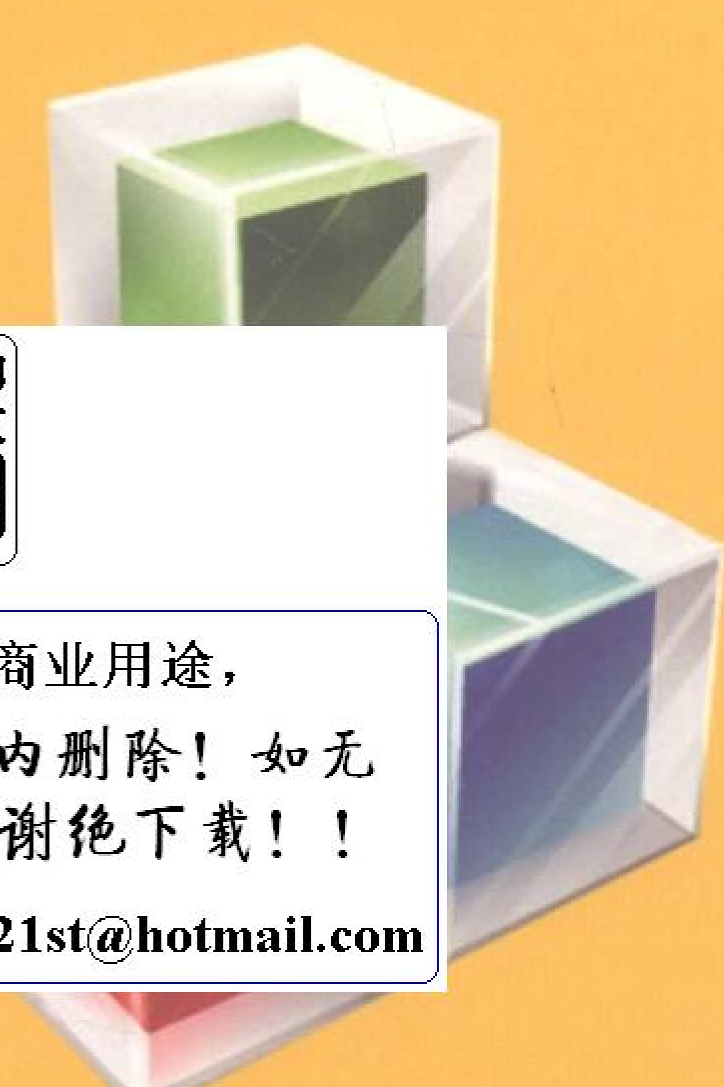
Shuxue Aosai Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

算两次

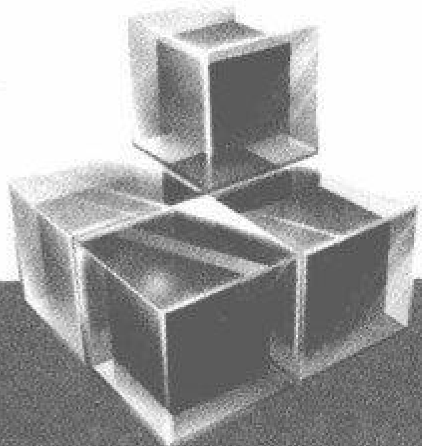
Suan Liangci

单墫 编著



中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书



算两次

单墫 编著

中国科学技术大学出版社

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的亲炙，耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序.

龚　昇

前　言

“算两次”，是一种重要的数学方法，也称做富比尼(G. Fubini)原理.

细心的小学生做完算术题后，常常再算一次，检验结果是否正确. 检验，可以原原本本地重算一遍(这样做不太容易发现自己的错误)，也可以采用不同的方法，例如减法用加法检验，除法用乘法检验等等.

学过列方程解应用题的同学一定知道“为了得到一个方程，我们必须把同一个量以两种不同的方法表示出来”(波利亚著《数学的发现》第一卷，欧阳绛译本37页)，即将一个量“算两次”. 这种手法在几何计算中也极为常见.

不仅计算题、求解题需要这样做，在证明中，用两种方法计算同一个量，更是一种行之有效的基本方法.

这本小册子，通过形形色色的例题来介绍“算两次”. 读者一定能够举一反三，找到更多的应用.

单　墫

目　　次

1 几何问题

几何中，常常采用"算两次"的方法.

【例 1】 $\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 外切，它们的半径分别为 r_1，r_2. 外公切线 EF 切$\odot O_1$ 于 E、切$\odot O_2$ 于 F. $\odot O$ 与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 及 EF 相切(如图 1). 求证$\odot O$ 的半径 r 满足

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{1}$$

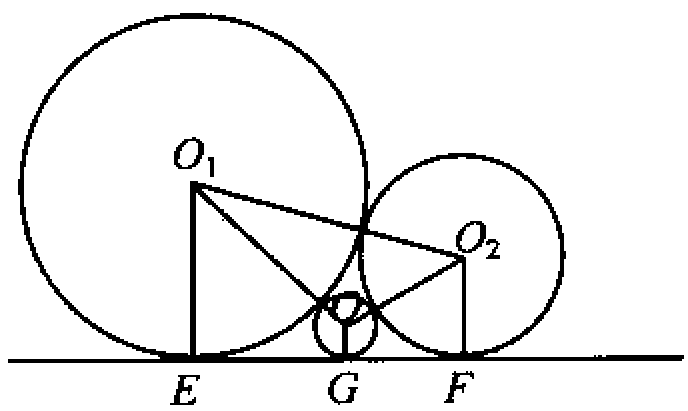


图 1

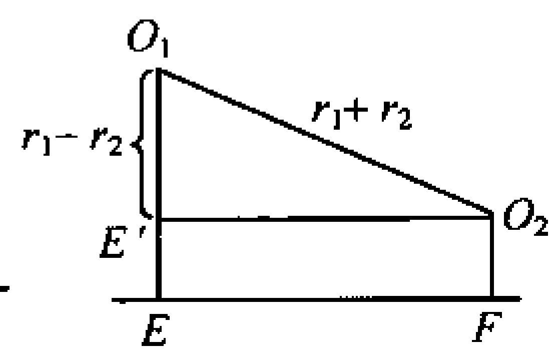


图 2

解 设$\odot O$ 与 EF 相切于G. 由已知

$$O_1O_2=r_1+r_2, O_1O=r_1+r, OO_2=r+r_2$$

在图 2 中，过 O_2 作直线 $O_2E' /\!/ FE$，交 O_1E 于 E'. 易知 $O_1E'=r_1-r_2$，

$$EF=O_2E'=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2} \tag{2}$$

EF 还有另一种算法，即

$$EF=EG+GF \tag{3}$$

而与(2)类似，我们有

$$EG=2\sqrt{r_1 r},\ GF=2\sqrt{r r_2} \tag{4}$$

将(2)、(4)代入(3)得

$$2\sqrt{r_1 r_2}=2\sqrt{r_1 r}+2\sqrt{r r_2} \tag{5}$$

(5)式两边同除以 $2\sqrt{r_1 r_2 r}$ 便得到(1).

极为普通的(3)式却是本题的关键(熟悉解析几何的读者不难看出(3)实际上就是$\triangle O_1OO_2$ 的三条边在 EF 上的射影之和为"0"). 下面的例 2 与此类似.

【例 2】 直线 l 过$\triangle ABC$ 的重心 G，与边 AB，AC 分别相交于 B_1，C_1. $\frac{AB_1}{AB}=\lambda$，$\frac{AC_1}{AC}=\mu$. 求证

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3 \tag{6}$$

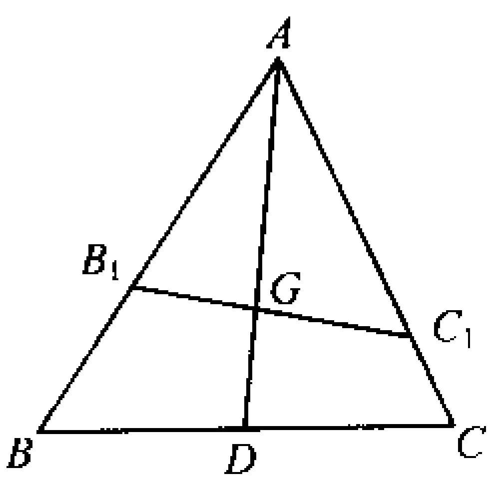


图 3

解 作 BC 的中线 AD(图 3)，G 当然在 AD 上.

考虑面积. 设$\triangle ABC$ 的面积为 1，$\triangle AB_1C_1$ 的面积为 S. 我们用两种方法来计算 S.

一方面，

$$S=\frac{S}{1}=\frac{AB_1\times AC_1}{AB\times AC}=\lambda\mu \tag{7}$$

另一方面，

$$S=S_{\triangle AB_1G}+S_{\triangle AGC_1} \tag{8}$$

而与(7)类似有

$$S_{\triangle AB_1G}=\frac{2\lambda}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{\lambda}{3}, S_{AGC_1}=\frac{\mu}{3} \tag{9}$$

代入(8)得

$$S=\frac{\lambda+\mu}{3} \tag{10}$$

综合以上两个方面，产生

$$\lambda\mu=\frac{\lambda+\mu}{3} \tag{11}$$

两边同乘$\frac{3}{\lambda\mu}$即得(1).

下面的例3是第6届巴尔干数学竞赛(1989年)的试题(由于参加国中罗马尼亚，保加利亚与南斯拉夫都是数学竞赛的强国，所以试题难度甚大，但例3是其中最容易的一道).

【例3】 直线l分别交$\triangle ABC$的边AB,AC于B_1,C_1，并且$\triangle ABC$的重心G与A在l的同侧. 证明

$$S_{BB_1GC_1}+S_{CC_1GB_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{ABC} \tag{12}$$

解法一 过G作l的平行线l',l',分别交AB,AC于B_1',C_1'(图4).

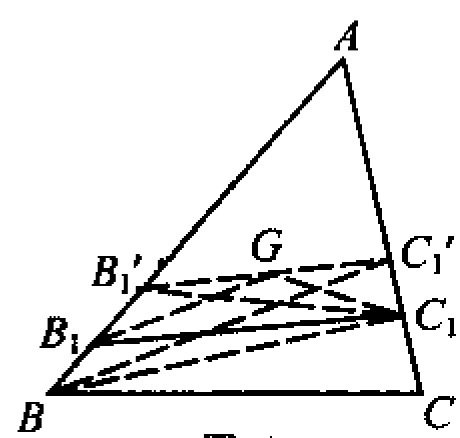


图 4

由于C_1'到AB的距离小于C_1到AB的距离，所以

$$S_{BB_1GC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1GC_1}=S_{BB_1C_1}+S_{B_1B_1'C_1}$$
$$=S_{BC_1B_1'}>S_{BC_1'B_1'}$$

同样

$$S_{CC_1GB_1} > S_{CC_1'B_1'}$$

因此要证明(12)，只需证明

$$S_{BC_1'B_1'} + S_{CC_1'B_1'} \geqslant \frac{4}{9} S_{ABC}$$

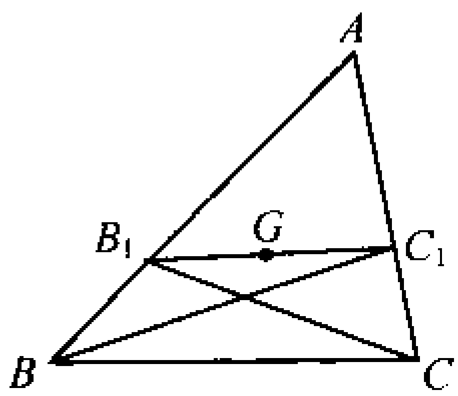


图 5

换句话说，我们可以认为 l 过重心 G（否则用 l' 代替 l），在这一条件下来证明(12).

在图 5 中，设 $\frac{AB_1}{AB} = \lambda$，$\frac{AC_1}{AC} = \mu$. 则

$$S_{BC_1B_1} = (1-\lambda) S_{BC_1A} = (1-\lambda)\mu S_{ABC}$$

同样

$$S_{CB_1C_1} = (1-\mu)\lambda S_{ABC}$$

问题化为证明不等式

$$(1-\lambda)\mu + (1-\mu)\lambda \geqslant \frac{4}{9} \tag{13}$$

由例 2，$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$. 从而 $\lambda + \mu = 3\lambda\mu$，

$$(1-\lambda)\mu + (1-\mu)\lambda = \lambda + \mu - 2\lambda\mu = \frac{1}{3}(\lambda + \mu)$$

$$= \frac{1}{9}(\lambda + \mu)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) \geqslant \frac{4}{9}\sqrt{\lambda\mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\mu}} = \frac{4}{9}$$

于是(13)、(12)成立.

解法二　不妨设 $S_{ABC} = 1$. 取 BC 的中点 D，连 DB_1，DC_1，AD（图 6），则 G 在 AD 上，

$$S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1} = 2S_{GB_1C_1} + S_{BB_1C_1} + S_{CB_1C_1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2S_{GB_1C_1} + 2S_{BCB_1C_1} - S_{BCB_1} - S_{BCC_1} \\
&= 2(S_{GB_1C_1} + S_{BCdB_1C_1} - S_{DBB_1} - S_{DCC_1}) \\
&= 2(S_{GB_1C_1} + S_{DC_1B_1}) = 2S_{DC_1GB_1} \\
&= 2(S_{GB_1D} + S_{GC_1D}) = S_{AB_1G} + S_{AGC_1} \\
&= \frac{\lambda}{3} + \frac{\mu}{3}
\end{aligned}
$$

这里 $\lambda=\frac{AB_1}{AB}$, $\mu=\frac{AC_1}{AC}$.

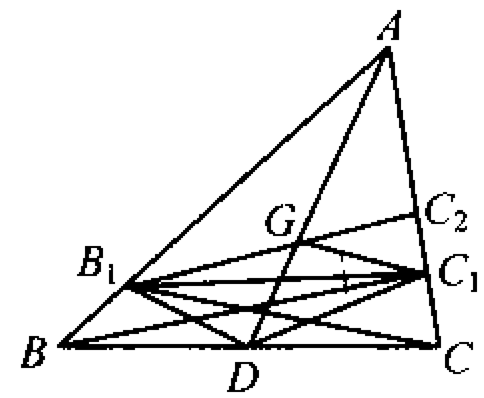


图 6

设 B_1G 的延长线交 AC 于 C_2，$\frac{AC_2}{AC}=\mu'$，则由例 2，

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3$$

而 $\mu\geqslant\mu'$，所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu'}=3$，

$$\frac{\lambda}{3}+\frac{\mu}{3}\geqslant\frac{1}{9}(\lambda+\mu)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\geqslant\frac{4}{9}$$

两种解法都多次将同一块面积用不同的形式表出.

【例 4】 $\triangle XYZ$ 是 $\triangle ABC$ 的内接三角形：X,Y,Z 分别在边 BC,CA,AB 上. 如果 $\angle ZXY$、$\angle XYZ$、$\angle YZX$ 分别与 $\angle A,\angle B,\angle C$ 相等，试确定 X,Y,Z 的位置，使 $\triangle XYZ$ 的面积为最小.

解 当 X,Y,Z 为三边中点时，$\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 的角对应相等. 我们猜测这时 $\triangle XYZ$ 的面积达到最小值.

证明的第一个关键是注意 $\triangle XYZ$，$\triangle AYZ$，$\triangle BXZ$，

$\triangle CXY$ 的外接圆相等. 这可以由 A, X 对线段 YZ 所张的角相等(或正弦定理)立即得出.

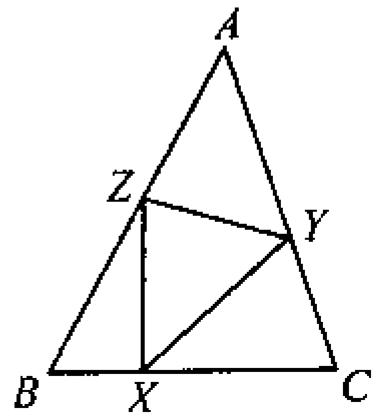


图 7

第二个关键是注意 BC 有两种算法：设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，$\triangle XYZ$ 的外接圆半径为 r，则一方面，在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理

$$BC=2\sin A \tag{14}$$

另一方面，与(3)类似，

$$BC=BX+XC \tag{15}$$

容易知道

$$\angle BZX+\angle XYC=\angle BAC+\angle YXZ=2\angle A$$

(例如连 AX，利用 $\angle BZX=\angle ZAX+\angle ZXA$，$\angle XYC=\angle XAY+\angle AXY$ 即得). 我们设

$$\angle BZX=\angle A-\alpha, \quad \angle XYC=\angle A+\alpha$$

则与(14)类似，

$$BX=2Y\sin(A-\alpha), \quad XC=2r\sin(A+\alpha) \tag{16}$$

将(14)、(16)代入(15)得

$$2\sin A=2r\sin(A-\alpha)+2r\sin(A+\alpha)=4r\sin A\cos\alpha$$

从而

$$r=\frac{1}{2\cos\alpha}\geqslant\frac{1}{2}$$

最小值 $r=\frac{1}{2}$ 在 $\alpha=0$ 时达到. 易知这一条件等价于 X, Y, Z 为三边的中点.

下面举几个立体几何中的例子.

【例 5】 圆锥的母线为 l,侧面的展开图是一个圆心角为 α 的扇形. 求圆锥的底面半径 r.

解 这是一个很容易的问题. 一方面,展开图中扇形的弧长为 $l\alpha$. 另--方面,这弧长就是圆锥底面的周长 $2\pi r$. 因此,

$$l\alpha=2\pi r$$

$$r=\frac{\alpha l}{2\pi}$$

【例 6】 四面体 $ABCD$ 的每一组对棱的和都不超过 1. 证明它的四个面中,至少有一个的内切圆半径不超过$\frac{\sqrt{3}}{12}$.

解 首先证明对于三角形,恒有

$$r\leqslant\frac{s}{3\sqrt{3}} \tag{17}$$

这里 r 为内切圆半径,s 为半周长. 为了证明(17),考虑面积的两种表示方法得

$$rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

这里 a,b,c 为边长. 于是

$$r=\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3}=\frac{s}{3\sqrt{3}}$$

设四面体 $ABCD$ 的四个面的内切圆半径分别为 r_1,r_2,r_3,r_4,半周长分别为 s_1,s_2,s_3,s_4. 则

$$2(s_1+s_2+s_3+s_4)=2(AB+BC+CA+AD+BD+CD)$$

$$\leqslant 2\times 3$$

即

$$s_1+s_2+s_3+s_4\leqslant 3 \tag{18}$$

由(17)、(18)，

$$r_1+r_2+r_3+r_4\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}(s_1+s_2+s_3+s_4)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

从而 r_1,r_2,r_3,r_4 中至少有一个不超过

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

最后一步利用了计数论证(第 6 节).

下例需要利用凸多面体的欧拉公式

$$v-e+f=2 \tag{19}$$

其中 v,e,f 分别为多面体的顶点、棱、面的个数.

【例 7】 设凸多面体的顶点 $A_i(1\leqslant i\leqslant v)$处的面角之和为 α_i，则 $2\pi-\alpha_i$ 称为 A_i 处的角亏. 证明凸多面体各个顶点处的角亏的总和为 4π.

解 熟知在平面几何中凸多边形的外角和为 4π. 因此，要证明的结论可以看成是外角和定理在三维空间中的推广，它是笛卡尔首先发现的.

和 $\sum\alpha_i$ 可以用另一种方法计算：先求出各个面的面角之和，然后再求这些和的和.

设多面体有 f_3 个面为三角形，f_4 个面为四边形，……. 则由于凸 K 边形的内角和为$(K-2)\pi$，我们有

$$\begin{aligned}\sum\alpha_i &= \sum(K-2)\pi f_K \\ &= \pi\sum Kf_K-2\pi f\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $f=\sum f_K$ 是多面体的面数.

注意 $\sum Kf_K$ 是各个面的边数的总和，也就是多面体棱数 e 的 2 倍(每条棱属于两个面)，所以角亏的和

$$\begin{aligned}\sum(2\pi-\alpha_i) &= 2\pi v-\sum\alpha_i\\ &= 2\pi v-\pi\sum Kf_K-2\pi f\\ &= 2\pi(v-e+f)=4\pi\end{aligned}$$

2 图的启发

图形可以给我们很多启发. 本节举一些与自然数有关的例子.

一个图,可以横看,可以竖看. 各种不同的看法结合起来便可导出有用的公式或所需的证明.

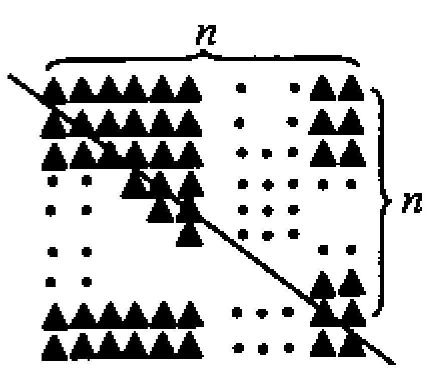


图 8

【例 1】 图 8 中共有 $n(n+1)$ 个▲,对角线上方占总数的一半. 于是

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

这就是传说中高斯童年时导出的公式. 它是算两次(用两种方法计算右上方的▲的个数)的产物.

我们称 $1+2+\cdots+n$ 为三角(形)数,并记为 t_n. (1)即

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

【例 2】 在上图中去掉最后一行,所得的图表明

$$n^2=t_n+t_{n-1} \tag{3}$$

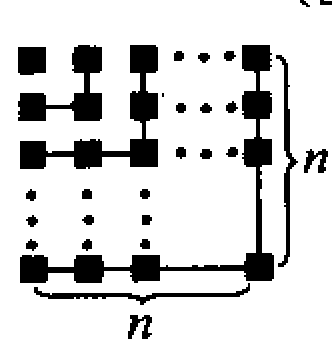


图 9

【例 3】 图 9 中正方形的个数为 n^2. 如果先计算每个曲尺形"$\lrcorner$"上的正方形的个数,然后再求总数,两种算法导出公式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{4}$$

【例 4】 正 k 边形点阵中点的个数称为 k 角数. 4 角数就是平方数. 记第 n 个 6 角数为 h_n，则图 10 表明

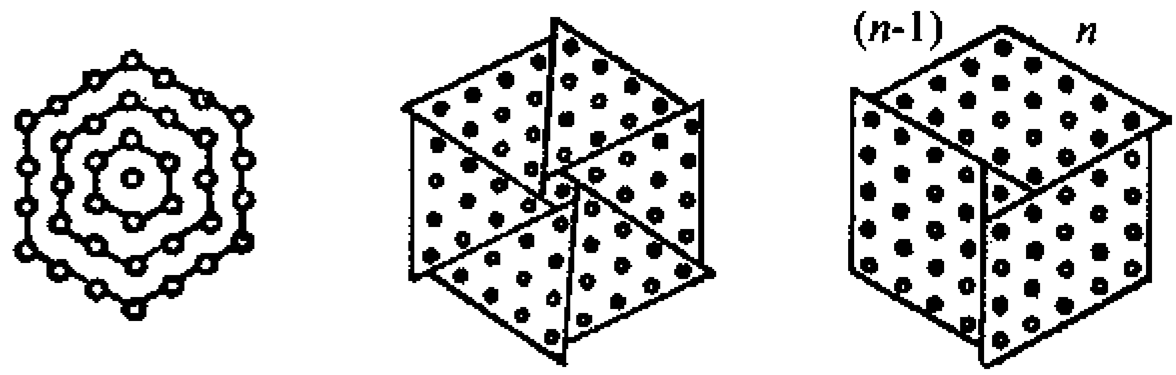


图 10

$$h_n=6t_{n-1}+1=3n(n-1)+1 \tag{5}$$

【例 5】 证明

$$h_1+h_2+\cdots+h_n=n^3 \tag{6}$$

解 将每边由 n 个点组成的立方体点阵“剥去”下、左、后三个“表面”，得到一个每边由 $n-1$ 个点组成的立方体点阵. 这三个面共有点 $3n(n-1)+1$（见图 11 自明）. 由(5)，这就是 h_n. 由此易知(6)式成立.

例 5 不借助图形也不难证明（只需利用(5)及 $n^3-(n-1)^3=3n(n-1)+1$）. 但下面的一些问题则以利用图形为好.

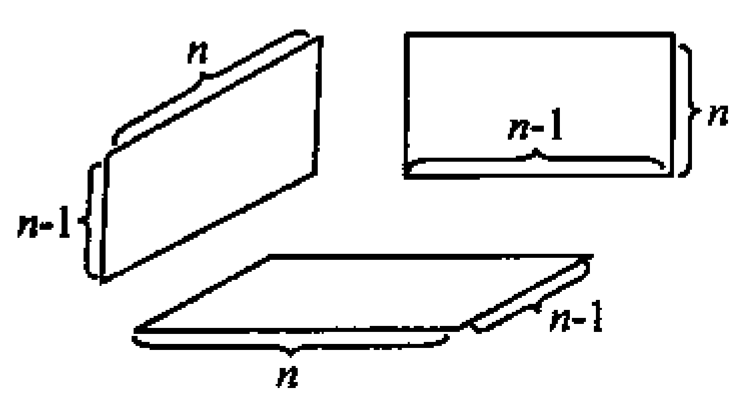


图 11

【例 6】 d_K 表示某城市中住人不少于 K 名的房子数（显然 $d_1\geqslant d_2\geqslant d_3\geqslant\cdots$），$c_K$ 表示该市中住人数为第 K 位（依从大到小排列）的那种房子

中的人数(显然 $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 \geqslant \cdots$). 证明

(a) $c_1+c_2+c_3+\cdots=d_1+d_2+d_3+\cdots$

(b) $c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots=d_1+3d_2+5d_3+\cdots$

(c) $d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots=c_1+3c_2+5c_3+\cdots$

解 考虑图 12,其中第一列有 c_1 个点,第二列有 c_2 个点,……. 于是总点数为

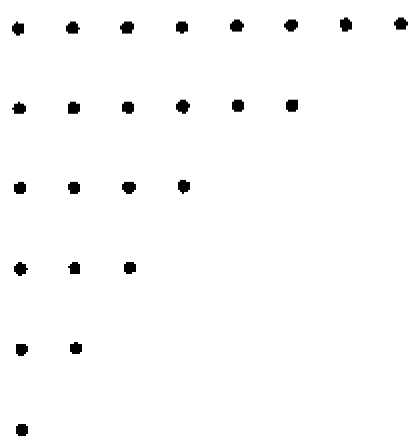


图 12

$$c_1+c_2+c_3+\cdots$$

另一方面,第一行中的点数即 d_1(点数不少于 1 的列的个数),第二行中的点数即 d_2,…. 因此,总点数为

$$d_1+d_2+d_3+\cdots$$

两种方法计算的结果应当相同,所以(a)成立.

如果把图中的点"加权",然后再算总和便可以产生(b). 这里所加的权就是第一行的每个点作为一个点(乘以"权"1),第二行的每个点作为三个点(乘以"权"3),…,第 K 行的每个点作为 $2K-1$ 个点,….

一方面,先按行来算再求和得到加权后的总和为

$$d_1+3d_2+5d_3+\cdots$$

另一方面,第 j 列加权后的和为

$$1+3+5+\cdots+(2c_j-1)=c_j^2$$

因而总和为

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots$$

即(b)成立.

(c)的证明与(b)类似.

整数的分拆中有很多问题与图形有关.

设 n 为正整数,将 n 分成若干个正整数的和的一种方法称为n 的一种分拆. 例如

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1$$
$$=2+1+1+1=1+1+1+1+1$$

即 5 有 7 种不同的分拆(仅仅加数顺序不同的算作同一种分拆),其中包括仅由 5 组成的"分拆". 用 $p(n)$表示 n 的分拆数. 例如 $p(5)=7$.

有时对分拆添加一些要求. 如要求分成的每一份(每一个加数)都不超过某个正整数 m 或每一份都必须是奇数等等.

【例 7】 将 n 分为每份不超过m 的分拆数等于将n 分为不超过 m 份(即加数的个数$\leqslant m$)的分拆数.

解 分拆

$$n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_K, a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_K \tag{7}$$

可以用图表示,图的第一行有 a_1 个点,第二行 a_2 个点,…. 每行的第一个点对齐,以后按同样距离排列. 例如

$$18=7+4+3+3+1 \tag{8}$$

可以表示成图 13.

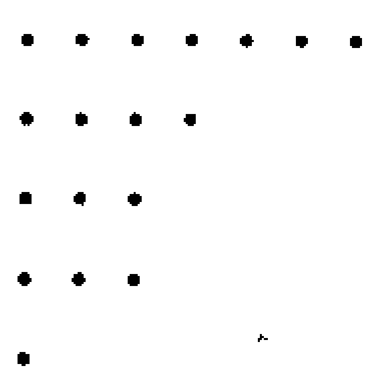


图 13

上面的图也可以逐列读出,产生 n 的另一个分拆,称为原先那个分拆的共轭分拆. 例如从上图可以得到

$$18=5+4+4+2+1+1+1 \tag{9}$$

它就是(8)的共轭分拆(例 6(a)的两边正是共轭的分拆).

显然,n 的每份不超过 m 的分拆,有一个份数不超过 m 的共轭分拆.两者是一一对应的,因此个数相同.

同时,我们也证明了:

n 的份数为 m 的分拆数等于最大加数为 m 的分拆数.

更巧妙地运用上面的技巧,可以得到:

【例 8】 设 a,b,c 都是大于 1 的自然数,$a>b,a>c$.则 $a-c$ 的、份数为 $b-1$ 的分拆数等于 $a-b$ 的、份数为 $c-1$ 的分拆数.

解 我们可以按照图 14 将每个 $a-c$ 的、份数为 $b-1$ 的分拆变为 $a-b$ 的、份数为 $c-1$ 的分拆.

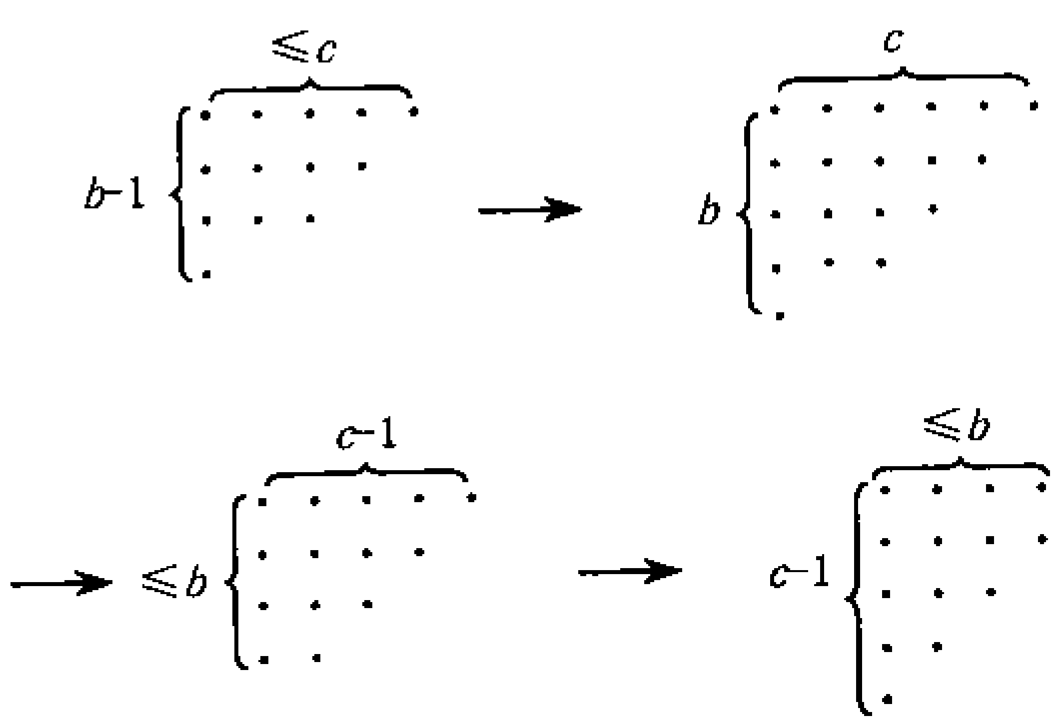


图 14

第一步是添上一行(最上面一行)由 c 个点组成.第二步是删去最左面的一列.第三步是取共轭,也就是把点阵转置,行变为列,列变为行.

上面的过程是可逆的，因而建立了两种分拆之间的一一对应.

如果一个分拆的图是(关于对角线)对称的，那么这个分拆与自身共轭. 例如分拆

$$15=6+3+3+1+1+1$$

为图 15，所以这个分拆是自共轭的.

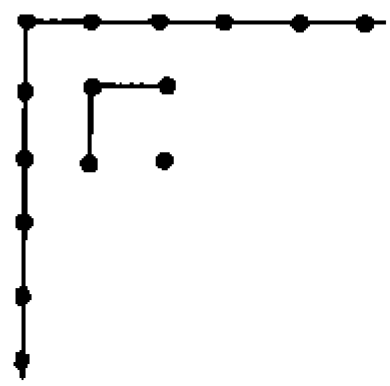


图 15

【例 9】 将 n 分为互不相同的奇数的和，这种分拆的个数恰好是 n 的自共轭的分拆数.

解 上面的图由几个曲尺形“「”组成. 最外面的那一个由 11 个点组成，第二个由 3 个点组成，第三个由一个点组成. 因而对应于

$$15=11+3+1$$

这是 15 的由不相同的奇数组成的分拆. 我们把一般情形的论证细节留给读者完成.

【例 10】 将 n 分为奇数的和，与将 n 分为互不相同的数的和，这两种分拆的个数相等.

解 $45=1+1+3+5+5+5+5+7+13$

是奇数的和. 在用图来表示时，我们稍为变通一下. 依照从小到大的顺序，第一行、第二行各放 1 个点，第三、四、五、六、七、八、九行分别放 3、5、5、5、5、7、13 个点. 并且，将各行的中间对齐(由于每行奇数个点，恰有一个点在中间).

现在采用另一种方式将点分组. 如图 16，每一组是一个曲尺形(可能退化为一列或一行)，即图中的①、②、③、④、

⑤. 容易看出每个曲尺形至少比它后面的曲尺形多一个点. 因此,我们得到一个加数互不相同的分拆.

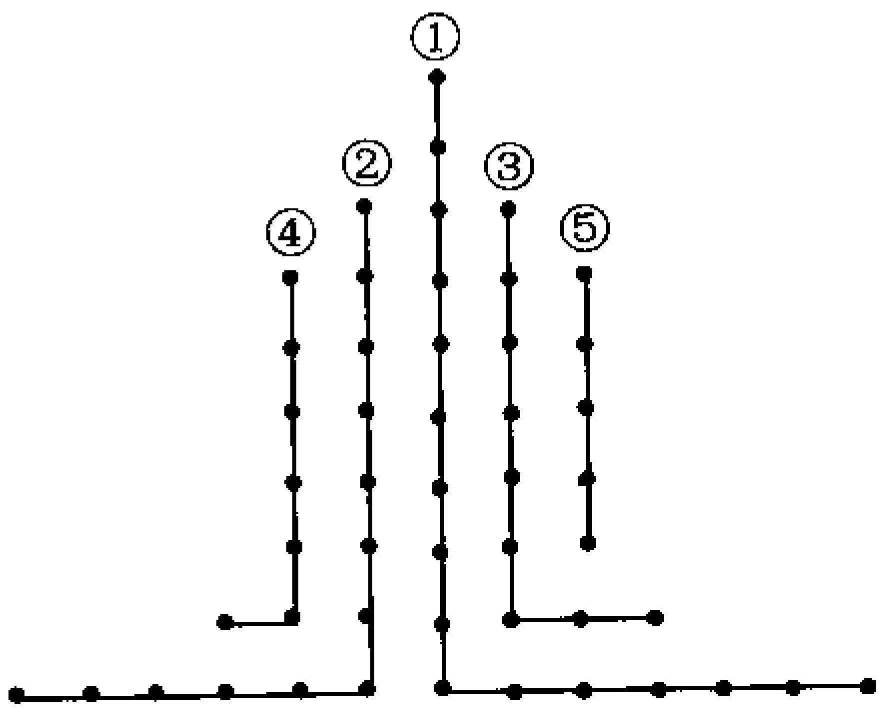


图 16

注意图中的曲尺形有以下特点:

(a) 曲尺(1)与(2),(3)与(4),…的水平部分在同一高度,并且前者的水平部分比后者的水平部分[(1)比(2),(3)比(4),…]多1个点.

(b) ②与③,④与⑤,…的最高点在同一水平.

(c) 最后一个曲尺形的号码如果是奇数,例如⑤,则由一列组成;如果是偶数,则由一行组成. 包括退化为一个点的情况.

根据(a)、(b)、(c)这三点,我们可以将1个由不同的数组成的分拆变为全由奇数组成的分拆. 例如

$$45=13+10+8+7+5+2$$

先排⑥:由2个点组成的行,再排⑤:水平部分含3个点并且与⑥在同一高度,这样倒推上去便得图17.

我们建立了两种分拆之间的一一对应,因而两种分拆的个数相等.

n 的各项不等的分拆可以分为两类:第一类的项数为偶数,第二类的项数为奇数,利用图形可以证明第一类的个数与第二类的个数相等或者相差 1. 即

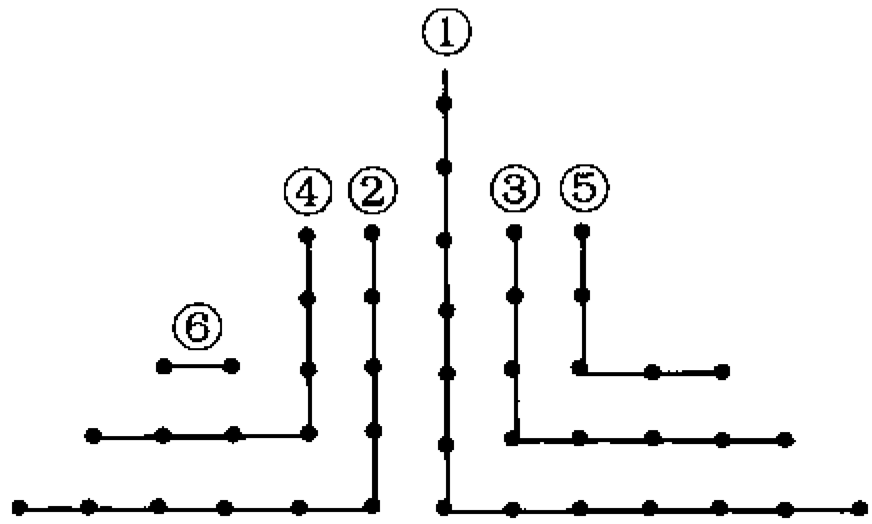


图 17

(第一类分拆数)-(第二类分拆数)

$$=\begin{cases}(-1)^m, & \text{若 } n=\dfrac{m(3m\pm 1)}{2}\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

请参看华罗庚《数论导引》第八章定理 2.

分拆是数论中一个重要的课题,有许多深刻的结果与问题,需要利用高深的工具(例如椭圆模函数的理论).

3 格点计算

坐标为整数的点称为格点(整点).

计算格点时,常常利用高斯函数$[x]$.它表示实数x的整数部分,也就是不超过x的最大整数.在$x\geqslant 0$时,它表示不超过x的自然数的个数,即

$$[x]=\sum_{n\leqslant x}1$$

其中$n\in\mathbf{N}$.

例如$[\pi]=3$,$[\sqrt{2}]=1$,$[-\lg 102]=-3$.

近来,有许多作者喜欢将$[x]$写成$\lfloor x\rfloor$,并称之为地板函数.它的孪生兄弟$\lceil x\rceil$,即不小于x的最小整数,称为天花板函数.

显然,在x为整数时,$\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil=x$.

【例1】 设p,q为互质的自然数,证明

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2} \qquad (1)$$

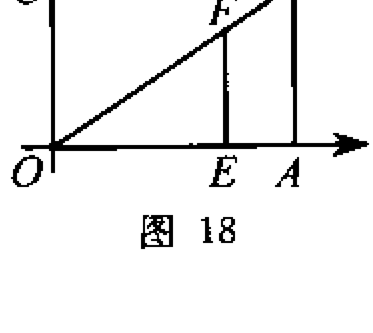


图 18

解 考虑坐标平面内的矩形$OABC$(图18),这里O为原点,A,B,C的坐标分别为$(q,0)$,(q,p),$(0,p)$.连OB.由于p,q互质,所以对于区间$(0,q)$内的整数x,y

$=\frac{p}{q}x$ 决不是整数. 也就是说,线段 OB 的内部没有格点.

我们用两种方法计算$\triangle OAB$ 内部(不包括边界)的格点个数 s.

一方面,过 x 轴上的整点 $E(k,0)(0<k<q)$作 x 轴的垂线与OB 相交于F. F 的纵坐标为 $y=\frac{kp}{q}$. 所以在线段 EF 内部(不包括端点)有$\left[\frac{kp}{q}\right]$个格点. 这样

$$s=\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right] \qquad (2)$$

另一方面,矩形 $OABC$ 内部(不包括边界)共有$(p-1)\cdot(q-1)$个格点. 线段 OB 内部没有格点,$\triangle OAB$ 与$\triangle BCO$ 内部的格点关于OB 的中点对称(即格点(x,y)与格点$(q-x,p-y)$一一对应),所以各占总数的一半,即

$$S=\frac{(p-1)(q-1)}{2} \qquad (3)$$

综合(2)、(3),即得(1).

【例 2】 设 p,q 为互质的自然数,证明

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}(q-1)\right]}\left[\frac{kp}{q}\right]+\sum_{l=1}^{\left[\frac{1}{2}(p-1)\right]}\left[\frac{lq}{p}\right]=\left[\frac{p-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{q-1}{2}\right] \qquad (4)$$

解 与例 1 类似,我们考虑矩形 $OABC$ 内部的格点个数 s,这里 O,A,B,C 的坐标分别为$(0,0)$,$\left(\frac{1}{2}q,0\right)$,$\left(\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}p\right)$,$\left(0,\frac{1}{2}p\right)$. 即比图 18 缩小了一半.

一方面，$\triangle OAB$ 内部的格点数为 $\sum_{k=1}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]}\left[\frac{kp}{q}\right]$，$\triangle OBC$ 内部的格点数为 $\sum_{l=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left[\frac{lq}{p}\right]$，$OB$ 内部无格点，所以

$$s=\sum_{k=1}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]}\left[\frac{kp}{q}\right]+\sum_{l=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left[\frac{lq}{p}\right] \tag{5}$$

(与例 1 不同，两个三角形内部的格点未必对称，所以我们要把两个和都写出来).

另一方面，显然有

$$s=\left[\frac{p-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{q-1}{2}\right] \tag{6}$$

综合(5)、(6)即得(4).

高斯利用(4)证明了重要的二次互反律(他称之为“数论的酵母”).

例 1、例 2 都是例 3 的特殊情况.

【例 3】 设 $y=f(x)$ 为严格的增函数，它的反函数为 $x=\psi(y)$. $f(0)=0$，$f(a)=b$，a,b 都是正数. 曲线 $y=f(x)$ 的从 $O(0,0)$ 到 $B(a,b)$ 的这段弧上(包括端点 B，不包括 O)有 L 个格点. 则有

$$\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[\psi(h)]-L=[a]\cdot[b] \tag{7}$$

解 考虑矩形 $OABC$ 内的格点个数 s(包括除去 C 点的线段 CB 与除去 A 点的线段 AB，不包括线段 OA，OC). 这里 A，C 坐标分别为 $A(a,0)$，$C(0,b)$.

一方面，曲边三角形 OAB 内，每条直线 $x=k$（k 为不超过 a 的自然数）上有 $[f(k)]$ 个格点（包括弧 OB 上可能有的一个格点，不包括格点 $(k,0)$）. 曲边三角形 OCB 内，每条直线 $y=h$（h 为不超过 b 的自然数）上有 $[\phi(h)]$ 个格点. OB 上的 L 个点被重复计算了一次. 所以

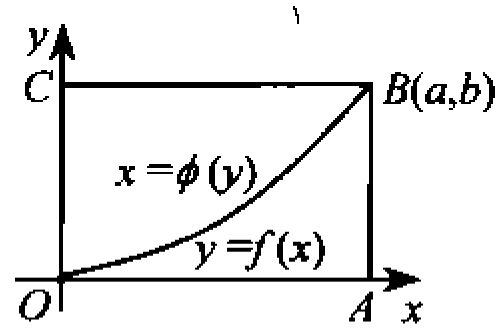


图 19

$$s=\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[f(h)]-L \tag{8}$$

另一方面，显然有

$$s=[a]\cdot[b] \tag{9}$$

综合(8)、(9)，得到(7).

【例 4】 设 n 为自然数，证明

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n^2}]=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5) \tag{10}$$

解 取 $f(x)=\sqrt{x}$，$a=n^2$，$b=n$. 则 $L=n$. 由例 3(7)得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}]&=n^3+n-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=n^3+n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)\end{aligned}$$

【例 5】 证明对任一大于 1 的正整数 n，

$$\begin{aligned}&[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]\\&\quad=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n]\end{aligned} \tag{11}$$

解　考虑曲线 $y^x=n$ 与直线 $x=2, y=2$ 所成的曲边三角形的格点个数 s(包括曲边三角形的边界).

一方面,每条竖线 $x=k$(k 为区间$[2,n]$内的整数)与曲线 $y^x=n$ 相交于点$(k,\sqrt[k]{n})$. 所以这条线对 s 的"贡献"为$[\sqrt[k]{n}]-1$(即这条线上有$[\sqrt[k]{n}]-1$ 个格点属于所说的曲边三角形). 从而

$$s=\sum_{k=2}^{n}([\sqrt[k]{n}]-1)=\sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}]-(n-1) \qquad (12)$$

另一方面,每条横线 $y=h$(h 为区间$[2,n]$内的整数)与曲线 $y^x=n$ 相交于点$(\log_h n, h)$. 所以这条线对 s 的贡献为$[\log_h n]-1$. 从而

$$s=\sum_{h=2}^{n}([\log_h n]-1)=\sum_{h=2}^{n}[\log_h n]-(n-1) \qquad (13)$$

综合(12)、(13)即得(11).

注　容易看出在曲边三角形内,点(x,y)的坐标满足 $x\leqslant\log_2 n<n$, $y\leqslant\sqrt{n}<n$. 所以(12)中的求和实际上只到$[\log_2 n]$就应当结束. 但为了方便起见,我们让和号延伸到 n,增添一些值为 0 的项$[\sqrt[k]{n}]-1$. (13)式也是如此.

【例 6】　n 为自然数. 证明

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)=\sum_{k=1}^{n}k\left[\frac{n}{k}\right] \qquad (14)$$

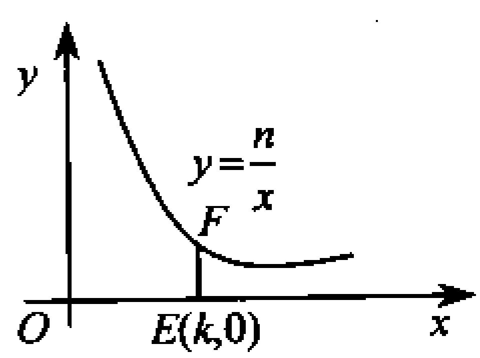


图 20

解　考虑曲线 $y=\frac{n}{x}$ 与坐标轴所围成的区域内的格点.

设 k 为自然数，过点 $E(k,0)$ 的直线 $x=k$ 交 $y=\frac{n}{x}$ 于 F，则 EF 上有 $\left[\frac{n}{k}\right]$ 个格点（不包括 E. 在 F 为格点时包括 F）. 这些格点的横坐标都是 k，它们的和为 $k\left[\frac{n}{k}\right]$. 从而所说区域内的格点的横坐标的和 s 为(14)的右边（当 $k>n$ 时，$\left[\frac{n}{k}\right]=0$，所以只需求 n 项的和）.

另一方面，在每一条平行于 x 轴的直线 $y=h$（h 为自然数）上，有 $\left[\frac{n}{h}\right]$ 个属于所述区域的格点，它们的横坐标分别为 $1,2,\cdots,\left[\frac{n}{h}\right]$，和为 $1+2+\cdots+\left[\frac{n}{h}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{h}\right]\left(\left[\frac{n}{h}\right]+1\right)$. 因此 s 等于(14)的左边.

于是(14)成立.

最后，我们介绍著名的圆内整点问题.

【例 7】 设 x 为正实数，在圆 $u^2+v^2=x$ 内的格点数记为 $R(x)$，则

$$\pi(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2<R(x)<\pi(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 \tag{15}$$

解 以圆内每个格点为左下方的顶点作边与坐标轴平行的单位正方形. 由于这正方形的对角线为 $\sqrt{2}$，所以正方形内每一点到原点 $(0,0)$ 的距离不大于 $\sqrt{x}+\sqrt{2}$，即所作的正方形都在圆

$$u^2+v^2=(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 \tag{16}$$

内.因而(15)右边的不等式成立.

对于圆

$$u^2+v^2=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2 \tag{17}$$

内的每一点 C,必有一个格点 D,以 D 为左下方顶点的、边与坐标轴平行的单位正方形含有 C 点.这个正方形内的点与原点的距离不大于

$$\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{x}$$

所以这正方形在圆 $u^2+v^2=x$ 内.从而以圆 $u^2+v^2=x$ 内的格点为左下方顶点所作的在圆 $u^2+v^2=x$ 内的单位正方形覆盖圆(17).因而(15)左边的不等式成立.

从(15)可以知道 $R(x)\sim\pi x$,即 $R(x)$ 与 πx 大致相当.它们的差 $R(x)-\pi x$ 与 x 的比随 x 的增大而趋于0.事实上,由(15)可以看出

$$R(x)=\pi x+O(x^{1/2}) \tag{18}$$

这里 $O(x^\alpha)$表示与 x^α 的比值(当 x 趋于无穷时)是有界的.可以证明(18)中的 $\alpha=\frac{1}{2}$ 能用更小的数代替.我国数学家华罗庚,陈景润先后得到 α 可取 $\frac{13}{40}+\varepsilon$, $\frac{12}{37}+\varepsilon$,其中 ε 为任意小的正数.猜测 α 的最佳值为 $\frac{1}{4}+\varepsilon$ $\left(\text{已经证明 } \alpha \text{ 必须大于} \frac{1}{4}\right)$,这是一个非常困难的问题.

如果用 $r(n)$表示

$$u^2+v^2=n \tag{19}$$

的整数解(u,v)的个数(例如

$r(0)=1$，因为 $0=0^2+0^2$

$r(4)=4$，因为 $4=(\pm 2)^2+0^2=0^2+(\pm 2)^2$

$r(8)=4$，因为 $8=(\pm 2)^2+(\pm 2)^2$

$r(10)=8$，因为 $10=(\pm 1)^2+(\pm 3)^2$

$=(\pm 3)^2+(\pm 1)^2$)

则

$$R(x)=\sum_{n=0}^{[x]} r(n) \tag{20}$$

数论中有一个著名的结论：在 n 为自然数时，

$$r(n)=4(A-B) \tag{21}$$

其中 A 是 n 的 $\equiv 1 \pmod 4$ 的正因数的个数，B 是 n 的 $\equiv 3 \pmod 4$ 的正因数的个数.

【例 8】 试导出柳维耳(Liouville)恒等式

$$[\sqrt{x}]+[\sqrt{x-1^2}]+[\sqrt{x-2^2}]+\cdots$$
$$=\left[\frac{x}{1}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]-\left[\frac{x}{7}\right]+\cdots \tag{22}$$

及莱布尼兹的公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \tag{23}$$

解 用两种方法计算圆 $u^2+v^2=x$ 的、位于第一象限的格点个数 S(包括正 v 轴上的格点，不包括 u 轴上的格点).

一方面，在每条竖线 $u=k$(k 为 $\leqslant[\sqrt{x}]$ 的非负整数)上，有 $[\sqrt{x-k^2}]$ 个格点. 所以

$$s=[\sqrt{x}]+[\sqrt{x-1^2}]+[\sqrt{x-2^2}]+\cdots \tag{24}$$

(共$[\sqrt{x}]+1$项)

另一方面，$s=\frac{1}{4}(R(x)-1)$. 由(20)、(21)，

$$s=\sum_{n=1}^{[x]}(A-B) \tag{25}$$

每个 n 有正因数 1，对(25)中的和贡献 1，总贡献为$[x]$. 有因数 3 的 n，这因数对和贡献-1，总贡献为$\left[\frac{x}{3}\right]$. 有因数 5 的 n，这因数对和贡献$+1$，总贡献为$\left[\frac{x}{5}\right]$，…. 因此，有

$$s=\left[\frac{x}{1}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]-\left[\frac{x}{7}\right]+\cdots \tag{26}$$

由(24)、(26)即得(22).

为了得到(23)，我们注意

$$0\leqslant\left[\frac{x}{2k+1}\right]-\left[\frac{x}{2k+3}\right]+\left[\frac{x}{2k+5}\right]-\cdots\leqslant\left[\frac{x}{2k+1}\right]$$

所以

$$s=\left[\frac{x}{1}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\left[\frac{x}{2k-1}\right]+(-1)^{k}\left[\frac{x}{2k+1}\right]\cdot\theta$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$. 取 $k=[\sqrt{x}]$，则

$$s=\frac{x}{1}-\frac{x}{3}+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot\frac{x}{2k-1}+\sqrt{x}\cdot\theta'+(-1)^{k}\sqrt{x}\theta''$$

其中 $0\leqslant\theta'\leqslant1$，$0\leqslant\theta''\leqslant1$.

由(15)，

$$\frac{\pi}{4}((\sqrt{x}-\sqrt{2})^2-1)\leqslant s\leqslant\frac{\pi}{4}((\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-1) \quad (27)$$

所以

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{s}{x}=\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^k}{2k-1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

4 组合论证

有些恒等式或不等式，可以通过组合上的考虑而获得证明. 这种方法称为组合论证.

【例 1】 证明组合恒等式

$$C_{n+1}^{k}=C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1} \tag{1}$$

其中 k,n 都是自然数，并且 $k\leqslant n$.

解 从 $n+1$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 中选取 k 个，产生的 k 元子集共有 C_{n+1}^{k} 个.

另一方面，这些 k 元子集可以分为不交的两类：第一类含有 a_{n+1}，第二类不含 a_{n+1}.

第一类中的子集是从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中选取 $k-1$ 个，再添上 a_{n+1} 而得到的. 因此共有 C_{n}^{k-1} 个.

第二类中的子集是从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中选取 k 个得到的. 共有 C_{n}^{k} 个.

综合以上两个方面便得(1).

用同样的方法不难证明

$$C_{m+n+1}^{n+1}=C_{m+n}^{n}+C_{m+n-1}^{n}+\cdots+C_{n+1}^{n}+C_{n}^{n} \tag{1'}$$

【例 2】 n,h,k 都是非负整数，并且 $n\geqslant k+h$. 证明

$$C_{n}^{k+h}\geqslant C_{n-k}^{h} \tag{2}$$

等号何时成立?

解 在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 $k+h$ 个元，产生 $k+h$ 元子集的方法有 C_n^{k+n} 种. 其中，先取前 k 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_k$；再从 $a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n$ 这 $n-k$ 个元中取 h 个的方法有 C_{n-k}^h 种. 显然后者不大于前者，这就是(2).

等号成立时 $n=k+h$(否则总有不全含 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的 $k+h$ 元子集). 反过来，$n=k+h$ 时，显然有 $C_n^{k+n}=C_{n-k}^h=1$.

【例 3】 $n\in \mathrm{N}$(以下均如此，不再申明)，证明

$$C_{2n}^n<2^{2n} \tag{3}$$

解 $2n$ 元集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\}$ 的子集共 2^{2n} 个. 其中 n 元子集有 C_{2n}^n 个.

【例 4】 证明

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n \tag{4}$$

解 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集共 2^n 个. 其中 k 元集共 C_n^k 个 $(k=0,1,\cdots,n)$.

【例 5】 证明

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0 \tag{5}$$

解 在$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的奇子集(含奇数个元素的子集)与偶子集(含偶数个元素的子集)之间建立对应关系如下：

设 A 为奇子集，若 A 含有 a_1，则

$$A \longmapsto A\setminus\{a_1\}$$

若 A 不含有 a_1，则

$$A \longmapsto A\cup\{a_1\}$$

显然在奇子集 $B\neq A$ 时，B 的象($B\setminus\{a_1\}$或 $B\cup\{a_1\}$)与 A 的象不同. 并且，每一个偶子集也都是奇子集的象(这个奇子集

可由偶子集添上 a_1 或去掉 a_1 得到).因此,偶子集与奇子集一一对应,两者的个数相等.即

$$C_n^1+C_n^3+\cdots=C_n^0+C_n^2+\cdots$$

从而(5)成立.

【例 6】 证明在 $n\geqslant m$ 时,

$$\sum_{k=0}^{n-m}C_n^{m+k}C_{m+k}^m=2^{n-m}\cdot C_n^m \tag{6}$$

解 考虑从 n 人中选出 m 名正式代表及若干名列席代表的选法(列席代表不限人数,可以为 0).

一方面,先选定正式代表,有 C_n^m 种方法,然后从 $n-m$ 个人选列席代表,有 2^{n-m} 种方法,因此共有

$$2^{n-m}\cdot C_n^m \tag{7}$$

种选法.

另一方面,可以先选出 $m+k$ 人($k=0,1,\cdots,n-m$),然后再从中选出 m 名正式代表,其余的 k 人为列席代表.对每个 k,这样的选法有 $C_n^{m+k}\times C_{m+k}^m$ 种,从而,总选法的种数为

$$\sum_{k=0}^{n-m}C_n^{m+k}C_{m+k}^m \tag{8}$$

综合(7)、(8)即得(6).

【例 7】 m,n,r 都是自然数.证明

$$C_{n+m}^r=C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+C_n^2C_m^{r-2}+\cdots+C_n^rC_m^0 \tag{9}$$

(9)称为范德蒙(Vandermonde)恒等式.

解 从 n 位太太与 m 位先生中选出 r 位的方法有 C_{n+m}^r 种.

另一方面,从这 $n+m$ 人中选出 k 位太太与 $r-k$ 位先生

的方法有 $C_n^kC_m^{r-k}$ 种，$k=0,1,\cdots,r$. 所以从这 $n+m$ 人中选出 r 位的方法有 $C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+\cdots+C_n^rC_m^0$ 种.

综合以上两方面即得(9).

通常约定在 $r>n$ 或 $r<0$ 时，$C_n^r=0$. 所以(9)(或其他类似的式子)在 $r>n$ 时也是成立的.

【例 8】 证明

$$(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+\cdots+n(C_n^n)^2=nC_{2n-1}^{n-1} \qquad (10)$$

解 从 n 名先生、n 名太太中选出 n 人，这 n 人中有一人担任主席，并且必须为太太. 考虑有多少种选法.

一方面，先选一名太太任主席有 $C_n^1=n$ 种方法，再从其余的 $2n-1$ 人中选 $n-1$ 人有 C_{2n-1}^{n-1} 种方法. 所以共有 nC_{2n-1}^{n-1} 种选法.

另一方面，对于 $k=1,2,\cdots,n$，从 n 名太太中选 k 人，再从 k 人中选一人任主席，有 kC_n^k 种方法，从 n 名先生中选 $n-k$ 人有 $C_n^{n-k}=C_n^k$ 种方法(即在 n 名先生中选 k 人不去充当"代表"). 于是共有 $\sum\limits_{k=1}^{n}k(C_n^k)^2$ 种方法.

综合以上两个方面，便得(10).

(10)也可由(9)得出(令 $r=m=n-1$ 并利用 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$).

【例 9】 证明

$$n!=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^rC_n^r(n-r)^n \qquad (11)$$

解 左边显然是 n 个元素的(无重复元素的)排列个数. 我们要寻找另一种计算这个量的方法.

n 个元素的允许重复的排列个数为 n^n. 其中至少有 1 个元素不出现的有 $C_n^1\cdot(n-1)^n$ 种,至少有 2 个元素不出现的有 $C_n^2\cdot(n-2)^n$ 种,……,$n-1$ 个元素不出现的有 $C_n^{n-1}\cdot 1^n$. 因此,根据容斥原理,恰有 n 个元出现的(全)排列数为

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r C_n^r(n-r)^n$$

这也就是 n 个元的(元重复元素的)排列数.

【例 10】 证明

$$C_n^1C_n^n-C_n^2C_{2n}^n+\cdots+(-1)^{n+1}C_n^nC_{nn}^n$$
$$=(-1)^{n+1}\cdot n^n \tag{12}$$

解 设有编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个盒子及编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 种球,每种球各 n 个.

在每个盒子中各放一个球的放法,即 n 个数(球的号码)的允许重复的排列数,应为 n^n(每一只盒子里可放 n 种球的任一种).

另一方面,用 (i,j) 表示在第 i 个盒子里放第 j 号球. 则 n 个"点"

$$(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots,(i_n,j_n) \tag{13}$$

(其中 $i_k,j_k\in\{1,2,\cdots,n\},k=1,2,\cdots,n$)表示将 n 个球 $j_1,j_2,\cdots,j_n$(号码允许重复)分别放入盒子 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 里(盒子的号码也允许重复,即允许有些盒子里放几个球,有些盒子空着).

由于 i,j 都有 n 种选择,所以点 (i,j) 共有 $nn=n^2$ 个. 形如(13)的 n 个点的点组共有 C_{nn}^n 个.

其中 $1,2,\cdots,n$ 至少有一个不在横坐标中出现的点组有

$$C_n^1\times C_{(n-1)n}^n$$

个,至少有两个不在横坐标中出现的点组有

$$C_n^2\times C_{(n-2)n}^n$$

个,….

根据容斥原理,$1,2,\cdots,n$ 都在横坐标中出现的点组有

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^kC_{(n-k)n}^n \tag{14}$$

个,这种点组也就是在每只盒子里各放一只球的放法.所以

$$n^n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^kC_{(n-k)n}^n \tag{15}$$

由于 $C_n^k=C_n^{n-k}$,(15)就是(12).

【例 11】 设 a,A 都是自然数,$A\geqslant a$.证明

$$\frac{a}{A}+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdot\frac{a}{A-2}+\cdots+\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdots\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a}{a}=1 \tag{16}$$

解 设想一个袋中有 A 个大小相同的球,其中有 a 个是白的,其余的是黑的.每次摸出一个球,不放回去,直到摸到白球为止.

这是一个必然事件(迟早摸到白球),所以概率为 1.

另一方面,第一次摸到白球的概率为$\frac{a}{A}$.第一次未摸到白球,第二次摸到白球的概率为$\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}$,…,第 k 次才摸到白球的概率为$\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdots\frac{A-a-(k-2)}{A-(k-2)}\cdot$

$\frac{a}{A-(k-1)}(k=2,3,\cdots,A-a+1)$. 因此,摸到白球的概率为(16)式的左边,从而(16)成立.

在概率论中有不少恒等式,可以用类似的手法证明.

5 三步舞曲

“算两次”的典型做法是选择一个适当的量，从两个方面去考虑它，“一方面，另一方面，综合起来可得”. 好像三步舞曲，这种舞曲在组合数学中常常听到.

【例 1】 在凸 n 边形内任取 m 个点，以任意的方式作一些线段，连结这些点及多边形的顶点，使得每两条线段的内部没有公共点，并且整个多边形被分成若干个三角形. 这样的过程称为三角剖分，如图 21 所示.

问一共有多少个（内部不包含已知点的）三角形？

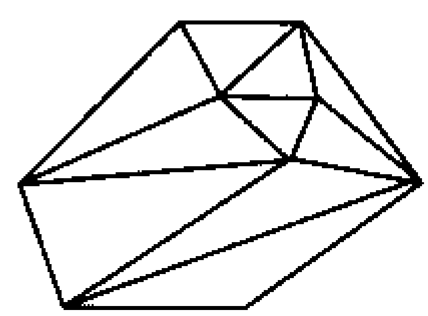


图 21

解 考虑所有三角形的内角之和.

一方面，每个三角形的内角和为 $180°$，如果三角形的个数为 t，则总和为$t\cdot 180°$.

另一方面，凸 n 边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$，而在已取的 m 个点处，各角的和组成 $360°$的周角. 因此，总和为

$$(n-2)\times 180°+m\times 360°$$

综合起来得到

$$t\times 180°=(n-2)\times 180°+m\times 360°$$

即

$$t=2m+n-2$$

【例 2】 $n,k\in\mathrm{N}$，S 为平面上 n 个点的集合，对于 S 中任一点 A，S 中至少有 k 个点到 A 的距离相等. 证明

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n} \qquad (1)$$

解 以 S 的点为圆心作 n 个圆，根据已知条件，我们可以使每一个所作的圆上至少有 k 个点属于 S.

称两个端点都在 S 中的线段为“好线段”. 我们考虑好线段的条数.

一方面，好线段的条数显然为 C_n^2.

另一方面，在每个所作的圆上至少有 C_k^2 条弦是好线段. n 个圆有 nC_k^2 条好线段，其中有一些是公共弦被重复计算了. 由于每两个圆至多有一条公共弦，所以公共弦的条数 $\leqslant C_n^2$. 从而好线段的条数 $\geqslant nC_k^2-C_n^2$.

综合起来得到

$$C_n^2\geqslant nC_k^2-C_n^2$$

即

$$k(k-1)\leqslant 2(n-1)$$

从而

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$$

三步曲中，如果两个方面都是精确的结果，综合起来得到一个等式. 如果至少有一个方面采用了估计，那么综合起来得到一个不等式.

有时，需要讨论的不是所取的量的数值，而是它的性质，

例如奇偶性. 下面的例 3 至例 8 均是如此.

【例 3】 将正三角形 ABC 的每一条边 n 等分，过各分点作其他两边的平行线. 这些平行线构成 n^2 个小正三角形，每一个的边长是$\triangle ABC$ 的 $1/n$. 将它们的顶点染上红、蓝、白三种颜色之一，并且 AB 上的点不染红色，BC 上的点不染蓝色，CA 上的点不染白色. 证明一定有一个小正三角形，它的三个顶点颜色不同.

解 每个小正三角形 t 有三条边，设其中有 x_t 条边两端颜色不同，考虑所有 x_t 的和 S.

一方面，如果三角形 t 的边不在 AB，BC 或 CA 上，那么这条边还属于另一个小三角形 t'，因而它对和 S 的贡献为偶数 0 或 2. AB 上的点染上蓝白两色，并且 A 一定是蓝色，B 一定是白色，所以从 A 经过 AB 上的各个分点到 B 时，颜色改变奇数次，即 AB 上有奇数条属于小正三角形的边两端异色，BC，CA 上也是如此. 它们对 S 的贡献均为奇数. 所以 S 为奇数.

另一方面，如果每个三角形 t 中至少有两个顶点同色，那么每个三角形有 0 或 2 条两端异色的边. 它对和 S 的贡献为偶数，从而 S 为偶数.

两方面所得结果不一致. 这矛盾表明必有小的正三角形三个顶点颜色不同.

【例 4】 矩形 R 是若干个小矩形 $R_i(1\leqslant i\leqslant n)$的并集，$R_i$ 互不重叠，边与坐标轴平行，并且每个 R_i 至少有一条边的长为整数. 证明 R 也至少有一条边为整数.

解 不妨设矩形 R 的顶点 O 为原点，顶点 A,C 分别在 x 轴与 y 轴的正方向上.

考虑每个矩形 $R_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的顶点中整点的个数之和 S.

一方面，由于每个 R_i 至少有一条边的长为整数，它的整顶点的个数为 0，2 或 4. 从而和 S 为偶数.

另一方面，每个 R_i 的顶点，除去 R 的四个顶点 O,A,B,C 均属于 2 或 4 个小矩形(图 22)，对 S 的贡献为偶数. 如果 R 的边长均不是整数，那么 O,A,B,C 中只有 O 为整点，并且 O 只属于一个小矩形. 因此 S 为奇数.

图 22

两方面的结果产生矛盾，这表明 R 至少有一条边的长为整数.

用两种不同的方法计算同一个量，有时会导出矛盾. 如果计算是正确的，那么产生矛盾的原因是有一种计算采用了某个错误的前提 A. 矛盾恰好证明了命题 $\overline{A}$(非 A，即命题 A 的否定)是正确的. 因此，运用反证法时，这种矛盾正是我们所期望的.

当然，反证法是可以避免的. 在例 4 中，得出 S 为偶数后，便可导出 O,A,B,C 中必有偶数个整点，从而 A,B,C 中至少有一个整点，R 至少有一条整数边长.

【例 5】 一个立方体的顶点标上 $+1$ 或 -1. 面上标一个

数，它等于这个面的 4 个顶点处的数的乘积. 这样所标的 14 个数的和能否为 0?

解 考虑这 14 个数的积 S.

将每个面所标的数写成 4 个顶点处的数的乘积. 这样，在 S 中，每个顶点所标的数将作为乘数出现 4 次(因为过这点有三个面)，从而它对 S 的贡献为 1. 因此，$S=1^8=1$.

14 个数的积 S 为 1，所以这 14 个 $\in\{\pm1\}$ 的数中，-1 的个数为偶数. 由于 -1 的个数不为 7，这 14 个数的和不为 0.

也可以采用反证法(如例 3、例 4 那样做). 不过，我们不一定非套用“三步曲”的格式. 其实，重要的并不是形式. 在许多问题中，困难的倒是选择什么量来考虑. 选准了，问题迎刃而解. 选不好，事倍功半.

【例 6】 九只兵组成 3×3 的正方形，放在 8×8 的棋盘的左下角. 每只兵可以跳过它身边的另一只兵到一个空着的方格，即可以关于它的邻格的中心作对称运动(可以横跳、竖跳或沿着斜线跳). 要求这些兵跳到棋盘的另一个角(另一个 3×3 的正方形)，如果是

(a)左上角，

(b)右上角，

这一要求能否实现?

解 (a)、(b)均不能实现.

自左下角起，每个方格可以用一组数(坐标)来表示.(自下而上)第 i 行、(自左而右)第 j 列的方格记为(i,j). 问题的关键是考虑九只兵(所在方格)的纵坐标的和 S.

一方面，每跳一次，S 增加 0 或 2，因而 S 的奇偶性不变.

另一方面，右(左)上角 9 个方格的纵坐标的和比左下角 9 个方格的纵坐标之和大

$$5\times 9=45$$

这是一个奇数.

综合以上两个方面即知九只兵不能全跳至右(左)上角的那个 3×3 的正方形里.

本题如果将纵横坐标加在一起来考虑，则比较麻烦，问题不能顺利解决.

【例 7】 对有限集 X 的子集族 S，定义

$$S'=\{A|A \text{ 是 } S \text{ 中奇数个集的子集}\}.$$

证明

$$(S')'=S. \tag{2}$$

(例如 $X=\{1,2,3\}$，$S=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$，则 $S'=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. $(S')'=S$).

解 对任一子集 $A\subset X$，考虑满足条件：

$$A\subset B\subset C\in S \tag{3}$$

的子集的对 B,C 的个数 n.

一方面，对固定的 C，满足(3)的 B 有

$$2^{|C|-|A|} \tag{4}$$

个($|B|$ 表示集 B 的元数). 当且仅当 $C=A$ 时，(4)是奇数. 因此，

$$n=\sum_{A\subset C\in S}2^{|C|-|A|} \tag{5}$$

当且仅当 $A\in S$ 时，n 是奇数.

另一方面,对每个固定的 B,当且仅当 $B\in S'$ 时,有奇数个 C 满足(3). 因此

n 是奇数$\Leftrightarrow$有奇数个 $B\in S'$ 满足 $B\supset A\Leftrightarrow A\in(S')'$.

综合以上两个方面得

$$A\in S\Leftrightarrow A\in(S')'$$

即(2)式成立.

奇偶性无非是一种(将整数)分类的方法. 根据问题的需要,也可以考虑 mod3 的剩余类,即按照除以 3 的余数将整数分类,或者,更一般地,按照 mod$m$(m 是自然数)的剩余类(即按照除以 m 的余数)分类.

【例 8】 在凸 n 边形中连 $n-3$ 条对角线,这些对角线在多边形的内部不相交. 如果所得的图是可以一笔画成的圈(即可以从一个顶点出发,经过图中各条线段恰好一次,最后回到出发点),证明 n 是 3 的倍数.

解 $n-3$ 条对角线将 n 边形分为 $n-2$ 个三角形.

不难证明(例如用归纳法)可以将这些三角形染成红色或蓝色,使得每两个相邻(即有公共边)的三角形颜色不同.

由于这个图是可以一笔画成的圈,所以每个顶点处有偶数条线(有一条从这个顶点画出的线,就有一条画回这个顶点的线). 因而有奇数个三角形以这个顶点为顶点. 于是以顶点 A_1 为顶点的、最外面的两个三角形(也就是分别以多边形的 A_1A_2,A_1A_n 为边的两个三角形)同色.

对多边形的每一个顶点,同样的结论成立. 于是,最外面的三角形(即至少有一条边是原多边形的边的那些三角形)

同色. 不妨设同为红色.

考虑蓝色三角形的边数的和 S.

一方面,多边形的边都不属于蓝色三角形,每一条对角线属于两个三角形,一红一蓝. 所以蓝色三角形的边数之和 S 等于对角线的条数 $n-3$.

另一方面,每个三角形有 3 条边. 所以 S 是 3 的倍数.

综合以上两个方面,得到 $n-3$ 是 3 的倍数,从而 n 是 3 的倍数.

我们常常从两个方面来估计一个量,分别得出它的上界与下界(例 2 中得出 k 的上界). 如果上界与下界恰好相等,这个量就完全确定了.

【例 9】 设 k 是自然数,

$$S_k=\{(a,b)\mid a,b=1,2,\cdots,k\}$$

对于 (a,b)、$(c,d)\in S_k$,如果

$$\left.\begin{array}{l} a-c\equiv 0 \text{ 或} \pm 1 \pmod{k} \\ b-d\equiv 0 \text{ 或} \pm 1 \pmod{k} \end{array}\right\} \tag{6}$$

就称 (a,b) 与 (c,d) 是无法区分的. 否则称为可区分的. 例如 $(1,1)$ 与 $(2,5)$ 在 S_5 中是不可区分的.

设 $A\subset S_k$,A 的元素是两两可区分的. 这种 A 的元素个数的最大值记为 r_k. 求 r_k.

解 设想有一个 k 行 k 列的象棋棋盘,它的上端与下端,左端与右端连结在一起,形成一个环面. 问题就是:

"在这个环面的棋盘上,最多能放几只帝,它们互不相吃(帝放在横线与竖线的交叉处,可沿横线、竖线或斜线移动一

格并吃掉在该格的棋子)?”

我们证明

$$r_k=\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right] \tag{7}$$

当 k 为偶数时，将相邻的 4 个格点(它们组成 1×1 的正方形)作为一组. 共有$\frac{k^2}{4}$个互不相交的组，每一组中至多能放一只帝. 所以

$$r_k\leqslant\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right] \tag{8}$$

当 k 为奇数时，首先注意每相邻两行中至多放$\left[\frac{k}{2}\right]$个帝. 事实上，不妨设第 1 列有一个帝，按前面的方法，把这两行分为$\left[\frac{k}{2}\right]$组，每组 4 个格点构成 1×1 的正方形，但第 k 列、第 1 列、第 2 列的 6 个格点为一组. 每一组中至多有 1 个帝，两行至多$\left[\frac{k}{2}\right]$个帝.

第 $i,i+1,i+2,\cdots,k,1,2,\cdots,i-2$ 行，每两行一组. 根据上面所证，这 $k-1$ 行中至多放$\frac{k-1}{2}\left[\frac{k}{2}\right]$个帝($i=1,2,\cdots,k$).

于是，每连续 $k-1$ 行(第 k 行与第 1 行作为连续的行)中帝的个数的和 S_i 的和 S 满足

$$S\leqslant k\cdot\frac{k-1}{2}\left[\frac{k}{2}\right] \tag{9}$$

另一方面，设放了 r_k 只帝，所放的每只帝在 $k-1$ 个 S_i

中出现，所以

$$r_k \cdot (k-1)=S \tag{10}$$

综合(9)、(10)得

$$r_k \leqslant \frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right] \tag{11}$$

由于 r_k 是整数，所以由(11)得到(8).

(8)是 r_k 的上界.另一方面，我们证明

$$r_k \geqslant \left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right] \tag{12}$$

为此，采用构造法.

当 k 为偶数时，棋盘可分为 $\frac{k}{2}\times\frac{k}{2}$ 个 2 行 2 列的“子棋盘”.将帝放在每个子棋盘的左上角，则这 $\frac{k^2}{4}$ 个帝互不相吃.

当 $k=4n+1$ 时，将帝放在

$(1,4n+1),(3,4n),\cdots,$

$(4n-1,2n+2),(4n+1,2n+1),$

$(1,4n-1),(3,4n-2),\cdots,$

$(4n-1,2n),(4n+1,2n-1),$

……

$(1,2n+3),(3,2n+2),\cdots,$

$(4n-1,4),(4n+1,3),$

$(2,2n),(4,2n-1),\cdots,(4n,1),$

$(2,2n-2),(4,2n-3),\cdots,(4n,4n),$

……

$$(2,2),(4,1),\cdots,(4n,2n+4)$$

这 $n(2n+1)+n\cdot 2n=n(4n+1)$ 个点上.

当 $k=4n+3$ 时,将帝放在

$$(1,4n+3),(3,4n+2),\cdots,$$
$$(4n+1,2n+3),(4n+3,2n+2),$$
$$(1,4n+1),(3,4n),\cdots,$$
$$(4n+1,2n+1),(4n+3,2n),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(1,2n+5),(3,2n+4),\cdots,$$
$$(4n+1,5),(4n+3,4),$$
$$(2,2n+2),(4,2n+1),\cdots,(4n+2,2),$$
$$(2,2n),(4,2n-1),\cdots,(4n+2,4n+3),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(2,2),(4,1),\cdots,(4n+2,2n+5)$$

这 $n(2n+2)+(n+1)(2n+1)=(n+1)(4n+1)$ 个点上.

因此,总有(12)式成立.

综合(11)、(12)即得(7).

【例 10】 取集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一批三元子集,其中每两个(取出的三元子集)至多有一个公共元素. 记 $f(n)$为这批三元子集的个数的最大值. 证明

$$\frac{1}{6}(n^2-4n)\leqslant f(n)\leqslant\frac{1}{6}(n^2-n) \tag{13}$$

解 先估计 $f(n)$的上界. 每个三元子集$\{a,b,c\}$可以"一气化三清",产生三个二元子集:$\{a,b\}$,$\{b,c\}$,$\{c,a\}$.

如果两个三元子集至多有一个公共元，那么所产生的二元子集互不相同.

互不相同的二元子集共有 C_n^2 个，所以

$$3f(n)\leqslant C_n^2$$

即(13)的右边的不等式成立.

估计 $f(n)$ 的下界还是采用构造法，造出一批三元子集，个数 $\geqslant\frac{1}{6}n(n-4)$，每两个的交至多含一个元素.

为此，考虑所有满足条件

$$a+b+c\equiv 0 \pmod n \tag{14}$$

(即 $a+b+c$ 被 n 整除)的三元子集 $\{a,b,c\}$.

如果有 $a'=a,b'=b$，并且

$$a'+b'+c'\equiv a+b+c\equiv 0 \pmod n$$

那么

$$c'\equiv c \pmod n \tag{15}$$

在 $c,c'\in\{1,2,\cdots,n\}$ 时，(15)就是 $c'=c$. 所以满足(14)的每两个(不同的)三元子集至多有一个公共元素.

现在来计算满足(14)的三元子集 $\{a,b,c\}$ 的个数 S. 首先取 a，取法有 n 种. a 取定后再取 b. 只要 $b\neq a$，并且 b 不满足同余方程

$$2a+b\equiv 0 \pmod n$$

(即在 $2a<n$ 时，$b\neq n-2a$；在 $2a\geqslant n$ 时，$b\neq 2n-2a$)及

$$a+2b\equiv 0 \pmod n$$

$\left(\text{即 } b\neq\frac{n-a}{2},b\neq\frac{2n-a}{2}\right)$. 因此，$b$ 至少有 $n-4$ 种选择. 在 a,b

确定后,c 也随之确定. 所以 $s\geqslant\frac{1}{6}n(n-4)$. 从而(14)式的另一半成立.

6 计数论证

本节继续讨论组合数学中的问题（也有其他方面的问题）. 所用的方法是“计数论证”.

【例 1】 将 1, 2, …, 10 这十个数依任意顺序排成一圈. 证明其中必有三个相邻的数，它们的和不小于 18.

解 1 以外的 9 个数，在圆周上形成 3 组，每组 3 个数在圆周上相邻. 这 9 个数的和为

$$2+3+\cdots+10=54 \qquad (1)$$

所以其中必有一组的 3 个数的和 $\geqslant 54\div 3=18$ (2)

18 是最佳的结果. 如图 23，圆周上每 3 个相邻的数，和均不超过 18.

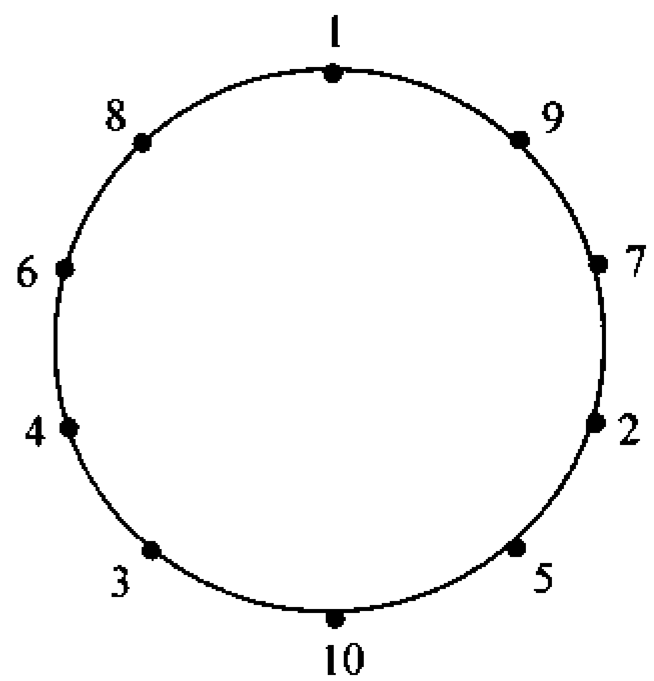


图 23

这种处理方法可以说成“从总和经平均到单独”，也有人称为平均原则. 它与狄利克雷(Dirichlet)的抽屉原则是一回事. 当代数学家厄尔多斯(Erdös)运用这种方法解决了许多问题，大大地丰富与发展了这个方法. 由于其中的要点是

对总和进行计数，我们依照厄尔多斯的说法，称之为计数论证.

【例 2】 在半径为 1 的圆周上给出两个点集 A，B. 它们都由有限多条互不相交的弧组成. B 的每段长度都等于$\frac{\pi}{m}$，m 为自然数. A^j 表示将 A 绕圆沿反时针方向转动$\frac{j\pi}{m}$所得的集合($j=1,2,\cdots$). 证明存在自然数 k，使

$$l(A^k \cap B) \geqslant \frac{1}{2\pi} l_{(A)} l_{(B)}$$

这里 $l_{(M)}$ 表示集 M 中所有弧的长度之和.

解 B 由 $t=\frac{l_{(B)}}{\pi/m}$条弧组成. 设它们为 $B_1, B_2, \cdots B_t$. 用 $B^j, B_1^j, \cdots, B_t^j$ 表示将 $B, B_1, \cdots, B_t$ 绕圆沿顺时针方向转动$\frac{j\pi}{m}$所得的点集($j=1,2,\cdots$). 则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2m} l(A^j \cap B) &= \sum_{j=1}^{2m} l(A \cap B^j) \\
&= \sum_{j=1}^{2m} \sum_{i=1}^{t} l(A \cap B_i^j) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{2m} l(A \cap B_i^j) \\
&= \sum_{i=1}^{t} l(A) \\
&= t l_{(A)} \\
&= \frac{l_{(A)} l_{(B)}}{\pi/m}
\end{aligned}$$

于是(经平均到单独)存在自然数 k,使

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2m}\cdot\frac{l_{(A)}l_{(B)}}{\pi/m}=\frac{1}{2\pi}l_{(A)}l_{(B)}$$

【例 3】 D,E,F 分别在$\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上. 证明$\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 中至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$ 的$\frac{1}{4}$.

解 设$\triangle ABC$ 的面积为 1. 又设

$$\frac{BD}{BC}=\lambda,\ \frac{CE}{CA}=\mu,\ \frac{AF}{AB}=\nu$$

则

$$S_{AEF}=\nu(1-\mu)$$
$$S_{BFD}=\lambda(1-\nu)$$
$$S_{CDE}=\mu(1-\lambda)$$

于是积(类似于例 1、例 2 中的和)

$$S_{AEF}\cdot S_{BFD}\cdot S_{CDE}=\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)\nu(1-\nu)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

从而 S_{AEF}, S_{BFD}, S_{CDE}必有一个$\leqslant\frac{1}{4}$.

【例 4】 6 个点,每两个点之间有一条线相连,线染上红色或蓝色. 证明一定有两个以这些点为顶点的三角形,每个三角形的边是同一种颜色(可能有公共的边).

解 我们称三边同色的三角形为同色三角形. 设有 x 个这样的三角形,则三边不全同色的三角形的个数是 C_6^3-x.

考虑这个图中同色角(即由两条同色的边所组成的角)的个数 S.

一方面，每个同色三角形中有 3 个同色角，每个边不全同色的三角形中有一个同色角，所以

$$S=3x+(C_6^3-x)=2x+C_6^3=2x+20 \tag{3}$$

另一方面，如果一个顶点引出 r 条红色的边，那么以这个顶点为顶点的同色角的个数

$$C_r^2+C_{5-r}^2\geqslant C_3^2+C_2^2=4$$

所以

$$S\geqslant 6\times 4=24 \tag{4}$$

综合(3)、(4)得 $x\geqslant 2$.

本例可以看成由平均数($\geqslant 4$)来估计总数 S.

例 4 有一个直接的推论：

"任意 6 个人中，必有 3 个人互相认识或者互不相识."

它相当于将 6 个点的连线(共 C_6^2 条)染上两种颜色，所得的图中有一个同色的三角形.

类似的技术还可以解下面的例 5.

【例 5】 某俱乐部有 $3n+1$ 名成员. 对每一个人，其余的人中恰好有 n 个愿与他打网球，n 个愿与他下象棋，n 个愿与他打乒乓. 证明俱乐部中有 3 个人，他们之间玩的游戏三种俱全.

解 将每个人作为点. 每一点引出 n 条红边，n 条蓝边，n 条黑边，分别代表打网球，下象棋及打乒乓. 要证明图中有一个三边颜色全不相同的三角形.

考虑异色角(即两条异色的边所构成的角)的个数 S.

每个顶点处有 $3n^2$ 个异色角，所以

$$S=3n^2(3n+1)$$

平均每个三角形有

$$\frac{3n^2(3n+1)}{C_{3n+1}^3}=\frac{6n}{3n-1}>2$$

个异色角. 因此,至少有一个三角形有 3 个异色角,这个三角形的三条边当然互不同色.

本题也可从同色角的个数入手,两种解法并无实质上的差别.

【例 6】 所谓图,是由一些点及连结这些点的一些边组成. 如果点数为 n,图中没有(以这些点为顶点的)三角形,那么边的条数 $e\leqslant\frac{n^2}{4}$.

解 设点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 自点 x_i 引出的边数为 $d(x_i)$,并称为 x_i 的次数($i=1,2,\cdots,n$).

如果点 x_i 与 x_j 相连,由于图中无三角形,所以

$$d(x_i)+d(x_j)\leqslant n \tag{5}$$

对所有相连的 x_i,x_j 求和得

$$\sum(d(x_i)+d(x_j))\leqslant ne \tag{6}$$

注意对每个 i,

$$\sum_{\substack{j \\ x_j\text{与}x_i\text{相连}}} 1=d(x_i) \tag{7}$$

所以(6)的左边等于

$$\sum_{i=1}^{n}d(x_i)\sum_{\substack{j \\ x_j\text{与}x_i\text{相连}}}1=\sum_{i=1}^{n}d^2(x_i) \tag{8}$$

由 Cauchy 不等式,

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\right)^2 = \frac{1}{n}(2e)^2 \tag{9}$$

综合(6)、(8)、(9)得

$$\frac{1}{n}(2e)^2 \leqslant ne$$

即

$$e \leqslant \frac{n^2}{4} \tag{10}$$

对(5)求和,是从局部到整体(总和). 与平均的方法相反相成.

例 6 的结论也可以说成:"n 个点的图,如果边数 $e>\frac{n^2}{4}$,那么图中一定有三角形."

这个结果不是最佳的,它可以进一步加强. 这就是下面的例 7.

【例 7】 如果边数 $e>\frac{n^2}{4}$,那么图中一定有$\left[\frac{n}{2}\right]$个三角形.

解 为叙述清楚起见,设 n 为偶数 $2m$(n 为奇数的情况与之类似). 我们用归纳法证明:

$e \geqslant m^2+1$ 时,图中有 m 个三角形.

奠基是显然的. 设命题对于 m 成立,考虑有 $2(m+1)$个点,$(m+1)^2+1$ 条边的图.

由例 6,我们知道图中有一个$\triangle A_1A_2A_3$. 设点 A_i 向其他点(A_1,A_2,A_3 以外的点)引出的边数为 a_i($i=1,2,3$). 这时有两种情况:

情况 1　$a_1+a_2+a_3 \leqslant 3m-2$

由于 $(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_1)\leqslant 2(3m-2)$，而

$$\frac{2(3m-2)}{3}<2m-1 \tag{11}$$

所以 $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_n$ 中必有一个 $\leqslant 2m-2$. 不妨设

$$a_1+a_2\leqslant 2m-2 \tag{12}$$

删去 A_1, A_2 及自这两点引出的边. 图中至少还有

$$(m+1)^2+1-(2m-2)-3=m^2+1$$

条边. 根据归纳假设，应有 m 个三角形. 故原来的图中有 $m+1$ 个三角形(增加了一个三角形，即 $\triangle A_1A_2A_3$).

情况 2　$a_1+a_2+a_3\geqslant 3m-1$

由于图中除去 A_1, A_2, A_3 外，仅有 $2m-1$ 个点. 如果这些点各向 $\triangle A_1A_2A_3$ 的某个顶点引一条边，一共 $2m-1$ 条，还差

$$(3m-1)-(2m-1)=m$$

条. 将这些边添上，每添一条就产生一个三角形. 因此，图中有 $m+1$ 个三角形.

当 $n=2m+3$ 时，需将证明中 $3m-2, 2m-1, 2m-2, 3m-1, 2m-1$ 等相应地改为 $3m-1, 2m, 2m-1, 3m, 2m$(即各增加 1).

例 7 的结果是最佳的. 事实上，考虑由 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个点组成的集 X 与由 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个点组成的集 Y. 将 X 的每一点与 Y 的每一点相连，共得

$$\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

条边. 再将 Y 的某一对点相连,则边数 $e>\frac{n^2}{4}$. 而三角形的个数为 $\left[\frac{n}{2}\right]$.

情况 1 中,求 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 的平均值,而不是求 a_1,a_2,a_3 的平均值. 这一点值得注意. 在例 1 中已经用过这一方法,那时这样做是显然的(或者说是当然的). 现在则不一定能看出它是问题的关键(不这样做比较麻烦). 究竟对什么量来求平均,是一个非常重要的技术,这取决于所考虑的问题,不可生搬硬套.

【例 8】 考题为 4 道选择题,每题有 3 个供选择的答案. 参加考试的人中,每三个人都有一个问题,他们的答案各不相同. 问至多有多少个学生?

解 至多有 9 个学生.

设第 i 道题的答案为 a_i,b_i,c_i 三种($i=1,2,3,4$).

如果人数$\geqslant 10$,设 a_1,b_1,c_1 中最多的两种为 a_1,b_1. a_1,b_1 出现的次数之和(与例 7 的情况 1 类似,但现在是最多的两种,而不是最少的两种)

$$\geqslant\left\lceil\frac{2\times 10}{3}\right\rceil=7 \tag{13}$$

($\lceil x\rceil$)的定义见第 3 节.)

考虑 7 个人,他们对问题 1 的答案是 a_1 或 b_1. 设这些人对第 2 个问题的答案以 a_2,b_2 为最多,则 a_2,b_2 出现的次数之和

$$\geqslant\left\lceil\frac{2\times 7}{3}\right\rceil=5$$

同样，上面的五个人中有$\left\lceil\frac{2\times5}{3}\right\rceil=4$ 个人对问题 3 的答案为 a_3 或 b_3.

在这 4 个人中，有两个人对问题 4 的答案相同. 这两个人与(上述 4 个人中的)另一个人，对每一个问题的答案均至少有两个是相同的. 所以总人数$\leqslant9$.

容易验证，如果 9 个人的答案如表 1 所示，则每三个人都至少有一个问题，他们的答案各不相同.

表 1

人 \ 问题	1	2	3	4	人 \ 问题	1	2	3	4
1	a	b	a	b	6	c	c	a	a
2	b	c	b	b	7	a	c	c	c
3	c	a	c	b	8	b	a	a	c
4	a	a	b	a	9	c	b	b	c
5	b	b	c	a					

【例 9】 证明在任意的 n 个人中，一定有两个人，使得其余的 $n-2$ 个人中至少有$\left\lceil\frac{n-3}{2}\right\rceil$ 个人，他们都认识这两个人或者都不认识这两个人.

解 将人用点表示. 对互相认识的人，在相应的两点之间连一条红线. 否则，连一条蓝线.

与例 4 类似，设某点引出 r 条红边，则顶点在这点的同色角的个数为

$$C_r^2+C_{n-1-r}^2=\frac{1}{2}(r^2-r+(n-1-r)^2-(n-1-r))$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(n-1)^2-(n-1)\right)$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)}{4}$$

所以同色角的总数

$$S\geqslant\frac{n(n-1)(n-3)}{4}$$

图中有 C_n^2 个由两个点组成的二点组. 由总数 S 取平均得

$$\frac{S}{C_n^2}\geqslant\frac{n-3}{2}$$

即存在一个二点组,边分别经过这二点组(的两个点)的同色角的个数不小于$\left\lceil\frac{n-3}{2}\right\rceil$. 证毕.

【例 10】 集 M 由平面上的格点(x,y),$1\leqslant x\leqslant 12$,$1\leqslant y\leqslant 13$ 组成. 将 M 的点分别染上红、蓝、黑三种颜色. 证明其中必有四个同色的点,它们组成一个边与坐标轴平行的矩形.

解 设红色的点最多,则它的个数不少于

$$\frac{12\times 13}{3}=52$$

我们可以证明更强的结论:如果 M 中红色点至少有 49 个,那么其中必有 4 个红点组成一个边与坐标轴平行的矩形.

为此,设各行的红点数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}$,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{13}=49 \qquad (14)$$

考虑同一行上红点的二点组. 这样的二点组共有

$$S=C_{a_1}^2+C_{a_2}^2+\cdots+C_{a_{13}}^2 \tag{15}$$

个. 与例 4 类似,(15)在 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}$ 差不多全相等时最小,确切地说

$$S\geqslant C_4^2+C_4^2+\cdots+C_4^2+C_3^2+C_3^2+C_3^2 \tag{16}$$

(在 a_1+a_2 为偶数时,$a_1^2+a_2^2\geqslant 2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$. 在 a_1+a_2 为奇数时,$a_1^2+a_2^2\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+1}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1+a_2-1}{2}\right)^2$. 反复利用这两个式子便可以得出

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{13}^2\geqslant 4^2+4^2+\cdots+4^2+3^2+3^2+3^2$$

从而(16)成立). 即

$$S\geqslant 10\times\frac{4\times 3}{2}+3\times 3=69 \tag{17}$$

将每两列作为一组,共有

$$C_{12}^2=\frac{12\times 11}{2}=66 \tag{18}$$

个列组.

由(17)、(18)可知,有一个列组中含有两个二点组(因为 $69>66$,也就是平均值大于 1). 这样的四个红色点构成边与坐标平行的矩形.

本题如果计算各列的二点组与每两行所成的行组,则由于

$$C_4^2+C_4^2+\cdots+C_4^2+C_5^2=76< C_{13}^2=78$$

而不能得到加强了的结论.

可以证明 49 不能改为 48,参见第 7 节例 10.

计数论证有种种的变形.在计算某块面积被覆盖的次数时,有人称之为重叠原理.

【例 11】 在半径 $R=16$ 的圆中有 650 个红点.证明存在一个内半径为 2,外半径为 3 的圆环,其中至少含有 10 个红点.

解 以每个红点为中心,作内半径为 2、外半径为 3 的圆环.这些圆环的面积之和为

$$650\pi\times(3^2-2^2)$$

它们均在半径为 $16+3=19$ 的圆内(圆心即已知圆的圆心),这个圆的面积为 $19^2\pi$.

因为

$$\frac{650\pi\times(3^2-2^2)}{19^2\pi}>9$$

所以在这个半径为 19 的圆内必有一点 A 至少被 10 个圆环所覆盖.

以 A 为心,内半径 2,外半径 3 作圆环.这圆环内至少含有 10 个红点,它们是上述 10 个圆环的中心.

关于重叠原理的例子,请参看拙著《覆盖》(上海教育出版社,1983 年出版).

最后,我们介绍一下著名的 Sperner 定理.

【例 12】 设 X 为 n 元集,$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为 X 的子集,互不包含.证明 m 的最大值为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

解 考虑 X 的全排列.其总数为 $n!$.而开头的 $|A_i|$ 个数 $\in|A_i|$ 的有($|A_i|$表示 A_i 的元数)

$$|A_i|!\cdot(n-|A_i|)!$$

个($i=1,2,\cdots,m$). 由于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不包含,所以这些排列互不相同. 于是

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|!\cdot(n-|A_i|)!\leqslant n! \tag{19}$$

即

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1 \tag{20}$$

众所周知,C_n^k 在 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$时最大,所以由(20)得

$$\frac{m}{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}\leqslant 1$$

即

$$m\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \tag{21}$$

在 X 中,可以取 $m=C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,每一个含$\left[\frac{n}{2}\right]$个元素. 这些子集显然互不包含.

上述证明由 D. Lubell(1996)最早完成. 其实质就是在全排列中,"头"属于某个集 A_i 的概率 q_i 的平均值$\leqslant\frac{1}{m}$. 而每个 q_i 均$\geqslant\frac{1}{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}$,从而$\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}$,这就是(21).

7 集合、元素

许多关于集合的问题,可以从两个方面去考虑:一个集合含有哪些元素,一个元素属于哪些集合.然后将这两个方面综合起来,导出结论.

集合与元素的从属关系常常用一个数表(矩阵)来表示:

元素 / 集合	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
A_1				
A_2				
$\vdots$				
A_m				

如果元素 a_j 属于集合 A_i,就在第 i 行第 j 列的交叉处标上 1,否则就标上 0.这样,第 i 行的 1 就表示集合 A_i 含有哪些元素,第 i 行的数的和(行和)就表示集 A_i 的元数 $|A_i|$.第 j 列的 1 表示元素 a_j 属于哪些集合,第 j 列的数的和(列和)就表示元素 a_j 属于多少个集合.

【例 1】 对集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的每一个非空子集定义"交错和"如下:将该子集的元素依递减次序排列,然后从最大的数开始交错地减或加后继的数(例如子集 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交错和是 $9-6+4-2+1=5$.$\{5\}$ 的交错和是 5).求全部"交错

和"的总和 S.

解 直接从定义入手去计算 S,显然是困难重重. 我们寻找另一种计算 S 的方法.

从元素入手. 每一个小于 n 的元素 a,如果在不含 n 的子集 A 中,那么它也在含 n 的子集 $\{n\}\cup A$ 中,反之亦然. 如果它对集 A 的交错和贡献为 $+a$(或 $-a$),那么它对集 $\{n\}\cup A$ 的交错和贡献为 $-a$ 或($+a$),反之亦然. 于是,a 对各个子集的交错和的贡献两两抵消. a 对于总和 S 的贡献为 0.

元素 n,对每个含 n 的子集的交错和,贡献为 n. 而含 n 的子集有 2^{n-1} 个. 所以 n 对总和 S 的贡献为 $n\cdot 2^{n-1}$.

综上所述,$S=n\cdot 2^{n-1}$.

【例 2】 $A_1,A_2,\cdots A_k$ 都是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集,并且每 r 个的交非空,每 $r+1$ 个的交是空集. 证明 $C_k^r\leqslant n$.

解 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中每 r 个的交非空,因而有一个元素 a 在这 r 个的交集中. 这样得出 C_k^r 个 a,它们互不相同(否则,a 属于 $r+1$ 个 A_i 的交集),所以 $C_k^r\leqslant n$.

【例 3】 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的二元子集. 并且在 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$ 时,A_i,A_j 中有一个是 $\{a_i,a_j\}$ $(i,j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j)$. 证明 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中每一个元素恰好在两个 A_i 中.

解 设元素 a_j 属于 m_j 个 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 本节开始所说的集合与元素的数表中,每行有两个 1,所以表中数的总和为 $2n$. 而第 j 列的列和为 m_j,于是

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = 2n \tag{1}$$

另一方面,如果有某个 $m_j>2$,那么至少有三个子集含有 a_j 其中有两个为 A_s,A_t(s,t 均不等于 j).但根据已知条件,由于 $A_s\cap A_t$ 非空(含有 a_j),其中必有一个为$\{a_s,a_t\}$,不含有 a_j,矛盾!因而每个 $m_j\leqslant 2$.

结合(1)使得每个 $m_j=2$.

【例 4】 m 为正偶数.集 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$ 都是 m 元集,$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m+1}$,并且

(i) $A_i\cap A_j$ 都是恰含一个元素的集,$i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\cdots,m+1\}$.

(ii) B 中每一个元素 x 至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$ 中的两个集.

问对怎样的 m,能够将集 B 中的每个元素标上 0 或 1,使每个 A_i 中恰有$\frac{m}{2}$个 0?

解 考虑本节开始所说的数表,表中每一行有 m 个 1.

由于(ii),每一列至少有两个 1.如果某一列有 3 个或更多个 1,不妨设第一列有三个 1,并且其中有一个在第 $m+1$ 行.这时,第 $m+1$ 行的 m 个 1,不妨假定在前 m 列.根据(ii),这前 m 列中每一列至少还有一个 1,而第一列还有两个 1.这 $m+1$ 个 1 分布在前 m 行,必有一行含两个(或更多个)1,这与(i)矛盾($A_i\cap A_{m+1}$ 只含一个元素).因此,每一列恰有两个 1.

如果能将 B 中每个数标上 0 或 1，使每个 A_i 中恰有$\frac{m}{2}$个 0. 我们将数表中标 0 的元素取消（即将这元素所在的列删去）. 这时每一行有$\frac{m}{2}$个 1，共有$\frac{m(m+1)}{2}$个 1.

另一方面，每列恰有两个 1，因此表中 1 的个数是偶数.

综合起来，得到$\frac{m(m+1)}{2}$是偶数. 但 m 是偶数，所以 $m+1$ 是奇数，$\frac{m}{2}$必须是偶数，即 m 是 4 的倍数.

反之，设 $m=4k$. 作 $C_{m+1}^2=\frac{m(m+1)}{2}$个数组$(i,j)$，$i,j\in\{1,2,\cdots,m+1\}$，$i\neq j$. B 就是这些（无序的）二元数组的集合. 而子集 A_i 就是含 i 的 m 个二元数组所成的集（$i=1,2,\cdots,m+1$）. 不难验证条件(i)、(ii)均成立.

将 $1,2,\cdots,m+1$ 依次排在圆周上. 对于 i，如果 j 是它左（右）侧与它相距最近的 k 个数之一，那么元素(i,j)就是标上 1. 否则标上 0. 当 j 是 i 左（右）侧与 i 相距最近的 k 个数之一时，i 也是 j 右（左）侧与 j 相距最近的 k 个数之一，所以上面的标数方法是唯一确定的. 容易验证这时每个 A_i 恰有$\frac{m}{2}$个元素标上 0.

【例 5】 $n\geqslant 2$. 对于任意正整数 k，求最小的正整数 $f(k)$，使得有 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，满足

(i) $|A_i|=k$，$i=1,2,\cdots,n$.

(ii) $A_i\cap A_{i+1}=\varnothing$，$i=1,2,\cdots,n$. $A_{n+1}=A_1$.

(iii) $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=f(k)$.

解 n 为偶数时，$f(k)=2k$. 事实上，k 元集合 $A_1=A_3=\cdots=A_{n-1}$ 与 $A_2=A_4=\cdots=A_n$ 在 $A_1\cap A_2=\varnothing$ 时满足所有条件. $2k$ 显然是最小值.

n 为奇数 $2m+1$ 时，

$$f(k)=2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right] \tag{2}$$

证明如下：

考虑集 $A_1,A_2,\cdots,A_{2m+1}$ 与其元素的关系表(即本节开始时所说的表).

一方面，表中每行有 k 个 1，共有 $k(2m+1)$ 个 1.

另一方面，每一列至多 m 个 1(由于(ii))，因此 $f(k)$ 列至多 $mf(k)$ 个 1.

从而

$$f(k)\geqslant\frac{k(2m+1)}{m}=2k+\frac{k}{m}$$

即

$$f(k)\geqslant 2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right] \tag{3}$$

为了证明(3)中等号成立，取 $2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right]$ 列并且 $k(2m+1)$ 个 1 填入 n 行的表中. 填法是从第一列开始填，行数则按照 $1,3,5,\cdots,2m+1,2,4,\cdots,2m,1,3,\cdots$ 的次序，每填 m 个 1 就转入下一列. 这种填法是均匀的，所以(i)成立. (ii)、(iii)也显然成立. 所以

$$f(k)\leqslant 2k+\left[\frac{k+m-1}{m}\right] \tag{4}$$

由(3)、(4)即得(2).

特别地，$n=3$ 时，$f(k)=3k$. 数表为表 2.

表 2

元素 \ 集合	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	…	x_{3k}
A_1	1			1				
A_2		1			1			
A_3			1			1		1

$n=5$ 时，$f(k)=2k+\left[\frac{k+1}{2}\right]$，数表为表 3.

表 3

元素 \ 集合	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	…
A_1	1		1			1		
A_2		1			1		1	
A_3	1			1		1		
A_4			1		1			
A_5		1		1			1	

【例 6】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是集 $M=\{1,2,\cdots,m\}$ 的一族子集. 如果对 M 中任一对元素 x,y，总有 A_i，$A_i\cap\{x,y\}$ 恰含一个元素，则称这族子集是可分的. 如果 M 的每一个元素至少属于一个 A_i，则称这族子集是覆盖的. 对给定的 m，求最小

的$n=f(m)$，使得有一族子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，既是可分又是覆盖的.

解 考虑前面屡次使用的集合与元素的关系表. 在 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 为覆盖的时，每一列至少有一个 1. 在 $A_1,A_2,\cdots$，A_n 为可分的时，每两列均不完全相同.

由于表有 n 行，表中每个元素为 0 或 1，所以至多可以组成 2^n-1 个两两不同的列，每列元素不全为 0. 于是

$$2^n-1\geqslant m$$

即

$$f(m)\geqslant[\log_2 m]+1 \tag{5}$$

另一方面，取 n 满足

$$2^n-1\geqslant m\geqslant 2^{n-1} \tag{6}$$

作出 m 个不同的、由 0 与 1 组成并且不全为 0 的、长为 n 的列（因为 $2^n-1\geqslant m$，这是可以办到的）. 则这表的 n 行所代表的 n 个集既覆盖又可分. 因此，

$$f(m)\leqslant[\log_2 m]+1 \tag{7}$$

综合(5)、(7)得

$$f(m)=[\log_2 m]+1$$

【例 7】 $A_1,A_2,\cdots,A_{30}$都是$\{1,2,\cdots,1990\}$的子集，每个 A_i 中至少有 660 个元素. 证明有两个集 $A_i,A_j(i\neq j,i,j\in\{1,2,\cdots,30\})$的交至少有 200 个元素.

解 不妨设每个$|A_i|=660$(否则去掉一些元素).

在集合、元素的关系表中，每行有 660 个 1，因此，30 行共有 30×660 个 1.

设第 j 列有 m_j 个 1($j=1,2,\cdots,1990$),则

$$\sum_{j=1}^{1990} m_j = 30\times 660 \tag{8}$$

每个元素 j 属于 $C_{m_j}^2$ 个交集 $A_s\cap A_t$,因此

$$\sum_{j=1}^{1990} C_{m_j}^2 = \sum_{1\leqslant s<t<0} |A_s\cap A_t| \tag{9}$$

由 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{1990} C_{m_j}^2 &= \frac{1}{2}(\sum m_j^2 - \sum m_j)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1990}(\sum m_j)^2 - \sum m_j\right)\end{aligned}$$

所以必有 $i\neq j$,满足(参见第 6 节)

$$\begin{aligned}|A_i\cap A_j| &\geqslant \frac{1}{C_{30}^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1990}(\sum m_j)^2 - \sum m_j\right)\\ &= \frac{(\sum m_j)\times(\sum m_j - 1990)}{30\times 29\times 1990}\\ &= \frac{30\times 660\times(30\times 660-1990)}{30\times 29\times 1990} > 200\end{aligned}$$

数表(矩阵)除了表示集合、元素的关系,还有多种用途.

【例 8】 设

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \tag{10}$$

为前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. g_k 表示序列(10)中 a_k 左面(即 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$ 中)$>a_k$ 的数的个数,f_k 表示序列(10)中 a_k 右面(即 $a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n$ 中)$<a_k$ 的数的个数.证明

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} g_k \tag{11}$$

解 考虑一个 $n\times n$ 的矩阵(数表). 它的第 i 行第 j 列($j=1,2,\cdots,i-1$)交叉处的数在 $a_i<a_j$ 时为 1,否则为 0($i=1,2,\cdots,n$). 表中其他的数均为 0.

这表的第 k 行的数的和为 g_k,所以表中所有数的和是 $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k$.

另一方面,如果在第 k 列、第 i 行的数为 1,那么 $k<i$ 并且 $a_k>a_i$. 所以第 k 列的 1 表示 $a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n$ 中 $<a_k$ 的数 a_i,从而第 k 列的数的和为 f_k,所以表中所有数的和是 $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$.

综合以上两个方面,即得(11).

【例 9】 证明不存在一个 11 项的数列,每连续五项的和为负值,每连续 7 项的和为正值.

解 设有一个数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$. 每连续五项的和为负值,每连续 7 项的和为正值.

作出 5×7 的表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \end{matrix}$$

一方面,每一行和为正,总和为正.

另一方面,每一列和为负,总和为负.

两方面的结果矛盾! 这表明满足题述条件的数列不

存在.

【例 10】 作{1,2,…13}的 13 个子集,每个子集含 4 个元素.每个元素恰在 4 个子集中出现,并且每两个子集恰有一个公共元.

解 考虑表 4.

表 4

元素 集合	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A_1	1	1	1	1									
A_2	1				1	1	1						
A_3	1							1	1	1			
A_4	1										1	1	1
A_5		1			1			1			1		
A_6		1				1			1			1	
A_7		1					1			1			1
A_8			1		1				1				1
A_9			1			1				1	1		
A_{10}			1				1	1				1	
A_{11}				1	1					1		1	
A_{12}				1		1		1					1
A_{13}				1			1		1		1		

这 13 个集{1,2,3,4},{1,5,6,7},{1,8,9,10},{1,11,12,13},{2,5,8,11},{2,6,9,12},{2,7,10,13},{3,5,9,13},{3,6,10,11},{3,7,8,12},{4,5,10,12},{4,6,8,13,}{4,7,9,11}即为所求.

由于每两个子集只有一个公共元素,上面的数表(将第 i 行第 j 列当作格点 (i,j))也表明在 13×13 个格点的集合

$\{(i,j),1\leqslant i,j\leqslant 13\}$中，含有一个 52 个点的子集，其中任意 4 个点不构成一个边与坐标轴平行的矩形.

而前 12 行表明在集合$\{(i,j),1\leqslant i\leqslant 12,1\leqslant j\leqslant 13\}$中，有一个 48 个点组成的子集，其中任意 4 个点不构成边与坐标轴平行的矩形.

【例 11】 A,B,C,D,E 五个人参加一次考试，试题七道，都是判断题，认为正确的就打√，认为错误的就打×. 每题答对的得 1 分，答错的扣 1 分，不答的得 0 分. 五人的答案见表 5. 如果 A,B,C,D 各得 2 分，问 E 得多少分？正确的答案应当是什么？

表 5

题＼人	A	B	C	D	E
1	√	√		×	√
2		×	√	×	√
3	×	√	×	×	×
4	√	√	×	√	
5	×	×	√	√	√
6	√	×	×		×
7	√		√	×	√

解 暂时去掉第五列. 这时将每一行中的√与×抵消，得出七行的行和分别为√、×、2 个×、2 个√、0、×、√. √与×共 8 个. 由于 A,B,C,D 各得 2 分，共得 8 分. 所以上面每个符号都是该行的正确答案，各代表 1 分. 即第一、二、三、四、六、七的正确答案分别为√、×、×、√、×、√. 再与 A 比

较即知第五题答案为√.从而E得4分.

【例12】 30名朋友互相访问.每人每天可以访问许多朋友,但有朋友来访问的那天,他不能外出访问,为了使每个人访问了所有的朋友,

(i) 5天是不够的. (ii)7天是够的.

试证明上面的结论.

解 (i)考虑一个30×5的数表,如果第i个人在第j天不外出访问,就在第i行第j列交叉处写上1,否则就写上0.

显然,每一行不能全为0(若第i行全为0,则没有人访问i),也不能全为1(i没有访问其他人).

每一行都是由0,1组成的五项的数列,不全为0,不全为1.这样的数列至多$2^5-2=30$个.

如果有两行相同,设第一、二行相同,则1,2不可能互访,所以每两行互不相同,从而各是上述30个数列中的一个.

不妨设第一行是(1,0,0,0,0),第二行是(1,1,0,0,0),则1未访问2.这表明5天总是不够的.

(ii)考虑30×7的数表.由于

$$C_7^3=35>30$$

我们将每一行写上3个1,这些1所在的列i,j,k分别对应于7列中取3列(共有35种方法)的一个排列.不同的行对应于不同的排列.

这样写好后,对于人i,j,由于A_i与A_j不同,必有一列k,第i行第k列为1而第j行第k列为0,这表明j在第k天访问i.所以7天是足够的.

8 交换和号

下面是一个 m 行 n 列的矩阵(数表).

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 & & \cdots\cdots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
\tag{1}
$$

第 i 行的和($i=1,2,\cdots,m$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$$

记为 r_i. 第 j 列的和($j=1,2,\cdots,n$)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}$$

记为 c_j. 显然行和的和与列和的和相等,并且都等于矩阵中所有元素的和,即

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} \tag{2}$$

(2)也可以写成

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tag{3}$$

即二重和的和号(求和次序)可以交换.

对于有限多项的和来说,这个结论是显然的,它是加法

交换律的简单应用．当项数变为无穷或者（一个或两个）和号变为积分号时，往往要增添一些条件，相应的结论才能成立．其中最著名的是关于二重积分的富比尼定理，这也正是“算两次”被冠以富比尼原理的缘由．

和号的交换是解决很多问题的关键，这是一种简单实用的方法．

【例 1】 设 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$．证明

$$\frac{a_1}{1\times(1+1)}+\frac{a_1+2a_2}{2\times(2+1)}+\cdots+\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}<\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{4}$$

解 左边 $=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k}ia_i}{k(k+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{ia_i}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{ia_i}{k(k+1)}\ \text{（交换和号）}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}ia_i\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}ia_i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$<\sum_{i=1}^{n}ia_i\cdot\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

其中交换和号的那一步，需要注意“哑标”k,i 的变化范围．我们是对一个“上三角阵”求和：

这个矩阵的左下方全是0.所以第 k 列的和只有 k 项相加(i 从1到 k),而第 i 行的和则从第 i 个数开始(前 $i-1$ 个数为0)直加至第 n 个数.

在交换和号时,一定要正确地确定求和的范围.熟练之后,是不难迅速地做到这一点的.

$i \backslash k$	1	2	3	$\cdots$	n
1	$\frac{a_1}{1\cdot 2}$	$\frac{a_1}{2\cdot 3}$	$\frac{a_1}{3\cdot 4}$	$\cdots$	$\frac{a_1}{n(n+1)}$
2		$\frac{2a_2}{2\cdot 3}$	$\frac{2a_2}{3\cdot 4}$	$\cdots$	$\frac{2a_2}{n(n+1)}$
3			$\frac{3a_3}{3\cdot 4}$	$\cdots$	$\frac{3a_3}{n(n+1)}$
$\cdots$				$\ddots$	$\cdots$
n					$\frac{na_n}{n(n+1)}$

【例2】 设 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$.证明

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \tag{5}$$

解 由Cauchy不等式,

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i}\cdot\frac{i}{\sqrt{a_i}}\right)^2=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

所以

$$\begin{aligned}(5)\text{ 式左边}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)\cdot\left(\frac{2}{k(k+1)}\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{k^2(k+1)^2}\cdot\frac{i^2}{a_i}\right)$$

$$=4\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{k}{k^2(k+1)^2}\quad(\text{交换和号})$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

例 2 与例 1 类似，交换和号之后，“内和”$\left(\sum\frac{1}{k^2(k+1)}\text{或}\sum\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\right)$可以计算或者估算，这正是为什么要交换和号的理由.

有许多组合恒等式(含有组合数的恒等式)可以用交换和号的方法来证明.

【例 3】 证明

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}kC_{n-k}^{r-1}=CC_{n+1}^{r+1}\tag{6}$$

解 左边$=\sum_{k=1}^{n-r+1}C_{n-k}^{r-1}\sum_{i=1}^{k}1$

$$=\sum_{i=1}^{n-r+1}\sum_{k=i}^{n-r+1}C_{n-k}^{r-1}\quad(\text{交换和号})$$

$$=\sum_{i=1}^{n-r+1}1C_{n-i+1}^{r}\quad(\text{第 4 节}(1'))$$

$$= CC_{n+1}^{r+1} \quad (\text{第 4 节}(1'))$$

我们将 k 变为和 $\sum_{i=1}^{k} 1$，从而产生了双重和号(于是可以交换和号)，这一技巧值得注意.

【例 4】 证明李善兰(清末数学家)恒等式

$$\sum_{j\geqslant 0} C_k^j C_l^j C_{n+k+l-j}^{k+l} = C_{n+k}^k C_{n+l}^l \tag{7}$$

解 利用第 4 节例 7 的范德蒙恒等式，

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \sum_{j\geqslant 0} C_k^j C_l^j \sum_{v\geqslant j} C_{n+k}^{k+v} C_{l-j}^{l+v} \\
&= \sum_{v\geqslant 0} C_{n+k}^{k+v} \sum_{j\geqslant 0} C_k^j C_l^j C_{l-j}^{l+v} \\
&= \sum_{v\geqslant 0} C_{n+k}^{k+v} C_l^v \sum_{j\geqslant 0} C_k^j C_v^{v-j} \\
&= \sum_{v\geqslant 0} C_{n+k}^{k+v} C_l^v C_{k+v}^v \\
&= C_{n+k}^k \sum_{v\geqslant 0} C_n^{n-v} C_l^v \\
&= C_{n+k}^k C_{n+l}^n
\end{aligned}$$

证明的第一步利用范德蒙恒等式生出一和，最后又两次利用这个恒等式来求和.

和号中的哑标未写出上界，这是由于 C_m^n 在 $n > m$ 或 $n < 0$ 时，值为 0. 利用这一约定往往是方便的(无需考虑哑标的取值范围).

【例 5】 证明在自然数 $h \leqslant n$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n} 4^h \cos^{2h} \frac{k\pi}{2n+1} = (2n+1) C_{2h-1}^{h-1} - 2^{2h-1} \tag{8}$$

解 由于 $\cos^2 \frac{(2n+1)-k}{2n+1}\pi = \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}$，所以(8) 等

价于

$$\sum_{k=0}^{2n} 4^h \cos^{2h} \frac{k\pi}{2n+1} = 2(2n+1)C_{2h-1}^{h-1} \tag{9}$$

(9) 式的左边是(8) 式左边的两倍加上 4^h(即 $k=0$ 的那一项). 它是一个"完整和",即求和符号遍及 $0,1,\cdots,2n$ 这 $2n+1$ 个连续整数.

熟知在 $|l|<m$ 时(由等比数列求和公式),"完整和"

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi ikl/m} = \begin{cases} 0, & l \neq 0 \\ m, & l = 0 \end{cases} \tag{10}$$

所以

$$\begin{aligned} (9)\text{ 式左边} &= \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{\frac{k\pi i}{2n+1}} - e^{-\frac{k\pi i}{2n+1}}\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2h} C_{2h}^{j} e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}(h-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{2h} C_{2h}^{j} \sum_{k=0}^{2n} e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}(h-j)} \\ &= C_{2h}^{h} \cdot (2n+1). \end{aligned}$$

即(9) 式成立.

在计算含单位根的指数和(或与之密切相关的三角和)时,常常先配成"完整和",然后再交换和号,以便利用(10).

下面的例 6 也要利用(10),但生成内和的手法稍微复杂一些.

【例 6】 证明

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = \frac{n^2-1}{3} \tag{11}$$

解　不难证明

$$|1-\mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}/n}|^2=4\sin^2\frac{k\pi}{n}\tag{12}$$

$$\sum_{h=0}^{n-1}h\mathrm{e}^{2\pi kh\mathrm{i}/n}=\frac{n}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}-1}(1\leqslant k\leqslant n-1)\tag{13}$$

((13) 的证法很多. 例如:在 $q^n=1(q\neq 1)$ 时,

$$\begin{aligned}&(q-1)(q+2q^2+\cdots+(n-1)q^{n-1})\\=&q^2+2q^3+\cdots+(n-1)q^n\\&-q-2q^2-\cdots-(n-1)q^{n-1}\\=&-q-q^2-\cdots-q^{n-1}-q^n+n=n)\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}(11)\text{ 式左边}&=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n^2}{|1-\mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}/n}|^2}\\&=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1}h\ \mathrm{e}^{2\pi kh\mathrm{i}/n}\sum_{h'=0}^{n-1}h'\mathrm{e}^{-2\pi kh'\mathrm{i}/n}\\&=\frac{4}{n^2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{h'=0}^{n-1}hh'\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k(h-h')/n}\\&\quad-\sum_{h=0}^{n-1}h\sum_{h'=0}^{n-1}h'\Big)\\&=\frac{4}{n^2}\Big(\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{h'=0}^{n-1}hh'\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k(h-h')/n}\\&\quad-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2\Big)\\&=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{h=0}^{n-1}h^2n-\frac{n^2(n-1)^2}{4}\right)\\&=\frac{2}{3}(n-1)(2n-1)-(n-1)^2\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)(n+1)=(11)\text{ 式右边}$$

在数论中,交换和号的例子更多.

【例 7】 设 $r(n)$ 为 n 除以 $1,2,\cdots,n$ 所得的 n 个余数的和. 证明有无穷多个 n,使

$$r(n)=r(n-1) \tag{14}$$

成立.

解 设 n 除以 k 所得余数为 r_k,$0\leqslant r_k<k$. 则有

$$n=k\left[\frac{n}{k}\right]+r_k \tag{15}$$

这里$[x]$表示 x 的整数部分(第 3 节). 由(15),

$$r_k=n-k\left[\frac{n}{k}\right]$$

所以 $r(n)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}r(n)&=\sum_{k=1}^{n}r_k=\sum_{k=1}^{n}\left(n-\left[\frac{n}{k}\right]k\right)\\&=n^2-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]k\end{aligned} \tag{16}$$

现在我们在(16) 的和号中再"生出"一和.

注意

$$\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{m\leqslant\frac{n}{k}}1$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]k=\sum_{k=1}^{n}k\sum_{m\leqslant\frac{n}{k}}1 \tag{17}$$

改记 mk 为 l,则 $l\leqslant n,k\mid l$(k 整除 l),

$$\sum_{k=1}^{n} k \sum_{m \leqslant \frac{n}{k}} 1 = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\substack{l \leqslant n \\ k \mid l}} 1$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k \mid l} k = \sum_{l=1}^{n} \sigma(l) \tag{18}$$

这里

$$\sigma(l) = \sum_{k \mid l} k \tag{19}$$

表示 l 的(正) 因数的和.

由(16)、(17)、(18) 得

$$r(n) - r(n-1) = n^2 - (n-1)^2 - \sum_{l=1}^{n} \sigma(l) + \sum_{l=1}^{n-1} \sigma(l)$$

$$= 2n - 1 - \sigma(n) \tag{20}$$

因此,(14) 等价于

$$\sigma(n) = 2n - 1 \tag{14'}$$

取 $n = 2^m$,则 n 的正因数为 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^m$.

$\sigma(n) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m = 2^{m+1} - 1 = 2n - 1$

这样的n显然有无穷多个,它们使(14′) 成立,从而(14) 成立.

和(17) 与 $\left(\text{曲线 } y = \frac{n}{x} \text{ 下方的}\right)$格点有关,参见第 3 节例 6.

很多交换和号的问题与麦比乌斯(Möbius) 函数 $\mu(n)$ 有关. 这是一个奇妙的函数,定义极简单,用处却非常之大.

定义

$$\mu(n)\begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n \text{ 为 } k \text{ 个不同质数的积} \\ 0, & n \text{ 被一个质数的平方整除} \end{cases} \tag{21}$$

$\mu(n)$ 有一种重要的性质,即下面的(22).

【例 8】 证明 $\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 若\ n=1\\ 0, & 若\ n>1\end{cases}$ (22)

解 $n=1$ 时,(22) 显然成立. 设 $n>1$ 的分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\cdot p_k^{\alpha_k} \tag{23}$$

由于在 d 含平方因数时,$\mu(d)=0$,所以

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|p_1p_2\cdots p_k}\mu(d)$$

表达式

$$(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k) \tag{24}$$

展开后就得出 $p_1p_2\cdots p_k$ 的所有因数之和,将其中的 p_i 均换为 -1,则每个因数 d 换成了 $\mu(d)$,所以

$$\sum_{d|p_1p_2\cdots p_k}\mu(d)=(1-1)(1-1)\cdots(1-1)=0$$

即(22) 成立.

【例 9】 证明

$$\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]=1 \tag{25}$$

解 左边 $=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{k\leqslant\frac{n}{d}}1$

$$=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{\substack{l\leqslant n\\ d|l}}1$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{d|l}\mu(d)$$

$$=1$$

最后一步利用了(22):仅在 $l=1$ 时,内和不是 0.

【例 10】 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不超过 n、并且与 n 互质的自然数的个数. 证明

$$\varphi(n)=n\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d} \tag{26}$$

解 由定义，$\varphi(n)$ 可表成和式：

$$\varphi(n)=\sum_{\substack{m\leqslant n\\(m,n)=1}}1 \tag{27}$$

利用(22)可将条件 $(m,n)=1$(m,n 互质)化为(生成)一个和：$\sum\limits_{d\mid(m,n)}\mu(d)$. 因此由(27)，

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\sum_{m=1}^{n}\sum_{d\mid(m,n)}\mu(d)\\&=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{\substack{m=1\\d\mid m}}^{n}1\\&=\sum_{d\mid n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d}\end{aligned}$$

即(26)成立.

最后一步是由于 $1,2,\cdots,n$ 中，d 的倍数恰有 $\left[\frac{n}{d}\right]=\frac{n}{d}$ 个(由于 $d\mid n$).

设 n 的分解式为(23)，则与例 8 证明中的步骤类似，由(26)可得

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n\sum_{d\mid p_1p_2\cdots p_k}\frac{\mu(d)}{d}\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\end{aligned}$$

$\left(\text{在(24)中将 } p_i \text{ 换为 } -\frac{1}{p_i}\right)$. 这是 $\varphi(n)$ 的计算公式.

函数 $\mu(n)$ 在所谓反演公式中起重要的作用.

【例 11】 设 $f(n)$,$g(n)$ 为自然数集 N 上的函数,则

$$f(n)=\sum_{d\mid n} g(d) \tag{28}$$

与

$$g(n)=\sum_{d\mid n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \tag{29}$$

等价.即由(28)可导出(29),反之亦然.

解 设(28)成立,则

$$f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} g(\delta)$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}\mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d\mid n} \mu(d) \sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} g(\delta)\\ &= \sum_{\delta \mid n} g(\delta) \sum_{d \mid \frac{n}{\delta}} \mu(d)\\ &= g(n)\end{aligned}$$

最后一步利用了(22):仅在 $\delta=n$ 时,内和不是 0.

反之,设(29)成立.则

$$g(d)=\sum_{\delta \mid d} \mu(\delta) f\left(\frac{d}{\delta}\right)=\sum_{t \mid d} \mu\left(\frac{d}{t}\right) f(t)$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n} g(d) &= \sum_{d \mid n} \sum_{t \mid d} \mu\left(\frac{d}{t}\right) f(t)\\ &= \sum_{t \mid n} f(t) \sum_{\substack{\frac{d}{t} \mid \frac{n}{t}\\ t \mid d}} \mu\left(\frac{d}{t}\right)\end{aligned}$$

$$= f(n)$$

如果 $f(n)$, $g(n)$ 满足(28),则 $f(n)$ 称为 $g(n)$ 的麦比乌斯变换,而 $g(n)$ 称为 $f(n)$ 的麦比乌斯逆变换.

(26) 表明 n 是 $\varphi(n)$ 的麦比乌斯变换,所以由例 11(反演公式),

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d) \tag{30}$$

下面再举几个使用反演公式(28)或(29)的例子(例 12—例 14).

【例 12】 用黑白两种颜色的珠子作项链.如果共用珠 m 颗,$l \mid m$,每隔 l 颗(第 1 颗与第 $l+1$ 颗,第 2 颗与第 $l+2$ 颗等等)颜色总是相同的,并且 l 是具有这一性质的最小的数(即 l 是"最小正周期").问这样的项链有多少种?

解 设这样的项链有 $A(l)$ 种,每一种由长为 l 的一段完全确定.在这一段中,每个珠子可白可黑,共有 2^l 种不同的排列.它们产生以 l 为最小周期的,或者以 l 的某一因数 d 为最小周期的项链.

以 d 为最小周期的有 $A(d)$ 种.将每一种向前平移 0,1,…,$d-1$ 颗珠子得到的是同一种项链,但在长为 l 的那一段中产生 d 种不同的排列(如 0101… 移动后变成 1010…,形成 2 种不同的排列),所以

$$2^l = \sum_{d|l} dA(d) \tag{31}$$

(31) 表明 2^l 是函数 $lA(l)$ 的麦比乌斯变换,由反演公式

$$lA(l) = \sum_{d|l} \mu(d) \cdot 2^{l/d}$$

即以 l 为最小正周期的项链种数为

$$A(l)=\frac{1}{l}\sum_{d\mid l}\mu(d)\cdot 2^{l/d} \tag{32}$$

【例 13】 用黑白两种颜色的珠子作项链. 证明由 m 颗珠子组成的项链共有

$$\frac{1}{m}\sum_{d\mid m}\varphi(d)\cdot 2^{m/d} \tag{33}$$

种，其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数.

解 项链的种数为

$$\begin{aligned}
\sum_{l\mid m}A(l)&=\sum_{l\mid m}\frac{1}{l}\sum_{d\mid l}\mu(d)\cdot 2^{l/d}\\
&=\sum_{t\mid m}\sum_{d\mid \frac{m}{t}}\frac{\mu(d)}{td}\cdot 2^{t}\quad (\text{设 } l=td)\\
&=\sum_{t\mid m}\frac{2^t}{t}\cdot\frac{\varphi\left(\frac{m}{t}\right)}{\frac{m}{t}}\quad ((26))\\
&=\frac{1}{m}\sum_{t\mid m}\varphi\left(\frac{m}{t}\right)\cdot 2^{t}\\
&=\frac{1}{m}\sum_{d\mid m}\varphi(d)\cdot 2^{m/d}
\end{aligned}$$

【例 14】 多项式 $(1-x)^{b_1}(1-x^2)^{b_2}\cdots(1-x^{32})^{b_{32}}$，其中 b_j $(1\leqslant j\leqslant 32)$ 为正整数，具有如下性质：将它乘开后，如果忽略 x 的高于 32 次的那些项，留下的是 $1-2x$. 试求 b_j $(1\leqslant j\leqslant 32)$.

解 我们需要对数函数的展开式

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right) \tag{34}$$

在等式

$$(1-x)^{b_1}(1-x^2)^{b_2}\cdots(1-x^{32})^{b_{32}}\equiv 1-2x\ (\bmod x^{33})$$

两边取对数后再展开. 左边成为

$$\sum_{j=1}^{32} b_j \ln(1-x^j) = -\sum_{j=1}^{32} b_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nj}}{n}$$

右边(略去高于 32 次的项) 成为

$$\ln(1-2x) \equiv -\sum_{k=1}^{32} \frac{2^k}{k} x^k (\bmod x^{33})$$

由于

$$-\sum_{j=1}^{32} b_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nj}}{n} = -\sum_{j=1}^{32} b_j \sum_{\substack{k=1 \\ j|k}}^{\infty} \frac{jx^k}{k}$$

$$\equiv -\sum_{k=1}^{32} \Big(\sum_{j|k} \frac{jb_j}{k} \Big) x^k (\bmod x^{33})$$

比较 x^k 的系数得

$$2^k = \sum_{j|k} jb_j$$

因此由反演公式

$$b_j = \frac{1}{j} \sum_{d|j} \mu(d) \cdot 2^{j/d},\ j = 1,2,\cdots,32$$

这恰巧是例 12 中的 $A(j)$.

【例 15】 证明对欧拉函数 $\varphi(n)$,有

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left[\frac{n}{d} \right] = \frac{n(n+1)}{2} \tag{35}$$

解 与例 9 相同,在左边的和中生和得

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left[\frac{n}{d} \right] = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{k \leqslant n/d} 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{d \mid j} \varphi(d) \text{（设 } j = kd \text{ 并交换和号）} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \text{（利用(30)）} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

首先写出一个和式，再在和式里面“生出”一个和式，然后交换和号. 这是数论中惯用的手法. 例 7、例 15 都是这样做的.

9　函数、运算

函数方程，给出了计算函数值的两种（或几种）方法.

【例 1】　函数 f 定义在自然数集 N 上，并且具有性质：

(i)　$f(f(n))=4n+9$，对所有 $n\in \mathrm{N}$.

(ii)　$f(2^k)=2^{k+1}+3$，对所有 $k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$.

求 $f(1789)$.

解　性质(i)使我们可以用两种方法计算 $f(f(f(n)))$，从而有

$$f(4n+9)=f(f(f(n)))=4f(n)+9 \qquad (1)$$

由于

$$\begin{aligned}1789&=4\times 445+9\\ 445&=4\times 109+9\\ 109&=4\times 25+9\\ 25&=4\times 2^2+9\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(1789)&=4f(445)+9\\ &=4(4f(109)+9)+9\\ &=4^2f(109)+4\times 9+9\\ &=\cdots\\ &=9+4\times 9+4^2\times 9+4^3\times 9+4^4f(2^2)\end{aligned}$$

$=9+4\times9+4^2\times9+4^3\times9+4^4(2^2+2^2+3)$

$=1789+4^4\times(2^2+3)$

$=3581$

【例 2】 设 f 为$[0,1]$上的函数,满足

(i) $f(0)=0,\quad f(1)=1.$

(ii) 对所有 $x,y\in[0,1],\quad x\leqslant y,$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=(1-a)f(x)+af(y)$$

其中 a 是一个实数,$0<a<1.$

求 $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

解 由性质(ii)得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-a)f(0)+af(1)=a \tag{2}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=af\left(\frac{1}{2}\right)=a^2$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)=(1-a)f\left(\frac{1}{2}\right)+af(1)$$

$$=2a-a^2$$

由于有了 $f\left(\frac{1}{4}\right)$和 $f\left(\frac{3}{4}\right)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$可以用另一种方法来计算:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}\right)=(1-a)a^2+a(2a-a^2) \tag{3}$$

综合(2)、(3)得

$$a=(1-a)a^2+a(2a-a^2)$$

从而

$$a(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)=0$$

求得 $a=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$

特别地，取 $x=0$，得

$$f\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(y)$$

于是

$$f\left(\frac{2}{7}\right)=2f\left(\frac{1}{7}\right),f\left(\frac{4}{7}\right)=2f\left(\frac{2}{7}\right)=4f\left(\frac{1}{7}\right)$$

另一方面，

$$f\left(\frac{4}{7}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{7}+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{7}\right)+1\right)$$

所以

$$4f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{7}\right)+1\right)$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}$$

【例 3】 设函数 f:N→N(即定义域为 N，函数值也在 N 中)，满足

(i) f 严格增.

(ii) 对所有 $m,n\in$ N，$f(mn)=f(m)f(n)$.

(iii) $f(2)=4$.

求 $f(1991)$.

解 由(ii),

$$f(n)=f(1)f(n)$$

所以 $f(1)=1$.

设对于 $\leqslant n$ 的数 $x\in\mathrm{N}$,均有 $f(x)=x^2$.

若 $n+1$ 为合数,设 $n+1=ab$,$1<a,b<n+1$.

$$f(n+1)=f(ab)=f(a)f(b)=a^2b^2=(n+1)^2$$

若 $n+1$ 为质数,则 $n+2$ 为合数,从而与上面相同,

$$f(n+2)=(n+2)^2$$

一方面

$$f^2(n+1)=f((n+1)^2)>f(n(n+2))=n^2(n+2)^2$$

从而

$$f(n+1)\geqslant(n+1)^2 \tag{4}$$

另一方面,取整数 $k>(n+1)^4$. 设 $h\in\mathrm{N}$ 满足 $n^{h-1}<(n+1)^k<n^h$,则

$$\begin{aligned}f((n+1)^k)<f(n^h)=n^{2h}<(n+1)^{2k+2}<k(n+1)^{2k-2}\\<((n+1)^2+1)^k\end{aligned}$$

从而

$$f(n+1)<(n+1)^2+1 \tag{5}$$

综合(4)、(5),即得 $f(n+1)=(n+1)^2$.

于是,恒有 $f(n)=n^2$. 特别地,

$$f(1991)=1991^2$$

【例 4】 ($n+1$ 为质数时)的证明是从两个方面来考虑

$f(n+1)$,(4)给出下界,(5)给出上界.由上、下界的估计来确定一个量的技术我们已使用(并强调)过,请参考第 5 节例 9.

【例 5】 a 为固定的自然数,求函数 f:N→R,满足:对任意 x、$y\in \mathrm{N}$,$xy>a$ 均有

$$f(x+y)=f(xy-a) \tag{6}$$

解 一个数可以用几种方式表示成两个数的和 $x+y$,利用这点就可以求出 f.

设 $t\in \mathrm{N}$,则 $t+a=1\cdot(t+a)$,所以由(6),

$$\begin{aligned} f(t) &= f(1+(t+a)) \\ &= f((a+1)+t) = f((a+1)t-a) \\ &= f(((t-1)a+t-1)+1) \\ &= f(((t-1)a+t-1)-a) \\ &= f(((t-2)a+t-2)+1) = \cdots \\ &= f(1\cdot a+2) = f((a+1)+1) \\ &= f((a+1)-a) = f(1) \end{aligned}$$

即 f 是常数.

一个数集 S 中的运算∘是 $S\times S\to S$ 的一个二元函数,即对于 S 中的每两个元素 a,b,S 中有一个唯一的元素 c 与之对应,并记为

$$c=a\circ b$$

【例 6】 在实数集 R 中定义一种运算∘,具有性质:

(i) 对所有 $a\in \mathrm{R}$, $0\circ a=a$.

(ii) 对 $a,b,c\in \mathrm{R}$,

$$(a\circ b)\circ c=c\circ(ab)+(a\circ c)+(b\circ c)-2c$$

求$(6\circ 4)\circ 1989$.

解 在(ii)中取 $a=0$,并利用(i)得

$$b\circ c=(0\circ b)\circ c=c\circ 0+c+(b\circ c)-2c$$

化简得

$$c\circ 0=c \tag{7}$$

(题中未假定$\circ$适合交换律,所以(7)不能由(i)直接推出).

再在(ii)中取 $c=0$,并利用(7)得

$$a\circ b=(a\circ b)\circ 0=ab+a+b$$

从而

$$(6\circ 4)\circ 1989=34\circ 1989=69649$$

【例 7】 在实数集 R 中定义运算$\square$,满足

(i) $(x+y)(x\square y)=x^2\square y^2$(任意 $x,y\in \mathrm{R}$).

(ii) $x\square y=(x+z)\square(y+z)$(任意 $x,y,z\in \mathrm{R}$).

(iii) $1\square 0=1$.

求 $1991\square 1912$.

解 减法运算显然满足(i)、(ii)、(iii),我们证明

$$x\square y=x-y$$

确实成立.

在 (i) 中令 $x=y+1$,并利用(ii)、(iii)得(i)的左边

$$(2y+1)((y+1)\square y)=(2y+1)(1\square 0)=2y+1$$

而(i)的右边

$$(y+1)^2\square y^2=(2y+1)\square 0$$

因此

$$2y+1=(2y+1)\square 0$$

即对任意 $x \in R$,

$$x \square 0 = x \tag{8}$$

从而由(ii)、(8),

$$x \square y = (x-y) \square 0 = x-y$$

特别地

$$1991 \square 1912 = 79$$

【例 8】 在实数集 R 中定义运算 * 满足

(i) $x * 0 = 1$ (任意 $x \in R$).

(ii) $(x * y) * z = (z * xy) + z$ (任意 $x, y, z \in R$).

求 $31 * 32$.

解 在(ii)中取 $y=0$ 并利用(i)得

$$1 * z = 1 + z \tag{9}$$

于是,$(1 * y) * 1$ 有两种算法:利用(ii),

$$\begin{aligned}(1 * y) * 1 &= (1 * (1 \cdot y)) + 1 = (1 * y) + 1 \\ &= 1 + y + 1 = y + 2\end{aligned}$$

而由(9),

$$(1 * y) * 1 = (1 + y) * 1$$

综合上述二式得

$$(1 + y) * 1 = y + 2$$

即

$$x * 1 = x + 1 \tag{10}$$

于是,$(x * y) * 1$ 有两种算法:由(10)

$$(x * y) * 1 = (x * y) + 1$$

由(ii)

$$(x*y)*1=(1*xy)+1=(xy+1)+1=xy+2$$

综合上述二式得

$$x*y=xy+1$$

特别地

$$31*32=31\times 32+1=993$$

代数学研究的是各种代数系的构造. 所谓代数系就是定义了某种(或某几种)运算的集合.

如果集 S 中的运算$\circ$(通常称为乘法)适合结合律，即

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c) \tag{11}$$

我们称 S(对于运算$\circ$)为半群.

【例 9】 设 S 为半群，并且在 $a\neq b$ 时，

$$a\circ b\neq b\circ a$$

证明对 S 中任意元素 a,b,c，

$$(a\circ b)\circ c=a\circ c \tag{12}$$

解 已知条件即

$$a\circ b=b\circ a\Rightarrow a=b$$

由于结合律，

$$(a\circ a)\circ a=a\circ(a\circ a)$$

由(13)得

$$a\circ a=a \tag{14}$$

利用(14)得(由于结合律，我们省去一些括号)

$$a\circ(a\circ b\circ a)=(a\circ a)\circ b\circ a=a\circ b\circ a=(a\circ b\circ a)\circ a$$

从而由(13)得

$$a\circ b\circ a=a \tag{15}$$

最后利用(15),

$$((a\circ b)\circ c)\circ(a\circ c)=a\circ b\circ(c\circ a\circ c)=a\circ b\circ c$$
$$=(a\circ c)\circ(a\circ b\circ c)$$

由(13)得

$$(a\circ b)\circ c=a\circ c$$

在这个证明中,我们多次利用了同一个量的不同的表达式.

值得注意的是,我们先建立了(14)、(15)以备引用. 这些"根据地"既是初步的战果,又是全面胜利的条件. 在复杂的问题中,常常需要"步步为营",得出一系列引理,以利问题的解决.

【例 10】 设 S 为半群,并且是有限集,证明 S 中存在元素 a,满足

$$a\cdot a=a \tag{16}$$

解 设 $b\in S$,由于 S 为有限集,

$$b,\ b^2=b\circ b,\ b^3=b\circ b\circ b,\ b^4,\ b^5,\cdots$$

中必有相同的. 设 $h=k+t$,使得

$$b^k=b^h \tag{17}$$

由于(17),

$$b^k=b^h=b^{k+t}=b^{h+t}=b^{k+2t}=b^{h+2t}=b^{k+3t}=\cdots$$

所以总可以假定 $h-k>k$(否则用 $k+nt$ 代替 h),从而

$$b^{2t}=b^{2(h-k)}=b^{h+(h-2k)}=b^{k+(h-2k)}=b^{h-k}=b^t$$

即 $a=b^t$ 满足(16).

如果 $e\in S$,对于 S 中任意一个元素 x,均有

$$e \cdot x = x \cdot e = x \tag{18}$$

我们称 e 为 S 的单位元(么元).

【例 11】 设 S 为半群,并且有一个元素 a 具有性质:对任意 $x \in S$,存在 $u, v \in S$,满足

$$a \circ u = v \circ a = x$$

证明 S 中有单位元.

解 由已知条件(取 $x=a$),存在 $e \in S$,满足

$$a \circ e = a \tag{19}$$

对于任意 $x \in S$,由已知条件,存在 $v \in S$,

$$v \circ a = x \tag{20}$$

于是由(20)、(19),

$$x \circ e = (v \circ a) \circ e = v \circ a = x \tag{21}$$

另一方面,存在 e',满足

$$e' \circ a = u \tag{19'}$$

与(21)的证明类似可得

$$e' \circ x = x \tag{21'}$$

对任意 $x \in S$ 成立.

由(21)、(21′)

$$e = e' \circ e = e'$$

因此

$$x \circ e = e \circ x = x$$

对所有 $x \in S$ 满足(21)的 e 称为右单位元,满足(21′)的 e' 称为左单位元.如果 e 既是右单位元,又是左单位元,那么它就是单位元.

如果 S 是有单位元 e 的半群，并且 S 中任一元素 u 都可逆，即有 $v\in S$，使

$$u\circ v=v\circ u=e \tag{22}$$

那么 S 称为群.

群是一个极为重要的数学概念.

【例 12】 如果半群 S 具有左单位元 e，并且

(i) 每一元素 $u\in S$ 有左逆元，即有 $v\in S$ 使

$$v\circ u=e$$

(ii) 左消去律成立. 即对任意的 $a,b,c\in S$，

$$a\circ b=a\circ c\Rightarrow b\circ c$$

证明 S 是群.

解 对任意的 $u\in S$，有 $v\in S$，使

$$v\circ u=e$$

从而

$$(v\circ u\circ v)\circ u=e=e\circ e=(v\circ u\circ v)\circ u\circ e \tag{23}$$

由(23)消去 $v\circ u\circ v$ 得

$$u=u\circ e$$

即 e 也是右单位元，从而 e 是单位元.

$$(v\circ u\circ v)\circ e=v\circ u\circ v=v\circ u\circ v\circ u\circ v$$

消去 $v\circ u\circ v$ 得

$$e=u\circ v$$

因此 v 也是 u 的右逆元，从而 u 可逆，S 为群.

【例 13】 S 中至少有两个元素. S 中的运算☆满足

(i) $(a☆b)☆a=a$.

(ii) $(a☆b)☆b=(b☆a)☆a$，其中 a,b 为 S 中任意元素.

证明在 S 中交换律、结合律均不成立.

解 由(i)

$$a☆(a☆b)=((a☆b)☆a)☆(a☆b)=a☆b \tag{24}$$

所以

$$\begin{aligned}a☆a&\overset{(i)}{=}((a☆b)☆a)☆a\\&\overset{(ii)}{=}(a☆(a☆b))☆(a☆b)\\&\overset{(24)}{=}(a☆b)☆(a☆b)\end{aligned} \tag{25}$$

从而

$$\begin{aligned}a☆a=(a☆b)☆(a☆b)&\overset{(25)}{=}((a☆b)☆b)☆((a☆b)☆b)\\&\overset{(ii)}{=}((b☆a)☆a)☆((b☆a)☆a)\\&\overset{(25)}{=}(b☆a)☆(b☆a)\overset{(25)}{=}b☆b\end{aligned} \tag{26}$$

如果 $a☆b=b☆a$，那么

$$\begin{aligned}a&\overset{(i)}{=}(a☆b)☆a=(b☆a)☆a\\&\overset{(ii)}{=}(a☆b)☆b=(b☆a)☆b\overset{(i)}{=}b\end{aligned}$$

但 S 中有两个不同的元素，所以交换律在 S 中不成立.

如果结合律成立，那么

$$a☆b\overset{(24)}{=}a☆(a☆b)=(a☆a)☆b\overset{(26)}{=}(b☆b)☆b\overset{(i)}{=}b$$

从而(ii)成为 $b=a$. 但 S 中有不相同的元素，所以结合律不成立.

【例 14】 集 S 中有运算$\circ$，适合交换律、结合律. 又有一个函数 $f:S\to S$，满足

$$f(f(a)\circ b)\circ f(f(a)\circ f(b))=a \tag{27}$$

其中 a,b 为 S 中任意元素. 证明对任意 $a\in S$，

(i) $f(f(a))=a$.

(ii) $a\circ a=a$.

解 为简便起见，将 $f(a)$ 改记为 $\bar a$，并且略去 $a\circ b$ 中的∘号，记之为 ab. 这样(27)可改写为

$$a=\overline{\bar a b}\ \ \overline{\bar a \bar b} \tag{28}$$

对于任意的 $a,b\in S$,

$$\begin{aligned} a\bar a &=(\overline{\bar a \bar b}\ \ \overline{\bar a \bar{\bar b}})(\overline{\bar{\bar a} \bar b}\ \ \overline{\bar{\bar a} \bar{\bar b}}) \\ &=(\overline{\bar b \bar a}\ \ \overline{\bar b \bar{\bar a}})(\overline{\bar{\bar b} \bar a}\ \ \overline{\bar{\bar b} \bar{\bar a}})=b\bar b \end{aligned}$$

这表明 $a\bar a$ 是 S 中一个固定的元素，与 a 的选择无关，记这个元为 β，并称之为吸收元. 我们有

$$\beta=a\,\bar a=\bar a\,\bar{\bar a}=\bar{\bar{\bar a}}\,\bar{\bar a}=a\bar a\ \overline{a\bar a}=\beta\bar\beta \tag{29}$$

于是

$$\bar{\bar a}\overset{(28)}{=}\overline{\bar{\bar{\bar a}}\,\bar a}\ \ \overline{\bar{\bar{\bar a}}\,\bar{\bar a}}\overset{(29)}{=}\overline{\bar{\bar{\bar a}}\,a}\ \ \overline{\bar{\bar a}\,\bar a}\overset{(28)}{=}a \tag{30}$$

这就是(i)

$$\begin{aligned} a\beta &\overset{(29)}{=} aa\bar a \overset{(28)}{=} aa\,(\overline{\bar{\bar a}a}\ \ \overline{\bar{\bar a}\bar a}) \\ &\overset{(30)}{=} (a\,a\,\overline{a\ a})\,\overline{a\,\bar a}\overset{(29)}{=}\beta\bar\beta\overset{(29)}{=}\beta \end{aligned} \tag{31}$$

(31)表明 β 可以“吸收”任意的 $a\in S$.

称 $\bar\beta$ 为单位元，我们有

$$\bar\beta\overset{(28)}{=}\overline{\bar{\bar\beta}\,a}\ \ \overline{\bar{\bar\beta}\,\bar a}\overset{(30)}{=}\overline{\beta a}\ \ \overline{\beta\bar a}\overset{(31)}{=}\bar\beta\bar\beta \tag{32}$$

$$a\bar\beta\overset{(28)}{=}\overline{\bar a\,\beta}\ \ \overline{\bar a\,\bar{\bar\beta}}\,\bar\beta\overset{(31)}{=}\bar\beta\ \ \overline{\bar a\,\bar\beta}\ \ \bar\beta\overset{(32)}{=}\bar\beta\ \ \overline{\bar a\,\bar\beta}=a \tag{33}$$

最后，在(30)中将 a 换为 $\bar a$ 得

$$\bar{a}=\overline{\overline{\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{a}}}}\quad\overline{\overline{\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{a}}}}\stackrel{(30)}{=}\overline{a\quad a\bar{\beta}}\stackrel{(33)}{=}\overline{a\,a}\stackrel{(28)}{=}\overline{a^2}$$

所以

$$a=\bar{\bar{a}}=\bar{\bar{a}}^2=a^2$$

即(ii)成立.

本例是一个相当困难的问题(其中吸收元、单位元的性质(31)、(32)、(33)都是我们的“滩头阵地”,它们保证了“登陆战斗”的胜利),值得仔细玩味.

一个集合中的运算可以有好几种(例如整数集中有加法与乘法),研究这些运算之间的关系(例如分配律)是有意义的.

【例 15】 集 S 中有运算“+”,对任意 $a,b,c\in S$,

$$(a+c)+(b+c)=a+b \tag{34}$$

并且 S 中有一元素 e,对任意的 $a\in S$,

$$a+e=a \tag{35}$$

$$a+a=e \tag{36}$$

定义另一种运算 * 为:

$$a*b=a+(e+b) \tag{37}$$

证明 * 适合结合律,即对任意 $a,b,c\in S$,

$$(a*b)*c=a*(b*c) \tag{38}$$

解 看一下性质(34),(35),(36)就知道这里的“+”不是通常的加法,毋宁说它是减法(理解为除法亦无不可),其中 e 就相当于通常的 0(或通常的 1). 关系(37)可将 * 换为由 + 号组成的式子,所以(38)等价于

$$(a+(e+b))+(e+c)=a+(e+(b+(e+c))) \quad (39)$$

由于

$$e+(b+a)\overset{(36)}{=}(a+a)+(b+a)\overset{(34)}{=}a+b \quad (40)$$

所以

$$a+(e+(b+(e+c)))=a+((e+c)+b) \quad (41)$$

而

$$\begin{aligned}(a+(e+b))+(e+c)&\overset{(35)}{=}(a+(e+b))+((e+c)+e)\\&\overset{(34)}{=}a+(e+b))+(((e+c)+b)+(e+b))\\&\overset{(34)}{=}a+((e+c)+b)\end{aligned} \quad (42)$$

由(41)、(42)即得(39).

如果集 S 中有一种运算$+$,S 对于$+$是交换群即$+$法结合律、交换律成立,S 中有一个元 0,对任意 $a\in S$,有

$$a+0=0+a=a$$

并且存在 $b\in S$(通常记为$-a$),满足

$$a+b=b+a=0$$

S 中又有一种运算$\cdot$,S 对于$\cdot$是有单位元 1 的半群,即$\cdot$法结合律成立,并且对任意 $a\in S$,

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

对于任意的 $a,b,c\in S$,分配律

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$$

成立. 我们称 S 为环. 全体整数,全体有理数,全体实数,全体复数对于通常的加法与乘法都是环. 在环中,除去乘法交换律外,其他性质均与整数集类似. 例如,我们将 $a+(-b)$记为

$a-b$,并且有

$$c(a-b)=ca-cb$$

环中元素 a 不一定可逆,即不一定有 $b\in S$ 使

$$ab=ba=1 \tag{43}$$

如果 a 可逆,称满足(43)的元素 b 为 a 的逆元,通常记为 a^{-1}.

【例 16】 设元素 $a,b\in S$,并且 $1-ab$ 可逆,即存在 $c\in S$,使

$$c(1-ab)=(1-ab)c=1 \tag{44}$$

则 $1-ba$ 也可逆,即存在 $d\in S$,满足

$$d(1-ba)=(1-ba)d=1 \tag{45}$$

解 $d=1+bca$ 满足(45). 事实上,

$$\begin{aligned}(1-ba)(1+bca)&=1+bca-ba-babca \quad (\text{分配律})\\&=1-ba+b(1-ab)ca\\&=1-ba+b\cdot 1\cdot a=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+bca)(1-ba)&=1-ba+bca-bcaba\\&=1-ba+bc(1-ab)a\\&=1-ba+b\cdot 1\cdot a=1\end{aligned}$$

【例 17】 如果 $a,b,ab-1$ 都是环 S 中的可逆元素. 证明 $a-b^{-1}$,$(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ 也可逆.

解
$$(a-b^{-1})b=ab-1 \tag{46}$$

所以

$$(a-b^{-1})b(ab-1)^{-1}=1 \tag{47}$$

$$(ab-1)^{-1}(a-b^{-1})b=1 \tag{48}$$

在(48)两边用 b 去左乘得

$$b(ab-1)^{-1}(a-b^{-1})b=b \tag{49}$$

再用 b^{-1} 去右乘(49)得

$$b(ab-1)^{-1}(a-b^{-1})=1 \tag{50}$$

(47)、(50)表明 $a-b^{-1}$ 可逆，而且 $b(ab-1)^{-1}$ 是它的逆元. 于是

$$\begin{aligned}
&((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})(ab-1)a \\
&=(b(ab-1)^{-1}-a^{-1})(ab-1)a \\
&=ba-a^{-1}(ab-1)a=ba-(b-a^{-1})a \\
&=ba-ba+1=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(ab-1)a((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}) \\
&=(ab-1)a(b(ab-1)^{-1}-a^{-1}) \\
&=(ab-1)ab(ab-1)^{-1}-(ab-1) \\
&=(ab-1)(ab-(ab-1))(ab-1)^{-1} \\
&=(ab-1)\cdot 1\cdot(ab-1)^{-1}=1
\end{aligned}$$

即 $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ 可逆，而且 $(ab-1)a$ 是它的逆元.

例 16 是我国数学家华罗庚发现的定理. 下面的例 17、例 18 也都是华罗庚教授取得的结果.

【例 18】 设 S 是环，函数 $f:S\to S$，并且对任意的 $a,b\in S$，

$$f(a+b)=f(a)+f(b) \tag{51}$$

$$f(ab)=f(a)f(b)\text{或 }f(b)f(a) \tag{52}$$

证明恒有 $f(ab)=f(a)f(b)$ 或者恒有 $f(ab)=f(b)f(a)$.

解 设有 $a,b\in S$ 使

$$f(ab)=f(a)f(b)\neq f(b)f(a) \tag{53}$$

我们证明对一切 $c\in S$,

$$f(ac)=f(a)f(c) \tag{54}$$

不然的话,设有 $c\in S$,使

$$f(ac)=f(c)f(a)\neq f(a)f(c) \tag{55}$$

则

$$f(ab)-f(ac)=f(a)f(b)-f(c)f(a) \tag{56}$$

但(56)的左边即

$$f(ab-ac)=f(a(b-c))$$

由已知,

$$\begin{aligned} f(a(b-c))&=f(a)f(b-c)\\ &=f(a)(f(b)-f(c))\\ &=f(a)f(b)-f(a)f(c) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} f(a(b-c))&= f(b-c)f(a)\\ &= (f(b)-f(c))f(a)\\ &= f(b)f(a)-f(c)f(a) \end{aligned}$$

无论哪一种情况,均不等于(56)的右边. 矛盾!

这表明(54)恒成立. 用同样的方法可以证明对一切 $d\in S$,

$$f(db)=f(d)f(b) \tag{57}$$

于是,对 S 中任意元素 c,d,由于(54)成立,所以(将(57)中 b 换为 c)

$$f(dc)=f(d)f(c)$$

这就是要证明的结论.

【例 19】 设环 S 中,每个非零元均可逆. 函数 $f:S\to S$,

$f(1)=1$，并且

$$f(a+b)=f(a)+f(b) \tag{58}$$

在 $a\neq0$ 时，$f(a)\neq0$，

$$f(a)^{-1}=f(a^{-1}) \tag{59}$$

证明对所有的 $a,b\in S$，恒有

$$f(ab)=f(a)f(b) \tag{60}$$

或恒有

$$f(ab)=f(b)f(a) \tag{61}$$

解 $f(a)=f(a+0)=f(a)+f(0)$，所以

$$f(0)=0$$

当 a,b 中有一个为 0 时，

$$f(ab)=f(0)=0=f(a)f(b)=f(b)f(a)$$

当 $ab=1$（即 $b=a^{-1}$）时，

$$\begin{aligned}f(ab)&=f(1)=1=f(a)f(a)^{-1}=f(a)f(a^{-1})\\&=f(a)f(b)=f(b)f(b)^{-1}=f(b)f(b^{-1})\\&=f(b)f(a)\end{aligned}$$

当 a,b 均不为 0，并且 $ab\neq1$ 时，$a,b,ab-1$ 均可逆，由例 16

$$((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1}=aba-a \tag{62}$$

所以 $$\begin{aligned}f(aba)-f(a)&=f(aba-a)=f((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1}\\&=(f(a-b^{-1})^{-1}-f(a)^{-1})^{-1}\\&=((f(a)-f(b)^{-1})^{-1}-f(a)^{-1})^{-1}\\&=f(a)f(b)f(a)-f(a)\end{aligned}$$

（最后一步是利用(62)，但其中的 a,b 分别换为 $f(a),f(b)$），从而

$$f(aba)=f(a)f(b)f(a) \tag{63}$$

由(63),

$$f(b)f(b)=f(b)f(1)f(b)=f(b\cdot 1\cdot b)=f(bb) \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
&f((a+c)b(a+c))\\
=&\ f(a+c)f(b)f(a+c)\\
=&\ (f(a)+f(c))f(b)(f(a)+f(c))\\
=&\ f(a)f(b)f(a)+f(c)f(b)f(c)\\
&+f(c)f(b)f(a)+f(a)f(b)f(c)\\
=&\ f(aba)+f(cbc)+f(c)f(b)f(c)+f(a)f(b)f(c)
\end{aligned}$$

$$f((a+c)b(a+c))=f(aba+cbc+cba+abc)$$

所以

$$f(c)f(b)f(a)+f(a)f(b)f(c)=f(cba+abc) \tag{65}$$

由(63),(64),(65)

$$\begin{aligned}
&(f(ab)-f(a)f(b))(f(ab)-f(b)f(a))\\
=&f(ab)f(ab)-f(a)f(b)f(ab)\\
&-f(ab)f(b)f(a)+f(a)f(b)f(b)f(a)\\
=&f(ab\cdot 1\cdot ab)-f(abab+abba)+f(abba)=0
\end{aligned}$$

若 $f(ab)-f(a)f(b)\neq 0$,则在上式两边左乘 $(f(ab)-f(a)f(b))^{-1}$ 得 $f(ab)-f(b)f(a)=0$. 所以

$$f(ab)=f(a)f(b) \text{或 } f(b)f(a)$$

由例 17 即知(60)与(61)中有一个恒成立.

10 转换观点

算两次,即从两个方面来考察.

世界上有许多复杂的事件,只有从多个侧面去观察,才能把握它的实质.解数学题也是如此.如从一个方面不能解决,就必须改从其他方面考虑,决不坚持一条道走到黑,这就是算两次的精神所在.

当然,算两次也并不是说只能从两个方面,不能从一个方面或三个方面去考虑.咬定"两次",也是胶柱鼓瑟.或许,某些时候用"转换观点"、"换一个角度看问题"等说法比"算两次"稍为确切一些.

【例 1】 设 r 为正整数,证明任意 r 个连续整数的乘积被 $r!$ 整除.

解 仅从数论(算术)的角度考虑,比较麻烦(需要计算质数 p 在 $r!$ 中出现的次数).换从组合的角度来看,结论则是显然的:在 $n\geqslant r$ 时,$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=C_n^r$,从 n 个元素中选取 r 个的方法当然有整数种;在 $n<0$ 时,只需取绝对值就化为前一种情况;在 $0\leqslant n<r$ 时,$n(n-1)\cdots(n-r+1)=0$,是任何非零整数的倍数.

【例 2】 设 $0<a<1$,$0<b<1$,证明

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}$$
$$+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2} \qquad (1)$$

解 简单的解法是画一个图，图 24 中 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形. 容易看出(1)式左边 $=AI+CI+BI+DI\geqslant AC+BD=2\sqrt{2}$.

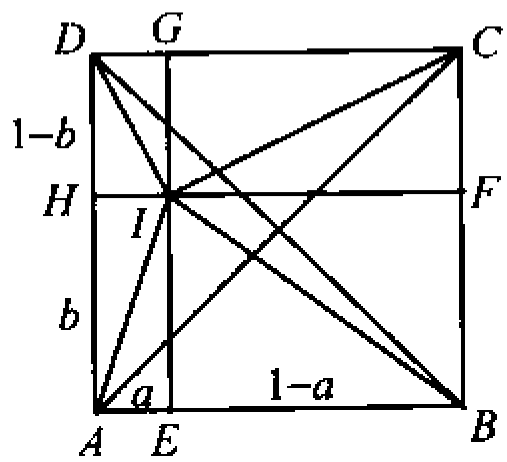


图 24

【例 3】 x,y,z 都是实数，并且

$$0<x<y<z<\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

求证

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$$
$$>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z \qquad (3)$$

解 受例 2 的启发，这一道题也以用图来解为好.

或许有读者觉得这是不说也知道的事，然而我们曾作过试验，在第 31 届(1990 年)国际数学奥赛我国集训队练习时，24 名优秀的中学生，只有一个想到用图来解. 可见看别人的解答或在某种提示下做解答，与完全独立地解答，是很不相同的.

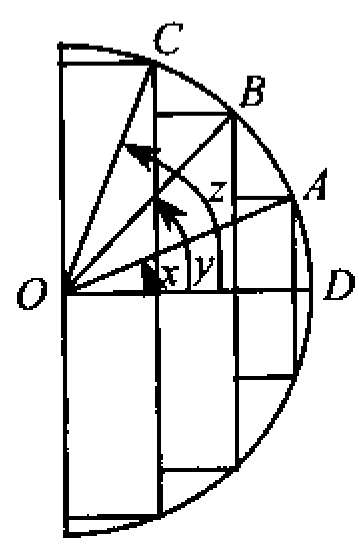


图 25

(3)中的 $\frac{\pi}{2}$ 暗示我们要用半个单位圆.

图 25 中 $\angle AOD,\angle BOD,\angle COD$ 分别为 x,y,z. A,B,C 的横坐标分别为 $\sin x,\sin y,\sin z$，纵坐标分别为 $\cos x,\cos y,\cos z$. 由于易知图

中三个矩形的面积分别为

$$2\sin x(\cos x-\cos y),2\sin y(\cos y-\cos z),2\sin z\cos z$$

它们的和显然小于半圆的面积 $\pi/2$，即(3)成立.

不用图来解，相当困难（读者不妨试一试）. 下面的解法是广东梁栋刚同学给出的，他得到的结果比(3)强一些，解法简洁优美（看上去简单，但并不容易想到，这正是证不等式的困难之一）.

$$\begin{aligned}
&\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-2\sin x\cos y-2\sin y\cos z\\
=&\frac{1}{2}((\sin 2x+\sin 2y)+(\sin 2y+\sin 2z)\\
&+(\sin 2z+\sin 2x))-2\sin x\cos y-2\sin y\cos z\\
\leqslant&\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(y+z)\cos(y-z)\\
&+\sin(z+x)\cos(z-x)-2\sin x\cos y\cos(x-y)\\
&-2\sin y\cos z\cos(y-z)\\
=&\sin(y-x)\cos(x-y)+\sin(z-y)\cos(y-z)\\
&+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
=&\sin(z-x)\cos(2y-x-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)\\
\leqslant&\sin(z-x)+\cos(z-x)\leqslant\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ 还可以改成更小的数（需借助微积分）.

【例 4】 设 x,y 为区间 $(0,1)$ 中的实数，证明 x^2+xy+y^2，$x^2+x(y-1)+(y-1)^2$，$(x-1)^2+(x-1)y+y^2$，$(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2$ 中最小的至多为 $\frac{1}{3}$.

解 考虑上述 4 个函数在坐标平面上的单位正方形

$\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$内的值的最小值.

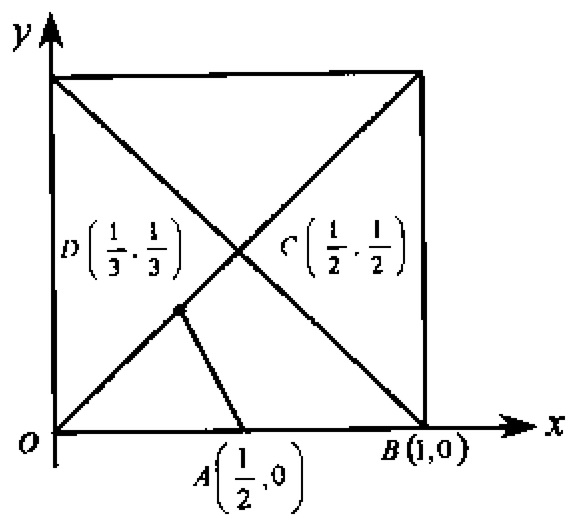


图 26

由于将 x,y 互换,或将 (x,y) 换为 $(1-y,1-x)$,这最小值不变,我们只需考虑由原点 $O(0,0)$,点 $B(1,0)$,$C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$构成的三角形区域(图 26).

这个区域可分为两个部分:由 $O,A(1/2,0),D(1/3,1/3)$构成的三角形(区域)与由 A,B,C,D 构成的四边形.

由于点 O,A,D 都在椭圆$x^2+xy+y^2=\frac{1}{3}$内(将各点坐标代入 x^2+xy+y^2,所得的值均$\leqslant\frac{1}{3}$),所以$\triangle OAD$ 内的点 (x,y)都满足 $x^2+xy+y^2\leqslant\frac{1}{3}$. 同样,四边形 $ABCD$ 内的点 (x,y)都满足$(x-1)^2+(x-1)y+y^2\leqslant\frac{1}{3}$.

于是,本题结论成立.

如果仅从代数角度考虑,问题难以解决.

几何问题,当然也可从代数方程的角度去考虑,这就是笛卡尔发明的解析几何.

【例 5】 每次放三枚围棋子到一个 3×3 的正方形棋盘的同一行或同一列中. 在同一格中出现黑子与白子时,则将其中同样多的黑子与白子取走. 证明不可能使某一格的棋子比其他格均多 1 枚.

解 如果有某一格的棋子比其他格均多 1 枚,不妨设这一格在左上角的 2×2 的正方形中(图 27).

解答本题的关键就在于放过 3×3 的棋盘,把视线转到这左上角的 2×2 的正方形中(前几节已有类似的做法).

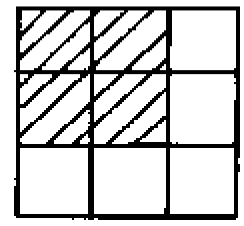


图 27

对这个 2×2 的正方形来说,每次放入(取走)的棋子总是偶数枚. 所以不论进行到什么时候,棋子数的奇偶性永远与原始状态(0 枚)保持一致,即永远为偶数.

另一方面,其中有一格比其他格均多 1 枚时,棋子总数为奇数 $4k+1$.

矛盾表明不可能有一格的棋子比其他格均多 1 枚.

【例 6】 甲、乙两队各出 7 名队员按预先安排好的顺序出场参加围棋擂台赛,双方的 1 号队员首先比赛,负者被淘汰,胜者继续与对方的 2 号队员比赛,……,直至一方队员全被淘汰为止. 试求比赛过程有多少种不同的情况?

解 有人认为"关键是求出胜方动用了 k 名($1\leqslant k\leqslant7$)队员才获胜的所有可能出现的比赛过程的种数 S_k",其实并非如此.

正确的方法是甲方的 7 名队员看作 7 个同样的白球(队员的顺序已事先排好,所以我们不必考虑这些球的顺序),乙方的 7 名队员看作 7 个同样的黑球,将这 14 个排成一列.

每种比赛过程可以看作一种排法,每种排法也可以看作一种比赛过程,两者一一对应:在第 j($1\leqslant j\leqslant7$)个白(黑)球

前面的黑(白)球就表示被甲(乙)方前 j 名队员击败的乙(甲)方队员,最后一个是白(黑)球,则表明甲(乙)方获胜.

而这 14 个球的排法显然有

$$C_{14}^{7}=\frac{14!}{7!\ 7!}=3432$$

种. 所以比赛过程共有 3432 种.

排列组合的计算问题,常常化为投球入盒的问题(加上种种限制). 可以从球这方面考虑,也可以从盒子这方面考虑. 这种例子俯拾皆是,我们就不多举了.

【例 7】 数轴上 n 个互不相交的区间 $[a_i,b_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 组成集合 M. 如果每一条长度不大于 1 的线段都可以放在数轴上,使它的两端均属于集 M(的区间). 证明 n 个区间 $[a_i,b_i]$ 的长度之和 $\geqslant\frac{1}{n}$.

解 设 $d_i=b_i-a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 对于区间 $[0,1]$ 中的点 c,我们知道长为 c 的线段可以放在数轴上,两端属于 M. 我们就着眼于如何放置这样的线段,其中 c 从 0 增长至 1.

首先,设 $d_k=\max d_i$. 当 $c\leqslant d_k$ 时,长为 c 的线段可以整个放在 $[a_k,b_k]$ 里.

假定长 $\leqslant c$ 的线段均可以放在数轴上,两端属于 M,并且长为 c 的线段一端在 $[a_i,b_i]$ 内,另一端在 $[a_j,b_i]$ 内. 不妨设一端就是 b_i,另一端是 a_j(否则用较小的数 a_j-b_i 代替 c). 这时长度 $\in[c,c+d_i+d_j]$ 的线度,均可放在数轴上,一端在 $[a_i,b_i]$ 内,另一端在 $[a_j,b_j]$.

由此可见,$[0,1]$ 中的点 c_1,当 $c_1\geqslant d_k$ 时,必被一个形如

$[c, c+d_i+d_j]$的长为 d_i+d_j 的区间盖住，从而

$$d_k + \sum_{i \neq j}(d_i + d_j) \geqslant 1 \tag{4}$$

在和号中，每个 d_i 出现 $n-1$ 次（与其余的 $n-1$ 个 d_j 搭配），所以(4)的左边不大于 $n(d_1+d_2+\cdots+d_n)$，从而

$$d_1+d_1+\cdots+d_n \geqslant \frac{1}{n} \tag{5}$$

从长为 $c(0\leqslant c\leqslant 1)$ 的线段如何放置入手，发现区间$[0,1]$被$[0,d_k]$及长为 $d_i+d_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的区间覆盖，是解决本题的关键.

【例 8】 集 S 中的数称为“好的”. 已知 0,1 都是好的. 并且对于 $x,y\in S, x-y\in S, \frac{1}{x}\in S$(当 $x\neq 0$ 时). 证明：若 $x,y\in S$，则

(i) $x+y\in S$.

(ii) $xy\in S$.

解 本例的关键是寻求一个数的种种表示方法，这在前面(特别是第 9 节)已经多次使用.

(i) $x+y=x-(0-y)$. $0-y\in S$，所以 $x+y\in S$.

(ii) 当 x 或 y 中有一个为 0 或 1 时，结论显然，设 x,y 均不为 0,1.

容易逐步推出 $x-1, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}$, $x(x-1), x^2$ 都是好的(如 $x=0$ 或 1，则 $x^2=0,1$ 显然是好的).

于是，$(x+y)^2, x^2, y^2\in S$，从而

$$2xy=(x+y)^2-x^2-y^2\in S,\frac{1}{2xy}\in S$$

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\in S$$

最后 $xy\in S$.

【例 9】 证明在任意五个无理数中，总可以选出三个数，这三个数中，每两个的和是无理数.

解 将这五个数用五个点表示，如果两个数的和为有理数，就在相应的两点间连一条线. 问题就化为一个图. 从图论的观点来看，就是要证明有三个点，两两不相邻(没有线相连)，即存在一个由三个点组成的"内固集".

如果图中有三个点 x,y,z，两两有线相连，那么 $x+y,y+z,z+x$ 都是有理数，从而推出 x,y,z 都是有理数，与已知矛盾，所以图中无三角形. 同理，图中也无五边形(即顺次连接五个点，这五条边组成的圈).

如果有一个点 x 引出的线$\geqslant 3$. 设 x 与 y,z,u 相连，那么 y,z,u 彼此均不相连(否则产生以 x 为一个顶点的三角形)，这三个点即为所求.

设每个点至多引出两条线. 如果点 x 至多与一个点 v 相连，那么由于点 y,z,u 不构成三角形，所以必有两个点，例如 y,z，不相连. x,y,z 即为所求.

于是，图中每个点恰好引出两条线. 由一笔画的理论易知这个图是一个五条边组成的圈. 这与上面所说矛盾，因而这种情况不会发生.

【例 10】 一条直线上有 k 个已知点. 以其中每一对点为

直径作圆,并将每个圆染上 n 种颜色中的某一种(k 个已知点不染). 如果每两个外切的圆染的颜色均不相同,证明 $k\leqslant 2^n$.

解 假设 $k>2^n$. 我们证明必有两个外切的圆染的颜色相同.

2^n 启发我们考虑 n 种颜色的集的全部子集.

对已知点 A,设集 M_A 为过 A 点并且在 A 点左侧的那些圆所染颜色的集合.

由于 $k>2^n$,必有两个集 M_A,M_B 相同. 不妨设 B 在 A 的右侧. 以 AB 为直径的圆,在 B 的左侧,它所染的颜色 $\in M_B$,因而也 $\in M_A$. 而在 A 点左侧有一个过 A 的圆染上同样的颜色,且这两个圆互相外切.

【例 11】 101 个长方形,边长都是不超过 100 的整数. 证明这些长方形中必有三个,第一个可以放在第二个中,第二个可以放在第三个中.

解 将每个长方形作为直角坐标系中的整点,横坐标 x 为长方形的长,纵坐标 y 为长方形的宽,$1\leqslant y\leqslant x\leqslant 100$.

问题就是证明在这 101 个格点中,必有 3 个点(x_i,y_i),$i=1,2,3$,满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$,$y_1\leqslant y_2\leqslant y_3$.

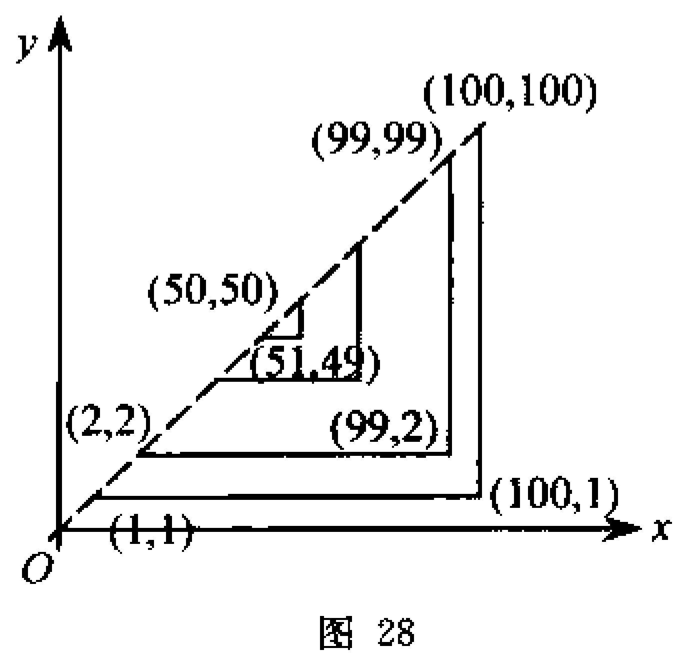


图 28

为此,考虑图 28 中的 50 个曲尺形“⌋”. 第一个曲尺形的三个端点为(1,1),(100,1),(100,100),第二

个的端点是(2,2),(99,2),(99,99),…,最后一个曲尺形退化为一个点(50,50).

由于已知点有 101 个,所以必有一个曲尺形中含有三个已知点,这三个已知点即为所求.

所谓灵活性,在很大程度上说,就是善于从各种不同的角度来看问题,转换观点,从正面,从反面(反证法);从这一方面,从那一方面,从组合、代数、几何、概率…….决不拘泥于一种程式、固守某种一成不变的观点.测定智力高低的标准就在于摒弃谬误的速度.学习数学,可以提高灵活性,使人变得聪明.

习　题

1. 一次竞赛有 $n\geqslant 2$ 名选手参加，历时 k 天，每天选手的得分恰好组成集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. 如果在第 k 天末，每两名选手的总分均为 26 分，求出使这件事成为可能的所有数对 (n, k).

2. 设已知 19 个在 1 与 90 之间的、互不相等的整数，证明在两两的差中，至少有三个相等.

3. 在一次象棋比赛中，每人至多得 k 分（每盘胜者得 1 分，负者 0 分，平局各 1/2 分），证明有一个参加者比赛的盘数不超过 $2k$.

4. 12 名矮子住在树林里，每人将自己的房子染成红色或白色. 在每年的第 i 月，第 i 个矮子访问他所有的朋友（这 12 名矮子的一个子集）. 如果他发现大多数朋友的房子与自己颜色不同，那么他就将自己房子的颜色改变，与大多数朋友保持一致，证明不久以后，这些矮子就不需要改变颜色了.

5. 将正 n 边形的顶点染上颜色（至少两种），使得同一种颜色的点都组成一个正多边形，证明这些正多边形中，必有两个全等.

6. 已知点 A、B、P_1、P_2、$\cdots$、P_n 在同一平面内，证明 P_1A, P_2A, $\cdots$, P_nA, P_1B, P_2B, $\cdots$, P_nB 中至少有 $\sqrt{\frac{n}{2}}$ 个不同

的值.

7. 实数集 R 的子集 S 称为"超稳定的",如果对于每个 $a>0$,都存在一个唯一的 b,使得

$$x\in S\Leftrightarrow ax+b\in S$$

求出所以超稳定的集.

8. 能否用图 29 中各种形状的纸片拼成一个边长为 1991 的正方形(图中每个方格的边长为 1)?

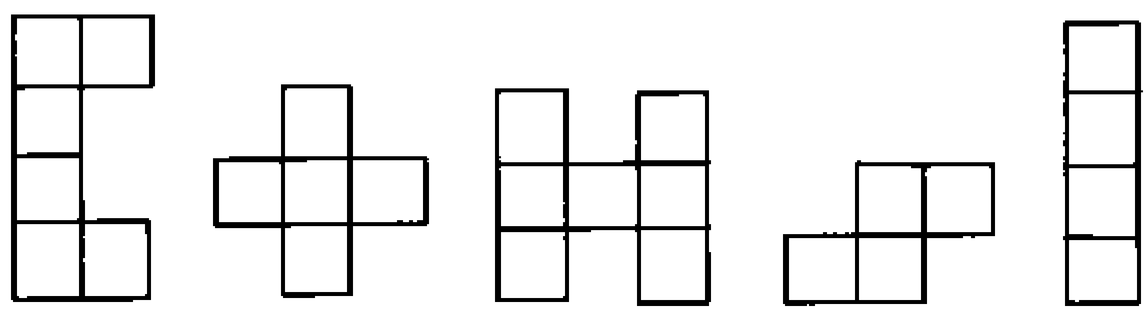


图 29

9. 一个半径为 ρ 的圆与 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 相切,圆心 K 到 BC 的距离为 d. 证明

$$a(\rho-d)=2s(\rho-r)$$

这里 r,$2s$ 分别为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径与周长,并约定 K 与 A 在 BC 同侧时 $d>0$,否则 $d\leqslant 0$.

10. 若上题的圆 K 交 BC 于 D,E. 证明

$$DE=\frac{4\sqrt{rr_1(\rho-r)(r_1-\rho)}}{r_1-r}$$

这里 r_1 为 $\triangle ABC$ 的(在 $\angle A$ 内的)傍切圆半径.

11. 设 $0<r\leqslant n$,$\mathscr{A}$ 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一些 r 元子集所成的族,$\mathscr{B}=\{B:|B|=r-1$ 并且 $B\subset A,A\in\mathscr{A}\}$. 证明

$$\frac{|\mathscr{B}|}{C_n^{r-1}}\geqslant\frac{|\mathscr{A}|}{C_n^r}$$

当且仅当 $\mathscr{A}=\varnothing$ 或 $\mathscr{A}$ 含 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部 r 元子集时，等号成立.

12. 设 $2\leqslant r<\frac{n}{2}$，$\mathscr{A}$ 为 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一些 r 元子集所成的族. 如果 $\mathscr{A}$ 中每两个元素（X 的 r 元子集）的交非空，那么
$$|\mathscr{A}|\leqslant C_{n-1}^{r-1}$$
当且仅当 $\mathscr{A}=\{A|A$ 为 X 的 r 元子集并且含有 X 中一固定元素 $x\}$ 时，等号成立（Erdös-Ko-Rado 定理）.

13. 设 $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$. 在 2^n 个和
$$\sum_{i\in A}x_i\ (A \text{ 是}\{1,2,\cdots,n\}\text{ 的子集})$$
中，至多可以选出多少个，使得每两个选出的和相差不到 1?（当 A 为空集时，约定相应的和为 0）.

14. 给定 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明：存在一个实数 y，使得 $\{x_1-y\}+\{x_2-y\}+\cdots+\{x_n-y\}\leqslant\frac{n-1}{2}$. 这里 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分.

15. 边长为 1 的正方形中（内部或边界上）有四个点，已知其中任意两点的距离不小于 1. 证明这四个点必为正方形四个顶点.

16. 设正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{503}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_{503}=x_1x_2\cdots x_{503}$，证明 $x_1+x_2+\cdots+x_{503}\geqslant512$.

17. 试确定形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_i=\pm1,0\leqslant i\leqslant n)$ 的全体多项式，使每个多项式的零点都是实数.

18. 给定平面上 n 个相异点，证明其中距离为 1 的点对少于

$2n^{3/2}$对.

19. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为任意正整数,用 b_k 记 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中满足条件 $a_i \geqslant k$ 的数的个数,证明:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots.$$

20. 设 p 是素数,$a \geqslant b \geqslant 0$ 为整数,证明:

$$C_{pb}^{pa} \equiv C_b^a \pmod{p}$$

21. 设集合 S 含有 n 个元素,$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 S 的一族不同子集. 它们两两的交非空,而 S 的其他子集不能与 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都相交,证明:$k = 2^{n-1}$.

22. 设一个凸 n 边形中任意三条对角线都不共点,试问所有对角线将这个 n 边形的内部分成了多少个区域?

习 题 解 答

1. k 天的分数总和,有两种算法,从而得出方程

$$k\times(1+2+\cdots+n)=26n$$

即

$$k(n+1)=52$$

从而$(n,k)=(51,1),(25,2),(12,4),(3,13)$. 其中只有$(51,1)$这一数对不是问题的解.

2. 设这 19 个数为

$$(1\leqslant)a_1<a_2<\cdots<a_{19}(\leqslant 90)$$

最大值 a_{19} 与最小值 a_1 的差还有一种算法:

$$a_{19}-a_1=(a_{19}-a_{18})+(a_{18}-a_{17})+\cdots+(a_2-a_1) \quad (1)$$

(1)式左边$\leqslant 90-1=89$. 如果两两的差中至多两个相等,那么(1)式右边(18 个差的和)

$$\geqslant 2\times(1+2+\cdots+9)=(1+9)\times 9=90$$

矛盾!

3. 设有 n 人参赛,比赛盘数最少的人赛了 m 盘,考虑总盘数 S. 一方面,$S\geqslant\frac{nm}{2}$. 另一方面,$S\leqslant nk$. 从而 $m\leqslant 2k$.

4. 将 12 名矮子当作 12 个点,如果两名矮子是朋友,就在相应的两点之间连一条线. 并且在他们的房子颜色相同时,这条线为蓝色;不同时,为黑色. 考虑蓝色线的总数 S. 一方面,S 是有上界的(例如 $S\leqslant C_{12}^2$). 另一方面,每名矮子变更

房子颜色时,S 严格增加(至少增加 1). 因此,在有限多次变更后,这些矮子就不需要变更了.

5. 将这 n 个点顺次记为 $0,1,\cdots,n-1$. 设染了 k 种颜色,第 t 种颜色的顶点组成 n_t 边形,则 $n_t\mid n$. 设 $n_t'=\frac{n}{n_t}$,则这 n_t 边形的顶点可记为 $a_t+j\cdot n_t'(j=0,1,2,\cdots,n_t-1)$. 由于

$$\{0,1,\cdots,n-1\}=\bigcup_{t=1}^{k}\{a_t+j\cdot n_t'\mid j=0,1,\cdots,n_t-1\}$$

并且右边的各个集合互不相交,所以

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{n_t-1}x^{a_t+j\cdot n_t'}$$

即

$$\frac{1-x^n}{1-x}=\sum_{t=1}^{k}\frac{x^{a_t}(1-x^n)}{1-x^{n_t'}}$$

约去 $1-x^n$ 得

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{t=1}^{k}\frac{x^{a_t}}{1-x^{n_t'}} \tag{1}$$

如果 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 互不相同,那么 $n_1',n_2',\cdots,n_k'$ 也互不相同,不妨设$(1<)n_1'<n_2'<\cdots<n_k'$. 令 $x=re^{\frac{2\pi i}{n_k'}}$,$r\to 1^-$,则(1)式右边的$\frac{x^{a_k}}{1-x^{n_k'}}\to\infty$,而其余各项及(1)式左边均为有界,矛盾!

6. 作$\odot(A,AP_i)$,$\odot(B,BP_i)$,$i=1,2,\cdots,n$.

考虑这些圆的交点的总数 S. 一方面,每个点 P_i 都是交点,所以 $n\leqslant S$. 另一方面,设以 A 为心的圆有 a 个,以 B 为心的圆有 b 个,则 $S\leqslant 2ab$. 所以

$$\max\{a,b\}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{\frac{n}{2}}$$

7. 记 $b=f(a)$，则对任意正数 a_1,a_2，

$$x\in S\Leftrightarrow a_1x+f(a_1)\in S\Leftrightarrow a_2(a_1x+f(a_1))+f(a_2)\in S$$
$$\Leftrightarrow a_2x+f(a_2)\in S\Leftrightarrow a_1(a_2x+f(a_2))+f(a_1)\in S$$
$$\Leftrightarrow a_1a_2x+f(a_1a_2)\in S$$

由 $f(a_1a_2)$ 的唯一性得

$$a_2f(a_1)+f(a_2)=a_1f(a_2)+f(a_1)$$

从而

$$\frac{f(a_1)}{a_1-1}=\frac{f(a_2)}{a_2-1}$$

即 $\frac{f(a)}{a-1}$ 为常数 c，$f(a)=c(a-1)$.

若 $x>(<)-c$，$x\in S$，则对任意 $y>(<)-c$，$a=\frac{y+c}{x+c}>0$，从而 $S\supset\{y\underset{(<)}{>}-c\}$. 由此易知超稳定集为空集、$\{-c\}$、$\{y>-c\}$、$\{y<-c\}$ 及这些集的补集.

8. 不能. 将 1991×1991 的正方形中，每个单位正方形方格染上黑色或白色，使每两个相邻的方格颜色不同. 由于 1991×1991 为奇数，两种颜色的方格数相差为 1. 另一方面，每一种纸片中，两种颜色的方格数相差为 0 或 3. 如果它们能拼成一个大正方形，那么其中两种颜色之差必为 3 的倍数. 矛盾！

9. 作直线 $l/\!/BC$ 并且与 $\odot k$ 相切，l 交 AB 于 B'、交 AC 于 C'

(图 30). 这时$\odot k$是$\triangle AB'C'$的内切圆. 设$\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$的(BC, $B'C'$边上的)高分别为h, h'. 则由$\triangle ABC\sim\triangle AB'C'$得

$$\frac{\rho-r}{r}=\frac{h'-h}{h}=\frac{\rho-d}{h}$$

由于$rs=\frac{1}{2}ha$(=$\triangle ABC$面积), 结合上式即得结论.

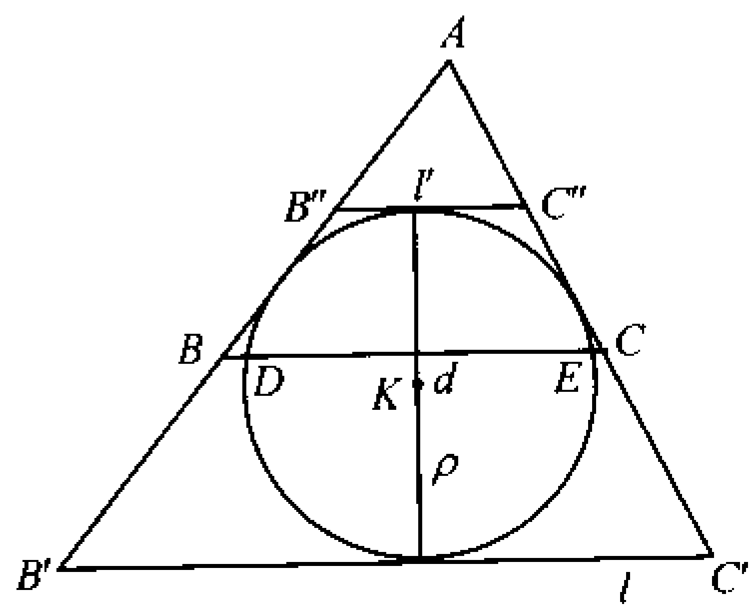


图 30

10. 在$\odot k$上面作直线$l'\parallel BC$, 交AB于B''、交AC于C''(图 30). 这时$\odot k$是$\triangle AB''C''$的傍切圆, 与上题类似,

$$\frac{r_1-\rho}{r_1}=\frac{\rho+d}{h}$$

由于$r_1(s-a)=\frac{1}{2}ha$, 所以

$$a(\rho+d)=2(s-a)(r_1-\rho)$$

结合上题得

$$DE=2\sqrt{\rho^2-d^2}=\frac{4\sqrt{s(s-a)(r_1-\rho)(\rho-r)}}{a}$$

$$=\frac{4\sqrt{rr_1(\rho-r)(r_1-\rho)}}{r_1-r}$$

11. 考虑集合对(A,B):$B\subset A$,的个数S.每个A含r个B,所以$S=|\mathscr{A}|\cdot r$.另一方面,每个B至多在$n-r+1$个A中,所以$S\leqslant|\mathscr{B}|\cdot(n-r+1)$.综合以上两个方面即得结论.

12. 假设$|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$,我们证明$\mathscr{A}=X_x$,这里

$$X_x=\{A\,|\,x\in A\subset X,|A|=r\}$$

首先,考虑将$1,2,\cdots,n$这n个数依任意顺序排到圆周上,排法共$(n-1)!$种.其中,将某个$A\in\mathscr{A}$排成一个区间(即A的r个元素在圆周上是相继的)的排法有$r!\,(n-r)!$种.因此,平均每一种顺序中,$\mathscr{A}$有

$$|\mathscr{A}|\cdot r!\,(n-r)!\,/(n-1)!\,=r$$

个A成为区间.

另一方面,对每一种圆周排列,如果$\mathscr{A}$中的A成为区间$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$,那么由于$\mathscr{A}$中其他的区间B均与A相交,所以这种B必全在

$$(a_2,\cdots,a_{r+1}),(a_3,\cdots,a_{r+2}),\cdots$$
$$(a_r,\cdots,a_{2r-1})$$

这$r-1$个中;或全在

$$(a_n,a_1,\cdots,a_{r-1}),(a_{n+1},a_n,\cdots,a_{r-2}),\cdots$$
$$(a_{n-r+1},a_{n-r+2},\cdots,a_1)$$

这$r-1$个中.所以$\mathscr{A}$中至多有r个A成为区间.

综合以上两个方面,在每一种圆周排列中,$\mathscr{A}$恰有r

个区间. 并且设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一种圆周排列，我们可以设

$$(a_1,\cdots,a_r),(a_2,\cdots,a_{r+1}),\cdots$$
$$(a_r,\cdots,a_{2r-1})$$

是这样的 r 个区间. 而

$\{a_n,a_1,\cdots,a_{r-1}\}\overline{\in}\mathscr{A}$.

因为$\{a_1,\cdots,a_r\}\in\mathscr{A}$, $\{a_n,a_1,\cdots,a_{r-1}\}\overline{\in}\mathscr{A}$, 所以对 $a_1,\cdots,a_{r-1}$ 的任一排列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{r-1}}$，在圆周排列.

$a_n,a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{r-1}},a_r,C_{r+1},C_{r+2},\cdots,C_{n-1}$ 中，$(a_{i_1},\cdots,a_r)$，$(a_{i_2},\cdots,a_r,C_{r+1})$，$\cdots$，$(a_{i_{r-1}},a_r,\cdots,C_{2r-2})$，$(a_r,\cdots,C_{2r-1})$都是 $\mathscr{A}$ 中的区间.

于是 X 中任一个含 a_r 而不含 a_n 的 r 元集均在 $\mathscr{A}$ 中.

对任一个不含 a_r 的 r 元集 B，由于 $X\backslash B$ 中有 $n-r>r$ 个元素，所以有一个含 a_r 不含 a_n 的 r 元集 $C\subset X\backslash B$. 根据上面所说 $C\in\mathscr{A}$，从而 $B\overline{\in}\mathscr{A}$.

因为任一个不含 a_r 的 r 元集$\overline{\in}\mathscr{A}$，而 $|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$，所以 $\mathscr{A}=X_{a_r}$.

在 $|\mathscr{A}|\geqslant C_{n-1}^{r-1}$ 时，根据上面所证，$\mathscr{A}$ 中的 C_{n-1}^{r-1} 个 r 元集组成集族 X_x，不含 x 的 r 元集 B 均与 X_x 中某个 r 元集不相交，所以 $B\overline{\in}\mathscr{A}$. 从而 $\mathscr{A}=X_x$，并且 $|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$.

在 n 为偶数并且 $r=\frac{n}{2}$ 时，X 的每个 r 元子集与它的补集(也是 r 元子集)，至多有一个属于 $\mathscr{A}$. 所以 $|\mathscr{A}|\leqslant\frac{1}{2}C_n^r=C_{n-1}^{r-1}$. 即这时定理仍然成立，但是等号不仅在 $\mathscr{A}=X_x$

时成立，而只要使每个 r 元子集与它的补集恰有一个在 $\mathscr{A}$ 中. 在 $r>\frac{n}{2}$ 时，显然每两个 r 元子集均相交，所以 $|\mathscr{A}|$ 的最大值为 C_n^r.

这定理是柯召等人于 1961 年发现的，被誉为集族的极端理论的基石，上面的证法是 1972 年 Katona 给出的.

13. 如果两个和相差不到 1，那么相应的子集 A_1,A_2 互不包含，所以由 Sperner 定理，选出的和不超过 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个. 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，恰好能选出 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个.

14. 不难验证，对于任意实数 x 有

$$\{x\}+\{-x\}=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为整数}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 不为整数}\end{cases}$$

故 $\{x\}+\{-x\}\leqslant 1$.

设 $S_i=\sum_{j=1}^{n}\{x_j-x_i\}(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $S_1,\cdots,S_n$ 的均值(应用上面说的结论)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}S_i &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\{x_j-x_i\}+\{x_i-x_j\})\\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\{(x_j-x_i)\}+\{-(x_j-x_i)\})\leqslant C_n^2\end{aligned}$$

从而 $S_1,\cdots,S_n$ 中必有一个(无妨设为 S_i)满足 $S_i\leqslant\frac{1}{n}C_n^2=\frac{n-1}{2}$，即问题中说的 y 可取为 x_i.

15. **解法一** 如果 A,B,C,D 四点的凸包为凸四边形 $ABCD$，那么它的周长 $\geqslant 4$. 由于

凸闭折线的长≥被包围的凸闭折线的长

而且等号仅在两者重合时成立，所以 A,B,C,D 必为正方形的顶点.

如果 A,B,C,D 的凸包是三角形，不妨设 D 在 $\triangle ABC$ 内，这时 $\angle ADB,\angle BDC,\angle CDA$ 中必有一个 $\geqslant 360^\circ\div 3=120^\circ$. 不妨设

$$\angle BDC\geqslant 120^\circ$$

则

$$BC\geqslant\sqrt{BD^2+CD^2+BD\times CD}\geqslant\sqrt{3}>\sqrt{2}$$

与正方形中两点的最大距离为 $\sqrt{2}$ 矛盾.

如果 A,B,C,D 的凸包是线段，不妨设 C 在线段 AB 内，则

$$AB=AC+CB\geqslant 1+1>\sqrt{2}$$

仍矛盾.

解法二 设正方形的中心为 O，以 O 为心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径作圆. 这圆覆盖正方形，更覆盖 A,B,C,D 四点.

不妨设射线 OA,OB,OC,OD 的顺序成逆时针方向. $\angle AOB,\angle BOC,\angle COD,\angle DOA$ 中必有一个，不妨设是 $\angle AOB$，满足

$$\angle AOB\leqslant 360^\circ\div 4=90^\circ$$

这时 $OA\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OB\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，而

$$\sqrt{OA^2+OB^2}\geqslant AB\geqslant 1$$

所以必有 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle AOB=90^{\circ}$，即 A,B 在圆上，从而为正方形的顶点.

同样，$\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=90^{\circ}$，并且 C,D 为正方形的顶点.

16. 设 $x_i=a_i+1$，a_i 为非负整数($1\leqslant i\leqslant 503$). 则一方面

$$\sum_{i=1}^{503} x_i = \sum_{i=1}^{503} a_i + 503 \geqslant 503 > 2^8$$

另一方面，由 $1+a_i \leqslant 2^{a_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 503)$ 可见

$$\sum_{i=1}^{503} x_i = (1+a_1)\cdots(1+a_{503}) \leqslant 2^{a_1} + \cdots + a_{503}$$

综合起来得出 $\sum\limits_{i=1}^{503} a_i > 8$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{503} a_i \geqslant 9$.

$$\sum_{i=1}^{503} x_i = \sum_{i=1}^{503} a_i + 503 \geqslant 9 + 503 = 512 = 2^9$$

当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = 2$，其余 $x_i = 1$ 时等号成立.

17. 可以只考虑 $a_0=1$ 的情形，设 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的 n 个实根为 $x_1,\cdots,x_n$，则一方面，由韦达定理知，

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=a_1^2-2a_2$$

另一方面，根据算术-几何平均不等式得

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 \geqslant n\sqrt[n]{(x_1\cdots x_n)^2}=n(a_n^2)^{\frac{1}{n}}$$

当且仅当 $x_1^2=\cdots=x_n^2$ 时取等号，故有

$$\frac{a_1^2-2a_2}{n} \geqslant (a_n^2)^{\frac{1}{n}}$$

对于本题，上式成为 $\frac{1\pm 2}{n} \geqslant 1$ 即 $n\leqslant 3$. 据此及上面的论

证，不难求出符合要求的全体多项式为：

$$\pm(x-1),\pm(x+1),\pm(x^2+x-1),\pm(x^2-x-1)$$

$$\pm(x^3+x^2-x-1),\pm(x^3-x^2-x+1)$$

18. 对于平面上的点 $P_1,\cdots,P_n$，以 d_i 表示与 P_i 相距为 1 的点 P_j 的个数（$1\leqslant i\leqslant n$），则相距为 1 的点对数目为 $\frac{1}{2}(d_1+\cdots+d_n)$。对每个 i，以 P_i 为圆心，作半径为 1 的圆 C_i。因每对圆至多有 2 个交点，故所有的 C_i 至多有 $2C_n^2$ 个交点，其中点 P_i 作为诸 C_j 的交点共出现 $C_{d_i}^2$ 次（若 $d_i\leqslant 1$，约定 $C_{d_i}^2=0$）。故

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\leqslant 2C_n^2$$

另一方面，我们可以先考虑 $d_i\geqslant 1$ 的情形，由柯西不等式得出

$$\sum_{i=1}^{n}C_{d_i}^2\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)^2\geqslant\frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)\right]^2$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)<\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}$$

所以 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i\leqslant\frac{1}{2}(n+\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}})<2n^{\frac{3}{2}}$.

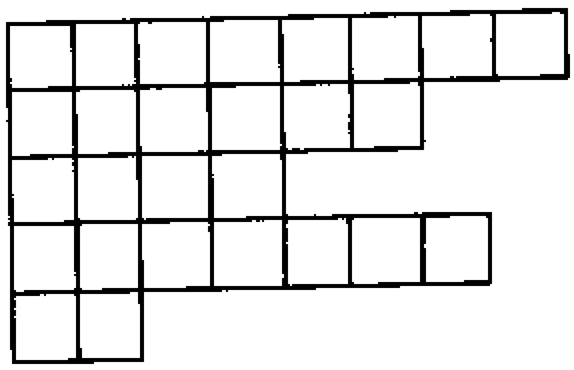


图 31

19. 如图 31 所示，第 i 行画着 a_i 个正方形（边长为 1），于是 b_j 即为第 j 列中的正方形数目。由此易得结果.

20. 由 p 是素数，易证

$$C_p^i \equiv 0(\bmod p), \quad (1 \leqslant i \leqslant p-1)$$

于是

$$(1+x)^p \equiv 1+x^p(\bmod p)$$

从而

$$(1+x)^{pa} \equiv [(1+x)^p]^a \equiv [1+x^p]^a$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{a} C_a^j x^{jp}(\bmod p)$$

另一方面

$$(1+x)^{pa} \equiv \sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^k x^k(\bmod p)$$

故

$$\sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^k x^k \equiv \sum_{j=0}^{a} C_a^j x^{jp}(\bmod p)$$

这样，x 同次幂的系数必对于模 p 同余，即对 $b=0,1,\cdots,a$ 成立

$$C_{pa}^{pb} \equiv C_a^b(\bmod p)$$

21. 先证明 $k \leqslant 2^{n-1}$. 若 $k>2^{n-1}$，由于 S 共有 2^n 个子集，我们将它们配成 2^{n-1} 对，每一对中两个子集互补. 因 $k>2^{n-1}$，故 $A_1,\cdots,A_k$ 中有两个互补的子集，从而它们的交为空集，与题设矛盾.

再证明 $k \geqslant 2^{n-1}$. 假设 $k<2^{n-1}$，我们可以从 S 中除 $A_1,\cdots,A_k$ 外，选取一对互补的子集 X 和 Y. 由题设 $A_1,\cdots,A_k$ 中有一个 A_i 满足 $A_i \cap X=\varnothing$，从而 $A_i \subset Y$. 同理还有一个 A_j 满足 $A_j \cap Y=\varnothing$，故 $A_j \subset X$. 由此可知，$A_i \cap A_j \subset X \cap Y$

$=\varnothing$，即 $A_i \cap A_j=\varnothing$，仍与题设矛盾.

结合两个方面，可知 $k=2^{n-1}$.

22. 将对角线一条一条地去掉. 先去掉一条对角线. 如果这条对角线的内部(不包括端点)有 k_1 个与其他对角线的公共点，那么这条对角线被分为 k_1+1 段，每一段是两个区域的公共边界. 将这条对角线去掉后，区域的个数就减少了 k_1+1 个. 再去掉一条对角线. 如果这条对角线的内部有 k_2 个与其他(未去掉的)对角线的公共点，那么去掉这条对角线，区域的个数就减少了 k_2+1 个，依此类推. 对角线全去掉后，只剩下一个区域，即原来的多边形. 因此多边形被对角线分为

$$1+\sum(k_i+1)$$

个区域. 因为对角线有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条，所以

$$1+\sum 1=1+\frac{1}{2}n(n-3)=C_{n-1}^2$$

$\sum k_i$ 表示每两条对角线在多边形内部的交点的总数. 每两条在多边形内部相交的对角线，它们的端点是凸多边形的 4 个顶点. 反过来，多边形的每 4 个顶点组成一个凸四边形，它的两条对角线在多边形内部有一个公共点. 所以 $\sum k_i$ 正好等于凸 n 边形的顶点的四元组合的个数，即

$$\sum k_i=C_n^4$$

因此，所求区域的个数为

$$C_n^4+C_{n-1}^2$$

图书在版编目（CIP）数据

算两次/单墫编著. —3版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.4
（数学奥赛辅导丛书）
ISBN 978-7-312-02482-5

Ⅰ.算… Ⅱ.单… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第049128号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址：安徽省合肥市金寨路96号，230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销
*
开本：880×1230/32 印张：4.5 字数：91千
1989年9月第1版 2009年4月第3版
2009年4月第3次印刷
定价：10.00元

数学奥赛
辅导丛书

⊙ 从特殊性看问题

⊙ 组合恒等式

⊙ 解析几何的技巧

⊙ 算两次

⊙ 构造法解题

⊙ 漫话数学归纳法

责任编辑／韩继伟
封面设计／黄　彦

定价: 10.00 元

ISBN 978-7-312-02482-5

9 787312 024825 >