $\overline{A}$(读作 A 否或非 A)必然一个为真,另一个为假.所以,否定 A 意味着肯定 $\overline{A}$ 为真实,构造命题 A 的反例就相当于用构造法来证明 $\overline{A}$.这样,构造反例时,我们在前几节中说过的一些想法便派上了用场.此外,正确地写出命题的否定形式是非常基本的事情,现在来看一个例子.

【例 1】　写出下面两个命题的否定命题,并分别构造反例:

(i)任意由互不相同的正整数组成的无穷数列中,都有两个不同项的和为完全平方.

(ii)一组对边相等及一组对角相等的四边形,必为平行四边形.

解　(i)所说的命题在逻辑学中称为全称命题,其特点是

命题中出现了“对所有的”、“对任意的”等等含义相同的量词，它的标准形式是：

对所有具有“某种性质”的“事物”，使得“某件事情发生”.将上面打着重号的部分都否定掉，就得到了全称命题的否定形式，这通常叫做特称命题，其形式为：

存在一个具有“某种性质”的“事物”，使得“某件事情不发生”.

我们不难写出(i)的否定命题：

存在一个由互不相同正整数组成的无穷数列，使得其中任意两个不同项的和都不是完全平方.

至于原命题的反例，可参看第 4 节中的例 10.

命题(ii)中虽没有明显地出现“对所有的”这类量词，但我们可以将它改写成出现这种量词的等价形式：

任何一组对边相等及一组对角相等的四边形，都是平行四边形.

其否定命题是：

存在一个一组对边相等及一组对角相等的四边形，它不是平行四边形.

我们来构造一个这样的四边形：

任取等腰三角形 ABC，在底边 BC 上取点 D，$BD>DC$，连结 AD，分别以 A，D 为圆心，以 DC，AC 为半径画弧交于 E 点，连结 AE，DE. 则不难证明四边形 $ABDE$ 符合要求（请读者自己画一个图）.

确定一个数学命题的真伪，常常要花费大量的精力和劳

动. 我们应当带着怀疑的目光从正反两个方面来考察命题，例如，可以先检查一些简单和容易试验的特例，也许，试验的结果已提供了反例，或者能提供构造反例的某些线索；也可能所审查的若干特例和命题一致，这多少使人有理由相信命题是真实的. 我们可以试着去证明它.

【例 2】 证明或否定命题：任何三角形的内角平分线能够组成一个三角形.

解 等腰三角形的内角平分线长比较容易计算. 我们先来看一种极端的情形，设等腰三角形的顶角充分接近 180°，则底角很小，两底角平分线长远大于顶角平分线长. 然而，不难看出，这样的三角形符合我们的命题.

再来看另一种极端情况，让等腰三角形的顶角很小，则其平分线长远大于两底角的平分线长，由此可作出命题的一个反例：

设等腰三角形 ABC 中，底边 $BC=1$，角平分线 $AA_1=100$. 两底角平分线记为 BB_1 及 CC_1 则 $BB_1=CC_1<\sqrt{2}BC\approx\sqrt{2}$，所以 $AA_1>BB_1+CC_1$，从而线段 AA_1，BB_1，CC_1 不能组成三角形.

【例 3】 证明或否定命题：任意两个三角形中，周长较长者面积也较大.

解 设三角形三边长为 a,b,c，由海伦公式，其面积为

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

它不仅与周长 $a+b+c$ 有关，还依赖于 $a+b-c$，$a+c-b$，$b+$

$c-a$ 的数值. 因此，当 $a+b+c$ 较大时，若 $a+b-c$. $a+c-b$, $b+c-a$之一很小时，我们可以期望面积也较小.

取 $a=b=c=2$，则此三角形的周长为 6，面积为$\sqrt{3}$；

取 $a=b=2$，$c=3.9$，则此三角形的周长为 $7.9>6$，而面积等于$\frac{1}{4}\times 3.9\times\sqrt{7.9\times 0.1}<\sqrt{7.9\times 0.1}<\sqrt{3}$.

这就否定了我们的命题.

【例 4】 众所周知，任何三角形的内角和为常数，证明或否定其下述的类比命题：

任何四面体的二面角之和都为常数.

解 为了方便起见，考虑正三角形(中心为 H)作为四面体的底，另一顶点 P 在过 H 的垂线上，则三个侧面两两所成的二面角都相等，记公共值为 α. 底面与三侧面所成的二面角也都相等，设共同值为 β. 从而诸二面角之和为 $3(\alpha+\beta)$.

让顶点 P 变动，先看第一种极端情况：P 充分接近于 H，此时，α 接近于 π，β 接近于 0，故二面角之和接近于 3π.

当 PH 之长足够大时，α 接近$\frac{\pi}{3}$，β 接近于$\frac{\pi}{2}$，故二面角之和接近于$\frac{2}{5}\pi$.

从这两种极端情况可见所说的类比命题是错误的(不难从上面的考虑，具体地作出两个二面角之和不等的四面体).

【例 5】 确定并证明，下面论断对哪些 n 成立($n>2$)：对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots$$

$(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0$

解 对任意 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$，交换 a_i,a_j 的位置后，所说的式子不变，我们不妨假设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$.

当 $n=3$ 时，左边前两项的和为 $(a_1-a_2)^2\geqslant 0$，第三项为 $(a_3-a_1)(a_3-a_2)\geqslant 0$，故不等式成立.

当 $n=5$ 时，同样可知左边前两项的和、末两项的和都不小于零. 第三项是 $(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)$，它也不小于零，故不等式成立.

对于 n 的其它值，不等式都不成立，我们来指出，存在一组实数 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，使不等式的左边小于零.

若 n 为偶数，取 $a_1<a_2=a_3=\cdots=a_n(n\geqslant 4)$，则左边只有第一项非零，它是 $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)$，为奇数个 $(n-1$ 个$)$负数相乘，故小于零.

若 $n\geqslant 7$ 为奇数，取 $a_1=a_2=a_3<a_4<a_5=a_6=\cdots=a_n$，左边只有一个非零项：

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\cdots(a_4-a_n)$$

前三个因式都是正数，而后面 $n-4$（为奇数）个因式都是负数，故它是负数，从而不等式不成立.

构造反例具有其自身的价值和趣味. 作出了否定一个命题的反例，经常意味着命题的假设条件不足以推出其结论，即表明了相同的条件下只可能得出较弱的结论，或者要保持原结论就必须适当地加强假设条件. 另一方面，已经证实了一个命题的真实性后，在寻求命题的某种改进时，也常需构造反例. 我们希望从较少的条件得到相同的结论，或者从相

同的条件下得到较强的结论，直到找出反例，以表明我们已达到了某种意义上的“不容改进”的程度. 请看几个例子.

【例 6】 (i)证明：在一个由正整数组成的等差数列中，若其中有一项是完全平方数，那么这一等差数列中就有无穷多项是完全平方数.

(ii)是否任何一个由正整数组成的等差数列中，都必有一项为完全平方？

解 (i)设等差数列的公差为 d，若其中有一项 a 为平方数，设为 m^2（m 是正整数），则（构造！）

$$(m+kd)^2=m^2+d(2km+dk^2)=a+dn$$

也是等差数列中的项，且它是完全平方数，让 $k=1,2,\cdots$，就构造出了该数列中的无穷个完全平方数.

(ii)答案是否定的，即(i)中的条件并非是多余的.

所有项都是 2 的数列中显然没有完全平方数，这是一个公差为 0 的等差数列. 也可以作一个由正整数组成的公差不为 0 的等差数列，其中无一项是完全平方，例如：取 $a_n=4n+2$ 则公差为 2 的数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 符合要求：

因为对任意 $n\geqslant 1$，$a_n=4n+2$ 为偶数，故不能是奇数的平方. 又偶数的平方被 4 整除，而 $4n+2$ 被 4 除余 2，所以它也不是偶数的平方，故对 $n\geqslant 1$，a_n 都不是完全平方数.

【例 7】 在 $\triangle ABC$ 中，P、Q、R 将其周长三等分，且 P、Q 在 AB 边上.

(i)证明：$\dfrac{(\triangle PQR)}{(\triangle ABC)}>\dfrac{2}{9}$.

(ii)(i)中的下界$\frac{2}{9}$是否可以换成更大的数？

解　(i)如图 34，在 AB 上取 Q' 点，使 $AQ'=PQ$，则

$$AQ'=PQ=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)$$

$$>\frac{1}{3}(AB+AB)=\frac{2}{3}AB,$$

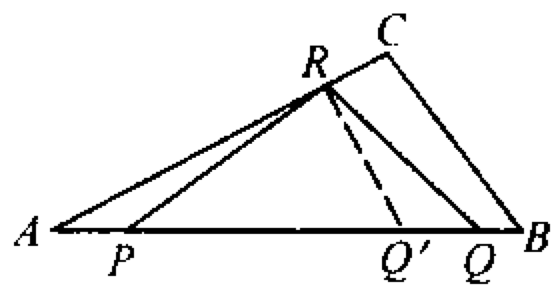


图 34

且 $AP<\frac{1}{3}AB$. 于是

$$AR=(AP+AR)-AP$$

$$=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-AP$$

$$>\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-\frac{1}{3}AB>\frac{1}{3}AC$$

故

$$\frac{(\triangle PQR)}{(\triangle ABC)}=\frac{(\triangle AQR)}{(\triangle ABC)}=\frac{\frac{1}{2}AR\cdot AQ'\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}$$

$$>\frac{\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}AC}{AB\cdot AC}=\frac{2}{9}$$

(ii)　回答是否定的，即(i)中的下界$\frac{2}{9}$是最佳的，为了指出这一点，我们考察一种极端情形：

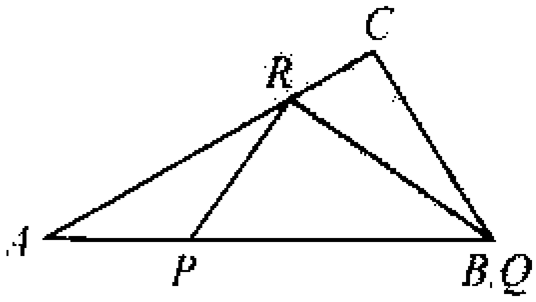


图 35

取一个周长为 1 的$\triangle ABC$，且 $AB=AC$，让 Q 与 B 重合

(图 35). 当 $BC\to 0$ 时，显然有 $AB=AC\to\frac{1}{2}$，$BP=\frac{1}{3}$，$AP\to\frac{1}{6}$，$AR\to\frac{1}{6}$，所以

$$\frac{(\triangle PQR)}{(\triangle ABC)}=\frac{(\triangle ABR)-(\triangle APR)}{(\triangle ABC)}\to\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}$$

【例 8】 设$\{a_n\}$是有下列性质的实数列：

$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$，而$\{b_n\}$则由下式定义：

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

(i) 证明：对所有 $n=1,2,\cdots$，有 $0\leqslant b_n<2$.

(ii) 是否存在实数 c，$0\leqslant c<2$，使得对所有的 n 有 $0\leqslant b_n<c$? 或者，除了有限个 n 的例外值，都有 $0\leqslant b_n<c$?

解 (i) $b_n\geqslant 0$ 是显然的，我们又有

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left[\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right]\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right]\end{aligned}$$

因已知 $a_{k-1}\leqslant a_k(k\geqslant 1)$，故$\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\leqslant 2$，所以

$$b_n\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right]=2\left[\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right]=2-\frac{2}{\sqrt{a_n}}<2$$

(ii)这是(i)中结论的加强,但并不正确.对任意 c,$0\leqslant c<2$,我们来构造一个无穷数列$\{a_n\}$,$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$,使得相应的数列$\{b_n\}$中,有无穷个项 $b_n>c$.这就说明了(i)中的结论 $b_n<2$ 是最佳可能的.

我们从比较简单的等比数列入手.首先,考虑到 b_n 的表达式中含有根号,故设

$$a_k=a^{-2k},k=0,1,2,\cdots$$

这里 $0<a<1$ 是待定参数,于是 $a_0=1$,$a_0<a_1<a_2<\cdots$,并且

$$\begin{aligned}b_n &= \sum_{k=1}^{n}(1-a^2)a^k = a(1+a)(1-a)\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}\\ &=a(1+a)(1-a^n)\end{aligned}$$

要使有无穷个 n 使 $b_n>c$,我们设法找一个正整数 N,使得

$$b_N=a(1+a)(1-a^N)>c \tag{1}$$

如已有这样的 N,则当 $n\geqslant N$ 时,都有

$$b_n=a(1+a)(1-a^n)\geqslant a(1+a)(1-a^N)>c$$

由(1)解出

$$0<a^N<1-\frac{c}{a(1+a)} \tag{2}$$

这样,我们应取 a 使$\frac{c}{a(1+a)}<1$,即 $a(1+a)>c$,由于 $0\leqslant c<2$,故 $0\leqslant\frac{c}{2}<1$.取 a 使$\sqrt{\frac{c}{2}}<a<1$,则 $0<a<1$,且

$$a(1+a)>a(a+a)=2a^2>c$$

对这样的 a,取 $N=\left[\log_a\left(1-\frac{c}{(a(1+a)}\right)\right]+1$($[x]$表示实数 x 的整数部分),则 a_N 满足(2),从而 $b_N>c$.

因此对$\sqrt{\frac{c}{2}}<a<1$，取 $a_n=a^{-2n}(n=0,1,2,\cdots)$，则数列$\{b_n\}$中有无穷个项 $b_n>c$. 实际上，从上面的讨论可以看出，我们作出的数列$\{b_n\}$中，除了 $b_1,b_2,\cdots,b_{N-1}$ 这有限个项可能例外，都有 $b_n>c$. 所以(i)中的结论甚至不容许作下面的改进：

存在实数 c，$0\leqslant c<2$，使得有无限个 b_n 满足 $0\leqslant b_n<c$.

有些命题本身就隐含着要求作出最佳的结果. 特别是对那些涉及极值的问题，我们经常构造出一个实例以表明得出的最大(小)值的估计是能够实现的，这当然意味了结论不容许再作改进(否则就有一个反例).

【例 9】 设集合 A 中的元素都是正整数，并且，对任意 $x,y\in A(x\neq y)$，都有 $|x-y|\geqslant\frac{xy}{25}$，问：$A$ 中至多有多少个元素?

解 设 A 中至多有 n 个元素，记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$ 为了确定 n，我们分两步走，先来作 n 的一个较好的上界估计. 由已知条件得出

$$a_{i+1}-a_i\geqslant\frac{a_ia_{i+1}}{25}$$

即

$$\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\geqslant\frac{1}{25},(i=1,2,\cdots,n-1) \tag{1}$$

将(1)中 $n-1$ 个式子相加，得出

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n-1}{25}$$

即

$$\frac{1}{a_1} \geqslant \frac{n-1}{25} + \frac{1}{a_n} > \frac{n-1}{25}$$

因 a_1 为正整数，故 $a_1 \geqslant 1$，从而

$$1 \leqslant a_1 < \frac{25}{n-1}，即\ n < 26$$

由于 n 是正整数，所以 $n \leqslant 25$. 但 n 的这个上界太大了，我们设法来改进这个估计.

在(1)中取 $i=2,\cdots,n-1$，并将诸式相加，得

$$\frac{1}{a_2} \geqslant \frac{n-2}{25} + \frac{1}{a_n} > \frac{n-2}{25}$$

由 $a_2 \geqslant 2$，便有

$$2 \leqslant a_2 < \frac{25}{n-2}，即\ n < \frac{29}{2}$$

所以 $n \leqslant 14$. 请注意，6 个元素的集合$\{1,2,3,4,5,7\}$具有问题中说的性质，所以 $n \geqslant 6$.

类似的方法得出

$$3 \leqslant a_3 < \frac{25}{n-3}，故\ n \leqslant 11$$

$$4 \leqslant a_4 < \frac{25}{n-4}，故\ n \leqslant 10$$

以及，从

$$5 \leqslant a_5 < \frac{25}{n-5}$$

得出 $n \leqslant 9$. 如果进一步考虑 a_6，从

$$6 \leqslant a_6 < \frac{25}{n-6}$$

一般只能得出较弱的估计 $n \leqslant 10$.

现在我们有理由相信 $n\leqslant 9$ 的估计不容再作改进，事实上，9 个元素的集合：

$$\{1,2,3,4,5,7,10,16,100\}$$

具有问题中要求的性质，从而 n 的最小值为 9.

【例 10】 在一个实数的有限数列中，任何七个连续项之和都是负数，而任何十一个连续项之和都是正数. 试问：这样一个数列最多能包含多少项?

解 设项数最多的数列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(共 n 项). 首先我们来作出 n 的上界估计：$n\leqslant 16$. 因假若 $n\geqslant 17$，则由已知条件得出

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(a_2+a_3+\cdots+a_8)+(a_3+a_4+\cdots+a_9)\\&\quad+\cdots+(a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{16})+(a_{11}+a_{12}+a_{17})<0\end{aligned}$$

另一方面，上式左边又等于

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\cdots+a_{11})+(a_2+a_3+\cdots+a_{12})+\cdots\\&\quad+(a_6+a_7+\cdots+a_{16})+(a_7+a_8+\cdots+a_{17})>0\end{aligned}$$

导出矛盾，所以 $n\leqslant 16$.

其次，$n=16$ 是可以实现的(即上述估计不容再改进). 我们来作一个这样的数列.

假定 $a_1,a_2,\cdots,a_{16}$是镜像对称的(从左向右看或反过来都一样)，即 $a_i=a_{17-i}(1\leqslant i\leqslant 8)$考虑(连续七项之和为$-1$)：

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=-1$$

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8=-1$$

$$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7=-1$$

$$a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6=-1$$

易知，$a_1=a_8$，$a_2=a_8$，$a_3=a_7$，$a_4=a_6$.

再类似地考虑连续十一项之和为$+1$，可得 $a_1=a_5$，$a_2=a_4$. 因此，这个数列为

$$a_1,a_1,a_3,a_1,a_1,a_1,a_3,a_1,a_1,a_3,a_1,a_1,a_1,a_3,a_1,a_1$$

再从连续七项之和为-1，连续十一项之和为$+1$得

$$5a_1+2a_3=-1,\ 8a_1+3a_3=1$$

即 $a_1=5$，$a_3=-13$. 故 16 项的数列

$$5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5$$

符合问题中的要求.

【例 11】 (i)在 7×7 的正方形方格纸中，选择 k 个小方格的中心，使得以它们中任意四个为顶点都不构成一个矩形（边与原来正方形的边平行），求出 k 的最大值.

(ii) 对 13×13 的正方形方格纸解决相同的问题.

解 我们先对一般的 $n\times n$ 方格纸来估计 k 的上界.

设在第 i 行取了 x_i 个小方格的中心，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$$

第 i 行中的 x_i 个中心共连得 $C_{x_i}^2=\dfrac{x_i(x_i-1)}{2}$ 条不同线段，因此 k 个中心共连得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-1)}{2}$ 条不同的平行于方格纸底边的线段. 又任一行的所有方格中心共连得 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 条不同线段. 因此，要使取出的中心中无四点构成矩形的顶点，则上述 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-1)}{2}$ 条线段在正方形底边上的投影不能有两个重合，从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-1)}{2}\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant n(n-1)+\sum_{i=1}^{n}x_i=n(n-1)+k$$

又不难证明

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\frac{k^2}{n}$$

所以

$$\frac{k^2}{n}\leqslant n(n-1)+k$$

故

$$k\leqslant\frac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$$

当 $n=7$ 时，$k\leqslant\frac{7+7\times5}{2}=21$，当 $n=13$ 时，$k\leqslant\frac{13+13\sqrt{49}}{2}=52$.

我们现在来指出当 $n=7$ 时，所得的估计 $k\leqslant21$ 是最佳的，即 k 的最大值为 21. 实际上，取图 36 中阴影正方形的中心即符合要求(注意每一行恰取三个方格).

当 $n=13$ 时，k 的最大值为 52，参看图 37(此时

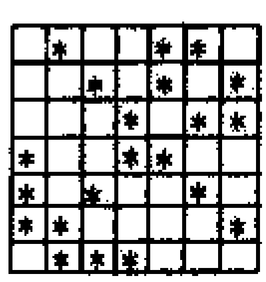


图 36

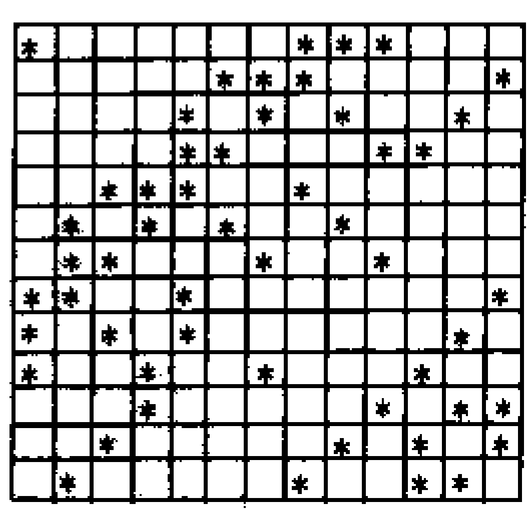


图 37

诸$x_i=4$).

【例 12】 求具有下述性质的最小正整数k:对整数$n\geqslant k$,将集合$\{1,2,\cdots,n\}$任意分成两个不交子集之并时,一定有一个子集含有三个不同的数,使其中两个之积等于第三个.

解 我们先证明:若$n\geqslant 96$,则$\{1,2,\cdots,n\}$具有问题中说的性质,假如结论不对,则有一个这样的n,及集合A,B满足

$$\{1,2,\cdots,n\}=A\cup B$$

$A\cap B=\varnothing$,并且A,B中任两个不同数的积不在同一集合中.下面来导出矛盾.

显然A,B中都至少有两个元素不妨设$2\in A$,我们考虑四种情况:

1) 设$3\in A,4\in A$,则因为$2\in A$,故$6=2\times 3\in B,8=2\times 4\in B,12=3\times 4\in B$,所以$48=6\times 8\in A$,从而$96=2\times 48\in B$.但$96=8\times 12$,于是$96\in A$,矛盾.

2) 设$3\in A,4\in B$,则$6=2\times 3\in B,24=4\times 6\in A$,故由$3\times 8=24$知$8\in B$,所以$48=6\times 8\in A$.但又有$48=2\times 24\in B$.矛盾.

3) 设$3\in B,4\in A$,则$8=2\times 4\in B,24=3\times 8\in A$,所以$48=2\times 24\in B$,故$6\in A$,而$24=4\times 6\in B$,矛盾.

4) 设$3\in B,4\in B$,则$12=3\times 4\in A$,所以$6\in B$,故$24=4\times 6\in A$,但$24=2\times 12\in B$,矛盾.

这就证明了上述的结论,从而问题中说的最小正整数$k\leqslant 96$.

我们来指出$k>95$.这只要取(考察上述证明!)

$$\{1,2,\cdots,95\}=A\cup B$$

其中

$$A=\{1,2,3,4,5,7,9,11,13,17,$$
$$19,23,48,60,72,80,84,90\}$$
$$B=\{6,8,10,12,14,15,16,18,20,$$
$$21,22,24,25,\cdots,47,49,\cdots,59,$$
$$61,\cdots,71,73,\cdots,79,81,82,83,$$
$$85,\cdots,\cdots,89,91,\cdots,95\}$$

容易验证,A 或 B 中无两个不同数的积在同一集合中.

这就求得了 k 的最小值是 96.

【例 13】 设 $n>2$,对任意 n 个互不相同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,确定在诸和 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 中,互不相同的个数的最大值及最小值.

解 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$a_1<a_2<\cdots<a_n$,用 $l(A)$ 表示$a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$中不同数的个数.

1) 我们先求 $l(A)$的最大值. 因为 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 共有 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$项,所以 $l(A)\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$.

这个上界不容改进,例如取

$$a_i=2^{i-1},(i=1,2,\cdots,n)$$

由二进制知识可见,$a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$两两不同,即对于 $A=\{1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}\}$,恰有 $l(A)=\frac{n(n-1)}{2}$. 所以 $l(A)$的最大值为$\frac{n(n-1)}{2}$.

2) 现在来决定 $l(A)$的最小值,由 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,

可见

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_1+a_n<a_2+a_n<a_3+a_n$$
$$<\cdots<a_{n-1}+a_n \qquad (1)$$

故 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 中至少有 $2n-3$ 个不同的数,即 $l(A)\geqslant 2n-3$.

这个估计也是最佳的,我们来构造一个集合 A,使得 $l(A)=2n-3$. 为此,必须选取 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,使每个和 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 等于(1)中的和 a_1+a_j 之一$(j=2,\cdots,n)$,或者 a_i+a_n 之一$(i=2,\cdots,n-1)$.

事实上,若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列,则 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 具有上述性质:

设 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d>0$,则

$$a_k=a_1+(k-1)d=a_n-(n-k)d(1\leqslant k\leqslant n)$$

考虑 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$,当 $i+j\leqslant n$ 时,

$$\begin{aligned}a_i+a_j&=a_1+(i-1)d+a_i+(j-1)d\\&=a_1+a_1+(i+j-2)d=a_1+a_{i+j-1}\end{aligned}$$

当 $i+j>n$ 时,则有

$$\begin{aligned}a_i+a_j&=a_1+(i-1)d+a_n-(n-j)d\\&=a_n+a_1+(i+j-n-1)d=a_{i+j-n}+a_n\end{aligned}$$

故对这样的 A,$l(A)=2n-3$. 所以 $l(A)$ 的最小值为 $2n-3$.

习　　题

1. 证明：不存在四个数 a,b,c,d 使得

$$0<a<b<c<d,a+d=b+c,a^2+b^2=b^2+c^2$$

2. 设 x,y,z 是三个正实数，证明

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-xz+x^2}$$

3. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明：$\sin x<x<\operatorname{tg}x$.

4. 设 x,y,z 都是实数，并满足

$$x+y+z=a,x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2},(a>0)$$

证明：$0\leqslant x,y,z\leqslant\frac{2}{3}a$.

5. 任给 8 个非零实数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$. 证明：六个数 $a_1a_3+a_2a_4$，$a_1a_5+a_2a_6$，$a_1a_7+a_2a_8$，$a_3a_5+a_4a_6$，$a_3a_7+a_4a_8$，$a_5a_7+a_6a_8$ 中，至少有一个是非负的.

6. 设 $0<x,y,z<1$，证明：$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

7. 设 a,b,c 是实数($a\neq0$)，满足

$$\begin{cases}a+2b+c>0\\a_2-2\sqrt{2b}+c<0\end{cases}$$

证明：$b^2<ac$.

8. 设$\overline{abc}$是十进制中的三位素数. 证明：b^2-4ac 不是完全平方数.

9. 证明：

$$\frac{(1+\sqrt{1990})^{2000}-(1-\sqrt{1990})^{2000}}{\sqrt{1990}}$$

是整数.

10. 设 n 为正整数,则

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

11. 给定了 $2n$ 个互不相同的实数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$,并将它们按如下法则填入 $n\times n$ 的方格表:在第 i 行与第 j 列相交的方格内填入数 a_i+b_j. 证明,若各列数的乘积彼此相等,则各行数的积也彼此相等.

12. 一个立方体的 7 个顶点标上数 0,一个顶点上标 1,可任取一棱,将该棱两个顶点数加 1. 问这样的操作能否使 8 个数都被 3 整除.

13. 数列

$$1,0,1,0,1,0,3,\cdots$$

中,每一项等于它前面 6 项的和的末位数字,证明:数列中没有连续的 6 项构成 0,1,0,1,0,1.

14. 证明:存在十条直线,它们恰好交得 31 个交点.

15. 设 a,b,c,d 都是正数,证明:存在一个三角形,其三边之长分别为

$$\sqrt{b^2+c^2},\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd},\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$$

并计算这个三角形的面积.

16. 证明,空间中存在具有下述性质的有限点集.

1)这些点的全体不共面.

2)对点集中任意两点 A,B,可找到点集中另两点 C,D,使得直线 AB 与直线 CD 平行但不重合.

17. 给定正整数 n,方程组

$$\begin{cases}x_1^2+\cdots+x_n^2=y^3\\x_1^3+\cdots+x_n^3=z^2\end{cases}$$

有正整数解.

18. 试找出 8 个自然数 a_i,使得

$$\sqrt{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1-1}}+\cdots+\sqrt{\sqrt{a_8}-\sqrt{a_8-1}}=2$$

19. 能否在 50×50 的数表中填入 1 到 2500 的整数,使得每行、每列的和都是奇数?

20. 能否在 17×17 的数表中填上不全为零的数,使每格所填的数恰好等于其相邻各格所填的数之和?(有公共边的方格称为相邻的格子).

21. 设 $n>1$ 是奇数,证明,存在 n 个正整数,组成公差不为零的等差数列,它们的积是一个完全平方数.

22. 证明:平面上存在三个点,使得(平面上)任一点到这三点的距离中至少有一个无理数.

23. 证明:有无穷多个正整数不能表示成一个素数及一个完全平方数的和.

24. 证明:存在正整数 k,使得对所有正整数 n,数 n^4+k 都是合数.

25. 证明:存在无穷多组正整数 $a<b<c<d$,使得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

26. 证明：任何整数都可以表示成五个整数的立方和.

27. 证明：有无穷多对正整数 k,n 使得

$$1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n$$

28. 给定 n 个不同的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 由它们作所有可能的和，证明其中至少有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个两两不等的和数.

29. 设数列 $\{a_n\}$，$n\geqslant 1$，a_1 是正整数，$a_n=\left[\frac{3}{2}a_{n-1}\right]+1$. 证明：存在 a_1，使数列的前 10^5 项都是偶数，而第 10^5+1 项是奇数. 这里，$[x]$表示 x 的整数部分.

30. 证明：存在整系数多项式 $p(x)$，使得当 $0.08\leqslant x\leqslant 0.12$ 时，有 $|p(x)-0.1|<0.0001$.

31. 证明，存在一个二元二次实系数多项式 $p(x,y)$，具有下列性质：$2p(x,y)$ 是三个不同的二元一次多项式的平方和，而 $2p^2(x,y)$ 是三个不同的二元一次多项式的四次方之和.

32. 设 $n>2$ 是给定正整数，$V_n=\{kn+1\mid k=1,2,\cdots\}$，一个数 $m\in V_n$，如果不存在两个数 $p,q\in V_n$，使 $pq=m$，则称 m 为 V_n 中的不可约数. 证明：存在一个数 $r\in V_n$，这个数可用多于一种方式分解成 V_n 中的若干个不可约数的积.

33. 设正整数 m 和 k 互素，证明：存在整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，使得每个积 a_ia_j（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,k$）被 mk 除得的余数互不相同.

34. 证明：有无穷多个正整数 n 整除 2^n+1.

35. 证明：存在无穷多个互不相同的正整数，它们以及它们中

任意有限个不同数的和都不是好数(好数的定义参见第 6 节例 1).

36. 证明:方程

$$x^2+y^2=z+z^5$$

有无穷多组正整数解且$(x,y)=1$.

37. 证明:有无穷个 n 使得 2^n+n^2 是 100 的倍数.

38. 证明:存在整系数的二次三项式 $f(x)$,使得对于十进制的任意全由数码 1 组成的自然数 n,$f(n)$也是全由数码 1 组成的自然数.

39. 证明:对任意正整数 n,存在其十进制表示中仅含数码 0 和 1 的正整数 m,使得 $S(m)=n$,及 $S(m^2)=n^2$. 这里,$S(x)$是正整数 x 的十进制表示中数码的和.

40. 设 a,b 是互素的正整数,证明:等差数列$\{ak+b\}(k\geqslant 1)$中有一个无穷子数列,其中的项两两互素.

41. 试给出第 7 节例 4 的一种非构造性解法.

42. 证明或否定命题:三边长和面积的数值都是整数的三角形,必有一条高长为整数.

43. 设 $n\geqslant 3$ 是固定的正整数,确定具有下述性质的最小正整数 $r(n)$:将集合$\{1,2,\cdots,r(n)\}$任意分成两个不交非空子集的并,必有一个子集中包含 n 个(不必不同的)数 x_1,$\cdots$,x_n,使得

$$x_1+\cdots+x_{n-1}=x_n$$

44. 证明第 3 节例 10 的注释中提出的命题.

45. 两人轮流从两个箱子中取球,每人一次可从一个(也仅从

一个)箱子中取任意多个球，最后取尽球的人为胜. 若第一个箱子中有73个球. 第二个箱子中有134球. 证明：先取的人一定可以获胜.

46. n个空格排成一行，第一格中放入了一枚棋子，每步可向前移1,2或3格，两个人交替走，以先到最后一格为胜. 试确定：是先走者还是后走者必胜？怎样取胜？

47. 有51个城市分布在边长为1000公里的正方形区域内，证明：可以在该区域内铺设长度不超过11000公里的公路网，使所有城市都可以通过公路网连结起来.

48. 有27个外形一样的硬币，已知其中有一个伪币且较其它硬币为轻. 证明：用天平称量三次一定可以指出伪币.

49. 能否将$1,2,\cdots,mn$这mn个正整数分为m组，每组n个数并且各组的和都相等. 这里m,n是正整数且$n>1$. 如果能，怎样分？

50. 若已写出了$k(\geqslant 2)$个数，则下一个数(即第$k+1$个数)可写成已经写出了的数中任两个或多个数的算术平均数，且已经写出了的数不许重复. 如果开始写出了0,1这两个数.

1) 证明：按上述方式可写出$\frac{1}{n}$(n为任意正整数).

2) 证明：可写出区间(0,1)中的任何有理数.

习题解答概要

1. 已知条件表明，数 a,d 和 b,c 可以作为有公共斜边的两个直角三角形的直角边长（图 38），并且这两个直角三角形面积相等. 因而斜边上的高相等，即 $h=H$. 又有

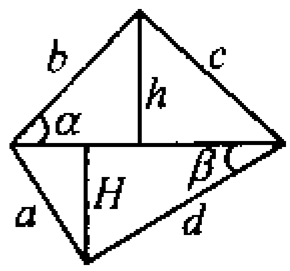


图 38

$$h\text{ctg}\alpha+h\text{ctg}(90^\circ-\alpha)$$
$$=H\text{ctg}\beta+H\text{ctg}(90^\circ-\beta)$$

而 $h=H$，所以

$$\text{ctg}\alpha+\text{tg}\alpha=\text{ctg}\beta+\text{tg}\beta$$

即 $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$，由于 $0<\alpha,\beta<90^\circ$，故 $\alpha=\beta$. 由此推出 $a=c$ 及 $b=d$，这和已知条件 $0<a<b<c<d$ 矛盾.

2. 作四面体 $O\text{-}ABC$，使得 $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=60^\circ$，且 $AO=x,BO=y,CO=z$. 考察三角形 ABC 即得结论.

3. 参考第 2 节例 6 的方法.

4. 在直角坐标系中，已知条件意味着，直线 $x+y=a-z$ 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}-z^2$ 相交，从而圆心 $(0,0)$ 到直线的距离不超过圆半径长，即有

$$\frac{|z-a|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{2}-z^2}$$

解得 $0\leqslant z\leqslant\dfrac{2}{3}a$. 同理可证 $0\leqslant x,y\leqslant\dfrac{2}{3}a$.

5. 在复平面上考虑四个向量 $\boldsymbol{OA},\boldsymbol{OB},\boldsymbol{OC},\boldsymbol{OD}$（$O$ 是原点），A，

B,C,D 对应的复数依次是 $a_1+a_2\mathrm{i}, a_3+a_4\mathrm{i}, a_5+a_6\mathrm{i}, a_7+a_8\mathrm{i}$. 四个向量两两所成的角中至少有一个不超过 $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$，不妨设 $\boldsymbol{OA}$ 和 $\boldsymbol{OB}$ 的夹角 $\leqslant 90^\circ$，由余弦定理即推出 $a_1a_3+a_2a_4\geqslant 0$.

6. 如图，考虑边长为 1 的正三角形 ABC. 点 A_1, B_1, C_1 分别在边 BC, CA, AB 上，使得 $AC_1=x, CB_1=y, BA_1=z$. 则 $BC_1=1-x, CA_1=1-z, AB_1=1-y$.

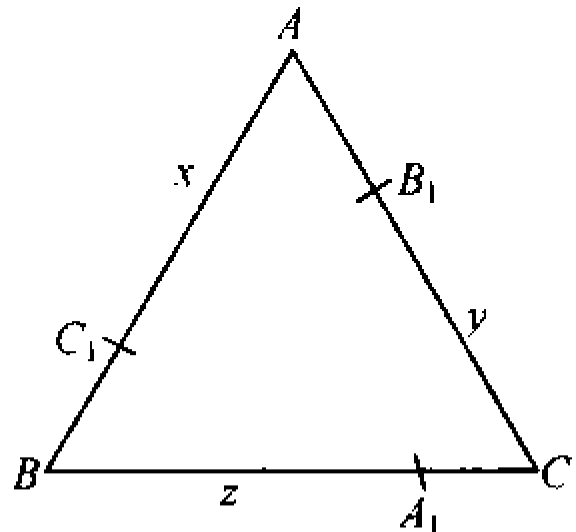


图 39

易知

$$(\triangle AB_1C_1)=\frac{\sqrt{3}}{4}x(1-y), (\triangle CA_1B_1)=\frac{\sqrt{3}}{4}y(1-z),$$

$(\triangle BA_1C_1)=\frac{\sqrt{3}}{4}z(1-x), (\triangle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 由

$$(\triangle AB_1C_1)+(\triangle CA_1B_1)+(\triangle BA_1C_1)<(\triangle ABC)$$

即得所说的不等式.

7. 考虑二次函数 $f(x)=ax^2+2bx+c$ 已知条件意味着 $f(1)>0, f(-\sqrt{2})<0$，由此导出结论.

8. 三位数中共有 139 个素数，逐一检验甚为麻烦. 采用反证法，假设有一个素数 $p=\overline{abc}$，使 b^2-4ac 是完全平方数. 论证的出发点是考虑二次方程

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

方程(1)的两个根是

$$x_1=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}),x_2=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})\quad(2)$$

显然,现在 x_1 和 x_2 是有理数.另一方面,我们有

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\quad(3)$$

注意,由定义知 $f(10)=p$.在(3)中取 $x=10$ 得到

$$a(10-x_1)(10-x_2)=p\quad(4)$$

但上式左边两个括号内的数未必是整数,因此不能直接由(4)导出有用的结果.

我们从(2)看到,有理数 x_1,x_2 乘以分母 $2a$ 后都成为整数.现在将(4)变形为

$$(20a-2ax_1)(20a-2ax_2)=4ap\quad(5)$$

(5)式右边的 p 是素数,左边两因数都是(非零)整数,故其中必有一个被 p 整除,无妨设 $20a-2ax_1$ 是 p 的倍数,则 $|20a-2ax_1|\geqslant p$.结合(5)知 $|20a-2ax_2|\leqslant 4a$.但方程(1)中,系数 a,b,c 均非负,故其实根必非正数,从而

$$|20a-2ax_2|=20a-2ax_2\geqslant 20a>4a$$

矛盾!

上面论证的关键并非是作出辅助方程(1)(在反证法假设下,这一手续极其自然),而是对它作进一步的论证.请参考第3节中的例子.

9. 考虑 $f(x)=(1+x)^{2000}-(1-x)^{2000}$.这显然是一个整系数多项式.又对于任意 x 有

$$f(-x)=-f(x)$$

即 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 只含奇次项,因而 $\frac{f(x)}{x}$ 是只

含偶次项的整系数多项式，于是$\dfrac{f(\sqrt{1990})}{\sqrt{1990}}$是整数.

10. 方程 $x^{2n+1}-1=0$ 的 $2n+1$ 个根为 $x_0=1, x_k=\cos k\theta+i\sin k\theta, \overline{x_k}=\cos k\theta-i\sin k\theta$.（$k=1,2,\cdots,n$）这里 $\theta=\dfrac{2\pi}{2n+1}$. 又 $(x-x_k)(x-\overline{x_k})=x^2+1-2x\cos k\theta(k=1,2,\cdots,n)$. 于是一方面，

$x^{2n+1}-1=(x-1)(x^2+1-2x\cos\theta)\cdots(x^2+1-2x\cos n\theta)$

另一方面，

$$x^{2n+1}-1=(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1)$$

综合起来，得出恒等式

$$\begin{aligned}&x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1\\&=(x^2+1-2x\cos\theta)\cdots(x^2+1-2x\cos n\theta)\end{aligned}$$

取 $x=1$，给出

$$\begin{aligned}2n+1&=2^n(1-\cos\theta)\cdots(1-\cos n\theta)\\&=2^{2n}\sin^2\frac{\pi}{2n+1}\cdots\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}\end{aligned}$$

由于$\dfrac{k\pi}{2n+1}(k=1,\cdots,n)$都是锐角，故 $\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}$均为正数，将上面等式两边开平方即得结论.

11. 设 n 个列数之积的共同值为 c. 考虑多项式

$$f(x)=(x+a_1)\cdots(x+a_n)-(x-b_1)\cdots(x-b_n)\quad(1)$$

其次数低于 n. 但由假设，对 $j=1,\cdots,n$ 都有

$$f(b_j)=(a_1+b_j)\cdots(a_n+b_j)=c$$

即 $f(x)-c$ 至少有 n 个互不相同的根 $b_1,\cdots,b_n$，从而对一

切 x，都有 $f(x)-c=0$. 特别地由(1)知

$$c=f(-a_i)=-(-a_i-b_1)\cdots(-a_i-b_n)$$
$$=(-1)^{n-1}(a_i+b_1)\cdots(a_i+b_n)$$

（参考第 3 节例 3 的注.）

12. 答案是不能. 选出四个顶点，其中任两点无棱相连，设这四点所标数之和为 x，其余顶点所标数之和为 y. 则 $I=x-y$ 在操作下不变，开始时易知 $I=\pm1$，故不可能使八个数都被 3 整除.

13. 论证的关键在于作一个辅助函数，将所说数列中每连续的 6 项 x,y,z,u,v,w 对应于一个数，即是

$$2x+4y+6z+8u+10v+12w \text{ 的个位数字}$$

如果 x,y,z,u,v,w,r 是连续 7 项，按定义，r 等于 $x+y+z+u+v+w$ 个位数字，那么，y,z,u,v,w,r 所对应的数减去 x,y,z,u,v,w 所对应的数所得的差等于

$$(2y+4z+6u+8v+10w+12r)\text{ 的个位数}$$
$$-(2x+4y+6z+8u+10v+12w)\text{ 的个位数}$$
$$=12r\text{ 的个位数}-2(x+y+z+u+v+w)\text{ 的个位数}$$
$$=10(x+y+z+u+v+w)\text{ 的个位数}=0$$

所以，在每一项换成它后面一项时，连续 6 项所对应的数保持不变. 由于数列开始 6 项对应的数为

$$2\times1+4\times0+6\times1+8\times0+10\times1+12\times0$$
$$=18\text{ 的个位数}=8$$

故数列中每连续 6 项对应的数都是 8.

如果 0,1,0,1,0,1 可作为数列中连续 6 项出现，则这

6 项对应的数为

$$2\times0+4\times1+6\times0+8\times1+10\times0+12\times1$$

$$=24 \text{ 的个位数}=4$$

与上面的结论矛盾.

14. 方程组

$$\begin{cases}a+b+c=10\\ ab+bc+ca=31\end{cases}$$

有(唯一)一组正整数解 $a\leqslant b\leqslant c$ 为 $a=2,b=3,c=5$. 作适当的三簇平行线即可.

15. 以 $a+b,c+d$ 为边长作一个矩形 $ABCD$,分别在 AB,AD 边上取 E,F 点使得 $AE=b,AF=c$ 则三角形 CEF 符合要求. 其面积是 $\frac{1}{2}(ac+bc+bd)$.

16. 取三个相等的长方体,将它们一个挨着一个地排好,则中间一个长方体的八个顶点与两旁两个长方体的中心组成的十元点集符合要求.

17. 取 $x_1=\cdots=x_n=n$,这是符合要求的一组解.

18. 取 $a_i=(2i+1)^2,(i=1,\cdots,8)$. 由于

$$\sqrt{a_i}-\sqrt{a_i-1}=2i+1-2\sqrt{i(i+1)}=(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})^2$$

故易知所说的和为 $\sqrt{9}-\sqrt{1}=2$.

19. 答案是能. 将数表黑白相间地染色,在所有白格上填奇数,黑格上填偶数. 这样,每行、每列均各有 25 个奇数(共 1250 个奇数),易知这种填法符合要求.

20. 答案是能,下面是一种填法:第一行中(从左至右)依次填

1,1,0,−1,−1,0,1,1,0,−1,−1,0,1,1,0,−1,−1；第二行各格中均填 0；第三行各格填上与第一行相应格中数之相反数；第四行各格中均填 0. 第五行至第八行与第一至第四行的填法相同. 如此进行，最后，第十七行与第一行的填法相同. 易知这种填数法符合要求.

21. 请注意，若允许公差为 0，则问题极其平凡. 考虑一般形式的等差数列 $a+dk(k=1,2,\cdots)$，其中 a,d 均是非负整数，而 $d\neq0$. 然而，这些项中涉及整数的和，不易决定它们的积是否为平方数.

因此，我们现在取 $a=0$（从而两个变量 a,d 现在仅保留 d 作为参量），则 n 个数 $d,2d,\cdots,nd$ 的积为 $n!\ d^n$. 取 $d=n!$，则所得的积 $(n!)^{n+1}$ 是平方数（注意 n 为奇数）.

22. 考虑较简单的情形：三点 A,B,C 在一条直线上.

设 P 是平面上任一点，如果（一个特殊情形！）B 为 AC 的中点，则（由三角形中线公式）有关的线段 PA,PB,PC 及 AB 之间有一个适用的联系：

$$PA^2+PC^2-2PB^2=2x^2 \quad (1)$$

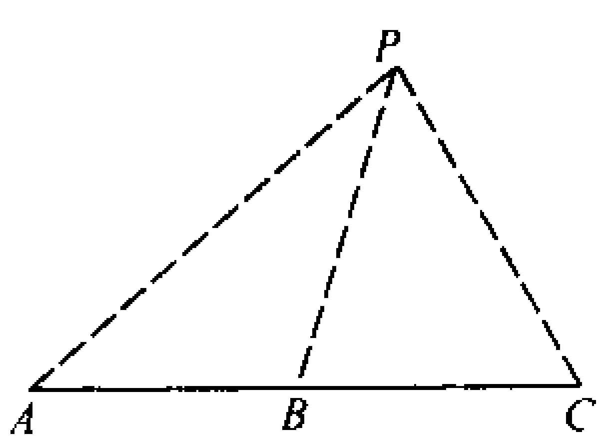


图 40

这里 $x=AB=BC$，是一个待定参量.（注意，上述等式在 P 与 A,B 共线时仍然成立）.

现在取 $x^2=\sqrt{2}$ 为无理数，则(1)式左边也是无理数，从而 PA,PB,PC 中必有一个无理数.

23. 取 y 具有 $3k+2$ 形式(k 为整数),则 y^2 不能表示成一个素数及一个完全平方数的和.

24. 取 $k=4a^4$(a 为正整数),分解 n^4+4a^4 得出其一个真因子.

25. 由恒等式 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n(2n+1)}$ 即得出证明.

26. 恒等式

$$6x=(x+1)^3+(x-1)^3+(-x)^3+(-x)^3$$

表明,若一个整数是 6 的倍数,则它可表示成四个整数的立方和,更是五个整数的立方和(取一个数为零).

对一般情形,将整数按模 6 分类来论证,例如,当 $n=6k+2$ 时,$n-2^3=6(k-1)$,等等.

另一个直接的方法是,注意 $n-n^3$ 总被 6 整除,而

$$n=6\cdot\frac{n-n^3}{6}+n^3$$

将 $\frac{n-n^3}{6}$ 当作上面恒等式中的 x 即可.

27. 所说等式可变形为

$$n^2+n=2k(k+1)$$

即

$$(2n+1)^2-2(2k+1)^2=-1$$

参考第 7 节例 4.

28. 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,则

$a_1,a_2,\cdots,a_n$

$$a_n+a_1, a_n+a_2, \cdots, a_n+a_{n-1}$$

$$a_n+a_{n-1}+a_1, a_n+a_{n-1}+a_2, \cdots, a_n+a_{n-1}+a_{n-2};$$

……

$$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1$$

显然形成一个严格递增的数列. 这共有 $n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n+1)$ 项，得出了 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个互不相等的和.

29. 取(例如) $a_1=2^{100000}-2$ 即可.

30. 参考第 5 节例 5 的解法.

31. 设 u,v,w 是三个待定的二元一次函数，使得

$$2p(x,y)=u^2+v^2+w^2$$

则

$$4p^2(x,y)=u^4+v^4+w^4+2u^2v^2+2v^2w^2+2w^2u^2$$

若(一个充分条件!)

$$u^4+v^4+w^4=2u^2v^2+2v^2w^2+2w^2u^2 \tag{1}$$

则显然 $2p^2(x,y)=u^4+v^4+w^4$.

而(1)可分解为

$$(u+v+w)(u+v-w)(u+w-v)(v+w-u)=0$$

于是，若 $u+v=w$，则 u,v,w 满足(1). 我们取(例如)

$$u=x+y, v=x+2y, w=u+v=2x+3y$$

则 $p(x,y)=3x^2+9xy+7y^2$ 符合要求.

32. 设 $a=n-1, b=2n-1$，则 a^2, b^2 和 a^2b^2 都属于 V_n. 由于 $a^2<(n+1)^2$，故 a^2 是 V_n 中的不可约数. 若 b^2 在 V_n 中可分解，设

$$b^2=(cn+1)(dn+1),c,d\text{ 为正整数}$$

则 $cdn+(c+d)=4n-4$，故 $cd<4$. 从而 c,d 中有一个为 1，设 $c=1$，则 $4n-5=d(n+1)$. 故 $n+1$ 整除 $4n-5=4(n+1)-9$. 所以 $n+1$ 整除 9. 由 $n>3$ 知 $n=8$，这就证明了. 若 $n\neq 8$，则 b^2 是 V_n 中不可约数.

同样可证，当 $n\neq 5$ 时，ab 是 V_n 中的不可约数. 这样，当 $n\neq 5,8$ 时，V_n 中的数 a^2b^2 可以用两种方式分解成 V_n 中不可约数的积，即 $a^2b^2=a^2\cdot b^2=ab\cdot ab$.

当 $n=5$ 时，有 $1296=6\times 6\times 6\times 6=16\times 18$.

当 $n=8$ 时，有 $1089=3^2\times 11^2=33\times 33$.

33. 取 $a_i=ki+1.(1\leqslant i\leqslant m)$，$b_j=mj+1,(1\leqslant j\leqslant k)$. 若有 a_ib_j 及 a_sb_t 被 mk 除得相同的余数，则 $a_ib_j-a_sb_t$ 被 mk 整除，即

$$\begin{aligned}&(ki+1)(mj+1)-(ks+1)(mt+1)\\&=km(ij-st)+m(j-t)+k(i-s)\end{aligned}$$

被 mk 整除. 推出 m 整除 $k(i-s)$. 由于 m 与 k 互素，故 m 整除 $i-s$. 但 $0\leqslant|i-s|<m$，这只有 $i=s$，同理 $j=t$. 从而如此选择的 a_i,b_j 符合要求.

34. 取 $n=3^m(m\geqslant 1)$ 即可. 用归纳法来证明. 本题不必归纳构造.

35. 设 $2=p_1<p_2<\cdots<p_{n-1}<p_n<\cdots$，是全体素数，则无穷个数

$$2,2^2\times 3,\cdots,2^2\times 3^2\times\cdots\times p_{n-1}^2\times p_n,\cdots$$

便符合要求.

36. 注意：方程可改写成 $z((z^2)^2+1)=x^2+y^2$. 我们取 $z=a^2+b^2$(a,b 都是正整数)，则(第 6 节例 2 中的恒等式)：

$$z(z^4+1)=(a^2+b^2)((z^2)^2+1)=(az^2+b)^2+(a-bz^2)^2$$

这得出了方程的无穷组正整数解. 为了证明有无穷多组满足 $(x,y)=1$ 的解. 我们取 $b=1$ 来尝试. 这时

$$x=a^5+2a^3+a+1, y=a^4+2a^2-a+1, z=a^2+1$$

a 为正整数.

设对某个 a，$(x,y)>1$，则 (x,y) 有素因子 p. 故 p 整除 $x-ay$，即 p 整除 a^2+1. 但 $x=a^3(a^2+1)+a(a^2+1)+1$，而 p 整除 x，故 p 整除 1，矛盾. 于是 $(x,y)=1$. 这就得出了无穷多组符合要求的解.

37. 问题等价于证明有无穷多个 n，使得 4 整除 2^n+n^2 且 25 整除 2^n+n^2. 易见，4 整除 2^n+n^2 意味着 n 为偶数，设 $n=2m$. 于是只要找无穷个 m，使得 25 整除 $4^{m-1}+m^2$.

设 $m=25k+l$ 则

$$4^{m-1}+m^2=25(25k^2+25l)+(4^{25k}\cdot 4^{l-1}+l^2)$$

取 $l=1$，我们希望确定无穷个 k，使得 25 整除 $4^{25k}+1$.

由二项式定理，可见

$$4^{25k}=(4^5)^{5k}=(1024)^{5k}=100A+24k^{5k}$$

A 是一个整数. 而 24^r，当 $r=1,2,\cdots$ 时，末两位周期地为 24，76，24，76，…，于是，若 $5k$ 是奇数(即 k 是奇数)，则 4^{25k} 的末两位为 24. 所以，若 $k=2t+1$，则 25 整除 $4^{25k}+1$. 这时，$m=25k+1=50t+26$. 或 $n=100t+52$(t 为任意正整数)，我们得出了无穷多个符合要求的正整数.

38. 可取 $f(x)=90x^2+20x+1$. 事实上,设 $n=\underbrace{1\cdots1}_{k个}$,则 $9n+2=1\underbrace{0\cdots0}_{k-1个}1$,故

$$10n(9n+2)=\underbrace{11\cdots10}_{2k个}$$

于是 $f(n)=\underbrace{1\cdots1}_{2k+1个}$.

39. 归纳构造. $n=1$ 时,取 $m=1$ 即可. 若已有 m 使 $S(m)=n$. $S(m^2)=n^2$. 我们取

$$k=10^l\cdot m+1, 则\ k^2=10^{2l}\cdot m^2+2m\cdot 10^l+1$$

令 l 很大使 $10^l>m$(例如取 $l=m$),则 k 的十进制表示中仅含数码 0 和 1 ,且

$$S(k)=S(m)+1=n+1$$
$$S(k^2)=S(m^2)+2S(m)+1=(n+1)^2$$

40. 我们证明更强的结论:$\{ak+b\}(k\geqslant1)$ 中有一个两两互素且都和 b 互素的无穷子数列. 下面归纳地定义这个数列.

取 $u_1=a+b$,显然 $(u_1,b)=1$. 若 $u_1,\cdots,u_n$ 已确定,它们两两互素且都和 b 互素. 则取

$$u_{n+1}=a(u_1\cdots u_r)+b$$

则 u_{n+1} 是数列 $\{ak+b\}(k\geqslant1)$ 中一项,易证 u_{n+1} 与 $u_1,\cdots,u_n$ 互素(从而 $u_1,\cdots,u_n,u_{n+1}$ 两两互素),且 u_{n+1} 和 b 互素. 按归纳法,得出了一个符合要求的无穷子数列.

41. 首先注意,对 $n\geqslant1$ 有

$$\sqrt{(n+1)^2+n^2}-\sqrt{n^2+(n-1)^2}$$

$$=\frac{4n}{\sqrt{(n+1)^2+n^2}+\sqrt{n^2+(n-1)^2}}$$

$$>\frac{4n}{(n+1)+n+n+(n-1)}=1$$

即 $a_{n+1}-a_n\geqslant 1$. 因此 i)与 ii)至少有一个成立.

若 i)不成立. 即至多有有限个 m,使

$$a_{m+1}-a_m>1 \tag{1}$$

则当 m 足够大时,恒有

$$a_{m+1}-a_m=1 \tag{2}$$

于是对足够大的 m 及 $k\geqslant 1$ 有

$$a_{m+k}-a_m=k$$

即

$$\sqrt{(m+k)^2+(m+k-1)^2}-\sqrt{(m+1)^2+m^2}\leqslant k$$

上式两边同除以 k,固定 m. 再令 $k\to+\infty$,得$\sqrt{2}\leqslant 1$,矛盾!

若 ii)不成立. 即只有有限多个 m 使(2)成立. 则当 m 足够大时,(1)式恒成立,即

$$a_{m+1}-a_m\geqslant 2$$

于是对足够大的 m 及所有 $k\geqslant 1$ 有

$$a_{m+k}-a_m\geqslant 2k$$

与前面类似地得出$\sqrt{2}\geqslant 2$,矛盾.

42. 回答是否定的,边长为 13,40,45 的三角形提供了命题的一个反例.

43. 首先证明 $r(n)\leqslant n^2-n-1$. 假设结论不对,则有非空不交子集 A 和 B 满足

$$\{1,2,\cdots,n^2-n-1\}=A\cup B$$

并且A(或B)中任意n个(不必不同)数的和均不在A(或B)中. 无妨设$1\in A$,则$n-1\in B$. 因$(n-1)\cdot(n-1)=(n-1)^2$,故$(n-1)^2\in A$.

如果$n\in A$,则$(n-1)^2=n+\cdots+n+1$,即A中有$n-1$个数的和仍在A中,与假设矛盾.

如果$n\in B$,因为$(n-1)+n+\cdots+n=n^2-n-1$,故$n^2-n-1\in A$. 但是,$1+\cdots+1+(n-1)^2=n^2-n-1\in A$. 仍与假设矛盾. 这就证明了$r(n)\leqslant n^2-n-1$.

下面证明$r(n)\geqslant n^2-n-1$. 为此,我们令$\{1,2,\cdots,n^2-n-2\}=A\cup B$,其中

$$A=\{1,2,\cdots,n-2,(n-1)^2,(n-1)^2+1,\cdots,n^2-n-2\}$$

$$B=\{n-1,n,\cdots,(n-1)^2-1\}$$

则不可能有$x_i\in A$或$x_i\in B(1\leqslant i\leqslant n)$,使得

$$x_1+\cdots+x_{n+1}=x_n$$

成立.

因为,如果$x_1,\cdots,x_{n-1}$都属于集$\{1,\cdots,n-2\}$,则

$$\begin{aligned}n-1&\leqslant x_1+\cdots+x_{n-1}\leqslant(n-1)(n-2)\\&<n(n-2)=(n-1)^2-1\end{aligned}$$

故$x_1+\cdots+x_{n-1}\in B$. 如果$x_1,\cdots,x_{n-1}$中有一项取自集合$\{(n-1)^2+1,\cdots,n^2-n-2\}$,则$x_1+\cdots+x_{n-1}\geqslant1+\cdots+1+(n-1)^2=n^2-n-1\notin A$.

类似地,如果$x_1,\cdots,x_{n-1}$都取自B,则$x_1+\cdots+x_{n-1}\geqslant(n-1)\cdot(n-1)=(n-1)^2$,即$x_1+\cdots+x_{n-1}\notin$

B.这就证明了 $r(n)\geqslant n^2-n-1$.

44. 1)当 n 为奇数时，将茶杯编上号码 $1,2,\cdots,m$，并列出数列

$$1,2,\cdots,m,1,2,\cdots,m,\cdots,1,2,\cdots,m \qquad (1)$$

它是由数列 $1,2,\cdots,m$ 重复 n 次而得到的，共有 mn 个数.

依从左到右的须序，将(1)中每 n 个归入一组(共有 m 组)，每次操作使编号在同一组中的 n 个茶杯同时翻转，m 次操作后恰好将(1)中的 m 组全部翻完. 由于每个号码在(1)中出现 n 次，所以每只茶怀被翻了 n 次，因 n 是奇数，所以每只茶杯被翻转成杯口朝下.

2)如果 m,n 都是偶数，可以设 $m<2n$(如果 $m\geqslant 2n$，可以先作若干次操作；使杯口朝上的茶杯少于 $2n$ 只). 由于 m,n 都是偶数，所以 $m-n=2k(k\geqslant 0)$.

第一次操作将 n 只茶杯翻成杯口朝下，剩下 $2k$ 只杯口朝上，然后在 n 只杯口朝下的茶杯中取 $n-k$ 只，将它们与 k 只杯口朝上的茶杯同时翻转. 经过这次操作，剩下 $(n-k)+k=n$ 只茶杯杯口朝上. 再作一次操作则使它们全部变成杯口朝下.

注 有许多问题(例如本题)，其本身就要求用构造法来论证，以下的问题都是这方面的例子.

45. 先取者一定可以取胜是指他有一种策略保证自己获胜，而不是说他随意取都能获胜.

就本题而言，先取者应该使两箱中的球数相等. 即首

先在第二个箱子中取 64 个球，当对手在一个箱子中取球后，他应在另一个箱子中取同样数目的球，这样，先取者必然最后取尽球.

46. 当 $n=4k+r+1$，$r=1,2,3$ 时(k 为整数)，先走者必胜，他第一步走 r 格，然后再次走的格数和对方前一步走的格数恰好凑成 4. 当 $n=4k+1$ 时，后走者必胜. 走法与上面的类似.

47. 任取一个城市 A_1，铺设长为 1000 公里的东西方向公路 MN，它平行于正方形的边. 在 MN 上取点 $P_1, P_2, \cdots, P_5$，使 $MP_1=P_5N=100$(公里). $P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5=200$(公里). 过 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 作五条与 MN 垂直的长 1000 公里的公路.

现在从其余(除 A_1 外)50 个城市中每一个都沿最短的路线分别铺设公路与上述五条南北公路中一条相连. 这些补充的 50 条公路都是东西方向，且每条长度 $\leqslant 100$. 故公路的总长度 $\leqslant 1000\times 6+100\times 50=11000$(公里).

48. 将 27 个分为 3 组，每组 9 个，任取两组置天平两臂上，即可得知伪币位于哪一组中，第二次，再将含有伪币的 9 个分为 3 组，每组 3 个，同样可找出包含伪币的组. 最后，由此 3 个硬币任取其 2 个，称量一次即可找出伪币.

49. 在 $n=2$ 时只需将 $1,2,\cdots,2m$ 依大小顺序，先从左到右连写 m 个作为第一行，再从右到左将后 m 个排在第二行. 则每一列就是合乎要求的一组数，各组的和都是 $2m+1$：

$$1,2,\cdots,m-1,m$$

$$2m,2m-1,\cdots,m+2,m+1$$

这一方法不仅适合于 $1,2,\cdots,2m$,也适合于任何 $2m$ 个连续的整数.

在 $n=2k$ 时,只需将每 $2m$ 个数(1 至 $2m$,$2m+1$ 至 $4m$,$\cdots$,$2(k-1)m+1$ 至 $2km$)按照上面的方法排成两行,组成一个 $n\times m$ 的矩阵,每一列中的数的和均相等,这 m 列就是 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$.

在 n 为大于 1 的奇数时,由于总和

$$1+2+\cdots+mn=\frac{(1+mn)n}{2}\times m$$

被 m 整除的充分必要条件是 m 为奇数,所以仅在 m 为奇数时,才有满足要求的子集 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$. 由于每 $2m$ 个连续数可以按照前面的方法排成两行使每列的和相等,我们只需将开始的 $3m$ 个数 $1,2,\cdots 3m$ 排成三行,使各列的和均为$\frac{3(1+3m)}{2}$. 为此,先将 $1,2,\cdots,m$ 依次排在第一行,再从右到左将 $m+1,m+2,\cdots$,逐一排在第一行的奇数下面,一直排到$\frac{3m+1}{2}$(它在第一行的 1 的下面),最后从右到左将$\frac{3m+3}{2},\frac{3m+5}{2},\cdots,2m$ 逐一排在第一行的偶数下面:

$$1,2,3,\cdots,m-2,m-1,m$$

$$\frac{3m+1}{2},2m,\frac{3m-1}{2},\cdots,m+2,\frac{3m+3}{2},m+1$$

这样，各列的和恰好是从$\frac{3m+3}{2}$至$\frac{5m+1}{2}$的 m 个连续的整数（第 m 列的和为 $2m+1$，第 $m-2,m-4,\cdots 1$ 列的和依次减少 1，一直减少到$\frac{3m+3}{2}$. 第 $2,4,\cdots,m-1$ 列的和依次增加 1. 从 $2m$ 一直增加到$\frac{5m+1}{2}$). 将这些列按照列和由小到大重新排列，然后将 $2m+1$ 至 $3m$ 这 m 个数依次由右到左排在第三行，则各列的三个数的和均等于$\frac{3m+3}{2}+3m=\frac{3(1+3m)}{2}$.

50. 1) 因$\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{k+1}}$，故$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^k}$可写出. 于是$\frac{3}{4},\frac{3}{8},\cdots,\frac{3}{2^k}$也可写出$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\frac{3}{2^{k+1}}\right)$. 由$\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}\right)$知$\frac{1}{n}$可写出.

2) 由 1)已知所有有理数$\frac{1}{n}$可写出($n\geqslant 1$)，设对 $n\geqslant 2$，所有正有理数$\frac{p}{m}$都可写出，这里 $1\leqslant p\leqslant n-1$，$(m,p)=1$. 则对于正整数 m,n，$1\leqslant n<m$ 且$(m,n)=1$，存在正整数$k\leqslant 2$使得

$$(k-1)n\leqslant m<kn$$

令 $a=kn-m$，则 $0<a\leqslant n$，且$\frac{a}{m}$已写出. 由

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-2}}+\frac{3}{2^{k-1}}+\frac{a}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(1+\frac{a}{m}\right)=\frac{n}{m}$$

知$\frac{n}{m}$可写出.

图书在版编目(CIP)数据

构造法解题/余红兵,严镇军编著. —3 版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2009.4

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02483-2

Ⅰ.构… Ⅱ.①余… ②严… Ⅲ.数学—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 049169 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

网址:http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本:880×1230/32 印张:4.75 字数:94 千

1989 年 5 月第 1 版 2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价:10.00 元

数学奥赛

辅导丛书

- ⊙ 从特殊性看问题
- ⊙ 组合恒等式
- ⊙ 解析几何的技巧
- ⊙ 算两次
- ⊙ 构造法解题
- ⊙ 漫话数学归纳法

责任编辑／韩继伟
封面设计／黄　彦

吴国林印

请勿用于商业用途或准商业用途，
请于下载后24小时内删除！如无法遵守此规定，则谢绝下载！！
吴国林 MSN: colin_21st@hotmail.com