数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 5

Mathematical Olympiad Series

数列与数学归纳法

冯志刚 著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J. W. Milnor）、芒福德（D. B. Mumford）、奎伦（D. Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A. Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L. Fejér）、里斯（M. Riesz）、舍贵（G. Szegö）、哈尔（A. Haar）、拉多（T. Radó）等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在 IMO 获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家. 例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯（G. Margulis，俄罗斯，1978 年）、德里费尔德（V. Drinfeld，乌克兰，1990 年）、约克兹（J. G. Yoccoz，法国，1994 年）、博切尔兹（R. Borcherds，英国，1998 年）、高尔斯（T. Gowers，英国，1998 年）、拉福格（L. Lafforgue，法国，2002 年）、佩雷尔曼（G. Perelman，俄罗斯，2006 年）、陶哲轩（Terence Tao，澳大利亚，2006 年）、吴宝珠（Bao Chau Ngo，越南，2010 年）、林登施特劳斯（E. Lindenstrauss，以色列，2010 年）、斯米尔诺夫（S. Smirnov，俄罗斯，2010 年）、米尔扎哈尼（M. Mirzakhani，女，伊朗，2014 年）、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

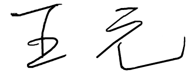
在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.



王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数 0，1，2，…组成的集合
$\mathbf{N}^*$	正整数 1，2，…组成的集合
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$a\mid b$	整数 a 能整除整数 b
$a\nmid b$	整数 a 不能整除整数 b
max	最大值
min	最小值
$[x]$，$\lfloor x\rfloor$	不超过实数 x 的最大整数，即 x 的整数部分
$\lceil x\rceil$	不小于实数 x 的最小整数
$\{x\}$	实数 x 的小数部分，即 $\{x\}=x-[x]$
$\sum$	求和
$\prod$	求积
$\equiv$	同余

目　录

第一部分　知识与方法

1　第一数学归纳法

数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 成立与否时经常用到的方法. 它是下面的归纳公理的一个直接推论.

归纳公理　设 S 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的一个子集，满足条件：

(1) $1 \in S$;

(2) 若 $n \in S$，则 $n+1 \in S$.

那么 $S = \mathbf{N}^*$.

归纳公理是由皮亚诺(G. Peano，1858—1932)提出的关于正整数的五条公理中的一条，它是数学归纳法的基础.

第一数学归纳法是最常用的一种形式，它就是我们高中课本中所提及的数学归纳法.

第一数学归纳法　设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n=1$ 时，$P(n)$ 成立；

(2) 由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n+1)$ 成立.

那么，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都成立.

证明　记 $S=\{n \mid n \in \mathbf{N}^*$，且 $P(n)$ 成立$\}$，则 S 为 $\mathbf{N}^*$ 的子集. 由(1)知 $1 \in S$；由(2)知，若 $n \in S$，则 $n+1 \in S$. 这样由归纳公理可知 $S = \mathbf{N}^*$，也就是说，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都成立.

说明　事实上，第一数学归纳法与归纳公理是等价的，因此，我们又称之为数学归纳法原理，并把第一数学归纳法简称为数学归纳法.

对中学生而言，要接受数学归纳法的含义和正确性并不难，但是要正确地用好数学归纳法却不是一件容易的事.

数学归纳法中的两步缺一不可. 验证 $P(1)$ 成立是奠基，利用归纳假设结合已知的有关数学知识证出 $P(n+1)$ 成立是递推的根据. 这两步对证明命题

相辅相成，构成数学归纳法证明过程的逻辑结构. 尤为重要的是在证明过程中必须用到归纳假设，这是检验是否用对了数学归纳法的一把尺.

例 1 证明：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}. \quad ①$$

证明 当 $n=1$ 时，① 式左边 $=\frac{1}{2}$，① 式右边 $=1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，故 $n=1$ 时，① 式成立.

现设①式对 n 成立，考虑 $n+1$ 的情形.

利用 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\=&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\=&1-\frac{1}{n+2}. \quad ②\end{aligned}$$

所以，①式对 $n+1$ 成立.

综上所述，由数学归纳法原理知，①式对一切正整数 n 成立.

说明 这是一个“错误的”证明，其错误在于证明①式对 $n+1$ 成立时，并没有用到归纳假设.

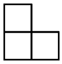
正确的过程如下：

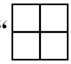
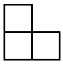
由归纳假设知

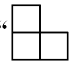
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\=&\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\=&\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\=&1-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

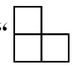
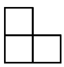
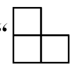
所以，①式对 $n+1$ 成立.

事实上，②式的得到是正确的，但这是对①式的一个直接证明，不应该套上数学归纳法这顶帽子. 这一点也是中学生经常犯的一个错误，应认真改正，否则难以形成一个正确的逻辑思维结构.

例 2　设 $n\in \mathbf{N}^*$. 证明：去掉 $2^n\times 2^n$ 的方格表的任何一个方格后，剩余的部分都可以用“”形状的 L 型无重叠地完全覆盖.

证明　当 $n=1$ 时，由于一个“”字型去掉任何一个方格后都是一个“”型，故命题对 $n=1$ 成立.

现设 $n=k$ 时，命题成立，即去掉一个 $2^k\times 2^k$ 的方格表的任何一个方格后，剩余部分都可用“”型覆盖，我们考虑 $n=k+1$ 的情形.

如图 1 所示，将 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 的方格表依中心所在的两条方格线把表格分割为 4 个 $2^k\times 2^k$ 的方格表，则题设中要求去掉的那个小方格必落在某个 $2^k\times 2^k$ 的方格表中. 在剩余的部分先绕中心摆一个“”型，去掉图 1 中所示的 4 个阴影方格后，每个 $2^k\times 2^k$ 的子表格都去掉了一个方格，由归纳假设可知，它们都可以用“”型覆盖，再补上绕中心所摆的那个“”型就得出命题对 $n=k+1$ 成立.

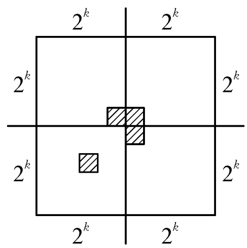


图 1

综上可知，命题对一切正整数 n 成立.

说明　本题采用的是数学归纳法证题时的常用表述方式. 当然了，表达方式可依个人的表达风格而定，但都需要在归纳假设和结论之间进行正确的过渡，它是完成数学归纳法证题时的关键步骤.

例 3　设 x、y 是实数，使得 $x+y$、x^2+y^2、x^3+y^3、x^4+y^4 都是整数. 证明：对任意 $n\in \mathbf{N}^*$，数 x^n+y^n 都为整数.

证明　此题要用到第一数学归纳法的一种变形：设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题（或性质），如果

(1) 当 $n=1$，2 时，$P(n)$ 成立；

(2) 由 $P(n)$、$P(n+1)$ 成立可以推出 $P(n+2)$ 成立.

那么，对任意 $n\in \mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都成立.

事实上，这种变形只是调整了归纳过程中的跨度，这样的例子在后面的讨论中会频繁出现.

回到原题，由条件 $x+y$ 与 x^2+y^2 都是整数可知，命题对 $n=1$，2 成立.

设命题对 n，$n+1$ 成立，即 x^n+y^n 与 $x^{n+1}+y^{n+1}$ 都是整数，考虑 $n+2$ 的情形. 此时

$$x^{n+2}+y^{n+2}=(x+y)(x^{n+1}+y^{n+1})-xy(x^n+y^n).$$

因此,为证 $x^{n+2}+y^{n+2}\in\mathbf{Z}$,结合归纳假设及条件中的 $x+y\in\mathbf{Z}$,我们只需证明 $xy\in\mathbf{Z}$.

注意到 $x+y$、$x^2+y^2\in\mathbf{Z}$,故 $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)\in\mathbf{Z}$. 若$xy\notin\mathbf{Z}$,则可设 $xy=\frac{m}{2}$, m 为奇数,再由 x^2+y^2、$x^4+y^4\in\mathbf{Z}$,知

$$2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)\in\mathbf{Z},$$

即 $2\times\left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2}\in\mathbf{Z}$. 但$m$ 为奇数,矛盾. 所以 $xy\in\mathbf{Z}$. 进而,命题对 $n+2$ 成立.

综上所述,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,数 $x^n+y^n\in\mathbf{Z}$.

例 4 设 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, n 是大于 1 的正整数. 证明:

$$\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)\geqslant 2^n-2^{\frac{n}{2}+1}+1. \quad ①$$

证明 当 $n=2$ 时,①式左右两边相等(都等于 1),故 $n=2$ 时命题成立. 假设命题对 $n(\geqslant 2)$ 成立,则

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)\\
=&\frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta)(1-\cos^{n+1}\theta)\\
=&\frac{1}{\sin^{n+1}\theta\cos^{n+1}\theta}(1-\sin^{n+1}\theta-\cos^{n+1}\theta)+1\\
=&\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin^n\theta\cos^n\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^n\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^n\theta}\right)+1\\
=&\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[\left(\frac{1}{\sin^n\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-1\right)+\frac{1-\cos\theta}{\sin^n\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos^n\theta}-1\right]+1\\
\geqslant&\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\left[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\right]+1, \quad ②
\end{aligned}$$

这里②由归纳假设和平均值不等式得到.

注意到 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\leqslant\frac{1}{2}$, 而

$$\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)},$$

其中 $\quad (1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$

$$=1+t+\frac{t^2-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(t+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$$

(这里用到 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$).

所以 $\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin^n\theta\cos^n\theta}}\geqslant\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2}+1}=2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}}$. 从而,由②可得

$$\left(\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^{n+1}\theta}-1\right)$$

$$\geqslant 2[(2^n-2^{\frac{n}{2}+1})+2(2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n-1}{2}})]+1$$

$$=2(2^n-2^{\frac{n+1}{2}})+1=2^{n+1}-2^{\frac{n+1}{2}+1}+1.$$

即命题对 $n+1$ 成立.

综上所述,命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant 2)$ 成立.

说明 上面的几个例子涉及多方面的知识内容,覆盖代数、数论、组合等多个分支,表现了数学归纳法应用的广泛性.

例 5 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:

$$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{[\frac{n}{2}]},\ n=2,3,\cdots.$$

证明:该数列中有无穷多项是 7 的倍数.

证明 直接由递推式计算,可得 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=7$.

现设 $a_n(n\geqslant 5)$ 是 7 的倍数,我们寻找下标 $m>n$, 使得 $7|a_m$.

由 $a_n\equiv 0(\bmod 7)$,知 $a_{2n}=a_{2n-1}+a_n\equiv a_{2n-1}(\bmod 7)$, $a_{2n+1}=a_{2n}+a_n\equiv a_{2n}(\bmod 7)$,故 $a_{2n-1}\equiv a_{2n}\equiv a_{2n+1}(\bmod 7)$. 记 a_{2n-1} 除以 7 所得余数为 r. 如果 $r=0$, 那么取 $m=2n-1$ 即可;如果 $r\neq 0$, 考虑下面的 7 个数:

$$a_{4n-3},\ a_{4n-2},\ \cdots,\ a_{4n+3}. \qquad ①$$

注意到 $a_{4n-2}=a_{4n-3}+a_{2n-1}\equiv a_{4n-3}+r(\bmod 7)$, $a_{4n-1}=a_{4n-2}+a_{2n-1}\equiv a_{4n-2}+r(\bmod 7)\equiv a_{4n-3}+2r(\bmod 7)$, $a_{4n}=a_{4n-1}+a_{2n}\equiv a_{4n-1}+r\equiv a_{4n-3}+3r$, $\cdots$, $a_{4n+3}=a_{4n+2}+a_{2n+1}\equiv a_{4n+2}+r\equiv a_{4n-3}+6r(\bmod 7)$. 因此,$a_{4n-3}$, a_{4n-2}, $\cdots$, a_{4n+3} 构成模 7 的一个完全剩余系. 故存在 $m\in\{4n-3, 4n-2, \cdots, 4n+3\}$, 使得 $a_m\equiv 0(\bmod 7)$.

这样,我们从 a_5 出发结合上面的推导可知,$\{a_n\}$ 中有无穷多项是 7 的倍数.

例 6 (1) 证明：对任意正整数 $n(\geqslant 2)$，存在 n 个不同的正整数 $a_1, \cdots, a_n$，使得对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有 $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$.

(2) 是否存在一个由正整数组成的无穷集 $\{a_1, a_2, \cdots\}$，使得对任意 $i \neq j$，都有 $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$?

证明 (1) 我们在要证的结论中增加一个要求：$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 当 $n = 2$ 时，取数 1, 2 即可.

设命题对 n 成立，即存在正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，满足：对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有 $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$，现在考虑下面的 $n+1$ 个数：

$$A, A + a_1, A + a_2, \cdots, A + a_n. \tag{①}$$

这里 $A = a_n!$，其中 $a_n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times a_n$.

从①中任取两个数 $x < y$，若 $x = A$, $y = A + a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$，则 $y - x = a_i$，而 $x + y = 2A + a_i$，结合 $a_i \leqslant a_n$，知 $a_i \mid A$，故 $(y - x) \mid (y + x)$；若 $x = A + a_i$, $y = A + a_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$，则 $y - x = a_j - a_i$, $y + x = 2A + (a_i + a_j)$，由归纳假设 $(a_j - a_i) \mid (a_j + a_i)$，又 $a_j - a_i < a_n$，故 $(a_j - a_i) \mid A$，所以 $(y - x) \mid (y + x)$. 从而，命题对 $n+1$ 成立.

综上所述，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$，存在满足条件的 n 个正整数.

(2) 若存在无穷多个正整数 $a_1, a_2, \cdots$，使得对任意 $1 \leqslant i < j$，都有 $(a_j - a_i) \mid (a_j + a_i)$，则对任意 $j > 1$，有 $(a_j - a_1) \mid (a_j + a_1)$，故 $(a_j - a_1) \mid 2a_1$. 这要求，数 $2a_1$ 可以被无穷多个整数整除，矛盾. 所以，不存在满足条件的无穷多个正整数.

说明 数学归纳法证明的是：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$ 成立，也就是说它处理的是关于任意有限的正整数 n 的命题，并不能断定 $P(\infty)$ 成立，这里部分地体现了有限与无穷的本质区别. 从此例中(1)与(2)的对比可看出这一点.

当然，用数学归纳法处理存在性问题也能处理与无穷有关的一些结论，例如例 5 的处理. 对比例 5 与例 6 中的递推结构，可发现两者有本质不同，前者把前面的结果"包容下来"，而后者却把前面的数都"扬弃"了.

2 第二数学归纳法

第二数学归纳法 设 $P(n)$ 是关于正整数 n 的一个命题(或性质). 如果

(1) 当 $n = 1$ 时，$P(n)$ 成立；

(2) 由"对一切小于 n 的正整数 k，$P(k)$ 都成立"可以推出 $P(n)$ 成立.

那么，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都成立.

证明 考虑命题 $Q(n)$:"对所有 $1\leqslant k\leqslant n$, $k\in\mathbf{N}^*$, $P(k)$都成立". 则由 $Q(n)$成立,可知 $P(n)$成立.

当 $n=1$ 时,由(1)知 $Q(n)$成立.

现设 $Q(n-1)(n\geqslant 2)$ 成立,即对所有 $1\leqslant k\leqslant n-1$, $P(k)$都成立,则由(2)知,$P(n)$成立. 所以,对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, $P(k)$都成立,从而,$Q(n)$成立.

于是,由第一数学归纳法可知,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $Q(n)$都成立,进而,$P(n)$成立. 第二数学归纳法获证.

第二数学归纳法是第一数学归纳法的推论,在作归纳假设时,我们假设了 $P(1)$, …, $P(n-1)$都成立,并在此前提下证出 $P(n)$成立,这是区别于第一数学归纳法的地方,有时会给证明带来很大的方便.

例1 实数数列 a_1, a_2, …满足:对任意 i, $j\in\mathbf{N}^*$, 都有 $a_{i+j}\leqslant a_i+a_j$. 证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\geqslant a_n. \qquad ①$$

证明 当 $n=1$ 时,命题显然成立.

现设①式对所有小于 n 的正整数都成立,即对 $1\leqslant k\leqslant n-1$, 都有

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}\geqslant a_k.$$

我们记 $b_k=a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}$, $k=1, 2, \cdots, n-1$, 则由上述假设知 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k$, 即

$$(n-1)a_1+\frac{n-2}{2}a_2+\cdots+\frac{n-(n-1)}{n-1}a_{n-1}\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}a_k.$$

上式两边都加上 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k$, 可得

$$n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)\geqslant 2\sum_{k=1}^{n-1}a_k.$$

于是

$$n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)\geqslant a_n+2\sum_{k=1}^{n-1}a_k. \qquad ②$$

由条件知 $a_1+a_{n-1}\geqslant a_n$, $a_2+a_{n-2}\geqslant a_n$, …, $a_{n-1}+a_1\geqslant a_n$, 所以 $2\sum_{k=1}^{n-1}a_k\geqslant(n-1)a_n$. 这样,由②可得:①对 n 成立.

所以,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 不等式①成立.

例 2 正整数数列 c_1, c_2, …满足下述条件:

对任意正整数 m、n,若 $1\leqslant m\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i$, 则存在正整数 a_1, a_2, …, a_n,使得

$$m=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}.$$

问:对每个给定的 $i\in\mathbf{N}^*$, c_i 的最大值为多少?

解 我们证明:c_1 的最大值为 2,而当 $i\geqslant 2$ 时,c_i 的最大值为 $4\times 3^{i-2}$.

为此先证:

$$c_1\leqslant 2,\text{而当 } i\geqslant 2 \text{ 时},c_i\leqslant 4\times 3^{i-2}. \qquad ①$$

事实上,若 $c_1>1$,取$(m, n)=(c_1-1, 1)$, 知存在 $a_1\in\mathbf{N}^*$, 使得 $c_1-1=\frac{c_1}{a_1}$,即 $a_1=\frac{c_1}{c_1-1}=1+\frac{1}{c_1-1}$, 仅当 $c_1=2$ 时,a_1 为整数,故 $c_1\leqslant 2$.

现设①对 $i=1, 2, \cdots, k-1\ (k\geqslant 2)$ 都成立,取 $(m, n)=(c_k, k)$, 则存在 a_1, …, $a_k\in\mathbf{N}^*$,使得 $c_k=\frac{c_1}{a_1}+\cdots+\frac{c_k}{a_k}$. 这要求 $a_k\geqslant 2$, 否则 $\sum_{i=1}^{k-1}\frac{c_i}{a_i}=0$ 与 a_i、c_i 为正整数矛盾. 从而 $c_k\leqslant\frac{c_k}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}c_i$,即 $c_k\leqslant 2\sum_{i=1}^{k-1}c_i$. 所以 $c_k\leqslant 2(2+4+4\times 3+\cdots+4\times 3^{k-3})=4\times 3^{k-2}$. 因此,由第二数学归纳法知,结论①成立.

再证:

当 $c_1=2$, $c_i=4\times 3^{i-2}(i\geqslant 2)$ 时,数列$\{c_i\}$具有题给的性质. ②

对 n 归纳. 当 $n=1$ 时,$m\leqslant c_1=2$,故 $m=1$ 或 2. 若 $m=1$,取 $a_1=2$ 即可,若 $m=2$,取 $a_1=1$ 即可.

假设当 1, 2, …, $n-1(n\geqslant 2)$时,题给性质满足. 考虑 n 的情形,此时 $1\leqslant m\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i$.

若 $m=1$,取 $a_i=nc_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 即可;

若 $2\leqslant m\leqslant\frac{c_n}{2}+1=\left(\sum_{i=1}^{n-1}c_i\right)+1$,令 $a_n=c_n$,并对 $m-\frac{c_n}{a_n}=m-1$ 用归

纳假设,可知②成立.

若 $\frac{1}{2}c_n+1<m\leqslant c_n$,取 $a_n=2$,并对 $m-\frac{c_n}{2}$用归纳假设即可.

若 $c_n<m\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i$,取 $a_n=1$,并对 $m-c_n$ 用归纳假设即可.

所以,结论②成立.

综上可知,c_1 的最大值为 2,而当 $i\geqslant 2$ 时,c_i 的最大值是 $4\times 3^{i-2}$.

说明 对比两个例子可发现,用第二数学归纳法证题时,一个思路是整体处理:例 1 中对归纳假设中的 $n-1$ 个不等式求和;另一个思路是将 n 的情形归入 $1, 2, \cdots, n-1$ 中的某一种情形,这在例 2 的后半部分有明显的体现.

例 3 设 $p(x)$是一个 n 次实系数多项式,a 是一个不小于 3 的实数. 证明:下面的 $n+2$ 个数中至少有一个数不小于 1.

$$|a^0-p(0)|, |a^1-p(1)|, \cdots, |a^{n+1}-p(n+1)|.$$

证明 对 $p(x)$的次数 n 进行归纳.

当 $n=0$ 时,$p(x)$是常数多项式,设 $p(x)=c$,此时,由

$$|1-c|+|a-c|\geqslant|a-1|\geqslant 2,$$

可知 $\max\{|1-c|, |a-c|\}\geqslant 1$,即命题对 $n=0$ 成立.

假设命题对所有次数小于 n 的多项式都成立,考虑次数为 n 的多项式 $p(x)$.

令 $f(x)=\frac{1}{a-1}[p(x+1)-p(x)]$,则 $f(x)$的次数$\leqslant n-1$. 由归纳假设知,存在 $m\in\{0, 1, 2, \cdots, n\}$,使得 $|a^m-f(m)|\geqslant 1$,即

$$\left|a^m-\frac{1}{a-1}[p(m+1)-p(m)]\right|\geqslant 1.$$

故

$$|a^{m+1}-p(m+1)+p(m)-a^m|\geqslant a-1\geqslant 2,$$

从而 $\max\{|a^{m+1}-p(m+1)|, |a^m-p(m)|\}\geqslant 1$,即存在 $r\in\{0, 1, 2, \cdots, n+1\}$,使得 $|a^r-p(r)|\geqslant 1$,命题对 n 成立.

综上可知,对任意次数为 n 的多项式 $p(x)$,命题都成立.

说明 在对多项式的次数用数学归纳法时,常采用第二数学归纳法的形式,因为首项系数相同的两个 n 次多项式之差的次数不一定是 $n-1$ 次,

但一定是一个次数小于 n 的多项式. 运用第二数学归纳法处理时就避开了讨论.

例 4 证明:任意一个凸 n 边形都可以被它的三条边张成的三角形或它的四条边张成的平行四边形所覆盖.

证明 对 n 归纳.

当 $n=3$ 时,结论是显然的;当 $n=4$ 时,如果该四边形是平行四边形则已完成,如果它不是平行四边形,则有一组对边不平行,将它们延长相交后,总可以用另两条边中的一条合成一个三角形,它覆盖这个四边形(如图 2 所示).

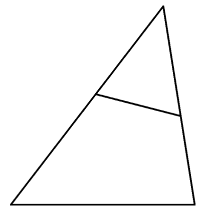


图 2

现假设对任一凸 m 边形结论成立,这里 $m<n$ $(n\geqslant 5)$. 取凸 n 边形 M 的任意一条边 AB,除去 AB 及与 AB 相邻的边外,M 还有至少 $5-3=2$ 条边. 这两条边中必有一条与 AB 不平行(因为至多只能有一条与 AB 平行),设为 CD. 延长 BA 和 CD(不妨设为如图 3 所示的图形),设它们相交于点 U. 现在用折线 BUC 代替被 $\angle BUC$ 覆盖的折线 AD 及边 BA 和 CD,便得到一个边数少于 n 并将 M 覆盖的凸多边形 M_1,对 M_1 用归纳假设,可知命题对 n 成立.

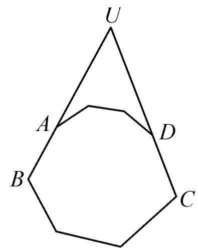


图 3

综上可知,命题成立.

说明 数学归纳法在平面几何中也有广泛的应用.

例 5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一个倒三角形的第 1 行,其中 $a_i\in\{0,1\}$, $i=1, 2, \cdots, n$. 数 $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ 为这个倒三角形的第 2 行,使得若 $a_k=a_{k+1}$,则 $b_k=0$;若 $a_k\neq a_{k+1}$,则 $b_k=1$, $k=1, 2, \cdots, n-1$. 类似定义该倒三角形的其余各行,直到第 n 行为止. 求该三角形中 1 的个数的最大值.

解 我们设该三角形中 1 的个数的最大值为 f_n. 容易得到 $f_1=1$, $f_2=2$, $f_3=4$. 例子为

$$1,\quad \begin{array}{ccc}1&&1\\&0&\end{array},\quad \begin{array}{ccccc}1&&1&&0\\&0&&1&\\&&1&&\end{array}.$$

上述值可以从表中第一行内 0 的个数出发去得到,但是随着 n 变大时,难以从第一行出发来处理. 试着做 $n=5, 6$ 时的情形,可以发现下面的表中 1 的个数比较多.

$$
\begin{array}{c}
1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad \cdots \\
0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad \cdots \\
1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad \cdots \\
1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad \cdots \\
\cdots
\end{array}
$$

上表中有一个特点,即每三行重复出现(只是“规模”小一些). 于是,引导我们利用数学归纳法来求 f_n 的值.

先证明一个引理.

引理 当 $n \geqslant 3$ 时,考虑该倒三角形最上面的 3 行

$$
\begin{array}{c}
a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n \\
b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-1} \\
c_1,\ \cdots,\ c_{n-2}
\end{array}
$$

则此 3 行中至少出现 $n-1$ 个 0.

证明 对 n 归纳予以证明.

初始情况的验证留给读者,我们来看如何实现归纳过渡. 注意到,在 mod 2的意义下,前 3 行为

$$
\begin{array}{c}
a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots,\ a_n \\
a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ \cdots,\ a_{n-1}+a_n \\
a_1+a_3,\ a_2+a_4,\ \cdots,\ a_{n-2}+a_n
\end{array}
$$

如果 $a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_3$ 不全为 1,那么去掉这 3 个数,归为 $n-1$ 的情形,利用归纳假设可知,结论成立.

如果 $a_1 = a_1+a_2 = a_1+a_3 = 1$,那么 $a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = 0$, 此时,表格的前三行前面部分为

$$
\begin{array}{llll}
1,\ 0,\ 0, & & a_4,\ a_5,\ \cdots \\
\quad 1,\ 0,\ a_4, & & \quad a_4+a_5,\ \cdots \\
\qquad 1,\ a_4,\ a_5, & & \qquad \cdots
\end{array}
$$

其中被平行四边形框住的 9 个数(前面的 3 个斜行)中至少有 3 个 0,于是,去掉这 9 个数后,利用归纳假设可知,引理成立.

由上述引理可知 $f_n \leqslant 2(n-1)+f_{n-3},\ n \geqslant 4$. 结合 $f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 4$,可知 $f_n \leqslant \left\lceil \dfrac{n(n+1)}{3} \right\rceil$,这里$\lceil x \rceil$表示不小于 x 的最小整数. 利用前面

的例子,可知 $f_n=\left\lceil\dfrac{n(n+1)}{3}\right\rceil$.

所以,该倒三角形中,1 的个数的最大值为$\left\lceil\dfrac{n(n+1)}{3}\right\rceil$.

说明 此题找到取最大值的例子是一个关键,但经一定的尝试后不难得到. 解答难在对每三行作为一个整体来进行处理不易想到,它是从例子中得到启发后形成的思路.

例 6 设 $n\in\mathbf{N}^*$,函数 $f:\{1, 2, 3, \cdots, 2^{n-1}\}\to\mathbf{N}^*$ 满足:对 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$,都有 $1\leqslant f(i)\leqslant i$. 证明:存在一个正整数数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,使得 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2^{n-1}$,且 $f(a_1)\leqslant\cdots\leqslant f(a_n)$.

证明 对 n 运用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

现设命题对 $1, 2, \cdots, n-1$ 都成立,考察 n 的情形.

对 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$,我们用 $t(i)$表示满足下述条件的最大正整数 m:

存在正整数数列 $i=a_1<a_2<\cdots<a_m\leqslant 2^{n-1}$,使得

$$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_m).$$

如果命题对 n 不成立,那么由 $t(1)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}}t(i)$ 可知,对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$ 都有 $t(i)\leqslant n-1$. 记 $A_j=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}, t(i)=j\}$, $j=1, 2, \cdots, n-1$,则任意两个 A_j 不交,且 $\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}A_j=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{n-1}\}$,所以$\sum\limits_{j=1}^{n-1}|A_j|=2^{n-1}$.

下面先证明:对任意 $1\leqslant j\leqslant n-1$,都有 $|A_j|\leqslant 2^{n-j-1}$.

事实上,若存在 j,使得 $|A_j|>2^{n-j-1}$,则存在 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant 2^{n-1}$,使得 $t(i_1)=t(i_2)=\cdots=t(i_r)=j$,这里 $r=2^{n-j-1}+1$. 这时,对任意 $1\leqslant p<q\leqslant r$,都应有 $f(i_p)>f(i_q)$(否则,若 $f(i_p)\leqslant f(i_q)$,则在从 i_q 出发的递增 f 数列的前面加入 $f(i_p)$,将导致 $t(i_p)\geqslant t(i_q)+1$,矛盾),故 $f(i_1)>f(i_2)>\cdots>f(i_r)$,进而 $f(i_1)\geqslant r=2^{n-j-1}+1$,结合 $1\leqslant f(i_1)\leqslant i_1$,得 $i_1\geqslant 2^{n-j-1}+1$.

现在,由 $t(i_1)$的定义知,存在 $i_1=a_1<\cdots<a_j\leqslant 2^{n-1}$,使得 $f(a_1)\leqslant\cdots\leqslant f(a_j)$,而由归纳假设可知,在$\{1, 2, 3, \cdots, 2^{n-j-1}\}$中存在 $1\leqslant b_1<\cdots<b_{n-j}\leqslant 2^{n-1-j}<i_1=a_1$,使得 $f(b_1)\leqslant\cdots\leqslant f(b_{n-j})$,再结合 $f(b_{n-j})\leqslant b_{n-j}\leqslant 2^{n-1-j}<r\leqslant f(i_1)=f(a_1)$,可知 $1\leqslant b_1<\cdots<b_{n-j}<a_1<a_2<\cdots<a_j\leqslant 2^{n-1}$,并且 $f(b_1)\leqslant\cdots\leqslant f(b_{n-j})\leqslant f(a_1)\leqslant\cdots\leqslant f(a_j)$,这与 n 时命题不成立的假设矛盾. 所以 $|A_j|\leqslant 2^{n-j-1}$.

但这时，将导致

$$2^{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}|A_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}2^{n-1-j}=1+2+\cdots+2^{n-2}=2^{n-1}-1.$$

矛盾. 所以，命题对 n 成立.

综上可知，命题获证.

说明 此题本质上是一个组合问题，在证命题对 n 成立时，采用的是反证法，它告诉我们：运用数学归纳法证题时应充分地与其他证明方法结合.

3 最小数原理与无穷递降法

最小数原理在数学竞赛中经常被用到，其最基本的表达形式如下：

最小数原理 正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的任何一个非空子集 T 必有最小元素，即存在正整数 $t_0\in T$，使对任意的 $t\in T$，都有 $t_0\leqslant t$.

证明 考虑集合 $S=\{x\mid x\in\mathbf{N}^*,\ x\notin T\}$，即 $S=\mathbf{N}^*\setminus T$.

若 T 中没有最小元，我们证明：每一个正整数都属于 S，从而导致 $T=\varnothing$，矛盾.

首先，$1\in S$，否则 $1\in T$，则 1 是 T 中的最小元.

其次，设 $1,2,\cdots,n\in S$，即 $1,2,\cdots,n$ 都不是 T 的元素，这时，若 $n+1\in T$，则 $n+1$ 为 T 的最小元，这与 T 中没有最小元矛盾. 所以 $n+1\in S$.

从而，由第二数学归纳法知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $n\in S$.

所以，最小数原理成立.

具体处理问题时，我们还会用到上述原理的一些其他形式或推论.

1. **最大数原理** 设 M 是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的非空子集，且 M 有上界，即存在 $a\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $x\in M$，都有 $x\leqslant a$. 则 M 有最大元.

2. 任意一个由实数组成的有限集中，必有最小元素，也必有最大元素.

3. **排序原理** 由 n 个实数组成的集合 M 可以写为 $M=\{x_1,\cdots,x_n\}$，这里 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

最小数原理引导我们从极端(最小元或最大元)出发去讨论问题，蕴含了“退”的思想，退到最简单而又不失去本质的地方去思考.

无穷递降法(又称费马递降法)源于不定方程的求解，费马用此方法在约 400 年前就证明了：$x^4+y^4=z^4$ 没有正整数解. 其基本思想如下：

“如果关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 对 $n=n_0$ 成立，那么可以证出对某个 $n_1\in\mathbf{N}^*$，$n_1<n_0$，命题 $P(n_1)$ 也成立.”则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$P(n)$ 都不成立.

它是最小数原理的一种表现形式，在处理数论问题，特别是不定方程时

经常会用到.

例 1 给定平面上任意 n 个不同的点. 证明:存在一个过其中两个点的圆,使得其余 $n-2$ 个点都在此圆的外部.

证明 由于 n 个点中每两点之间的距离只有 C_n^2 个,故必有两点(设为 A、B),它们之间的距离最小(如果有多个这样的点对,从中任取一对即可).

现考虑以线段 AB 为直径的圆 P,则对 P 内任意一点 C, $\triangle ABC$ 的最长边为 AB. 由 AB 的最小性,可知剩下的 $n-2$ 个点都在圆 P 外. 命题获证.

例 2 证明:不存在有理数 x、y、z,使得

$$x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)+5=0 \qquad ①$$

成立.

证明 将①两边乘以 4 后配方,得

$$(2x+3)^2+(2y+3)^2+(2z+3)^2=7.$$

如果存在满足①的三个有理数 x、y、z,那么不定方程

$$a^2+b^2+c^2=7m^2 \qquad ②$$

有整数解 (a, b, c, m) 使得 $m>0$.

如果②有整数解 (a_0, b_0, c_0, m_0), $m_0>0$, 我们证明方程②有一组整数解 (a_1, b_1, c_1, m_1), $m_1>0$,且 $m_1<m_0$. 这样,由无穷递降的思想,就会找到一个递减的由正整数组成的无穷数列 $m_0>m_1>m_2>\cdots$, 从而导致矛盾.

事实上,若 m_0 为奇数,则 $m_0^2\equiv 1 \pmod 8$,即 $a_0^2+b_0^2+c_0^2\equiv 7 \pmod 8$, 但是一个完全平方数$\equiv 0$, 1 或 $4 \pmod 8$,从而 $a_0^2+b_0^2+c_0^2\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 8$, 不会出现 $a_0^2+b_0^2+c_0^2\equiv 7 \pmod 8$ 的情形,矛盾,故 m_0 为偶数. 这时 $a_0^2+b_0^2+c_0^2=7m_0^2\equiv 0 \pmod 4$, 又完全平方数$\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$,故 a_0、b_0、c_0 都必须为偶数,这样令 $a_1=\frac{1}{2}a_0$, $b_1=\frac{1}{2}b_0$, $c_1=\frac{1}{2}c_0$, $m_1=\frac{1}{2}m_0$, 就得到了一组满足 $0<m_1<m_0$ 的解 (a_1, b_1, c_1, m_1).

综上所述,①没有有理数解.

说明 从"最小的"出发(或者从某一个出发找到"更小的")是这一节要介绍的重要思想,本质上而言它们都只是数学归纳法的特殊形式. 这从一个方面体现出掌握数学归纳法的困难与挑战,或许正是这些挑战吸引人们去学习数学.

例 3 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是平面上不共线的 n 个点. 证明:至少有一条直

线恰过其中的两个点.

证明 这是著名的西尔维斯特(Sylvester)定理,有许多证明方法,其中较简洁的一个证明就是用最小数原理获得的.

考虑过 $P_1, \cdots, P_n$ 中至少两点的直线 P_iP_j,该直线外的点到它的距离大于0,这样的距离只有有限个(因为直线的条数至多 C_n^2 条,而 $P_1, \cdots, P_n$ 在每条直线外的点也是有限个),从而这些距离中有一个最小值.

不妨设,在上面的距离中,点 P_1 到直线 P_2P_3 的距离最短. 我们证明直线 P_2P_3 上没有 $P_1, \cdots, P_n$ 中的其他点.

若直线 P_2P_3 上还有 $P_1, \cdots, P_n$ 中的点,不妨设 P_4 在直线 P_2P_3 上,设 P_1 到直线 P_2P_3 的射影为 Q,则 P_2、P_3、P_4 中必有两点在 Q 的同侧,不妨设 P_2、P_3 在 Q 的同侧,并设 $|QP_2|<|QP_3|$(如图 4 所示). 则 P_2 到直线 P_1P_3 的距离不超过 Q 到直线 P_1P_3 的距离 QR,而 $QR < P_1Q$,这与 P_1Q 的最小性矛盾. 从而 P_2P_3 上没有 $P_1, \cdots, P_n$ 中的其他点.

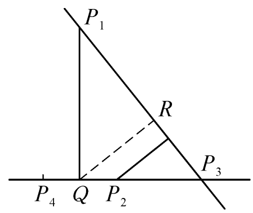


图 4

所以,命题成立.

说明 进一步的问题是讨论恰过其中两个点的直线条数的最小可能值,这是组合几何中的一个有趣而极富挑战性的问题.

例 4 证明:不定方程

$$x^4 + y^4 = z^4$$

没有正整数解.

证明 只需证方程

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad ①$$

没有正整数解.

若否,设①有正整数解 (x, y, z),我们取使 z 最小的那组解. 这时,设 x、y 的最大公因数为 d,记为 $(x, y) = d$,则 $d^2 \mid (x^4 + y^4)$,故 $d^2 \mid z^2$,进而 $d \mid z$,所以 $d = 1$ (否则 $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ 也是①的解),因此,(x^2, y^2, z) 是不定方程

$$u^2 + v^2 = w^2 \qquad ②$$

的一组本原解,不妨设 y^2 为偶数,由②的通解,知存在 $a, b \in \mathbf{N}^*$,$(a, b) = 1$,a、b 一奇一偶,使得

$$x^2 = a^2 - b^2, \ y^2 = 2ab, \ z = a^2 + b^2.$$

由 y^2 为偶数，知 x 为奇数，进而，由 $x^2+b^2=a^2$，可知存在 m、$n\in\mathbf{N}^*$，$(m, n)=1$，m、n 一奇一偶，使得

$$x=m^2-n^2,\ b=2mn,\ a=m^2+n^2.$$

此时 $y^2=4mn(m^2+n^2)$，由 $(m, n)=1$，知 $(m, m^2+n^2)=(n, m^2+n^2)=1$，于是 m^2+n^2、m、n 都是完全平方数. 这样，可设 $m=r^2$，$n=s^2$，$m^2+n^2=z_1^2$，$r, s, z_1\in\mathbf{N}^*$，就有 $r^4+s^4=z_1^2$，其中 $z_1^2=a<z$，与 (x, y, z) 是①的正整数解中 z 最小那组矛盾.

所以，①没有正整数解，命题获证.

说明 这里用到关于勾股方程 $x^2+y^2=z^2$ 的本原解（即使得 $(x, y, z)=1$ 的正整数解）的相关结论，请读者自行了解.

例 5 设 n 为给定的正整数. 问：是否存在一个元素个数大于 $2n$ 的由非零平面向量组成的满足如下条件的有限集合 M？

(1) 对 M 中任意 n 个向量，都可以在 M 中另选出 n 个向量，使得这 $2n$ 个向量之和等于零；

(2) 对 M 中任意 n 个向量，都可以在 M 中另选出 $n-1$ 个向量，使得这 $2n-1$ 个向量之和等于零.

解 不存在这样的集合 M.

事实上，若有这样的 M，由于 M 为有限集，故从中取 n 个向量的方法数是有限种. 存在一种选取，使所得的 n 个向量之和的模长最大，设这 n 个向量是 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$，并记 $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{s}$.

过原点作与 $\boldsymbol{s}$ 垂直的直线 l，则 l 将平面分为两个部分，记 M 中与 $\boldsymbol{s}$ 在同一侧的向量组成的集合为 M_1，与 $-\boldsymbol{s}$ 在同一侧及在 l 上的向量组成的集合为 M_2，则 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M_1\cup M_2=M$.

由条件(2)知，M 中存在向量 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}$，使得

$$\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{n-1}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{n-1}=-\boldsymbol{s}$.

下证：不存在向量 $\boldsymbol{v}$，使得 $\boldsymbol{v}\in M_2$，但 $\boldsymbol{v}\notin\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}$.

若存在这样的 $\boldsymbol{v}$，则由 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}\leqslant 0$ 可知，

$$|\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{n-1}+\boldsymbol{v}|^2=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{s}|^2=|\boldsymbol{s}|^2-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{s}+|\boldsymbol{v}|^2>|\boldsymbol{s}|^2,$$

这与 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 的取法矛盾.

所以，$|M_2|\leqslant n-1$.

另一方面，由(1)知存在 $\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\in M$，使得

$$\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{u}'_1+\cdots+\boldsymbol{u}'_n=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{u}'_1+\cdots+\boldsymbol{u}'_n=-\boldsymbol{s}$，由条件(2)知，$M$ 中存在向量 $\boldsymbol{v}'_1,\cdots,\boldsymbol{v}'_{n-1}$，使得

$$\boldsymbol{u}'_1+\cdots+\boldsymbol{u}'_n+\boldsymbol{v}'_1+\cdots+\boldsymbol{v}'_{n-1}=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{v}'_1+\cdots+\boldsymbol{v}'_{n-1}=\boldsymbol{s}$.

用上面类似的方法可证明：不存在向量 $\boldsymbol{v}'\in M_1$，但 $\boldsymbol{v}'\notin\{\boldsymbol{v}'_1,\cdots,\boldsymbol{v}'_{n-1}\}$. 因此 $|M_1|\leqslant n-1$.

综上，将导致 $|M|\leqslant 2n-2$，矛盾. 所以，不存在符合条件的集合 M.

例 6 设 α 为给定的正整数，求最大的正整数 β，使得存在 $x,y\in\mathbf{N}^*$，满足

$$\beta=\frac{x^2+y^2+\alpha}{xy}. \tag{①}$$

解 注意到，当 $\beta=\alpha+2$ 时，取 $x=y=1$，就有①成立，所以 $\beta_{\max}\geqslant\alpha+2$.

另一方面，设 β 是一个满足条件的正整数，我们设 (x,y) 是所有满足①的正整数对中(这里视 β 为常数)，使得 $x+y$ 最小的那一对.

如果 $x=y$，那么 $\beta=\dfrac{2x^2+\alpha}{x^2}=2+\dfrac{\alpha}{x^2}\leqslant 2+\alpha$.

如果 $x\neq y$，不妨设 $x>y$，这时关于 x 的一元二次方程

$$x^2-\beta y\cdot x+y^2+\alpha=0 \tag{②}$$

还有一个实数解 $\bar{x}$.

由韦达定理及②知 $\bar{x}=\beta y-x\in\mathbf{Z}$，又 $x\cdot\bar{x}=y^2+\alpha$，即 $\bar{x}=\dfrac{y^2+\alpha}{x}>0$，所以，$\bar{x}$ 为正整数. 此时，$(\bar{x},y)$ 也是满足①的正整数对，因此

$$\bar{x}+y=\frac{y^2+\alpha}{x}+y\geqslant x+y,$$

这里用到 $x+y$ 的最小性.

于是，我们有 $x^2\leqslant y^2+\alpha$，且 $x\geqslant y+1$. 进而

$$\beta=\frac{x^2+y^2+\alpha}{xy}\leqslant\frac{2(y^2+\alpha)}{xy}\leqslant\frac{2(y^2+\alpha)}{y(y+1)}=\frac{2y^2}{y^2+y}+\frac{2\alpha}{y(y+1)}<2+\alpha.$$

这表明 $\beta_{\max}\leqslant 2+\alpha$.

综上可知，β 的最大值为 $\alpha+2$.

例 7 求所有的整数 $n>1$，使得它的任何大于 1 的因数都可以表示为 a^r+1 的形式，这里 $a,r\in\mathbf{N}^*$，$r\geqslant 2$.

解 设 S 是所有满足条件的正整数组成的集合，则对任意 $n \in S$，$n > 1$，n 的每个大于 1 的因数都具有 $a^r + 1$ 的形式，这里 a，$r \in \mathbf{N}^*$，$r > 1$.

由此可知，对任意 $n \in S\ (n > 2)$，存在 a，$r \in \mathbf{N}^*$，a，$r > 1$，使得 $n = a^r + 1$. 我们设 n 的这种表示中 a 是最小的，即不存在 b，$t \in \mathbf{N}^*$，$t > 1$，使得 $a = b^t$. 这时，r 必为偶数(若否，设 r 为奇数，则 $(a+1) \mid n$，于是，$a+1$ 可表示为 $b^t + 1$ 的形式，导致 $a = b^t$，与 a 最小矛盾). 所以，S 中的每个大于 1 的元素 n 都可表示为 $n = x^2 + 1$，$x \in \mathbf{N}^*$ 的形式.

下面来求 S 的每个元素 n.

如果 n 为素数，那么 n 是具有 $x^2 + 1$ 形式的素数.

如果 n 为合数，分两种情况讨论：

(1) 若 n 为奇合数，则存在奇素数 p、q，使得 p，q，$pq \in S$，此时，应存在 a，b，$c \in \mathbf{N}^*$，满足

$$p = 4a^2 + 1,\ q = 4b^2 + 1,\ pq = 4c^2 + 1.$$

这里还可设 $p \leqslant q$，即有 $a \leqslant b < c$. 于是 $pq - q = 4(c^2 - b^2)$，故 $q \mid 4(c-b)(c+b)$，由 q 为奇素数，知 $q \mid c-b$ 或 $q \mid c+b$，总有 $q < 2c$，导致 $pq < 4c^2 < 4c^2 + 1 = pq$，矛盾.

(2) 若 n 为偶合数，注意到 $2^2 \notin S$，结合前面的讨论，可知 n 只能是 $2q$ 的形式，这里 q 为奇素数. 此时 q，$2q \in S$，于是，存在 a，$b \in \mathbf{N}^*$，使得

$$q = 4a^2 + 1,\ 2q = b^2 + 1.$$

得 $q = b^2 - 4a^2 = (b - 2a)(b + 2a)$，所以 $b - 2a = 1$，$b + 2a = q$. 进而 $q - 1 = 4a$，又 $q - 1 = 4a^2$，故 $4a = 4a^2$，得 $a = 1$，$b = 3$，$q = 5$，$n = 10$. 即 S 中只有一个偶合数 10.

综上可知，任意 $n \in S$，n 是形如 $x^2 + 1$ 的素数或 10，而这样的 n 具有题中的性质是显然的，所以 $S = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbf{N}^*,\ x^2 + 1 \text{ 为素数}\} \cup \{10\}$.

例 8 桌子上有两堆硬币，已知这两堆硬币的总重量相同，并且对任意正整数 k(这里 k 不超过每堆硬币的个数)，第一堆硬币中最重的 k 枚硬币的重量之和不超过第二堆中最重的 k 枚硬币的重量之和. 证明：对任意正实数 x，若将两堆硬币中每一枚重量不小于 x 的硬币都用重量为 x 的硬币替换，则完成此操作后，第一堆的总重量不比第二堆轻.

证明 我们用排序原理来处理.

设第一堆硬币的重量依次为 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n$；第二堆硬币的重量依次为 $y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_m$. 则由条件知，对任意 $k \leqslant \min\{m,\ n\}$，都有

$$x_1+\cdots+x_k \leqslant y_1+\cdots+y_k.$$

对任意正实数 x，设 $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_s \geqslant x > x_{s+1} \geqslant \cdots \geqslant x_n$，$y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_t \geqslant x > y_{t+1} \geqslant \cdots \geqslant y_m$. 要证明：

$$sx + x_{s+1} + \cdots + x_n \geqslant tx + y_{t+1} + \cdots + y_m. \qquad ①$$

显然，当 s 或 t 不存在时(注意，由条件知，若 t 不存在，则 s 也不存在)，不等式①可由 $x_1+\cdots+x_n = y_1+\cdots+y_m$ 得到. 下面考虑 s 与 t 都存在的情形.

记 $x_1+\cdots+x_n = y_1+\cdots+y_m = A$，则①等价于

$$\begin{aligned} & sx + (A - x_1 - \cdots - x_s) \geqslant tx + (A - y_1 - \cdots - y_t) \\ \Leftrightarrow\ & x_1+\cdots+x_s+(t-s)x \leqslant y_1+\cdots+y_t. \end{aligned} \qquad ②$$

如果 $t \geqslant s$，那么

$$\begin{aligned} x_1+\cdots+x_s+(t-s)x &= x_1+\cdots+x_s+\underbrace{x+\cdots+x}_{t-s\text{个}} \\ &\leqslant y_1+\cdots+y_s+y_{s+1}+\cdots+y_t. \end{aligned}$$

不等式②获证.

如果 $t < s$，那么②等价于

$$x_1+\cdots+x_s \leqslant y_1+\cdots+y_t+\underbrace{x+\cdots+x}_{s-t\text{个}}. \qquad ③$$

由条件，我们有

$$\begin{aligned} x_1+\cdots+x_s &\leqslant y_1+\cdots+y_t+y_{t+1}+\cdots+y_s \\ &\leqslant y_1+\cdots+y_t+\underbrace{x+\cdots+x}_{s-t\text{个}}. \end{aligned}$$

所以，③成立.

综上可知，命题成立.

4　数列的通项与求和

按一定次序排列的一列数称为数列，其中的每一个数都叫这个数列的项，依次叫做该数列的第一项(或称为首项)，第二项，…，第 n 项，….

数列的一般形式可写为

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

简记为 $\{a_n\}$. 如果 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 可以用 n 的代数式表示，那么这个公式就

称为此数列的通项公式.

由数列的上述定义,可知数列在本质上是定义在正整数集上的一个函数.相关的问题中,求数列的通项公式及前 n 项之和的公式是最基本、最常见的问题.

用 S_n 表示数列$\{a_n\}$的前 n 项之和,那么它与通项之间有如下的关系

$$a_1 = S_1;\ a_n = S_n - S_{n-1},\ n = 2,\ 3,\ \cdots.$$

为表述与讨论方便,我们引入下面的一些概念:

如果一个数列的项数是有限的,那么称它为有穷数列,否则称它为无穷数列.

数列$\{a_n\}$如果满足:对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $a_n < a_{n+1}$(或者 $a_n > a_{n+1}$),那么称它为递增(或者递减)数列;如果只是 $a_n \leqslant a_{n+1}$(或者 $a_n \geqslant a_{n+1}$),那么称它为不减(或者不增)数列.

如果存在常数 M,使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $|a_n| \leqslant M$,那么实数数列$\{a_n\}$称为有界数列.

例 1 数列$\{a_n\}$满足:对任意非负整数 m、$n(m \geqslant n)$,都有 $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$,且 $a_1 = 1$. 求该数列的通项公式.

解 利用题给的条件可知,对任意 $m \in \mathbf{N}$,都有

$$\frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m}) = a_{2m} + a_0 = 2(a_m + a_m),$$

可知 $a_0 = 0$,且 $a_{2m} = 4a_m$.

结合 $a_1 = 1$,可发现当 $n \in \{0,\ 1,\ 2\}$ 时,都有 $a_n = n^2$,这是否就是数列的通项公式呢?

假设 $a_{m-1} = (m-1)^2$,$a_m = m^2$,那么由条件知

$$a_{m+1} + a_{m-1} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_2) = \frac{1}{2}(4a_m + 4a_1),$$

故 $a_{m+1} = 2a_m - a_{m-1} + 2a_1 = 2m^2 - (m-1)^2 + 2 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$. 这样,由数学归纳法原理,可知对 $n \in \mathbf{N}$,都有 $a_n = n^2$.

综上所述,所求数列的通项公式为 $a_n = n^2$(直接验证,可知 $a_n = n^2$ 时,条件都满足).

说明 利用已知条件求数列通项是与数列相关的问题中经常出现的,本质上,此题还是一个特殊的函数方程问题,这与数列本质上是定义在正整数

集的函数有关.

例 2 设 n 是给定的正整数,数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_0=\frac{1}{2}$, $a_k=a_{k-1}+\frac{a_{k-1}^2}{n}$, $k=1, 2, \cdots, n$. 证明: $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

证明 由条件,可知对任意 $1\leqslant k\leqslant n$,都有 $a_{k-1}<a_k$,故对任意 $0\leqslant k\leqslant n$,都有 $a_k>0$.

现在对条件式作变形:

$$\frac{1}{a_k}=\frac{n}{na_{k-1}+a_{k-1}^2}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_{k-1}+n},$$

将上式移项得

$$\frac{1}{a_{k-1}+n}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}. \qquad ①$$

对①将下标 k 从 1 到 n 求和,得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}&=\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)\\&=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=2-\frac{1}{a_n}.\end{aligned}$$

结合 $a_{k-1}>0$, 可知

$$2-\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1,$$

于是 $a_n<1$. 再由 $a_k>a_{k-1}$ 知 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n<1$, 故

$$2-\frac{1}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k-1}+n}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+n}=\frac{n}{n+1},$$

得 $a_n>\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}>1-\frac{1}{n}$.

所以,命题成立.

说明 这里对条件式“取倒数”是基于“裂项”的思想,在数列求和中经常会先“裂项”,在求和时达到前后相消的效果.

例 3 对 $n\in\mathbf{N}^*$,设 $a_n=\frac{n}{(n-1)^{\frac{4}{3}}+n^{\frac{4}{3}}+(n+1)^{\frac{4}{3}}}$. 证明:

$$a_1+a_2+\cdots+a_{999}<50.$$

证明 基本的想法是从局部往整体去处理，为此，对 a_n 作恰当放大，达到裂项相消的目的.

注意到 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$，令 $x=(n+1)^{\frac{2}{3}}$，$y=(n-1)^{\frac{2}{3}}$，则 $xy=(n^2-1)^{\frac{2}{3}}<n^{\frac{4}{3}}$. 故

$$\begin{aligned}a_n&<\frac{n}{x^2+xy+y^2}=\frac{n(x-y)}{x^3-y^3}\\&=\frac{n(x-y)}{(n+1)^2-(n-1)^2}=\frac{1}{4}(x-y)\\&=\frac{1}{4}((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_1+\cdots+a_{999}&<\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{999}((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}})\\&=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=2}^{1000}n^{\frac{2}{3}}-\sum_{n=0}^{998}n^{\frac{2}{3}}\right)\\&=\frac{1}{4}(1000^{\frac{2}{3}}+999^{\frac{2}{3}}-1)\\&<\frac{1}{2}\times1000^{\frac{2}{3}}=50.\end{aligned}$$

命题获证.

说明 “先放缩再求和”在处理与数列求和相关的不等式时是一个重要的方法.

例 4 设 $k\in\mathbf{N}^*$，且 $k\equiv3\pmod 4$. 定义

$$S_n=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^2k+\mathrm{C}_n^4k^2-\mathrm{C}_n^6k^3+\cdots.$$

证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $2^{n-1}\mid S_n$.

证明 利用复数来处理.

由 S_n 的定义结合二项式定理，可知

$$S_n=\mathrm{Re}(1+\sqrt{k}\,\mathrm{i})^n,$$

这里 i 为虚数单位，$\mathrm{Re}(z)$表示复数 z 的实部.

于是

$$S_n=\frac{1}{2}((1+\sqrt{k}\,\mathrm{i})^n+(1-\sqrt{k}\,\mathrm{i})^n),$$

进而,我们记 $x=1+\sqrt{k}\mathrm{i}$, $y=1-\sqrt{k}\mathrm{i}$, 则

$$\begin{aligned}S_{n+2}&=\frac{1}{2}(x^{n+2}+y^{n+2})\\&=\frac{1}{2}((x^{n+1}+y^{n+1})(x+y)-xy(x^n+y^n))\\&=(x+y)S_{n+1}-xyS_n\\&=2S_{n+1}-(1+k)S_n.\end{aligned}$$

并且 $S_1=1$, $S_2=1-k$.

下证:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $2^{n-1}\mid S_n$.

利用 $k\equiv 3\pmod 4$, 可知当 $n=1$, 2 时,命题成立;现设命题对 n, $n+1$ 都成立,即 $2^{n-1}\mid S_n$ 且 $2^n\mid S_{n+1}$,则对 $n+2$ 的情形,由 $1+k\equiv 1+3\equiv 0\pmod 4$, 及

$$S_{n+2}=2S_{n+1}-(1+k)S_n,$$

可知 $2^{n+1}\mid S_{n+2}$(因为 $2^{n+1}\mid 2S_{n+1}$, $2^{n+1}\mid(1+k)S_n$). 所以,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $2^{n-1}\mid S_n$.

说明 从条件出发,作出恰当转换,建立数列的递推关系,再结合数学归纳法处理. 这样的解题思路有“思路清晰、一气呵成”之感,把握起来也较方便.

例 5 一个由正整数组成的递增数列$\{a_n\}$的前面若干项为

$$1;\ 2,\ 4;\ 5,\ 7,\ 9;\ 10,\ 12,\ 14,\ 16;\ 17,\ \cdots.$$

其结构是:1 个奇数,2 个偶数,3 个奇数,4 个偶数,….

证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $a_n=2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

证明 如果存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 $n=1+2+\cdots+k$, 那么称正整数 n 是一个三角形数.

现在定义数列 $\{b_n\}$:$b_1=1$,

$$b_{n+1}-b_n=\begin{cases}1, & \text{若 } n \text{ 是一个三角形数},\\2, & \text{若 } n \text{ 不是一个三角形数}.\end{cases}\qquad ①$$

则由数列$\{a_n\}$的结构结合数学归纳法可知 $a_n=b_n$.

进一步,由于满足①的数列$\{b_n\}$是存在而且唯一的,因此,为证命题成立,我们只需证明(注意:当 $n=1$ 时,$2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]=1$):

$$c_n=\begin{cases}1, & 若 n 是一个三角形数,\\ 2, & 若 n 不是一个三角形数.\end{cases} \quad ②$$

这里 $c_n=2(n+1)-\left[\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\right]-\left(2n-\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]\right)$.

为此,先证明:

当且仅当 n 是一个三角形数时,$\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\in\mathbf{N}^*$. ③

事实上,若存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $n=1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$,则

$$\frac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}=\frac{1+\sqrt{4k(k+1)+1}}{2}=\frac{1+2k+1}{2}=k+1\in\mathbf{N}^*;$$

另一方面,若 n 不是三角形数,则存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $\dfrac{k(k+1)}{2}<n<\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$(即 n 介于两个相邻三角形数之间). 同上计算,可知

$$k+1<\frac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}<k+2.$$

所以,③成立.

回证②成立,由于 $c_n=2+\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]-\left[\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\right]$,而当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,有

$$\begin{aligned}0&<\frac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}-\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-\sqrt{8n-7})\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{8n+1-(8n-7)}{\sqrt{8n+1}+\sqrt{8n-7}}=\frac{4}{\sqrt{8n+1}+\sqrt{8n-7}}\\&\leqslant\frac{4}{\sqrt{8+1}+\sqrt{8-7}}=1.\end{aligned}$$

故当且仅当 $\dfrac{1+\sqrt{8(n+1)-7}}{2}\in\mathbf{N}^*$ 时,$c_n=2-1=1$;而对其他的 n,有 $c_n=2-0=2$.

利用结论③可知,②成立.

综上可知 $a_n=2n-\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

说明 这是一个分群数列求通项的问题,①反映的正是数列相邻两项的

图书在版编目(CIP)数据

数列与数学归纳法/冯志刚著. —3 版. —上海：华东师范大学出版社，2019
(数学奥林匹克小丛书. 高中卷)
ISBN 978-7-5675-9795-2

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①冯…　Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 240532 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

数列与数学归纳法(第三版)

著　　者　冯志刚
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
责任编辑　陈　震
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　10.5
字　　数　188 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9795-2
定　　价　26.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师－小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师－初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师－中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师－高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师－初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师－高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。