数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 18

Mathematical Olympiad Series

组合极值

冯跃峰 编著

华东师范大学出版社

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

极值问题历来是数学竞赛中的热点问题之一，而组合极值则是极值问题中的一个难点.

所谓组合极值，是指其函数自变量的取值为自然数或整数，或者问题涉及集合、子集与元素等一些离散的变量，要求在特定条件（未必是变量满足的等式或不等式，它常常是变量具有的某种性质）下，求出有关量能达到的最大值或最小值.

从问题结构上看，组合极值包括这样两个方面：论证与构造."论证"是论证某种量满足某个不等式或论证某些对象具有某种性质，"构造"是构造一组合乎题设条件的对象或构造使命题论断不成立的反例.这两个方面无论是从思考问题的角度还是从处理问题的方式上往往都有着较大的差别，而且两者都需要灵活的思路、丰富的想象与创造性的构想，因而它常常是数学竞赛考察的重点.

从极值对象的类型上看，组合极值可分为"和积型"极值和"参数型"极值.所谓"和积型"极值，是指求极值的函数的表现形式是"和"或"积"的形式，本书前5单元介绍的就是求这种类型极值的5种常用方法.所谓"参数型"极值，是指求极值的对象或问题涉及某个参数，这种极值的主要特点是没有确定的待求极值的函数表达式，本书后8单元介绍的就是求这种类型极值的8种常用方法.

对于"参数型"极值，根据问题的提法不同，又可分为"存在型参数"极值与"全范围型参数"极值.所谓"存在型参数"极值，是指参数 k 具有这样的性质：存在某些与 k 有关的对象具有性质 p.此时，其"论证"是要证明：如果 $k>k_0$（或 $k<k_0$），则任何合乎题设条件的对象都不具有性质 p，由此得到不等式 $k\leqslant k_0$（或 $k\geqslant k_0$）.其"构造"是对 $k=k_0$，构造一个具有性质 p 的合乎题设条件的对象.简言之，是"论证用于不等式，构造用于等式".所谓"全范围型参数"极值，是指对任何合乎题设条件的对象，参数 k 都具有某种性质 p.此时，其"构造"是要解决这样的问题：如果 $k>k_0$（或 $k<k_0$），则存在合乎题设条件

的对象使 k 不具有性质 p,从而得到关于 k 的一个不等式 $k\leqslant k_0$(或 $k\geqslant k_0$).而其"论证"则是证明 $k=k_0$ 时,k 确实具有性质 p.简言之,是"论证用于等式,构造用于不等式".读者在阅读这两类问题时要注意它们在解题手法上的区别.

本书各单元虽有联系,但又相对独立,阅读时未必要遵循单元的先后顺序,可以先阅读自己感兴趣的部分,一些难度较大的问题也可先跳过去,待对书中所述方法有比较全面的把握时,再回过头来解决先前遗留的问题.每个单元都配有习题,一般可采用相应单元介绍的方法求解,书后附有解答以供查对.但读者不必囿于书中的方法,应尽量提出自己独特的创造性的见解.

本书可供高中学生、师范院校数学系师生和广大奥林匹克数学爱好者阅读.

本书在第二版的基础上,更换、增加了一些例题和习题,改正了一些错误.限于作者水平,书中谬误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2019 年 12 月

目　录

1 不等式控制

组合极值的一个显著特点，就是其约束条件或所求的极值的函数式较复杂. 所谓不等式控制，就是对约束条件或极值函数进行放缩，使条件与极值函数之间的联系趋于明显. 通过放缩，使问题接近于一种标准形式：在 $f(x, y)=0$ 下，求 $u=g(x, y)$ 的最值，从而将组合极值化归为一般的极值求解.

不等式控制，通常有两种方式：一是对约束条件进行放缩，使隐蔽的约束条件明显化；二是对极值函数进行放缩，使复杂的函数式简单化.

例 1 设 m 个互异的正偶数与 n 个互异的正奇数的和为 1987，求 $3m+4n$ 的最大值.（第 2 届 CMO 试题）

解析 本题的难点在于约束条件较复杂，可先利用不等式将其化简，进而将其放缩到出现目标函数式.

设题给的 m 个正偶数为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，n 个正奇数为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=1987. \quad ①$$

注意到极值函数是关于 m、n 的函数，而在约束条件中，m、n 仅作为各变量的下标. 于是，应将①中对 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的约束转化为对 m、n 的约束.

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是互异的正偶数与正奇数，所以

$$\begin{aligned}1987&=(a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&\geqslant(2+4+6+\cdots+2m)+(1+3+\cdots+2n-1)\\&=m^2+n^2+m. \quad ②\end{aligned}$$

注意到我们的目标是：$3m+4n\leqslant A$（常数）的形式，呈现柯西（Cauchy）不等式结构，所以应将 ② 的右边配方，化为“平方和”. 从而

$$1987+\frac{1}{4}\geqslant\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2,$$

001

$$\left(1987+\frac{1}{4}\right)(3^2+4^2)\geqslant(3^2+4^2)\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\right]$$

$$\geqslant\left(3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n\right)^2,$$

所以 $3m+\frac{3}{2}+4n\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}$,所以

$$3m+4n\leqslant\left[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\right]=221.$$

下面构造一组数,使不等式成立等号.先找(m,n),使 $3m+4n=221$.

此不定方程有多个解,但为了使(m,n)满足②,应使相应的偶数和奇数都尽可能小,这就要求 m 与 n 充分接近.通过试验,得到 $m=27$, $n=35$ 时, $3m+4n=221$,且 $m^2+n^2+m=1981<1987$,满足②.

取最小的27个正偶数为 $a_1=2$, $a_2=4$, …, $a_{27}=54$,最小的35个正奇数为 $b_1=1$, $b_2=3$, …, $b_{34}=67$, $b_{35}=69$, 则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{27})+(b_1+b_2+\cdots+b_{35})=1987-6,$$

再将 b_{35} 修改为:$69+6=75$,得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{27})+(b_1+b_2+\cdots+b_{35})=1987.$$

综上所述, $3m+4n$ 的最大值为221.

注 本例解题的关键,是将①式化为②式,而后面利用柯西不等式则不是本质的.实际上,得到②式后,求 $3m+4n$ 的极值也可用三角代换:

由②,可令 $r=\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}$, $m=-\frac{1}{2}+r\cos\theta$, $n=r\sin\theta$,则

$$3m+4n=3r\cos\theta+4r\sin\theta-\frac{3}{2}=5r\sin(\theta+t)-\frac{3}{2}$$

$$\leqslant 5r-\frac{3}{2}\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\text{(下同)}.$$

例2 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbf{R}_+$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=A$(常数),对给定的正整数$k$,求 $\sum\frac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}$ 的最大值.其中求和对 $1, 2, \cdots, n$ 中的所有 k-元数组$(i_1, i_2, \cdots, i_k)$进行.

解析 本题的难点在于目标函数较复杂,期望利用不等式将其化简.由

目标函数的结构特征，想到将 $\dfrac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}$ 化为$\dfrac{1}{x_{i_1}}+\dfrac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\dfrac{1}{x_{i_k}}$ 以利用条件$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=A$. 这恰好符合“倒数型不等式”：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}\geqslant\dfrac{k^2}{a_1+a_2+\cdots+a_k}$ 的特征. 于是，利用“倒数型不等式”，有

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\leqslant\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}}{k^2}.$$

所以
$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}&\leqslant\sum\frac{\dfrac{1}{x_{i_1}}+\dfrac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\dfrac{1}{x_{i_k}}}{k^2}\\&=\frac{1}{k^2}\sum\left(\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_k}}\right).\end{aligned}$$

考察上式右边“和式”中每个项 $\dfrac{1}{x_{i_j}}(j=1,2,\cdots,k)$ 出现的次数. 显然，$\dfrac{1}{x_{i_j}}$ 出现一次，等价于出现一个$\left(\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\cdots,\dfrac{1}{x_k}\right)$的含$\dfrac{1}{x_{i_j}}$ 的k-组合. 因为含有$\dfrac{1}{x_{i_j}}$ 的k-组合有 C_{n-1}^{k-1} 个，所以$\dfrac{1}{x_{i_j}}$ 在“和式”中共出现 C_{n-1}^{k-1} 次，所以

$$\frac{1}{k^2}\sum\left(\frac{1}{x_{i_1}}+\frac{1}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{1}{x_{i_k}}\right)=\frac{1}{k^2}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\frac{A}{k^2}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}.$$

其中等式在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{n}{A}$ 时成立.

故$\sum\dfrac{1}{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}$ 的最大值为$\dfrac{A}{k^2}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

例 3 有一种特别列车，沿途共有 20 个车站(包括起点与终点)，因某种安全需要，规定在同一车站上车的旅客不能在同一车站下车. 试问：在此约定下，为了保证上车的旅客都有座位(每个旅客一个座位)，列车至少要安排多少个座位?(原创题)

解析 从目标看，要使各个车站“上车的旅客都有座位”，可从个体突破，考察各车站的一个“代表”：对任何 j，第 j 个车站上车的旅客都有座位.

显然，车从第 j 站出发所时所需要的座位由两部分构成：一部分是第 j 站刚上车的新旅客，另一部分是前 $j-1$ 个车站上车在前 j 站没有下车的旅客.

第 j 站上车的旅客(称为 j 站旅客)至多 $20-j$ 个，这是因为后面只有

$20-j$ 个站，而每站只能下一个 j 站旅客.

容易发现，上面的估计适合 j 站前面的所有车站. 实际上，对于第 $i(1 \leqslant i \leqslant j-1)$ 站上车的旅客，到达第 j 站时还不下车的人也不多于 $20-j$，这是因为后面只有 $20-j$ 个站，而每站只能下一个 i 站旅客.

于是列车在第 j 站出发时，前 j 个车站上车的旅客最多有 $j(20-j)$ 人仍在车上，最多需要 $j(20-j)$ 个座位.

由平均值不等式，得 $j(20-j) \leqslant (20/2)^2 = 100$，所以列车有 100 个座位就已足够.

从等号入手，若要使车上达到 100 个旅客，则上述不等式成立等号，得 $j = 20-j$，所以 $j = 10$. 这就是说，只有在第 10 站出发时，才有可能车上旅客达到 100 人.

当第 10 站出发时旅客达到 100 人时，后面只有 10 个车站，同一个车站上车的旅客只能分别在这 10 个车站下车，于是同一车站上车在第 10 站仍没有下车的至多 10 人. 由此想到考察一种最简的情形：每个车站都上 10 人，且在前 10 个站都不下车（同一车站上车的 10 人可分别在后 10 个车站各下一人），则当列车从第 10 站出发时，车上有旅客 $10 \times 10 = 100$ 人，这时列车需要 100 个座位.

综上所述，列车至少要安排 100 个座位.

例 4　对平面上任意 100 条直线，用 T 表示其中 3 条直线交成的直角三角形的集合. 求 $|T|$ 的最大值.（2015 年中国西部数学邀请赛试题）

解析　本题属于计数极值问题，可采用分类计数. 先任取一个直角三角形，它的生成元为 3 边所在的直线.

先固定生成元中的两个要素：设直角三角形 2 条直角边所在直线为 a、b，则任何与 a、b 都不平行的直线都至多与 a、b 交成一个直角三角形（可能 3 线共点）.

由于 100 条直线分布不规则，无法确定三角形的位置和大小，只能按直角边的方向分类，这是本题的关键. 为此，需要知道每个方向的直线有多少条，这就要引入容量参数：考察每个方向及与该方向垂直的方向上直线的条数.

任取一条直线 m_1，设与 m_1 平行、垂直的直线分别有 a_1、b_1 条，则与 m_1 不平行不垂直的直线有 $100-a_1-b_1$ 条. 于是，有一直角边平行 m_1 的直角三角形至多有 $a_1 b_1(100-a_1-b_1)$ 个.

去掉与 m_1 平行、垂直的直线，在剩下的直线中任取一条直线 m_2，设与 m_2 平行、垂直的直线分别有 a_2、b_2 条，则包括“去掉直线”的所有直线中与直线 m_2 不平行不垂直的直线有 $100-a_2-b_2$ 条. 于是，有一条直角边平行 m_2 的直角三角形至多有 $a_2 b_2(100-a_2-b_2)$ 个.

如此下去，假定取定直线 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 后，再没有不平行也不垂直任何直线 $m_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的其他直线. 设与 m_i 平行、垂直的直线分别有 a_i、b_i 条，则类似可知，有一条直角边平行 m_i 的直角三角形至多有 $a_ib_i(100-a_i-b_i)$ 个. 其中，$\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i+b_i)=100$.

所以，直角三角形的总个数 $|T|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i(100-a_i-b_i)$.

为利用条件 $\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i+b_i)=100$，需要将极值式：$\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i(100-a_i-b_i)$ 中的“a_ib_i”变成“a_i+b_i”的形式，这利用平均值不等式：$4a_ib_i\leqslant(a_i+b_i)^2$ 即可. 于是，

$$4|T|\leqslant\sum_{i=1}^{k}4a_ib_i(100-a_i-b_i)\leqslant\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^2(100-a_i-b_i).$$

至此，还需要“降次”：将 $(a_i+b_i)^2$ 变成一次式，这采用“拆半放缩”：分离出一个因式与后一个因式搭配，再利用一次平均值不等式“凑定值”即可.

$$\begin{aligned}16|T|&\leqslant\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)[4(a_i+b_i)(100-a_i-b_i)]\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)[(a_i+b_i)+(100-a_i-b_i)]^2\\&=\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)(4\times25)^2=100\times(4\times25)^2.\end{aligned}$$

所以 $|T|\leqslant100\times25^2=62\,500$.

下面构造 100 条直线，使 $|T|=62\,500$.

从等号成立的条件入手，要使 $|T|=62\,500$，必须对每个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$，有 $a_i=b_i$，$a_i+b_i=100-a_i-b_i$，解得 $a_i=b_i=25$. 代入 $\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i+b_i)=100$，得 $k=2$.

于是，可取倾斜角为 $0°$、$90°$、$45°$、$135°$的直线各 25 条(图 1-1).

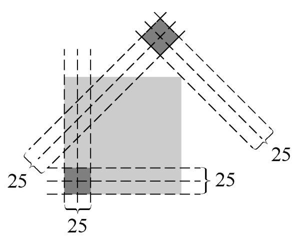

图 1-1

再考虑到任何 3 条不共点，具体可构造如下 100 条直线：

$x=i(1\leqslant i\leqslant25)$，$y=j(1\leqslant j\leqslant25)$，
$y=x+i(26\leqslant i\leqslant50)$，
$y=j-x(101\leqslant j\leqslant125)$.

综上所述,$|T|$的最大值为 62500.

例 5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20} \in \{1, 2, \cdots, 5\}$, $b_1, b_2, \cdots, b_{20} \in \{1, 2, \cdots, 10\}$,求集合 $X = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 20, (a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0\}$ 的元素个数的最大值.(2017 年全国高中数学联赛加试 B 卷)

解析 欲求$|X|$的最大值,自然先要明确 X 究竟包含怎样一些元素. 由 X 的定义可知,X 的元素(i, j)由不等式$(a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0$给出. 但这个不等式显然不能用通常的方法"解"出$(i, j)$. 而且,从正面判断哪些$(i, j)$属于 X 也比较困难,从反面考虑哪些(i, j)不属于 X 则较为容易,找一个充分条件即可:由$(a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0$ 可知, $a_i \neq a_j$,从而那些使 $a_i = a_j$ 的对子(i, j)都不属于 X.

由此想到,先计算满足 $a_i = a_j$ 的对子(i, j)的个数,这需要讨论 $a_1, a_2, \cdots, a_{20}$ 中哪些是相等的,从而需要引入容量参数.

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_{20} \in \{1, 2, \cdots, 5\}$,设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20}$ 中取值为 $i(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 的有 t_i 个,则不在 X 中的(i, j)至少有 $\sum\limits_{i=1}^{5} \mathrm{C}_{t_i}^{2}$ 个,于是

$$| X | \leqslant \mathrm{C}_{20}^{2} - \sum_{i=1}^{5} \mathrm{C}_{t_i}^{2}.$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{5} t_i = 20$,自然想到利用柯西不等式将上式化简,得到$|X|$的下界.

因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} \mathrm{C}_{t_i}^{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5} t_i^2 - \sum_{i=1}^{5} t_i\right) \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} t_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{5} t_i\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \cdot 20^2 - 20\right) = 30,\end{aligned}$$

所以 $| X | \leqslant \mathrm{C}_{20}^{2} - 30 = 160$.

下面构造一个合乎条件的 X,使 $| X | = 160$.

从等号成立的条件入手,应使各 t_i 相等. 结合 $\sum\limits_{i=1}^{5} t_i = 20$,可知 $t_i = 4(1 \leqslant i \leqslant 5)$. 于是,将 $a_1, a_2, \cdots, a_{20}$ 平均分为 5 组,令其第 i 组中的 4 个数都取值 i.

具体地说,取 $a_{4i-3} = a_{4i-2} = a_{4i-1} = a_{4i} = i(1 \leqslant i \leqslant 5)$.

下面还需构造一组数 $b_1, b_2, \cdots, b_{20} \in \{1, 2, \cdots, 10\}$,使 $a_i \neq a_j$ 时,$(a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0$,而 $a_i = a_j$ 时,显然有$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$. 这样,便保证恰有 30 个对子$(i, j)$不属于 X.

一个充分条件是 $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ 只与 $(a_i - a_j)$ 的值相关，比如 $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = -(a_i - a_j)^2$，即 $(b_i - b_j) = -(a_i - a_j)$，这取 $b_i = -a_i$ 即可. 但它不满足 $b_i \in \{1, 2, \cdots, 10\}$，再作一个平移：令 $b_i = 11 - a_i$，则构造合乎要求.

综上所述，$|X|$ 的最大值为 160.

与不等式控制思路相近的一个估计方法是扩充存在域，我们称之为“广义不等式控制”.

假定我们欲求具有某种性质的集合 A 的元素个数 $|A|$ 的最大值，可将 A 扩大到 B，使 $A \subseteq B$. 这样，$|B|$ 的上界就是 $|A|$ 的上界. 当然，这里要求 $|B|$ 的上界比 $|A|$ 的上界易求.

怎样将 A 扩大到 B，关键是发掘 A 中元素 a 满足的一个必要条件. 将满足这一必要条件的元素构成的集合作为 B 即可.

下面我们举一个例子来说明.

例 6 设 n 是给定的正奇数，M 是 n 个非零复数的集合，对 M 的任何子集 A，记 $S(A)$ 为 A 中各数的和，其中规定 $S(\varnothing) = 0$. 若 A 是 M 的一个子集，满足对 M 的任何子集 X，都有 $|S(A)| \geqslant |S(X)|$，则称 A 为 M 的一个“最大”子集，简称“大集”. 求 M 的大集个数的最大值.（原创题）

解析 为直观起见，将每个复数用一个从原点出发的向量表示，由向量加法的几何意义不难发现，大集中的向量必定位于某条过原点直线的同一侧（必要条件）. 由此想到，将大集扩充到“直线同侧向量”的集合来估计（扩充存在域）.

为叙述问题方便，先给出如下定义.

过原点 O 作一条直线 L，使 L 不过其中任何向量，称位于 L 一侧的所有向量构成的集合为 M 的一个“半集”，L 称为划分线.

设 M 的大集构成的集合为 ζ，M 的半集构成的集合为 η，我们证明 $\zeta \subseteq \eta$.

对 M 的一个大集 P，设 $S(P)$ 对应的向量为 p，过 O 作与 p 垂直的直线 L，我们证明：P 是直线 L 划分出的半集.

首先，如果直线 L 上含有向量 q，令

$$P' = \begin{cases} P \cup \{q\}, & (q \notin P) \\ P \backslash \{q\}, & (q \in P) \end{cases}$$

则由斜边大于直角边，得

$|S(P')| = |p \pm q| > |p| = |S(P)|$，与 $|S(P)|$ 最大矛盾.

其次，如果直线 L 的包含 p 的一侧有一个向量 q 不属于 P，那么，令 $P' =$

$P\cup\{q\}$,因为 p、q 的夹角为锐角,$|S(P')|=|p+q|>|p|=|S(P)|$,与 $|S(P)|$ 最大矛盾.

最后,如果直线 L 的不包含 p 的一侧有一个向量 q 属于 P,那么,令 $P'=P\backslash\{q\}$,因为 p, q 的夹角为钝角,$|S(P')|=|p-q|>|p|=|S(P)|$,与 $|S(P)|$ 最大矛盾.

所以 P 是半集,$\zeta\subseteq\eta$.

考察所有非零向量所在的直线,这些直线至多将平面划分为 $2n$ 个角形区域,从而最多有 n 对对顶角.

显然,每条划分线得到 2 个半集,且每条划分线对应一对对顶角区域(划分线通过此对顶角区域),所以半集的个数不多于 $2n$.

所以 $|\zeta|\leqslant|\eta|\leqslant 2n$.

下面构造一个集合 M,使 M 恰有 $2n$ 个大集.

从简单情况入手构造,取 n 个单位向量,它们将单位圆 n 等分. 容易证明,这些向量对应的复数构成的集合 M 恰有 $2n$ 个大集.

实际上,设单位圆周上 n 等分点对应的向量按逆时针方向为 $\overrightarrow{OA}_i$($i=1$, 2, $\cdots$, n),则 $2n$ 个半集为 $P_i=\{\overrightarrow{OA}_i, \overrightarrow{OA}_{i+1}, \cdots, \overrightarrow{OA}_{i+k}\}$, $Q_i=\{\overrightarrow{OA}_{i+k+1}, \overrightarrow{OA}_{i+k+2}, \cdots, \overrightarrow{OA}_n\}$($i=1, 2, \cdots, n$),其中 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$.

因为 $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\cdots+\overrightarrow{OA}_n=0$,所以 $S(P_i)=-S(Q_i)$, $|S(P_i)|=|S(Q_i)|$($i=1, 2, \cdots, n$).

又对 $r<t$, $S(P_t)=S(P_r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-r)\theta}$,其中 $\theta=\frac{2\pi}{n}$,所以 $|S(P_t)=S(P_r)|$.

因为子集个数是有限的,从而大集一定存在,且为某个半集. 由上可知,半集的模都相等,所以每一个半集都是大集,从而有 $2n$ 个大集.

综上所述,大集个数的最大值为 $2n$.

习 题 1

1 设 n 为正整数,使得存在正整数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n,满足:

$$x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=100n,$$

求 n 的最大值.(2017 年中国西部数学邀请赛试题)

2 设 $2n$ 个实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n},满足条件 $\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$,求

$$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

的最大值.(2003 年西部数学奥林匹克试题)

3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,求

$$S_n=|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$$

的最大值.

4 设 $x_k(k=1, 2, \cdots, 1991)$ 满足

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|=1991.$$

令 $y_k=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}(k=1, 2, \cdots, 1991)$. 求

$$F=|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|$$

的最大值.(第 25 届全俄数学奥林匹克试题)

5 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{1990}$ 是 $1, 2, \cdots, 1990$ 的一个排列,求

$$F=|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_{1990}|$$

的最大值.(第 24 届全俄数学奥林匹克试题)

6 对数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$,定义集合 $A=\{a_i \mid 1\leqslant i\leqslant m\}$, $B=\{a_i+2a_j \mid 1\leqslant i, j\leqslant m, i\neq j\}$,设 n 为给定的大于 2 的整数,对所有由正整数组成的严格递增的等差数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,求集合 $A\Delta B$ 的元素个数的最小值. 其中,$A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. (2015 年中国西部数学邀请赛试题)

2 累次极值

组合极值的一个特点是极值函数中变动的量较多，难于发现函数的变化趋势. 如果我们先冻结若干个变量，即视若干个变量为常数，则其函数的变化对剩下的变量的依赖关系就趋于明显，由此可比较容易地求出第一次极值. 然后"解冻"原来的变量，进而求出函数的极值.

冻结变量一般有两种方法：一是冻结一个变量，它通常用于求三元函数的极值：对于三元函数 $f(x, y, z)$，若固定变量 z，则函数可看成是关于 x、y 的二元函数. 在此基础上求出二元函数的极值 $G(z)$，再视 z 为变量，对 $G(z)$ 求极值. 它的基本思路是：

$$u = f(x, y, z) = g(x, y) \leqslant G(z) \leqslant C.$$

但在有的情况下，$G(z)$ 的表达式是一种分段函数，则上述思路又可表示为

$$u = f(x, y, z) = g(x, y) \leqslant G(z) = \begin{cases} G_1(z), & (z \in A) \\ G_2(z), & (z \in B) \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} A_1, & (z \in A) \\ A_2, & (z \in B) \end{cases} \Rightarrow u \leqslant \max\{A_1, A_2\}.$$

特别地，如果 $g(x, y) \leqslant G(z) \leqslant C$ 中的等式不同时成立，则固定 z 的取值时，须分类处理(单独讨论 z 的若干特殊取值). 其基本思路为：

$$u = f(x, y, z) = \begin{cases} g_1(x, y) & (z = z_1) \\ \cdots & \cdots \\ g_k(x, y) & (z = z_k) \\ g(x, y) & (z \in A) \end{cases} \leqslant \begin{cases} G_1 & (z = z_1) \\ \cdots & \cdots \\ G_k & (z = z_k) \\ G(z) \leqslant G_A & (z \in A) \end{cases}$$

$\Rightarrow u \leqslant G$，其中 $G = \max\{G_1, G_2, \cdots, G_k, G_A\}$.

二是冻结多个变量，它通常用于求多(超过 3)元函数的极值：在多元函数

的解析式中，选择其中一个字母为主变元，冻结其他的所有变元，则函数变为一元函数 $f(t)$. 至此，先求出 $f(t)$的极值点 $f(t_0)$，再对 $f(t_0)$冻结变元(因为 $f(t_0)$是关于其他变元的函数)，又化为一元函数求解. 如此下去，直至求出函数的极值.

从实质上看，累次极值就是放缩法，只是放缩方式是采用固定变量逐步消元.

我们先看一个求一般函数的极值的例子.

例 1 设 x、y、z 为非负实数，$x+y+z=1$，求 $F=2x^2+y+3z^2$ 的最值.

解析 首先，采用代入消元，有 $y=1-x-z$，所以

$$\begin{aligned}F&=2x^2+1-x-z+3z^2\\&=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+3\left(z-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\\&\geqslant\frac{19}{24}.\end{aligned}$$

又 $F\left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{6}\right)=\frac{19}{24}$，所以 F 的最小值为$\frac{19}{24}$.

下面用求累次极值的方法求 F 的最大值. 固定变量 z，则 $x+y=1-z$(常数).

对 $F=2x^2+y+3z^2$，因为 z 为常数，所以只须求 $2x^2+y=A$ 的最大值，其中 $x+y=1-z$. 为叙述问题方便，令 $1-z=t$，则 $x+y=t$，$0\leqslant x,\ y\leqslant t\leqslant 1$，$t$ 为常数.

因为 $A=2x^2+y=2x^2+t-x$(代入消元)，注意到$0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1$，而二次函数的开口向上，顶点处不是最大值，所以 A 只能在$x=0$ 或 $x=t$ 处取最大值. 所以，

$$g(z)=A_{\max}=\max\{t,\ 2t^2\}=\begin{cases}t, & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right)\\ 2t^2, & \left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}$$

还原成原变量，有

$$g(z)=A_{\max}=\max\{1-z,\ 2(1-z)^2\}=\begin{cases}1-z, & \left(\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1\right)\\ 2(1-z)^2. & \left(0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

再对 $g(z)$ 求最大值.

当 $0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$F \leqslant g(z) + 3z^2 = 2(1-z)^2 + 3z^2 = 5z^2 - 4z + 2 \leqslant 2$.

当 $\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1$ 时，$F \leqslant g(z) + 3z^2 = (1-z) + 3z^2 \leqslant 3$.

由此可见，对一切 x、y、z，恒有 $F \leqslant 3$，其中等式在 $x = y = 0$，$z = 1$ 时成立. 所以 F 的最大值为 3.

综上所述，F 的最小值为 $\frac{19}{24}$，最大值为 3.

注 本题求 F 的最大值时，若对次数与系数进行放缩，则解答异常简单.

实际上，$2x^2 + y + 3z^2 \leqslant 2x + y + 3z \leqslant 3x + 3y + 3z \leqslant 3$.

例 2 有 1988 个单位立方体，用它们（全部或一部分）拼成高为 1，底边长为 a、b、$c(a < b < c)$ 的三个正四棱柱 A、B、C. 现在把 A、B、C 都摆在第一象限，使各个底边都平行于坐标轴，C 的一个顶点在坐标原点，B 在 C 上，且 B 的任何一个单位立方体均在 C 的某个单位立方体上，但 B 的边界不与 C 的任何边界对齐. 同样，A 在 B 上，且 A 的任何一个单位立方体均在 B 的某个单位立方体上，但 A 的边界不与 B 的任何边界对齐. 这样得到一个三层楼. 问：a、b、c 取何值时，能摆出的三层楼的个数最多?（第 11 届奥地利—波兰数学竞赛试题）

解析 由“边界不对齐”，有 $a \leqslant b-2 \leqslant c-4$，这样，$A$ 放在 B 上有 $(b-a-1)^2$ 种放法，B 放在 C 上有 $(c-b-1)^2$ 种放法. 于是，共有 $P = (b-a-1)^2(c-b-1)^2$ 个不同的三层楼. 这样，问题等价于：对所有满足 $1 \leqslant a \leqslant b-2 \leqslant c-4$，$a^2+b^2+c^2 \leqslant 1988$ 的正整数 a、b、c，求 $P = (b-a-1)^2(c-b-1)^2$ 的最大值.

显然，$P \leqslant (b-2)^2(c-b-1)^2$，其中等式在 $a = 1$ 时成立. 于是，只须对所有满足 $3 \leqslant b \leqslant c-2$，$b^2 + c^2 \leqslant 1987$ 的正整数 b、c，求 $Q = (b-2)(c-b-1)$ 的最大值.

容易想到

$$Q \leqslant \frac{[(b-2)+(c-b-1)]^2}{4} = \frac{(c-3)^2}{4}. \qquad (*)$$

至此，只须求 c 的取值范围就能得出 $\frac{(c-3)^2}{4}$ 的最大值. 由条件，有 $c^2 \leqslant 1987 - b^2 \leqslant 1987$，$c \leqslant 44$，所以 $Q \leqslant \frac{(44-3)^2}{4} < 421$，$Q \leqslant 420$.

遗憾的是，等号不能成立，只能改求累次极值.

固定 c，则

$$Q=-b^2+(1+c)b+2-2c$$
$$=-\left(b-\frac{1+c}{2}\right)^2+\frac{(1+c)^2}{4}+2-2c, \qquad (**)$$

由二次函数图象可知，$Q\leqslant\frac{(1+c)^2}{4}+2-2c=A(c)$ $\left(\text{当 } c \text{ 为奇数时}, b=\frac{1+c}{2}\right)$；或 $Q\leqslant\frac{(1+c)^2}{4}-\frac{1}{4}+2-2c=B(c)$ $\left(\text{当 } c \text{ 为偶数时}, b=\frac{c}{2}\right)$.

现在，再求 $A(c)$、$B(c)$的最大值.

由 $b^2+c^2\leqslant 1987$，有 $c\leqslant 44$，于是，当 c 为奇数时，

$$Q\leqslant A(c)\leqslant A(43)=\frac{(1+43)^2}{4}+2-86=400. \qquad ①$$

当 c 为偶数时，

$$Q\leqslant B(c)\leqslant B(44)=\frac{(1+44)^2}{4}-\frac{1}{4}+2-88=420. \qquad ②$$

虽然恒有 $Q\leqslant 420$，但等号不成立. 实际上，要使式②式取等号，则有 $c=44$，且 $b=\frac{c}{2}=22$. 而(44, 22)不满足 $b^2+c^2\leqslant 1987$. 由此可知，不能统一固定 c 求 $Q=(b-2)(c-b-1)$ 的最大值，应对 c 的取值分类讨论，得到不同形式的极值函数.

当 $c=44$ 时，$Q=-b^2+45b-86$. 因为 $b^2\leqslant 1987-c^2=51$，$3\leqslant b\leqslant 7$，所以，当 $b=7$ 时，Q 取最大值 180；

当 $c=43$ 时，$3\leqslant b\leqslant 11$，此时，$Q\leqslant 279$，等式在 $b=11$ 时成立；

当 $c=42$ 时，$3\leqslant b\leqslant 14$，此时，$Q\leqslant 324$，等式在 $b=14$ 时成立；

当 $c=41$ 时，$3\leqslant b\leqslant 17$，此时，$Q\leqslant 345$，等式在 $b=17$ 时成立；

当 $c=40$ 时，$3\leqslant b\leqslant 19$，此时，$Q\leqslant 340$，等式在 $b=19$ 时成立；

当 $c\leqslant 39$ 时，$Q\leqslant\frac{[(b-2)+(c-b-1)]^2}{4}=\frac{(c-3)^2}{4}\leqslant 18^2=324$.

由上可知，恒有 $Q\leqslant 345$ 成立. 又当$(a, b, c)=(1, 17, 41)$时成立等式. 故当$(a, b, c)=(1, 17, 41)$时 P 取最大值 345^2.

例 3 给定正整数 k 及正数 a，又 $k_1+k_2+\cdots+k_r=k$ (k_i 为正整数，$1\leqslant r\leqslant k$)，求 $F=a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.（第 8 届中国数学奥林匹克试题）

解析 本题的实质是将 k 分解为若干个正整数 k_i，使 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$

的值最大. 但其分解出的正整数的个数不确定,因而应分两步走(求累次最值). 先固定 r,假定 k 分解为 r 个正整数 $k_i(i=1, 2, \cdots, r)$,求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值 $f(r)$. 然后再解冻变量 r,求 $f(r)$ 的最大值.

先走第一步. 取 $k=6, r=3$,则 $k_1+k_2+k_3=6, F=a^{k_1}+a^{k_2}+a^{k_3}$.

(1) 若$(k_1, k_2, k_3)=(2, 2, 2)$,则 $F_1=a^2+a^2+a^2=3a^2$;

(2) 若$(k_1, k_2, k_3)=(1, 2, 3)$,则 $F_2=a+a^2+a^3$;

(3) 若$(k_1, k_2, k_3)=(1, 1, 4)$,则 $F_3=a+a+a^4=2a+a^4$.

$F_2-F_1=a-2a^2+a^3=a(1-2a+a^2)=a(1-a)^2\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}F_3-F_2&=a+a^4-a^2-a^3=a(1+a^3-a^2-a)\\&=a(1-a^2)(1-a)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 F_3 最大.

一般地,不难想到,当指数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 尽量集中到某一个指数时,F 的值最大. 即 F 的极值点为$(1, 1, \cdots, k-r+1)$. 我们先证明下面的

引理: 设 $a>0, x, y\in\mathbf{N}^*$, 则 $a^x+a^y\leqslant a^{x+y-1}+a$.

实际上,$a^{x+y-1}+a-a^x-a^y=a[a^{x-1}-1][a^{y-1}-1]\geqslant 0$.

反复利用引理,得

$$\begin{aligned}F&=a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant a+a^{k_1+k_2-1}+a^{k_3}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant a+a+a^{k_1+k_2+k_3-2}+a^{k_4}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant\cdots\leqslant a+a+\cdots+a+a^{k_1+k_2+\cdots+k_r-(r-1)}\\&=(r-1)a+a^{k-r+1}.\end{aligned}$$

下面再对 $1\leqslant r\leqslant k$,求 $f(r)=(r-1)a+a^{k-r+1}$ 的最大值.

令 $f(x)=a(x-1)+a^{k-x+1}$,则因 $a(x-1)$、a^{k-x+1} 都是凸函数,所以 $f(x)$ 是凸函数. 于是 $f(r)\leqslant\max\{f(1), f(k)\}=\max\{a^k, ka\}$.

综上所述,F 的最大值为 $\max\{a^k, ka\}$.

例 4 圆内接四边形 $ABCD$ 的四条边长 AB、BC、CD、DA 的长均为正整数,$DA=2005$, $\angle ABC=\angle ADC=90°$,且 $\max\{AB, BC, CD\}<2005$, 求四边形 $ABCD$ 的周长的最大值和最小值. (2005 年中国国家集训队测试题)

解析 设 $AB=a, BC=b, CD=c$,则 $a^2+b^2=AC^2=c^2+2005^2$,所以 $2005^2-a^2=b^2-c^2=(b+c)(b-c)$,其中 $a, b, c\in\{1, 2, \cdots, 2004\}$.

不妨设 $a\geqslant b$,先固定 a,令 $a_1=2005-a$,则

$$(b+c)(b-c)=2005^2-a^2=a_1(4010-a_1)\qquad ①$$

由 $a^2+b^2>2005^2$，得 $a>\frac{2005}{\sqrt{2}}>1411$，所以

$$1\leqslant a_1<2005-1411=594.$$

所以，由 ① 有 $b+c>\sqrt{(b+c)(b-c)}=\sqrt{a_1(4010-a_1)}$.

当 $a_1=1$ 时，$a=2004$，$(b+c)(b-c)=4009=19\times 211$，所以，$b+c\geqslant 211$，$a+b+c\geqslant 2004+211=2215>2155$；

当 $a_1=2$ 时，$a=2003$，$(b+c)(b-c)=2^4\times 3\times 167$，又 $b+c$ 与 $b-c$ 同奇偶，所以，$b+c\geqslant 2\times 167$，$a+b+c\geqslant 2003+2\times 167>2155$；

当 $a_1=3$ 时，$a=2002$，$(b+c)(b-c)=3\times 4007$，所以，$b+c\geqslant 4007$，$a+b+c\geqslant 2002+4007>2155$；

当 $a_1=4$ 时，$a=2003$，$(b+c)(b-c)=2^3\times 2003$，所以，$b+c\geqslant 2\times 2003$，$a+b+c\geqslant 2001+2\times 2003>2155$；

当$a_1=5$ 时，$a=2000$，$(b+c)(b-c)=3^2\times 5^2\times 89$，所以，$b+c\geqslant 225$，$a+b+c\geqslant 2000+225>2155$；

当 $a_1=6$ 时，$a=1999$，$(b+c)(b-c)=6\times 4004=156\times 154$，所以，$b+c\geqslant 156$，$a+b+c\geqslant 1999+156=2155$；

当 $a_1\geqslant 7$ 时，因为 $b+c>\sqrt{a_1(4010-a_1)}$，所以 $a+b+c>\sqrt{a_1(4010-a_1)}+2005-a_1$，但 $7\leqslant a_1<594$，我们可证明

$$\sqrt{a_1(4010-a_1)}+2005-a_1>2155.$$

实际上，$\sqrt{a_1(4010-a_1)}+2005-a_1>2155\Leftrightarrow\sqrt{a_1(4010-a_1)}>150+a_1\Leftrightarrow -a_1^2+4010a_1>a_1^2+300a_1+150^2\Leftrightarrow a_1^2-1855a_1+11\,250<0$，由二次函数性质可知，此不等式在 $7\leqslant a_1<594$ 时成立.

综上所述，恒有 $a+b+c\geqslant 2155$，于是

$$AB+BC+CD+DA\geqslant 2155+2005=4160.$$

当 $AB=1999$，$BC=155$，$CD=1$ 时等号成立，所以四边形 $ABCD$ 的周长的最小值为 4160.

下面求四边形 $ABCD$ 的周长的最大值：

因为 $a\geqslant b$，$c<2005$，所以 $b+c<a+2005=4010-a_1$，所以由 ① 式知 $a_1<b-c<b+c<4010-a_1$.

由于 a_1 与 $b-c$ 同奇偶，所以 $b-c\geqslant a_1+2$，于是

$$b+c=\frac{a_1(4010-a_1)}{b-c}\leqslant\frac{a_1(4010-a_1)}{a_1+2}.$$

当 $b-c=a_1+2$ 时，

$$a+b+c=2005-a_1+\frac{a_1(4010-a_1)}{a_1+2}=6021-2\left(a_1+2+\frac{4012}{a_1+2}\right),$$

而 $4012=2^2\times17\times59=68\times59$,所以 $a+b+c\leqslant6021-2\cdot(68+59)=5767$.

当 $b-c\neq a_1+2$ 时,$b-c\geqslant a_1+4$,从而

$$a+b+c\leqslant2005-a_1+\frac{a_1(4010-a_1)}{a_1+4},$$

而 $2005-a_1+\dfrac{a_1(4010-a_1)}{a_1+4}\leqslant5767\Leftrightarrow a_1^2-122a_1+7524\geqslant0$.

注意到 $\Delta=122^2-4\times7524<0$,故上式恒成立.

所以,$AB+BC+CD+DA\leqslant5767+2005=7772$,当 $a=1948$, $b=1939$, $c=1880$ 时等号成立,故四边形 $ABCD$ 的周长的最大值为 7772.

习　题　2

1 设 x、y、z 为非负实数，$x+y+z=a$ $(a\geqslant1)$,求 $F=2x^2+y+3z^2$ 的最大值.

2 求一个十进制 3 位数,使它与其各位数字之和的比最小.

3 设 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是非负实数,记 $H=\dfrac{x_1}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}+\dfrac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{(1+x_n)^2}$ 的最大值为 a_{n+1}. 问：当 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 为何值时,H 的值达到最大?并求出 a_n 与 a_{n-1} 之间的关系及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

4 设 n 是给定的整数 $(n>1)$,正整数 a、b、c、d 满足 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}<1$, $b+d\leqslant n$,求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$ 的最大值.

5 设直线 l 与 $\triangle ABC$ 相交于 P、Q 两点,并将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分. 若 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,其中 $c<b<a<2c$,求线段 PQ 长度的最小值.(2015 年第 12 届中国东南地区数学奥林匹克试题)

3 局部调整

这种方法，是先证明所求的极值存在，然后由问题的直观性，猜想出极值点. 最后从反面证明函数在其他点不能达到极值：假设函数在另外的点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处达到极值，经过适当调整（常常是将小的分量变大，大的分量变小），发现函数在$(x_1', x_2', \cdots, x_n')$处的值更大或更小，从而断定它不是极值点. 它的基本步骤是：

证明极值存在——猜出极值点——证明其他点非极值点——得出结论.

例 1 若干个正整数之和为1976，求其积的最大值.（第 18 届 IMO 试题）

分析 先看若干个数的和为 4、5、6、7、8 的简单情形. 使积最大的分拆分别为：

$$4 = 2 + 2,\ 5 = 2 + 3,\ 6 = 3 + 3,\ 7 = 2 + 2 + 3,\ 8 = 2 + 3 + 3.$$

由此猜想：要使积最大，其分拆的和中只含有 2 和 3，且最多有两个 2.

解析 首先，"和"为 1976 的正整数组只有有限个，于是，其中必有一个正整数组使各数的积达到最大.

不妨设使积达到最大的正整数组为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1976$. 此时，数组的各数的积为$P = x_1 x_2 \cdots x_n$. 我们证明，当$P$最大时，可使所有$x_i$具有如下性质：

(1) $x_i \leqslant 3$.

若有某个$x_i \geqslant 4$，则将x_i换作两个数：2 和$x_i - 2$，得到一个新的数组：$(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i - 2, 2, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. 注意到$2(x_i - 2) = 2x_i - 4 \geqslant x_i$，所以，调整后$P$值不减.

(2) $x_i \neq 1$.

若有某个$x_i = 1$，则在数组中任取一个x_j，将 1 和x_j换作一个数：$(1 + x_j)$，得到一个新的数组：$(x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n, x_j + 1)$. 注意到$1 \cdot x_j < 1 + x_j$，所以，调整后$P$值增加.

(3) 其中等于 2 的x_i的个数不多于 2.

若有 $x_i=x_j=x_k=2$，则将 x_i、x_j、x_k 换成两个数：3 和 3，得到一个新的数组. 注意到 $2\times2\times2<3\times3$，所以，调整后 P 值增加.

由此可知，x_i 为 2 或 3，且 2 的个数不多于 2. 注意到 $1976=658\times3+2$，所以，P 的最大值为 $3^{658}\times2$.

注 若将 1976 换作 1975，则由 $1975=658\times3+1=657\times3+2+2$，知 P 的最大值为 $3^{657}\times2^2$.

例 2 空间有 1989 个点，无 3 点共线，将其分成点数互异的 30 组. 在任何 3 个不同的组中各取一点，以这 3 个点为顶点作三角形. 问：要使这种三角形的总数最大，各组的点数应为多少？（第 4 届中国数学奥林匹克试题）

分析 直觉告诉我们，各组点数相等时，三角形总数最大. 但仔细阅读题目又发现，分组要求各组点数互异，于是想到各组点数应当充分接近. 为了强化这一感觉，可用特例加以印证.

先看 10 点分为 3 组的情形. 当各组点数分别为 1、2、7 时，三角形总数 $S=14$，简记为 $S(1,2,7)=14$. 类似地，$S(1,3,6)=18$，$S(1,4,5)=20$，$S(2,3,5)=30$. 其中以 $S(2,3,5)=30$ 最大. 对一般情形，由上述特例可大胆猜想：各组点数 n_i 彼此接近时 S 最大. 所谓各 n_i 彼此接近，是指任意相邻两个 n_t、n_{t+1} 相差尽可能小. 显然，n_t、n_{t+1} 至少相差 1，但能否对所有 n_t、n_{t+1}，都有 $n_{t+1}-n_t=1$？对此进行研究，即可找到解题的途径.

解析 设各组的点数分别为：$n_1<n_2<\cdots<n_{30}$，则三角形的总数为：

$$S=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_in_jn_k,$$

其中 $n_1+n_2+\cdots+n_{30}=1989$.

由于分组的方法是有限的，从而 S 存在最大值. 若 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 使 S 达到最大值，不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$，则 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 具有以下一些性质：

(1) 对任何 $t=1,2,\cdots,29$，都有 $n_{t+1}-n_t\leqslant 2$.

实际上，假定存在 $1\leqslant t\leqslant 29$，使 $n_{t+1}-n_t\geqslant 3$（也可以不妨设 $n_2-n_1\geqslant 3$）. 令 $n_t'=n_t+1$，$n_{t+1}'=n_{t+1}-1$，则各组点数仍互异. 考察：

$$\begin{aligned}S&=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_in_jn_k\\&=n_tn_{t+1}\cdot\sum_{\substack{k\neq t,\,t+1\\1\leqslant k\leqslant 30}}n_k+(n_t+n_{t+1})\cdot\sum_{\substack{j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant j<k\leqslant 30}}n_jn_k+\sum_{\substack{i,\,j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant i<j<k\leqslant 30}}n_in_jn_k,\end{aligned}$$

$$S'=n_t'n_{t+1}'\cdot\sum_{\substack{k\neq t,\,t+1\\1\leqslant k\leqslant 30}}n_k+(n_t'+n_{t+1}')\cdot\sum_{\substack{j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant j<k\leqslant 30}}n_jn_k+\sum_{\substack{i,\,j,\,k\neq t,\,t+1\\1\leqslant i<j<k\leqslant 30}}n_in_jn_k,$$

因为 $n_t'+n_{t+1}'=n_t+n_{t+1}$，而 $n_t'n_{t+1}'=n_tn_{t+1}-n_t+n_{t+1}-1>n_tn_{t+1}$，所以 $S'>S$，矛盾. 所以 $n_{t+1}-n_t=1$ 或 2.

(2) 至少有一个 $t(1\leqslant t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=2$.

实际上，若对所有 t，都有 $n_{t+1}-n_t\neq 2$，而由(1)，有 $n_{t+1}-n_t\leqslant 2$，所以 $n_{t+1}-n_t=1$，即 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 是 30 个连续正整数，它们的和为 15 的倍数. 但 $\sum\limits_{t=1}^{30}n_t=1989$ 不是 15 的倍数，矛盾.

(3) 最多有一个 $t(1\leqslant t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=2$.

实际上，若有 s、$t(1\leqslant s<t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=n_{s+1}-n_s=2$，则令 $n_s'=n_s+1$，$n_{t+1}'=n_{t+1}-1$.（最大的减小，最小的增大），代换后各组的点数仍互异. 考察：

$$
\begin{aligned}
S&=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k\\
&=n_sn_{t+1}\cdot\sum_{\substack{k\neq s,\ t+1\\ 1\leqslant k\leqslant 30}}n_k+(n_s+n_{t+1})\cdot\sum_{\substack{j,\ k\neq s,\ t+1\\ 1\leqslant j<k\leqslant 30}}n_jn_k+\sum_{\substack{i,\ j,\ k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant i<j<k\leqslant 30}}n_in_jn_k,
\end{aligned}
$$

$$
S'=n_s'n_{t+1}'\cdot\sum_{\substack{k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant k\leqslant 30}}n_k+(n_s'+n_{t+1}')\cdot\sum_{\substack{j,\ k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant j<k\leqslant 30}}n_jn_k+\sum_{\substack{i,\ j,\ k\neq t,\ t+1\\ 1\leqslant i<j<k\leqslant 30}}n_in_jn_k,
$$

因为 $n_s'+n_{t+1}'=n_s+n_{t+1}$，而 $n_s'n_{t+1}'=n_sn_{t+1}-n_s+n_{t+1}-1>n_sn_{t+1}$，所以 $S'>S$，矛盾.

由(2)和(3)可知，恰有一个 $t(1\leqslant t\leqslant 29)$，使 $n_{t+1}-n_t=2$.

最后证明，同时满足(1)(2) 和(3) 的数组：$n_1, \cdots, n_{30}$ 是唯一的.

实际上，不妨设 30 个数为：$n_1, n_1+1, n_1+2, \cdots, n_1+t-1, n_1+t+1, n_1+t+2, \cdots, n_1+30$，那么 $n_1+(n_1+1)+(n_1+2)+\cdots+(n_1+t-1)+(n_1+t+1)+(n_1+t+2)+\cdots+(n_1+30)=1989$.

所以 $(n_1+t)+(n_1+1)+(n_1+2)+\cdots+(n_1+t-1)+(n_1+t+1)+(n_1+t+2)+\cdots+(n_1+30)=1989+t$，即

$$1989+t=30n_1+(1+2+\cdots+30)=30n_1+15\times 31.$$

所以 $1974+t=30n_1+15\times 30$，$30\mid 1974+t$，$30\mid 24+t$，但 $1\leqslant t\leqslant 29$，所以 $t=6$.

综上所述，所求的各组的点数为 51，52，…，56，58，59，…，81.

例 3 设点 P 从格点 $A(1, 1)$ 出发，沿格径以最短的路线运动到点 $B(m, n)(m, n\in\mathbf{N}^*)$，即每次运动到另一格点时，横坐标或纵坐标增加 1. 求

点 P 经过的所有格点中两坐标乘积之和 S 的最大值.

解析 设 P 经过的点依次为 $P_1=A(1,1)$, P_2, …, $P_{m+n-1}=B(m,n)$, P_i 的坐标为 (x_i, y_i),则 $S=\sum\limits_{i=1}^{m+n-1}x_iy_i$. 要使 S 最大,由直观,应使 x_i、y_i 尽可能接近. 但不能对任何 i,要求 $x_i=y_i$(否则沿对角线运动). 我们猜想,如果 (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_{m+n-1}, y_{m+n-1}) 使 S 最大,则对任何 $x_i<m$, $y_i<n$,有 $|x_i-y_i|\leqslant 1$.

假设存在 i,使 $|x_i-y_i|>1$ $(x_i<m, y_i<n)$,不妨设 $x_i-y_i>1$. 此时,自然的想法是:将 x_i 减小 1,将 y_i 增大 1. 也就是将点 $P_i(x_i, y_i)$ 调整为 $P_i'(x_i-1, y_i+1)$,其余点不变. 但调整后的路线是否仍合乎条件?显然,要使调整后的路线仍合乎条件,则 P_i 应该满足:$P_{i-1}P_i$ 是横向边且 P_iP_{i+1} 是纵向边. 但 P_i 未必满足这样的条件. 此时,观察路径,发现一定有一个点 $P_t(x_t, y_t)$ 满足这样的条件,即路径中存在这样连续三点 $P_{t-1}(x_{t-1}, y_{t-1})$、$P_t(x_t, y_t)$、$P_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})$,使得 $P_{t-1}P_t$ 是横向边且 P_tP_{t+1} 是纵向边,且 $x_t-y_t>1$.

实际上,若 $P_{i-1}P_i$ 是纵向边,则考察横坐标为 x_i 且纵坐标最小的点. 设其为 $P_t(x_t, y_t)$,其中 $x_t=x_i$, $y_t<y_i$,此时 $x_t-y_t=x_i-y_t>x_i-y_i>1$. 又因为 $x_t>1+y_t>1$,所以到达 $P_t(x_t, y_t)$ 之前一定有横向边. 于是由 y_t 的最小性可知,$P_{t-1}P_t$ 是横向边,P_tP_{t+1} 是纵向边. 若 $P_{i-1}P_i$ 是横向边,则考察纵坐标为 y_i 且横坐标最大的点,设为 $P_t(x_t, y_t)$,其中 $x_t>x_i$, $y_t=y_i$. 此时 $x_t-y_t=x_t-y_i>x_i-y_i>1$. 又因为 $y_i<n$,所以到达 $P_t(x_t, y_t)$ 之后一定还有纵向边. 于是由 x_t 的最大性可知,P_tP_{t+1} 是纵向边,且 $P_{t-1}P_t$ 是横向边.

综上所述,当路径中存在点 $P_i(x_i, y_i)$,其中 $x_i<m$, $y_i<n$,使 $x_i-y_i>1$ 时,则一定存在这样的连续三点 $P_{t-1}(x_{t-1}, y_{t-1})$、$P_t(x_t, y_t)$、$P_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})$,使得 $P_{t-1}P_t$ 是横向边且 P_tP_{t+1} 是纵向边,且 $x_t-y_t>1$. 于是,用 $P_t'(x_t-1, y_t+1)$ 代替 $P_t(x_t, y_t)$,得到的路径仍合乎要求. 但 $(x_t-1)(y_t+1)=x_ty_t+x_t-y_t-1>x_ty_t$. 所以调整后 S 的值增加,矛盾.

由上可知,对路径中的任何一个点 $P_i(x_i, y_i)$,若 $x_i\neq y_i$,则从 $P_i(x_i, y_i)$ 出发的边是唯一的,下一个点是将 $P_i(x_i, y_i)$ 的坐标中较小的一个增加 1. 而 $x_i=y_i$ 时,则从 $P_i(x_i, y_i)$ 出发的边有两种选择,下一个点是将 $P_i(x_i, y_i)$ 的横坐标或纵坐标增加 1. 于是,当 $m\geqslant n$ 时,其路径为:

$A(1,1)\to P_2(2,1)$ 或 $P_2(1,2)\to P_3(2,2)\to P_4(2,3)$ 或 $P_4(3,2)\to P_5(3,3)\to\cdots\to P_{2n-1}(n,n)\to P_{2n}(n+1,n)\to P_{2n+1}(n+2,n)\to\cdots\to P_{m+n-1}(m,n)$.

此时,
$$S_{\max}=\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n-1}i(i+1)+n\sum_{i=1}^{m-n}(n+i)$$

$$=\frac{1}{6}n(3m^2+n^2+3m-1).$$

当 $m<n$ 时，同样可得 $S_{\max}=\frac{1}{6}m(3n^2+m^2+3n-1)$.

例 4　IMO 太空站由 99 个空间站组成，任两个空间站之间有管形通道相连. 规定其中 99 条通道为双向通行的主干道，其余通道严格单向通行. 如果某 4 个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站，就称这些站组成的集合为一个互通四站组.

试求互通四站组个数的最大值，并证明你的结论.（1999 年 CMO 试题）

解析　由正面求"四通组"的个数是比较困难的，因为其条件较为苛刻. 而满足非互通的四站组的条件相对较易. 比如，想象一个空间站"无回路"即可. 由此想到考察从一点引出的所有单向通道，每 3 条这样的通道对应一个非互通的四站组. 当然，还可能有其他的非互通的四站组，但那些非互通的四站组并非必定存在，也就是说，也许可以选择一个方案，使那些非互通的四站组的个数为零，从而可以略去这些非互通的四站组的个数估计.

假设 99 个空间站为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{99}，由 A_i 出发的单向通道条数、指向 A_i 的单向通道条数、通过 A_i 的主干道条数分别为 w_i、l_i、k_i. 由条件，有 $w_i+l_i+k_i=98$，且 $k_1+\cdots+k_{99}=198$，$w_1+\cdots+w_{99}=l_1+\cdots+l_{99}$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{99}w_i=\sum_{i=1}^{99}l_i&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}(w_i+l_i)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}(w_i+l_i+k_i)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}k_i\\&=4752.\end{aligned}$$

因为 A_i 引出 w_i 条单向通道，其中任何 3 条组成一个输出型三面角，这个三面角的四个顶点是一个不互通四站组，而且同一个不互通的四站组不可能包含两个输出三面角，所以非互通四站组的数目 $S\geqslant\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3$.

下面求 $\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3$ 的最小值.

方法 1：首先，由于满足 $w_1+\cdots+w_{99}=4752$ 的数组(w_1, $\cdots$, w_{99})只有有限个，从而最小值一定存在. 其次，从直观猜测，当 $w_1=\cdots=w_{99}=48$ 时，$\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3$ 最小. 反设结论不然，则必有一个 i，使 $w_i<48$，也必有一个 j，使 $w_j>$

48. 将 w_i 改为 w_i+1，w_j 改为 w_j-1，得到一个新的数组，由于

$$\mathrm{C}_{w_i}^3+\mathrm{C}_{w_j}^3-\mathrm{C}_{w_i+1}^3-\mathrm{C}_{w_j-1}^3=\frac{1}{2}(w_j-1)(w_j-2)-\frac{1}{2}w_i(w_i-1)$$
$$>0\text{(因为 } w_j-1>w_i\text{)},$$

所以新数组对应的和式比原数组小，矛盾. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3$ 的最小值为 $99\mathrm{C}_{48}^3$，从而互通的四站组不多于 $\mathrm{C}_{99}^4-99\mathrm{C}_{48}^3=2\ 052\ 072$.

方法 2：由幂平均不等式，有

$$\sum_{i=1}^{99}w_i^3\geqslant\frac{1}{\sqrt{99}}\Big(\sum_{i=1}^{99}w_i^2\Big)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{99}w_i^3-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}w_i^2+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{99}w_i$$
$$\geqslant\frac{1}{6\sqrt{99}}\Big(\sum_{i=1}^{99}w_i^2\Big)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}w_i^2+\frac{1}{3}\times4752.$$

注意到

$$\frac{1}{6\sqrt{99}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}x\Big(\sqrt{\frac{x}{99}}-3\Big)$$

严格递增，且

$$\sum_{i=1}^{99}w_i^2\geqslant\frac{1}{99}\Big(\sum_{i=1}^{99}w_i\Big)^2=228\ 096,$$

故

$$\sum_{i=1}^{99}\mathrm{C}_{w_i}^3\geqslant\frac{1}{6\sqrt{99}}\times228\ 096^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\times228\ 096+\frac{1}{3}\times4752=1\ 712\ 304,$$

从而互通四站组的数目不多于 $\mathrm{C}_{99}^4-1\ 712\ 304=2\ 052\ 072$.

下面证明等号可以成立. 先将所有通道设成单向，方向如下规定：对 $i<j$，若 i、j 同奇偶，则由 A_i 指向 A_j，否则 A_j 指向 A_i. 此时每个点恰发出 49 条单向通道. 现将 99 条通道 A_iA_{i+1}（$i=1,2,\cdots,99$，$A_{100}=A_1$）改为双向通道，则每个点发出和进入的单向通道恰有一条被改为双向通道，故 $w_i=l_i=48$（$i=1,2,\cdots,99$）. 故有中心的四站组个数为 $99\mathrm{C}_{48}^3=1\ 712\ 304$.

下面证明每一非互通四站组都有一个中心（向其他三点引出单向通道的点）. 事实上，设（A_i，A_j，A_k，A_t）是任意一个无中心的非互通四站组（以下仅

用 i 代表 A_i)，若其中有一条双向通道 ij，则 ik 和 jk 不可能都由 k 发出，或都指向 k(若 $j=i+1$ 或 $j=i-1$，则 k 要么比 i、j 都大，要么都小，而 i、j 不同奇偶；若 $\{i, j\}=\{1, 99\}$，则 i, j 同奇偶，但 k 比一个大，比另一个小)，对 t 也一样，故 $ijkt$ 是互通的，矛盾. 故其中无双向通道. 由于 $ijkt$ 不互通，故其中有一个站(设为 i)，它和其余三个站之间的通道都是单向的，而且都指向 i. 故 j、k、t 只有两种情况：要么比 i 小且与 i 同奇偶(称为 Ⅰ 型)，要么比 i 大且奇偶性不同(称为 Ⅱ 型). 如果 j、k、t 都为 Ⅰ 型，则 j、k、t 同奇偶，故其中最小的是 $(ijkt)$ 的一个中心，矛盾. 如果 j、k、t 都为 Ⅱ 型，则 j、k、t 中最小的是 $(ijkt)$ 的一个中心，矛盾. 如果 j、k、t 中有两个，比如 j、k，为 Ⅰ 型，则 t 比 j、k 都大且不同奇偶，故 t 是 $(ijkt)$ 的中心，矛盾. 如果 j、k、t 中有一个，比如 j，为 Ⅰ 型，则 k、t 比 i、j 大且不同奇偶，故 k、t 中必有一个为中心，矛盾. 这就证明了每个非互通四站组必有中心. 于是，非互通四站组共有 1 712 304 个，从而互通四站组有 2 052 072 个.

综上所述，所求最大值为 2 052 072.

例 5　将 2006 表示成 5 个正整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 之和，记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j$. 问：

(1) 当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，取何值时，S 取到最大值?

(2) 进一步地，若对任意 $1\leqslant i, j\leqslant 5$，有 $|x_i-x_j|\leqslant 2$，则当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取何值时，S 取到最小值?说明理由.(2006 年全国高中数学联赛试题)

解析　(1) 首先这样的 S 的值是有界集，故必存在最大值与最小值.

若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，且使 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j$ 取到最大值，则必有

$$|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i, j\leqslant 5) \qquad ①$$

事实上，假设①不成立，不妨假设 $x_1-x_2\geqslant 2$.

则令 $x_1'=x_1-1$, $x_2'=x_2+1$, $x_i'=x_i(i=2, 3, 4)$，有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2$, $x_1'\cdot x_2'=(x_1-1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$.

将 S 改写成

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_i x_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5,$$

同时有 $S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.

于是有 $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$，这与 S 在 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 时取到最大值矛盾，所以必有 $|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i, j\leqslant 5)$. 因此当 $x_1=402$, $x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 时 S 取 到最大值.

(2) 当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\leqslant 2(1\leqslant i, j\leqslant 5)$ 时,只有如下这三种情形满足要求:

(Ⅰ) 402, 402, 402, 400, 400;

(Ⅱ) 402, 402, 401, 401, 400;

(Ⅲ) 402, 401, 401, 401, 401.

而后两种情形是在第一种组情形下作调整:$x_i'=x_i-1$, $x_j'=x_j+1$ 而得到的,根据(1) 的证明可知,每调整一次,和式 $S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} x_ix_j$ 变大,所以 S 在 $x_1=x_2=x_3=402$, $x_4=x_5=400$ 时取到最小值.

例 6 一幢 33 层的大楼有一部电梯停在第一层,它一次最多能容纳 32 人,而且只能在第 2 层至第 33 层中的某一层停一次. 对于每个人来说,他往下走一层楼梯感到 1 分不满意,往上走一层楼梯感到 3 分不满意. 现在有 32 个人在第一层,并且他们分别住在第 2 至第 33 层的每一层,问:电梯停在哪一层,可以使得这 32 个人不满意的总分达到最小? 最小值是多少(有些人可以不乘电梯而直接从楼梯上楼)?

解析 从目标看,可设电梯停在第 x 层. 从条件看,允许"有些人可以不乘电梯而直接从楼梯上楼",可引入容量参数:假定有 y 人不乘电梯直接上楼,由此建立目标函数 $f(x, y)$(不满意的总分).

为了使 $f(x, y)$最小,由直观,不乘电梯的 y 人应该住最低的前面 y 层. 进而发现如下引理.

设 a 是乘电梯的人,住第 s 层;b 是不乘电梯的人,住第 t 层. 若 $s<t$,则交换 a、b 的上楼方式,其余的人不变,则不满意总分 f 不增.

证明:设电梯停在第 x 层,有以下情况:

① $x<s<t$,当 a 乘电梯,b 直接走楼梯上楼时,a 上了 $s-x$ 层,对 f 贡献 $3(s-x)$; b 上了 $t-1$ 层(从第 2 层走到第 t 层),对 f 贡献 $3(t-1)$,于是这两人不满意总分为 $3(s-x)+3(t-1)=3s+3t-3x-3$.

交换两人上楼方式后,等价于交换 s、t,这两者不满意总分也为 $3s+3t-3x-3$,总分不变.

② $x=s<t$,当 a 乘电梯,b 直接走楼梯上楼时,a 上下了 0 层,对 f 贡献 0; b 上了 $t-1$ 层,对 f 贡献 $3(t-1)$,于是这两人不满意总分为 $3(t-1)=3t-3$.

交换两人上楼方式后,a 上了 $s-1$ 层,对 f 贡献 $3(s-1)$; b 上了 $t-s$ 层,对 f 贡献 $3(t-s)$,于是这两人不满意总分为 $3(s-1)+3(t-s)=3t-3$,总分不变.

图书在版编目(CIP)数据

组合极值/冯跃峰编著. —3 版. —上海:华东师范大学出版社,2019
(数学奥林匹克小丛书. 高中卷)
ISBN 978-7-5675-9609-2

Ⅰ.①组… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 231874 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
组合极值(第三版)

编　　著　冯跃峰
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　陈　易
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　13.25
字　　数　237 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9609-2
定　　价　34.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师一小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师一初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师一中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师一高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师一初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师一高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。