9.1 定积分概念

1. 按定积分定义证明：$\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a)$.

2. 通过对积分区间作等分分割，并取适当的点集$\{\xi_i\}$，把定积分看作是对应的积分和的极限，来计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；提示：$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}(0 < a < b)$.（提示：取 $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$）

9.2 牛顿—莱布尼茨公式

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 (2x+3)dx$;

(2) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx$;

(3) $\int_{e}^{e^{2}} \frac{dx}{x\ln x}$;

(4) $\int_{0}^{1} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}dx$;

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan^{2}x dx$;

(6) $\int_{4}^{9}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

(7) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}(\ln x)^{2}dx$.

2. 利用定积分求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2n^2}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

3. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上可积, F 在 $[a,b]$ 上连续,且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

9.3 可积积分

1. 证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的分割，则 $\sum_{T'} \omega'_i \Delta x'_i \leq \sum_{T} \omega_i \Delta x_i$.

2. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，$[\alpha,\beta] \subset [a,b]$，则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积.

3. 设 f,g 均为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数. 证明：若仅在 $[a,b]$ 中有限个点处 $f(x) \neq g(x)$，则当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，g 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

4. 设f在$[a,b]$上有界，$\{a_n\}\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 证明：若$f$在$[a,b]$上只有$a_n(n=1,2,\cdots)$为其间断点，则$f$在$[a,b]$上可积.

5. 证明：若f在区间Δ上有界，则

$$\sup_{x\in\Delta}f(x)-\inf_{x\in\Delta}f(x)=\sup_{x',x''\in\Delta}|f(x')-f(x'')|.$$

6. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\in(0,1]\end{cases}$$

在[0,1]上可积.

7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有定义,且对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 上的可积函数 g,使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad x\in[a,b].$$

证明 f 在 $[a,b]$ 上可积.

9.4 定积分的性质

1. 证明：若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 ξ_i,η_i 是 T 所属小区间 Δ_i 中的任意两点，$i=1,2,\cdots,n$.

2. 不求出定积分的值，比较下列各对定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$；

3. 证明下列不等式：

(1) $\dfrac{\pi}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x}} < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$;

(2) $1 < \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x < e$;

(3) $1 < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \dfrac{\pi}{2}$;

(4) $3\sqrt{e} < \int_{e}^{4e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx < 6.$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 不恒等于零,证明 $\int_a^b (f(x))^2 dx > 0.$

5. 设 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积,证明

$$M(x) = \max_{x\in[a,b]} \{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min_{x\in[a,b]} \{f(x), g(x)\}$$

在 $[a,b]$ 上也都可积.

6. 试求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上各点极径的平均值.

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\geqslant m>0$. 证明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

8. 进一步证明积分第一中值定理(包括定理 9.7 和定理 9.8)中的中值点 $\xi\in(a,b)$.

9. 证明：若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，则必存在某实数 $\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

10. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b xf(x)\,dx=0$，则在 (a,b) 上至少存在两点 x_1,x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$。又若 $\int_a^b x^2f(x)\,dx=0$，这时 f 在 (a,b) 上是否至少有三个零点？

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$。证明：

(1) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$；

(2) 又若$f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$,则又有

$$f(x)\geqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, x\in[a,b].$$

12. 证明：

(1) $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=1.$

8.5 微积分学基本定理·定积分（续）

1. 设 f 为连续函数，u,v 均为可导函数，且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$. 证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$. 证明 $F''(x)=f(x),x\in[a,b]$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

4. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x \mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$；

(4) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^{3/2}}$；

(5) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$；

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 \arcsin x \mathrm{d}x$;

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$;

(9) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \mathrm{d}x (a > 0)$;

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \mathrm{d}\theta$.

5. 设f在$[-a,a]$上可积. 证明：

(1) 若f为奇函数,则$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

(2) 若f为偶函数,则$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

6. 设f为$(-\infty,+\infty)$上以p为周期的连续周期函数. 证明对任何实数a,恒有

$$\int_{a}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 设f为连续函数. 证明：(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

8. 设 $J(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$ (m,n 为正整数). 证明：

$$J(m,n) = \frac{n-1}{m+n}J(m,n-2) = \frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),$$

并求 $J(2m,2n)$.

9. 证明：若在$(0,+\infty)$上f为连续函数，且对任何$a>0$有

$$g(x)=\int_{x}^{ax}f(t)\mathrm{d}t=\text{常数},x\in(0,+\infty),$$

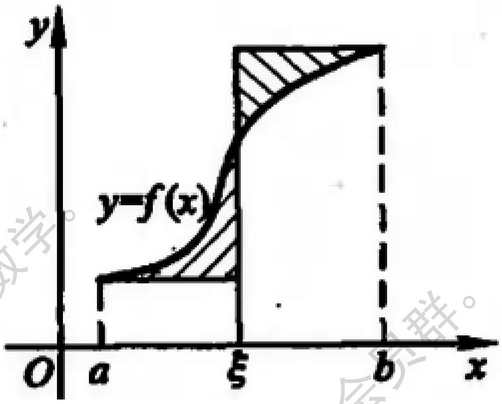
则$f(x)=\frac{c}{x},x\in(0,+\infty)$，$c$为常数.

10. 设f为连续可微函数，试求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x}(x-t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

并用此结果求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x}(x-t)\sin t\mathrm{d}t.$

11. 设 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格增的连续曲线(图 9-12). 试证存在 $\xi\in(a,b)$, 使图中两阴影部分面积相等.



12. 设 f 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数. 证明:对任何正整数 n 恒有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \geqslant 0.$$

13. 证明:当 $x>0$ 时有不等式

$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\quad (c>0).$$

14. 证明:若f在$[a,b]$上可积,φ在$[\alpha,\beta]$上严格单调且φ'在$[\alpha,\beta]$上可积,$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

15. 若f在$[a,b]$上连续可微,则存在$[a,b]$上连续可微的增函数g和连续可微的减函数h,使得

$$f(x)=g(x)+h(x),\quad x\in[a,b].$$

*16. 证明：若在$[a,b]$上f为连续函数，g为连续可微的单调函数，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

（提示：与定理9.11及其推论相比较，这里的条件要强得多，因此可望有一个比较简单的，不同于定理9.11的证明.）

9.6 可积性理论补叙

1. 证明性质 2 中关于下和的不等式(3).

2. 证明性质 6 中关于下和的极限式 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)=s$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

试求 f 在 $[0,1]$ 上的上积分和下积分;并由此判断 f 在 $[0,1]$ 上是否可积.

4. 设f在$[a,b]$上可积，且$f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$. 试问$\sqrt{f}$在$[a,b]$上是否可积？为什么？

5. 证明：定理 9.14 中的可积第二充要条件等价于“任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切满足 $\|T\|<\delta$ 的 T，都有 $\sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i = S(T)-s(T)<\varepsilon$”.

6. 据理回答：

(1) 何种函数具有“任意下和等于任意上和”的性质？

(2) 何种连续函数具有“所有下和(或上和)都相等”的性质?

(3) 对于可积函数,若“所有下和(或上和)都相等”,是否仍有(2)的结论?

7. 本题的最终目的是要证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上必定有无限多个处处稠密的连续点. 这可用区间套方法按以下顺序逐一证明：

(1) 若 T 是 $[a,b]$ 的一个分割，使得 $S(T)-s(T)<b-a$，则在 T 中存在某个小区间 Δ_i，使 $\omega_i^f<1$.

(2) 存在区间 $I_1=[a_1,b_1]\subset(a,b)$，使得

$$\omega^f(I_1)=\sup_{x\in I_1}f(x)-\inf_{x\in I_1}f(x)<1.$$

(3) 存在区间 $I_2=[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$，使得

$$\omega^f(I_2)=\sup_{x\in I_2}f(x)-\inf_{x\in I_2}f(x)<\frac{1}{2}.$$

(4) 继续以上方法，求出一区间序列 $I_n=[a_n,b_n]\subset(a_{n-1},b_{n-1})$，使得

$$\omega^f(I_n)=\sup_{x\in I_n}f(x)-\inf_{x\in I_n}f(x)<\frac{1}{n}.$$

说明 $\{I_n\}$ 为一区间套，从而存在 $x_0\in I_n,n=1,2,\cdots$；而且 f 在点 x_0 连续.

(5) 上面求得的 f 的连续点在 $[a,b]$ 上处处稠密.