大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

## 致　同　学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道,数学与生活紧密相连.数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活.数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想.为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论.我们要积极地运用这些理论去解决问题.在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展.在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的"感受·理解"部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系.它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容.相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的"思考·运用"、"探究·拓展"等,以激发你探索数学的兴趣.在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

# 目　　录

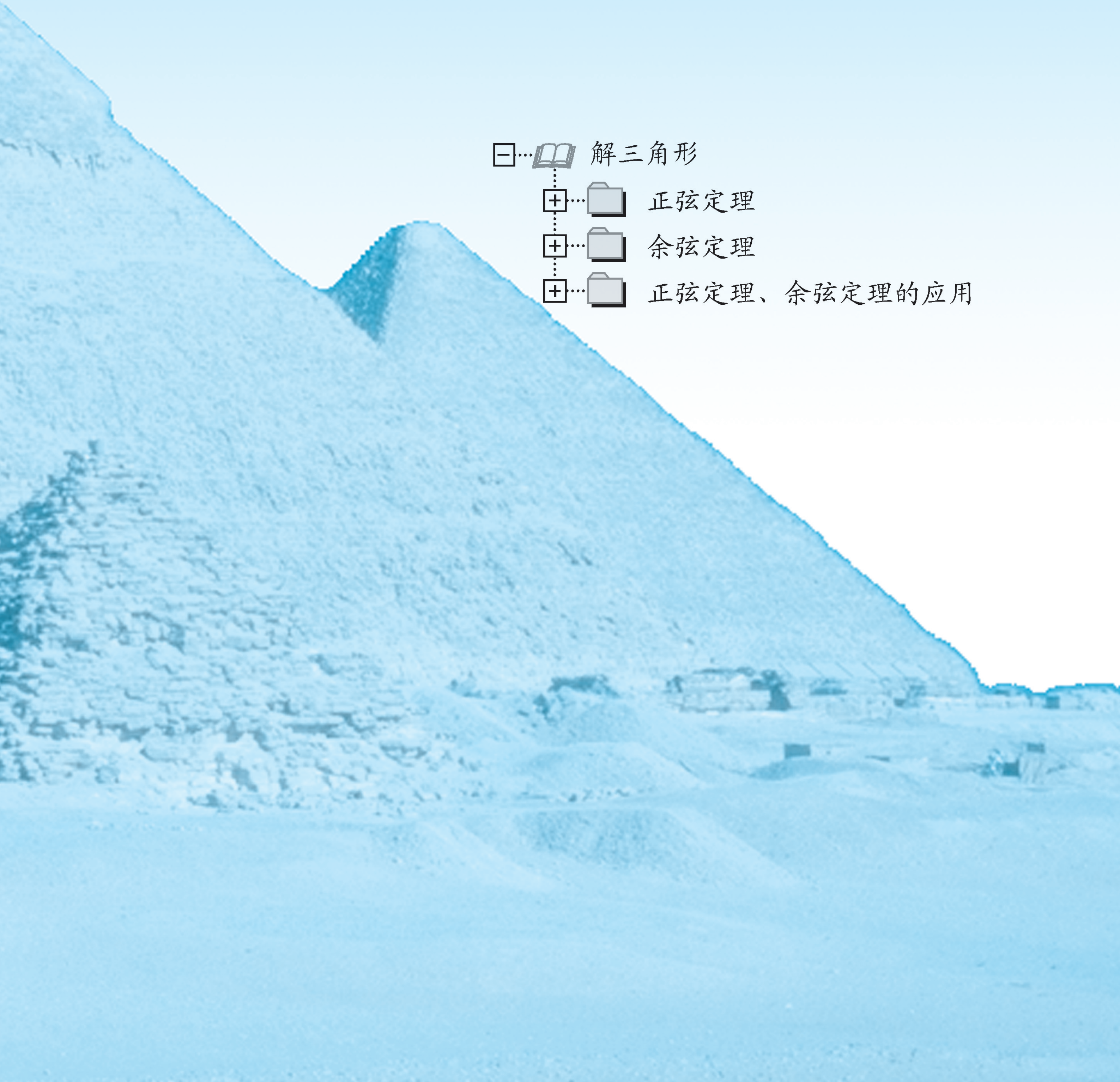
# 本书部分常用符号

| | |
|---|---|
| $\sin A$ | 角 $A$ 的正弦 |
| $\cos A$ | 角 $A$ 的余弦 |
| $\boldsymbol{a}$ | 向量 $\boldsymbol{a}$ |
| $\mathbf{0}$ | 零向量 |
| $\overrightarrow{AB}$ | 起点为 $A$、终点为 $B$ 的向量 |
| $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ | 向量$\overrightarrow{AB}$的模（或长度） |
| $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ | 向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的数量积 |
| $S_{\triangle ABC}$ | $\triangle ABC$ 的面积 |
| $a_n$ | 数列$\{a_n\}$的第 $n$ 项 |
| $S_n$ | 数列的前 $n$ 项和 |
| $\mathbf{N}$ | 自然数集 |
| $\mathbf{N}^*$ | 正整数集 |
| $\varnothing$ | 空集 |
| $\mathbf{R}$ | 实数集 |

# 第 1 章　解 三 角 形

# 解三角形





对自然界的深刻研究是数学发现的最丰富的来源.

——傅里叶

从金字塔的建造到尼罗河两岸的土地丈量,从大禹治水到都江堰的修建,从天文观测到精密仪器的制造……人们都离不开对几何图形的测量、设计和计算.

例如,测量河流两岸码头之间的距离,确定待建隧道的长度,计算卫星的角度与高度……

许多实际问题都可以转化为求三角形的边或角的问题.我们已经知道直角三角形中的边角关系,那么,

- 任意三角形的边与角之间存在怎样的关系?
- 如何利用这些关系解决实际问题?

# 1.1 正弦定理

为了探索任意三角形中的边角关系，我们先回忆直角三角形中的边角关系.

如图 1－1－1，在 Rt△$ABC$ 中，我们有

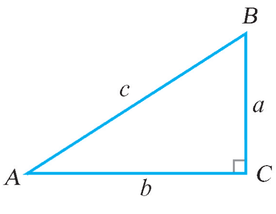



图 1－1－1

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},\ \sin C=1=\frac{c}{c}.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

● 上述结论，对任意三角形也成立吗？

如图 1－1－2 所示，任意画一个三角形，然后测量此三角形三个内角的大小及三条边的长，再对每条边计算其长度与它的对角的正弦值之比，三个比值相等吗？改变三角形的形状再试一试.

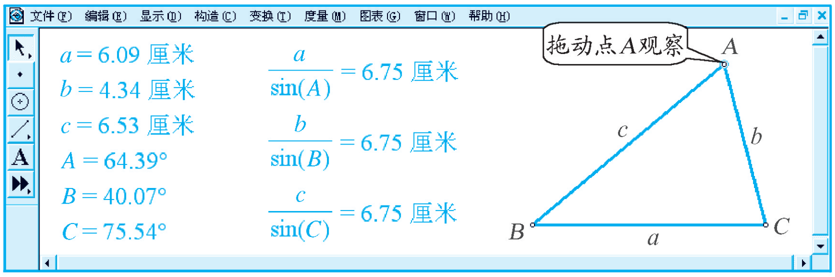



图 1－1－2

本章如无特别说明，$a$，$b$，$c$ 分别表示△$ABC$ 中角 $A$，$B$，$C$ 所对边的长.

于是我们猜想：对于任意三角形 $ABC$，都有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

即在一个三角形中，各边和它所对角的正弦之比相等.

我们可以通过下面的途径尝试证明上述结论：

(1) 转化为直角三角形中的边角关系；

(2) 建立直角坐标系，利用三角函数的定义；

(3) 通过三角形的外接圆，将任意三角形问题转化为直角三角形问题；

(4) 利用向量的投影或向量的数量积(产生三角函数).

**证法 1** 不妨设∠$C$ 为最大角.

(1) 若∠$C$ 为直角，我们已经证得结论成立.

（2）若$\angle C$为锐角（图 1－1－3(1)），过点$A$作$AD \perp BC$于$D$，此时有

$$\sin B = \frac{AD}{c}, \ \sin C = \frac{AD}{b},$$

所以$c\sin B = b\sin C$，即

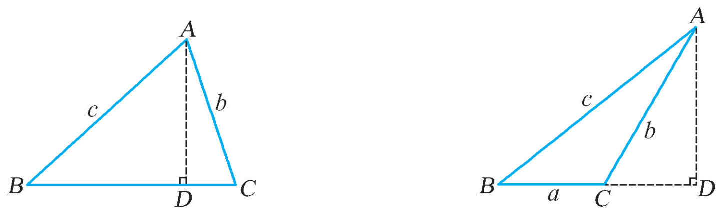
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$




（1）　　　　（2）

图 1－1－3

（3）若$\angle C$为钝角（图 1－1－3(2)），过点$A$作$AD \perp BC$，交$BC$的延长线于$D$，此时也有

$$\sin B = \frac{AD}{c},$$

且

$$\sin \angle ACB = \sin(180^\circ - \angle ACB) = \frac{AD}{b}.$$

仿(2)可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

由(1)，(2)，(3)知，结论成立.

**证法 2**　在$\triangle ABC$中，有$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. 不妨设$\angle C$为最大角，过点$A$作$AD \perp BC$于$D$（图 1－1－4），于是

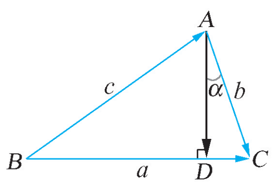



图 1－1－4

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD},$$

即

$$0 = |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AD}|\cos(90^\circ + B) + |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\alpha,$$

其中，当$\angle C$为锐角或直角时，$\alpha = 90^\circ - C$；

向量的数量积是将向量等式转化为数量等式的常用工具.

当 $\angle C$ 为钝角时，$\alpha = C - 90°$.
故可得

$$c\sin B - b\sin C = 0,$$

即

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

上述等式表明，三角形的各边和它所对角的正弦之比相等. 这样，我们得到**正弦定理**(sine theorem)：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

**思　考**

尝试用其他方法证明正弦定理.

**例 1**　如图 1－1－5，在$\triangle ABC$ 中，$A = 30°$，$C = 100°$，$a = 10$，求 $b$，$c$(精确到 0.01).

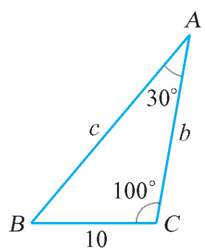


图 1－1－5

**解**　因为 $A = 30°$，$C = 100°$，所以 $B = 50°$.

因为 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$，所以

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{10\sin 50°}{\sin 30°} \approx 15.32,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{10\sin 100°}{\sin 30°} \approx 19.70.$$

因此，$b$，$c$ 的长分别为 15.32 和 19.70.

解斜三角形是指由六个元素(三条边和三个角)中的三个元素(至少有一个是边)，求其余三个未知元素的过程.

**例 2**　根据下列条件解三角形(边长精确到 0.01，角度精确到0.1°)：

(1) $a = 16$，$b = 26$，$A = 30°$；

(2) $a = 30$，$b = 26$，$A = 30°$.

**解**　(1) 由正弦定理，得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30°}{16} = \frac{13}{16},$$

所以 $B_1 \approx 54.3^\circ$，或 $B_2 = 180^\circ - 54.3^\circ = 125.7^\circ$.

由于 $B_2 + A = 125.7^\circ + 30^\circ = 155.7^\circ < 180^\circ$，故 $B_2$ 也符合要求.从而 $B$ 有两解(图 1－1－6)：

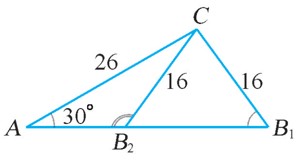


图 1－1－6

$$B_1 = 54.3^\circ，或 B_2 = 125.7^\circ.$$

当 $B_1 = 54.3^\circ$ 时，

$$\begin{aligned} C_1 &= 180^\circ - (A + B_1) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 54.3^\circ) \\ &= 95.7^\circ, \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A} = \frac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 31.84.$$

当 $B_2 = 125.7^\circ$ 时，

$$\begin{aligned} C_2 &= 180^\circ - (A + B_2) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 125.7^\circ) \\ &= 24.3^\circ, \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A} = \frac{16\sin 24.3^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 13.17.$$

(2) 由正弦定理，得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30^\circ}{30} = \frac{13}{30},$$

所以 $B_1 = 25.7^\circ$，或 $B_2 = 180^\circ - 25.7^\circ = 154.3^\circ$.

由于 $B_2 + A = 154.3^\circ + 30^\circ = 184.3^\circ > 180^\circ$，故 $B_2$ 不符合要求，从而 $B$ 只有一解(图 1－1－7)，

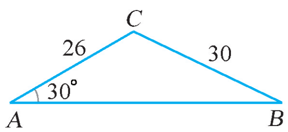


图 1－1－7

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 25.7^\circ) \\ &= 124.3^\circ, \end{aligned}$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{30\sin 124.3^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 49.57.$$

利用正弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1) 已知两角与任一边，求其他两边和一角；

(2) 已知两边与其中一边的对角，求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角).

## 练 习

**1.** 一个三角形的两个内角分别为 $30^\circ$ 和 $45^\circ$，如果 $45^\circ$ 角所对边的长为 8，那么 $30^\circ$ 角所对边的长为（　　）.

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{6}$

**2.** 在△$ABC$ 中，

（1）已知 $A=75^\circ$，$B=45^\circ$，$c=3\sqrt{2}$，求 $a$，$b$；

（2）已知 $A=30^\circ$，$B=120^\circ$，$b=12$，求 $a$，$c$.

**3.** 根据下列条件解三角形：

（1）$b=40$，$c=20$，$C=25^\circ$；

（2）$b=13$，$a=26$，$B=30^\circ$；

（3）$A=45^\circ$，$C=30^\circ$，$c=10$.

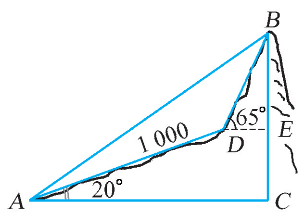



图 1－1－8

**例 3** 如图 1－1－8，某登山队在山脚 $A$ 处测得山顶 $B$ 的仰角为 $35^\circ$，沿倾斜角为 $20^\circ$ 的斜坡前进 1 000 m 后到达 $D$ 处，又测得山顶的仰角为 $65^\circ$，求山的高度 $BC$（精确到 1 m）.

**分析** 要求 $BC$，只要求 $AB$，为此考虑解△$ABD$.

**解** 过点 $D$ 作 $DE \parallel AC$ 交 $BC$ 于 $E$，因为 $\angle DAC=20^\circ$，所以 $\angle ADE=160^\circ$，于是

$$\angle ADB=360^\circ-160^\circ-65^\circ=135^\circ.$$

又 $\angle BAD=35^\circ-20^\circ=15^\circ$，所以 $\angle ABD=30^\circ$.

在△$ABD$ 中，由正弦定理，得

$$AB=\frac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{1\,000\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=1\,000\sqrt{2}(\text{m}).$$

在 Rt△$ABC$ 中，

$$BC=AB\sin 35^\circ=1\,000\sqrt{2}\sin 35^\circ\approx 811(\text{m}).$$

**答** 山的高度约为 811 m.

**例 4** 在△$ABC$ 中，已知 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，试判断△$ABC$ 的形状.

**解** 令 $\dfrac{a}{\sin A}=k$，由正弦定理，得

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

代入已知条件，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

通过正弦定理，可以实现边角互化.

即

$$\tan A = \tan B = \tan C.$$

又 $A, B, C \in (0, \pi)$，所以 $A = B = C$，从而$\triangle ABC$为正三角形.

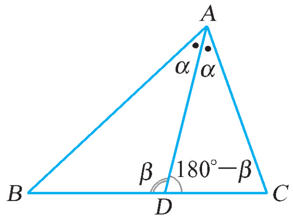


图 1－1－9

**例 5** 在$\triangle ABC$中，$AD$是$\angle BAC$的平分线(图 1－1－9)，用正弦定理证明

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

**证** 设$\angle BAD = \alpha$，$\angle BDA = \beta$，则$\angle CAD = \alpha$，$\angle CDA = 180^\circ - \beta$. 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中分别运用正弦定理，得

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin\alpha}.$$

又 $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$，所以

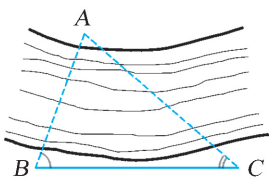
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC},$$

即

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

## 练　习

1. 已知轮船$A$和轮船$B$同时离开$C$岛，$A$船沿北偏东$30^\circ$方向航行，$B$船沿正北方向航行. 若$A$船的航行速度为 40 n mile/h，1 h 后，$B$船测得$A$船位于$B$船的北偏东$45^\circ$处，则此时$A$，$B$两船相距________n mile.



(第 2 题)

2. 为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩$A$，$B$(如图). 要测算出$A$，$B$两点间的距离，测量人员在岸边定出基线$BC$，测得$BC = 78.35$ m，$\angle B = 69^\circ 43'$，$\angle C = 41^\circ 12'$，试计算$AB$的长(精确到 0.01 m).
3. 在一座 10 m 高的观测台顶测得对面一水塔塔顶仰角为$60^\circ$，塔底俯角为$45^\circ$，求水塔的高度.
4. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$的形状：

   (1) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$；

   (2) $a\cos A = b\cos B$.
5. 在$\triangle ABC$中，若$A = 60^\circ$，$a = \sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$等于(　　).

   A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$

   C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

## 习题 1.1

**感受 · 理解**

**1.** 在$\triangle ABC$中，

(1) 已知 $A=135°$，$B=15°$，$c=1$，求这个三角形的最大边的长；

(2) 已知 $A=26°$，$C=47°$，$b=16$，求 $a$，$c$，$B$；

(3) 已知 $a=6$，$b=6\sqrt{3}$，$B=120°$，求 $c$；

(4) 已知 $\sqrt{2}a=2b\sin A$，求 $B$.

**2.** 根据下列条件解三角形：

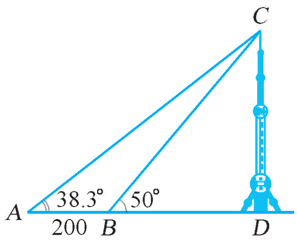
(1) $A=30°$，$B=105°$，$c=\sqrt{2}$；

(2) $a=14$，$b=7\sqrt{6}$，$B=60°$；

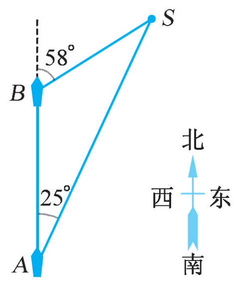
(3) $b=47$，$c=38$，$C=110°$；

(4) $b=25$，$c=12$，$C=23°$.

**3.** 如图，从 $A$ 点和 $B$ 点测得上海东方明珠电视塔塔顶 $C$ 的仰角分别为 38.3° 和 50°($A$，$B$ 两点与塔底 $D$ 点在同一条直线上)，$AB=200$ m，求东方明珠电视塔的高度(精确到 1 m).




（第 3 题）




（第 4 题）

**4.** 一艘船以 42 n mile/h 的速度向正北方向航行. 从 $A$ 处看灯塔 $S$ 位于船北偏东 25°的方向上，30 min 后船航行到 $B$ 处，从 $B$ 处看灯塔 $S$ 位于船北偏东 58°的方向上. 求灯塔 $S$ 与 $B$ 之间的距离(精确到 0.1 n mile).

**5.** 在$\triangle ABC$中，已知 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

**思考 · 运用**

**6.** 仿照正弦定理的证法 1，证明 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，并运用这一结论解决下面的问题：

(1) 在$\triangle ABC$中，已知 $a=2$，$b=3$，$C=150°$，求 $S_{\triangle ABC}$；

(2) 在$\triangle ABC$中，已知 $c=10$，$A=45°$，$C=30°$，求 $b$ 和 $S_{\triangle ABC}$；

(3) 证明正弦定理.

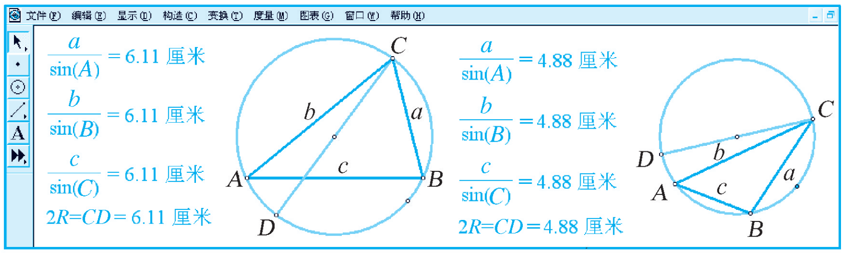
**7.** 在$\triangle ABC$中，已知 $a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断$\triangle ABC$的形状.

**8.** 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，证明$\triangle ABC$为正三角形.

**9.** 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的外角平分线交 $BC$ 的延长线于 $D$，用正弦定理证明：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

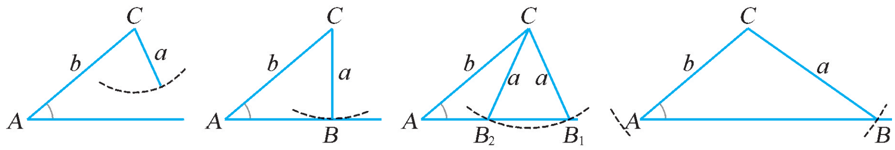
## 探究·拓展

**10.** 在 Rt△$ABC$ 中，斜边 $c$ 等于 Rt△$ABC$ 外接圆的直径 $2R$，故有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，这一关系对任意三角形也成立吗(如图)？探索并证明你的结论.




(第 10 题)

**11.** (阅读题)在已知两边 $a$，$b$ 和一边的对角 $A$，求角 $B$ 时，如果 $A$ 为锐角，那么可能出现以下情况(如图)：



| $a<b\sin A$ | $a=b\sin A$ | $b\sin A<a<b$ | $a\geqslant b$ |
|---|---|---|---|
| 无解 | 一解 | 两解 | 一解 |

(第 11 题)

如果 $A$ 为钝角，那么可能会出现哪几种情况？试画出草图加以说明.

# 1.2 余弦定理

在上节中，我们通过等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 的两边与$\overrightarrow{AD}$（$AD$ 为$\triangle ABC$ 中 $BC$ 边上的高）作数量积，将向量等式转化为数量关系，进而推出了正弦定理.

● 还有其他途径将向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化吗？

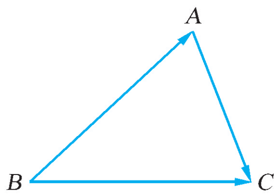


图 1－2－1

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$（图 1－2－1），所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\\&=|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-A)+|\overrightarrow{AC}|^2\\&=c^2-2cb\cos A+b^2,\end{aligned}$$

即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

上述等式表明，三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 这样，我们得到**余弦定理**（cosine theorem）：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

**思　考**

回顾正弦定理的证明，尝试用其他方法证明余弦定理.

余弦定理也可以写成如下形式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

**例 1** 在△$ABC$ 中，

(1) 已知 $b=3$，$c=1$，$A=60°$，求 $a$；

(2) 已知 $a=4$，$b=5$，$c=6$，求 $A$(精确到 $0.1°$).

**解** (1) 由余弦定理，得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos 60°=7,$$

所以

$$a=\sqrt{7}.$$

(2) 由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=0.75,$$

所以

$$A\approx 41.4°.$$

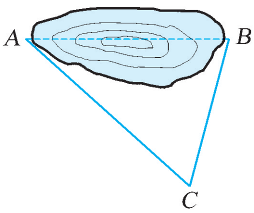


图 1－2－2

**例 2** $A$，$B$ 两地之间隔着一个水塘(图 1－2－2)，现选择另一点 $C$，测得 $CA=182\text{ m}$，$CB=126\text{ m}$，$\angle ACB=63°$，求 $A$，$B$ 两地之间的距离(精确到 1 m).

**解** 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}AB^2&=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos C\\&=182^2+126^2-2\times182\times126\cos 63°\\&\approx 28\,178.18,\end{aligned}$$

所以 $AB\approx168(\text{m})$.

**答** $A$，$B$ 两地之间的距离约为 168 m.

**例 3** 用余弦定理证明：在△$ABC$ 中，当$\angle C$ 为锐角时，$a^2+b^2>c^2$；当 $\angle C$ 为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

**证** 当$\angle C$ 为锐角时，$\cos C>0$. 由余弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2,$$

即

$$a^2+b^2>c^2.$$

余弦定理可以看做是勾股定理的推广.

同理可证，当$\angle C$ 为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

利用余弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1) 已知三边，求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

## 练　习

**1.** 在△$ABC$中，

(1) 已知 $a=6$, $b=5$, $c=4$，求 $\cos C$；

(2) 已知 $A=60^\circ$, $b=4$, $c=7$，求 $a$；

(3) 已知 $a=7$, $b=5$, $c=3$，求 $A$；

(4) 已知 $a=7$, $b=8$, $\cos C=\dfrac{13}{14}$，求 $c$.

**2.** 若三条线段的长分别为 5，6，7，则用这三条线段(　　).

A. 能组成直角三角形　　B. 能组成锐角三角形

C. 能组成钝角三角形　　D. 不能组成三角形

**3.** 若△$ABC$的三边 $a$，$b$，$c$ 满足 $c^2<a^2+b^2$，此三角形是锐角三角形吗？

**4.** 在△$ABC$中，已知 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$，求 $C$.

**5.** 在△$ABC$中，已知 $(a+b+c)(a-b+c)=ac$，求 $B$.

**6.** 两游艇自某地同时出发，一艇以 10 km/h 的速度向正北方向行驶，另一艇以 7 km/h的速度向北偏东 45°的方向行驶. 问：经过 40 min，两艇相距多远(精确到 0.01 km)？

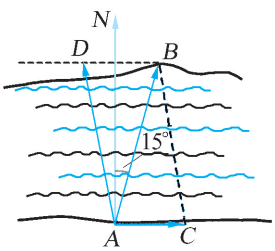


图 1-2-3

**例 4**　在长江某渡口处，江水以 5 km/h 的速度向东流. 一渡船在江南岸的 $A$ 码头出发，预定要在 0.1 h 后到达江北岸 $B$ 码头(图 1-2-3). 设$\overrightarrow{AN}$为正北方向，已知 $B$ 码头在 $A$ 码头北偏东 15°的方向上，并与 $A$ 码头相距 1.2 km. 该渡船应按什么方向航行？速度是多少(角度精确到 0.1°，速度精确到 0.1 km/h)？

**解**　如图 1-2-3，船按$\overrightarrow{AD}$方向开出，$\overrightarrow{AC}$方向为水流方向，以 $AC$ 为一边、$AB$ 为对角线作平行四边形 $ACBD$，其中

$$AB=1.2(\text{km}),\ AC=5\times0.1=0.5(\text{km}).$$

在△$ABC$中，由余弦定理，得

$$BC^2=1.2^2+0.5^2-2\times1.2\times0.5\cos(90^\circ-15^\circ)\approx1.38,$$

所以

$$AD=BC\approx1.17(\text{km}).$$

因此，船的航行速度为

$$1.17\div0.1=11.7(\text{km/h}).$$

在△$ABC$中，由正弦定理，得

$$\sin\angle ABC=\frac{AC\sin\angle BAC}{BC}=\frac{0.5\sin75^\circ}{1.17}\approx0.4128,$$

所以

$$\angle ABC\approx24.4^\circ.$$

所以　$\angle DAN=\angle DAB-\angle NAB=\angle ABC-15^\circ\approx9.4^\circ.$

**答**　渡船应按北偏西 9.4°的方向，并以 11.7 km/h 的速度航行.

**例5** 在△$ABC$中，已知$\sin A=2\sin B\cos C$，试判断该三角形的形状.

**解** 由正弦定理及余弦定理，得

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

所以

$$\frac{a}{b}=2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

整理，得

$$b^2=c^2.$$

因为$b>0$，$c>0$，所以$b=c$. 因此，△$ABC$为等腰三角形.

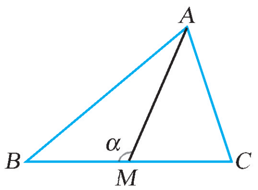


图1-2-4

**例6** 如图1-2-4，$AM$是△$ABC$中$BC$边上的中线，求证：

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}.$$

**证** 设$\angle AMB=\alpha$，则$\angle AMC=180°-\alpha$.

在△$ABM$中，由余弦定理，得

$$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\alpha.$$

在△$ACM$中，由余弦定理，得

$$AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cos(180°-\alpha).$$

因为$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$，$BM=MC=\frac{1}{2}BC$，

所以

$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{1}{2}BC^2,$$

因此，

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}.$$

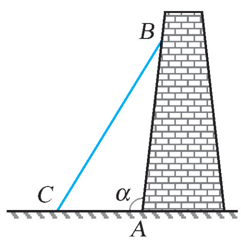
## 练习

1. 在△$ABC$中，如果$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，那么$\cos C$等于（　　）.

   A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{4}$

2. 在△$ABC$中，已知$a^2-b^2=(a\cos B+b\cos A)^2$，试判断此三角形的形状.
3. (1) 在△$ABC$中，已知$a=2$，$b=3$，$C=60°$，试证明此三角形为锐角三角形；

   (2) 在△$ABC$中，设$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{3}$，求$AB$的长(精确到0.01).



（第4题）

4. 如图，长7 m的梯子$BC$靠在斜壁上，梯脚与壁基相距1.5 m，梯顶在沿着壁向上6 m的地方，求壁面和地面所成的角$\alpha$(精确到0.1°).

## 习题 1.2

**感受·理解**

**1.** 在$\triangle ABC$中，

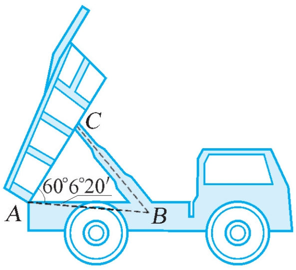
(1) 已知$a=24$，$b=13$，$C=108^\circ$，求$c$，$B$；

(2) 已知$b=2$，$c=10$，$A=42^\circ$，求$a$，$B$，$C$；

(3) 已知$a=7$，$b=4\sqrt{3}$，$c=\sqrt{13}$，求最小的内角.

**2.** 牵牛星和织女星分别距离地球约 17 光年和 26 光年，从地球上观测这两颗星的张角为$34^\circ$，求牵牛星与织女星之间的距离(精确到 0.01 光年).

**3.** 在平行四边形$ABCD$中，已知$AB=12\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$，$A=60^\circ$，求平行四边形两条对角线的长.



(第 4 题)

**4.** 自动卸货汽车的车箱采用液压机构，设计时需要计算油泵顶杆$BC$的长度(如图). 已知车箱的最大仰角为$60^\circ$，油泵顶点$B$与车箱支点$A$之间的距离为1.95 m，$AB$与水平线之间的夹角为$6^\circ20'$，$AC$长为 1.40 m，试计算$BC$的长(精确到 0.01 m).

**5.** 在$\triangle ABC$中，已知$c=2a\cos B$，试判断$\triangle ABC$的形状.

**6.** 在$\triangle ABC$中，已知$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，求$A$的度数.

**7.** 用余弦定理证明：在$\triangle ABC$中，

这三个关系式也称为射影定理.

(1) $a=b\cos C+c\cos B$；

(2) $b=c\cos A+a\cos C$；

(3) $c=a\cos B+b\cos A$.

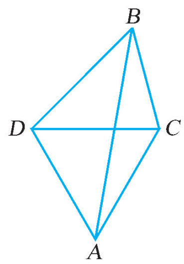
**8.** 用余弦定理证明：平行四边形两条对角线平方的和等于四边平方的和.

**思考·运用**

**9.** 试用向量方法证明第 7 题中的结论.

**10.** 在$\triangle ABC$中，已知$C=60^\circ$，$BC=a$，$AC=b$，且$a$，$b$是方程$x^2-13x+40=0$的两个根，求$AB$的长.

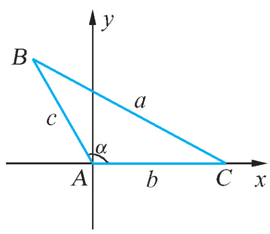
**11.** 如图，我炮兵阵地位于$A$处，两观察所分别设于$C$，$D$处，已知$\triangle ACD$为边长等于$a$的正三角形. 当目标出现于$B$处时，测得$\angle CDB=45^\circ$，$\angle BCD=75^\circ$，试求炮击目标的距离$AB$.



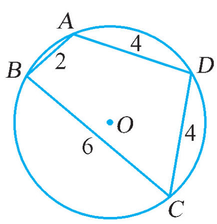
(第 11 题)

**探究·拓展**

**12.** 在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=\alpha$，$AC=b$，$AB=c$. 如图建立直角坐标系，利用两点间的距离公式计算$BC^2$，并由此证明余弦定理.



(第 12 题)



(第 13 题)

**13.** 如图，已知圆内接四边形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=6$，$AD=CD=4$，如何求四边形$ABCD$的面积？

# 1.3 正弦定理、余弦定理的应用

正弦定理、余弦定理体现了三角形中边角之间的相互关系，在测量学、运动学、力学、电学等许多领域有着广泛的应用.

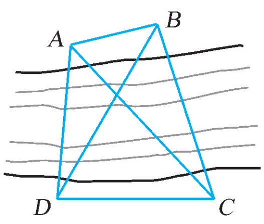


图 1－3－1

**例 1** 如图 1－3－1，为了测量河对岸两点 $A$，$B$ 之间的距离，在河岸这边取点 $C$，$D$，测得 $\angle ADC=85^\circ$，$\angle BDC=60^\circ$，$\angle ACD=47^\circ$，$\angle BCD=72^\circ$，$CD=100\ \text{m}$. 设 $A$，$B$，$C$，$D$ 在同一平面内，试求 $A$，$B$ 两点之间的距离(精确到 1 m).

**解** 在$\triangle ADC$中，$\angle ADC=85^\circ$，$\angle ACD=47^\circ$，则 $\angle DAC=48^\circ$.

又 $DC=100$，由正弦定理，得

$$AC=\frac{DC\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\frac{100\sin 85^\circ}{\sin 48^\circ}\approx 134.05(\text{m}).$$

在$\triangle BDC$中，$\angle BDC=60^\circ$，$\angle BCD=72^\circ$，则 $\angle DBC=48^\circ$.

又 $DC=100$，由正弦定理，得

$$BC=\frac{DC\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\frac{100\sin 60^\circ}{\sin 48^\circ}\approx 116.54(\text{m}).$$

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}AB^2&=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB\\&=134.05^2+116.54^2-2\times 134.05\times 116.54\cos(72^\circ-47^\circ)\\&\approx 3\,233.95,\end{aligned}$$

所以 $AB\approx 57(\text{m})$.

**答** $A$，$B$ 两点之间的距离约为 57 m.

**例 2** 如图 1－3－2，某渔轮在航行中不幸遇险，发出呼救信号. 我海军舰艇在 $A$ 处获悉后，测出该渔轮在方位角为 $45^\circ$，距离为 10 n mile 的$C$处，并测得渔轮正沿方位角为 $105^\circ$的方向，以9 n mile/h 的速度向小岛靠拢. 我海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救. 求舰艇的航向和靠近渔轮所需的时间(角度精确到 $0.1^\circ$，时间精确到 1 min).

方位角是从指北方向顺时针转到目标方向线的角.

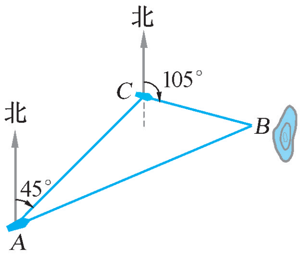


图 1－3－2

**解** 设舰艇收到信号后 $x$ h 在 $B$ 处靠拢渔轮，则 $AB=21x$，$BC=9x$. 又 $AC=10$，$\angle ACB=45^\circ+(180^\circ-105^\circ)=120^\circ$.

由余弦定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB,$$

即

$$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times10\times9x\cos120^\circ.$$

化简，得

$$36x^2-9x-10=0,$$

解得 $x=\dfrac{2}{3}(\mathrm{h})=40(\mathrm{min})$（负值舍去）.

由正弦定理，得

$$\sin\angle BAC=\frac{BC\sin\angle ACB}{AB}=\frac{9x\sin120^\circ}{21x}=\frac{3\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle BAC\approx21.8^\circ$，方位角为 $45^\circ+21.8^\circ=66.8^\circ$.

**答** 舰艇应沿着方位角 $66.8^\circ$ 的方向航行，经过 40 min 就可靠近渔轮.

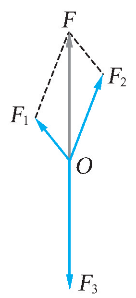


图 1－3－3

**例 3** 作用于同一点的三个力 $F_1$，$F_2$，$F_3$ 平衡. 已知 $F_1=30$ N，$F_2=50$ N，$F_1$ 与 $F_2$ 之间的夹角是 $60^\circ$，求 $F_3$ 的大小与方向（精确到 $0.1^\circ$）.

**解** $F_3$ 应和 $F_1$，$F_2$ 的合力 $F$ 平衡，所以 $F_3$ 和 $F$ 在同一直线上，并且大小相等，方向相反.

如图 1－3－3，在 $\triangle OF_1F$ 中，由余弦定理，得

$$F=\sqrt{30^2+50^2-2\times30\times50\cos120^\circ}=70(\mathrm{N}).$$

再由正弦定理，得

$$\sin\angle F_1OF=\frac{50\sin120^\circ}{70}=\frac{5\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle F_1OF\approx38.2^\circ$，从而 $\angle F_1OF_3\approx141.8^\circ$.

**答** $F_3$ 为 70 N，$F_3$ 和 $F_1$ 间的夹角为 $141.8^\circ$.

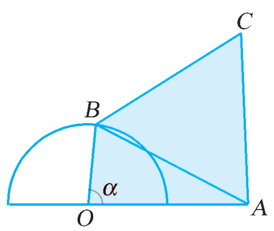


图 1－3－4

**例 4** 如图 1－3－4，半圆 $O$ 的直径为 2，$A$ 为直径延长线上的一点，$OA=2$，$B$ 为半圆上任意一点，以 $AB$ 为一边作等边三角形 $ABC$. 问：点 $B$ 在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大？

**分析** 四边形 $OACB$ 的面积由点 $B$ 的位置惟一确定，而点 $B$ 由 $\angle AOB$ 惟一确定，因此可设 $\angle AOB=\alpha$，再用 $\alpha$ 的三角函数来表示四边形 $OACB$ 的面积.

**解** 设 $\angle AOB=\alpha$. 在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，得

$$AB^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2\cos\alpha = 5 - 4\cos\alpha.$$

于是，四边形 $OACB$ 的面积为

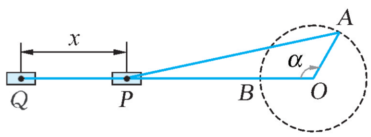
$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{2}OA \cdot OB\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}(5 - 4\cos\alpha) \\ &= \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha + \frac{5}{4}\sqrt{3} \\ &= 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{4}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

因为 $0 < \alpha < \pi$，所以当 $\alpha - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$，$\alpha = \frac{5}{6}\pi$，即 $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$ 时，四边形 $OACB$ 的面积最大.

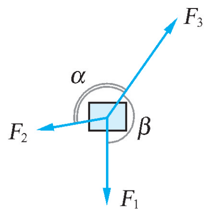
## 练　习

**1.** 曲柄连杆机构示意图如图所示. 当曲柄 $OA$ 在水平位置 $OB$ 时，连杆端点 $P$ 在 $Q$ 的位置. 当 $OA$ 自 $OB$ 按顺时针方向旋转 $\alpha$ 角时，$P$ 和 $Q$ 之间的距离是 $x$ cm. 已知 $OA = 25$ cm，$AP = 125$ cm，根据下列条件，求 $x$ 的值（精确到 0.1 cm）：

(1) $\alpha = 50°$；　　(2) $\alpha = 135°$.




（第 1 题）



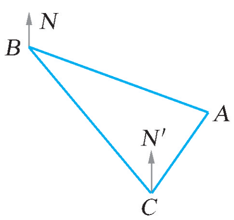

（第 2 题）

**2.** 如图，用两根绳子牵引重为 $F_1 = 100$ N 的物体，两根绳子拉力分别为 $F_2$，$F_3$，此时平衡. 如果 $F_2 = 80$ N，$F_2$ 与 $F_3$ 夹角 $\alpha = 135°$.

(1) 求 $F_3$ 的大小（精确到 1 N）；

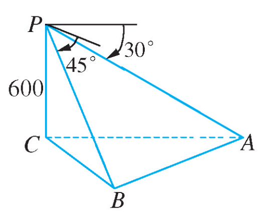
(2) 求 $F_3$ 与 $F_1$ 的夹角 $\beta$ 的值（精确到 0.1°）.

**3.** 如图，货轮在海上以 40 n mile/h 的速度由 $B$ 向 $C$ 航行，航行的方位角 $\angle NBC = 140°$，$A$ 处有灯塔，其方位角 $\angle NBA = 110°$. 在 $C$ 处观察灯塔 $A$ 的方位角 $\angle N'CA = 35°$. 由 $B$ 到 $C$ 需航行 0.5 h，求 $C$ 到灯塔 $A$ 的距离（精确到0.01 n mile）.




（第 3 题）

**4.** 如图，某人在高出海面 600 m 的山上 $P$ 处，测得海面上的航标 $A$ 在正东，俯角为 30°，航标 $B$ 在南偏东 60°，俯角为 45°，求这两个航标间的距离.




（第 4 题）

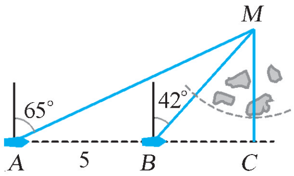
# 习题 1.3

## 感受 · 理解

**1.** 在$\triangle ABC$中，求证：$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$.

**2.** 从 200 m 高的电视塔塔顶 $A$ 测得地面上某两点 $B$，$C$ 的俯角分别为 30° 和 45°，$\angle BAC=45°$，求这两个点之间的距离(精确到 0.1 m).

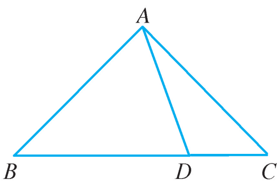
**3.** 飞机的航线和山顶在同一个铅直平面内，已知飞机的高度为海拔 20 250 m，速度为 600 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为 18°30′，经过 288 s 后又看到山顶的俯角为 81°，求山顶的海拔高度(精确到 1 m).



（第 4 题）

**4.** 如图，一船由西向东航行，测得某岛的方位角为 65°，前进5 km后测得此岛的方位角为 42°. 已知该岛周围 3 km 内有暗礁，如果继续东行，有无触礁危险？

**5.** 作用于同一点的三个力 $F_1$，$F_2$，$F_3$ 平衡，且 $F_1$，$F_2$ 的夹角为 $\theta_3$，$F_2$，$F_3$ 的夹角为 $\theta_1$，$F_3$，$F_1$ 的夹角为 $\theta_2$. 求证：$\dfrac{F_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{F_2}{\sin\theta_2}=\dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$.



（第 6 题）

**6.** 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B=45°$，$D$ 是 $BC$ 边上一点，$AD=10$，$AC=14$，$DC=6$，求 $AB$ 的长.

**7.** 把一根长为 30 cm 的木条锯成两段，分别作钝角三角形 $ABC$ 的两边 $AB$ 和 $BC$，且 $\angle ABC=120°$. 如何锯断木条，才能使第三条边 $AC$ 最短？

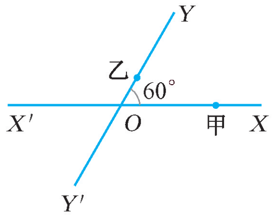
## 思考 · 运用

**8.** 如图，有两条相交成 60°角的直路 $XX'$，$YY'$，交点是 $O$，甲、乙分别在 $OX$，$OY$ 上，起初甲离 $O$ 点 3 km，乙离 $O$ 点 1 km. 后来甲沿 $XX'$的方向，乙沿$Y'Y$ 的方向，同时以 4 km/h 的速度步行.

(1) 起初两人的距离是多少？

(2) $t$ h 后两人的距离是多少？

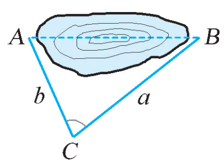
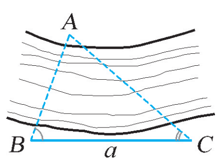
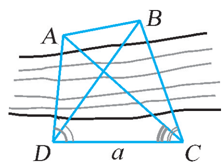
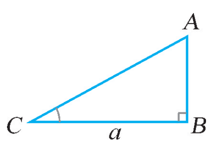
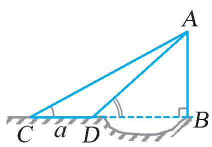
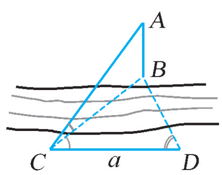
(3) 什么时候两人的距离最短？



（第 8 题）

## 探究 · 拓展

**9.** 解三角形在测量上有着广泛的应用，下面各图描述了测量中的一些基本问题，你能根据图示说出求解 $AB$ 的过程吗？

| | 两点间不可通又不可视 | 两点间可视但不可达 | 两点都不可达 |
|---|---|---|---|
| 求距离 |  |  |  |
| | 底部可达 | 底部不可达 | |
| 求高度 |  |  |  |

# 实习作业　解三角形在测量中的应用

你知道学校的旗杆有多高？

如何测量山高或电视塔的高度？

怎样计算房屋前后的两根电线杆之间的距离？

……

运用本章所学的知识，通过实地测量，你就能顺利地解决上面的问题. 在测量实践中，你可以更好地体会数学在解决实际问题中的作用和价值.

活动建议：

**1.** 准备简单的测量长度、角度的工具(如皮尺、测角器等)；

**2.** 选择适当的测量问题(目标不易直接到达)；

**3.** 设计测量方案；

**4.** 收集数据，利用数据进行计算；

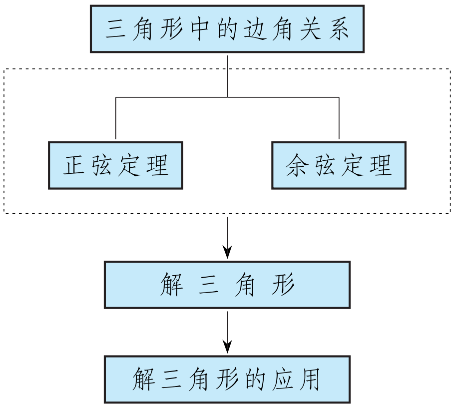
**5.** 完成实习作业报告；

**6.** 班级交流(报告会、墙报展示等).

# 本章回顾

## 本 章 概 览

本章主要学习了正弦定理、余弦定理，以及正弦定理、余弦定理在解决实际问题中的简单应用.




正弦定理、余弦定理是反映三角形边、角关系的重要定理. 利用正弦定理、余弦定理，可以将三角形中的边的关系与角的关系进行相互转化，从而有助于问题的解决，另外，许多几何问题也可以转化为解三角形的问题来研究.

## 内 容 提 要

1. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

2. 余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

3. 三角形的面积公式

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

# 复习题

**感受·理解**

1. 在$\triangle ABC$中，

(1) 已知$a=1$，$A=60^\circ$，$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$C$；

(2) 已知$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，求$A$；

(3) 已知$a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$B=150^\circ$，求$b$.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a-b=c\cos B-c\cos A$，判断$\triangle ABC$的形状.

3. 海上$A$，$B$两个小岛相距10 n mile，从$A$岛望$C$岛和$B$岛所成的视角为$60^\circ$，从$B$岛望$C$岛和$A$岛所成的视角为$75^\circ$，试求$B$岛和$C$岛之间的距离.

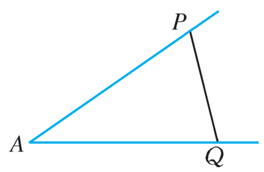
4. 在$O$点的正上方有气球$P$，从$O$点的正西方$A$点，测得气球$P$的仰角为$45^\circ$，同时从$O$点南偏东$45^\circ$的$B$点，测得气球$P$的仰角为$60^\circ$，$A$，$B$两点间的距离为200 m. 问：气球$P$离地面约多少米(精确到1 m)?

5. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角等于$135^\circ$，$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角等于$120^\circ$，$|\boldsymbol{c}|=2$，求$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$.

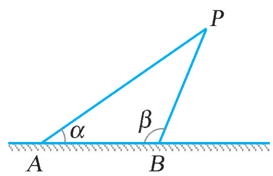
6. 在$\triangle ABC$中，已知$2a=b+c$，$\sin^2 A=\sin B\sin C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

**思考·运用**

7. 如图，已知$\angle A$为定角，$P$，$Q$分别在$\angle A$的两边上，$PQ$为定长. 当$P$，$Q$处于什么位置时，$\triangle APQ$的面积最大?




(第 7 题)




(第 8 题)

8. 外轮除特许外，不得进入离我国海岸线$d$ n mile以内的区域. 如图，设$A$，$B$是相距$s$ n mile的两个观察站，一外轮在$P$点，测得$\angle BAP=\alpha$，$\angle ABP=\beta$，问：$\alpha$，$\beta$满足什么关系时就该向外轮发出警告，令其退出我国海域?

**探究·拓展**

9. (阅读题)在《数学3(必修)》中，我们曾介绍过南宋时期的数学家秦九韶发现的求三角形面积的“三斜求积”公式

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]},$$

它与古希腊数学家海伦给出的三角形面积公式

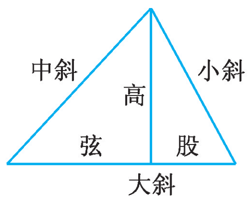
$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad\left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

是一致的.

“三斜求积”公式的证明已经失传，吴文俊教授根据我国古代几何证明的

传统特点作了一个补证.

式中"大"、"中"和"小"分别指"大斜"、"中斜"和"小斜".




$$面积^2=\frac{1}{4}\left[小^2\cdot大^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2}\right)^2\right]$$

(第 9 题)

如图,作大斜上的高分大斜成两部分,作为勾股形的弦和股,由于三角形面积等于"$\frac{1}{2}\times高\times大$"这一事实是我国古代数学家早就知道的,所以问题归结为怎样求高,而高又是可以通过股与小求得,因此只要求出股就可以了.

根据刘徽得出的公式

$$股=\frac{(股弦和)^2-勾^2}{2\times股弦和},$$

知道由股弦和与勾$^2$可以求股,所以问题又归结为求勾$^2$与股弦和.这很简单,因为

$$股弦和=大,勾^2=弦^2-股^2=中^2-小^2,$$

所以

$$股=\frac{(股弦和)^2-勾^2}{2\times股弦和}=\frac{大^2-(中^2-小^2)}{2\times大},$$

$$高^2=小^2-股^2=小^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2\times大}\right)^2.$$

从而得到"三斜求积"公式.

你能用正弦定理和余弦定理证明"三斜求积"公式或海伦公式吗?

# 本章测试

说明：本测试题中，$a$，$b$，$c$ 分别表示$\triangle ABC$ 中角 $A$，$B$，$C$ 所对边的长，$S_{\triangle ABC}$ 表示$\triangle ABC$ 的面积.

## 一、填空题

**1.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $a=8$，$b=7$，$B=30^\circ$，则 $\sin A=$ ________.

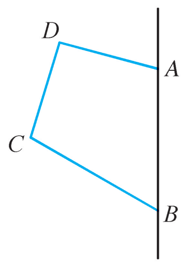
**2.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $b=4\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，$A=120^\circ$，则 $a=$ ________.

**3.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $A=60^\circ$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则 $a=$ ________.

**4.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$，则 $A=$ ________.

**5.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $a\cos B=b\cos A$，则$\triangle ABC$ 的形状是________________.

**6.** 如图，海岸线上有相距 5 n mile 的两座灯塔 $A$，$B$，灯塔 $B$ 位于灯塔 $A$ 的正南方向. 海上停泊着两艘轮船，甲船位于灯塔 $A$ 的北偏西 $75^\circ$ 方向，与 $A$ 相距 $3\sqrt{2}$ n mile 的 $D$ 处；乙船位于灯塔 $B$ 的北偏西 $60^\circ$ 方向，与 $B$ 相距 5 n mile 的 $C$ 处. 则两艘轮船之间的距离为________ n mile.



（第 6 题）

## 二、选择题

**7.** 在$\triangle ABC$ 中，若$\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$，则 $A$ 等于（　　）.

A. $150^\circ$　　B. $120^\circ$

C. $90^\circ$　　D. $60^\circ$

**8.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $a=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，则$\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}$的值为（　　）.

A. $4\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. 2

**9.** 已知 $A$，$B$ 两地的距离为 10 km，$B$，$C$ 两地的距离为 20 km. 现测得$\angle ABC=120^\circ$，则 $A$，$C$ 两地的距离为（　　）.

A. 10 km　　B. $\sqrt{3}$ km

C. $10\sqrt{5}$ km　　D. $10\sqrt{7}$ km

**10.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，则 $C$ 等于（　　）.

A. $30^\circ$　　B. $60^\circ$

C. $120^\circ$　　D. $150^\circ$

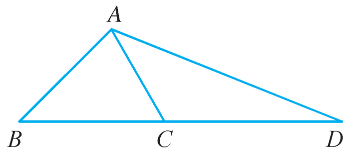
## 三、解答题

**11.** 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a=4\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{3}$，$A=45^\circ$，求 $B$.

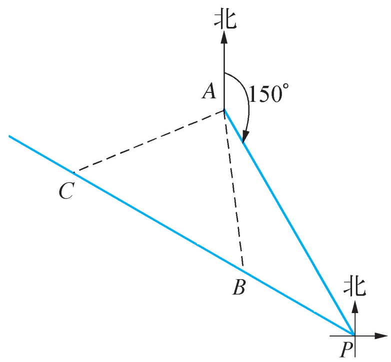
**12.** 在$\triangle ABC$ 中，已知 $A=30^\circ$，$B=105^\circ$，$a=20$，求 $c$ 和$S_{\triangle ABC}$.

**13.** 在$\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A=\dfrac{1}{4}$，$\tan B=\dfrac{3}{5}$. 若$\triangle ABC$ 最大边的长为$\sqrt{17}$，求最小边的长.

**14.** 如图，已知$\triangle ABC$中，$AB=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，$CD=5$，$\angle ABC=45^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$，求$AD$的长.




（第 14 题）




（第 15 题）

**15.** 海滨某城市$A$附近海面上有一台风，在城市$A$测得该台风中心位于方位角$150^\circ$、距离 400 km 的海面$P$处，并以 70 km/h 的速度沿北偏西$60^\circ$的方向移动. 如果台风侵袭的范围是半径为 250 km 的圆形区域，问：几小时后该城市开始受到台风侵袭？（$\sqrt{3}\approx1.732$）

# 第 2 章　数　列

- 数列
  - 数列
  - 等差数列
    - 等差数列的概念
    - 等差数列的通项公式
    - 等差数列的前$n$项和
  - 等比数列
    - 等比数列的概念
    - 等比数列的通项公式
    - 等比数列的前$n$项和

数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正在于各部分之间的联系.

——希尔伯特

大千世界蕴含着无数的自然规律，从细胞分裂到放射性物质的衰变，从树木的生成模式到葵花种子、鹦鹉螺壳花纹的排列……它们各有其消长的方式和特点.

在日常生活中，我们经常会遇到存款利息、购房贷款、资产折旧等实际计算问题.

描述、解决上述问题，就要用到本章我们将要学习的数列的有关知识. 在本章中，我们主要研究两种特殊的数列——等差数列和等比数列.

- 等差数列和等比数列各有什么特点？
- 如何运用等差数列和等比数列解决有关的实际问题？

## 2.1 数列

考察下面的问题：

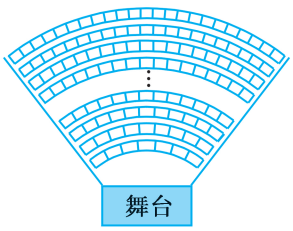



图 2－1－1

某剧场有 30 排座位，第一排有 20 个座位，从第二排起，后一排都比前一排多 2 个座位(图 2－1－1)，那么各排的座位数依次为

$$20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ \cdots. \qquad ①$$

人们在 1740 年发现了一颗彗星，并推算出这颗彗星每隔 83 年出现一次，那么从发现那次算起，这颗彗星出现的年份依次为

$$1740,\ 1823,\ 1906,\ 1989,\ 2072,\ \cdots. \qquad ②$$

某种细胞，如果每个细胞每分钟分裂为 2 个，那么每过 1 分钟，1 个细胞分裂的个数依次为

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots. \qquad ③$$

“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的意思为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完. 如果将“一尺之棰”视为 1 份，那么每日剩下的部分依次为

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots. \qquad ④$$

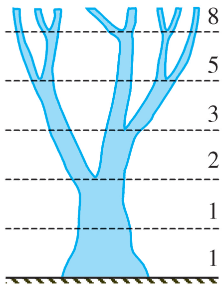



图 2－1－2

某种树木第 1 年长出幼枝，第 2 年幼枝长成粗干，第 3 年粗干可生出幼枝(图 2－1－2)，那么按照这个规律，各年树木的枝干数依次为

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots. \qquad ⑤$$

从 1984 年到 2004 年，我国共参加了 6 次奥运会，各次参赛获得的金牌总数依次为

$$15,\ 5,\ 16,\ 16,\ 28,\ 32. \qquad ⑥$$

● 这些问题有什么共同的特点？

像这样按照一定次序排列的一列数称为**数列**(sequence of number)，数列中的每个数都叫做这个数列的**项**(term). 项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列.

数列的一般形式可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

简记为$\{a_n\}$，其中 $a_1$ 称为数列$\{a_n\}$的第 1 项(或称为**首项**)，$a_2$ 称为第

2 项，…，$a_n$ 称为第 $n$ 项.

在数列$\{a_n\}$中，对于每一个正整数 $n$(或 $n\in\{1,2,\cdots,k\}$)，都有一个数 $a_n$ 与之对应，因此，数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,k\}$)为定义域的函数 $a_n=f(n)$，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一列函数值．反过来，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(i)(i=1,2,3,\cdots)$ 有意义，那么我们可以得到一个数列

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots.$$

**例 1** 已知数列的第 $n$ 项 $a_n$ 为 $2n-1$，写出这个数列的首项、第 2 项和第 3 项.

**解** 首项为 $a_1=2\times1-1=1$；

第 2 项为 $a_2=2\times2-1=3$；

第 3 项为 $a_3=2\times3-1=5$.

在例 1 中，第 $n$ 项 $a_n$ 可用一个公式 $2n-1$ 来表示．一般地，如果数列$\{a_n\}$的第 $n$ 项与序号 $n$ 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式叫做这个数列的**通项公式**(the formula of general term).

数列可以用通项公式来描述，也可以通过列表或图象来表示.

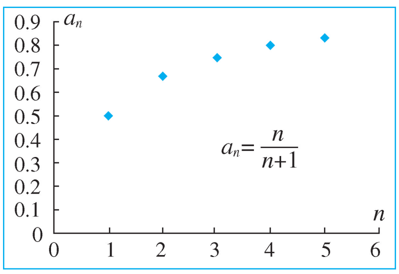
**例 2** 已知数列$\{a_n\}$的通项公式，写出这个数列的前 5 项，并作出它的图象：

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　(2) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

**解** 我们用列表法分别给出这两个数列的前 5 项.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{2}{3}$ | $\dfrac{3}{4}$ | $\dfrac{4}{5}$ | $\dfrac{5}{6}$ |
| $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{4}$ | $-\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{1}{16}$ | $-\dfrac{1}{32}$ |

它们的图象如图 2－1－3 所示.



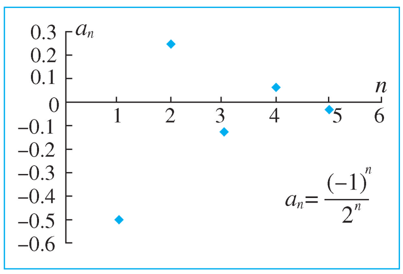




图 2－1－3

**例 3**　写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\frac{1}{1\times 2}$, $-\frac{1}{2\times 3}$, $\frac{1}{3\times 4}$, $-\frac{1}{4\times 5}$;

(2) 0，2，0，2.

写出数列的通项公式，就是寻找 $a_n$ 与 $n$ 的对应关系 $a_n=f(n)$.

**解**　(1) 这个数列的前 4 项的分母都等于序号与序号加 1 的积，且奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

(2) 这个数列的奇数项是 0，偶数项是 2，所以它的一个通项公式是

$$a_n=1+(-1)^n.$$

## EXCEL

已知数列的通项公式，我们可以在 Excel 中方便地作出这个数列的图象，进而观察它的变化趋势.

例如，在单元格 A1，A2 内分别输入 1，2，选中这两个单元格后向下拖曳填充柄，生成序号 1，2，3，…. 在 B1 内输入“=A1/(A1+1)”，双击 B1 的填充柄，就得到与序号相对应的项.

选中 A，B 两列，插入“图表”，选择“XY 散点图”，可得数列 $a_n=\frac{n}{n+1}$ 的图象(图 2-1-4).

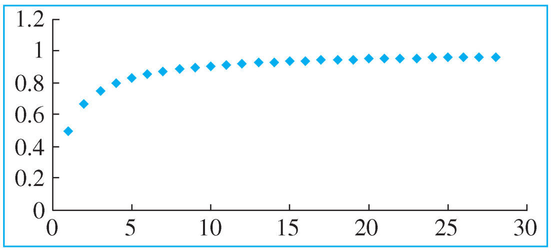



图 2-1-4

## 练　习

1. 举出一些数列的例子.
2. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：
   (1) $a_n=1-3n$;　　(2) $a_n=(-1)^n 2n$.
3. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第 6 项和第 10 项：
   (1) $a_n=n^2+n$;　　(2) $a_n=5-2^{n-1}$.
4. 37 是否为数列 $\{3n+1\}$ 中的项？如果是，是第几项？
5. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：
   (1) $-1$，2，$-3$，4；
   (2) 2，4，6，8；
   (3) 1，4，9，16；

(4) $1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

**6.** 写出本节开始问题中数列①,③的通项公式,并作出它的图象.

## 习题 2.1

**感受·理解**

**1.** 分别写出下面的数列:

(1) 在 0～16 之间的奇数按从小到大的顺序构成的数列;

(2) 在 0～16 之间的质数按从小到大的顺序构成的数列.

**2.** 根据数列$\{a_n\}$的通项公式,写出它的前 5 项:

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$;

(2) $a_n=(-1)^n(n^2-1)$;

(3) $a_n=|2n-7|$.

**3.** 写出数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 2, 4, 8, 16;　　(2) 1, 8, 27, 64;

(3) $-1$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$;　　(4) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2.

**4.** 写出一个分别满足下列条件的数列$\{a_n\}$的通项公式:

(1) 从第 2 项起,每一项都比它的前一项大 2;

(2) 各项均不为 0,且从第二项起,每一项都是它的前一项的 3 倍.

**5.** 已知数列 $\{n(n+2)\}$.

(1) 写出这个数列的第 8 项和第 20 项;

(2) 323 是不是这个数列中的项? 如果是,是第几项?

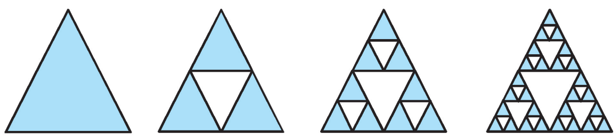
**6.** 写出数列$\{a_n\}$的前 5 项,并作出它的图象:

(1) $a_n=2n+3$;　　(2) $a_n=3$;

(3) $a_n=\frac{1}{3}(2^n-1)$;　　(4) $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数;}\\ 2n-1, & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$

**思考·运用**

**7.** 下图中的三角形称为希尔宾斯基三角形.图中从左向右的四个三角形,着色三角形的个数依次构成数列$\{a_n\}$的前 4 项,写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式,并作出它的图象.



(第 7 题)

**8.** 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2+3n+2$,56 是这个数列中的项吗? 如果是,是第几项?

**9.** 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2-8n+5$.

(1) 写出这个数列的前 5 项,并作出它的图象;

(2) 这个数列所有项中有没有最小的项?

# 2.2 等差数列

## 2.2.1 等差数列的概念

回顾本章第 2.1 节开始我们遇到的数列①,②,再考察下面的问题:

第 23 届到第 28 届奥运会举行的年份依次为

$$1984,\ 1988,\ 1992,\ 1996,\ 2000,\ 2004.$$

某电信公司的一种计费标准是:通话时间不超过 3 分钟,收话费 0.2 元,以后每分钟收话费 0.1 元.那么通话费按从小到大的次序依次为

$$0.2,\ 0.2+0.1,\ 0.2+0.1\times2,\ 0.2+0.1\times3,\ \cdots.$$

如果 1 年期储蓄的月利率为 1.65‰,那么将 10 000 元分别存 1 个月,2 个月,3 个月,……,12 个月,所得的本利和依次为

$$10\ 000+16.5,\ 10\ 000+16.5\times2,\ \cdots,\ 10\ 000+16.5\times12.$$

"本利和"是指本金与利息的和,按照单利计算本利和的公式是

本利和 = 本金 ×(1 + 利率 × 存期).

● 上面这些数列有什么共同的特点?

一般地,如果一个数列从第二项起,每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫做**等差数列**(arithmetic progression),这个常数叫做等差数列的**公差**(common difference),公差通常用 $d$ 表示.

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,始终有

$a_{n+1}-a_n=d$.

**思　考**

你能再举出一些等差数列的例子吗?

**例 1**　判断下列数列是否为等差数列:

(1) 1, 1, 1, 1, 1;

(2) 4, 7, 10, 13, 16;

(3) −3, −2, −1, 1, 2, 3.

**解**　(1) 所给数列是首项为 1,公差为 0 的等差数列.

(2) 所给数列是首项为 4,公差为 3 的等差数列.

(3) 因为

$$(-1)-(-2)\neq 1-(-1),$$

所以这个数列不是等差数列.

**例 2** 求出下列等差数列中的未知项:

(1) 3, $a$, 5;

(2) 3, $b$, $c$, $-9$.

**解** (1) 根据题意,得

$$a-3=5-a,$$

解得

$$a=4.$$

(2) 根据题意,得

$$\begin{cases} b-3=c-b, \\ c-b=-9-c, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b=-1, \\ c=-5. \end{cases}$$

**例 3** (1) 在等差数列$\{a_n\}$中,是否有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}(n\geqslant 2)?$$

(2) 在数列$\{a_n\}$中,如果对于任意的正整数 $n(n\geqslant 2)$,都有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

那么数列$\{a_n\}$一定是等差数列吗?

**解** (1) 因为$\{a_n\}$是等差数列,所以

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2),$$

所以

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

(2) 在数列$\{a_n\}$中,如果对于任意的正整数 $n(n\geqslant 2)$ 都有

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

那么

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2).$$

这表明,这个数列从第2项起,后一项减去前一项所得的差始终相等,所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

**练 习**

1. 判断下列数列是否为等差数列:
(1) $-1, -1, -1, -1, -1$;
(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$;
(3) $1, 0, 1, 0, 1, 0$;
(4) $2, 4, 6, 8, 10, 12$;
(5) $7, 12, 17, 22, 27$.
2. 目前男子举重比赛共有10个级别,除108公斤以上级别外,其余的9个级别从轻到重依次为(单位:kg):54,59,64,70,76,83,91,99,108.这个数列是等差数列吗?
3. 已知下列数列是等差数列,试在括号内填上适当的数:
(1) ( ), 5, 10;　　(2) 1, $\sqrt{2}$, ( );
(3) 31, ( ), ( ), 10.
4. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列.
(1) 如果$a_1=2$, $a_3=6$,求公差$d$和$a_2$;
(2) 如果$a_2=2$, $a_3=5$,求公差$d$和$a_1$;
(3) 如果$a_1=1$, $a_2=4$,求公差$d$和$a_6$.
5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式,判断它是否为等差数列:
(1) $a_n=3n+1$;　　(2) $a_n=4-2n$;
(3) $a_n=n^2$;　　(4) $a_n=0$.
6. 已知$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n}$是公差为$d$的等差数列.
(1) $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$也是等差数列吗?如果是,公差是多少?
(2) $a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2n}$也是等差数列吗?如果是,公差是多少?

## 2.2.2 等差数列的通项公式

观察等差数列$\{a_n\}$

$$4, 7, 10, 13, 16, \cdots,$$

如何写出它的第100项$a_{100}$呢?

我们有

$$a_1=4,$$
$$a_2=7=4+3,$$
$$a_3=10=4+3\times 2,$$
$$a_4=13=4+3\times 3,$$
$$\cdots\cdots$$

从而

$$a_{100}=4+3\times 99=301.$$

● 设$\{a_n\}$是一个首项为$a_1$，公差为$d$的等差数列，你能写出它的第$n$项$a_n$吗？

一般地，对于等差数列$\{a_n\}$的第$n$项$a_n$，有

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

这就是等差数列$\{a_n\}$的通项公式，其中$a_1$为首项，$d$为公差.

**证** 因为$\{a_n\}$为等差数列，所以当$n\geqslant 2$时，有

$$\begin{aligned}&a_2-a_1=d,\\&a_3-a_2=d,\\&\cdots\cdots\\&a_n-a_{n-1}=d.\end{aligned}$$

将上面$n-1$个等式的两边分别相加，得

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

所以

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

当$n=1$时，上面的等式也成立.

**例 1** 第一届现代奥运会于1896年在希腊雅典举行，此后每4年举行一次. 奥运会如因故不能举行，届数照算.

(1) 试写出由举行奥运会的年份构成的数列的通项公式；

(2) 2008年北京奥运会是第几届？2050年举行奥运会吗？

**解** (1) 由题意知，举行奥运会的年份构成的数列是一个以1 896为首项，4为公差的等差数列. 这个数列的通项公式为

$$\begin{aligned}a_n&=1\,896+4(n-1)\\&=1\,892+4n\quad(n\in\mathbf{N}^*).\end{aligned}$$

(2) 假设$a_n=2\,008$，由$2\,008=1\,892+4n$，得$n=29$.

假设$a_n=2\,050$，$2\,050=1\,892+4n$无正整数解.

**答** 所求通项公式为$a_n=1\,892+4n(n\in\mathbf{N}^*)$，2008年北京奥运会是第29届奥运会，2050年不举行奥运会.

**例 2** 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_3=10$，$a_9=28$，求$a_{12}$.

**解** 由题意，得

$$\begin{cases}a_1+2d=10,\\a_1+8d=28.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

所以

$$a_{12} = 4 + (12-1) \times 3 = 37.$$

**例 3**　已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = 2n-1$，求首项 $a_1$ 和公差 $d$.

或 $d = a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2$.

**解**

$$a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1,$$

$$a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3,$$

所以

$$d = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2.$$

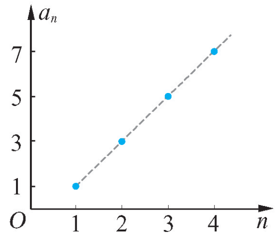


图 2－2－1

在例 3 中，等差数列的通项公式

$$a_n = 2n - 1$$

是关于 $n$ 的一次式，从图象上看(图 2－2－1)，表示这个数列的各点$(n, a_n)$均在直线 $y = 2x - 1$ 上.

**思　考**

如果一个数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n = kn + b$，其中 $k$，$b$ 都是常数，那么这个数列一定是等差数列吗？

**练　习**

**1.** 求下列等差数列的第 $n$ 项：

(1) 2，6，10，…；

(2) 13，9，5，…；

(3) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，….

**2.** (1) 求等差数列 8，5，2，…的第 20 项；

(2) 等差数列－5，－9，－13，…的第几项是－401？

(3) －20 是不是等差数列 0，$-\frac{7}{2}$，－7，…的项？如果是，是第几项？如果不是，请说明理由.

**3.** 等差数列$\{a_n\}$的首项为 $a_1$，公差为 $d$，项数为 $n$.

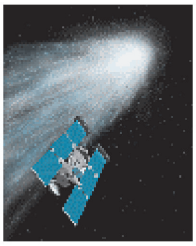
(1) 已知 $a_1 = 3$，$d = 2$，$n = 6$，求 $a_n$；

(2) 已知 $a_1 = 1$，$d = 2$，$a_n = 15$，求 $n$；

(3) 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$，$n = 5$，$a_n = 8$，求 $d$；

(4) 已知 $d = -\frac{3}{2}$，$n = 12$，$a_n = -8$，求 $a_1$.

4. 已知等差数列的通项公式为 $a_n=1-\frac{1}{2}n$，求它的首项和公差，并画出它的图象.



5. 诺沃尔(Knowall)在1740年发现了一颗彗星，并推算出在1823年、1906年、1989年……人们都可以看到这颗彗星，即彗星每隔83年出现一次.

(1) 从发现那次算起，彗星第8次出现是在哪一年?

(2) 你认为这颗彗星在2500年会出现吗? 为什么?

6. 某滑轮组由直径成等差数列的6个滑轮组成. 已知最小和最大的滑轮的直径分别为15 cm和25 cm，求中间四个滑轮的直径.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_5=19$，$a_8=10$，求 $a_1$ 和 $d$；

(2) 已知 $a_4=10$，$a_{10}=4$，求 $a_{14}$.

## 习题 2.2(1)

**感受·理解**

1. 判断下列数列是否为等差数列：

(1) $\frac{1}{2}$，$1$，$\frac{3}{2}$，$2$，$\frac{5}{2}$；

(2) $4$，$2$，$0$，$-2$，$-4$；

(3) $1$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$2$.

2. 求出下列等差数列中的未知项：

(1) $a$，$b$，$-10$，$c$，$-20$；

(2) $x$，$\lg 3$，$\lg 6$，$y$.

3. 求下列等差数列的第 $n$ 项：

(1) $-1,3,7,11,\cdots$；

(2) $13,8,3,-2,\cdots$；

(3) $\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-1$，$-\frac{5}{3}$，$\cdots$.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=-1$，$d=4$，求 $a_8$；

(2) 已知 $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 $a_1$；

(3) 已知 $a_1=9$，$d=-2$，$a_n=-15$，求 $n$.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_3=31$，$a_7=76$，求 $a_1$ 和 $d$；

(2) 已知 $a_4=4$，$a_8=-4$，求 $a_{12}$；

(3) 已知 $a_3=7$，$a_6=16$，求 $a_{10}$；

(4) 已知 $a_1+a_6=12$，$a_4=7$，求 $a_9$.

6. 一个等差数列的第40项等于第20项与第30项的和，且公差是$-10$，试求首项和第10项.

7. 一种变速自行车后齿轮组由5个齿轮组成，它们的齿数成等差数列，其中最小和最大的齿轮的齿数分别为12和28，求中间三个齿轮的齿数.

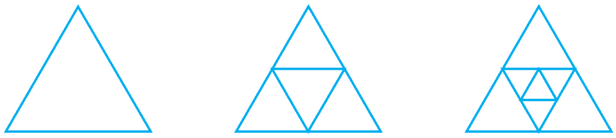
**8.** 已知等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=16$，公差 $d=-\frac{3}{4}$.

(1) 此等差数列中从第几项开始出现负数？

(2) 当$|a_n|$最小时，求 $n$.

**9.** 三个数成等差数列，它们的和是 15，它们的平方和等于 83，求这三个数.

**10.** 如图(1)是一个三角形，分别连结这个三角形三边的中点，将原三角形剖分成 4 个三角形(如图(2))，再分别连结图(2)中间的一个小三角形三边的中点，又可将原三角形剖分成 7 个三角形(如图(3)). 依此类推，第 $n$ 个图中原三角形被剖分为 $a_n$ 个三角形.



(1)　　(2)　　(3)

(第 10 题)

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 第 100 个图中原三角形被剖分为多少个三角形？

**11.** 如果 $a$，$A$，$b$ 这三个数成等差数列，那么 $A=\frac{a+b}{2}$. 我们把 $A=\frac{a+b}{2}$ 叫做 $a$ 和 $b$ 的**等差中项**. 试求下列各组数的等差中项：

(1) $7+3\sqrt{5}$ 和 $7-3\sqrt{5}$；

(2) $(m+n)^2$ 和$(m-n)^2$.

**12.** 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 $a_1$，公差为 $d$.

(1) 将数列$\{a_n\}$中的每一项都乘以常数 $a$，所得的新数列仍是等差数列吗？如果是，公差是多少？

(2) 由数列$\{a_n\}$中的所有奇数项按原来的顺序组成的新数列$\{c_n\}$是等差数列吗？如果是，它的首项和公差分别是多少？

## 思考・运用

**13.** 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d$，求证：$a_n-a_m=(n-m)d$，其中 $n,m\in\mathbf{N}^*$.

**14.** 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个无穷等差数列，公差分别为 $d_1$ 和 $d_2$，求证：数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列，并求它的公差.

**15.** 已知$\{a_n\}$是等差数列，当 $m+n=p+q$ 时，是否一定有 $a_m+a_n=a_p+a_q$？

**16.** 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_p=q$，$a_q=p(p\neq q)$，求 $a_{p+q}$.

## 探究・拓展

这个方筛的奥妙在于：如果某个自然数 $n$ 出现在表中，那么 $2n+1$ 肯定不是质数；如果 $n$ 在表中不出现，那么 $2n+1$ 肯定是质数.

**17.** 1934 年，东印度(今孟加拉国)学者森德拉姆(Sundaram)发现了“正方形筛子”：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | … |
| 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | … |
| 10 | 17 | 24 | 31 | 38 | … |
| 13 | 22 | 31 | 40 | 49 | … |
| 16 | 27 | 38 | 49 | 60 | … |
| … | … | … | … | … | … |

(1) 这个“正方形筛子”的每一行有什么特点？每一列呢？

(2) “正方形筛子”中位于第 100 行的第 100 个数是多少？

## 2.2.3 等差数列的前 $n$ 项和

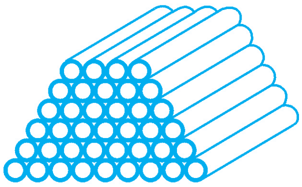


图 2－2－2

先考察图 2－2－2. 这是某仓库堆放的一堆钢管，最上面的一层有 4 根钢管，下面的每一层都比上一层多一根，最下面的一层有 9 根，怎样计算这堆钢管的总数呢？

假设在这堆钢管旁边倒放着同样一堆钢管(图 2－2－3).

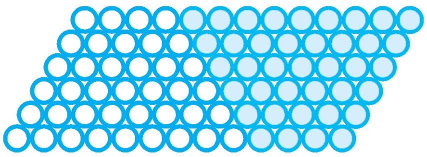


图 2－2－3

这样，每层的钢管数都等于 4＋9，共有 6 层. 从而原来一堆钢管的总数为

$$\frac{6\times(4+9)}{2}=39.$$

● 一般地，如何求等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n$？

设等差数列$\{a_n\}$的首项为 $a_1$，公差为 $d$，则

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d].\end{aligned}\qquad ①$$

把各项的次序反过来，$S_n$ 又可以写成

$$\begin{aligned}S_n&=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1\\&=a_n+(a_n-d)+\cdots+[a_n-(n-1)d].\end{aligned}\qquad ②$$

由①＋②得

$$\begin{aligned}2S_n&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n(a_1+a_n),\end{aligned}$$

由此可得等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

等差数列前 $n$ 项的和等于首末两项和的一半的 $n$ 倍.

根据等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，又可得到

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

**例 1** 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=3$，$a_{50}=101$，求 $S_{50}$；

(2) 已知 $a_1=3$，$d=\frac{1}{2}$，求 $S_{10}$.

**解** (1) 根据等差数列前 $n$ 项和公式，得

$$S_{50}=\frac{3+101}{2}\times 50=2\,600.$$

(2) 根据等差数列前 $n$ 项和公式，得

$$S_{10}=10\times 3+\frac{10\times 9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{105}{2}.$$

**例 2** 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $d=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{3}{2}$，$S_n=-\frac{15}{2}$，求 $a_1$ 及 $n$.

**解** 由题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+\frac{3}{2}}{2}\times n=-\dfrac{15}{2}, & ①\\ a_1+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}. & ②\end{cases}$$

在等差数列的通项公式与前 $n$ 项和公式中，含有 $a_1$，$d$，$n$，$a_n$，$S_n$ 五个量，只要已知其中的三个量，就可以求出余下的两个量.

由②，得

$$a_1=-\frac{1}{2}n+2,$$

代入①后化简，得

$$n^2-7n-30=0.$$

所以 $n=10$ 或 $-3$(舍去)，从而 $a_1=-3$.

**例 3** 在等差数列$\{a_n\}$中，已知第 1 项到第 10 项的和为 310，第 11 项到第 20 项的和为 910，求第 21 项到第 30 项的和.

**解** 设等差数列的首项为 $a_1$，公差为 $d$，由题意，得

$$\begin{cases}S_{10}=310,\\ S_{20}-S_{10}=910,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=310,\\ 20a_1+\dfrac{20\times 19}{2}d-310=910,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 6. \end{cases}$$

所以 $a_{21} = 4 + 20 \times 6 = 124$，于是

$$a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{30} = 10 \times 124 + \frac{10 \times 9}{2} \times 6 = 1\ 510,$$

即第 21 项到第 30 项的和为 1 510.

## 练 习

1. 某商店的售货员想在货架上用三角形排列方式展示一种罐头饮料，底层放置 15 个罐头，第 2 层放置 14 个罐头，第 3 层放置 13 个罐头……顶层放置一个罐头，这样的摆法需要多少个罐头？
2. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_1 = 7$，$a_{10} = -43$，求 $S_{10}$；
   (2) 已知 $a_1 = 100$，$d = -2$，求 $S_{50}$.
3. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_1 = 1$，$d = 2$，$n = 15$，求 $a_n$ 和 $S_n$；
   (2) 已知 $a_1 = -13$，$d = 2$，$a_n = 7$，求 $n$ 和 $S_n$；
   (3) 已知 $a_1 = 8$，$n = 5$，$a_n = \frac{1}{2}$，求 $d$ 和 $S_n$；
   (4) 已知 $a_n=2$，$n=12$，$S_n=90$，求 $a_1$ 和 $d$.
4. 在等差数列$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，…中，
   (1) 求前 20 项的和；
   (2) 已知前 $n$ 项的和为$\frac{155}{2}$，求 $n$ 的值.
5. 在等差数列$\{a_n\}$中，
   (1) 已知 $a_{15} = -10$，$d = 2$，求 $S_{20}$；
   (2) 已知 $a_5 = 8$，$a_9 = 24$，求 $a_n$ 和 $S_n$；
   (3) 已知 $a_5 = 8$，求 $S_9$.
6. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $S_8 = 100$，$S_{16} = 392$，试求 $S_{24}$.

**例 4** 某剧场有 20 排座位，后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 60 个座位，这个剧场共有多少个座位？

**解** 这个剧场各排的座位数组成等差数列$\{a_n\}$，其中公差 $d = 2$，项数 $n = 20$，且第 20 项是 $a_{20} = 60$.

由等差数列的通项公式，得

$$60 = a_1 + (20 - 1) \times 2,$$

所以

$$a_1 = 22.$$

由等差数列的求和公式，得

$$S_{20}=\frac{20\times(22+60)}{2}=820.$$

**答** 这个剧场共有 820 个座位.

图 2－2－4

**例 5** 某种卷筒卫生纸绕在盘上，空盘时盘芯直径 40 mm，满盘时直径 120 mm(图 2－2－4).已知卫生纸的厚度为 0.1 mm，问：满盘时卫生纸的总长度大约是多少米(精确到 1 m)？

**解** 卫生纸的厚度为 0.1 mm，可以把绕在盘上的卫生纸近似地看做是一组同心圆，然后分别计算各圆的周长，再求总和.

由内向外各圈的半径分别为

$$20.05,\ 20.15,\ \cdots,\ 59.95.$$

各圈的半径为该层纸的中心线至盘芯中心的距离.

因此，各圈的周长分别为

$$40.1\pi,\ 40.3\pi,\ \cdots,\ 119.9\pi.$$

因为各圈半径组成首项为 20.05，公差为 0.1 的等差数列，设圈数为 $n$，则

$$59.95=20.05+(n-1)\times 0.1,$$

所以 $n=400$.

显然，各圈的周长组成一个首项为 $40.1\pi$，公差为 $0.2\pi$，项数为 400 的等差数列.根据等差数列的求和公式，得

$$\begin{aligned}S&=400\times 40.1\pi+\frac{400\times(400-1)}{2}\times 0.2\pi\\&=32\,000\pi(\mathrm{mm}).\end{aligned}$$

$$32\,000\pi(\mathrm{mm})\approx 100(\mathrm{m}).$$

**答** 满盘时卫生纸的长度约为 100 m.

**例 6** 教育储蓄是一种零存整取定期储蓄存款，它享受整存整取利率，利息免税.教育储蓄的对象为在校小学四年级(含四年级)以上的学生.假设零存整取 3 年期教育储蓄的月利率为 2.1‰.

教育储蓄可选择 1 年、3 年、6 年这三种存期，起存金额 50 元，存款总额不超过 2 万元.

(1) 欲在 3 年后一次支取本息合计 2 万元，每月大约存入多少元？

(2) 零存整取 3 年期教育储蓄每月至多存入多少元？此时 3 年后本息合计约为多少(精确到 1 元)？

**解** (1) 设每月存 $A$ 元，则有

存款是按月存的，3 年存 36 次，最后一次有一个月的利息.

$$A(1+2.1‰)+A(1+2\times 2.1‰)+\cdots+A(1+36\times 2.1‰)$$
$$=20\ 000.$$

利用等差数列求和公式，得

$$A\left(36+36\times 2.1‰+\frac{36\times 35}{2}\times 2.1‰\right)=20\ 000,$$

解得

$$A\approx 535(\text{元}).$$

(2) 由于教育储蓄的存款总额不超过 2 万元，所以 3 年期教育储蓄每月至多可存入 $\frac{20\ 000}{36}\approx 555$(元). 这样，3 年后的本息和为

$$555(1+2.1‰)+555(1+2\times 2.1‰)+\cdots+555(1+36\times 2.1‰)$$
$$=555\left(36+36\times 2.1‰+\frac{36\times 35}{2}\times 2.1‰\right)$$
$$\approx 20\ 756(\text{元}).$$

**答** 欲在 3 年后一次支取本息 2 万元，每月大约存入 535 元. 3 年期教育储蓄每月至多存入 555 元，3 年后本息合计约 20 756 元.

**探 究**

## 教育储蓄的收益与比较

到附近银行收集本地区有关教育储蓄的信息，并尝试解决下面的问题.

(1) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期时一次可支取本息共多少元?

(2) 依教育储蓄的方式，每月存 $a$ 元，连续存 3 年，到期时一次可支取本息共多少元?

(3) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期时一次可支取本息比同档次的“零存整取”多收益多少元?

(4) 欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 $a$ 万元，每月应存入多少元?

(5) 依教育储蓄的方式，原打算每月存 100 元，连续存 6 年，可是到 4 年时，学生需要提前支取全部本息，一次可支取本息共多少元?

(6) 不用教育储蓄的方式，而用其他的储蓄形式，以每月可存 100 元，6 年后使用为例，探讨以现行的利率标准可能获得的最大收益，将得到的结果与教育储蓄比较.

**练 习**

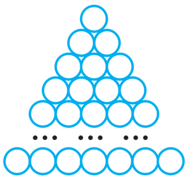
1. 为了参加学校的长跑比赛，某同学制定了一个 12 天的训练计划：第一天跑 2 000 m，以后每天比前一天多跑 250 m. 这个同学在这 12 天中一共跑了多少米?

2. 求集合 $\{m \mid m=2n-1, n\in \mathbf{N}^*, 且\ m<60\}$ 的元素个数，并求这些元素的和.

3. 一个多边形的周长等于 158 cm，所有各边的长成等差数列，最大边的长等于 44 cm，公差等于 3 cm，求该多边形的边数.

4. 已知一个凸多边形各个内角的度数组成公差为 5°的等差数列，且最小角为 120°，则它是几边形？

5. 某钢材库新到 200 根相同的圆钢，要把它们堆放成正三角形垛（如图），并使剩余的圆钢尽可能地少，那么将剩余多少根圆钢？


（第 5 题）

## 习题 2.2(2)

**感受 · 理解**

1. 求下列等差数列的各项的和：

(1) 1，5，9，…，401；

(2) $-3, -\frac{3}{2}, 0, \cdots, 30$；

(3) 0.7，2.7，4.7，…，56.7；

(4) $-10, -9.9, -9.8, \cdots, -0.1$.

2. 求和：

(1) $\sum\limits_{k=0}^{10}(3+0.25k)$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{20}(1-2n)$.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，求它的前 $n$ 项和 $S_n$.

(1) $a_n=2n+1$；

(2) $a_n=3n-1$；

(3) $a_n=9-4n$；

(4) $a_n=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}n$.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，求 $d$ 及 $n$；

(2) 已知 $d=\frac{1}{3}$，$n=37$，$S_n=629$，求 $a_1$ 及 $a_n$；

(3) 已知 $a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求 $n$ 及 $a_n$；

(4) 已知 $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求 $a_1$ 及 $S_n$.

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_6=10$，$S_5=5$，求 $S_8$；

(2) 已知 $S_4=2$，$S_9=-6$，求 $S_{12}$；

(3) 已知 $a_2+a_4+a_6=-3$，$a_3+a_5+a_7=6$，求 $S_{20}$；

(4) 已知 $S_3=6$，$S_6=-8$，求 $S_9$.

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $d=2$，$S_{20}=400$.

(1) 求 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$；

(2) 求 $a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{20}$.

**7.** 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4+a_{14}=1$,求 $S_{17}$；

(2) 已知 $a_{11}=20$,求 $S_{21}$；

(3) 已知 $S_{11}=66$，求 $a_6$；

(4) 已知 $S_4=2$,$S_8=6$,求 $S_{16}$.

**8.** 一个等差数列的前 12 项和为 354,前 12 项中,偶数项的和与奇数项的和之比为 32∶27,求公差 $d$.

**思考·运用**

**9.** 已知等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和$S_n=5n^2+3n$，写出它的前 3 项,并求这个数列的通项公式.

**10.** 一个物体从 1 960 m 的高空落下,如果该物体第 1 秒降落 4.90 m,以后每秒比前一秒多降落 9.80 m,那么经过几秒钟才能落到地面?

**11.** 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-3$，$11a_5=5a_8$，求前 $n$ 项和 $S_n$ 的最小值.

**探究·拓展**

**12.** 如果等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,那么 $S_{10}$,$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$是否成等差数列? 你能得到更一般的结论吗?

**13.** 观察：

$$
\begin{gathered}
1\\
1+2+1\\
1+2+3+2+1\\
1+2+3+4+3+2+1\\
\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

(1) 第 100 行是多少个数的和? 这些数的和是多少?

(2) 计算第 $n$ 行的值.

# 2.3 等比数列

## 2.3.1 等比数列的概念

回顾本章第 2.1 节开始我们遇到的数列③，④，再考察下面的问题：

放射性物质以一定的速度衰变，该速度正比于当时该物质的质量. 如果某个质量为 $Q_0$ 的放射性物质在时间 $h$ 中衰变到 $\frac{Q_0}{2}$，那么称 $h$ 为物质的半衰期. 镭的半衰期是 1 620 年，如果从现有的 10 g 镭开始，那么每隔 1 620 年，剩余量依次为

$$10，10\times\frac{1}{2}，10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2，10\times\left(\frac{1}{2}\right)^3，\cdots.$$

某轿车的售价约 36 万元，年折旧率约为 10%(就是说这辆车每年减少它的价值的 10%)，那么该车从购买当年算起，逐年的价值依次为

$$36，36\times0.9，36\times0.9^2，36\times0.9^3，\cdots.$$

复利的本利和公式是

本利和 = 本金 × (1 + 利率)$^{\text{存期}}$.

某人年初投资 10 000 元，如果年收益率是 5%，那么按照复利，5 年内各年末的本利和依次为

$$10\ 000\times1.05，10\ 000\times1.05^2，\cdots，10\ 000\times1.05^5.$$

● 与等差数列相比，上面这些数列有什么特点？

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，始终有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做**等比数列**(geometric progression)，这个常数叫做等比数列的**公比**(common ratio)，公比通常用字母 $q$ 表示.

**例 1** 判断下列数列是否为等比数列：

(1) 1，1，1，1，1；

(2) 0，1，2，4，8；

(3) $1，-\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，-\frac{1}{8}，\frac{1}{16}$.

**解** (1) 所给数列是首项为 1，公比为 1 的等比数列.

(2) 因为 0 不能作除数，所以这个数列不是等比数列.

(3) 所给数列是首项为1,公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

**例2** 求出下列等比数列中的未知项:

(1) 2, $a$, 8;

(2) $-4$, $b$, $c$, $\frac{1}{2}$.

**解** (1) 根据题意,得

$$\frac{a}{2}=\frac{8}{a},$$

所以

$$a=4 \text{ 或 } a=-4.$$

(2) 根据题意,得

$$\begin{cases}\dfrac{b}{-4}=\dfrac{c}{b},\\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2}}{c}=\dfrac{c}{b},\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}b=2,\\ c=-1.\end{cases}$$

所以

$$b=2,\ c=-1.$$

**例3** (1) 在等比数列$\{a_n\}$中,是否有

$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant 2)?$$

(2) 如果在数列$\{a_n\}$中,对于任意的正整数$n(n\geqslant 2)$,都有

$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1},$$

那么,$\{a_n\}$一定是等比数列吗?

**解** (1) 因为$\{a_n\}$是等比数列,所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

即

$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant 2)$$

成立.

（2）不一定. 例如对于数列

$$0,\ 0,\ 0,\ \cdots,$$

总有 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$，但这个数列不是等比数列.

**练 习**

1. 判断下列数列是否为等比数列：
   （1）1，2，1，2，1；
   （2）$-2$，$-2$，$-2$，$-2$；
   （3）1，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$-\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$；
   （4）2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，0.
2. 已知下列数列是等比数列，试在括号内填上适当的数：
   （1）（ ），3，27；　　（2）3，（ ），5；
   （3）1，（ ），（ ），$\frac{81}{8}$.
3. 下列数列中，哪些是等差数列，哪些是等比数列？
   （1）lg 3，lg 6，lg 12；
   （2）$2^2$，2，1，$2^{-1}$，$2^{-2}$；
   （3）1,1,1,1.
4. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，
   （1）如果 $a_2 = 2$，$a_3 = -6$，求公比 $q$ 和 $a_1$；
   （2）如果 $a_1 = 3$，$a_2 = 6$，求公比 $q$ 和 $a_5$.
5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式，判断它是否为等比数列.
   （1）$a_n = 3^n$；　　（2）$a_n = 4 \times 2^{3n-1}$；
   （3）$a_n = (-3)^{-n}$；　　（4）$a_n = 0$.
6. 已知 $a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_n$ 是公比为 $q$ 的等比数列，新数列 $a_n$，$a_{n-1}$，…，$a_2$，$a_1$ 也是等比数列吗？如果是，公比是多少？

## 2.3.2　等比数列的通项公式

设$\{a_n\}$是首项为 $a_1$，公比为 $q$ 的等比数列，则

$$a_2 = a_1q,\ a_3 = a_2q = a_1q^2,\ a_4 = a_3q = a_1q^3,\ \cdots.$$

● 你能写出它的第 $n$ 项 $a_n$ 吗？

一般地，对于等比数列$\{a_n\}$的第 $n$ 项 $a_n$，有公式

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

这就是等比数列$\{a_n\}$的通项公式，其中 $a_1$ 为首项，$q$ 为公比.

**证** 因为$\{a_n\}$是等比数列,所以当$n \geqslant 2$时,有

$$\frac{a_2}{a_1}=q,\ \frac{a_3}{a_2}=q,\ \frac{a_4}{a_3}=q,\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

将上面$n-1$个等式的左右两边分别相乘,得

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1}.$$

所以

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

当$n=1$时,上面的等式也成立.

**例 1** 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知$a_1=3$,$q=-2$,求$a_6$;

(2) 已知$a_3=20$,$a_6=160$,求$a_n$.

**解** (1) 由等比数列的通项公式,得

$$a_6=3\times(-2)^{6-1}=-96.$$

(2) 设等比数列的公比为$q$,那么

$$\begin{cases} a_1q^2=20, \\ a_1q^5=160, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} q=2, \\ a_1=5. \end{cases}$$

所以

$$a_n=a_1q^{n-1}=5\times 2^{n-1}.$$

**例 2** 在 243 和 3 中间插入 3 个数,使这 5 个数成等比数列.

**解** 设插入的三个数为$a_2$,$a_3$,$a_4$,由题意得

$$243,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ 3$$

成等比数列.设公比为$q$,则

$$3=243q^{5-1},$$

解得

$$q=\pm\frac{1}{3}.$$

因此,所求三个数为 81,27,9,或$-81$,27,$-9$.

**例 3**　已知等比数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3\times2^n$，求首项 $a_1$ 和公比 $q$.

**解**

$$a_1=3\times2^1=6,$$
$$a_2=3\times2^2=12,$$

所以

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{12}{6}=2.$$

或　$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3\times2^{n+1}}{3\times2^n}=2.$

在例 3 中，等比数列的通项公式

$$a_n=3\times2^n$$

是一个常数与指数式的乘积.从图象上看(图 2－3－1)，表示这个数列的各点$(n,a_n)$均在函数 $y=3\times2^x$ 的图象上.

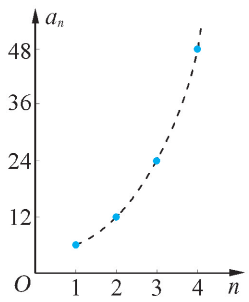


图 2－3－1

## 思　考

如果一个数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=aq^n$，其中 $a$，$q$ 都是不为 0 的常数，那么这个数列一定是等比数列吗？

## 练　习

**1.** 求下列等比数列的公比、第 5 项和第 $n$ 项：

(1) 2，6，18，54，…；

(2) 7，$\frac{14}{3}$，$\frac{28}{9}$，$\frac{56}{27}$，…；

(3) 0.3，－0.09，0.027，－0.008 1，…；

(4) 5，$5^{c+1}$，$5^{2c+1}$，$5^{3c+1}$，….

**2.** 已知等比数列的公比为$\frac{2}{5}$，第 4 项是$\frac{5}{2}$，求前三项.

**3.** 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=-3$，$q=2$，$n=5$，求 $a_n$；

(2) 已知 $a_1=1$，$q=2$，$a_n=16$，求 $n$；

(3) 已知 $a_1=\frac{1}{3}$，$n=6$，$a_n=9$，求 $q$；

(4) 已知 $q=-\frac{3}{2}$，$n=4$，$a_n=-27$，求 $a_1$.

**4.** 在等比数列$\{a_n\}$中，

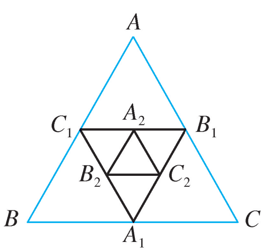
(1) 已知 $a_5=8$，$a_8=1$，求 $a_1$ 和 $q$；

(2) 已知 $a_3=2$，$q=-1$，求 $a_{15}$；

(3) 已知 $a_4=12$，$a_8=6$，求 $a_{12}$.

**5.** 三个数成等比数列，它们的积等于 8，它们的和等于－3，求这三个数.

**6.** 如图，在边长为 1 的等边三角形 $ABC$ 中，连结各边中点得$\triangle A_1B_1C_1$，再连结$\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得$\triangle A_2B_2C_2$……如此继续下去，试证明数列 $S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}$，$S_{\triangle A_2B_2C_2}$，…是等比数列.



（第 6 题）

**7.** 在本章第 2.3.1 节开始有关轿车折旧的问题中，大约在购车后的第几年，该辆车的价值只有原来的一半？

# 习题 2.3(1)

**感受·理解**

**1.** 判断下列数列是否为等比数列：

(1) 9，0.9，0.09，0.009；

(2) $7^2$，$7^{-1}$，$7^{-4}$，$7^{-7}$；

(3) $2\cdot3^2$，$2^3\cdot3^5$，$2^5\cdot3^8$，$2^7\cdot3^{11}$；

(4) $3+5^2$，$3^2+5^4$，$3^3+5^6$，$3^4+5^8$.

**2.** 已知$\{a_n\}$是等比数列，在下表中填入适当的数：

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 3 | | | |
| 2 | | | $4\sqrt{2}$ | |
| | | $\frac{1}{3}$ | | 9 |

**3.** 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4=27$，$q=-3$，求 $a_7$；

(2) 已知 $a_2=18$，$a_4=8$，求 $a_1$ 和 $q$；

(3) 已知 $a_5=4$，$a_7=6$，求 $a_9$；

(4) 已知 $a_5-a_1=15$，$a_4-a_2=6$，求 $a_3$.

**4.** 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_4=4$，$a_9=972$，求 $a_n$；

(2) 已知 $a_2=-6$，$a_6=-\frac{32}{27}$，求 $a_n$.

**5.** 在两个非零实数 $a$ 和 $b$ 之间插入 2 个数，使它们成等比数列，试用 $a$，$b$ 表示这个等比数列的公比.

**6.** 已知公差不为 0 的等差数列的第 2，3，6 项依次构成一个等比数列，求该等比数列的公比.

**7.** 某地为防止水土流失，实行退耕还林. 如果 2012 年退耕 10 万公顷，以后每年增加 10%，那么 2018 年须退耕多少公顷(结果保留到个位)?

**8.** 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，公比为 $q$，求证：$\{\sqrt{a_n}\}$是等比数列，并求该数列的公比.

**9.** 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1) $a_5^2=a_1a_9$ 是否成立? $a_5^2=a_3a_7$ 是否成立?

(2) $a_n^2=a_{n-2}a_{n+2}\ (n>2)$ 是否成立?

(3) 你能得到更一般的结论吗?

**10.** 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，求 $a_3+a_5$ 的值.

**11.** 若 $a$，$G$，$b$ 成等比数列，则称 $G$ 为 $a$ 和 $b$ 的**等比中项**.

(1) 求 45 和 80 的等比中项；

(2) 已知两个数 $k+9$ 和 $6-k$ 的等比中项是 $2k$，求 $k$.

**12.** 已知无穷等比数列$\{a_n\}$的首项为 $a_1$，公比为 $q$.

(1) 依次取出数列$\{a_n\}$中的所有奇数项，组成一个新数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，它的首项和公比是多少？

(2) 数列$\{ca_n\}$(其中常数$c\neq 0$)是等比数列吗？如果是，它的首项和公比是多少？

**思考·运用**

**13.** 三个数成等比数列，它们的积等于 27，它们的平方和等于 91，求这三个数.

**14.** 已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，且$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{30}=2^{30}$，求$a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdot\cdots\cdot a_{30}$的值.

**15.** 某地现有耕地 10 000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%. 如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)？

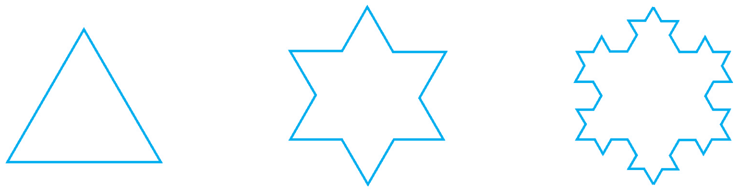
(注：粮食单产 $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$，人均粮食占有量 $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$)

**探究·拓展**

**16.** 对任意等差数列$\{a_n\}$，计算$a_1+a_2$，$a_3+a_4$，$a_5+a_6$，$a_7+a_8$，…，你发现了什么一般规律？能将发现的规律推广吗？在等比数列中有怎样类似的结论？

**17.** 如图，将一个边长为 1 的正三角形的每条边三等分，以中间一段为边向形外作正三角形，并擦去中间一段，得图(2). 如此继续下去，得图(3)……试探求第$n$个图形的边长和周长.

这样形成的图形称为分形(fractal).



(1)　　(2)　　(3)

(第 17 题)

## 2.3.3　等比数列的前 $n$ 项和

● 已知等比数列$\{a_n\}$的第 1 项$a_1$和公比$q$，如何求出它的前$n$项和$S_n$？

根据等比数列的通项公式，这个等比数列就是

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots,$$

所以它的前$n$项和是

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \qquad ①$$

① 式等号右边的每一项是它前一项的$q$倍，根据这个特点，在上式两边同乘以$q$，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n, \qquad ②$$

由①－②得

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n.$$

所以，当 $q \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q \neq 1).$$

根据等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$，又可得到

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}\ (q \neq 1).$$

显然，当 $q=1$ 时，$S_n = na_1$.

**例 1** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1=-4$，$q=\frac{1}{2}$，求 $S_{10}$；

（2）已知 $a_1=1$，$a_k=243$，$q=3$，求 $S_k$.

**解** （1）根据等比数列的前 $n$ 项和公式，得

$$S_{10} = \frac{-4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1\,023}{128}.$$

（2）根据等比数列的前 $n$ 项和公式，得

$$S_k = \frac{1-243\times 3}{1-3} = 364.$$

**例 2** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，求 $a_n$.

**解** 若 $q=1$，则 $S_6=2S_3$，这与已知 $S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$ 是矛盾的，所以 $q\neq 1$. 从而

*在等比数列的通项公式与前 $n$ 项和公式中，共含有 $a_1$，$q$，$n$，$a_n$，$S_n$ 五个量，只要已知其中的三个量，就可以求出其余的两个量.*

$$S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{7}{2},$$

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{63}{2}.$$

将上面两个等式的两边分别相除，得

$$1+q^3=9,$$

所以 $q=2$，由此可得 $a_1=\dfrac{1}{2}$，因此

$$a_n=\frac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{n-2}.$$

**例 3** 求数列 $1+\dfrac{1}{2},\ 2+\dfrac{1}{4},\ 3+\dfrac{1}{8},\ \cdots,\ n+\dfrac{1}{2^n},\ \cdots$ 的前 $n$ 项和.

**分析** 这个数列的每一项都是一个等差数列与一个等比数列的对应项的和，因此可以分组求和.

**解**

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(3+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)\\&=(1+2+3+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

## 练 习

**1.** 某厂去年的产值记为 1，若计划在今后五年内每年的产值比上年增长 10%，则从今年起到第五年，这个厂的总产值为(　　).

A. $1.1^4$　　B. $1.1^5$

C. $11\times(1.1^5-1)$　　D. $10\times(1.1^6-1)$

**2.** 求下列等比数列的各项和：

(1) $1,\ 3,\ 9,\ \cdots,\ 2\,187$;

(2) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\ \cdots,\ -\dfrac{1}{512}$.

**3.** 根据下列条件，求等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$：

(1) $a_1=3,\ q=2,\ n=6$;　　(2) $a_1=-1,\ q=-\dfrac{1}{3},\ n=5$;

(3) $a_1=8,\ q=\dfrac{1}{2},\ a_n=\dfrac{1}{2}$;　　(4) $a_2=0.12,\ a_5=0.000\,96,\ n=4$.

**4.** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_1=16, n=6,\ a_n=\dfrac{1}{2}$，求 $q$ 和 $S_n$；

(2) 已知 $a_1=2, n=3, S_n=14$，求 $q$ 和 $a_n$；

(3) 已知 $q=\dfrac{1}{2}, n=6, S_n=\dfrac{189}{4}$，求 $a_1$ 和 $a_n$；

(4) 已知 $a_1=1$，$a_n=81$，$S_n=121$，求 $q$ 和 $n$.

**5.** 求和 $\sum\limits_{k=1}^{10}(3+2^k)$.

**例 4**　水土流失是我国西部大开发中最突出的生态问题. 全国 9 100 万亩的坡耕地需要退耕还林，其中西部地区占 70%. 国家确定 2000 年西部地区退耕土地面积为 515 万亩，以后每年退耕土地面积递增 12%，那么从 2000 年起到 2005 年底，西部地区退耕还林的面积共有多少万亩(精确到万亩)?

**解**　根据题意，每年退耕还林的面积比上一年增长的百分比相同，所以从 2000 年起，每年退耕还林的面积(单位：万亩)组成一个等比数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=515，q=1+12\%=1.12，n=6，$$

则

$$S_6=\frac{515\times(1-1.12^6)}{1-1.12}\approx 4\ 179(万亩).$$

**答**　从 2000 年起到 2005 年底，西部地区退耕还林的面积共有 4 179 万亩.

**思　考**

从 2000 年起到哪一年底，西部地区基本解决退耕还林问题？

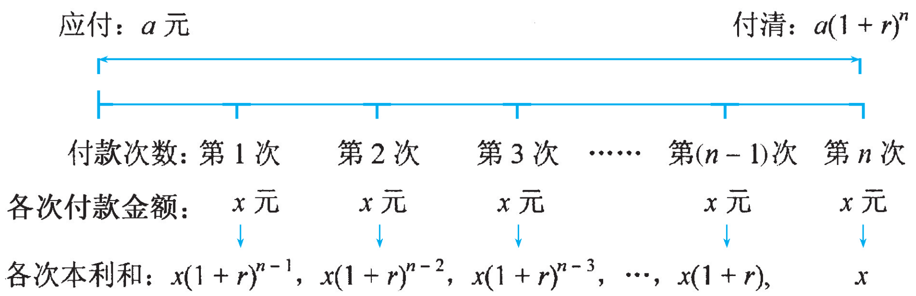
**例 5**　某人 2004 年初向银行申请个人住房公积金贷款 20 万元购买住房，月利率 3.375‰，按复利计算，每月等额还贷一次，并从贷款后的次月初开始还贷. 如果 10 年还清，那么每月应还贷多少元?

**分析**　对于分期付款，银行有如下规定：

(1) 分期付款为复利计息，每期付款数相同，且在期末付款；

(2) 到最后一次付款时，各期所付的款额的本利之和等于商品售价的本利之和.

为解决上述问题，我们先考察一般情形. 设某商品一次性付款的金额为 $a$ 元，以分期付款的形式等额地分成 $n$ 次付清，每期期末所付款是 $x$ 元，期利率为 $r$，则分期付款方式可表示为：



从而有

$$x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\cdots+(1+r)+1]$$
$$=a(1+r)^n.$$

运用等比数列求和公式，化简得

$$x=\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

这就是分期付款的数学模型.

**解**　设每月应还贷 $x$ 元，共付款 $12\times10=120$ 次，则有

$$x[1+(1+0.003\,375)+(1+0.003\,375)^2+\cdots+(1+0.003\,375)^{119}]=200\,000(1+0.003\,375)^{120},$$

使用 Excel 中的财务函数，可以方便地求出每期的付款额.

化简得

$$x=\frac{200\,000\times0.003\,375\times(1+0.003\,375)^{120}}{(1+0.003\,375)^{120}-1}\approx 2\,029.66(\text{元}).$$

**答**　每月应还贷款 2 029.66 元.

## 练　习

1. 某市近 8 年的生产总值第一年为 1 000 亿元，从第二年开始以 10% 的速度增长，那么这个城市近 8 年的生产总值一共是多少亿元(结果精确到 0.01 亿元)?
2. 回答我国古代用诗歌形式提出的一个数列问题：

   远望巍巍塔七层，红灯向下成倍增，
   共灯三百八十一，试问塔顶几盏灯?
3. 我国 1980 年底人口以十亿计算.
   (1) 若我国人口年增长率为 1.2%，则到 2005 年底我国约有多少人口?
   (2) 若使我国到 2010 年底人口不超过 14 亿，则人口的年平均增长率最高是多少?
4. 一个球从 32 m 的高处自由落下，每次着地后又跳回到原来高度的一半. 当它第 5 次着地时，共经过的路程是多少?
5. 顾客采用分期付款的方式购买一件 5 000 元的商品，在购买一个月后第一次付款，且每月等额付款一次，在购买后的第 12 个月将货款全部付清，月利率 0.5%. 按复利计算，该顾客每月应付款多少元(结果精确到 1 元)?

## 链　接

### 现值与终值

“现值”与“终值”是利息计算中的两个基本概念，掌握好这两个概念，对于顺利解决有关金融中的数学问题以及理解各种不同的算法都是十分有益的.

所谓“现值”是指在 $n$ 期末的金额，把它扣除利息后，折合成现时的值. 而“终值”是指 $n$ 期后的本利和. 它们计算的基点分别是存期的

起点和终点.

例如，在复利计息的情况下，设本金为 $A$，每期利率为 $r$，期数为 $n$，到期末的本利和为 $S$，则

$$S=A(1+r)^n,$$

其中，$S$ 称为 $n$ 期末的终值，$A$ 称为 $n$ 期后终值 $S$ 的现值，即 $n$ 期后的 $S$ 元现在的价值为

$$A=\frac{S}{(1+r)^n}.$$

**例** 某厂为试制新产品，需增加某些设备. 若购置这些设备，需一次付款 25 万元；若租赁这些设备，每年初付租金 3.3 万元. 已知一年期存款的年利率为 2.55%，试讨论哪种方案更好(设备寿命为 10 年).

**解法 1** (从终值来考虑)若购置设备，则 25 万元 10 年后的价值为

$$25(1+2.55\%)^{10}\approx 32.159(\text{万元}).$$

若租赁设备，每年初付租金 3.3 万元，10 年后的总价值为

$$\begin{aligned}S&=3.3(1+2.55\%)^{10}+3.3(1+2.55\%)^9+\cdots\\&\quad+3.3(1+2.55\%)\\&\approx 38.00(\text{万元}).\end{aligned}$$

因此，购买设备较好.

**解法 2** (从现值来考虑)每年初付租金 3.3 万元的 10 年现值之和为

$$\begin{aligned}Q&=3.3+\frac{3.3}{1+2.55\%}+\frac{3.3}{(1+2.55\%)^2}+\cdots+\frac{3.3}{(1+2.55\%)^9}\\&\approx 29.54(\text{万元}),\end{aligned}$$

比购置设备一次付款 25 万元多，故购置设备的方案较好.

## EXCEL

Excel 提供了丰富的财务函数，利用这些函数我们能够轻松地完成有关投资或贷款等问题的计算. 下面介绍常用的几个函数.

(1) PMT 函数，在固定利率的等额分期付款方式中，计算投资或贷款的每期付款额.

对于例 5，只需在 Excel 单元格中输入“$=$PMT(0.3375%，12 * 10，200000)”，即可得到 $x\approx 2\ 029.66$ 元，函数 PMT 的含义见图 2－3－2.

type的默认值为0，表示各期结算时间在期末. 若结算时间在期初，则其值为 1.

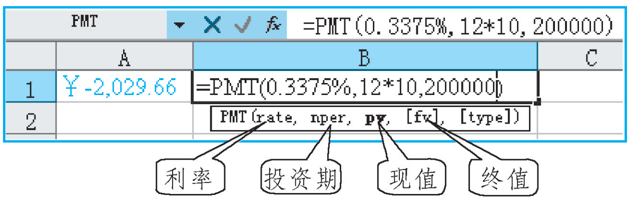



图 2－3－2

（2）FV 函数，在固定利率的等额分期付款方式中，计算某项投资的终值.

如在上面“链接”的例题中，可用“$=$FV(2.55%，10，3.3，，1)”计算得 $S\approx 38.00$(图 2－3－3)，FV(rate，nper，pmt，[pv]，[type])中参数的含义同上.

单元格中的负值表示支出.

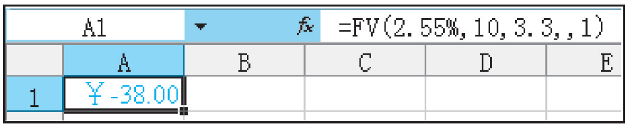



图 2－3－3

（3）PV 函数，计算一系列未来付款的现值累积和. 如在上面“链接”中，可用“$=$PV(2.55%，10，3.3，，1)”计算得 $Q\approx 29.54$(图 2－3－4). PV(rate，nper，pmt，[fv]，[type])中参数的含义同上.

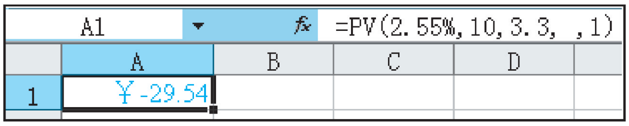



图 2－3－4

如果你在实际生活中还需要使用其他一些财务函数，可以查看 Excel 帮助文档中的相关资料.

## 习题 2.3(2)

**感受·理解**

**1.** 求下列等比数列的前 $n$ 项和：

（1）$1，-1，1，-1，\cdots$；

（2）$1，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\cdots$.

**2.** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1=2, q=-\frac{1}{2}$，求 $S_{10}$；

（2）已知 $a_1=\frac{1}{27}$，$a_8=81$，求 $S_8$；

（3）已知 $a_n=4\times 3^{1-n}$，求 $S_n$.

**3.** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1=-1.5$，$a_7=-96$，求 $q$ 和 $S_n$；

（2）已知 $q=\frac{1}{2}$，$S_5=-\frac{31}{8}$，求 $a_1$ 和 $a_n$；

（3）已知 $a_1=2$，$S_3=26$，求 $q$ 和 $a_n$.

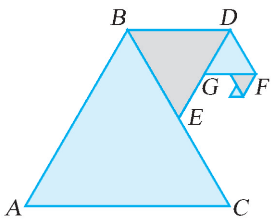
**4.** 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

**5.** 求和：

(1) $\left(2+\frac{1}{3}\right)+\left(4+\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(2n+\frac{1}{3^n}\right)$；

(2) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$.

**6.** 某林场去年底森林木材储存量为 330 万 $m^3$. 若树木以每年 25% 的增长率生长，计划从今年起，每年底要砍伐的木材量为 $x$ 万 $m^3$，为了实现经过 20 年木材储存量翻两番的目标，每年砍伐的木材量 $x$ 的最大值是多少？（精确到 0.01 万 $m^3$）



（第 7 题）

**7.** 如图，设正三角形 $ABC$ 的边长为 20 cm，取 $BC$ 边的中点 $E$，作正三角形 $BDE$；取边 $DE$ 的中点 $G$，作正三角形 $DFG$；如此继续下去，可得到一列三角形 $\triangle ABC$，$\triangle BDE$，$\triangle DFG$，…，求前 20 个正三角形的面积和.

**8.** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$q=\frac{1}{2}$，$S_{100}=150$，求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}$ 的值.

## 思考・运用

**9.** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_n=66$，$a_2a_{n-1}=128$，$S_n=126$，求 $n$，$q$.

**10.** 设 $S_n$ 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，$S_3$，$S_9$，$S_6$ 成等差数列，求证：$a_2$，$a_8$，$a_5$ 成等差数列.

**11.** 资料表明，2000 年我国工业废弃垃圾达 $7.4\times10^8$ t，每吨占地 1 $m^2$. 环保部门每回收或处理 1 t 废旧物资，相当于消灭 4 t 工业废弃垃圾. 如果某环保部门 2002 年共回收处理了 $10^4$ t 废旧物资，且以后每年的回收量递增 20%.

(1) 2010 年能回收多少吨废旧物资(结果保留两位有效数字)？

(2) 从2002 年到 2010 年底，可节约土地多少平方米(结果保留两位有效数字)？

## 探究・拓展

**12.** 求和：$\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**13.** 求和：$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

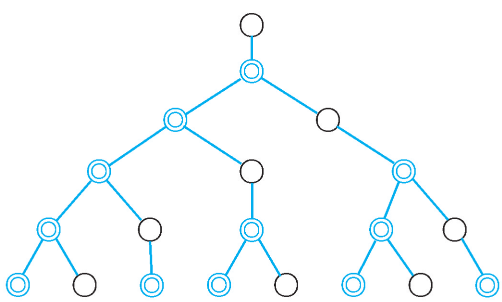
## 阅　读

### 斐波那契数列

先看一个有趣的问题：假设一对刚出生的小兔一个月后能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，此后每个月生一对小兔. 如果不发生死亡，那么一对刚出生的小兔一年可繁殖成多少对？

我们用“◎”表示一对大兔，用“○”表示一对小兔，假设第一对小兔的出生日是某个月初，则逐月统计得每月初的兔子对数：

第 1 个月
第 2 个月
第 3 个月
第 4 个月
第 5 个月
第 6 个月



记第 $n$ 个月的兔子对数为 $F_n$，则

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ \cdots.$$

考察数列 $\{F_n\}$ 的规律，不难发现，从第三项开始，每一项都是它的前两项的和，即

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\in\mathbf{N}^*).$$

斐波那契（Leonardo Fibonacci，约 1170～1240），生于意大利比萨．在 1202 年写成《计算之书》一书，是欧洲大陆风行好几个世纪的数学教科书，也是一部影响很大的数学专著．全书 15 章，其中第 12 章提出了兔子问题．

这样，我们就可以依次写出一串数：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots.$$

由此可知，一对兔子一年可繁殖 233（$=F_{13}$）对．

上面的数列是由意大利人斐波那契于 1202 年从兔子繁殖问题中提出的，为了纪念他，人们就把这种数列称为斐波那契数列．

由一对兔子繁殖问题而衍生出来的斐波那契数列是数学中的一个有趣问题，许多问题也都与之有关．如：

（1）树木的生长模式．某种树木第 1 年长出幼枝，第 2 年幼枝长成粗干，第 3 年粗干可生出幼枝．按照这个规律，到第 6 年树木有多少枝干（图 2－3－5）？

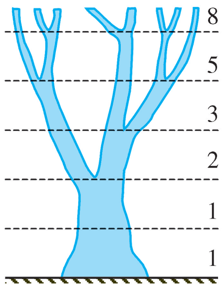



图 2－3－5

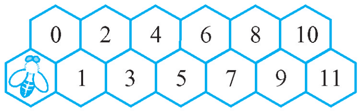



图 2－3－6

（2）观察蜜蜂爬过六角形蜂房所取的不同路线（图 2－3－6）．假定该蜜蜂总是向相邻的蜂房移动并且总是向右移动，那么，蜜蜂到蜂房 0 有一条路，到蜂房 1 有两条路，到蜂房 2 有三条路，到蜂房 3 有五条路……

（3）由正方形可以构成一系列的长方形，其边长为斐波那契数列的连续项．在正方形内绘出一个圆的 $\frac{1}{4}$，就可以近似地得到等角螺线（图 2－3－7）．

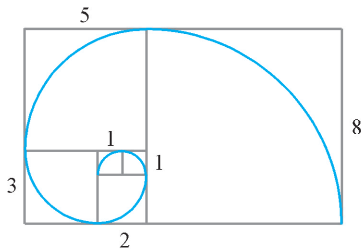



图 2－3－7

等角螺线因它的性质而得名，因为在等角螺线中，自某一个定点画出的每一条射线与等角螺线相交成等角.

等角螺线在自然界中也是随处可见，如蜘蛛网、向日葵的种子排列形式(另外，向日葵花瓣依两个相反的螺旋形排列，朝一个螺旋方向生长的花瓣数同朝相反的螺旋方向生长的花瓣数，几乎总等于斐波那契数列中两个相邻的数)、水流的漩涡、蜗牛壳的螺纹以及星系内星球的分布等.

斐波那契数列最值得注意的性质是：相邻两数的比交替地大于或小于黄金比$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right)$，并且该比值无限趋近于黄金比：

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{2}=0.5,\ \frac{2}{3}=0.667,\ \frac{3}{5}=0.6,$$

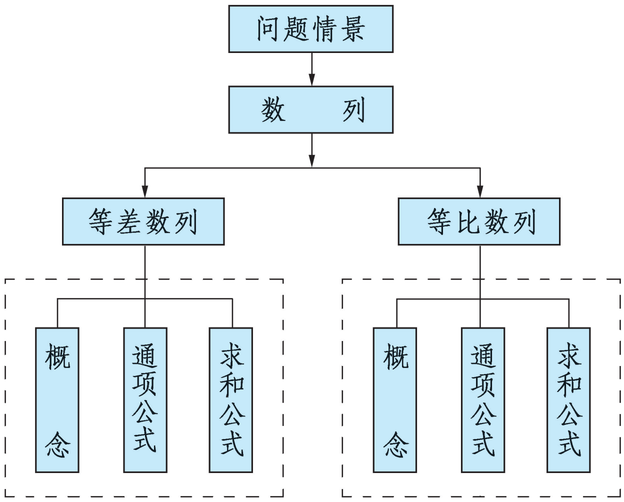
$$\frac{5}{8}=0.625,\ \frac{8}{13}=0.615,\ \frac{13}{21}=0.619,\ \frac{21}{34}=0.618.$$

在研究斐波那契数列的过程中，人们获得了许多意想不到的结果. 由此可见，数学世界是多么的有趣!

# 本章回顾

## 本 章 概 览

本章我们从一些有趣的数列模型引入了数列的概念，体会了用数列这一特殊的函数描述变量变化规律的基本思想. 通过实例使同学们经历了建立等差数列和等比数列这两个数列模型的过程，探索了它们的一些基本数量关系——通项公式和前 $n$ 项和的公式，并运用等差数列和等比数列解决了一些实际问题.




在本章学习中，要掌握等差数列与等比数列的定义、通项公式以及前 $n$ 项和公式，会用函数的观点理解数列的概念，能通过相应的函数及其图象直观地认识数列的性质.

学会运用类比的方法认识等差数列和等比数列之间的区别和联系，要善于运用等价转化的思想，将一些特殊的数列问题转化为等差数列或等比数列的相应问题.

## 内 容 提 要

1. 等差数列的概念

   如果一个数列从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，用字母 $d$ 表示.

2. 等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

3. 等差数列前 $n$ 项和公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

4. 等比数列的概念

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，用字母 $q$ 表示.

5. 等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

6. 等比数列前 $n$ 项和公式

当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$；

当 $q \neq 1$ 时，$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$.

# 复 习 题

## 感受·理解

**1.** 根据数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{\cos n\pi}{2}$,写出它的前 4 项及第 $2n$ 项.

**2.** 若直角三角形的三条边的长组成公差为 3 的等差数列,则三边的长分别为(　　).

A. 5, 8, 11　　B. 9, 12, 15

C. 10, 13, 16　　D. 15, 18, 21

**3.** 设$\{a_n\}$是等比数列,有下列四个命题:

① $\{a_n^2\}$是等比数列;　　② $\{a_na_{n+1}\}$是等比数列;

③ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列;　　④ $\{\lg|a_n|\}$是等比数列.

其中正确命题的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**4.** 写出数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $1$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{16}$;　　(2) $\frac{2}{1\times3}$, $\frac{4}{3\times5}$, $\frac{6}{5\times7}$, $\frac{8}{7\times9}$;

(3) 11, 101, 1 001, 10 001;　　(4) $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{9}$, $\frac{2}{9}$, $-\frac{8}{81}$.

**5.** 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知 $a_3=16$,$S_{20}=20$,求 $S_{10}$;

(2) 已知 $a_3+a_7=37$,求 $S_9$;

(3) 已知 $a_1=1$,$S_4=S_9$,求 $S_n$;

(4) 已知 $a_1=1$, $d=2$,$S_{n+2}-S_n=24$,求 $n$.

**6.** 已知四个数依次成等差数列,且四个数的平方和为 94,首尾两数之积比中间两数之积少 18,求此等差数列.

**7.** 一个直角三角形三边的长组成等差数列,求这个直角三角形三边长的比.

**8.** 《九章算术》中的“竹九节”问题:现有一根 9 节的竹子,自上而下各节的容积成等差数列,上面 4 节的容积共 3 升,下面 3 节的容积共 4 升,求第 5 节的容积.

**9.** 在等比数列$\{a_n\}$中,

(1) 已知 $q=3$, $S_3=\frac{13}{3}$,求 $a_n$ 和 $S_n$;

(2) 已知 $a_2=6$,$6a_1+a_3=30$,求 $a_n$ 和 $S_n$.

**10.** 据美国学者詹姆斯·马丁的测算,近十年,人类知识总量已达到每三年翻一番,到 2020 年甚至要达到每 73 天翻一番的空前速度.因此,基础教育的任务已不是教会一切人一切知识,而是让一切人学会学习.已知 2000 年底,人类知识总量为 $a$,假如从 2000 年底到 2009 年底是每三年翻一番,从 2009 年底到 2019 年底是每一年翻一番,2020 年是每 73 天翻一番.试回答:

(1) 2009 年底人类知识总量是多少?

(2) 2019 年底人类知识总量是多少?

(3) 2020 年按 365 天计算,2020 年底人类知识总量是多少?

**11.** 甲、乙两人同时到银行各存 1 万元,但两人选择的存款方式不同.甲存 5 年定期储蓄,年利率 2.88%.乙存一年定期储蓄,年利率 2.55%,并在每一年

到期时将本息续存一年定期. 按规定每次计息时,储户须交纳利息的 20% 作为利息税. 若存满 5 年后两人同时从银行取出存款,那么谁获利较多?

**12.** 已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_2=0$,$a_6+a_8=-10$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

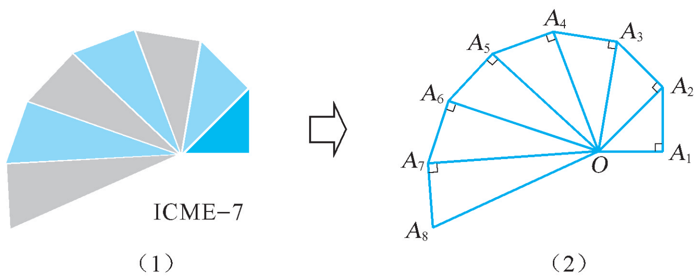
(2) 求数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$的前 $n$ 项和 $S_n$.

**13.** (1) 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$,求前 $n$ 项的和;

(2) 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,求前 $n$ 项的和.

## 思考·运用

**14.** 图(1)是第七届国际数学教育大会(ICME-7)的会徽图案,它是由一串直角三角形演化而成的(如图(2)),其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$,它可以形成近似的等角螺线. 记 $OA_1$,$OA_2$,$\cdots$,$OA_8$ 的长度所组成的数列为$\{a_n\}$($n\in\mathbf{N}^*$,$1\leqslant n\leqslant 8$). 写出数列$\{a_n\}$的通项公式.




(第 14 题)

**15.** 已知等差数列$\{a_n\}$中,前 $m$($m$ 为奇数)项的和为 77,其中偶数项之和为 33,且 $a_1-a_m=18$,求通项公式.

**16.** 利用等比数列的前 $n$ 项和公式证明

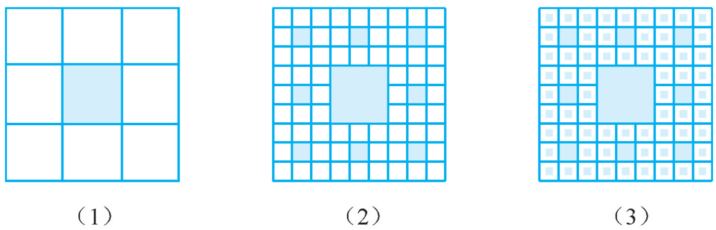
$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},$$

其中 $n\in\mathbf{N}^*$,$a$,$b$ 是不为 0 的常数,且 $a\neq b$.

**17.** 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $S_p=q$,$S_q=p$ ($p\neq q$),求 $S_{p+q}$ 的值.

## 探究·拓展

**18.** 一个正方形被等分成九个相等的小正方形,将中间的一个正方形挖掉(如图(1));再将剩余的每个正方形都分成九个相等的小正方形,并将中间的一个正方形挖掉,得图(2);如此继续下去……




(第 18 题)

(1) 图(3)共挖掉了多少个正方形?

(2) 设原正方形的边长为 $a$,第 $n$ 个图共挖掉了多少个正方形?这些正方形的面积和为多少?

# 本章测试

## 一、填空题

**1.** 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=17$，$d=-2$，则$a_{10}=$________.

**2.** 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n=\begin{cases}2n+1, & n\text{ 为奇数},\\ 2^n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$则$a_4+a_5=$________.

**3.** 已知三个数 3，$x$，12 成等比数列，则实数$x=$________.

**4.** 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_4=7$，则它的前 5 项和$S_5=$________.

**5.** 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d$不为 0，且$a_1$，$a_3$，$a_7$成等比数列，则$\dfrac{a_1}{d}=$

________.

**6.** 设数列$\{a_n\}$是公比为$q$的等比数列，$|q|>1$. 若数列$\{a_n\}$的连续四项构成集合$\{-24，-54，36，81\}$，则$q=$________.

## 二、选择题

**7.** 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_8=6$，$a_{11}=0$，则$a_1$等于(　　).

A. 18　　B. 20　　C. 22　　D. 24

**8.** 某厂去年的产值为 1，计划从今年起，每年的产值比上年增长 8%，则从今年起到第十年，这个厂这十年的总产值为(　　).

A. $1.08^9$　　B. $1.08^{10}$

C. $\dfrac{1.08(1-1.08^{10})}{1-1.08}$　　D. $\dfrac{1-1.08^{10}}{1-1.08}$

**9.** 在 1 和 256 中间插入 3 个数，使这 5 个数成等比数列，则公比$q$为(　　).

A. $\pm2$　　B. 2　　C. $\pm4$　　D. 4

**10.** 已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$满足：$S_n=n^2+2n$，那么$a_{10}=$(　　).

A. 18　　B. 19　　C. 20　　D. 21

## 三、解答题

**11.** 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=23$，$d=-2$.

(1) 求$a_8$；　　(2) 求数列$\{a_n\}$中正数项的个数.

**12.** 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_4=4$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；　　(2) 求数列$\{a_n^2\}$的前 5 项和$S_5$.

**13.** 有 4 个数，其中前 3 个数成等差数列，后 3 个数成等比数列，并且第 1 个数与第 4 个数的和是 16，第 2 个数与第 3 个数的和是 12，求这 4 个数.

**14.** 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_5=16$. 设$S_{2n}$为该数列的前$2n$项和，$T_n$为数列$\{a_n^2\}$的前$n$项和. 若$S_{2n}=tT_n$，试求实数$t$的值.

**15.** 已知$S_n$是等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和，$b_n=\dfrac{S_n}{n}$.

(1) 求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2) 若$S_7=7$，$S_{15}=75$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.