数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷

11

Mathematical Olympiad Series

平面几何

范端喜 邓博文 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在 IMO 获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家. 例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯(G. Margulis，俄罗斯，1978 年)、德里费尔德(V. Drinfeld，乌克兰，1990 年)、约克兹(J. G. Yoccoz，法国，1994 年)、博切尔兹(R. Borcherds，英国，1998 年)、高尔斯(T. Gowers，英国，1998 年)、拉福格(L. Lafforgue，法国，2002 年)、佩雷尔曼(G. Perelman，俄罗斯，2006 年)、陶哲轩(Terence Tao，澳大利亚，2006 年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo，越南，2010 年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss，以色列，2010 年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov，俄罗斯，2010 年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani，女，伊朗，2014 年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　　录

1 图形的全等与相似

大家在初中已经接触过全等相似三角形的概念，对于一般的多边形(甚至包括退化形，如线段)，全等和相似的概念是：

如果两个图形可以互相通过平移、旋转、反射得到，则称他们为全等形；如果两个图形可以互相通过平移、旋转、反射、伸缩得到，则称它们为相似形；全等形等价于对应边、角、对角线相等；相似形的充要条件是，对应角相等，对应边成相同比例.

九点圆的概念：所谓九点圆，是指三角形的九个特殊点(垂心在三边上的投影、三边的中点、三个顶点与垂心的连线的中点)，它们在一个圆上.

这个问题在相似观点下几乎是显然的，读者可以试着证明. 如图 1－1 所示，以上提到的 9 个点，全部位于以 OH 的中点为圆心，以$\triangle ABC$ 的外接圆半径的一半为半径的圆上.

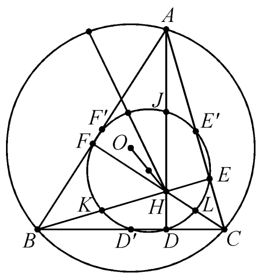


图 1－1

事实上，这两个圆位似，位似中心为 H，位似比为 1∶2.

位似是一种特殊的相似. 所谓位似图形是指：如果两个图形不仅是相似图形，而且对应点的连线相交于一点，对应边互相平行，那么这样的两个图形叫做位似图形，位似图形对应点连线的交点是位似中心，其相似比又叫做它们的位似比.

位似图形的任意一对对应点与位似中心在同一直线上，它们到位似中心的距离之比等于位似比.

位似图形的性质有：

(1) 位似图形的对应线段的比等于位似比.

(2) 位似图形的对应角相等.

(3) 位似图形的对应点连线的交点是位似中心.

(4) 位似图形的面积的比等于位似比的平方.

(5) 位似图形的高、周长的比都等于位似比.

例 1 如图 1－2，设点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，直线 CP 和 AB 相交于点 E，直线 BP 和 AC 相交于点 F，边 AC 的垂直平分线交边 AB 于点 J，边 AB 的垂直平分线交边 AC 于点 K，求证：

$$\frac{CE^2}{BF^2}=\frac{AJ\cdot JE}{AK\cdot KF}.$$

（2005 年女子数学奥林匹克）

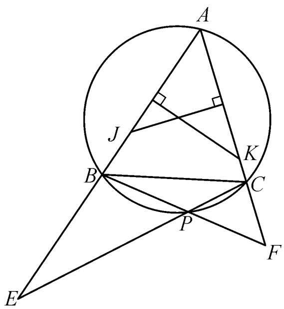


图 1－2

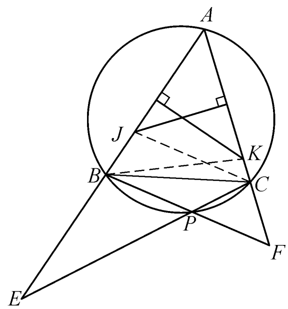


图 1－3

证明 如图 1－3，连结 BK、CJ.

$$\angle E=\angle ABP-\angle BPE,$$

而由 A、B、P、C 四点共圆，可知 $\angle BPE=\angle A$，故 $\angle E=\angle ABP-\angle A$. 又由 $KA=KB$，可知 $\angle A=\angle ABK$，故

$$\angle E=\angle ABP-\angle ABK=\angle KBF. \quad ①$$

同理 $$\angle F=\angle JCE. \quad ②$$

由①、②得 $\triangle JEC\backsim\triangle KBF$.

由此，$$\frac{CE}{BF}=\frac{JE}{KB}=\frac{JE}{AK}, \quad ③$$

$$\frac{CE}{BF}=\frac{JC}{KF}=\frac{AJ}{KF}. \quad ④$$

将③、④两式的左端和右端分别相乘即得结论.

例 2 如图 1－4，已知 PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，PCD 是 $\odot O$ 的一条割线，E 是 AB 与 PD 的交点. 求证：$\frac{PC}{PD}=\frac{CE}{DE}$.（2009 年四川省预赛）

证明 如图 1－5，连结 AC、AD、BC、BD.

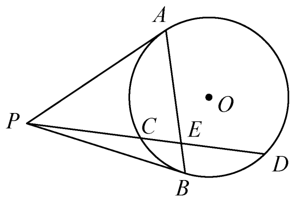


图 1-4

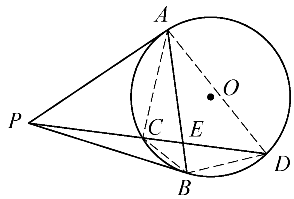


图 1-5

由弦切角定理知，$\angle PAC=\angle PDA$，结合 $\angle APC=\angle DPA$ 知，$\triangle PAC\backsim\triangle PDA$.

于是，$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{PC}{PA}$.

同理，$\triangle PCB\backsim\triangle PBD$. 于是，$\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{PB}{PD}$.

因此，

$$\frac{PC}{PD}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PB}{PD}=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD}$$

又 $\triangle ACE\backsim\triangle DBE$，于是$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AE}{DE}$. 同理有$\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{CE}{AE}$. 因此，

$$\frac{PC}{PD}=\frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD}=\frac{AE}{DE}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{CE}{DE}$$

注 此题的结论即 P、E、C、D 为调和点列（见第 9 章），是一个非常常用的结论. 另外，四边形 $ACBD$ 是一个调和四边形，即 $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}$.

例 3 如图 1-6，圆 Γ_1、Γ_2 内切于点 S，圆 Γ_2 的弦 AB 与圆 Γ_1 相切于点 C，M 是$\overset{\frown}{AB}$（不含点 S）的中点，过点 M 作 $MN\perp AB$，垂足为 N，记圆 Γ_1 的半径为 r.

求证：$AC\cdot CB=2r\cdot MN$.（2009 年女子数学奥林匹克）

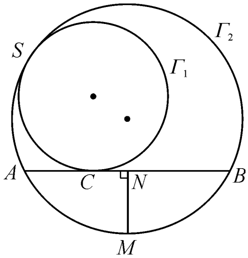


图 1-6

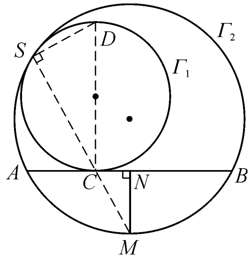


图 1-7

证明 如图 1－7,作出圆 Γ_1 的直径 CD.

因 S 是两圆 Γ_1、Γ_2 的切点,即位似中心,而 C、M 为两圆上的位似对应点,故 S、C、M 三点共线.

由相交弦定理得 $AC \cdot CB = SC \cdot CM$.

又由 $\text{Rt}\triangle SCD \backsim \text{Rt}\triangle NMC$,得

$$SC \cdot CM = CD \cdot MN = 2r \cdot MN.$$

注 此题本身并不难,但利用 S、C、M 三点共线这个命题,并结合圆的帕斯卡(Pascal)定理(见本章例 13)可以证明如下结论.

如图 1－8,设三角形 ABC 的外接圆为圆 O_1,另有一圆 O 同时与 AB、AC、$\overset{\frown}{BC}$相切于点 D、E、F,则 DE 的中点 I 为三角形 ABC 的内心.

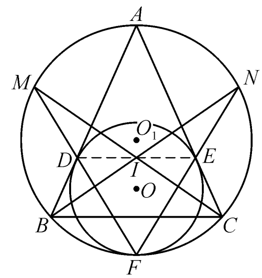


图 1－8

例 4 如图 1－9,凸五边形 $ABCDE$ 满足 $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$,$\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$,$P$ 是 BD 与 CE 的交点.求证:AP 平分线段 CD.

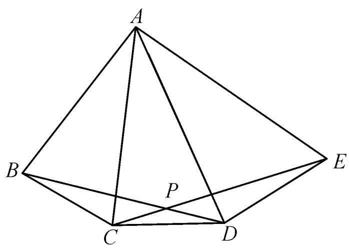


图 1－9

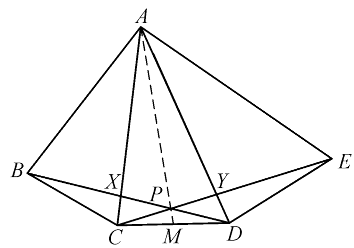


图 1－10

证明 如图 1－10,由条件知 $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle ADE$,所以

$$\text{四边形 } ABCD \backsim \text{四边形 } ACDE. \quad ①$$

设 $AC \cap BD = X$, $AD \cap CE = Y$, 由①知

$$AX : CX = AY : DY. \quad ②$$

设 $AP \cap CD = M$, 由塞瓦(Ceva)定理及②得

$$\frac{CM}{DM} = \frac{CX \cdot AY}{DY \cdot AX} = 1.$$

所以 M 为 CD 的中点,故 AP 平分线段 CD,证毕.

例5 如图 1－11，已知凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB=BC$，$AD=DC$. E 是线段 AB 上一点，F 是线段 AD 上一点，满足 B、E、F、D 四点共圆. 作 $\triangle DPE$ 顺向相似于 $\triangle ADC$；作 $\triangle BQF$ 顺向相似于 $\triangle ABC$. 求证：A、P、Q 三点共线.（2008 年女子数学奥林匹克）

注 两个三角形顺向相似是指它们的对应顶点，同按顺时针方向或同按逆时针方向排列.

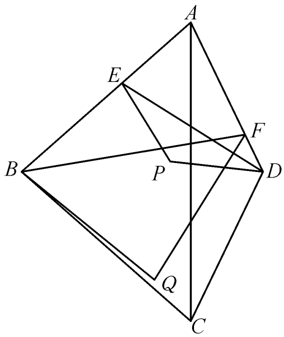


图 1－11

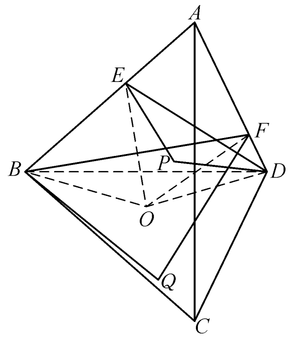


图 1－12

证明 如图 1－12，将 B、E、F、D 四点所共的圆的圆心记作 O，连结 OB、OE、OF、OD、BD.

在 $\triangle BDF$ 中，O 是外心，故 $\angle BOF=2\angle BDA$. 又 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，$\angle CDA=2\angle BDA$. 于是 $\angle BOF=\angle CDA=\angle EPD$.

由此可知 $\qquad \triangle BOF\backsim\triangle EPD.$ ①

另一方面，由 B、E、F、D 四点共圆知

$$\triangle ABF\backsim\triangle ADE. \quad ②$$

综合①、②可知，四边形 $ABOF\backsim$ 四边形 $ADPE$，由此可得

$$\angle BAO=\angle DAP. \quad ③$$

同理，可得四边形 $ABQF\backsim$ 四边形 $ADOE$，于是

$$\angle BAO=\angle DAQ. \quad ④$$

综合③、④可知 A、P、Q 三点共线.

例 6 如图 1－13，设凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于 O 点. $\triangle OAD$、$\triangle OBC$ 的外接圆交于 O、M 两点，直线 OM 分别交 $\triangle OAB$、$\triangle OCD$ 的外接圆于 T、S 两点. 求证：M 是线段 TS 的中点.（2006 年女子数学奥林匹克）

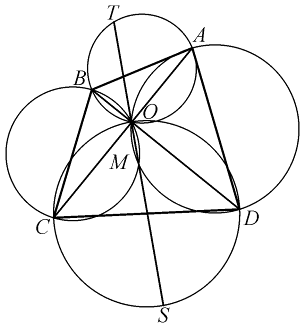


图 1－13

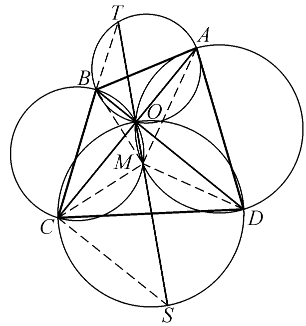


图 1－14

证明　如图 1－14,连结 BT、CS、MA、MB、MC、MD.

则 $\angle BTO=\angle BAO$, $\angle BCO=\angle BMO$, 故 $\triangle BTM\backsim\triangle BAC$, 于是

$$\frac{TM}{AC}=\frac{BM}{BC}. \qquad ①$$

同理, $\triangle CMS\backsim\triangle CBD$, 得

$$\frac{MS}{BD}=\frac{CM}{BC}. \qquad ②$$

①÷②得
$$\frac{TM}{MS}=\frac{BM}{CM}\cdot\frac{AC}{BD}. \qquad ③$$

又 $\angle MBD=\angle MCA$, $\angle MDB=\angle MAC$.

故 $\triangle MBD\backsim\triangle MCA$, 得

$$\frac{BM}{CM}=\frac{BD}{AC}. \qquad ④$$

将④代入③,即得 $TM=MS$.

例 7　如图 1－15,设 D 是锐角$\triangle ABC$ 的边 BC 上一点,以线段 BD 为直径的圆分别交直线 AB、AD 于点 X、P(异于点 B、D),以线段 CD 为直径的圆分别交直线 AC、AD 于点 Y、Q(异于点 C、D). 过点 A 作直线 PX、QY 的垂线,垂足分别为 M、N. 求证:$\triangle AMN$ 相似于$\triangle ABC$ 的充分必要条件是直线 AD 过$\triangle ABC$ 的外心.(2009 年西部数学奥林匹克)

证明　如图 1－16,由已知有 B、P、D、X 及 C、Y、Q、D 分别四点共圆.

故 $\angle AXM=\angle BXP=\angle BDP=\angle QDC=\angle AYN$.

所以 $\mathrm{Rt}\triangle AMX\backsim\mathrm{Rt}\triangle ANY$.

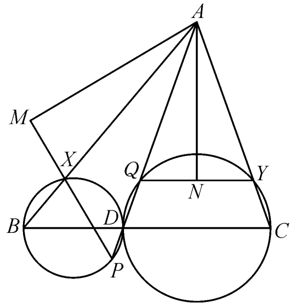


图 1－15

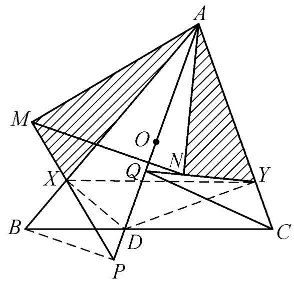


图 1－16

于是 $\angle MAX=\angle NAY$，$\dfrac{AM}{AX}=\dfrac{AN}{AY}$.

从而 $\angle MAN=\angle XAY$，结合 $\dfrac{AM}{AX}=\dfrac{AN}{AY}$，得

$$\triangle AMN\backsim\triangle AXY.$$

故 $\triangle AMN\backsim\triangle ABC\Leftrightarrow\triangle AXY\backsim\triangle ABC\Leftrightarrow XY\parallel BC\Leftrightarrow\angle DXY=\angle XDB$.

而由 A、X、D、Y 四点共圆知

$$\angle DXY=\angle DAY.$$

又 $\angle XDB=90^\circ-\angle ABC$，则

$$\angle DXY=\angle XDB\Leftrightarrow\angle DAC=\angle DAY=90^\circ-\angle ABC.$$

$\Leftrightarrow$直线 AD 过$\triangle ABC$ 的外心.

例 8 已知$\triangle ABC$ 中，O 是三角形内一点，满足 $\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$. 求证：$\triangle ABC$ 三边的长成等比数列.（2010 年北大保送生考试数学试题）

证明 如图 1－17，过 O 作 AC 的平行线分别交 BC、AB 于 D、E. 设 $\angle AOE=\angle 1$，$\angle COD=\angle 2$，则 $\angle OAC=\angle 1=\angle BAO$，而 $\angle OAC=\angle OCA$，所以 $AO=OC$，$AE=OE$，且 $\triangle AOE\backsim\triangle ACO$，于是

$$\frac{AC}{AO}=\frac{OC}{OE}. \qquad ①$$

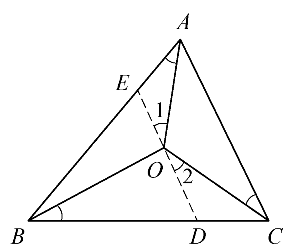


图 1－17

又因为 $DE \parallel AC$，所以

$$\frac{AB}{CB}=\frac{AE}{CD}, \qquad ②$$

再注意到 $\angle 2=\angle OBC$，$\angle BCO=\angle BCO$，所以 $\triangle OCD \backsim \triangle BCO$，于是

$$\frac{OC}{BC}=\frac{CD}{OC}. \qquad ③$$

①×②×③得

$$\frac{AC}{AO}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{OC}{BC}=\frac{OC}{OE}\cdot\frac{AE}{CD}\cdot\frac{CD}{OC},$$

即 $\frac{AC\cdot AB}{BC^2}=1$（$AO=OC$，$AE=OE$），$BC^2=AC\cdot AB$.

所以$\triangle ABC$ 三边的长成等比数列.

例 9 如图 1－18，设四边形 $ABCD$ 是一个凸四边形，I_A、I_B、I_C、I_D 分别是$\triangle DAB$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$ 的内心. 设 $\angle BI_AA+\angle I_CI_AI_D=\pi$ 成立，求证：$\angle BI_BA+\angle I_CI_BI_D=\pi$.（2017 年俄罗斯数学奥林匹克）

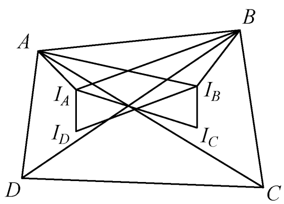


图 1－18

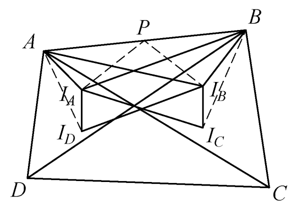


图 1－19

证明 如图 1－19，由条件知 $\angle ABI_B=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ABD+\frac{1}{2}\angle DBC=\angle I_ABD+\angle DBI_C=\angle I_ABI_C$. 同理有 $\angle BAI_A=\angle I_BAI_D$，所以 $\angle BAI_B=\angle I_AAI_D$.

在射线 AB 上取一点 P，使得 $\angle API_B=\angle AI_AI_D$，这样 $\triangle API_B$ 与 $\triangle AI_AI_D$ 顺向相似，进而易知 $\triangle API_A$ 与 $\triangle AI_BI_D$ 顺向相似. 根据条件，

$$\angle BI_AI_C+\angle AI_AI_D=\pi.$$

因为 $\pi>\angle I_ABI_C+\angle BI_AI_C=\angle ABI_B+\pi-\angle API_B$，所以 $\angle API_B>\angle ABI_B$. 因此 P 在线段 AB 上. 进而，

$$\angle BI_AI_C=\pi-\angle AI_AI_D=\pi-\angle API_B=\angle BPI_B.$$

结合 $\angle I_ABI_C=\angle ABI_B$ 知 $\triangle BPI_B$ 与 $\triangle BI_AI_C$ 顺向相似，于是 $\triangle BPI_A$ 与 $\triangle BI_BI_C$ 顺向相似. 因此，

$$\angle BI_BI_C+\angle AI_BI_D=\angle BPI_A+\angle API_A=\pi$$
$$\Rightarrow\angle BI_BA+\angle I_CI_BI_D=\pi.$$

例 10　如图 1－20，在三角形 ABC 的内部有四个半径相等的圆$\odot K_1$、$\odot K_2$、$\odot K_3$、$\odot K_4$，其中$\odot K_1$、$\odot K_2$、$\odot K_3$ 均与三角形 ABC 的两边相切，且与$\odot K_4$ 外切. 证明：三角形 ABC 的内心、外心和 K_4 在一条直线上.

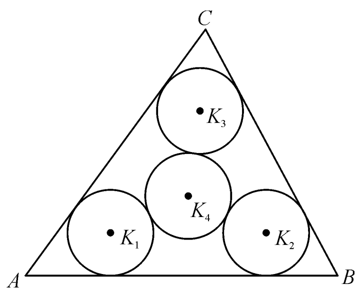


图 1－20

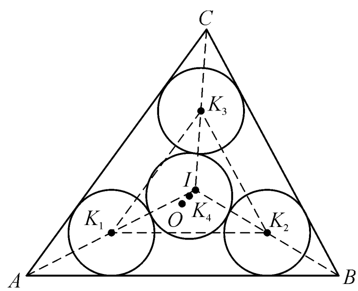


图 1－21

证明　如图 1－21，设三角形的内心为 I，外心为 O，连结 AI、BI、CI、K_1K_2、K_1K_3、K_3K_2、K_1K_4、K_4K_3、K_4K_2.

因为三角形的三边与$\odot K_1$、$\odot K_2$、$\odot K_3$ 相切，所以 K_1 在 AI 上，K_2 在 BI 上，K_3 在CI 上.

设圆的半径为 r，注意到 AB 是$\odot K_1$ 和$\odot K_2$ 的公切线，且$\odot K_1$ 和$\odot K_2$ 是等圆，所以 K_1 和 K_2 到 AB 的距离都是 r.

故 $K_1K_2\parallel AB$，同理，$K_2K_3\parallel BC$，$K_1K_3\parallel AC$.

所以
$$\frac{IK_1}{IA}=\frac{IK_2}{IB}=\frac{IK_3}{IC}.$$

故三角形 ABC 与三角形 $K_1K_2K_3$ 关于 I 位似.

因为 $K_1K_4=K_4K_3=K_4K_2=2r$，所以 K_4 是三角形 $K_1K_2K_3$ 的外心. 又 O 是三角形 ABC 的外心，所以 I、K_4、O 在一条直线上. 因此原题得证.

例 11　如图 1－22，求证：欧拉(Euler)公式，即 $OI^2=R^2-2Rr$. 其中 R、r 分别为$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 和内切圆$\odot I$ 的半径.

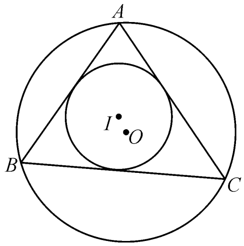


图 1-22

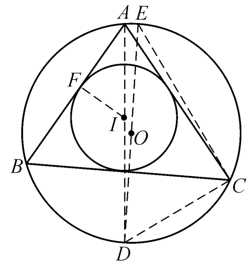


图 1-23

证明 如图 1-23，连结 AI 并延长交 $\overset{\frown}{BC}$ 于 D，作 D 的对径点 E，作 $IF\perp AB$ 于 F，连结 EC、DC、ED，则有 $\angle EDC=\frac{\pi-A}{2}=\angle AIF$，于是 $\triangle EDC\backsim\triangle AIF$.

不难证明 $\angle ICD=\angle CID=\frac{A+C}{2}$，即 $DI=DC$，由 $\triangle EDC\backsim\triangle AIF$，知

$$2Rr=IF\cdot ED=AI\cdot CD=AI\cdot DI=R^2-OI^2.$$

最后一步用到了圆幂定理，有关圆幂定理读者可参看第 6 章.

例 12 求证：圆外切四边形的圆心位于两条对角线的中点的连线上.（牛顿定理）

证明 如图 1-24，设四边形 $ABCD$ 的内切圆圆心为 O，AC 的中点为 M，BD 的中点为 N，设 AB 的延长线和 DC 的延长线交于点 E. 过 O 作与 OE 垂直的 XY 交 AB 于 X，交 CD 于 Y. 注意到 $\angle AOD=\angle AXY=\angle DYX=90^\circ+\frac{1}{2}\angle AED$，$\angle OAD=\angle OAX$，$\angle ODA=\angle ODY$，$\triangle AOD\backsim\triangle AXO\backsim\triangle OYD$，从而 $\angle OAX=\angle DOY$，$\angle AOX=\angle ODY$.

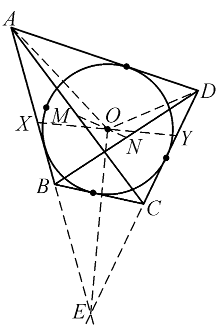


图 1-24

即 $\triangle OAX\backsim\triangle DOY$，于是

$$AX\cdot DY=OX\cdot OY.$$

同理可证， $$BX\cdot CY=OX\cdot OY.$$

于是，$AXB\backsim CYD$（这里的相似是两条线段间的相似，X 分 AB 的比等于 Y 分 CD 的比），注意到两个相似图形对应顶点的连线的中点，构成的图形与原来两个图形相似，则有 MON 构成线段，且有 $\frac{MO}{ON}=\frac{AX}{XB}=\frac{CY}{YD}$.

注 这是一个非常困难的问题，在想到上述解答之前，笔者始终没能找到简单的解答. 如果线段的相似超出读者的理解，也可以用解析几何中的定比分点公式来刻画这些点的位置.

例 13 如图 1－25，(帕斯卡定理)考虑圆内接六边形 $ADBFCE$，设直线 AB 与 DE 的交点为 P，BC 与 EF 的交点为 Q，CD 与 FA 的交点为 R，求证：P、R、Q 三点共线.

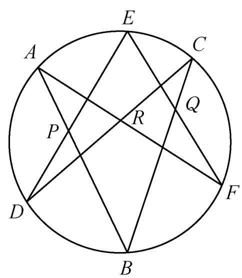


图 1－25

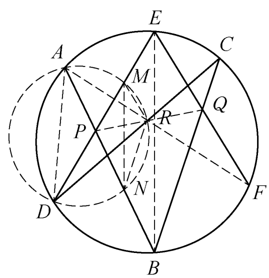


图 1－26

证明 如图 1－26，作$\triangle ARD$ 的外接圆交 DE 于 M，交 AB 于 N. 连结 AD、MN、MR、NR、EB，则 $\angle PMN = \angle DMN = \angle DAN = \angle DAB = \angle DEB = \angle PEB$，$\angle MPN = \angle EPB$.

因此，$\triangle PMN \backsim \triangle PEB$.

又 $\angle NMR = \angle NAR = \angle BAF = \angle BEF = \angle BEQ$，同理 $\angle MNR = \angle EBQ$. 于是 $\triangle MNR \backsim \triangle EBQ$.

注意到它们的相似比一样，于是四边形 $PMRN$ 与四边形 $PEQB$ 相似，因此，$\triangle PMR \backsim \triangle PEQ \Rightarrow \angle MPR = \angle EPQ = \angle MPQ$. 于是 P、R、Q 三点共线.

注 帕斯卡定理不仅对圆成立，还对任意的圆锥曲线(包括椭圆、双曲线、抛物线)成立. 帕斯卡定理还有关于两条直线的形式，称为帕普斯定理.

帕普斯定理：若 A、E、C 为直线 l_1 上的顺次三点，D、B、F 为直线 l_2 上的顺次三点，则 AB 与 DE 的交点 P、BC 与 EF 的交点 Q、CD 与 FA 的交点 R 三点共线.

证明见最后一章的面积方法例题.

例 14 如图 1－27，设$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于点 P、Q，它们的一条外公切线分别切$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 A、B. 过点 A、B 的圆 Ω 分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 D、C. 求证：$\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{DP}{DQ}$.(2016 年西部数学邀请赛)

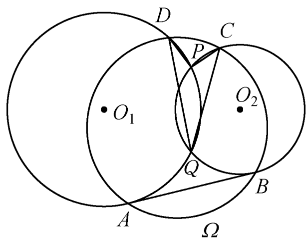


图 1－27

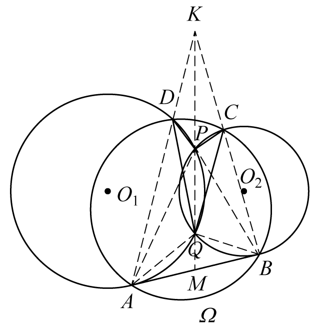


图 1－28

证明　如图 1－28，由蒙日定理(见第 6 章性质 3)，直线 AD、QP、BC 交于一点，设为 K，连结 AP、AQ、BP、BQ. 因为 $\triangle KPD \backsim \triangle KAQ$，所以 $\dfrac{DP}{AQ}=\dfrac{KP}{KA}$.

因为 $\triangle KPA \backsim \triangle KDQ$，所以 $\dfrac{AP}{DQ}=\dfrac{KA}{KQ}$.

将两式相乘得，

$$\frac{AP\cdot DP}{AQ\cdot DQ}=\frac{KP}{KQ}.$$

同理，

$$\frac{BP\cdot CP}{BQ\cdot CQ}=\frac{KP}{KQ}.$$

从而

$$\frac{AP\cdot DP}{AQ\cdot DQ}=\frac{BP\cdot CP}{BQ\cdot CQ}. \qquad ①$$

延长 PQ 交 AB 于点 M，因为 $\triangle AQM \backsim \triangle PAM$，所以

$$\frac{AQ}{AP}=\frac{AM}{PM}=\frac{QM}{AM},$$

于是

$$\left(\frac{AQ}{AP}\right)^2=\frac{AM}{PM}\cdot\frac{QM}{AM}=\frac{QM}{PM}.$$

同理，$\left(\dfrac{BQ}{BP}\right)^2=\dfrac{QM}{PM}$，从而 $\left(\dfrac{AQ}{AP}\right)^2=\left(\dfrac{BQ}{BP}\right)^2$，故 $\dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{BQ}{BP}$.

结合①知 $\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{DP}{DQ}$.

习 题 1

1 三角形内切圆的圆心和它的顶点的连线，将原三角形分成三个三角形. 若它们之中的一个三角形与原三角形相似，求原三角形三个角的度数.

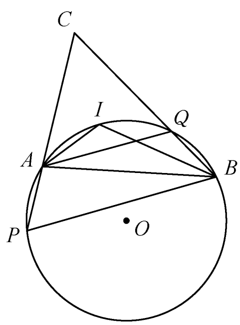
2 设 X、Y、Z 分别是菱形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD 上的点，且使得 $XY \parallel AZ$. 证明：XZ、AY、BD 三线共点.

3 如图，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\triangle AIB$ 的外接圆圆心为 O，CA 与 $\odot O$ 交于点 P，CB 与 $\odot O$ 交于点 Q. 求证：$AQ \parallel BP$.（2017 年辽宁省预赛）

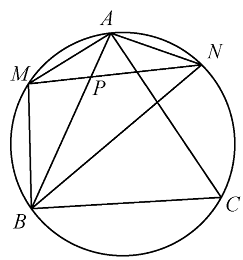
4 如图，点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，且 $AB = 4AP$，过点 P 的直线 MN 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 M、N，且点 A 是 $\overset{\frown}{MN}$ 的中点. 求证：

(1) $\triangle ABN \backsim \triangle ANP$；

(2) $BM + BN = 2MN$.（2016 年江苏省预赛）

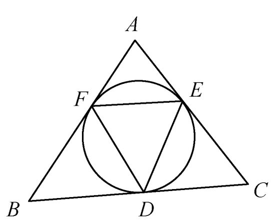


（第 3 题）

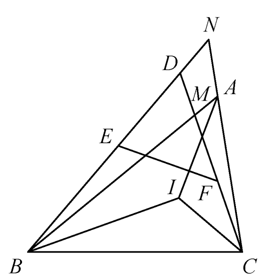


（第 4 题）

5 如图，$\triangle ABC$ 的内切圆与三角形的三边相切于点 D、E、F. 求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似当且仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形.（2016 年安徽省预赛）



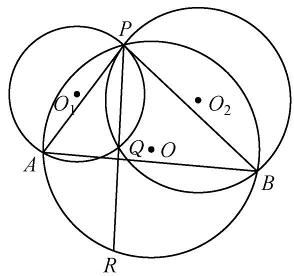
（第 5 题）



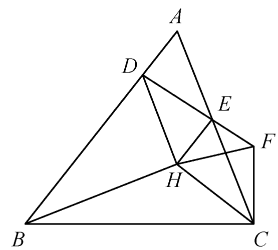
（第 6 题）

6 如图,$\triangle ABC$ 的内心为 I,过 B 作 $l_B \perp CI$,过 C 作 $l_C \perp BI$,D 是 l_B、l_C 的交点.若 $l_B \cap AC = N$, $l_C \cap AB = M$,线段 BN、CM 的中点分别为 E、F.求证:$EF \perp AI$.(2017 年山西省预赛)

7 如图,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 P、Q 两点,$\odot O_1$ 的弦 PA 与 $\odot O_2$ 相切,$\odot O_2$ 的弦 PB 与 $\odot O_1$ 相切,直线 PQ 与 $\triangle PAB$ 的外接圆 $\odot O$ 交于另一点 R.求证:$PQ = QR$.(2016 年陕西省预赛)



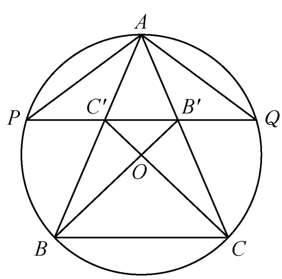
(第 7 题)



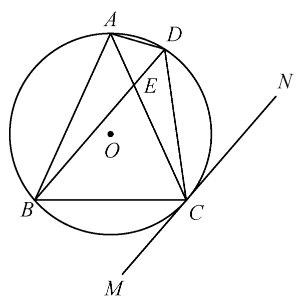
(第 8 题)

8 如图,设 H 为锐角$\triangle ABC$ 的垂心,过点 H 作垂直于 BH 的直线交 AB 于点 D,过点 H 作垂直于 CH 的直线交 AC 于点 E,过点 C 作垂直于 BC 的直线交 DE 于点 F.求证:$FH = FC$.(2015 年陕西省预赛)

9 如图,锐角$\triangle ABC$ 的外心为 O,直线 BO 和 CO 分别与边 AC、AB 相交于点 B'、C'.直线 $B'C'$交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 P、Q.若 $AP = AQ$,求证:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.(2014 年辽宁省预赛)



(第 9 题)



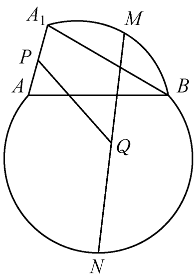
(第 10 题)

10 如图,$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$, $AB = AC$,直线 MN 切 $\odot O$ 于点 C,弦 $BD \parallel MN$, AC 与 BD 相交于点 E.

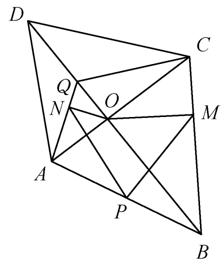
(1) 求证:$\triangle ABE \cong \triangle ACD$;

(2) 若 $AB = 6$, $BC = 4$,求 AE.(2010 年黑龙江省预赛)

11 如图,⊙O 的一条弦 AB 将圆分成两部分,M、N 分别是两段弧的中点,以点 B 为旋转中心,将弓形 AMB 按顺时针方向旋转一个角度形成弓形 A_1MB. 若 AA_1 的中点为 P,MN 的中点为 Q,求证:$MN=2PQ$.(2010 年江西省预赛)



(第 11 题)

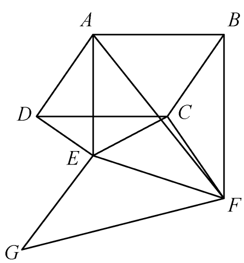


(第 12 题)

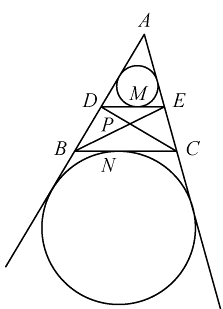
12 如图,四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O, $\angle DCO$ 的平分线 CQ 交线段 OD 于点 Q,连结 AQ. 作 $OM\perp BC$ 于点 M, $ON\perp AQ$ 于点 N, P 为 AB 边的中点,$OA=\dfrac{OB\cdot OD}{OC+CD}$. 求证:$PM=PN$.(2010 年吉林省预赛)

13 如图,已知平行四边形 $ABCD$ 满足 $\angle BAD>90^\circ$,向四边形外部作 $\triangle DCE$ 和 $\triangle BCF$,使得 $\angle EDC=\angle CBF$, $\angle DCE=\angle BFC$. 连结 EF,向 $\triangle CEF$ 的外部作 $\triangle EFG$,使得 $\angle EFG=\angle CFB$, $\angle FEG=\angle CED$. 求证:$\triangle AEF\cong\triangle GEF$.(2009 年安徽省预赛)

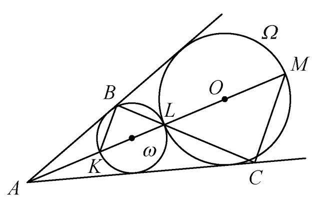
14 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$DE\parallel BC$, $\triangle ADE$ 的内切圆与 DE 相切于点 M, $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆切 BC 于点 N,点 P 是 BE 与 CD 的交点,求证:M、N、P 三点共线.(2009 年江苏省预赛)



(第 13 题)



(第 14 题)

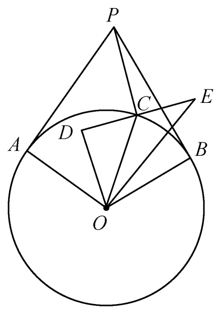


(第 15 题)

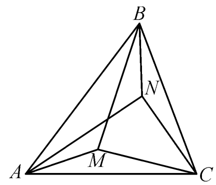
15 如图,圆 ω 与 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 AB 相切,圆 Ω 与 $\triangle ABC$ 的边 AC 相切,与 AB 的延长线相切,且与 ω 相切于边 BC 上的 L 点. 直线 AL 分别与圆

ω 和 Ω 第二次相交于点 K 和 M. 现知 $KB /\!/ CM$,求证:$\triangle LCM$ 是等腰三角形.(2018 年俄罗斯数学奥林匹克)

16 如图,PA、PB 为$\odot O$ 的切线,点 C 在劣弧$\overset{\frown}{AB}$上(不含点 A、B). 过点 C 作 PC 的垂线 l,与$\angle AOC$ 的平分线交于点 D,与$\angle BOC$ 的平分线交于点 E. 求证:$CD = CE$.(2013 年西部数学邀请赛)



(第 16 题)

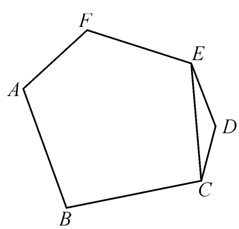


(第 17 题)

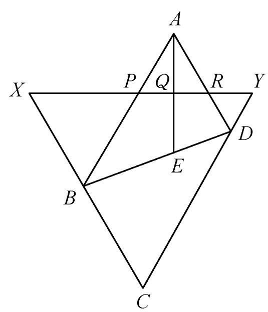
17 如图,设 M、N 是$\triangle ABC$ 内部的两个点,且满足 $\angle MAB = \angle NAC$,$\angle MBA = \angle NBC$. 求证:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

18 如图,设 $ABCDEF$ 是凸六边形,$\angle B + \angle D + \angle F = 360°$,且 $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$. 求证:$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1$.



(第 18 题)



(第 19 题)

19 如图,在凸四边形 $ABCD$ 中 $\angle BAD + 2\angle BCD = \pi$,$\angle BAD$ 的平分线交线段 BD 于点 E,线段 AE 的中垂线与直线 CB、CD 分别交于点 X、Y. 求证:A、X、C、Y 四点共圆.(2017 年女子数学奥林匹克)

2 三角形中的几个重要定理及其应用

梅涅劳斯定理、塞瓦定理是平面几何中的两个极其重要的定理. 它们常常结合起来使用.

1. 梅涅劳斯定理：一直线与$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA或它们的延长线分别相交于点X、Y、Z，则$\dfrac{AX}{XB}\cdot\dfrac{BY}{YC}\cdot\dfrac{CZ}{ZA}=1$.

如图2-1，过点A、B、C分别作直线XYZ的垂线，设垂足分别为点Q、P、S. 由三角形相似的有关知识有：

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AQ}{BP},\frac{BY}{YC}=\frac{BP}{CS},\frac{CZ}{ZA}=\frac{CS}{AQ}.$$

三式左右两边分别相乘即得.

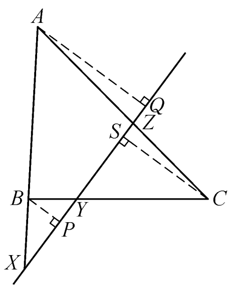


图 2-1

梅涅劳斯定理的逆定理也成立，即“在$\triangle ABC$的边AB、AC、BC(或其延长线上)分别取点X、Z、Y. 如果$\dfrac{AX}{XB}\cdot\dfrac{BY}{YC}\cdot\dfrac{CZ}{ZA}=1$，那么$X$、$Y$、$Z$三点共线”. 梅涅劳斯定理的逆定理常用来证明三点共线.

2. 塞瓦定理通常可分为边元塞瓦定理和角元塞瓦定理.

边元塞瓦定理：如图2-2，在$\triangle ABC$内任取一点P，直线AP、BP、CP分别与边BC、CA、AB相交于点D、E、F，则$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$.

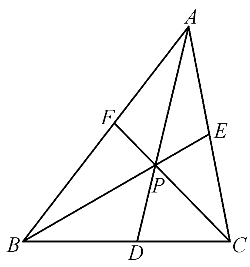


图 2-2

事实上，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle CPD}}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$(用到了分比性质).

同理：$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABP}}$，$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BPC}}$. 三式左右两边分别相乘即得.

边元塞瓦定理的逆定理也成立. 即“在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上分别

取点 D、E、F，如果 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$. 那么直线 AD、BE、CF 三线相交于同一点. 边元塞瓦定理的逆定理通常被用来证明三线共点."

角元塞瓦定理：如图 2－3，设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点，三条线段 AD、BE、CF 交于一点 M. 则

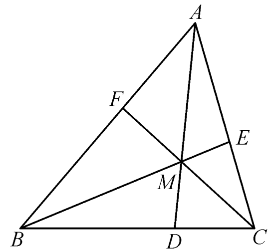


图 2－3

（1）对 $\triangle ABC$ 与点 M，有

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC}\cdot\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle MCB}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}=1;$$

（2）对 $\triangle MBC$ 与点 A，有

$$\frac{\sin\angle BMD}{\sin\angle DMC}\cdot\frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle ACB}\cdot\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle ABM}=1;$$

（3）对 $\triangle MCA$ 与点 B，有 $\frac{\sin\angle CME}{\sin\angle EMA}\cdot\frac{\sin\angle MAB}{\sin\angle BAC}\cdot\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BCM}=1$；

（4）对 $\triangle MAB$ 与点 C，有 $\frac{\sin\angle AMF}{\sin\angle FMB}\cdot\frac{\sin\angle MBC}{\sin\angle CBA}\cdot\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle CAM}=1$.

像边元塞瓦定理的情形一样，角元塞瓦定理的逆定理也成立.

如图 2－4，过 $\triangle ABC$ 的三个顶点各引一条异于三角形三边的直线 AD、BE、CF. 若

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA}=1,$$

则 AD、BE、CF 三线共点或互相平行.

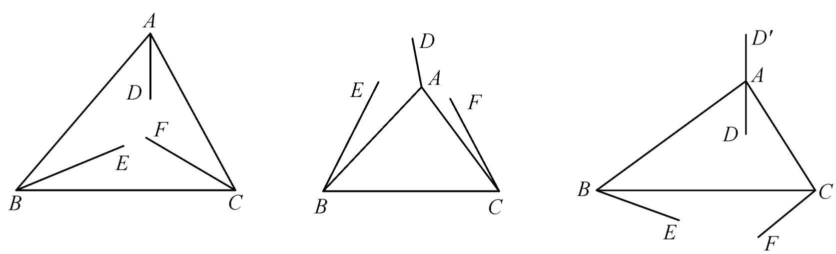


图 2－4

3. 斯台沃特定理：如图 2－5，在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任取一点 D，若 $BD=u$，$CD=v$，$AD=t$，则 $t^2=\frac{b^2u+c^2v}{a}-uv$.

事实上，由余弦定理

$\cos\angle ADB = \frac{u^2+t^2-c^2}{2ut}$, $\cos\angle ADC = \frac{t^2+v^2-b^2}{2tv}$.

又 $\cos\angle ADB = -\cos\angle ADC$，所以

$$t^2 = \frac{b^2u+c^2v}{a} - uv.$$

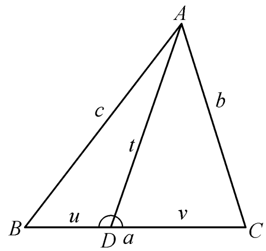


图 2－5

特别地，当 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线时，$u=v=\frac{1}{2}a$，令 $AD=m_a$，则 $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$，此即中线长公式；当 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线时，由内角平分线性质：$u=\frac{ac}{b+c}$，$v=\frac{ab}{b+c}$. 设 $AD=t_a$，可得

$$t_a = \frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bc\cdot p(p-a)},$$

这里 $p=\frac{a+b+c}{2}$. 此即角平分线长公式.

例 1 如图 2－6，D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点，且 $DE\cap AB=F_0$、$EF\cap BC=D_0$、$FD\cap CA=E_0$. 求证：AD、BE、CF 三线共点，当且仅当 D_0、E_0、F_0 三点共线.（2011 年山西省预赛）

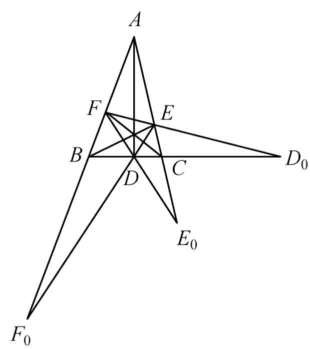


图 2－6

证明 由梅涅劳斯定理，D_0、E_0、F_0 三点共线，当且仅当 $\frac{AE_0}{E_0C}\cdot\frac{CD_0}{D_0B}\cdot\frac{BF_0}{F_0A}=1$. 而由塞瓦定理，$AD$、$BE$、$CF$ 三线共点，当且仅当

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

因为直线 D_0EF 截 $\triangle ABC$，得到 $\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD_0}{D_0C}=1$，所以，

$$\frac{CD_0}{D_0B}=\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}.$$

同理，由直线 E_0DF 截 $\triangle ABC$，得 $\frac{CE_0}{E_0A}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}$.

直线 F_0DE 截$\triangle ABC$,得 $\frac{BF_0}{F_0A}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}$.

因此,$\frac{AE_0}{E_0C}\cdot\frac{CD_0}{D_0B}\cdot\frac{BF_0}{F_0A}=\left(\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\right)^2$.

由于该等式中的一端取值为 1,当且仅当另一端取值为 1,故结论得证.

注 本题更一般的形式是著名的笛沙格定理:对于一般的$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$,若 $EF\cap BC=D_0$、$FD\cap CA=E_0$、$DE\cap AB=F_0$,则 AD、BE、CF 三线共点,当且仅当 D_0、E_0、F_0 三点共线. 也可以使用梅涅劳斯定理证明.

例 2 如图 2-7, 在$\triangle ABC$ 中,D 为线段 BC 上一点,满足 $AD\perp BC$,取边 AB 上的点 E,边 AC 上的点 F,连结 DE、DF,满足 $\angle EDA=\angle FDA$,求证:AD、BF、CE 三线共点.

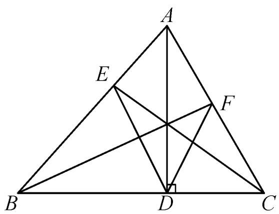


图 2-7

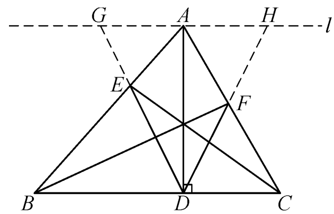


图 2-8

证法一 如图 2-8,过 A 作 BC 的平行线 l,并与 DE 的延长线、DF 的延长线分别交于点 G、H,$l\parallel BC$ 以及 $AD\perp BC$,则 $l\perp AD$. 结合 $\angle EDA=\angle FDA$,得到 A 为等腰三角形 DGH 的底边 GH 上的中点,即 $GA=AH$,所以 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=\frac{AG}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{AH}=\frac{AG}{AH}=1$.

由边元塞瓦定理的逆定理知 AD、BF、CE 三线共点.

证法二 设 $\angle EDA=\angle FDA=\alpha$,由正弦定理,在$\triangle AED$ 中有

$$\frac{\sin\alpha}{AE}=\frac{\sin\angle AED}{AD}.$$

同理在$\triangle BED$ 中,有 $\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{BE}=\frac{\sin\angle BED}{BD}$, 由于 $\sin\angle AED=\sin\angle BED$, 所以

$$\tan\alpha=\frac{BD\cdot AE}{BE\cdot AD},\qquad ①$$

同理在$\triangle ADF$、$\triangle DFC$ 中,

$$\tan\alpha=\frac{CD\cdot AF}{CF\cdot AD}, \qquad ②$$

将①②两式左右两边分别相除得到，$1=\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\Leftrightarrow AD$、$BF$、$CE$ 三线共点.

注 此题的证法十分巧妙，貌似简单，实则不易想到. 读者在学习了有关调和点列的知识后，应当就不难想到该解法了.

例 3 如图 2－9，A_1、B_1、C_1 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上任意一点，G_a、G_b、G_c 分别为$\triangle AB_1C_1$、$\triangle BC_1A_1$、$\triangle CA_1B_1$ 的重心. 求证：AG_a、BG_b、CG_c 三线共点的充要条件是 AA_1、BB_1、CC_1 三线共点.

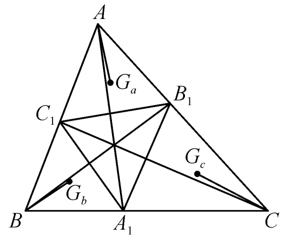


图 2－9

证明 由角元塞瓦定理知 AG_a、BG_b、CG_c 三线共点的充分必要条件为

$$\left(\frac{\sin\angle BAG_a}{\sin\angle G_aAC}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle ACG_c}{\sin\angle G_cCB}\right)\cdot\left(\frac{\sin\angle CBG_b}{\sin\angle G_bBA}\right)=1, \qquad ①$$

又注意到 G_a 为$\triangle AB_1C_1$ 的重心，因此 $S_{\triangle G_aAC_1}=S_{\triangle G_aAB_1}$，即

$$\frac{1}{2}\cdot AC_1\cdot AG_a\cdot\sin\angle C_1AG_a=\frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot AG_a\cdot\sin\angle B_1AG_a,$$

由此可得 $\frac{\sin\angle BAG_a}{\sin\angle G_aAC}=\frac{\sin\angle C_1AG_a}{\sin\angle G_aAB_1}=\frac{AB_1}{AC_1}$.

同理可知 $\frac{\sin\angle ACG_c}{\sin\angle G_cCB}=\frac{A_1C}{B_1C}$，$\frac{\sin\angle CBG_b}{\sin\angle G_bBA}=\frac{BC_1}{BA_1}$.

则①式等价于 $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$，由塞瓦定理知，这就等价于 AA_1、BB_1、CC_1 三线共点.

注 此题完美地将塞瓦定理的边元形式与角元形式结合起来. 角元塞瓦定理的使用是自然的.

下面介绍两道典型的角元塞瓦定理使用的范例.

例 4 如图 2－10，P 为$\triangle ABC$ 内一点，使得 $\angle PAB=10°$，$\angle PBA=20°$，$\angle PCA=30°$，$\angle PAC=40°$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.（1996 年美国数学奥林匹克）

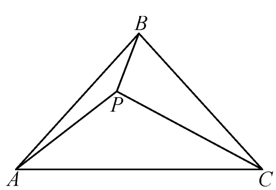


图 2－10

证明 设 $\angle ACB = x$，则 $\angle BCP = x - 30°$.

对$\triangle APC$和点B应用角元塞瓦定理有

$$1 = \frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle BCA}\cdot\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle BAP}$$

$$= \frac{\sin 150°}{\sin 100°}\cdot\frac{\sin(x-30°)}{\sin x}\cdot\frac{\sin 50°}{\sin 10°}.$$

则 $\dfrac{\sin(x-30°)}{\sin x} = \dfrac{2\cos 10°\cdot\sin 10°}{\sin 50°} = \dfrac{\sin(50°-30°)}{\sin 50°}$.

故 $\cos 30° - \cot x\cdot\sin 30° = \cos 30° - \cot 50°\cdot\sin 30°$.

所以 $\cot x = \cot 50°$，因此 $x = 50°$.

又因为 $\angle BAC = 10° + 40° = 50° = x = \angle ACB$，所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

例 5 如图 2－11，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle CAB = 30°$，$\angle ABD = 26°$，$\angle ACD = 13°$，$\angle DBC = 51°$. 求$\angle ADB$的度数.

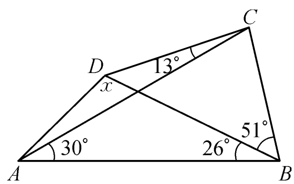


图 2－11

解 设 $\angle ADB = x$，由于 $\angle CAB = 30°$，$\angle ABD = 26°$，$\angle DBC = 51°$，$\angle ACD = 13°$，则有 $\angle ACB = 73°$，$\angle BDC = 43°$，所以 $\angle ADC = x + 43°$.

对$\triangle BCD$和点A应用角元塞瓦定理有

$$1 = \frac{\sin\angle DCA}{\sin\angle ACB}\cdot\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle ABD}\cdot\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle ADC}$$

$$= \frac{\sin 13°}{\sin 73°}\cdot\frac{\sin 77°}{\sin 26°}\cdot\frac{\sin x}{\sin(x+43°)},$$

则 $$\frac{\sin(x+43°)}{\sin x} = \frac{\sin 13°\cdot\sin 77°}{\sin 73°\cdot\sin 26°} = \frac{\sin 13°\cdot\cos 13°}{\sin 73°\cdot\sin 26°}$$

$$= \frac{1}{2\sin 73°} = \frac{\sin 30°}{\sin 73°} = \frac{\sin 150°}{\sin 107°} = \frac{\sin(107°+43°)}{\sin 107°}.$$

故 $\cos 43° + \cot x\cdot\sin 43° = \cos 43° + \cot 107°\cdot\sin 43°$.

所以，$\angle ADB = x = 107°$.

例 6 如图 2－12，A_1、B_1、C_1 是$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$上的点，满足 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1$，P 是$\odot O$上的任意一点. 若直线 PA_1 交直线 BC 于 D，PB_1 交 AC 于 E，PC_1 交 AB 于 F.

证明：D、E、F 三点共线.（2015 年山西省预赛）

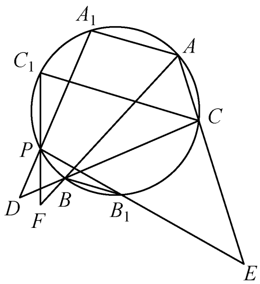


图 2-12

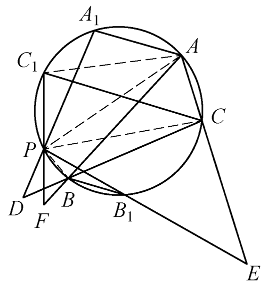


图 2-13

证明 如图 2-13,连结 AP、BP、CP、AC_1. 由于 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1$,则 $\angle APE = \angle APB_1 = \angle ABB_1 = \angle BAA_1 = \angle BPD$, $\angle A_1PC_1 = \angle C_1AA_1 = \angle AC_1C = \angle APC$, $\angle APF = \pi - \angle APC_1 = \pi - \angle CPA_1 = \angle CPD$, $\angle BPF = \angle BAC_1 = \angle CPB_1 = \angle CPE$. 由于点 D、E、F 分别在直线 BC、CA、AB 上,所以

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA} &= \frac{S_{\triangle PAE}}{S_{\triangle PEC}}\cdot\frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle PDB}}\cdot\frac{S_{\triangle PBF}}{S_{\triangle PFA}} = \frac{S_{\triangle PAE}}{S_{\triangle PDB}}\cdot\frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle PFA}}\cdot\frac{S_{\triangle PBF}}{S_{\triangle PEC}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}PA\cdot PE\cdot\sin\angle APE}{\frac{1}{2}PB\cdot PD\cdot\sin\angle BPD}\cdot\frac{\frac{1}{2}PC\cdot PD\cdot\sin\angle CPD}{\frac{1}{2}PA\cdot PF\cdot\sin\angle APF}\cdot\\
&\quad\ \frac{\frac{1}{2}PB\cdot PF\cdot\sin\angle BPF}{\frac{1}{2}PC\cdot PE\cdot\sin\angle CPE}\\
&= \frac{PA\cdot PE}{PB\cdot PD}\cdot\frac{PC\cdot PD}{PA\cdot PF}\cdot\frac{PB\cdot PF}{PC\cdot PE}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

故由梅涅劳斯定理的逆定理,知 D、E、F 三点共线.

注 也可以这样考虑,对于六边形 PC_1A_1ACB 使用帕斯卡定理(第 1 章例 13)知 $PC_1 \cap BA = F$, $CB \cap A_1P = D$, $C_1C \cap AA_1 = \infty$ 共线. 注意到该无穷远点为 AA_1、BB_1、CC_1 共同经过的无穷远点. EF 也通过该点,即 $EF /\!/ AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1$. 同理可证 $ED /\!/ AA_1$. 于是 D、E、F 三点共线.

例 7 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $\angle AED = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle EAD$, $BD \cap CE = F$. 求证: $AF \perp BE$.

证明 如图 2-14,过点 A 作 $AH \perp BE$ 于 H,于是只需证明 AH、BD、

CE 三线共点.

因为 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$，所以

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DE}.$$

又 $\angle BAC=\angle EAD$，所以 $\angle BAD=\angle CAE$. 所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACE}$. 故

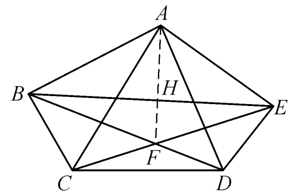


图 2 - 14

$$\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CEA}=\frac{AE\cdot EC}{AB\cdot BD}. \quad ①$$

在$\triangle BCE$ 和$\triangle BDE$ 中，应用正弦定理有

$$\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle EBC}=\frac{BC}{EC},\ \frac{\sin\angle BED}{\sin\angle DBE}=\frac{BD}{ED}. \quad ②$$

又 $\angle HAB=\angle EBC$，$\angle EAH=\angle BED$，故

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\angle EAH}{\sin\angle HAB}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle CEA}\\
=&\frac{\sin\angle BED}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle CEA}\\
=&\frac{\sin\angle BED}{\sin\angle DBE}\cdot\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CEA}\cdot\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle EBC}\\
=&\frac{BD\cdot AE\cdot EC\cdot BC}{ED\cdot AB\cdot BD\cdot EC}=\frac{AE\cdot BC}{ED\cdot AB}=1.
\end{aligned}$$

由关于$\triangle ABE$ 的角元塞瓦定理的逆定理知 AH、BD、CE 三线共点 F.

因为 $AH\perp BE$，所以 $AF\perp BE$.

例 8 如图 2 - 15，点 P、Q 是$\triangle ABC$ 的外接圆上(异于 A、B、C)的两点，点 P 关于直线 BC、CA、AB 的对称点分别是 U、V、W，连结 QU、QV、QW 分别与直线 BC、CA、AB 交于点 D、E、F.

求证：(1) U、V、W 三点共线；

(2) D、E、F 三点共线.

证明 (1) 如图 2 - 16，从点 P 向 BC、CA、AB 作垂线，设垂足分别为 X、Y、Z.

由对称性知 XY 为$\triangle PUV$ 的中位线，故 $UV \parallel XY$.

同理 $VW\parallel YZ$，$WU\parallel XZ$.

又由西姆松定理(见第 5 章)，知 X、Y、Z 三点共线.

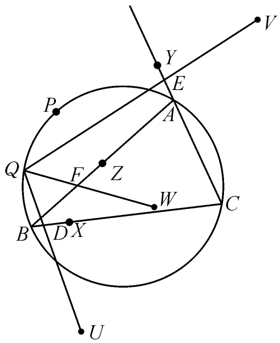


图 2－15

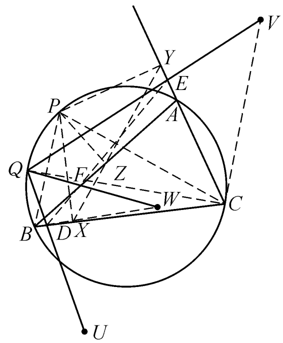


图 2－16

故 U、V、W 三点共线.

(2) 因为 P、C、A、B 四点共圆，所以 $\angle PCE = \angle ABP$. 所以

$$\angle PCV = 2\angle PCE = 2\angle ABP = \angle PBW.$$

又 $\angle PCQ = \angle PBQ$，故 $\angle PCV + \angle PCQ = \angle PBW + \angle PBQ$，即

$$\angle QCV = \angle QBW.$$

从而 $\dfrac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}} = \dfrac{CV \cdot QC}{QB \cdot BW}$.

同理 $\dfrac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}} = \dfrac{AW \cdot AQ}{CQ \cdot CU}$，$\dfrac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}} = \dfrac{BQ \cdot BU}{AQ \cdot AV}$.

所以 $\dfrac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}} \cdot \dfrac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}} \cdot \dfrac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}} = 1$，(这里注意到 $CU = CV$，$AW = AV$，$BU = BW$). 于是

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCU}} \cdot \frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}} \cdot \frac{S_{\triangle WAQ}}{S_{\triangle WBQ}} = 1.$$

故由梅涅劳斯定理的逆定理知 D、E、F 三点共线.

例 9 如图 2－17，一圆与 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的交点依次为 D_1、D_2、E_1、E_2、F_1、F_2. 线段 D_1E_1 与 D_2F_2 交于点 L，E_1F_1 与 D_2E_2 交于点 M，F_1D_1 与 F_2E_2 交于点 N. 求证：AL、BM、CN 三线共点. (2005 年中国数学奥林匹克)

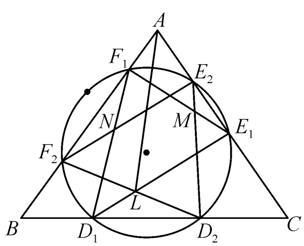


图 2－17

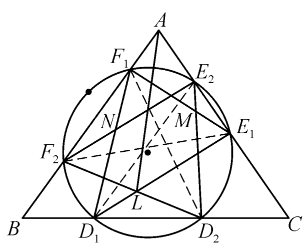


图 2－18

证明 如图 2-18,连结 D_1E_2、E_1F_2、F_1D_2,于是有

$$\angle D_1E_1F_2=\angle D_1E_2F_2,\ \angle D_2F_2F_1=\angle D_2D_1F_1,$$

$$\angle E_2E_1D_1=\angle E_2D_2D_1,\ \angle E_1F_2D_2=\angle E_1F_1D_2,$$

$$\angle F_2F_1E_1=\angle F_2E_2E_1,\ \angle F_1D_2E_2=\angle F_1D_1E_2.$$

分别对$\triangle AF_2E_1$ 和点 L,$\triangle BD_2F_1$ 和点 M,$\triangle CE_2D_1$ 和点 N 应用角元塞瓦定理有

$$\frac{\sin\angle F_2AL}{\sin\angle LAE_1}\cdot\frac{\sin\angle AE_1L}{\sin\angle LE_1F_2}\cdot\frac{\sin\angle E_1F_2L}{\sin\angle LF_2A}=1.$$

则
$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle D_1E_1F_2}{\sin\angle E_2E_1D_1}\cdot\frac{\sin\angle D_2F_2F_1}{\sin\angle E_1F_2D_2}. \quad ①$$

同理,有

$$\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}=\frac{\sin\angle E_1F_1D_2}{\sin\angle F_2F_1E_1}\cdot\frac{\sin\angle E_2D_2D_1}{\sin\angle F_1D_2E_2}. \quad ②$$

$$\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle NCB}=\frac{\sin\angle F_1D_1E_2}{\sin\angle D_2D_1F_1}\cdot\frac{\sin\angle F_2E_2E_1}{\sin\angle D_1E_2F_2}. \quad ③$$

①×②×③并利用前面的六个等式,有

$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle LAC}\cdot\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle NCB}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle MBA}=1.$$

由角元塞瓦定理的逆定理知 AL、BM、CN 三线共点.

例 10 在平面上给定四个点 A_1、A_2、A_3、A_4,其中任意三点不共线,使得 $A_1A_2\cdot A_3A_4=A_1A_3\cdot A_2A_4=A_1A_4\cdot A_2A_3$.

记 O_i 是$\triangle A_kA_jA_l$ 的外心,这里 $\{i, j, k, l\}=\{1, 2, 3, 4\}$. 假设对每个下标 i,都有 $A_i\neq O_i$. 证明:四条直线 A_iO_i 共点或平行.

证明 如图 2-19,若 A_1、A_2、A_3、A_4 构成一个凹四边形.

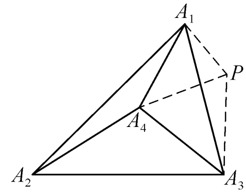


图 2-19

不妨设 A_4 在$\triangle A_1A_2A_3$ 中,如图.

作 $\triangle A_1A_3P\backsim\triangle A_1A_2A_4$,则 $\angle A_3A_1P=\angle A_4A_1A_2$.

于是 $\angle A_4A_1P=\angle A_2A_1A_3$,且 $\dfrac{A_1P}{A_1A_3}=\dfrac{A_1A_4}{A_1A_2}$,

则 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle A_1A_4P$,因此 $\dfrac{A_4P}{A_2A_3}=\dfrac{A_1A_4}{A_1A_2}$,即

图书在版编目(CIP)数据

平面几何/范端喜,邓博文编著.—2版.—上海:华东师范大学出版社,2019
(数学奥林匹克小丛书:第三版.高中卷)
ISBN 978-7-5675-9502-6

Ⅰ.①平… Ⅱ.①范…②邓… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第241402号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
平面几何(第二版)

编　　著　范端喜　邓博文
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
责任编辑　石　战
责任校对　陈　易
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　16
字　　数　289千字
版　　次　2020年4月第二版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9502-6
定　　价　38.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。