第 10.1 平面图形的面积

1. 求由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围图形的面积.

2. 求由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\frac{1}{10}, x=10, y=0$ 所围图形的面积.

3. 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分成两部分,求这两部分面积之比.

4. 求内摆线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0)$ 所围图形的面积(图 10-7).

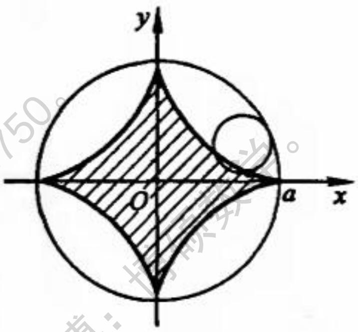

图 10-7

5. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围图形的面积.

6. 求三叶形曲线 $r=a\sin 3\theta(a>0)$ 所围图形的面积.

7. 求由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1\,(a,b>0)$ 与坐标轴所围图形的面积.

8. 求由曲线 $x=t-t^3$, $y=1-t^4$ 所围图形的面积.

9. 求二曲线 $r=\sin\theta$ 与 $r=\sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分的面积.

10. 求两椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$与$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$所围公共部分的面积.

第 10.2 由平行截面面积求体积

1. 如图 10-14 所示，直椭圆柱体被通过底面短轴的斜平面所截，试求截得楔形体的体积.

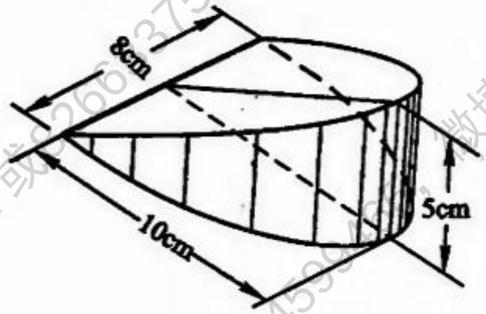

图 10-14

2. 求下列平面曲线绕轴旋转所围成立体的体积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$,绕 x 轴；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,绕 x 轴；

(3) $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$,绕极轴；

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,绕 y 轴.

3. 已知球半径为 r,验证高为 h 的球缺体积 $V=\pi h^2\left(r-\dfrac{h}{3}\right)(h\leqslant r)$.

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围平面图形(图 10-7)绕 x 轴旋转所得立体的体积.

5. 导出曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积公式为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. 求 $0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$ 所示平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积.

第 10.3 平面曲线的弧长与曲率

1. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{3/2}, 0\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$;

(3) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(4) $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)\,(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(5) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}(a>0)$, $0\leqslant\theta\leqslant3\pi$;

(6) $r=a\theta(a>0)$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

2. 求下列各曲线在指定点处的曲率：

(1) $xy=4$，在点$(2,2)$；

(2) $y=\ln x$，在点$(1,0)$；

(3) $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(a>0)$，在 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点；

(4) $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t(a>0)$，在 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点.

3. 求 a,b 的值，使椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的周长等于正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一段的长.

*4. 本题的目的是证明性质 1. 这可按以下顺序逐一证明：

(1) 记 $W=\{s_T \mid T$ 是 $\widehat{AB}$ 的一个分割$\}$，则 W 是一个有界集.

(2) 设 $\widehat{AB}$ 的弧长为 s，则 $s=\sup W$.

(3) 记 $W'=\{s_{T'}\mid T'$是$\overset{\frown}{AD}$的一个分割$\}$及 $W''=\{s_{T''}\mid T''$是$\overset{\frown}{DB}$的一个分割$\}$，则 W'和 W''都是有界集，并且如果记 $s'=\sup W'$及 $s''=\sup W''$，则

$$s=s'+s''.$$

(4) 证明：$\overset{\frown}{AD}$的弧长为 s'，$\overset{\frown}{DB}$的弧长为 s''.

*5. 设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$给出，且二阶可导，证明它在点(r,θ)处的曲率为

$$K=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

*6. 用上题公式，求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$在 $\theta=0$ 处的曲率、曲率半径和曲率圆.

*7. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处的曲率为最大.

*8. 求曲线 $y=e^x$ 上曲率最大的点.

第 10.4 旋转曲面的面积

1. 求下列平面曲线绕指定轴旋转所得旋转曲面的面积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$, 绕 x 轴；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 绕 x 轴；

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 绕 y 轴；

(4) $x^2+(y-a)^2=r^2(r<a)$, 绕 x 轴.

2. 设平面光滑曲线由极坐标方程

$$r = r(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \ ([\alpha,\beta] \subset [0,\pi], r(\theta) \geqslant 0)$$

给出，试求它绕极轴旋转所得旋转曲面的面积计算公式.

3. 试求下列极坐标曲线绕极轴旋转所得旋转曲面的面积：

(1) 心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$；

(2) 双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta(a>0)$.

4. 证明：如果在旋转曲面的面积公式(3)的推导过程中，过点$(x,f(x))$作曲线 C 的切线，选取该切线在$[x,x+\Delta x]$的一段绕 x 轴旋转一周生成圆台的侧面面积作为 ΔS 的近似可求量 $\Delta' S$，则也可以得到公式(3).

第 10.5 定积分在物理中的某些应用

1. 有一等腰梯形闸门，它的上、下两条底边各长为 10 m 和 6 m，高为 20 m. 计算当水面与上底边相齐时闸门一侧所受的静压力.

2. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 $\alpha(0<\alpha<90^\circ)$ 角斜沉于液体中. 设 $a>b$，长边平行于液面，上沿位于深 h 处，液体的比重为 ν. 试求薄板每侧所受的静压力.

3. 直径为 6 m 的一球浸入水中，其球心在水平面下 10 m 处，求球面上所受浮力.

4. 设在坐标轴的原点有一质量为 m 的质点，在区间 $[a,a+l]$ $(a>0)$ 上有一质量为 M 的均匀细杆. 试求质点与细杆之间的万有引力.

5. 设有两条各长为 l 的均匀细杆在同一直线上，中间离开距离 c，每根细杆的质量为 M. 试求它们之间的万有引力. (提示：在第 4 题的基础上再作一次积分.)

6. 设有半径为 r 的半圆形导线，均匀带电，电荷密度为 δ，在圆心处有一单位正电荷. 试求它们之间作用力的大小.

7. 一个半球形(直径为 20 m)的容器内盛满了水. 试问把水抽尽需作多少功?

8. 长 10 m 的铁索下垂于矿井中,已知铁索每米的质量为 8 kg,问将此铁索提出地面需作多少功?

9. 一物体在某介质中按 $x=ct^3$ 作直线运动,介质的阻力与速度 $\frac{dx}{dt}$ 的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时克服介质阻力所做的功.

10. 半径为 r 的球体沉入水中,其比重与水相同. 试问将球体从水中捞出需作多少功?

第 10.6 定积分近似计算

1. 分别用梯形法和抛物线法近似计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$(将积分区间十等分).

2. 用抛物线法近似计算$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$(分别将积分区间二等分、四等分、六等分).

3. 图 10－28 所示为河道某一截面图. 试由测得数据用抛物线法求截面面积.

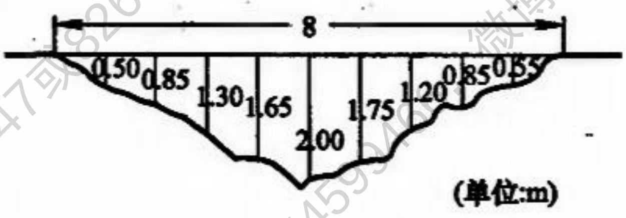

图 10-28

4. 下表所列为夏季某一天每隔两小时测得的气温：

时间(t_i)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
温度(C_i)	25.8	23.0	24.1	25.6	27.3	30.2	33.4	35.0	33.8	31.1	28.2	27.0	25.0

(1) 按积分平均$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$求这一天的平均气温，其中定积分值由三种近似法分别计算；

(2) 若按算术平均$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} C_{i-1}$或$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} C_i$求得平均气温，那么它们与矩形法积分平均和梯形法积分平均各有什么联系？简述理由.

① 这里用一个很容易求得准确值的定积分作为近似计算的例子，主要的理由就是有准确值可以与近似值相比较. 实际使用中不会有这样的事.