数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 8

Mathematical Olympiad Series

高中数学竞赛中的解题方法与策略

何忆捷 熊 斌 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家. 例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯(G. Margulis，俄罗斯，1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld，乌克兰，1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz，法国，1994年)、博切尔兹(R. Borcherds，英国，1998年)、高尔斯(T. Gowers，英国，1998年)、拉福格(L. Lafforgue，法国，2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman，俄罗斯，2006年)、陶哲轩(Terence Tao，澳大利亚，2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo，越南，2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss，以色列，2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov，俄罗斯，2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani，女，伊朗，2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 化 归

所谓“化归”，是指把要解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经解决或者能比较容易地解决的问题中去，最终获得原问题解答的一种解题策略.

匈牙利著名数学家罗莎・彼得(Rosza Peter)在其名著《无穷的玩艺》中，通过一个生动有趣的笑话，来说明数学家是如何用化归的思想方法来解题的. 有人提出了这样一个问题：“假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，你想烧开水，应当怎样去做?”对此，某人回答说：“在壶中灌上水，点燃煤气，再把壶放到煤气灶上.”提问者肯定了这一回答，但是，他又追问道：“如果其他的条件都没有变化，只是水壶中已经有了足够多的水，那么你又应该怎样去做?”这时被提问者一定会大声而有把握地回答说：“点燃煤气，再把水壶放上去.”但数学家们可能会这么回答：“只需把水壶中的水倒掉，问题就化归为前面所说的问题了.”“把水倒掉”，这就是化归，是数学家们常用的方法.

在解数学问题时，我们常常需要将复杂问题化归为简单问题，将陌生问题化归为熟悉问题，将一般情况化归为特殊情况，将一种形式转化为另一种形式等等.

先看如下三个例子：

例 1 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$($n\in\mathbf{N}^*$)，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析 作三角代换：令 $a_1=\dfrac{1}{3}=\cos t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$a_2=\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}=\cos\frac{t}{2}.$$

依此类推得 $a_3=\cos\dfrac{t}{2^2}$，$a_4=\cos\dfrac{t}{2^3}$，$\cdots$. 一般地，有 $a_n=\cos\dfrac{t}{2^{n-1}}$，其中$t=$

$\arccos\dfrac{1}{3}$.

因此,数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\cos\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\arccos\dfrac{1}{3}\right)$.

例 2 若关于 z 的方程 $z^2+c|z|^2=1+2\mathrm{i}$ 有复数解,求实数 c 的取值范围.

解析 设原方程有复数解 $z_0=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$,则

$$a^2-b^2+2ab\mathrm{i}+c(a^2+b^2)=1+2\mathrm{i},$$

由实部和虚部分别相等,可得如下方程组:

$$\begin{cases}(c+1)a^2+(c-1)b^2=1,\\ 2ab=2,\end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases}(c+1)a^4-a^2+(c-1)=0,\\ b=\dfrac{1}{a}.\end{cases} \tag{①}$$

因此,原方程有复数解 z_0 当且仅当关于 a、b 的方程组①有实数解,考虑到 b 由 a 决定,且 $a^2>0$,这又等价于关于 x 的一元二次方程

$$(c+1)x^2-x+(c-1)=0 \tag{②}$$

存在正数解.

若 $c\leqslant-1$,因为$(c+1)x^2\leqslant0$, $c-1<0$,故方程②显然没有正数解;

若 $c>-1$,则方程②中二次项系数为正,一次项系数为负,由根与系数的关系知,方程②存在正数解当且仅当判别式 $\Delta=1-4(c+1)(c-1)\geqslant0$,即 $4c^2\leqslant5$,故得 $-1<c\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

综上可知,实数 c 的取值范围是 $-1<c\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

例 3 设正方形周界上的两点 M、N 之间连有一条可求长的连续曲线 Γ,将正方形分成面积相等的两部分. 证明:Γ 的长度不小于正方形的边长.

解析 将正方形记为 $ABCD$,并设其边长为 a. 不失一般性,仅需讨论以下三种情况:

(1) M、N 位于 $ABCD$ 的对边 AD、BC 上(如图 1-1).

此时 Γ 的长度不小于平行直线 AD、BC 的距离 a（无论 Γ 是否平分 $ABCD$ 的面积）.

(2) M、N 位于 $ABCD$ 的邻边 AD、AB 上（如图 1－2）.

由于 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$，故 Γ 必与线段 BD 有公共点，取其中之一为点 P，作曲线 PN 关于 BD 的对称曲线 PN'，则 M、N' 分别在边 AD、BC 上. 由(1) 知曲线 Γ'：MPN' 的长度不小于 a，而 Γ 与 Γ' 长度相等，从而 Γ 的长度不小于 a.

(3) M、N 位于 $ABCD$ 的一边 AD 上（如图 1－3）.

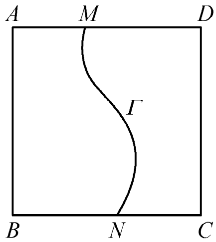

图 1－1

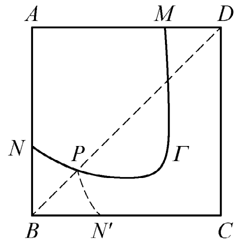

图 1－2

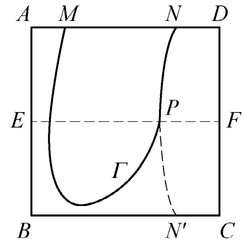

图 1－3

取 AB、CD 的中点 E、F，由于 $S_{AEFD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$，故 Γ 必与线段 EF 有公共点，取其中之一为点 P，作曲线 PN 关于 EF 的对称曲线 PN'，则 M、N' 分别在边 AD、BC 上. 由(1) 知曲线 Γ'：MPN' 的长度不小于 a，而 Γ 与 Γ' 长度相等，从而 Γ 的长度不小于 a.

综上可知，结论成立.

评注 在例 1 中，我们运用三角代换，将递推关系转化为半角关系，使问题迎刃而解；在例 2 中，我们先运用实部与虚部分离，将原复数方程解的存在性问题转化为实数方程组①的解的存在性，又进一步转化为一元二次方程②的正数解的存在性，每一步的转化都遵循使问题熟悉化、简单化的原则.

例 3 是化归思想的另一种体现：我们首先解决了相对容易的第 1 种情形，而对于第 2、3 种情形，通过对称变换，将其化归为第 1 种情形，也就是我们曾解决的一个问题.

下面再通过几个具体的例子来说明这种解题策略的运用.

例 4 (1) 13 个小朋友围成一圈，至多能选出几个人，使得他们互不相邻？

(2) 从 1, 2, …, 13 这 13 个数中至多可以选出几个数，使得选出的数中，每两个数的差既不等于 5，也不等于 8？

解析 (1) 将 13 个小朋友依次编号为 1, 2, …, 13,如图 1-4 所示.

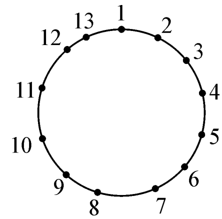

图 1-4

由于 1、3、5、7、9、11 号两两不相邻,故可选出 6 人.

下证至多可选 6 人. 先任意选定一人,不妨设为 1 号,此时与他相邻的 2 号与 13 号不能选. 将剩下的 10 位小朋友配成 5 对:(3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10), (11, 12),每对中至多只能选一人,连同 1 号在内,至多可选 6 人.

综上所述,从圈上至多能选出 6 人,使他们互不相邻.

(2) 将此问题"化归"为(1).

令 1, 2, …, 13 按如下规则排成一圈:先排 1,在 1 的旁边放 9(与 1 的差为 8),在 9 的旁边放 4(与 9 的差为 5), ……依此类推,每个数旁边的数与它相差 8 或 5,最后得到图 1-5 所示的一个圈.

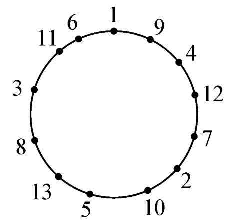

图 1-5

验证知,圈上的数满足:两数相邻当且仅当它们的差是 5 或 8.

于是问题(2)转化为:在这个圈上至多能选几个数,使每两个数在圈上不相邻? 由(1)的结论知,答案是 6. 例如,选 1、4、7、10、13、3.

评注 表面看来(1)、(2)两题是不同的,且由于直观性的差异,直接求解(2)比(1)来得困难. 现通过转化,将(2)化归为(1),问题就解决了.

例 5 一列点 P_1, P_2, …满足:对任意正整数 n, P_n 与 P_{2n} 之间有边相连, P_{2n} 与 P_{3n+1} 之间有边相连. 证明:这列点中的任意两个点均可由这些边互通.

证明 只需证明每个点 $P_i(i \geqslant 2)$ 都能与 P_1 互通.

进一步,只需证明从每个 $P_i(i \geqslant 2)$ 出发,可经有限步到达某个下标更小的点 $P_j(j < i)$,因为下标的递降必在有限步内结束,故从 P_i 出发在有限步后可到达 P_1.

根据条件, P_n 与 P_{3n+1} 可以互通,因此有

$$P_{3k} \to P_{9k+1} \to P_{18k+2} \to P_{36k+4} \to P_{12k+1} \to P_{4k} \to P_{2k} (k \geqslant 1);$$
$$P_{3k+1} \to P_k (k \geqslant 1);$$
$$P_{3k+2} \to P_{6k+4} \to P_{2k+1} (k \geqslant 0),$$

从而命题得证.

评注 本题不易直接构造点 P_i、P_j 之间通路的一般形式，但经过问题的转化，归结为每个点 $P_i(i \geqslant 2)$ 可与下标更小的点互通，这就便于证明了.

例 6 设 $0<a<b$，证明：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

证明 原不等式等价于 $\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$，即 $\ln \dfrac{b}{a}<\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

令 $b=at^2(t>1)$，进一步将上述不等式转化为 $2\ln t<t-\dfrac{1}{t}$.

设 $F(t)=2\ln t-\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$，则

$$F(1)=0,\ F'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2<0(t>1).$$

因此，当 $t>1$ 时，$F(t)$ 单调递减，故 $F(t)<F(1)=0(t>1)$，即 $2\ln t<t-\dfrac{1}{t}(t>1)$，从而原不等式成立.

评注 在证明原不等式时，先通过等价变形和换元，化归为关于 t 的一个不等式，同时起到了减少字母和简化约束条件的作用；此后构造函数 $F(t)=2\ln t-\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$，将问题进一步化归为对函数单调性的讨论，而 $F(t)$ 的单调性又通过求导得以判断. 本题的求解过程简短，但多处体现了化归思想.

例 7 设 $a,d\geqslant 0$, $b,c>0$, $b+c\geqslant a+d$，求 $S=\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值. （1988 年苏联数学奥林匹克）

解析 将 a 调整至 $b+c-d(\geqslant a)$，S 的值不变大. 因此仅需考虑 $b+c=a+d$ 的情况.

此时可设 $a=b+t$, $c=d+t$，其中 t 为参数，代入得

$$S=\frac{b}{2d+t}+\frac{d+t}{2b+t}.$$

由对称性，不妨设 $t\geqslant 0$（否则，若 $t<0$，将 a、b、c、d、t 分别替换为 d、c、b、a、$-t$).

当 $t=0$ 时，$S=\dfrac{b}{2d}+\dfrac{d}{2b}\geqslant 1$.

当 $t>0$ 时，由于 S 关于 b、d、t 是齐次的，不妨设 $t=2$. 此时

$$S=\frac{b}{2(d+1)}+\frac{d+2}{2(b+1)}=\frac{b+1}{2(d+1)}-\frac{1}{2(d+1)}+\frac{d+2}{2(b+1)} \qquad ①$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{b+1}{2(d+1)}\cdot\frac{d+2}{2(b+1)}}-\frac{1}{2(d+1)}=\sqrt{\frac{d+2}{d+1}}-\frac{1}{2(d+1)}.$$

作代换 $\sqrt{\frac{d+2}{d+1}}=x$，则 $\frac{1}{2(d+1)}=\frac{x^2-1}{2}$，所以

$$S\geqslant\sqrt{\frac{d+2}{d+1}}-\frac{1}{2(d+1)}=x-\frac{x^2-1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1=f(x).$$

又由 $x^2=1+\frac{1}{d+1}\in(1,2]$，得 $x\in(1,\sqrt{2}]$，所以 $S\geqslant f(\sqrt{2})=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

再考虑何时取等，要求 $x=\sqrt{2}$，即 $d=0$，并且之前的 ① 也要取等，故 $b=\sqrt{2}-1$，最终确定一种取等条件 $a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=2$，$d=0$. 故 S 的最小值为 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

评注 上述解法通过调整、设参数，结合对称性、齐次性，逐步减少变量个数，再通过基本不等式的放缩，转化为单变量最值问题，最后通过代换简化形式，求得 S 的下界. 对本题而言，上述解法虽不是最简方法，但其减少变量个数时所采用的思考策略较为自然合理，具有一定的启发性.

例 8 记 $F=\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$. 当 a、b、c 取遍所有实数时，求 F 的最小值. （2001 年中国国家集训队选拔考试）

解析 令 $f(x)=(x+2)^3-a(x+2)^2-b(x+2)-c$，原问题转化为求 $F=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ 的最小值，其中

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3+(6-a)x^2+(12-4a-b)x+(8-4a-2b-c)\\&=x^3+a_1x^2+b_1x+c_1.\end{aligned}$$

将 $6-a$、$12-4a-b$、$8-4a-2b-c$ 分别简记为 a_1、b_1、c_1，易见 a、b、c 取遍所有实数当且仅当 a_1、b_1、c_1 取遍所有实数.

先证明 $F\geqslant\frac{1}{4}$.

在 $f(x)$ 表达式中分别取 $x=\pm1,\pm\frac{1}{2}$，得

$$f(1)=1+a_1+b_1+c_1,$$

$$f(-1)=-1+a_1-b_1+c_1,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{a_1}{4}+\frac{b_1}{2}+c_1,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{a_1}{4}-\frac{b_1}{2}+c_1.$$

因此 $f(1)-f(-1)=2+2b_1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+b_1$，所以

$$f(1)-f(-1)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)=2+2b_1-2\left(\frac{1}{4}+b_1\right)=\frac{3}{2}.$$

又 $f(1)-f(-1)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant 6F$，故 $F\geqslant\frac{1}{4}$.

另一方面，假定 $F=\frac{1}{4}$，从上式看出必有

$$f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},$$

可确定 $a_1=c_1=0$，$b_1=-\frac{3}{4}$，故使 $F=\frac{1}{4}$ 的函数 $f(x)$ 是存在的：$f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$，从而 F 的最小值为$\frac{1}{4}$.

评注 相应地，原问题中使 F 取到最小值的数组

$$(a,b,c)=\left(6,-\frac{45}{4},\frac{13}{2}\right).$$

若记 $F(x)=x^3-ax^2-bx-c$，那么解答一开始所做的工作便是将"求 $\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|F(x)|$ 的最小值"化归为"求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|F(x+2)|$ 的最小值"，即"求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ 的最小值"的问题. 这步转化虽不是必须的，然而能将所考察的区间平移到$[-1,1]$(关于原点对称)，这样容易得到结构对称的式子，从中容易观察出如何对 F 进行估计，运算量亦得到控制(读者不妨尝试写出不作代换但实质相同的解法，并比较一下运算量和直观性).

化归，有时是将一个问题转化为与它等价的问题，有时新问题与原问题并不完全等价，但从新问题很容易得到原问题的解. 这种不等价的化归并不鲜见，以下介绍两例.

例 9 设正整数 $n\geqslant 2$，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$. 证明：

$$2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)-(x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_n^2x_1)\leqslant n.$$

证明 先证明一个简单的命题：若 $x, y \in [0, 1]$，则 $x^3 + y^3 \leqslant x^2 y + 1$.
事实上，当 $x \leqslant y$ 时，$x^3 \leqslant x^2 y$，$y^3 \leqslant 1$，所以 $x^3 + y^3 \leqslant x^2 y + 1$；
当 $x > y$ 时，$x^3 \leqslant 1$，$y^3 \leqslant x^2 y$，所以 $x^3 + y^3 \leqslant x^2 y + 1$.
在本题中利用此命题得

$$\begin{gathered} x_1^3 + x_2^3 \leqslant x_1^2 x_2 + 1, \\ x_2^3 + x_3^3 \leqslant x_2^2 x_3 + 1, \\ \cdots \\ x_n^3 + x_1^3 \leqslant x_n^2 x_1 + 1. \end{gathered}$$

将上述 n 个不等式相加，结论得证.

例 10 在桌上沿圆周摆放着 1000 张卡片，每张卡片上写有一个正整数，这些数互不相等. 瓦夏先取走桌上的一张卡片，然后他一直重复进行如下操作：若当前最后一步取走的卡片上写着数 k，他就从该卡片开始顺时针数到第 k 张未取走的卡片，并将它取走. 这种操作进行到桌上仅剩一张卡片为止. 问是否存在一种初始的局面，满足：A 是这 1000 张卡片之一，且只要瓦夏取走的第一张卡片不是 A，则最后剩下的必然是 A？

（2018 年俄罗斯数学奥林匹克）

解析 在整个操作过程中，若取走写着 x 的卡片后，桌上还剩下 $d(<1000)$ 张卡片，则在 x 换成 $x + nd(n \in \mathbf{N}^*)$ 的情况下，不改变下一步所取的牌. 由于 999! 的倍数总是 $nd(n, d \in \mathbf{N}^*, d < 1000)$ 形式的，故在对每张卡片上的数加上 999! 的任意倍数的情况下，整个操作序列并不改变. 因此我们可以暂时允许卡片上的数相等，只要最后将各卡片上的数加上 999! 的适当倍数，便可使卡片上的数互不相等了.

设 1000 张卡片依顺时针次序分别为 $1, 1, \cdots, 1, 2$，其中 A 为第一个“1”所对应的卡片. 易知只要不先取 A，则最后剩下的必然是 A.

于是，在原问题中，令 1000 张卡片依顺时针次序分别为

$$1, 1 + 999!, 1 + 2 \times 999!, \cdots, 1 + 998 \times 999!, 2,$$

此即满足条件的一种初始局面.

评注 本题中，直接构造满足条件的初始局面比较麻烦，因为要求 1000 个数互不相等，势必要用到非常大的数. 于是，我们通过适当的办法回避掉“卡片上的数互不相等”这一非本质的限制条件，将原问题归结为一个更简单的问题（即允许卡片上的数相等）. 此时，用 1、2 这样的小正整数，便给出了一种简明的构造，从而导致原问题的解决.

在求解数学问题时，我们经常会用到减元、消点、降维、标准化等化归思路，也需要根据问题的具体特点，灵活多样地运用化归策略. 正如美籍匈牙利数学家 G. 波利亚(George Polya)所说：“不断地变换你的问题”，“我们必须一再地变换它，重新叙述它，变换它，直到最后成功地找到某些有用的东西为止”.

习 题 1

1 设 x，$y \in [-1, 1]$. 求 $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ 的最大值.

(1990 年莫斯科数学奥林匹克)

2 设 $b>a>\mathrm{e}$(e 为自然对数的底数)，证明：$a^b>b^a$.

3 “5”这个数可以写成 3 个正整数之和，如果计入不同顺序，则有 6 种方式，即 $5=1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2=2+1+2=2+2+1$. 设 m、n 都是正整数，且 $m \leqslant n$，问 n 可以用多少种方式写为 m 个正整数之和(计入顺序)？

4 设 x，y，$z \geqslant 1$. 证明：

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2) \leqslant (xyz)^2-2xyz+2.$$

(2009 年中国女子数学奥林匹克)

5 已知 t 为一元二次方程 $x^2-3x+1=0$ 的根.

(1) 对任一给定的有理数 a，求有理数 b、c，使得 $(t+a)(bt+c)=1$ 成立；

(2) 将 $\dfrac{1}{t^2+2}$ 表示成 $dt+e$ 的形式，其中 d、e 为有理数.

6 已知 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n 的算术平均值为 a，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|\right)^2.$$

7 一开始，将 1，2，3，…，20 依次写在一个圆周上(20 与 1 相邻)，每次操作可以选择四个位置连续的数，颠倒它们的次序(即将 a、b、c、d 变为 d、c、b、a). 能否通过有限次操作，将圆周上的数的次序变为：

(1) 5，1，2，3，4，6，7，…，20？

(2) 6，1，2，3，4，5，7，…，20？

8 设 P 是三角形 ABC 内部的一个点，D、E、F 分别是由点 P 向线段 BC、CA、AB 作垂线所得的垂足，求使 $\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$ 达到最小时点 P

的位置. （1981 年国际数学奥林匹克）

9 设 x、y、z 是正实数，且满足 $xyz+x+z=y$，求

$$p=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}+\frac{3}{z^2+1}$$

的最大值. （1999 年越南数学奥林匹克）

2 反证法

反证法是一种重要的数学证明方法，其逻辑基础是排中律（如果结论不是不对的，那么一定是对的）. 反证法的基本思想是：先提出一个与命题的结论相反的假设，然后利用一些公理、定理、定义等作出一系列正确、严密的逻辑推理，由此引出一个新的结论，而这个新的结论或者与所给的已知条件明显矛盾，或者与已知为真的结论明显矛盾，从而肯定原结论是正确的.

因此，用反证法证明一个命题的环节，大体上分为：(1)反设；(2)归谬；(3)结论. 反设是反证法的基础，一旦反设作出，矛盾便已存在，但此时矛盾通常不明显，故解题者要在归谬环节中将矛盾明显地呈现出来. 归谬是反证法的关键，一般没有固定的模式，只要通过严密的推理，导致出现了与已知条件矛盾，与已知的公理、定义、定理、公式矛盾，与反设矛盾，自相矛盾等任何一种情形，归谬即告完成.

下面是一些常用反证法证明的情形：

1. 结论为否定的一些命题，如结论中含有“不是……”、“不存在……”、“不等于……”、“不能……”等文字；

2. 关于个数的命题，如结论中含有“至多”、“至少”、“有限”、“无穷”、“唯一”等文字；

3. 由题设条件所能推得的结论甚少，或解题方向暂不明朗的一些命题.

例 1 九名数学家在一次国际数学会议上相遇，他们中的任意三个人中，至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言，证明：这些数学家中，至少有三人可以用同一种语言对话.

证明 反证法. 假设不存在三人能说同一种语言，那么每种语言最多只有两人能说，故每人用一种语言最多只能与另一人对话.

设九名数学家是 $A_1, A_2, \cdots, A_9$，由于 A_1 最多能说三种语言，因此与至少五个人，不妨设为 A_2、A_3、A_4、A_5、A_6，不能对话. 又因为 A_2 也最多能说三种语言，因而他至少与 A_3、A_4、A_5、A_6 中的一人，不妨设为 A_3，不能对话. 于是 A_1、A_2、A_3 两两不能对话，这与条件矛盾. 所以原结论正确.

评注 本例结论中"至少三人"的反面是"至多两人". 为了正确地作出反设,熟练掌握一些常用的互为否定的表述形式是有必要的,例如:是/不是;都是/不都是;存在/不存在;大于/小于等于;至少有一个/一个也没有;至多有一个/至少有两个,存在一个……满足……/对任意……都不满足……,等等.

例 2 设正整数 a 不是完全平方数,r 是关于 x 的方程 $x^3-2ax+1=0$ 的一个实根. 证明:$r+\sqrt{a}$ 是无理数. (2014 年中国女子数学奥林匹克)

证明 反证法. 假设 $q=r+\sqrt{a}$ 是有理数. 将 $r=q-\sqrt{a}$ 代入方程知,

$$(q-\sqrt{a})^3-2a(q-\sqrt{a})+1=0,$$

整理得
$$q^3+aq+1=(3q^2-a)\sqrt{a}. \qquad ①$$

因正整数 a 不是完全平方数,故 $\sqrt{a}$ 不是有理数,由①得

$$q^3+aq+1=0,\ 3q^2-a=0. \qquad ②$$

消去 a 可知 $4q^3+1=0$,与 q 为有理数矛盾.

因此假设不成立,即 $r+\sqrt{a}$ 必为无理数.

评注 在由①推②,以及由"$4q^3+1=0$"推出"与 q 为有理数矛盾"时,我们分别承认并利用了"$\sqrt{a}$ 及 $q=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$ 为无理数"的事实. 也许有读者认为此时矛盾仍不够明显,即归谬尚未完成,这涉及到对"矛盾明显"的理解尺度的不同. 倘若真要刨根问底地证明 $\sqrt{a}$ 及 $q=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$ 是无理数,读者完全可以仿照"$\sqrt{2}$ 是无理数"这一经典命题的证法——假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,将其表示为最简分数 $\frac{q}{p}$,则 $q^2=2p^2$,故 q 为偶数,设 $q=2q_1$,则 $2p^2=q^2=4q_1^2$,即 $p^2=2q_1^2$,又得 p 为偶数,这样 p、q 有公因子 2,与 $\frac{q}{p}$ 为最简分数矛盾.

无论是从本例还是从上述讨论中,我们均可体会到,对于"无理数"(即不能表示为两个整数之商的数)这样的表面上为肯定、实质上为否定的术语,也应积极联想到反证法. 类似情况的术语还有"互素"(即不存在大于 1 的公因数),"异面"(即不能在同一平面中)等等.

例 3 证明:在 $\triangle ABC$ 的六条内角三等分线中,不存在三线共点.

证明 反证法. 假设有三条内角三等分线共点. 显然它们分别引自 A、B、C,设它们共点于点 P,则

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle ABP}\cdot\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle BCP}\cdot\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle CAP}=\frac{BP}{AP}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{AP}{CP}=1. \quad ①$$

设 $A=3\alpha$，$B=3\beta$，$C=3\gamma$，其中 $0<\alpha$，β，$\gamma<\frac{\pi}{3}$，$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$.

(1) 当 $\angle BAP=\alpha$，$\angle CBP=\beta$，$\angle ACP=\gamma$ 时，① 即为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin 2\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha}=1,$$

化简得
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{8},$$

但 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$，矛盾!

(2) 当 $\angle BAP=\alpha$，$\angle CBP=\beta$，$\angle ACP=\gamma$ 中恰有两个成立时，不妨设 $\angle BAP=\alpha$，$\angle CBP=\beta$，$\angle ACP=2\gamma$，则 ① 成为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}=1,$$

化简得
$$\cos\gamma=2\cos\alpha\cos\beta,$$

但

$$\begin{aligned}1&>\cos\gamma=2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\\&>2\cos(\alpha+\beta)>2\cos\frac{\pi}{3}=1,\end{aligned}$$

矛盾!

(3) 当 $\angle BAP=\alpha$，$\angle CBP=\beta$，$\angle ACP=\gamma$ 中至多有一个成立时，转而考察 $\angle ABP$、$\angle BCP$、$\angle CAP$，与(1)、(2) 类似，可推得矛盾.

综上，假设不成立，即不存在三条内角三等分线共点.

评注 本例中，“不存在三线共点”是一种否定判断，作为其反面的肯定判断更为具体、明确，故采用反证法. 注意本题中结论的反面情形不止一种类型，但可以通过分类讨论逐一排除，情况(3)又可以化归为情况(1)、(2)，使证明过程更为高效.

例 4 今有 5 条线段，其中任意 3 条都可首尾相接组成一个三角形. 证明：必存在其中 3 条线段，它们首尾相接得到的三角形是锐角三角形.

(1970 年苏联数学奥林匹克)

证明 反证法. 假设 a、b、c、d、e $(0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e)$ 为 5 条线段

的长度，且它们中任意三条首尾相接得到的是钝角或直角三角形.

由 a、b、e 为三角形的三边长知：$a+b>e$；

由 a、b、c 为钝角或直角三角形的三边长知：$a^2+b^2\leqslant c^2$；

由 c、d、e 为钝角或直角三角形的三边长知：$c^2+d^2\leqslant e^2$，于是

$$c^2+d^2\leqslant e^2<(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)\leqslant 2c^2\leqslant c^2+d^2,$$

矛盾！故假设不成立，从而命题得证.

评注 本例中可供利用的信息甚少，若能借助反证法的假设获得较多可供利用的信息，则有利于打开局面. 上述解法在反证法假设之下，再辅以对 5 条线段的长度排序，这样就创设了大量明确的条件，容易从中大做文章，直到推出明显的矛盾为止.

例 5 给定正整数 a、b、c、d 满足

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)=u,$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=v,$$

证明：$3\mid uv$. （2017 年爱沙尼亚数学奥林匹克）

证明 反证法. 假设 $3\nmid uv$，则 v 以及 u 的各因子 $a+b$、$a+c$、$a+d$、$b+c$、$b+d$、$c+d$ 均不是 3 的倍数. 因此，a、b、c、d 中不同时存在模 3 余 1 和模 3 余 2 的数，且至多只有一个数为 3 的倍数. 于是，a、b、c、d 中至少有 3 个数模 3 的余数均为 1 或均为 2.

不妨设 $k\in\{1, 2\}$，$b\equiv c\equiv d\equiv k \pmod 3$，那么

$$v=a(b+c+d)+bc+bd+cd\equiv 3ak+3k^2\equiv 0 \pmod 3,$$

但这与 v 不为 3 的倍数矛盾.

评注 本题固然可就 a、b、c、d 模 3 的余数作详尽的分类讨论以证明结论，但这样显得繁琐. 运用反证法，一经假设 $3\nmid uv$ 后，立即得到了大量确定的信息，使推理便于进行.

例 6 是否存在单位圆内接三角形 ABC，其三边长 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，且存在实数 p，使得关于 x 的方程 $x^3-2ax^2+bcx=p$ 有三个实根，它们恰为 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$？

解析 假设存在这样的三角形，则由韦达定理得

$$\begin{cases}2a=\sin A+\sin B+\sin C,\\ bc=\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A.\end{cases} \qquad ①$$

又根据题目条件及正弦定理得

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{2R}=\frac{1}{2}. \qquad ②$$

由①、②可知
$$\begin{cases}2a=\dfrac{1}{2}(a+b+c),\\ bc=\dfrac{1}{4}(ab+bc+ca),\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}3a=b+c,\\ 3bc=a(b+c),\end{cases}$$

所以 $3bc=a(b+c)=3a^2$，故 $bc=a^2$.

由于 $b<a+c$，故 $3a=b+c<a+2c$，即 $a<c$；根据 $c<a+b$ 同理可得 $a<b$. 所以 $a^2<bc=a^2$，矛盾！故不存在满足条件的三角形.

评注 对此类“存在性”有待确定的问题，往往可以在“假定存在”的基础上进行正确、严密的逻辑推理，得到一系列的必要条件，以帮助搜索是否具有符合要求的例子. 在此过程中，一旦发现矛盾，则表明结论为“不存在”，如此与反证法的思想并无二致.

例 7 求所有正实数 α，使得存在无穷正实数数列 $\{x_n\}$，满足

$$x_{n+2}=\sqrt{\alpha x_{n+1}-x_n}\,(n\in\mathbf{N}^*).$$

（2017 年白俄罗斯数学奥林匹克）

解析 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件. 我们证明 $\alpha>1$.

假设不然，则 $0<\alpha\leqslant 1$.

对任意正整数 n，均有 $\alpha x_{n+1}-x_n\geqslant 0$，故 $x_{n+1}\geqslant \alpha x_{n+1}\geqslant x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 不降. 于是

$$x_{n+1}^2\leqslant x_{n+2}^2=\alpha x_{n+1}-x_n<x_{n+1},$$

故 $x_{n+1}<1$. 因此对任意正整数 n，有

$$nx_3^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_{i+2}^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_{i+1}-x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_1<1,$$

矛盾. 从而必有 $\alpha>1$.

另一方面，对任意 $\alpha>1$，常数列 $x_n=\alpha-1$ 满足条件.

综上，所求的正实数 α 为大于 1 的一切实数.

评注 本题是一个求参数范围的问题. 当 $\alpha>1$ 时，数列的存在性是容易

判别的，关键在于如何否定 $0<\alpha\leqslant 1$ 的情况，此处采用了反证法.

例 8　考虑集合 $A=\left\{1+\frac{1}{k}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$.

(1) 证明：每个整数 $x\geqslant 2$ 均可表示成 A 中至少一个元素之积(可以相等)；

(2) 对一切整数 $x\geqslant 2$，记 $f(x)$ 为最小的正整数，使得 x 可表示成 A 中 $f(x)$ 个元素之积(可以相等)，证明：存在无穷多对正整数 $(x,y)(x,y\geqslant 2)$，满足 $f(xy)<f(x)+f(y)$.　　(2018 年欧洲女子数学奥林匹克)

证明　(1) 由 $x=\prod\limits_{k=1}^{x-1}\frac{k+1}{k}=\prod\limits_{k=1}^{x-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ 知，结论显然成立.

(2) 先证明 $(x,y)=(7,7)$ 满足条件.

事实上，由 $2<2^2<7$ 知 $f(7)\neq 1,2$. 又 $2^3>7$，且对任意不全为 1 的正整数 k_1、k_2、k_3，有

$$\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\leqslant 2^2\cdot\frac{3}{2}<7,$$

所以 $f(7)\neq 3$. 从而 $f(7)\geqslant 4$.

又由 $49=\left(1+\frac{1}{1}\right)^5\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{48}\right)$ 知 $f(49)\leqslant 7$.

所以 $f(49)<f(7)+f(7)$.

再用反证法证明结论. 假设满足 $f(xy)<f(x)+f(y)$ 的正整数对 $(x,y)(x,y\geqslant 2)$ 仅有有限个，记 M 是这些数对中出现的最大的分量值.

注意到 f 的定义，对一切 (x,y)，均有 $f(xy)\leqslant f(x)+f(y)$. 于是当 $\max\{x,y\}>M$ 时，必有 $f(xy)=f(x)+f(y)$. 从而有

$$f(2M)+f(49)=f(98M)=f(14M)+f(7)=f(2M)+f(7)+f(7),$$

这与 $f(49)<f(7)+f(7)$ 矛盾. 因此假设不成立，故命题得证.

评注　本题第(1)问作为第(2)问中定义 $f(x)$ 的逻辑基础，其证明本身是非常容易的. 第(2)问中，我们并未直接去构造无穷多对正整数 (x,y)，而是在假设仅有有限对的情况下，推导出尚有一对新的 (x,y)，从而完成归谬. 读者不妨对比一下“素数有无穷多个”这一经典命题的反证法证明——假设仅有有限个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，考虑 $N=p_1p_2\cdots p_n+1$，则 N 不含素因子 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，但 $N>1$，故 N 必有素因子 $p\notin\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，与 p_1，$p_2,\cdots,p_n$ 为全部素数矛盾. 在许多数学竞赛问题中，我们采用的正是这样的证明模式.

例 9　设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为无穷正实数数列. 求证：不等式 $1+a_n>$

$\sqrt[n]{2}a_{n-1}$ 对无穷多个正整数 n 成立. （2001 年国际数学奥林匹克预选题）

证明 假设 $1+a_n>\sqrt[n]{2}a_{n-1}$ 仅对有限个正整数 n 成立，设其中最大者为 M，则对任意 $n>M$，上述不等式均不成立，即有

$$a_n\leqslant\sqrt[n]{2}a_{n-1}-1(n>M).$$

由伯努利不等式得 $\sqrt[n]{2}=(1+1)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$，从而

$$a_n<\frac{n+1}{n}a_{n-1}-1(n>M).$$

下面证明，对一切非负整数 n，有

$$a_{M+n}\leqslant(M+n+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+n+1}\right). \quad ①$$

当 $n=0$ 时，① 的两边都等于 a_M，成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时，① 成立，即有

$$a_{M+k}\leqslant(M+k+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}a_{M+k+1}&\leqslant\frac{M+k+2}{M+k+1}a_{M+k}-1\\&\leqslant\frac{M+k+2}{M+k+1}(M+k+1)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}\right)-1\\&=(M+k+2)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}\right)-1\\&=(M+k+2)\left(\frac{a_M}{M+1}-\frac{1}{M+2}-\cdots-\frac{1}{M+k+1}-\frac{1}{M+k+2}\right),\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，① 也成立.

由调和级数的发散性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M+2}+\frac{1}{M+3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$，故存在正整数 $N_0\geqslant M+2$，满足 $\frac{1}{M+2}+\frac{1}{M+3}+\cdots+\frac{1}{N_0}>\frac{a_M}{M+1}$.

在①中取 $n=N_0-M-1$，得 $a_{N_0-1}<0$，矛盾. 故原命题得证.

例 10 如图 2-1，在锐角$\triangle ABC$ 中，O 是外心，K 是边 BC 上一点（不是 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线

CD 与 AB 交于点 M. 求证:若 $OK \perp MN$,则 A、B、D、C 四点共圆.

(2010 年全国高中数学联赛)

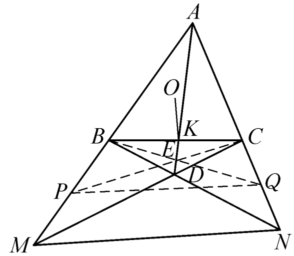

图 2-1

证明 用反证法. 若 A、B、D、C 不共圆,设三角形 ABC 的外接圆与射线 AD 交于点 E,连结 BE 并延长交直线 AN 于点 Q,连结 CE 并延长交直线 AM 于点 P,连结 PQ.

因为 $PK^2=P$ 的幂(关于 $\odot O$) $+K$ 的幂(关于 $\odot O$)(见评注 1),所以

$$PK^2=(PO^2-r^2)+(KO^2-r^2),$$

其中 r 是$\odot O$ 的半径.

同理得 $QK^2=(QO^2-r^2)+(KO^2-r^2)$, 所以

$$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故
$$OK \perp PQ.$$

由题设,$OK \perp MN$,所以 $PQ /\!/ MN$,于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \quad ①$$

由梅涅劳斯定理,得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \quad ②$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \quad ③$$

由①、②、③可得

$$\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD},$$

所以 $\dfrac{ND}{BD}=\dfrac{MD}{DC}$,故 $\triangle DMN \backsim \triangle DCB$,于是 $\angle DMN=\angle DCB$,所以 $BC /\!/ MN$,故 $OK \perp BC$,即 K 为 BC 的中点,矛盾! 从而 A、B、D、C 四点共圆.

评注 1 “$PK^2=P$ 的幂(关于 $\odot O$) $+K$ 的幂(关于 $\odot O$)”的证明:延长 PK 至点 F(如图 2-2),使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE, \quad ④$$

则 P、E、F、A 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

从而 E、C、F、K 四点共圆，于是

$$PK\cdot PF=PE\cdot PC. \qquad ⑤$$

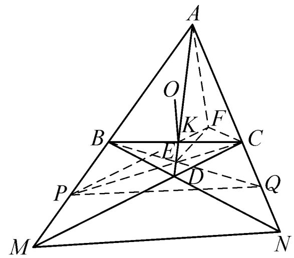

图 2－2

⑤－④，得

$$\begin{aligned}PK^2&=PE\cdot PC-AK\cdot KE\\&=P\text{ 的幂(关于 }\odot O)+K\text{ 的幂(关于 }\odot O).\end{aligned}$$

评注 2 若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.

评注 3 本例涉及较为专门的几何知识背景，难度较高. 尽管也可以直接去证明结论，但注意到其逆命题是一个已有结果，故考虑采用反证法，借逆命题之力而解决本题.

习 题 2

1 证明：对任意实数 x、y、z，下述三个不等式不能同时成立：

$$|x|<|y-z|,\ |y|<|z-x|,\ |z|<|x-y|.$$

2 设点 E、F、G、H 分别在单位正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上，求证：在四边形 $EFGH$ 中至少有一条边的长不小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 证明：对任意三角形，存在其两条边长 a、b 满足 $1\leqslant\frac{a}{b}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4 能否选出 10 个连续的偶数，且将其分为五个对子 $(a_k, b_k)(k=1, 2, \cdots, 5)$，使得方程 $x^2+a_kx+b_k=0(k=1, 2, \cdots, 5)$ 均具有整数根？

（2018 年北京市高一数学竞赛复赛）

5 已知集合 A 由全体正整数的倒数组成. 是否存在无限个 A 中的数 a_1，a_2，$\cdots$(不必不同)，使得对任何 $i, j\in\mathbf{N}^*$，有 $\frac{a_i}{i}+\frac{a_j}{j}\in A$？证明你的结论.

6 在平面直角坐标系中，若某点的横坐标与纵坐标均为有理数，则称该点为有理点，否则称之为无理点. 在平面直角坐标系中任作一个正五边形，在它的五个顶点中，有理点与无理点哪个多？请证明你的结论.

（2018 年中国东南地区数学奥林匹克）

7 在凸四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 上的点，满足 $\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}=\frac{AD}{BC}$，$\frac{AH}{HD}=\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{CD}$. 若 E、F、G、H 四点共圆，证明：四边形 $ABCD$ 有内切圆.

8 平面上每个点被染成四种颜色之一. 证明：存在距离为 1 或 $\sqrt{3}$ 的两个同色点. （2016 年澳大利亚数学奥林匹克）

9 设整数 a、b、c 与实数 r 满足：$ar^2+br+c=0$，$ac\neq 0$. 证明：$\sqrt{r^2+c^2}$ 是无理数. （2014 年中国东南地区数学奥林匹克）

10 设 a_1，a_2，…为全体正整数的一个排列. 证明：存在无穷多个正整数 i，使得 $(a_i, a_{i+1})\leqslant\frac{3}{4}i$. （2011 年国家集训队选拔考试）

3 数学归纳法

在证明与正整数 n 有关的命题时，常常会用到数学归纳法.

(1) 数学归纳法的基本形式(第一数学归纳法)是：

设 $P(n)$是一个含正整数 n 的命题，如果

(I) $P(1)$成立；

(II) 在 $P(k)$成立的假设下，可推出 $P(k+1)$成立. 那么 $P(n)$对任意正整数 n 成立.

通常我们将步骤(I)称为归纳奠基，将步骤(II)称为归纳过渡，两者不可缺其一.

(2) 将上述(II)中的“$P(k)$成立”改造为更有力的“$P(1)$，$P(2)$，…，$P(k)$成立”，便是第二数学归纳法：

设 $P(n)$是一个含正整数 n 的命题，如果

(I) $P(1)$成立；

(II) 在 $P(1)$，$P(2)$，…，$P(k)$都成立的假设下，可推出 $P(k+1)$成立.

那么 $P(n)$对任意正整数 n 都成立.

(3) 反向数学归纳法，又称倒推数学归纳法，是法国著名数学家柯西(Cauchy)首先使用的. 柯西利用反向数学归纳法证明了：n 个正数的算术平均大于或等于这 n 个正数的几何平均. 反向数学归纳法的一般形式是：

设 $P(n)$是一个含有正整数 n 的命题，m_0 为正整数. 如果

(I) $P(n)$对无限多个正整数 n 成立；

(II) 在 $P(k)$(k 为某个大于 m_0 的整数)成立的假设下，可推出 $P(k-1)$也成立.

那么 $P(n)$对一切正整数 $n \geqslant m_0$ 都成立.

(4) 双参数数学归纳法. 在证明与两个独立的正整数有关的命题 $P(m, n)$时，可按如下形式进行：

(I) 证明 $P(m, 1)$、$P(1, n)$对任意正整数 m、n 成立；

(II) 由 $P(m, n-1)$、$P(m-1, n)$成立，推出 $P(m, n)$成立，那么

$P(m, n)$对所有的正整数 m、n 成立.

数学归纳法的应用十分广泛,实施方式灵活多样,有丰富的解题技巧. 例如,根据解题的具体需要,可将第一数学归纳法改造为:

设 $P(n)$是一个含有正整数 n 的命题,如果

(I) $P(n_0)$成立;

(II) 在 $P(k)$成立的假设下,可推出 $P(k+1)$成立.

那么 $P(n)$对一切正整数 $n \geqslant n_0$ 都成立.

这一改造,实际上是将归纳的起点从 $n=1$ 改为了 $n=n_0$.

除了灵活选取起点,还有灵活选取步长、主动加强命题等等技巧.

例 1 设$\{x_n\}$为实数数列,且对任意非负整数 n,均有

$$x_0^3+x_1^3+\cdots+x_n^3=(x_0+x_1+\cdots+x_n)^2.$$

证明:对每个非负整数 n,存在整数 m,使得

$$x_0+x_1+\cdots+x_n=\frac{m(m+1)}{2}.$$

证明 用数学归纳法来证明结论.

当 $n=0$ 时,由题设,$x_0^3=x_0^2$,得 $x_0=0$ 或 1,可取 $m=0$ 或 1,此时结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立,即当 $x_0^3+x_1^3+\cdots+x_k^3=(x_0+x_1+\cdots+x_k)^2$ 时,存在整数 m,使得 $x_0+x_1+\cdots+x_k=\frac{m(m+1)}{2}$.

为方便书写,记 $\frac{m(m+1)}{2}=c$,则 $x_0^3+x_1^3+\cdots+x_k^3=c^2$.

对于 x_{k+1},如果 $x_0^3+x_1^3+\cdots+x_k^3+x_{k+1}^3=(x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})^2$,那么 $c^2+x_{k+1}^3=(c+x_{k+1})^2$,所以 $x_{k+1}[x_{k+1}^2-x_{k+1}-m(m+1)]=0$,解得

$$x_{k+1}=0, -m, m+1.$$

当 $x_{k+1}=0$ 时,

$$x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}=\frac{m(m+1)}{2};$$

当 $x_{k+1}=-m$ 时,

$$x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}=\frac{m(m+1)}{2}-m=\frac{m(m-1)}{2};$$

当 $x_{k+1}=m+1$ 时，

$$x_0+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}=\frac{m(m+1)}{2}+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

即结论在 $n=k+1$ 时也成立，从而对一切非负整数 n，结论成立.

评注 运用数学归纳法时，证明的核心与难点多数情况下在于如何实现归纳过渡. 此时应设法使 $P(k)$ 与 $P(k+1)$ 的关系充分显露出来，根据题目的特点，或是从 $P(k)$ 出发，过渡到 $P(k+1)$，或是先从 $P(k+1)$ 入手，从中分离出 $P(k)$ 的形式，某些时候还需对一些代数式和命题进行反复变形转化. 总之应当创设条件，使归纳假设得以充分利用.

例 2 设有 2^n 个球分成了许多堆，我们可以任意选取甲、乙两堆按如下规则挪动：若甲堆中的球数 p 不小于乙堆中的球数 q，则从甲堆中拿出 q 球放入乙堆，这算是挪动一次. 证明：可以经过有限次挪动把所有球并成一堆.

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，只有两个球，至多挪动一次即可，结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立. 在 $n=k+1$ 的情形下，首先注意到总球数为偶数，所以球数为奇数的堆必有偶数个，先将它们两两配对，并在每对的两堆球之间进行一次挪动，其中对每对球堆，设球数分别为奇数 p 和 $q(p\geqslant q)$，那么挪动后两堆球的个数分别为偶数 $p-q$、$2q$. 因此一系列挪动后可使所有这些堆中的球数都变为偶数（球数变为 0 个的球堆就消失了）. 这时将每堆中的球两两捆绑起来视为一个“球”，于是总“球”数变为 2^k，由归纳假设知可以在有限步挪动后全部并为一堆，所以 $n=k+1$ 的情形结论也成立.

由数学归纳法得：对一切正整数 n 结论成立.

评注 本题中 $P(k)$ 与 $P(k+1)$ 的关系是球数的 2 倍关系. 如果能在 $n=k+1$ 的情形下找到某些球堆，它们的总球数为 2^k，那么剩下的球堆的总球数也是 2^k，归纳过渡自然能实现，遗憾的是这种有利情况并不必然发生. 如何利用好归纳假设实现过渡呢？上述解法中，先通过操作调整使所有球堆都含有偶数个球，然后只需将 2^{k+1} 个球两两捆绑看成一些新的“球”，这样“球”数就回到了 2^k 个，找到了 $P(k)$ 和 $P(k+1)$ 的过渡. 特别注意本题中命题 $P(k)$ 所涉及的对象是球，而归纳假设则是作用在新捆绑以后的 2^k 个“球”上.

例 3 全体素数从小到大排列为 p_1, p_2, …. 求证：对任意正整数 n，有 $p_n<2^{2^n}$.

证明 当 $n=1$ 时，$p_1=2<2^{2^1}$，结论成立.

假设当 $n \leqslant k$ 时结论都成立，则由归纳假设知 $p_1 p_2 \cdots p_k < 2^{2^1+2^2+\cdots+2^k}$，故

$$p_1 p_2 \cdots p_k + 1 \leqslant 2^{2^1+2^2+\cdots+2^k}.$$

因 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 都不整除 $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$，所以 $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ 的素因数至少是 p_{k+1}. 又注意到 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$，于是

$$p_{k+1} \leqslant p_1 p_2 \cdots p_k + 1 \leqslant 2^{2^{k+1}-2} < 2^{2^{k+1}}.$$

从而当 $n = k+1$ 时，结论也成立.

根据数学归纳法，结论证毕.

评注 上述证明采用第二数学归纳法的形式，这样在归纳过渡中，$n \leqslant k$ 时的所有不等关系均可得到借用，对第 $k+1$ 个素数作出所需的上界估计.

例 4 设 $0 < a < 1$，$x_0 = 1$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + a\ (n \in \mathbf{N})$.

证明：对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $x_n > 1$.

证法 1 我们用数学归纳法证明结论.

当 $n = 1, 2$ 时，$x_1 = 1 + a > 1$，$x_2 = \dfrac{1}{1+a} + a = \dfrac{1+a+a^2}{1+a} > 1$，命题成立.

设 $n = k$ 时命题成立，则 $n = k+2$ 时，根据归纳假设和递推关系得

$$0 < x_{k+1} = \frac{1}{x_k} + a < 1 + a,$$

继而有

$$x_{k+2} = \frac{1}{x_{k+1}} + a > \frac{1}{1+a} + a = \frac{1+a+a^2}{1+a} > 1,$$

所以 $n = k+2$ 时命题成立.

因此对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $x_n > 1$.

证法 2 我们主动加强命题，证明 $1 < x_n \leqslant 1 + a$.

当 $n = 1$ 时，$1 < x_1 = 1 + a$ 显然成立.

设 $n = k$ 时命题成立，则 $n = k+1$ 时，由归纳假设得

$$\frac{1}{1+a} + a \leqslant \frac{1}{x_k} + a < 1 + a,$$

即 $1 < \dfrac{1+a+a^2}{1+a} \leqslant x_{k+1} < 1 + a$，所以 $n = k+1$ 时命题也成立. 这样就证得

了加强命题. 特别地，$x_n>1$ 成立.

评注 本题若将 $x_k>1$ 直接代入递推关系，显然无法证明 $x_{k+1}>1$. 上述两种证法展现了数学归纳法的两种典型的变通方式.

第一个证明是将“步长”设置为 2 来证明一般的 n 成立，注意此时我们要验证的起点也应变为两个. 另有些问题虽可以用数学归纳法的基本形式给出证明，但若将“步长”设置为某个大于 1 的正整数可使论证显著简化，此时只要确保起点都能逐一验证即可.

第二个证明是主动给 x_k 设置一个上限，根据递推关系，下一项 x_{k+1} 就自动获得一个下限. 第一步的验证固然要增多一点工作量，但实施归纳时，从归纳假设中获得的信息更强，这点有利于结论的证明. 应当注意的是，在加强命题之后，应对 $n=k+1$ 的情况也推出加强后的结论，例如本题中不应当仅推出 $x_{k+1}>1$ 即告完工，而应推出 $1<x_{k+1}\leqslant 1+a$，这样才能将这个加强的性质继承下去.

例 5 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，求证：当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right).$$

证明 把命题加强为：当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}.$$

当 $n=2$ 时，左边 $=a_2^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，右边 $=a_2+\frac{1}{2}=2$，命题成立.

假设命题在 $n=k$ 时成立. 当 $n=k+1$ 时，利用归纳假设得，

$$\begin{aligned}a_{k+1}^2&=\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2=a_k^2+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}+\frac{2}{k+1}\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\\&=2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\\&>2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k+1},\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时命题也成立.

由数学归纳法知，加强的命题成立，从而原命题成立.

评注 在本题中,首先值得注意的是归纳起点的选择:由于 $n=1$ 时,需证不等式并不成立,因此选择从 $n=2$ 开始归纳. 其次,上述证法选择了主动加强命题的策略. 读者不妨尝试一下,直接证明命题(不作加强)时,会在归纳过渡的过程中发生什么情况.

例 6 设 $2n(n\geqslant 3)$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足条件:

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$.

(2) $0<a_1=a_2$, $a_i+a_{i+1}=a_{i+2}(i=1, 2, \cdots, n-2)$;

(3) $0<b_1\leqslant b_2$, $b_i+b_{i+1}\leqslant b_{i+2}(i=1, 2, \cdots, n-2)$;

证明: $a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$. (1995 年中国数学奥林匹克)

证明 将条件(1)放宽为 $(1')$: $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$,并对 n 进行归纳.

约定 $a_0=b_0=0$. 当 $n=1, 2$ 时,显然成立.

设 $n=k-1, k$ 时结论成立,考虑 $n=k+1$ 的情形.

若 $a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}>b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}$,注意到$(1')$,则有 $a_k+a_{k+1}<b_k+b_{k+1}$.

若 $a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}$,由于 $a_1, \cdots, a_{k-1}$; $b_1, \cdots, b_{k-1}$ 亦满足(2)、(3),由归纳假设可知,$a_{k-2}+a_{k-1}\leqslant b_{k-2}+b_{k-1}$,从而 $a_k=a_{k-2}+a_{k-1}\leqslant b_{k-2}+b_{k-1}\leqslant b_k$.

又此时 $a_1+a_2+\cdots+a_k\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_k$,再注意 $a_1, \cdots, a_k$; $b_1, \cdots, b_k$ 满足(2)、(3),故由归纳假设可知,$a_{k-1}+a_k\leqslant b_{k-1}+b_k$,从而 $a_{k+1}=a_{k-1}+a_k\leqslant b_{k-1}+b_k\leqslant b_{k+1}$. 因此亦有 $a_k+a_{k+1}\leqslant b_k+b_{k+1}$.

综上可得,$n=k+1$ 时结论亦成立. 因此结论对一般的正整数 n 均成立.

评注 上述证法中,将条件(1)削弱为$(1')$后,归纳过渡更易于进行. 在数学归纳法证明命题时,“削弱条件”与“加强结论”似有异曲同工的效果——在扩大解题成果的同时,证明有时反而更简单了.

苏联数学家辛钦(A. Y. Khinchin)曾指出:“在数学归纳法的证明中,假设命题当 $n-1$ 时成立,再来证明它当 n 时也成立,因此,命题越强,在 $n-1$ 的情况下所给的条件也越多,而对于数 n,要证明的东西也越多,但是在许多问题中,条件较多显得更为重要.” 上述三例从不同侧面体现了这点. 我们将一个命题的结论加强或者一般化,不能仅看到困难的增加,同时也要看到归纳过渡时可借之力的加强.

例 7 设 $f(x)$ 是定义在非负实数集上的函数,$f(0)=0$,且对任意 $x\geqslant y\geqslant 0$,有 $|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)f(x)$. 求 $f(x)$.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛中的解题方法与策略/何忆捷,熊斌编著. —2版. —上海:华东师范大学出版社,2019
(数学奥林匹克小丛书. 高中卷)
ISBN 978-7-5675-9655-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①何…②熊… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第228636号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
高中数学竞赛中的解题方法与策略(第二版)

编　　著　何忆捷　熊　斌
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　王小双
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　17
字　　数　300千字
版　　次　2020年4月第二版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9655-9
定　　价　40.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师－小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师－初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师－中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师－高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师－初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师－高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。