

第 18.1 节 隐函数

1. 方程 $\cos x + \sin y = e^x$ 能否在原点的某邻域内确定隐函数 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$?

2. 方程 $xy + z \ln y + e^z = 1$ 在点 $(0, 1, 1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数?

3. 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

(1) $x^2y + 3x^4y^3 - 4 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) $e^{-xy} + 2x - e^y = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(4) a + \sqrt{a^2 - y^2} = ye^x, u = \frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} \quad (a > 0), \text{求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2};$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(5) x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 5 = 0, \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y};$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

(6) $z=f(x+y+z,xyz)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

4. 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = f(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

加群: 882056847 或 826633750。

教师qq: 1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

5. 设 $u = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $z = f(x, y)$ 是由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 所确定的隐函数, 求 u_x 及 u_{xx} .

加群: 882056847 或 826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq: 1374599466, 微博: 博硕数学。

加群: 882056847 或 826633750。

6. 设 $F(x, y, z)$ 可以确定连续可微隐函数: $x=x(y, z), y=y(x, z), z=z(x, y)$, 试证: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -1$ (偏导数不再是偏微分的商!).

7. 求由下列方程所确定的隐函数的偏导数:

(1) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$, 求 z 对于 x, y 的一阶与二阶偏导数;

(2) $F(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

8. 证明: 设方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 则当 $F_y \neq 0$ 时, 有

$$F''_y y'' = - \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}.$$

9. 设 f 是一元函数, 试问对 f 提出什么条件, 方程

$$2f(xy) = f(x) + f(y)$$

在点 $(1, 1)$ 的邻域内就能确定出惟一的 y 为 x 的函数?

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 18.2 节 隐含数组

1. 试讨论方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2}, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

在点(1, -1, 2)的附近能否确定形如 $x=f(z), y=g(z)$ 的隐函数组?

2. 求下列方程组所确定的隐函数组的导数:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx};$$

$$(2) \begin{cases} x-u^2-yv=0, \\ y-v^2-xu=0, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$(3) \begin{cases} u=f(ux, v+y), \\ v=g(u-x, v^2y), \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数：

$$(1) \begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases} \text{ 求 } u_x, v_x, u_y, v_y;$$

$$(2) \begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2, \\ z = u^3 + v^3, \end{cases} \text{ 求 } z_x.$$

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程组

$$x = e^{uv}, y = e^{u-v}, z = uv$$

(u, v 为参量) 所定义的函数, 求当 $u=0, v=0$ 时的 dz .

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

5. 设以 u, v 为新的自变量变换下列方程:

(1) $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 设 $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, $v = \arctan \frac{y}{x}$;

(2) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

6. 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$u = f(x,y,z,t), \quad g(y,x,t) = 0, \quad h(x,t) = 0$$

所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

7. 设 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$ 和 $x=x(s,t), y=y(s,t), z=z(s,t)$ 都有连续的一阶偏导数, 证明

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

8. 设 $u = \frac{y}{\tan x}, v = \frac{y}{\sin x}$. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$ 时, u, v 可以用来作为曲线坐标, 解出 x, y 作为 u, v 的函数, 画出 xy 平面上 $u=1, v=2$ 所对应的坐标曲线, 计算 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ 和 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 并验证它们互为倒数.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

9. 将以下式中的 (x, y, z) 变换成球面坐标 (r, θ, φ) 的形式:

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。

10. 设 $u = \frac{x}{r^2}, v = \frac{y}{r^2}, w = \frac{z}{r^2}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(1) 试求以 u, v, w 为自变量的反函数组;

(2) 计算 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$.

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 18.3 节 几何应用

1. 求平面曲线 $x^{2a} + y^{2a} = a^{2a}$ ($a > 0$) 上任一点处的切线方程, 并证明这些切线被坐标轴所截取的线段等长.

2. 求下列曲线在所示点处的切线与法平面:

(1) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$, 在点 $t = \frac{\pi}{4}$;

(2) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, x^2 = 3x^2 + y^2$, 在点 $(1, -1, 2)$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 求下列曲面在所示点处的切平面与法线:

(1) $y - e^{2x-z} = 0$, 在点 $(1, 1, 2)$;

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 在点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$.

4. 证明对任意常数 ρ, φ , 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 与锥面 $x^2 + y^2 = \tan^2 \varphi \cdot z^2$ 是正交的.

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面,使它平行于平面
 $x+4y+6z=0$.

6. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一點,使曲线在此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

7. 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 沿曲线

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^3$$

在该点切线的方向导数.

8. 试证明:函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度恰好是 F 的等值线在点 P_0 的法向量(设 F 有连续一阶偏导数).

9. 确定正数 λ , 使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在某一点相切(即在该点有公共切平面).

10. 求 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面,使其垂直于平面 $x-y-\frac{1}{2}z=2$ 和 $x-y-z=2$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

11. 求两曲面

$$F(x,y,z) = 0, G(x,y,z) = 0$$

的交线在 xy 平面上的投影曲线的切线方程.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 18.4 节 条件极值

1. 应用拉格朗日乘数法,求下列函数的条件极值:

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$, 若 $x + y - 1 = 0$;

(2) $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$, 若 $xyz = c^4$ (其中 $x, y, z, t > 0, c > 0$);

(3) $f(x, y, z) = xyz$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

2. (1) 求表面积一定而体积最大的长方体;

3. 求空间一点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

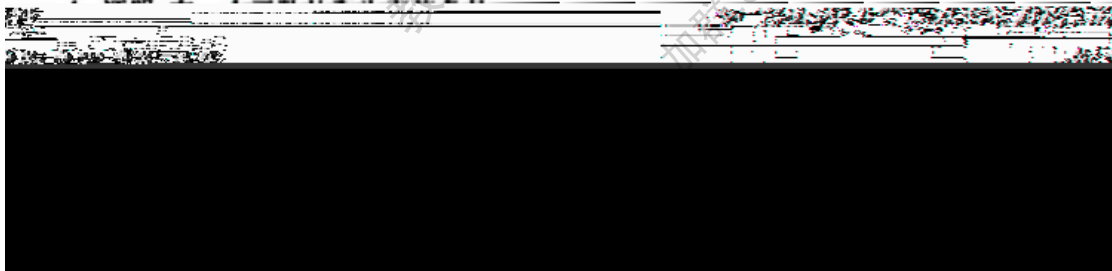
加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。



加群:882056847或826633750。

5. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为已知的 n 个正数, 求
在限制条件
下的最大值.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

6. 求函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

在条件

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = 1 \quad (a_k > 0, k = 1, 2, \dots, n)$$

下的最小值.

7. 利用条件极值方法证明不等式

$$xy^2z^3 \leq 108 \left(\frac{x+y+z}{6} \right)^6, \quad x>0, y>0, z>0.$$

提示:取目标函数 $f(x, y, z) = xy^2z^3$, 约束条件为 $x+y+z=a$ ($x>0, y>0, z>0, a>0$).

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。