大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道,数学与生活紧密相连. 数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活. 数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想. 为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论. 我们要积极地运用这些理论去解决问题. 在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展. 在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的"感受·理解"部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系. 它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容. 相信你一定能学好这部分内容.

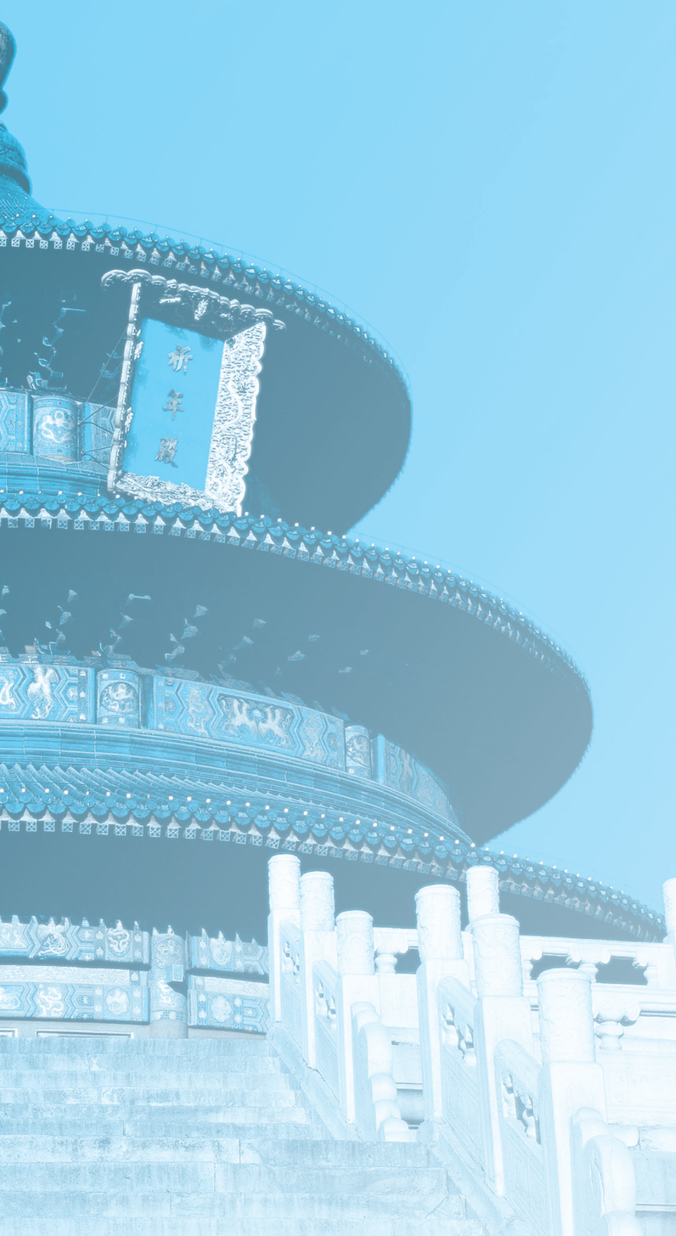
本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的"思考·运用"、"探究·拓展"等,以激发你探索数学的兴趣. 在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α 和平面 β 的交线是 a
$a \subset \alpha$ 或 $a \subsetneqq \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \not\subset \alpha$ 或 $a \nsubseteq \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a 和直线 b 相交于点 A
$a \cap \alpha = A$	直线 a 和平面 α 相交于点 A
$a \parallel \alpha$	直线 a 平行于平面 α
$\alpha \parallel \beta$	平面 α 和平面 β 互相平行
$a \perp \alpha$	直线 a 垂直于平面 α
$\alpha - AB - \beta$（或 $\alpha - l - \beta$）	棱为 AB，面为 α，β 的二面角（或棱为 l，面为 α，β 的二面角）
$\alpha \perp \beta$	平面 α 和平面 β 互相垂直
k_l（或 k_{AB}）	直线 l 的斜率（或直线 AB 的斜率）
AB 或 $\lvert AB \rvert$	线段 AB 的长度
$O-xyz$	空间直角坐标系

第 1 章　立体几何初步



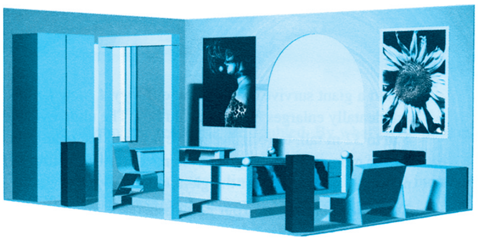
- 立体几何初步
  - 空间几何体
    - 棱柱、棱锥和棱台
    - 圆柱、圆锥、圆台和球
    - 中心投影和平行投影
    - 直观图画法
  - 点、线、面之间的位置关系
    - 平面的基本性质
    - 空间两条直线的位置关系
      - 平行直线
      - 异面直线
    - 直线与平面的位置关系
      - 直线与平面平行
      - 直线与平面垂直
    - 平面与平面的位置关系
      - 两平面平行
      - 两平面垂直
  - 空间几何体的表面积和体积
    - 空间几何体的表面积
    - 空间几何体的体积

几何学的简洁美正是几何学之所以完美的核心所在.

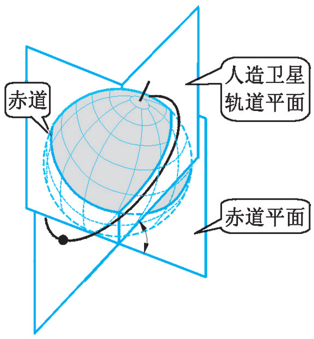
——牛顿

从土木建筑到家居装潢，从机械设计到商品包装，从航空测绘到零件视图……空间图形与我们的生活息息相关.

例如，下面是某居室的设计图和中国“神舟五号”载人飞船升空时的场景，其中蕴含了丰富的空间图形.



空间图形的研究非常重要. 例如，如何检查墙面或旗杆是否与地平面垂直？如何刻画人造地球卫星轨道平面与赤道平面所成的“角”？要解决这类问题，就要用到空间图形的相关知识.



在本章中，我们主要解决下面的问题：

- 空间几何体是由哪些简单几何体组成的？
- 如何描述和刻画这些简单几何体的形状和大小？
- 构成这些几何体的基本元素之间具有怎样的位置关系？

1.1 空间几何体

复杂的几何体，通常是由一些简单几何体（如柱、锥、台、球）组合而成的.

- 柱、锥、台、球分别具有怎样的结构特征？
- 如何在平面上表示空间几何体？

下面我们先从直观上加以讨论.

1.1.1 棱柱、棱锥和棱台

- 仔细观察下面的几何体，它们有什么共同特点？

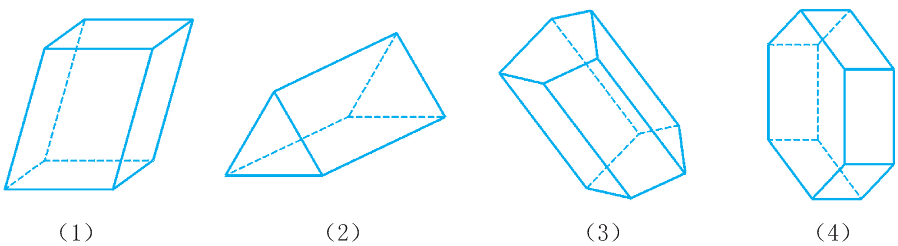


图 1－1－1

本节所说的多边形包括它的内部. 将一个图形上所有的点按某一确定的方向移动相同的距离就是平移.

图 1－1－1(1)和图 1－1－1(3)中的几何体分别由平行四边形和五边形沿某一方向平移而得（图 1－1－2）.

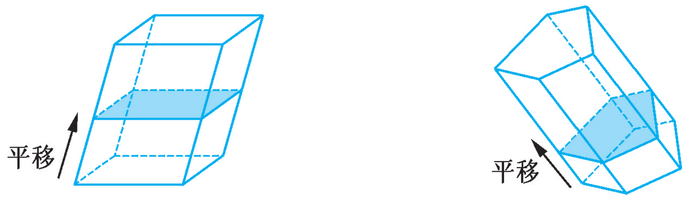


图 1－1－2

思　考

图 1－1－1(2)和图 1－1－1(4)中的几何体分别由怎样的平面图形，按什么方向平移而得？

平移前后的两个面互相平行.

一般地，由一个平面多边形沿某一方向平移形成的空间几何体叫做**棱柱**(prism). 平移起止位置的两个面叫做棱柱的**底面**(base)，多边形的边平移所形成的面叫做棱柱的**侧面**(lateral face).

图 1－1－3 和图 1－1－4 给出了棱柱中一些常用名称的含义.

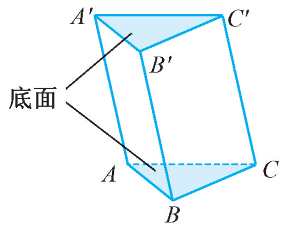


图 1－1－3

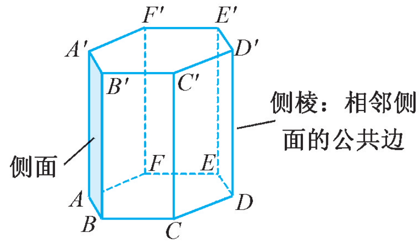


图 1－1－4

底面为三角形、四边形、五边形……的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱……例如，图 1－1－3 为三棱柱，图 1－1－4 为六棱柱，并分别记作棱柱 $ABC-A'B'C'$、棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$.

我们发现，棱柱具有如下特点：

两个底面是全等的多边形，且对应边互相平行，侧面都是平行四边形.

● 下面的几何体有什么共同特点？与前面的图 1－1－1 进行对比，前后发生了什么变化？

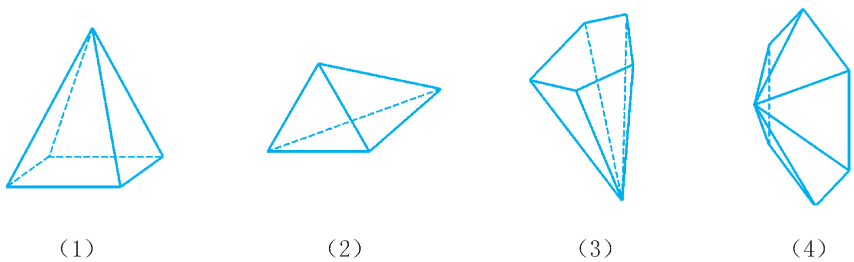


图 1－1－5

图 1－1－1 中各棱柱的一个底面收缩为一个点时，可得到图 1－1－5.

当棱柱的一个底面收缩为一个点时，得到的几何体叫做**棱锥**(pyramid).

与棱柱相仿，图 1－1－6 给出了棱锥中一些常用名称的含义.

仿照棱柱，说出三棱锥、四棱锥、五棱锥……的含义.

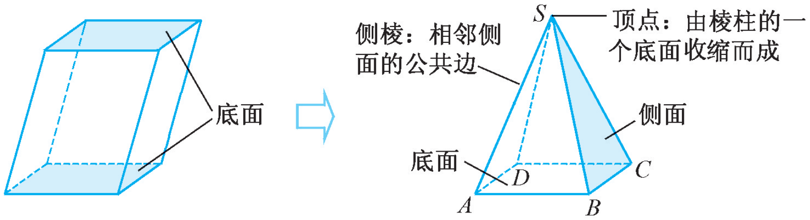


图 1－1－6

图 1－1－6 中的四棱锥可记作棱锥 $S-ABCD$.

我们发现，棱锥具有如下特点：

底面是多边形，侧面是有一个公共顶点的三角形.

如图 1－1－7，用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，得到两个几何体，一个仍然是棱锥，另一个我们称之为**棱台**(truncated pyramid). 即**棱台**是棱锥被平行于底面的一个平面所截后，截面和底面之间的部分.

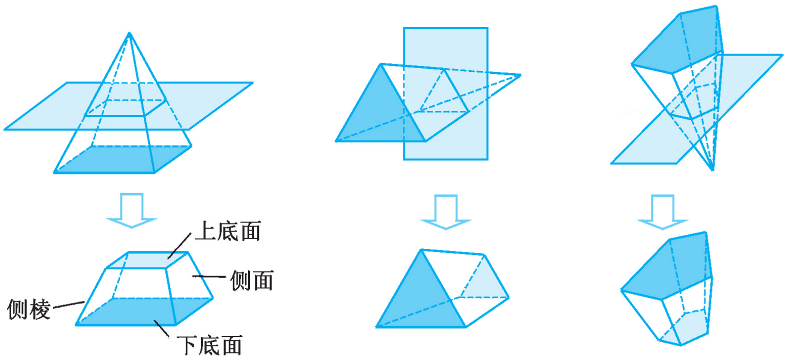


图 1－1－7

例 1　画一个四棱柱和一个三棱台.

解　如图 1－1－8,画四棱柱可分三步完成:

第一步　画上底面——画一个四边形;

第二步　画侧棱——从四边形的每一个顶点画平行且相等的线段;

第三步　画下底面——顺次连结这些线段的另一个端点.

被遮挡的线要画成虚线.

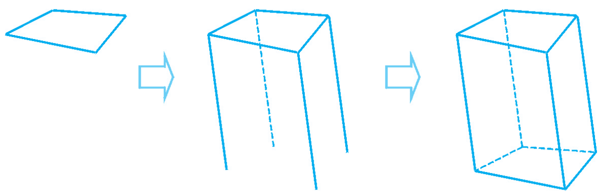


图 1－1－8

如图 1－1－9,画三棱台的方法是:首先画一个三棱锥,在它的一条侧棱上取一点,然后从这点开始,顺次在各个侧面内画出与底面对应边平行的线段,最后将多余的线段擦去.

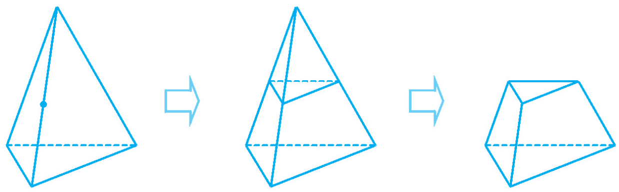


图 1－1－9

多面体有几个面就称为几面体,如三棱锥是四面体.

棱柱、棱锥和棱台都是由一些平面多边形围成的几何体.由若干个平面多边形围成的几何体叫做**多面体**(polyhedron).在现实世界中,存在着形形色色的多面体,如食盐、明矾、石膏等的晶体都呈多面体形状(图 1－1－10).

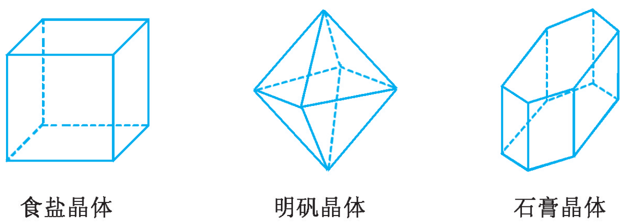
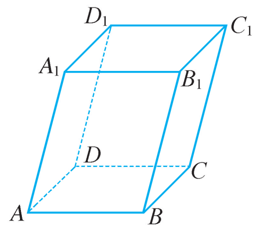


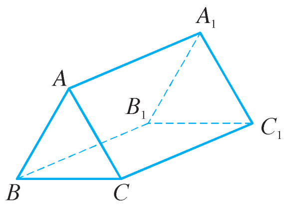
图 1－1－10

练　习

1. 如图，四棱柱的六个面都是平行四边形，这个四棱柱可以由哪个平面图形按怎样的方向平移得到？

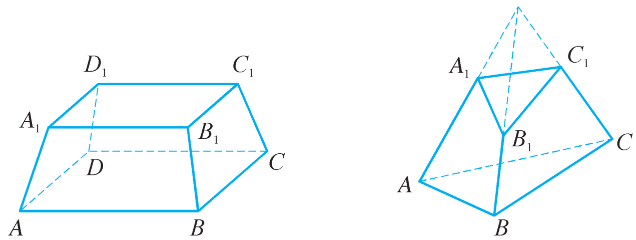


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，三棱镜的模型是一个三棱柱，请指出该三棱柱的底面和侧棱.
3. 画一个三棱锥和一个四棱台.
4. 下面两个几何体是棱台吗？简述理由.

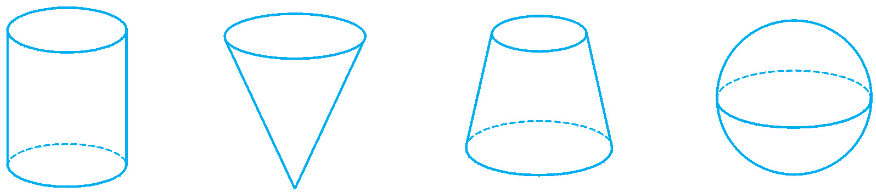


（第 4 题）

5. 多面体至少有几个面？这个多面体是怎样的几何体？
6. 画一个五面体.

1.1.2　圆柱、圆锥、圆台和球

● 下面的几何体与多面体不同，仔细观察这些几何体，它们有什么共同特点或生成规律？



（1）　（2）　（3）　（4）

图 1－1－11

这类几何体都可以看做是由一个平面图形绕某一直线旋转而成的. 例如，图 1－1－11(1)中的几何体是矩形绕其一边旋转而成的几何体.

思　考

图 1－1－11(2)，(3)，(4)中的几何体分别是什么平面图形通过旋转而成？在生产和生活中，还有哪些几何体具有类似的生成规律？

将矩形、直角三角形、直角梯形分别绕着它的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线旋转一周，形成的几何体分别叫做**圆柱**(circular cylinder)、**圆锥**(circular cone)、**圆台**(circular truncated cone)，这条直线叫做**轴**. 垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做**底面**. 不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫做**母线**(图 1－1－12).

仿照图 1－1－12(3)，在其余各图中标出相应的轴、母线和底面.

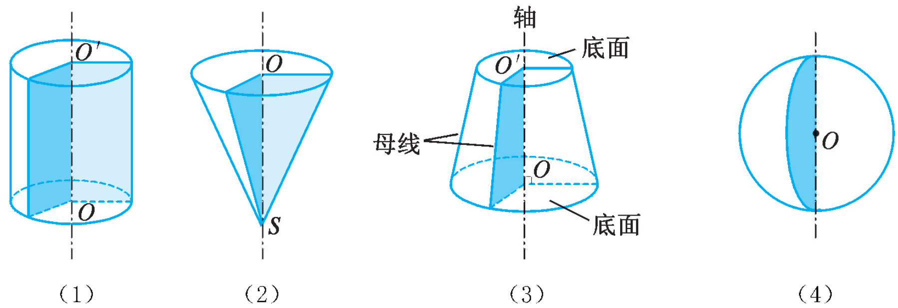


图 1－1－12

半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面叫做**球面**(sphere)，球面围成的几何体叫做**球体**(spheroid)，简称**球**.

图 1－1－12 中的圆柱、圆锥、圆台和球可分别记作圆柱 OO'、圆锥 SO、圆台 OO' 和球 O.

一般地，一条平面曲线绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做**旋转面**(图 1－1－13)，封闭的旋转面围成的几何体称为**旋转体**. 圆柱、圆锥、圆台和球都是特殊的旋转体.

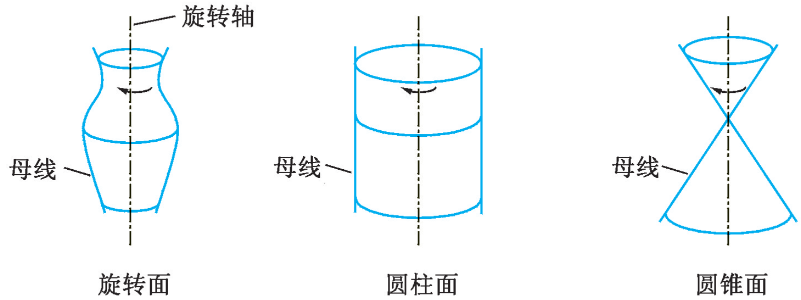


图 1－1－13

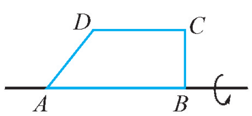


图 1－1－14

例 1 如图 1－1－14，将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的？

解 这个几何体是由圆柱和圆锥组合而成的，如图 1－1－15.

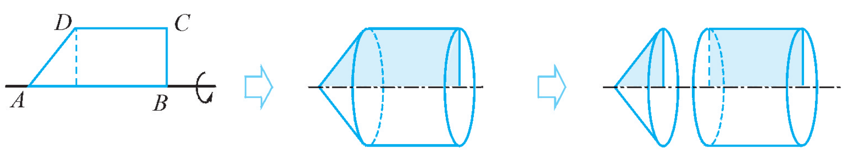


图 1－1－15

从例 1 看出，一些复杂的几何体是由简单几何体组合而成的.

例 2 指出图 1－1－16、图 1－1－17 中的几何体是由哪些简单几何体构成的.

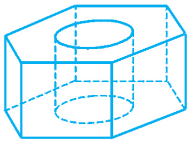


图 1－1－16

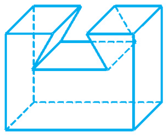


图 1－1－17

解 图 1－1－16 中的几何体是由一个六棱柱挖去一个圆柱所构成的.

图 1－1－17 中的几何体可以看做是由一个长方体割去一个四棱柱所构成的，也可以看做是由一个长方体与两个四棱柱组合而成的(图 1－1－18). 实际上，图 1－1－17 也是一个柱体，它的底面为一个凹多边形.

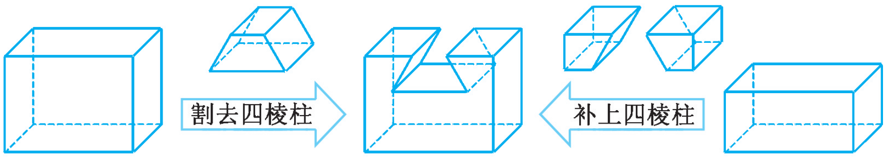


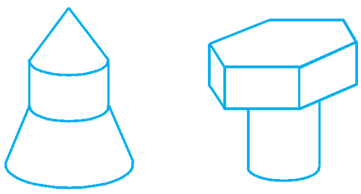
图 1－1－18

思　考

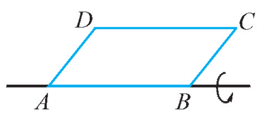
选择一些平面曲线，绕其所在平面内的一条定直线旋转，想像其生成的曲面，你能画出曲面的示意图吗?

练　习

1. 指出下列几何体分别由哪些简单几何体构成.



(第 1 题)

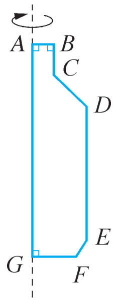


(第 2 题)

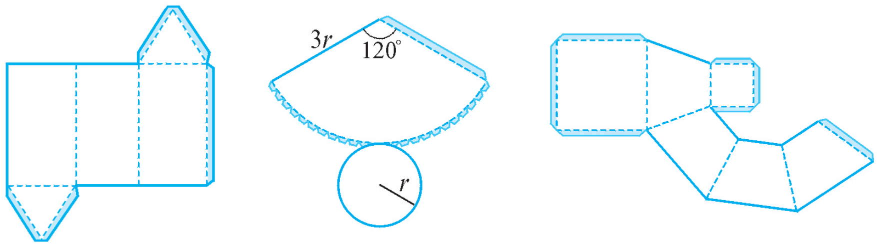
2. 如图，将 $\square ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的?

3. 充满气的车轮内胎可以通过什么图形旋转生成?

4. 用厚纸按如下三个图样画好后剪下，再沿图中虚线折起来粘好，得到的分别是什么几何体?(保存好所做的模型，为下一节课作准备)



（第 6 题）



（第 4 题）

5. 已知一个圆台的上、下底面半径分别为 1 cm，2 cm，高为 3 cm，求该圆台的母线长.

6. 如图，将平面图形 $ABCDEFG$ 绕 AG 边所在的直线旋转一周，作出由此形成的几何体，并指出该几何体是由哪些简单几何体构成的.

1.1.3 中心投影和平行投影

物体在灯光或日光的照射下，就会在墙壁或地面上产生影子，这是一种自然现象. **投影**（project）就是由这类自然现象抽象出来的. 生活中有许多利用投影的例子，如手影表演、皮影戏等（图 1－1－19）.

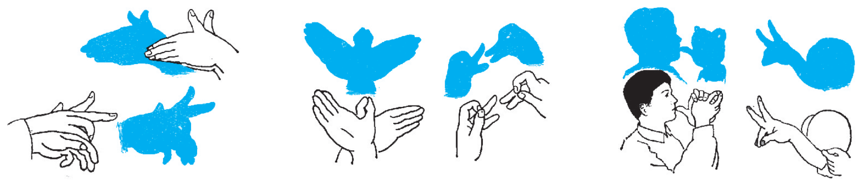
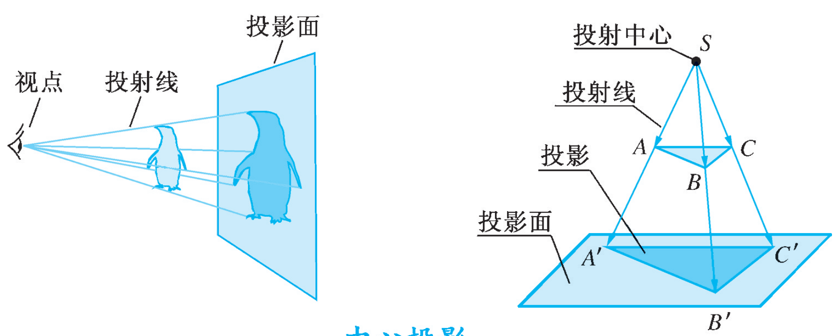


图 1－1－19

投影是光线（**投射线**）通过物体，向选定的面（**投影面**）投射，并在该面上得到图形的方法.

中心投影也称透视投影.

投射线交于一点的投影称为**中心投影**，如图 1－1－20 所示.



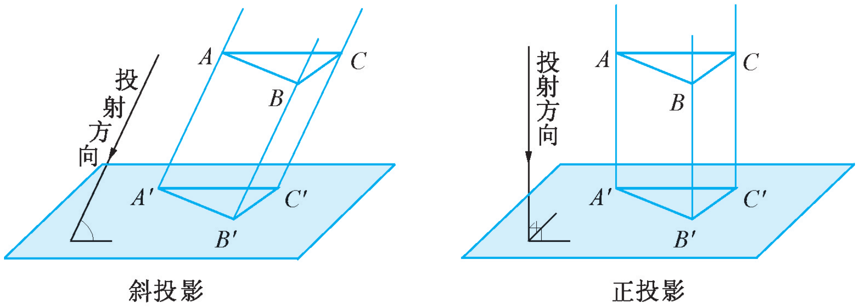
中心投影

图 1－1－20

中心投影形成的直观图能非常逼真地反映原来的物体，因此主要运用于绘画领域，也常用来概括地描绘一个结构或一个产品的外观. 由于中心投影的投射中心、投影面和物体的相对位置改变时，直观图的大小和形状亦将改变，因此工程制图或技术图样一般不采用

中心投影，而采用平行投影.

投射线互相平行的投影称为平行投影，平行投影按投射方向是否正对着投影面，可分为斜投影和正投影两种，如图 1－1－21 所示.



平行投影

图 1－1－21

本节主要学习利用正投影绘制空间图形的三视图，并能根据所给的三视图了解该空间图形的基本特征.

视图(view)是指将物体按正投影向投影面投射所得到的图形. 光线自物体的前面向后投射所得的投影称为主视图或正视图，自上向下投射所得的投影称为俯视图，自左向右投射所得的投影称为左视图，用这三种视图刻画空间物体的结构，我们称之为三视图，如图 1－1－22 所示.

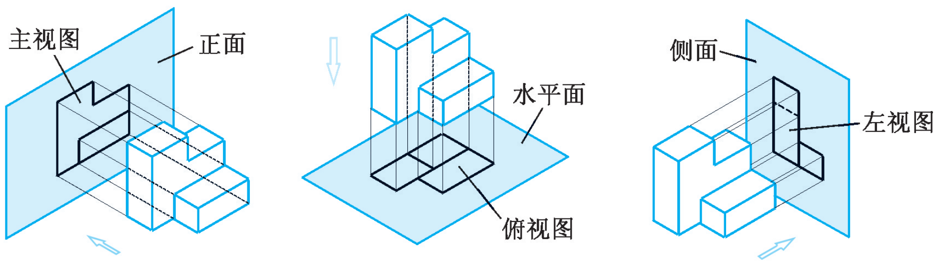


图 1－1－22

如图 1－1－23，画三视图时应注意：主视图与左视图的高要保持平齐，主视图与俯视图的长应对正，俯视图与左视图的宽应相等.

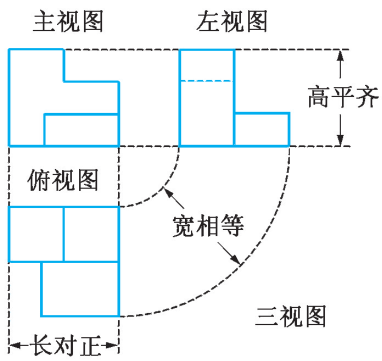


图 1－1－23

例 1 画出下列几何体的三视图(图 1-1-24).

分析 画三视图之前,先把几何体的结构弄清楚.图 1-1-24(1)为第 10 页练习第 4 题中的模型,图 1-1-24(2)是由一个圆台和一个球组成的几何体,图 1-1-24(3)为一个圆柱和一个六棱柱的组合体.在绘制三视图时,被遮挡的轮廓线要画成虚线.

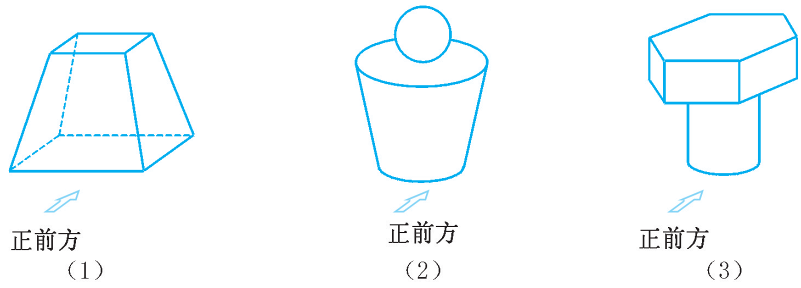


图 1-1-24

解 这三个几何体的三视图如图 1-1-25 所示.

选择不同的视角,所得的三视图可能不同.被遮挡的轮廓线应画成虚线.

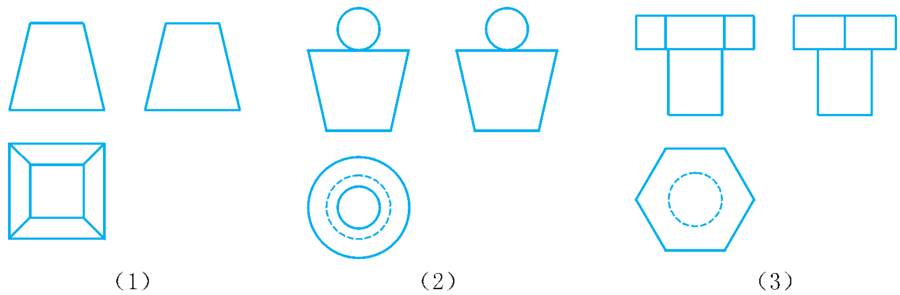


图 1-1-25

例 2 如图 1-1-26,设所给的方向为物体的正前方,试画出它的三视图(单位:cm).

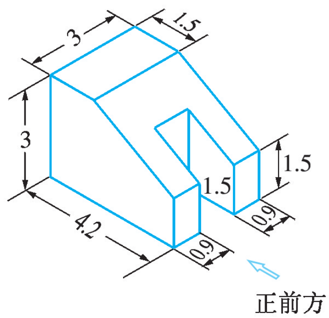


图 1-1-26

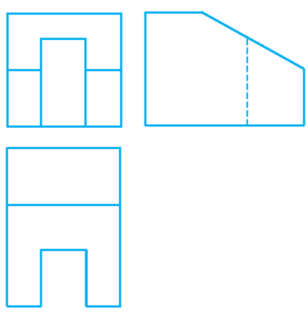
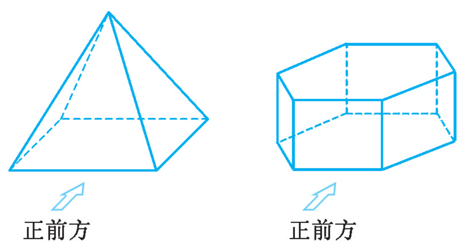


图 1-1-27

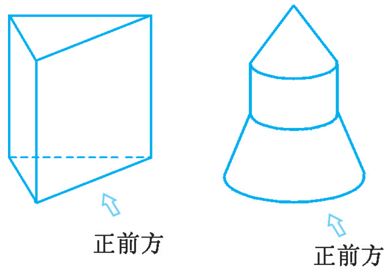
解 按 1∶2 比例绘制的三视图如图 1-1-27 所示.

练 习

1. 画出下列各几何体的三视图.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 画出如图所示各几何体的三视图(左边几何体是第 10 页练习第 4 题中的模型).
3. 一个圆锥的底面半径和高均为 2 cm,试画出该圆锥的三视图.
4. 如图,下列几何体分别由三个相同的小正方体组成,试分别画出这两个几何体的三视图.

（第 4 题）

1.1.4 直观图画法

正投影主要用于绘制三视图,在工程制图中被广泛采用.但三视图的直观性较差,因此绘制物体的直观图一般采用斜投影或中心投影(图 1－1－28).

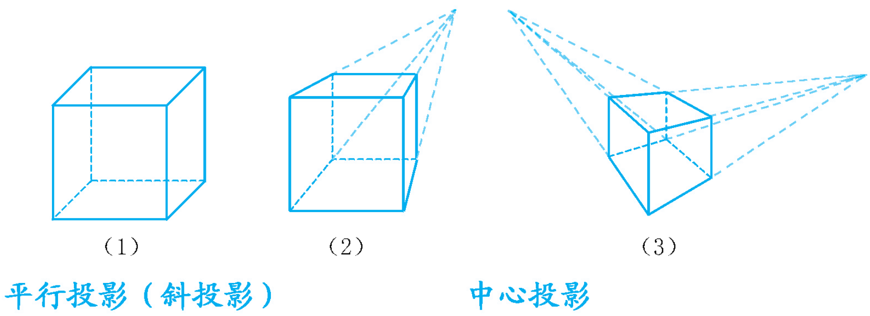


图 1－1－28

在中心投影(透视)中,水平线(或铅直线)仍保持水平(或竖直),但斜的平行线则会相交(如左图中的铁轨),交点称为**消点**.在图 1－1－28(2),(3)中分别有一个和两个消点,水平线(或铅直线)仍保持水平(或竖直).

中心投影(透视)虽然可以显示空间图形的直观形象,但作图方法比较复杂,又不易度量,因此在立体几何中通常采用斜投影来画空间图形的直观图.我们先看两个具体的例子.

例 1 画水平放置的正三角形的直观图.

画法 如图 1－1－29,按如下步骤完成:

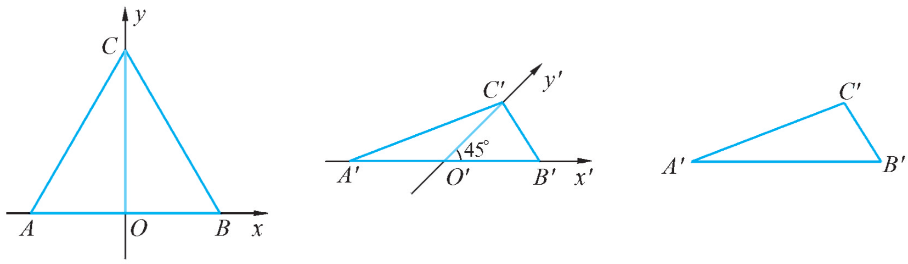


图 1－1－29

第一步 在已知的正三角形 ABC 中,取 AB 所在的直线为 x 轴,取对称轴 CO 为 y 轴.画对应的 x' 轴、y' 轴,使 $\angle x'O'y'=45°$.

第二步 在 x' 轴上取 $O'A'=OA$,$O'B'=OB$,在 y' 轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$.

第三步 连结 $A'C'$,$B'C'$,所得三角形 $A'B'C'$ 就是正三角形 ABC 的直观图.

例 2 画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

画法 如图 1－1－30,按如下步骤完成:

图画好后,擦去辅助线.

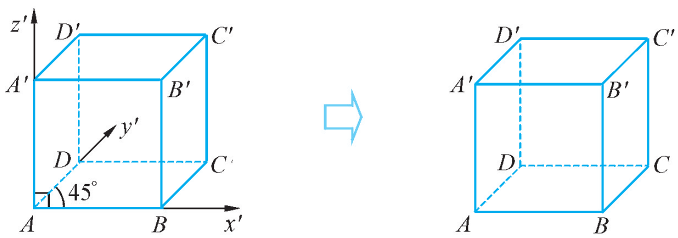


图 1－1－30

第一步 画水平放置的正方形的直观图 $ABCD$,使 $\angle BAD=45°$,$AB=2$ cm,$AD=1$ cm.

第二步 过 A 作 z' 轴,使 $\angle BAz'=90°$.分别过点 B,C,D 作 z' 轴的平行线,在 z' 轴及这组平行线上分别截取 $AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm.

第三步 连结 $A'B'$,$B'C'$,$C'D'$,$D'A'$,得到的图形就是所求作的正方体的直观图.

上面画直观图的方法叫做**斜二测画法**(oblique axonometry),其规则是:

(1) 在空间图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴,两轴交于 O 点,再取 z 轴,使 $\angle xOz=90°$,且 $\angle yOz=90°$.

（2）画直观图时把它们画成对应的 x' 轴、y' 轴和 z' 轴，它们相交于 O'，并使 $\angle x'O'y' = 45°$（或 $135°$），$\angle x'O'z' = 90°$，x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示水平面.

（3）已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴、y'轴或 z'轴的线段.

（4）已知图形中平行于 x 轴或 z 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆面. 水平放置的圆的直观图应该画成椭圆（图 1－1－31）.

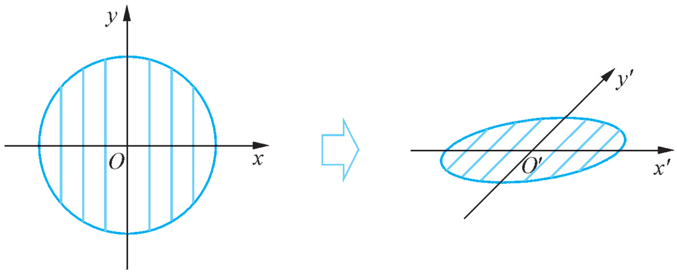


图 1－1－31

练　习

1. 在下列图形中，采用中心投影（透视）画法的是____________.

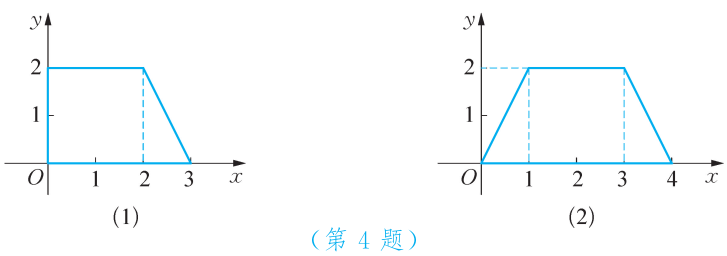
（第 1 题）

2. 用斜二测画法画出下列水平放置的图形的直观图.

（第 2 题）

3. 已知长方体的长、宽、高分别为 3 cm，2 cm，2 cm，试画出该长方体的直观图.

4. 用斜二测画法画出下列平面图形水平放置的直观图.



（第 4 题）

5. 画出底面半径为 1 cm、高为 3 cm 的圆锥的直观图.

6. 根据下面的三视图，画出相应的空间图形的直观图.

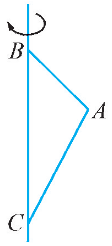
（第 6 题）

习题 1.1

感受 · 理解

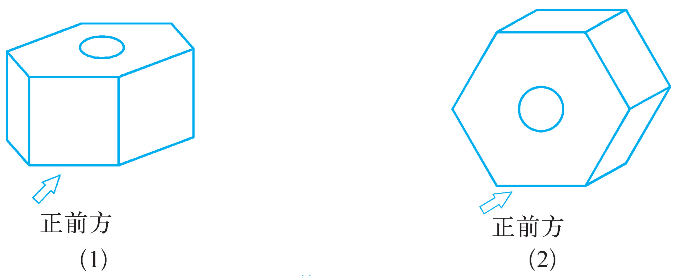
1. 三棱柱、六棱柱分别可以看成是由什么多边形平移形成的几何体？

2. 如图，将$\triangle ABC$绕BC边所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的？画出这个几何体的直观图.



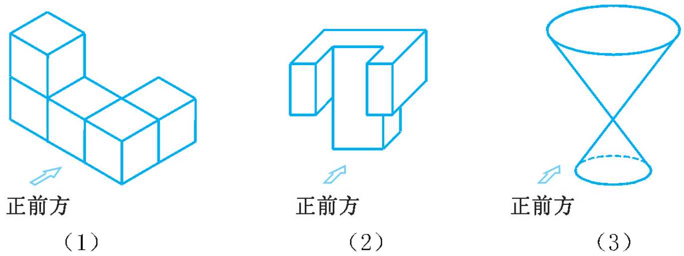
（第 2 题）

3. 如图，六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm，高为 2 cm，内孔直径为 1 cm. 分别按下列所指正前方画出螺帽的三视图.



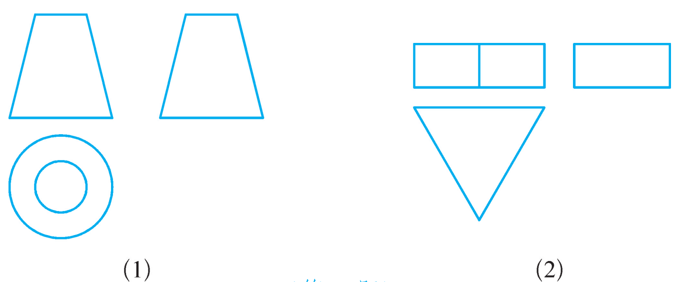
（第 3 题）

4. 画出下列各几何体的三视图.



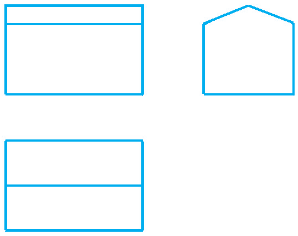
（第 4 题）

5. 根据下面所给三视图，画出相应的几何体的直观图.



（第 5 题）

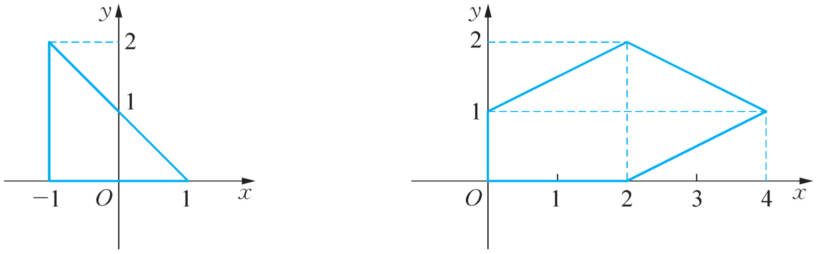
6. 根据所给三视图，画出相应的空间图形的直观图.



（第 6 题）

7. 已知圆锥的底面半径和高分别为 2 cm，3 cm，求圆锥侧面上的点到底面圆心的距离的最小值.

8. 用斜二测画法画出下列平面图形水平放置的直观图.

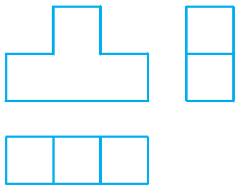


(1)　　(2)

（第 8 题）

思考 · 运用

9. 一个几何体的三视图如图所示，它是什么几何体？

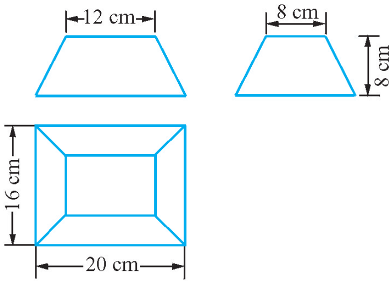


（第 9 题）

10. 选择日常生活中的一个几何体，画出它的三视图和直观图.

探究 · 拓展

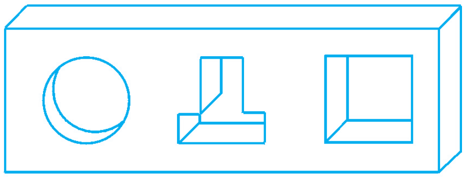
11. 某几何体的三视图如下，该几何体是棱台吗？



（第 11 题）

12. 用一个平面截球得到一个截面，此截面一定是圆吗？为什么？

13. 某孔形样板如图所示，试设计一个塞子，使得它能堵住孔形样板上的每一个洞.



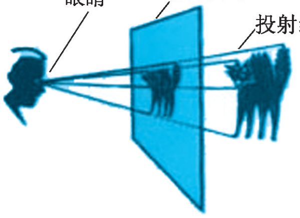
（第 13 题）

阅　读

艺术家的透视法 · 年希尧的《视学》

透视法的起源应归功于文艺复兴时期的意大利艺术家. 这一时期的艺术家们的观点改变了，不再像中世纪那样把绘画和雕塑的目的局限于为《圣经》作插图、颂扬上帝，而是把描绘现实世界作为目的. 他们开始认真地研究如何在绘画中真实地再现自然风光和人物情态. 他们也热心研究几何，其目的是为了把三维的现实世界真实地绘制在二维的画布上，由此产生了透视法.

意大利数学家、艺术家阿尔贝蒂（Alberti，1404～1472）于 1435 年发表《论绘画》，阐述了最早的数学透视法原理，引入了投射线和截景等概念. 他设想在人眼和景物之间插立一张玻璃平板. 当眼睛（指一只眼）向景物发出投射线时，由投射线和玻璃平板的交点所形成的点集叫做一个截景. 截景给人的印象就如同景物本身一样. 因此，如果所作的画和截景一样，就会显得很逼真. 阿尔贝蒂的透视法逐渐被画家们采用并加以改进.

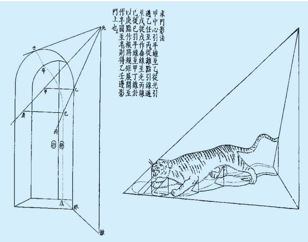


天才艺术家达 · 芬奇（Leonardo da Vinci，1452～1519）学识渊博，他十分重视数学的作用. 他说："一个人如果怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱."他认为大自然按照数学规律运转，自然界的力和运动必须通过对数量的研究来探讨. 只有紧紧地依靠数学，才能穿透那不可捉摸的思想迷雾. 他在绘画实践中，娴熟地运用了数学透视法原理. 他写了一本谈透视法的书《绘画专论》. 书中认为一幅画必须是实体的精确的再现，并坚信运用数学透视法能够做到这一点. 他认为绘画也是一种科学，因为它揭示了自然界的真实性. 在达 · 芬奇的倡导下，学习和应用透视法成为欧洲画家们的自觉行动.

中国清代宫廷画师年希尧（？～1738）从青年时代起就对数学和制图技术有兴趣. 他在北京时认识了一名意大利画家郎世宁（Giuseppe Castiglione，1688～1766）. 年希尧向他学习了透视知识，并且从他那里得到一本讲透视法的书，爱不释手. 经过深入钻研，他不仅洞悉原著，还产生了一些自己的创见. 于是他以原著为基础，加入自己的见解，并补充了大量的图形，写成了《视学》一书，于 1729 年出版.

《视学》出版之后，年希尧觉得"终不免于肤浅"，于是继续研

究.他一边和郎世宁“往复再四,究其源流”,一边从中国古籍中寻找相关资料.经“苦思力索,补缕五十余图,并附图说”,于 1735 年出了修订版.



《视学》一书最精彩的部分是图形.图形分为两大类:直观图(立体图)和平面图.直观图从画法原理上看又分轴测图和透视图,平面图分二视图和三视图,其原理和现代工程制图完全一致.年希尧对于透视原理论述清楚,对于投影关系也处理得很好,他想像一个物体悬在空中,各点投影用虚线连结,一看就知道平面上的某个点是物体上哪个点的投影.

中国古籍中也有立体图和平面图的画法,始于东汉,现在能看到的如北宋时《武经总要》的兵器图、《新仪象法要》中的天文仪器图、《营造法式》中的建筑图等,而且画得越来越好,但是总的来说还比较粗糙,缺乏透视原理的说明,因而显得不够科学.因此,年希尧的《视学》在中国是前无古人的;在世界上也堪称早期画法几何的代表作,比法国数学家蒙日(Monge,1746~1818)于 1799 年出版的名著《画法几何学》早 70 年.

1.2 点、线、面之间的位置关系

在上一节，我们已经对简单的几何体有了直观的认识．简单的几何体是由空间的点、线、面所构成的，本节我们将对点、线、面的位置关系进行讨论．

- 空间的点、直线和平面具有怎样的位置关系？
- 如何用数学语言来表述和研究这些位置关系？

1.2.1 平面的基本性质

用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定，将一把直尺置于桌面上，通过是否漏光就能检查桌面是否平整，为什么？

椅子放不稳，是地面不平还是椅子本身有问题？

上面的问题都和平面的基本性质有关．那么，

- 平面有哪些基本性质？

平面没有厚薄，是无限延展的．

广阔的草原、平静的湖面都给我们以平面的形象．和点、直线一样，平面也是从现实世界中抽象出来的几何概念．平面通常用平行四边形来表示，当平面水平放置的时候，一般用水平放置的正方形的直观图作为平面的直观图（图 1－2－1）．

平面通常用希腊字母 α，β，γ，…表示，也可以用平行四边形的两个相对顶点的字母表示，如图 1－2－1 中的平面 α、平面 AC 等．

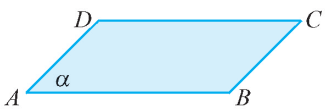


图 1－2－1

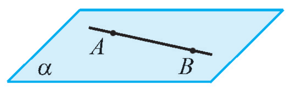


图 1－2－2

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当做公理，作为进一步推理的基础．

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1－2－2）．

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线．“将一把直尺置于桌面上，通过是否漏光就能检查桌面是否平整”，就是基于这个基本性质．

空间中点、直线、平面的位置关系，可以借用集合中的符号来表示. 例如，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中(图 1－2－3)：

位置关系	符号表示
点 P 在直线 AB 上	$P \in AB$
点 C 不在直线 AB 上	$C \notin AB$
点 M 在平面 AC 内	$M \in$ 平面 AC
点 A_1 不在平面 AC 内	$A_1 \notin$ 平面 AC
直线 AB 与直线 BC 交于点 B	$AB \cap BC = B$
直线 AB 在平面 AC 内	$AB \subset$ 平面 AC
直线 AA_1 不在平面 AC 内	$AA_1 \not\subset$ 平面 AC

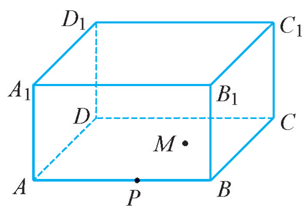


图 1－2－3

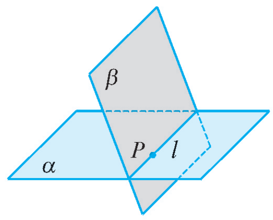


图 1－2－4

这样，公理 1 就可以用符号表示为(图 1－2－2)：

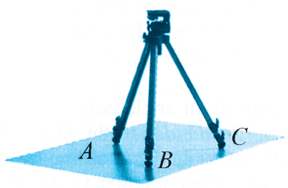
$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \subset \alpha.$$

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是经过这个公共点的一条直线(图 1－2－4).

若两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的**交线**. 教室里相邻的墙面在地面的墙角处有一个公共点，那么它们就相交于过这个点的一条直线.

公理 2 可用符号表示为(图 1－2－4)：

$$\left.\begin{array}{l} P \in \alpha \\ P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = l \text{ 且 } P \in l.$$



确定一个平面的含义是有且只有一个平面.

公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面(图 1－2－5).

“用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定”、“照相机支架只需三条腿就够了”都是基于这个基本性质. 公理 3 也可简单地说成，不共线的三点确定一个平面.

过不共线三点 A, B, C 的平面(图 1－2－5)通常记作"平面 ABC".

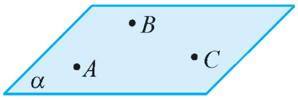


图 1－2－5

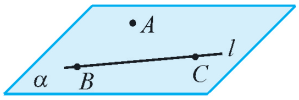


图 1－2－6

根据上述公理,可以得出下面的推论:

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面(图 1－2－6).

已知:直线 l,点 $A \notin l$(图 1－2－6).

求证:过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

分析 先在直线 l 上任取两点 B, C,这样 A, B, C 三点就确定一个平面,再证明 l 在这个平面内.

证 在直线 l 上任取两点 B, C. 因为点 A 不在直线 l 上,根据公理 3,经过不共线三点 A, B, C 有一个平面 α.

因为 $B \in \alpha$, $C \in \alpha$,所以根据公理 1,$l \subset \alpha$,即平面 α 经过直线 l 和点 A.

因为 B, C 在 l 上,所以经过直线 l 和点 A 的平面一定经过点 A, B, C.

于是再根据公理 3,经过不共线的三点 A, B, C 的平面只有一个,所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个.

类似地,我们可以得出下面两个推论:

推论 2 经过两条相交直线,有且只有一个平面(图 1－2－7).

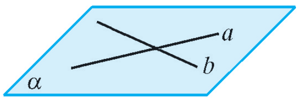


图 1－2－7

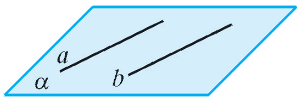


图 1－2－8

推论 3 经过两条平行直线,有且只有一个平面(图 1－2－8).

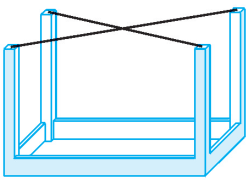


图 1－2－9

如图 1－2－9,用两根细绳沿桌子四条腿的对角拉直,如果这两根细绳相交,说明桌子四条腿的底端在同一平面内,否则就不在同一平面内,其依据就是推论 2.

空间若干点或直线都在同一个平面内,就称它们“共面”.

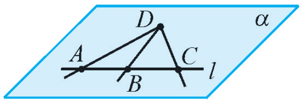


图 1-2-10

例 1 已知:$A\in l$, $B\in l$, $C\in l$, $D\notin l$(图 1-2-10).

求证:直线 AD, BD, CD 共面.

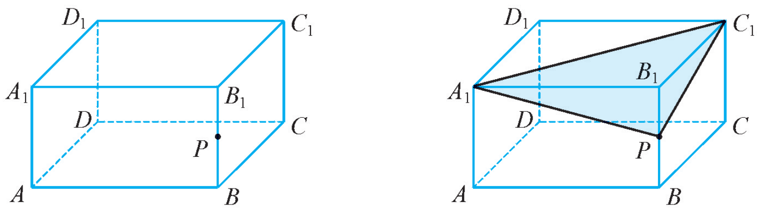
分析 因为直线 l 与点 D 可以确定平面 α,所以只需证明 AD, BD, CD 都在平面 α 内.

证 因为 $D\notin l$,所以 l 与 D 可以确定平面 α(推论 1).

因为 $A\in l$,所以 $A\in\alpha$,又 $D\in\alpha$,所以 $AD\subset\alpha$(公理 1).

同理,$BD\subset\alpha$,$CD\subset\alpha$,所以 AD, BD, CD 在同一平面 α 内,即它们共面.

例 2 如图 1-2-11(1),在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为棱 BB_1 的中点,画出由 A_1, C_1, P 三点所确定的平面 α 与长方体表面的交线.



(1)　　(2)

图 1-2-11

分析 因为点 P 既在平面 α 内又在平面 AB_1 内,所以点 P 在平面 α 与平面 AB_1 的交线上. 同理,点 A_1 在平面 α 与平面 AB_1 的交线上. 因此,PA_1 就是平面 α 与平面 AB_1 的交线.

作法 连结 A_1P, PC_1, A_1C_1,它们就是平面 α 与长方体表面的交线(图 1-2-11(2)).

练　习

1. 为什么许多自行车后轮旁只安装一只撑脚?
2. 用符号表示下列语句:
   (1) 点 A 在直线 l 上,l 在平面 α 内;
   (2) 平面 α 和平面 β 的交线是直线 l,直线 m 在平面 α 内;
   (3) 点 A 在平面 α 内,直线 l 经过点 A,且直线 l 在平面 α 外;
   (4) 直线 l 经过平面 α 外一点 M.
3. 画图表示下列语句(其中 P, M 表示点,l, m 表示直线,α, β 表示平面):
   (1) $P\in l$, $P\notin\alpha$, $l\cap\alpha=M$;
   (2) $\alpha\cap\beta=m$, $P\in\alpha$, $P\notin m$;
   (3) $l\not\subset\alpha$, $l\subset\beta$;
   (4) $P\in\alpha$, $P\in\beta$, $\alpha\cap\beta=m$.
4. 用符号表示“点 A 在直线 l 上,l 在平面 α 外”,正确的是(　　).
   A. $A\in l$, $l\notin\alpha$　　B. $A\in l$, $l\not\subset\alpha$　　C. $A\subset l$, $l\not\subset\alpha$　　D. $A\subset l$, $l\notin\alpha$
5. 下列叙述中,正确的是(　　).
   A. 因为 $P\in\alpha$, $Q\in\alpha$,所以 $PQ\in\alpha$

B. 因为 $P\in\alpha$, $Q\in\beta$,所以 $\alpha\cap\beta=PQ$

C. 因为 $AB\subset\alpha$, $C\in AB$,$D\in AB$,所以 $CD\in\alpha$

D. 因为 $AB\subset\alpha$, $AB\subset\beta$,所以 $\alpha\cap\beta=AB$

6. 若 $A\in\alpha$, $B\notin\alpha$, $A\in l$, $B\in l$,那么直线 l 与平面 α 有多少个公共点?

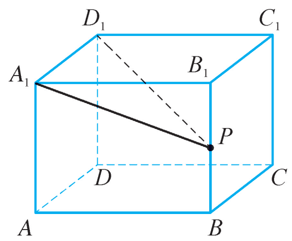
7. 请指出下列说法是否正确,并说明理由:

(1) 空间三点确定一个平面;

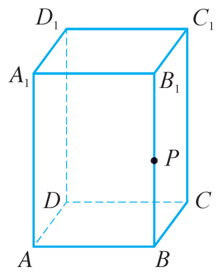
(2) 如果平面 α 与平面 β 有公共点,那么公共点就不止一个;

(3) 因为平面型斜屋面不与地面相交,所以屋面所在的平面与地面不相交.

8. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为棱 BB_1 的中点,则直线 A_1P 与平面 $ABCD$ 是否相交? 为什么? 直线 D_1P 呢?



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为棱 BB_1 的中点.

(1) 画出平面 PAC 与平面 $ABCD$ 的交线;

(2) 画出平面 PA_1C 与平面 $ABCD$ 的交线.

1.2.2 空间两条直线的位置关系

本书中,如无特别说明,"两条直线"指不重合的两条直线,"两个平面"指不重合的两个平面.

我们知道,平面内两条直线的位置关系只有平行和相交两种. 那么,

● 空间两条直线的位置关系有哪些呢?

观察如图 1-2-12 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,可以看出,空间两条直线除了相交、平行两种位置关系外,还有第三种位置关系. 例如,直线 A_1B_1 与 BC、直线 A_1B_1 与 CC_1 等既不相交又不平行,即不同在任何一个平面内. 又如,图 1-2-13 中机械部件蜗杆和蜗轮的轴线 a 和 b,它们也不同在任何一个平面内.

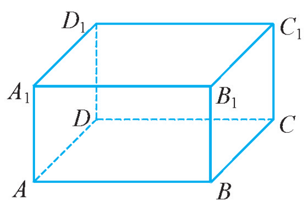


图 1-2-12

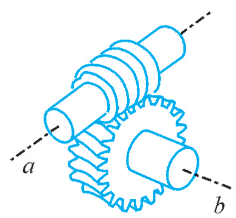


图 1-2-13

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**(skew lines).

因此,空间两条直线的位置关系有以下三种:

位置关系	共面情况	公共点个数
相交直线	在同一平面内	有且只有一个
平行直线	在同一平面内	没 有
异面直线	不同在任何一个平面内	没 有

1. 平行直线

在平面几何中，同一平面内的三条直线 a, b, c，如果 $a /\!/ b$ 且 $b /\!/ c$，那么 $a /\!/ c$. 这个性质在空间是否成立呢？

如图 1－2－14，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 /\!/ BB_1$，$CC_1 /\!/ BB_1$，通过观察可以看出 $AA_1 /\!/ CC_1$.

又如图 1－2－15，在圆柱 OO_1 中，$AA_1 /\!/ OO_1$，$BB_1 /\!/ OO_1$，通过观察也可以看出 $AA_1 /\!/ BB_1$.

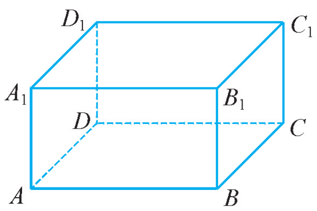


图 1－2－14

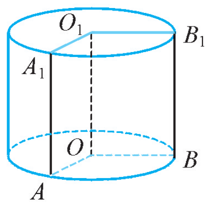


图 1－2－15

这表明，空间的三条直线也具有这样的性质，我们把它作为公理.

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

用符号表示为：

$$\left.\begin{array}{l} a /\!/ b \\ b /\!/ c \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ c.$$

a, b, c 三条直线两两平行，可以记为 $a /\!/ b /\!/ c$.

思 考

经过直线外一点，有几条直线和这条直线平行？

例 1 如图 1－2－16，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E, F 分别是 AB, BC 的中点，求证：$EF /\!/ A_1C_1$.

证 连结 AC. 在 $\triangle ABC$ 中，因为 E, F 分别是 AB, BC 的中点，所以 $EF /\!/ AC$.

又因为 $AA_1 \mathrel{\underline{/\!/}} BB_1$，$BB_1 \mathrel{\underline{/\!/}} CC_1$，所以 $AA_1 \mathrel{\underline{/\!/}} CC_1$，

从而四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，所以 $AC /\!/ A_1C_1$.

从而 $EF /\!/ A_1C_1$.

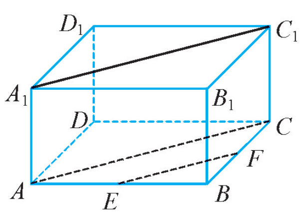


图 1－2－16

在平面中，如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且

方向相同，那么这两个角相等. 这一结论在空间成立吗?

观察图 1－2－16 中的 $\angle BEF$ 和 $\angle B_1A_1C_1$，这两个角的两边分别平行，且有

$\angle BEF = \angle B_1A_1C_1$（因为 $\angle BEF = \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$）.

一般地，我们有

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

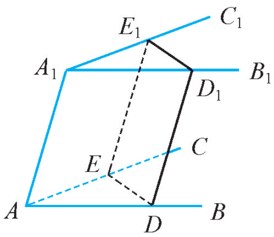


图 1－2－17

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1$，$AC \parallel A_1C_1$，并且方向相同（图 1－2－17）.

求证：$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

分析 为证明 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$，我们构造两个全等三角形，使 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是它们的对应角.

证 分别在$\angle BAC$ 和$\angle B_1A_1C_1$ 的两边上截取

$$AD = A_1D_1,\ AE = A_1E_1,$$

连结 AA_1，DD_1，EE_1，DE，D_1E_1.

$$\left.\begin{array}{l}AB \parallel A_1B_1\\ AD = A_1D_1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{四边形 } AA_1D_1D \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DD_1\\ \text{同理，} AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} EE_1\end{array}\right\} \Rightarrow DD_1 \mathrel{\underline{\parallel}} EE_1 \Rightarrow \text{四边形 } DD_1E_1E \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow DE = D_1E_1\\ \quad AD = A_1D_1\\ \quad AE = A_1E_1\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle A_1D_1E_1 \Rightarrow \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

思　考

如果 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1$，$AC \parallel A_1C_1$，且边 AB，A_1B_1 方向相同，而边 AC，A_1C_1 方向相反，那么 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 之间有何关系？为什么？

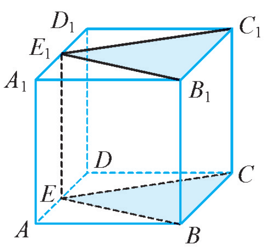


图 1－2－18

例 2 如图 1－2－18，已知 E，E_1 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AD，A_1D_1 的中点，求证：$\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

分析 设法证明 $E_1C_1 \parallel EC$，$E_1B_1 \parallel EB$.

证 连结 EE_1.

因为 E_1，E 分别是 A_1D_1，AD 的中点，所以 $A_1E_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AE$，故四边形 A_1E_1EA 是平行四边形，从而 $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} E_1E$.

又因为 $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，所以 $E_1E \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，故四边形 EE_1B_1B 是平行四

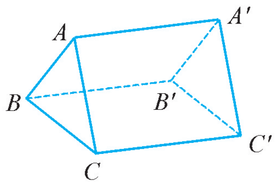
边形.

于是 $E_1B_1 \parallel EB$，同理，$E_1C_1 \parallel EC$.

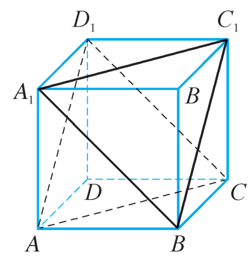
又因为 $\angle C_1E_1B_1$ 与 $\angle CEB$ 两边的方向相同，所以 $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

练　习

1. 设 AA_1 是正方体的一条棱，这个正方体中与 AA_1 平行的棱共有（　　）.
   A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条
2. 如果 $OA \parallel O_1A_1$，$OB \parallel O_1B_1$，那么 $\angle AOB$ 与 $\angle A_1O_1B_1$ 之间具有什么关系？
3. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且 $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} BB'$，$BB' \mathrel{\underline{\parallel}} CC'$.
   求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

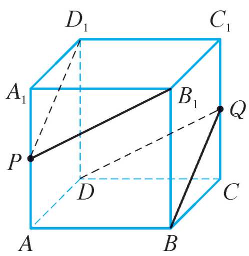


（第 3 题）

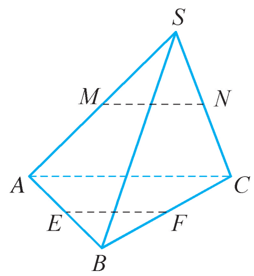


（第 4 题）

4. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.
   (1) 直线 AC 与直线 A_1C_1 平行吗？为什么？
   (2) $\angle A_1BC_1$ 与 $\angle AD_1C$ 是否相等？为什么？
5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q 分别为棱 AA_1 和 CC_1 的中点，问：$\angle D_1PB_1$ 与 $\angle BQD$ 是否相等？为什么？



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N，E，F 分别为棱 SA，SC，AB，BC 的中点，试判断直线 MN 与直线 EF 是否平行.

2. 异面直线

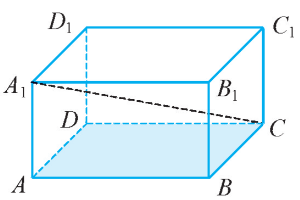


图 1-2-19

如图 1-2-19，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB 与 A_1C 具有怎样的位置关系？

假设 AB 与 A_1C 共面，由于经过点 C 和直线 AB 的平面只能有一个，所以直线 A_1C 和 AB 都应在平面 $ABCD$ 内，于是点 A_1 在平面 $ABCD$ 内，这与点 A_1 在平面 $ABCD$ 外矛盾. 因此，直线 AB 与 A_1C

是异面直线.

一般地,我们有

定理 过平面内一点与平面外一点的直线,和这个平面内不经过该点的直线是异面直线.

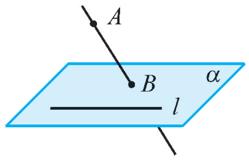


图 1-2-20

用符号表示为(图 1-2-20):

若 $l\subset\alpha$, $A\notin\alpha$, $B\in\alpha$, $B\notin l$,则直线 AB 与 l 是异面直线.

如图 1-2-21,a 与 b 是异面直线,经过空间任意一点 O,作直线 $a'/\!/a$, $b'/\!/b$,我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做**异面直线 a, b 所成的角**.

为什么 a', b' 所成角的大小与点 O 的选择无关?

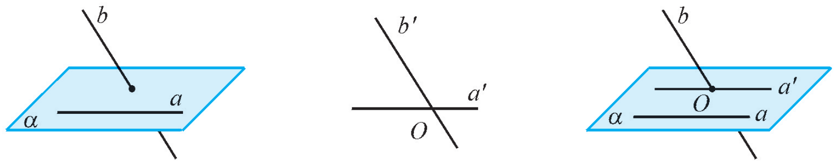


图 1-2-21

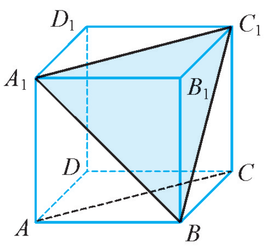


图 1-2-22

例 1 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体(图 1-2-22).

(1) 正方体的哪些棱所在的直线与直线 BC_1 是异面直线?

(2) 求异面直线 AA_1 与 BC 所成的角;

(3) 求异面直线 BC_1 与 AC 所成的角.

解 (1) 正方体共有 12 条棱,与 BC_1 相交的棱有 6 条,与 BC_1 平行的棱不存在.因此余下的 6 条棱所在的直线分别与直线 BC_1 是异面直线,它们是 A_1A, A_1B_1, A_1D_1, DA, DC, DD_1.

(2) 因为 $AD /\!/ BC$,

所以 $\angle A_1AD$ 即为 AA_1 与 BC 所成的角.

因为 $\angle A_1AD=90^\circ$,

所以 AA_1 与 BC 所成的角为 90°.

(3) 因为 $AA_1 \underline{/\!/} BB_1 \underline{/\!/} CC_1$,

所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形,

所以 $AC /\!/ A_1C_1$,

所以 BC_1 与 AC 所成的角就是 BC_1 与 A_1C_1 所成的锐角或直角.

连结 A_1B.

因为 A_1B, BC_1 与 A_1C_1 都是正方体的面对角线,

所以 $A_1B=BC_1=A_1C_1$,

故 $\triangle A_1BC_1$ 是正三角形.

因此，BC_1 与 A_1C_1 所成的锐角为 $60°$，即 BC_1 与 AC 所成的角为 $60°$.

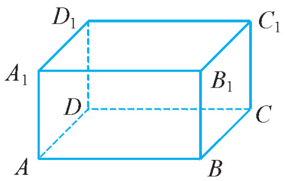
若异面直线 a，b 所成的角是直角，则称**异面直线** a，b **互相垂直**，记作 $a \perp b$.

如图 1－2－22 中，AA_1 与 BC 所成的角为 $90°$，就记作 $AA_1 \perp BC$.

图 1－2－13 中，蜗杆和蜗轮的轴线是互相垂直的异面直线，它表明由蜗杆到蜗轮的传动方向变了 $90°$的角.

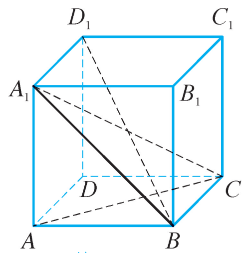
练　习

1. 指出下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 过直线外一点可作无数条直线与已知直线成异面直线；
   (2) 过直线外一点只有一条直线与已知直线垂直.



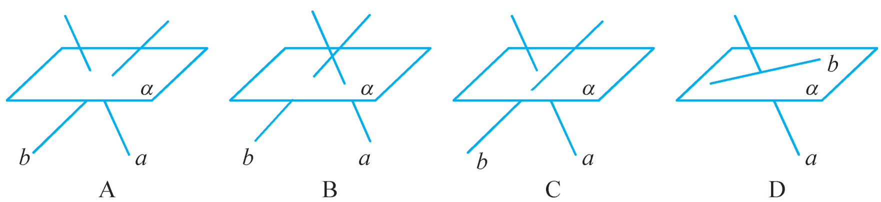
(第 2 题)

2. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，哪些棱所在直线与直线 AA_1 是异面直线且互相垂直？
3. 如果两条直线 a 和 b 没有公共点，那么 a 与 b 具有怎样的位置关系？
4. 如果直线 a，b 分别是长方体的相邻两个面的对角线所在的直线，那么 a 与 b 具有怎样的位置关系？
5. 在两个相交平面内各画一条直线，使它们成为：
   (1) 平行直线；(2) 相交直线；(3) 异面直线.
6. 指出下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 若 $a \parallel b$，$c \perp a$，则 $c \perp b$；
   (2) 若 $a \perp c$，$b \perp c$，则 $a \parallel b$.
7. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.
   (1) 求异面直线 A_1B 与 C_1C 所成的角；
   (2) 作出异面直线 AC 与 D_1B 所成的角；
   (3) 作出异面直线 A_1C 与 D_1D 所成的角，并求出该角的正切值.



(第 7 题)

8. 下列图形中，能确定直线 a，b 是异面直线的是(　　).



(第 8 题)

习题 1.2(1)

感受·理解

1. 用符号表示下列语句：
   (1) 点 A 在平面 α 内，点 B 在平面 β 内，直线 AB 在平面 β 内；

(2) 平面 α 和 β 的交线为 l，直线 m 在平面 α 内，且 m 与 l 交于点 P.

2. 画出满足下列条件的图形(其中 A, B, M 表示点，m, n, a, b 表示直线，α, β 表示平面)：

(1) $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $m \,//\, n \,//\, l$;

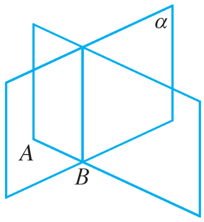
(2) $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB \not\subset \alpha$, $AB \not\subset \beta$, $\alpha \cap \beta = l$;

(3) $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $a \cap b = M$.

3. 如图，试根据下列要求，把被遮挡的部分画为虚线.

(1) AB 被平面 α 遮挡；

(2) AB 没有被平面 α 遮挡.



(第 3 题)

4. 如果三条直线两两相交，那么这三条直线是否共面？

5. 四条线段顺次首尾相接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

6. 画“三个平面两两相交”的直观图.

7. 已知空间不共面的四点，过其中任意三点可以确定一个平面，由这四个点能确定几个平面？

8. 如果 a, b 是异面直线，直线 c 与 a, b 都相交，那么由这三条直线中的任意两条所确定的平面共有多少个？

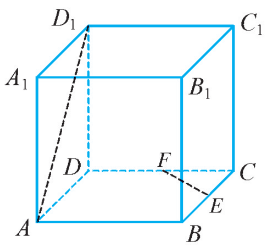
9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，经过 A_1D 与 BB_1 能否作长方体的截面？为什么？

10. 如果 AB, CD 是两条异面直线，那么直线 AC, BD 一定是异面直线吗？ 为什么？

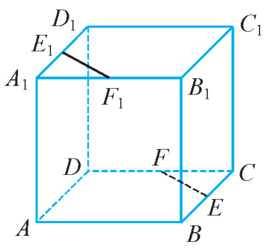
思考・运用

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=a$，E, F 分别是 BC, DC 的中点．求异面直线 AD_1 与 EF 所成角的大小.

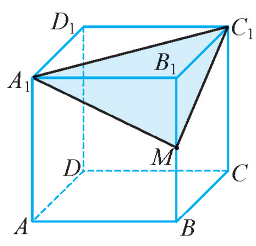
12. 如图，在正方体 AC_1 中，$A_1E_1 = CE$，$A_1F_1 = CF$. 求证：$E_1F_1 \underline{\mathbin{//}} EF$.



(第 11 题)



(第 12 题)



(第 13 题)

13. 如图，设 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 BB_1 的中点，试作出平面 A_1C_1M 与平面 $ABCD$ 的交线.

14. 分别与异面直线 a, b 都相交的两条直线 c, d 一定异面吗？ 为什么？

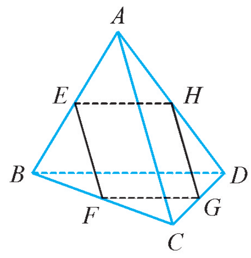
探究・拓展

15. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点.

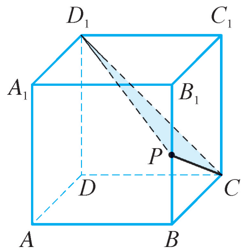
(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 若 $AC=BD$，求证：四边形 $EFGH$ 是菱形；

(3) 当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是正方形？



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，判断平面 D_1PC 与平面 $ABCD$ 是否相交. 如果相交，作出这两个平面的交线.

1.2.3 直线与平面的位置关系

我们已经研究了空间两条直线有三种位置关系，那么，

● 直线和平面可能有哪几种位置关系？

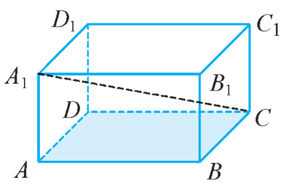
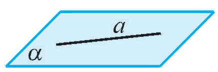
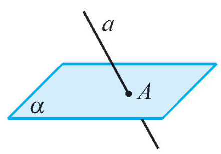
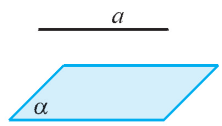


图 1－2－23

观察图 1－2－23 所示的长方体，可以发现，棱 A_1B_1（或 A_1D_1）所在的直线与平面 AC 没有公共点，对角线 A_1C（或棱 AA_1）所在的直线与平面 AC 有且只有一个公共点，棱 AD 所在直线与平面 AC 有无数个公共点.

如果一条直线 a 和一个平面 α 没有公共点，我们就说**直线 a 与平面 α 平行**；如果直线 a 与平面 α 有且只有一个公共点，我们就说**直线 a 与平面 α 相交**；如果直线 a 与平面 α 有无数个公共点，我们就说**直线 a 在平面 α 内**.

一条直线和一个平面的位置关系有且只有以下三种：

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点	有无数个公共点	有且只有一个公共点	没有公共点
符号表示	$a \subset \alpha$	$a \cap \alpha = A$	$a \parallel \alpha$
图形表示			

我们把直线 a 与平面 α 相交或平行的情况统称为直线在平面外，记作 $a \not\subset \alpha$.

1. 直线与平面平行

在图 1－2－23 所示的长方体中，$A_1B_1 /\!/ AB$，当直线 AB 沿直线 BC 平移时，就形成了平面 AC，直线 AB 在平移过程中的每一个位置都与 A_1B_1 平行，因此直线 A_1B_1 与平面 AC 没有公共点.

一般地，我们有

本章中出现的判定定理的证明不作要求.

> **直线与平面平行的判定定理** 如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

用符号表示为(图 1－2－24)：

$$\left.\begin{aligned} a &\not\subset \alpha \\ b &\subset \alpha \\ a &/\!/ b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a /\!/ \alpha.$$

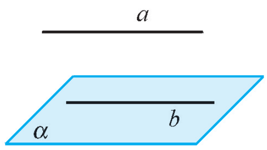


图 1－2－24

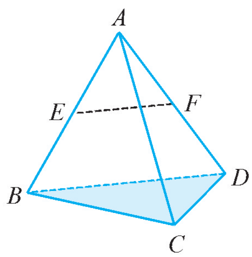


图 1－2－25

例 1 如图 1－2－25，已知 E，F 分别是三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱 AB，AD 的中点，求证：$EF /\!/$ 平面 BCD.

分析 设法在平面 BCD 内找一条直线与 EF 平行.

证

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} AE &= EB \\ AF &= FD \end{aligned}\right\} \Rightarrow EF /\!/ BD \\ &EF \not\subset \text{平面 } BCD \\ &BD \subset \text{平面 } BCD \end{aligned}\right\} \Rightarrow EF /\!/ \text{平面 } BCD.$$

如果一条直线与一个平面平行，那么这条直线是否与这个平面内的任意一条直线都平行？

由直线与平面平行可知，这条直线与这个平面内的任意一条直线都没有公共点，所以它们只能平行或异面.

> **直线与平面平行的性质定理** 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

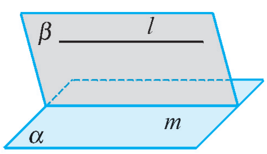


图 1－2－26

已知：$l /\!/ \alpha$，$l \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = m$(图 1－2－26).

求证：$l /\!/ m$.

证

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} l /\!/ \alpha \Rightarrow l \text{ 和 } \alpha \text{ 没有公共点} \\ m \subset \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow l \text{ 和 } m \text{ 没有公共点} \\ &l,\ m \subset \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow l /\!/ m.$$

例 2 一个长方体木块如图 1－2－27(1)所示，要经过平面 A_1C_1 内

一点 P 和棱 BC 将木块锯开，应该怎样画线？

分析 点 P 与 BC 确定平面 α，根据题意，应画出平面 α 与长方体各面的交线.

因为点 P 既在平面 α 内又在平面 A_1C_1 内，由公理2，平面 α 与平面 A_1C_1 必相交于经过点 P 的一条直线. 设这条直线与 A_1B_1，C_1D_1 的交点分别为 E，F.

由于 $BC /\!/ B_1C_1$，故 $BC /\!/$ 平面 A_1C_1，由直线与平面平行的性质定理得 $BC /\!/ EF$. 因此只要在平面 A_1C_1 内过点 P 作 B_1C_1 的平行线即可.

作法 在平面 A_1C_1 内，过点 P 作 $EF /\!/ B_1C_1$，分别交 A_1B_1，C_1D_1 于 E，F.

连结 BE，CF，则 BE，CF 和 EF 就是所要画的线（图1－2－27(2)）.

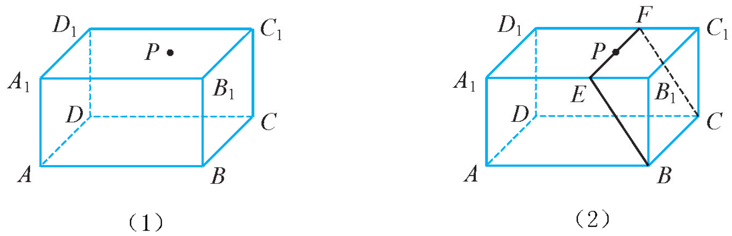


图1－2－27

例3 求证：如果三个平面两两相交于三条直线，并且其中两条直线平行，那么第三条直线也和它们平行.

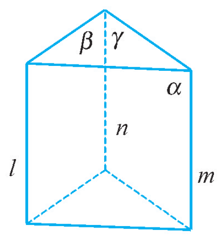


图1－2－28

已知：平面 α，β，γ，$\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，且 $l /\!/ m$（图1－2－28）.

求证：$n /\!/ l$，$n /\!/ m$.

证

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} l /\!/ m\\ l\not\subset\gamma\\ m\subset\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow l /\!/ \gamma\\ \qquad\qquad l\subset\beta\\ \qquad\qquad \beta\cap\gamma=n\end{array}\right\}\Rightarrow n /\!/ l.$$

同理，$n /\!/ m$.

思　考

如果三个平面两两相交于三条直线，并且其中两条直线相交，那么第三条直线和这两条直线有怎样的位置关系呢？

练　习

1. 指出下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 如果一条直线不在某个平面内，那么这条直线就与这个平面平行；
   (2) 过直线外一点有无数个平面与这条直线平行；
   (3) 过平面外一点有无数条直线与这个平面平行.

2. 给出下列条件：① $l \parallel \alpha$；② l 与 α 至少有一个公共点；③ l 与 α 至多有一个公共点. 能确定直线 l 在平面 α 外的条件的序号是________.

3. 已知直线 a，b 和平面 α，下列命题中正确的是（　　）.

A. 若 $a \parallel \alpha$，$b \subset \alpha$，则 $a \parallel b$

B. 若 $a \parallel \alpha$，$b \parallel \alpha$，则 $a \parallel b$

C. 若 $a \parallel b$，$b \subset \alpha$，则 $a \parallel \alpha$

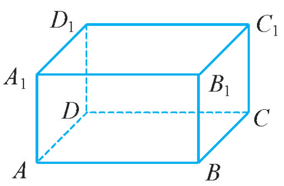
D. 若 $a \parallel b$，$a \parallel \alpha$，则 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$

4. 如图，在长方体 AC_1 的侧面和底面所在的平面中：

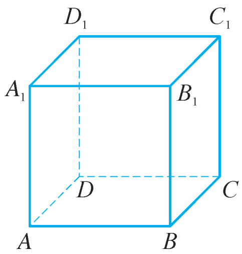
（1）与直线 AB 平行的平面是________________________；

（2）与直线 AA_1 平行的平面是________________________；

（3）与直线 AD 平行的平面是________________________.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

（1）直线 AA_1 与平面 BB_1D_1D 是否平行？为什么？

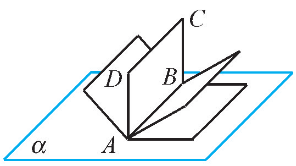
（2）直线 AA_1 与平面 C_1DB 是否平行？为什么？

（3）直线 B_1D_1 与平面 $ABCD$ 是否平行？为什么？

（4）直线 B_1D_1 与平面 C_1DB 是否平行？为什么？

6. 若两条直线 a，b 都平行于平面 α，则 a，b 的位置关系如何？分别画图说明.

7. 如图，一块矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 在平面 α 内，把这块矩形木板绕 AB 转动，在转动过程中，AB 的对边 CD 是否都和平面 α 平行？为什么？



（第 7 题）

2. 直线与平面垂直

观察圆锥 SO（图 1－2－29），它给我们以轴 SO 垂直于底面的形象. 轴 SO 与底面内的哪些直线垂直呢？

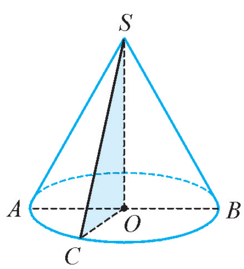


图 1－2－29

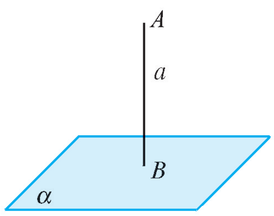


图 1－2－30

为什么轴 SO 垂直于底面内的所有半径，就有 SO 垂直于底面内的所有直线？

由于圆锥 SO 是由 $Rt\triangle SOC$ 绕直角边 SO 旋转一周形成的，因此 SO 与底面内的每一条半径都垂直，从而 SO 垂直于底面内的所有直线.

如图 1－2－30，如果一条直线 a 与一个平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说**直线 a 与平面 α 互相垂直**，记作 $a\perp\alpha$. 直线 a 叫做**平面 α 的垂线**，平面 α 叫做**直线 a 的垂面**，垂线和平面的交点称为**垂足**.

由此可知，前面所说的正投影就是投射线垂直于投影面的投影.

思　考

在平面中，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直. 那么，在空间：

（1）过一点有几条直线与已知平面垂直？

（2）过一点有几个平面与已知直线垂直？

事实上，

你能证明这个结论吗？

过一点有且只有一条直线与已知平面垂直，过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

从平面外一点引平面的垂线，这个点和垂足间的距离，叫做**这个点到这个平面的距离**.

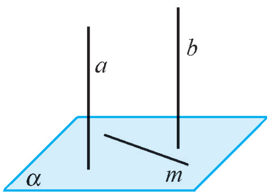


图 1－2－31

例 1　求证：如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

已知：$a/\!/b$，$a\perp\alpha$（图 1－2－31）.

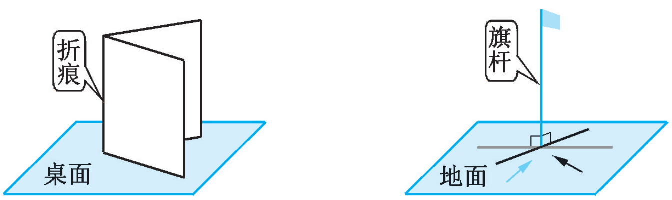
求证：$b\perp\alpha$.

分析　只要证明 b 与平面 α 内任意一条直线都垂直.

证　设 m 是 α 内的任意一条直线.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ m\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp m\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow b\perp m\text{，故 } b\perp\alpha.$$

如图 1－2－32(1)，将一张矩形纸片对折后略为展开，竖立在桌面上，我们可以观察到折痕与桌面垂直. 如图 1－2－32(2)，从两个不同的方向观察，旗杆都与水平线垂直，就可以判断旗杆与地面垂直.



（1）　　（2）

图 1－2－32

一般地，我们有

直线与平面垂直的判定定理 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

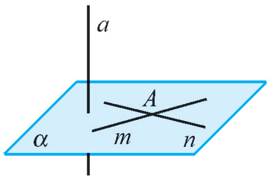


图 1－2－33

用符号表示为(图 1－2－33)：

若 $a\perp m$，$a\perp n$，$m\cap n=A$，$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $a\perp\alpha$.

两根旗杆垂直于地面，给我们以旗杆平行的形象.

一般地，我们有

直线与平面垂直的性质定理 如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

已知：$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$. 求证：$a/\!/b$.

分析 直接证明 $a/\!/b$ 比较困难，我们采用反证法来证明.

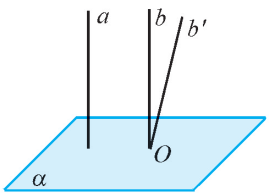


图 1－2－34

证 如图 1－2－34，假设 b 不平行于 a，设 $b\cap\alpha=O$，b' 是经过点 O 与直线 a 平行的直线.

直线 b 与 b' 确定平面 β，设 $\alpha\cap\beta=c$.

因为 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，所以 $a\perp c$，$b\perp c$.

又因为 $b'/\!/a$，所以 $b'\perp c$.

这样在平面 β 内，经过直线 c 上同一点 O，就有两条直线 b，b' 与 c 垂直，显然不可能.

因此 $a/\!/b$.

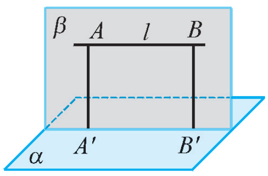


图 1－2－35

例 2 已知：$l/\!/\alpha$.

求证：直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

证 过直线 l 上任意两点 A，B 分别作平面 α 的垂线 AA'，BB'，垂足分别为 A'，B'(图 1－2－35).

因为 $AA'\perp\alpha$，$BB'\perp\alpha$，

所以 $AA'/\!/BB'$.

设经过直线 AA' 和 BB' 的平面为 β，

则 β 与 α 的交线为直线 $A'B'$.

因为 $l/\!/\alpha$，

所以 $l/\!/A'B'$，

从而四边形 $A'B'BA$ 是平行四边形，

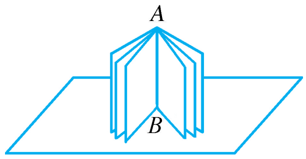
所以 $AA' = BB'$.

即直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

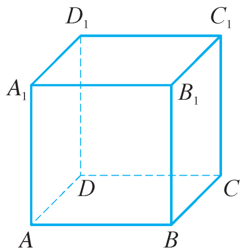
一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点到这个平面的距离,叫做**这条直线和这个平面的距离**.

练　习

1. 将一本书打开后竖立在桌面上(如图),则书脊所在直线 AB 是否与桌面垂直? 为什么?
2. 对于直线 l, m, n,平面 α,下列命题是否正确,试说明理由:
   (1) 若 $l \perp \alpha$,则 l 与 α 相交;
   (2) 若 $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $l \perp m$, $l \perp n$,则 $l \perp \alpha$;
   (3) 若 $l // m$, $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$,则 $l // n$.

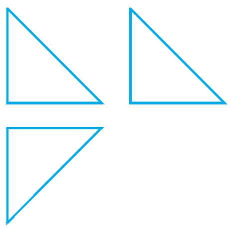


(第 1 题)

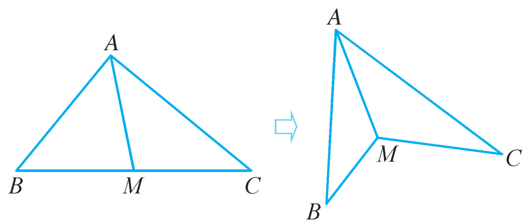


(第 3 题)

3. 如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.
   (1) 直线 AB 与平面 BCC_1B_1 是否垂直? 为什么?
   (2) 直线 AC 与平面 BB_1D_1D 是否垂直? 为什么?
   (3) 直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 是否垂直? 为什么?
   (4) 直线 AB_1 与平面 A_1BCD_1 是否垂直? 为什么?
4. 某空间图形的三视图如图所示,试画出它的直观图,并指出其中的线面垂直关系.

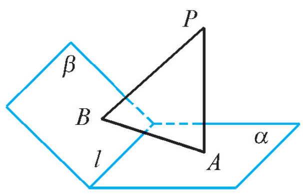


(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图,在$\triangle ABC$ 中,M 为边 BC 的中点,沿 AM 将$\triangle ABM$ 折起,使点 B 在平面 ACM 外. 在什么条件下直线 AM 垂直于平面 BMC?
6. 如图,已知 $PA \perp \alpha$, $PB \perp \beta$,垂足分别为 A, B,且 $\alpha \cap \beta = l$,求证: $l \perp$ 平面 APB.



(第 6 题)

观察图 1－2－36 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，可以发现 A_1B，A_1C，A_1D 虽然都和平面 $ABCD$ 相交，但都不与这个平面垂直.

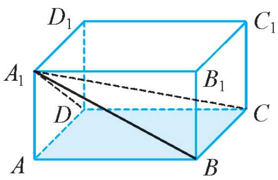


图 1－2－36

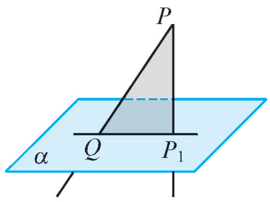


图 1－2－37

一条直线与一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的**斜线**(oblique line)，斜线与平面的交点叫做**斜足**，斜线上一点与斜足间的线段叫做这个点到平面的**斜线段**.

如图 1－2－37，过平面外一点 P 向平面 α 引斜线和垂线，那么过斜足 Q 和垂足 P_1 的直线就是斜线在平面内的正投影(简称射影)，线段 P_1Q 就是斜线段 PQ 在平面 α 内的射影.

平面的一条斜线与它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做**这条直线与这个平面所成的角**.

> 可以证明：PQ 与平面 α 内经过点 Q 的直线所成的所有角中，$\angle PQP_1$ 最小.

在图 1－2－37 中，$\angle PQP_1$ 就是 PQ 与 α 所成的角.

一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线与平面平行或在平面内，我们说它们所成的角是 0°的角.

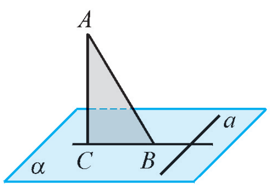


图 1－2－38

例 3 如图 1－2－38，已知 AC，AB 分别是平面 α 的垂线和斜线，C，B分别是垂足和斜足，$a\subset\alpha$，$a\perp BC$. 求证：$a\perp AB$.

分析 因为 $AB\subset$平面 ABC，所以只要证明 $a\perp$平面 ABC.

证

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AC\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AC\\ a\perp BC\\ AC\cap BC=C\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\text{平面}ABC\\ AB\subset\text{平面}ABC\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AB.$$

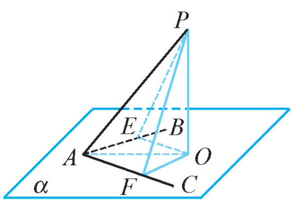


图 1－2－39

例 4 如图 1－2－39，已知$\angle BAC$ 在平面 α 内，$P\notin\alpha$，$\angle PAB=\angle PAC$. 求证：点 P 在平面 α 内的射影在$\angle BAC$ 的平分线上.

证 作 $PO\perp\alpha$，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别为 O，E，F，连结 OE，OF，OA.

$$\left.\begin{array}{l}PE\perp AB,\ PF\perp AC\\ \angle PAE=\angle PAF\\ PA=PA\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Rt}\triangle PAE\cong\text{Rt}\triangle PAF\Rightarrow AE=AF.$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha\\ AB\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp PO\\ AB\perp PE\\ PO\cap PE=P\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面 }PEO\Rightarrow AB\perp OE.$$

同理，$AC \perp OF$.

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 和 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中，$AE = AF$，$OA = OA$，所以 $\text{Rt}\triangle AOE \cong \text{Rt}\triangle AOF$.

于是 $\angle EAO = \angle FAO$，

因此，点 P 在 α 内的射影 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

思　考

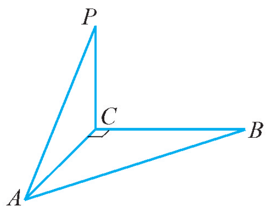
你能设计一个四个面都是直角三角形的四面体吗？

练　习

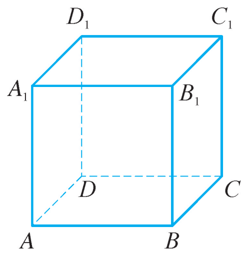
1. 如图，$\angle BCA = 90°$，$PC \perp$ 平面 ABC，则在 $\triangle ABC$，$\triangle PAC$ 的边所在的直线中：

(1) 与 PC 垂直的直线有____________；

(2) 与 AP 垂直的直线有____________.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

(1) 求直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角；

(2) 求直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角；

(3) 直线 A_1B 在平面 $ABCD$ 内的射影是哪条直线？

(4) 直线 A_1C 在平面 ADD_1A_1 内的射影是哪条直线？

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角的大小是________.

4. 若直线 a 与平面 α 不垂直，那么在平面 α 内与直线 a 垂直的直线（　　）.

A. 只有一条

B. 有无数条

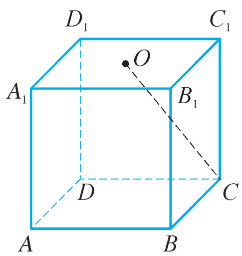
C. 是平面 α 内的所有直线

D. 不存在

5. 从平面外一点向平面引斜线段，如果斜线段的长相等，那么它们在平面内的射影相等吗？

6. 设菱形 $ABCD$ 所在平面外一点 P，满足 $PA = PC$，判断直线 AC 与平面 PBD 是否垂直，并说明理由.

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心. 作出直线 OC 与平面 $ABCD$ 所成的角，并求出该角的正切值.

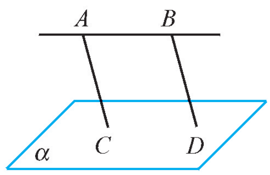


(第 7 题)

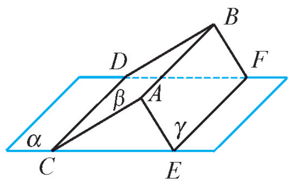
习题 1.2(2)

感受·理解

1. 如图，$AB \parallel \alpha$，$AC \parallel BD$，$C \in \alpha$，$D \in \alpha$，求证：$AC = BD$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，$\alpha \cap \beta = CD$，$\alpha \cap \gamma = EF$，$\beta \cap \gamma = AB$，$AB \parallel \alpha$.

求证：$CD \parallel EF$.

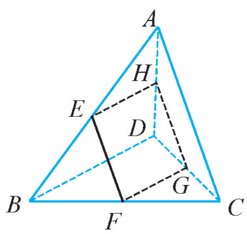
四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.

3. 如图，E，F，G，H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：

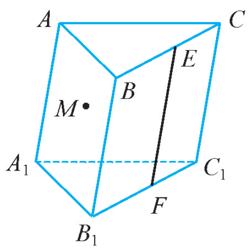
(1) 四点 E，F，G，H 共面；

(2) $AC \parallel$ 平面 $EFGH$，$BD \parallel$ 平面 $EFGH$.

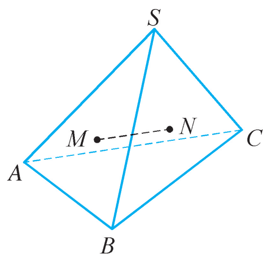
4. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$E \in BC$，$F \in B_1C_1$，$EF \parallel C_1C$，点 $M \in$ 侧面 AA_1B_1B，点 M，E，F 确定平面 γ. 试作出平面 γ 与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 表面的交线.



(第 3 题)



(第 4 题)

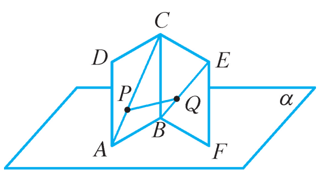


(第 5 题)

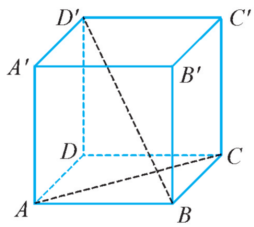
5. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N 分别为$\triangle SAB$ 和$\triangle SBC$ 的重心. 求证：$MN \parallel$ 平面 ABC.

6. 将一本书打开后竖立在桌面 α 上(如图)，P，Q 分别为 AC，BE 上的点，且 $AP = BQ$.

求证：$PQ \parallel$ 平面 α.



(第 6 题)



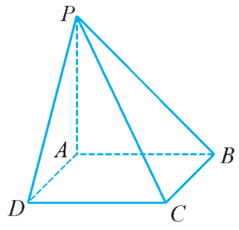
(第 7 题)

7. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，求证：$AC \perp BD'$.

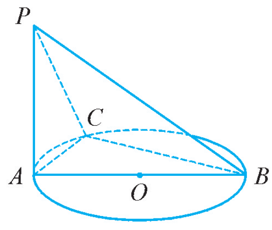
8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 指出图中有哪些三角形是直角三角形，并说明理由；

（2）若 $PA=AD=AB$，试求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.



（第 8 题）



（第 9 题）

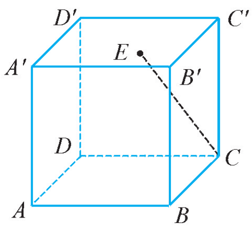
9. 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在的平面，C 是圆 O 上不同于 A，B 的任一点. 求证：$BC\perp$平面 PAC.

10. 已知直线 $a//$平面 α，直线 $b\perp$平面 α. 求证：$a\perp b$.

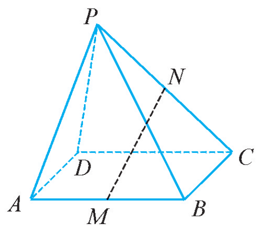
11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，顶点 P 在平面 ABC 内的射影是$\triangle ABC$ 的外心，求证：$PA=PB=PC$.

思考·运用

12. 如图，一块正方体木料的上底面内有一点 E，要经过点 E 在上底面内画一条直线和 CE 垂直，应怎样画？



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，M，N 分别是 AB，PC 的中点，若 $ABCD$ 是平行四边形，求证：$MN//$平面 PAD.

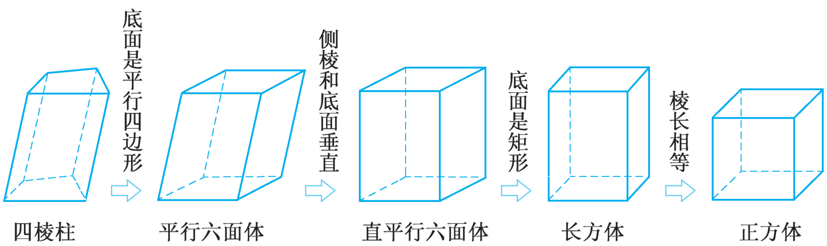
14. 求证：如果平面内的一条直线与这个平面的一条斜线垂直，那么这条直线就和这条斜线在这个平面内的射影垂直.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：$A_1C\perp$平面 AB_1D_1.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，点 P 在平面 ABC 内的射影 O 是$\triangle ABC$ 的垂心（三角形三条边上的高所在的直线交于一点，这个点叫做这个三角形的垂心），求证：$PA\perp BC$.

探究·拓展

17.（阅读题）看图阅读：



（第 17 题）

底面是平行四边形的四棱柱叫做**平行六面体**（parallelopiped），侧棱与底

面垂直的平行六面体叫做**直平行六面体**(right parallelopiped)，底面是矩形的直平行六面体叫做**长方体**(cuboid)，棱长相等的长方体叫做**正方体**(cube).

根据上述定义，试说明四棱柱集合、平行六面体集合、直平行六面体集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系，并用 Venn 图直观地表示这种关系.

1.2.4 平面与平面的位置关系

前面我们研究了空间直线与直线、直线与平面的位置关系，那么，

● 空间两个平面可能有哪几种位置关系？

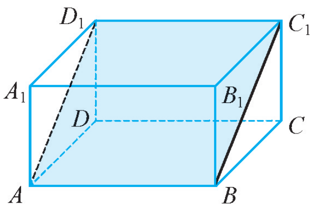


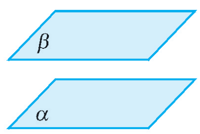
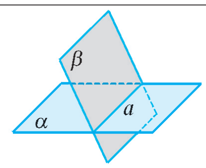
图 1－2－40

观察长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$(图 1－2－40)，它的上、下底面无论怎样延展都没有公共点，而它的下底面与平面 ABC_1D_1 则有一条交线 AB.

如果两个平面没有公共点，那么就说这**两个平面互相平行**.

如果两个平面有一个公共点，那么由公理 2 可知，它们相交于经过这个点的一条直线.

两个平面的位置关系有：

位置关系	两平面平行	两平面相交
公 共 点	没有公共点	有一条公共直线
符号表示	$\alpha /\!/ \beta$	$\alpha \cap \beta = a$
图形表示		

1. 两平面平行

怎样使用水平仪来检测桌面是否水平？

当水平仪的气泡居中时，水平仪所在的直线就是水平线.

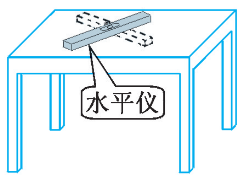


图 1－2－41

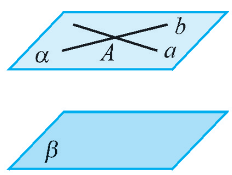


图 1－2－42

工人师傅将水平仪(图 1－2－41)在桌面上交叉放置两次，如果水平仪的气泡两次都在中央，就能判断桌面是水平的.

一般地，我们有

两个平面平行的判定定理 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

用符号表示为(图 1－2－42)：

若 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$，$a \cap b = A$，且 $a \parallel \beta$，$b \parallel \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$.

例 1 如图 1－2－43，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，求证：平面$C'DB$∥平面 $AB'D'$.

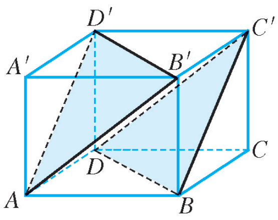


图 1－2－43

分析 只要证明一个平面内有两条相交直线与另一个平面平行.

证 $AB \underline{\parallel} DC \underline{\parallel} D'C' \Rightarrow ABC'D'$ 是平行四边形

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow \quad BC' &\parallel AD' \\ BC' &\not\subset \text{平面 } AB'D' \\ AD' &\subset \text{平面 } AB'D'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} BC' &\parallel \text{平面 } AB'D' \\ \text{同理，} C'D &\parallel \text{平面 } AB'D' \\ BC' \cap C'D &= C'\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ 平面 $C'DB \parallel$ 平面 $AB'D'$.

如果两个平面平行，那么：

(1) 一个平面内的直线是否平行于另一个平面？

(2) 分别在两个平行平面内的两条直线是否平行？

对于问题(1)，根据两个平面平行及直线和平面平行的定义可知，两个平面平行，其中一个平面内的直线必定平行于另一个平面.

对于问题(2)，分别在两个平行平面内的两条直线必定没有公共点，所以只能判定它们平行或异面.

两个平面平行的性质定理 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么所得的两条交线平行.

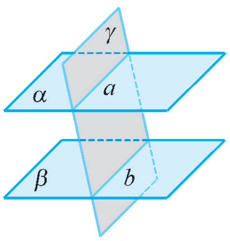


图 1－2－44

已知：$\alpha \parallel \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$(图 1－2－44).

求证：$a \parallel b$.

证 因为 $\alpha \parallel \beta$，所以 α 与 β 没有公共点，因而交线 a，b 也没有公共点. 又因为 a，b 都在平面 γ 内，所以 $a \parallel b$.

例 2 求证：如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么它也垂直于另一个平面.

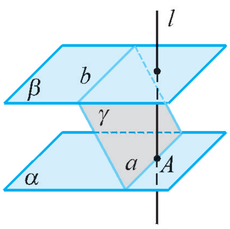


图 1－2－45

已知：$\alpha \parallel \beta$，$l \perp \alpha$(图 1－2－45).

求证：$l \perp \beta$.

分析 要证 $l \perp \beta$，只要证明 l 与 β 的任意一条直线都垂直或与 β 内两条相交直线垂直.

证 设 $l \cap \alpha = A$，在平面 β 内任取一条直线 b.

因为点 A 不在 β 内，所以点 A 与直线 b 可确定平面 γ.

设 $\gamma \cap \alpha = a$.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\alpha \mathbin{/\!/} \beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\mathbin{/\!/} b\\ \left.\begin{array}{l} l\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp a\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp b.$$

由于直线 b 是平面 β 内的任意一条直线，所以 $l\perp\beta$.

与两个平行平面都垂直的直线，叫做这两个平行平面的**公垂线**，它夹在这两个平行平面间的线段，叫做这两个平行平面的**公垂线段**.

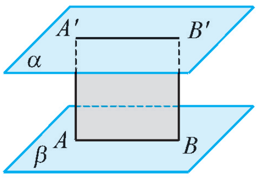


图 1－2－46

如图 1－2－46，$\alpha \mathbin{/\!/} \beta$，如果 AA'，BB' 都是它们的公垂线段，那么 $AA' \mathbin{/\!/} BB'$. 根据两个平面平行的性质定理，有 $A'B' \mathbin{/\!/} AB$，所以四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形，故 $AA' = BB'$.

由此我们得到，两个平行平面的公垂线段都相等. 我们把公垂线段的长度叫做**两个平行平面间的距离**.

练　习

1. 已知平面 $\alpha \mathbin{/\!/}$ 平面 β，直线 $l\subset\alpha$，求证：$l \mathbin{/\!/} \beta$.

2. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 若平面 α 内的两条直线分别与平面 β 平行，则 α 与 β 平行；

(2) 若平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行，则 α 与 β 平行；

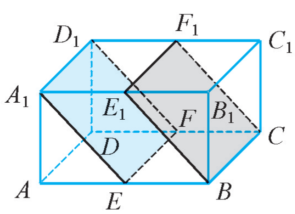
(3) 平行于同一条直线的两个平面平行；

(4) 过已知平面外一点，有且只有一个平面与已知平面平行；

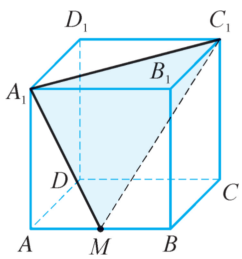
(5) 过已知平面外一条直线，必能作出与已知平面平行的平面.

3. 如图，设 E，F，E_1，F_1 分别是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB，CD，A_1B_1，C_1D_1 的中点. 求证：平面 $ED_1 \mathbin{/\!/}$ 平面 BF_1.

4. 求证：夹在两个平行平面间的平行线段相等.



(第 3 题)



(第 5 题)

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 AB 的中点，试作出平面 A_1MC_1 与平面 $ABCD$ 的交线 l，并说明理由.

2. 两平面垂直

发射人造地球卫星时，要使卫星的轨道平面与地球的赤道平面成一定的角度(图 1－2－47). 使用笔记本电脑时，为便于操作，需将显示屏打开一定的角度(图 1－2－48). 如何刻画两个平面所形成的这种“角”呢？

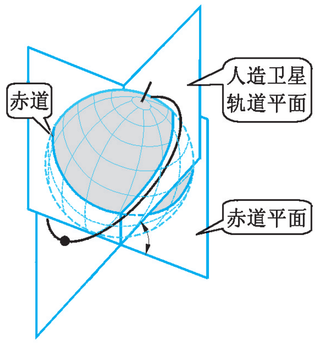


图 1－2－47

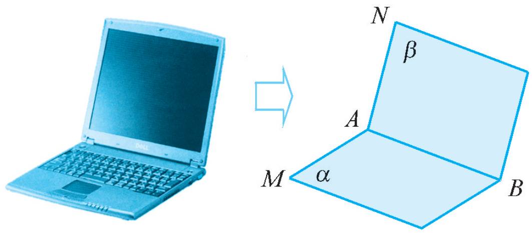


图 1－2－48

平面内的一条直线把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫做**半平面**(semi-plane)，当其中一个半平面绕着这条直线旋转时，两个半平面就形成了一定的“角度”.

一般地，一条直线和由这条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**(dihedral angle)，这条直线叫做二面角的**棱**(edge)，每个半平面叫做二面角的**面**(face).

如图 1－2－48，棱为 AB，面为 α，β 的二面角，记作二面角 $\alpha-AB-\beta$，也可以记作 $M-AB-N$.

笔记本电脑打开时，我们感到两个面板构成的二面角在逐渐变大. 如何来刻画这个二面角的大小呢？

我们看到，随着张口的增大，$\angle MAN$ 在逐渐增大(图 1－2－48)，当二面角确定时，$\angle MAN$ 也随之确定，故可用 $\angle MAN$ 度量二面角.

一般地，以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的射线，这两条射线所成的角叫做二面角的**平面角**(plane angle).

图 1－2－49 中，$OA\perp l$，$OB\perp l$，故 $\angle AOB$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

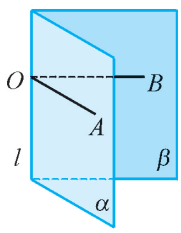


图 1－2－49

思　考

二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角 $\angle AOB$ 的大小与点 O 的位置有关吗(图 1－2－49)？

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 我们约定，二面角 α 的大小范围是

$0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. 平面角是直角的二面角叫做**直二面角**(right dihedral angle).

木工用活动角尺测量工件的两个面所成的角时,实际上就是测量这两个面所成二面角的平面角(图 1-2-50).

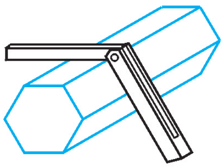


图 1-2-50

1970 年 4 月 24 日,我国用自制“长征 1 号”运载火箭,在酒泉卫星发射中心成功发射了中国第一颗人造地球卫星——“东方红 1 号”,这标志着我国在征服太空的道路上迈出了巨大的一步,跻身世界航天先进国家之列.“东方红 1 号”轨道平面的倾斜角是68.5°,就是说卫星轨道平面与地球赤道平面所成的二面角是68.5°.

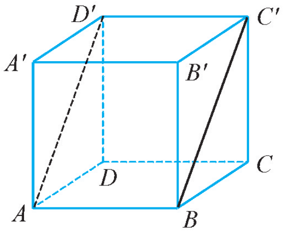


图 1-2-51

例 1 如图 1-2-51,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中:

(1) 求二面角 $D'-AB-D$ 的大小;

(2) 求二面角 $A'-AB-D$ 的大小.

解 (1) 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$AB \perp$ 平面 AD',所以 $AB \perp AD'$, $AB \perp AD$.

因此,$\angle D'AD$ 为二面角 $D'-AB-D$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle D'AD$ 中,$\angle D'AD = 45°$,

所以二面角 $D'-AB-D$ 的大小为 45°.

(2) 同理,$\angle A'AD$ 为二面角 $A'-AB-D$ 的平面角,二面角 $A'-AB-D$ 的大小为 90°.

先找出或作出二面角的平面角,再求出平面角的大小.

一般地,如果两个平面所成的二面角是直二面角,那么就说这**两个平面互相垂直**.

为什么教室的门转到任何位置时,门所在平面都与地面垂直(图 1-2-52)?通过观察可以发现,门在转动的过程中,门轴始终与地面垂直.

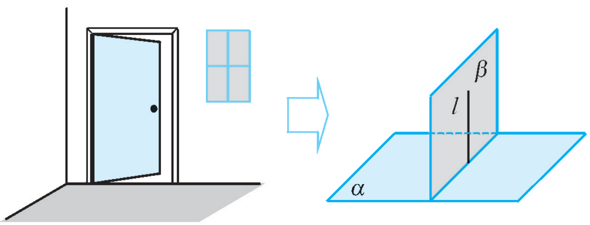


图 1-2-52

一般地,我们有

> **平面与平面垂直的判定定理** 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

用符号表示为(图 1-2-52):

$$\left.\begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙是否和水平面垂直(图 1－2－53)，就是依据这个面面垂直的判定定理.

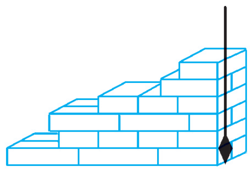


图 1－2－53

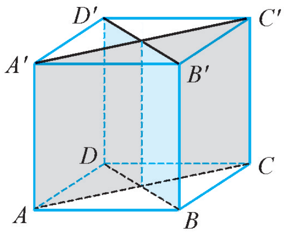


图 1－2－54

例 2 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中(图 1－2－54)，求证：平面 $A'C'CA\perp$ 平面 $B'D'DB$.

证

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AA'\perp\text{平面 }ABCD\\BD\subset\text{平面 }ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow AA'\perp BD\\ AC\perp BD\\ AA'\cap AC=A\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}BD\perp\text{平面 }A'C'CA\\BD\subset\text{平面 }B'D'DB\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$平面 $A'C'CA\perp$ 平面 $B'D'DB$.

如果两个平面垂直，那么一个平面内的直线是否一定垂直于另一个平面？

答案是否定的(图 1－2－55). 事实上，我们有

将面面垂直转化为线面垂直.

平面与平面垂直的性质定理 如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

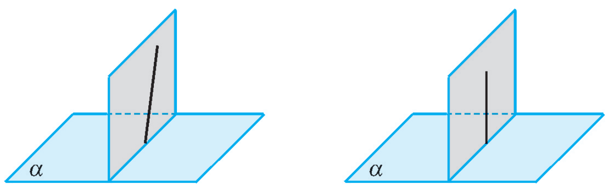


图 1－2－55

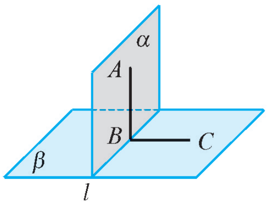


图 1－2－56

已知：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$AB\subset\alpha$，$AB\perp l$，B 为垂足(图 1－2－56).

求证：$AB\perp\beta$.

分析 因为 $AB\perp l$，所以要证 $AB\perp\beta$，只需在 β 内找一条与 l 相交的直线垂直于 AB.

证 在平面 β 内作 $BC\perp l$，则 $\angle ABC$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

由 $\alpha\perp\beta$，可知 $AB\perp BC$.

又 $AB\perp l$，所以 $AB\perp\beta$.

例 3 求证：如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内一点且垂直于第二个平面的直线必在第一个平面内.

已知：$\alpha \perp \beta$，$P \in \alpha$，$P \in a$，$a \perp \beta$(图 1－2－57).

求证：$a \subset \alpha$.

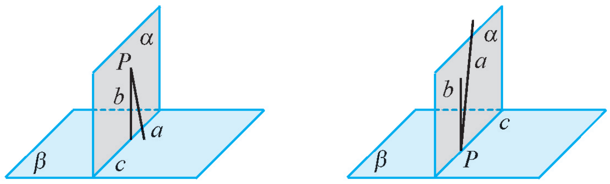


图 1－2－57

证 设 $\alpha \cap \beta = c$.

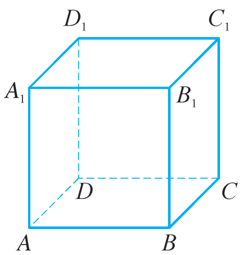
过点 P 在平面 α 内作直线 $b \perp c$，

根据平面与平面垂直的性质定理，有 $b \perp \beta$.

因为经过一点有且只有一条直线与平面 β 垂直，

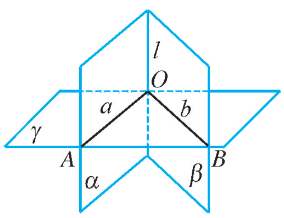
所以直线 a 应与直线 b 重合，即 $a \subset \alpha$.

练 习

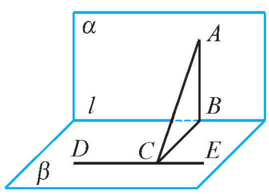


（第 3 题）

1. 房间里相邻的两面墙及地面可以构成几个二面角？分别指出这些二面角的面、棱和平面角.
2. 为使门在打开的过程中，门所在平面都与地面垂直，在安装门的时候，固定门的一边与门框的两个合页所在的直线与地面是什么关系？为什么？
3. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.
   (1) 平面 A_1ABB_1 与平面 $ABCD$ 是否垂直？为什么？
   (2) 平面 ABC_1D_1 与平面 BCC_1B_1 是否垂直？为什么？
   (3) 平面 ABC_1D_1 与平面 A_1B_1CD 是否垂直？为什么？
   (4) 平面 ABC_1D_1 与平面 ABB_1A_1 是否垂直？为什么？
4. 判断下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 若 $\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则 $\alpha /\!/ \beta$；
   (2) 若 $\alpha \perp \beta$，$\beta \perp \gamma$，则 $\alpha \perp \gamma$；
   (3) 若 $\alpha /\!/ \alpha_1$，$\beta /\!/ \beta_1$，$\alpha \perp \beta$，则 $\alpha_1 \perp \beta_1$.
5. 如图，α，β，γ 为平面，$\alpha \cap \beta = l$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，$l \perp \gamma$，指出图中哪个角是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，并说明理由.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，$AB \subset \alpha$，$AB \perp l$，$BC \subset \beta$，$DE \subset \beta$，$BC \perp DE$. 求证：$AC \perp DE$.

习题 1.2(3)

感受·理解

1. 判断下列说法是否正确：

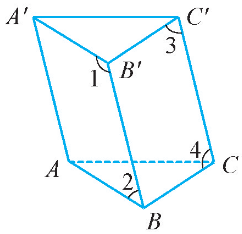
(1) 若平面 α 内的两条相交直线分别平行于平面 β 内的两条相交直线，则平面 α 平行于平面 β；

(2) 若两个平面分别经过两条平行直线，则这两个平面互相平行.

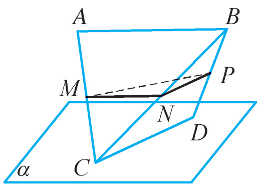
2. 如图，在多面体 $ABC-A'B'C'$ 中，如果在平面 $ABB'A'$ 内，$\angle 1+\angle 2=180°$，在平面 $BCC'B'$ 内，$\angle 3+\angle 4=180°$，那么平面 ABC 和平面 $A'B'C'$ 有什么关系？为什么？

3. 已知平面 α，β，直线 l，且 $\alpha /\!/ \beta$，$l \not\subset \beta$，$l /\!/ \alpha$，求证：$l /\!/ \beta$.

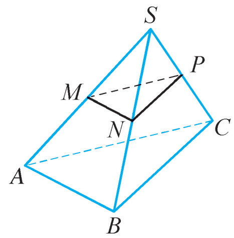
4. 如图，$AB /\!/ \alpha$，$CD \subset \alpha$，$AB \not\parallel CD$，M，N，P 分别为线段 AC，CB，BD 的中点. 求证：平面 MPN $/\!/$ 平面 α.



（第 2 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，M，N，P 分别为棱 SA，SB，SC 的中点.

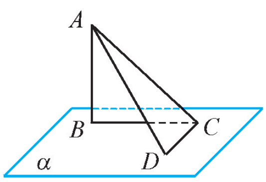
(1) 求证：平面 MNP $/\!/$ 平面 ABC；

(2) 求证：$\triangle MNP \backsim \triangle ABC$；

(3) 若将本题的三棱锥改为四棱锥，有怎样类似的结论？

6. (1) 已知平面外的一条直线上有两点到这个平面距离相等，试判断这条直线与该平面的位置关系；

(2) 已知一个平面内有三点到另一平面距离相等，试判断这两个平面的位置关系.

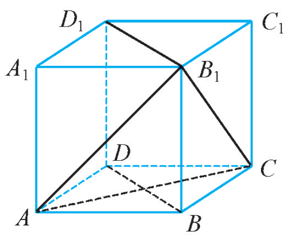


（第 7 题）

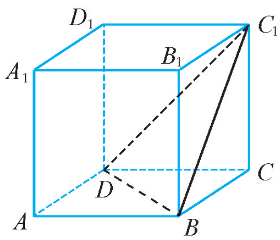
7. 如图，已知 AB 是平面 α 的垂线，AC 是平面 α 的斜线，$CD \subset \alpha$，$CD \perp AC$. 求证：平面 $ABC \perp$ 平面 ACD.

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 是菱形. 求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBD.

9. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，求证：平面 $B_1AC \perp$ 平面 B_1BDD_1.



（第 9 题）



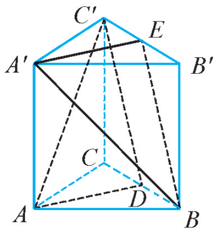
（第 10 题）

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 C_1-BD-C 的正切值.

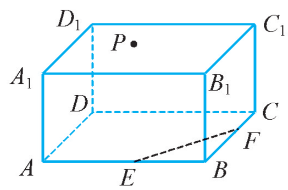
思考·运用

11. 已知平面 α, β, γ,且 $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$,求证:$\alpha \parallel \gamma$.

12. 如图,在三棱柱 $ABC-A'B'C'$中,点 D, E 分别是 BC 与 $B'C'$的中点.
求证:平面 $A'EB \parallel$ 平面 ADC'.



(第 12 题)



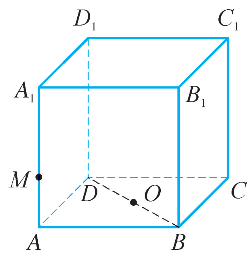
(第 13 题)

13. 如图,有一块长方体的木料,经过木料表面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一点 P,在这个面内画线段,使其与木料表面 $ABCD$ 内的线段 EF 平行,应该怎样画线?

14. 已知平面 α, β, γ, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $\alpha \cap \beta = l$.
求证:$l \perp \gamma$.

探究·拓展

15. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 为 BD 的中点,问:在棱 AA_1 上是否存在一点 M,使平面 $MBD \perp$ 平面 OC_1D_1? 如果存在,求出 $AM:MA_1$ 的值;如果不存在,请说明理由.



(第 15 题)

16. (1) 求证:如果一个平面与另一个平面的垂线平行,那么这两个平面互相垂直.

(2) 若将(1)中的条件改为"如果一个平面与另一个平面的垂面平行",那么结论是否仍然成立?

阅 读

平面几何与立体几何的类比

类比是根据两个对象在某些方面的相同或相似,推出它们在其他方面的相同或相似点的一种推理方法.

由于类比推理所得结论的真实性并不可靠,因此它不能作为严格的数学推理方法,但它是提出新问题和获得新发现取之不竭的源泉.

平面几何和立体几何在研究对象和方法、构成图形的基本元素等方面是相同或相似的,因此,在两者之间进行类比是研究它们性质的一种非常有效的方法.

为了对二者进行类比,可以在它们的基本元素之间建立如下的类比关系:

平面		空间
点	$\longrightarrow$	点或直线
直线	$\longrightarrow$	直线或平面
平面图形	$\longrightarrow$	平面图形或立体图形

(1) 由平面几何定理类比到立体几何命题,再尝试判断该命题是否成立.

例如，对勾股定理进行类比(图 1－2－58).

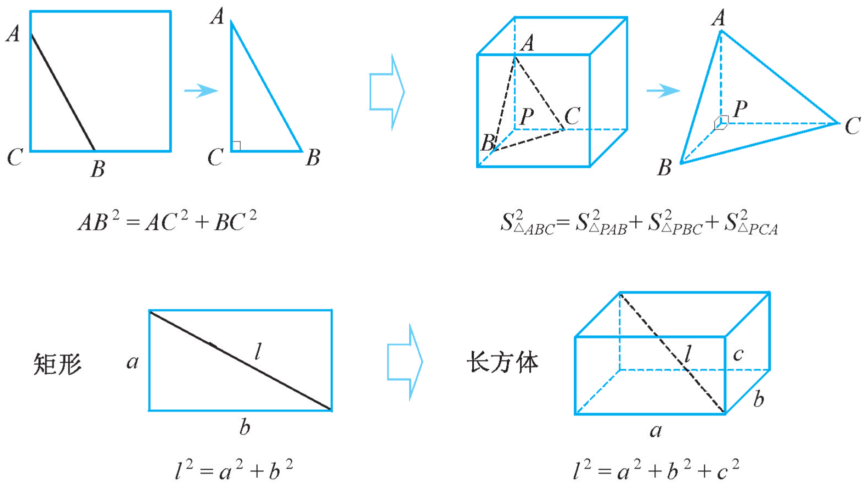


图 1－2－58

(2) 由立体几何问题，用类比的方法构造辅助的平面几何问题，通过这个问题的解决，类比猜想立体几何问题的解决方法.

每一个面都是正三角形的四面体称为正四面体.

例如，求证：正四面体内任一点到四个面的距离之和为定值.

第一步　类比构造一个辅助平面几何问题"求证：正三角形内任意一点到三边的距离之和为定值".

第二步　通过分割的方法，利用面积的关系解决平面几何问题(图 1－2－59).

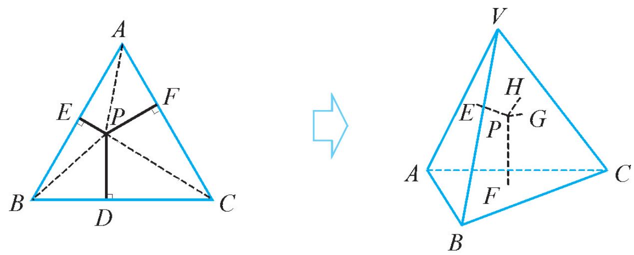


图 1－2－59

第三步　类比猜想，所给立体几何问题是否也可以通过分割的方法，利用体积的关系来证明?

这个猜想是正确的(证明略).

勤于运用类比推理去探索和研究问题，有利于创造性思维能力的培养.

思　考

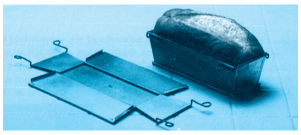
试说出一个类似于下面的平面几何定理的立体几何命题：平面内不共线的三点确定一个圆.

1.3 空间几何体的表面积和体积

前面，我们学习了柱、锥、台、球的有关概念和结构特征. 那么，

- 怎样计算一些简单几何体的表面积和体积呢？

1.3.1 空间几何体的表面积



对一些特殊的简单多面体，我们可以沿着多面体的某些棱将其剪开，得到平面展开图，从而求出它们的表面积.

侧棱和底面垂直的棱柱叫做**直棱柱**. 特别地，底面为正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**(regular prism). 把直棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上，展开图的面积就是棱柱的侧面积.

直棱柱的侧面展开图是矩形(图 1－3－1)，这个矩形的长等于直棱柱的底面周长 c，宽等于直棱柱的高 h. 因此，直棱柱的侧面积是

棱柱两底面所在平面之间的距离叫做棱柱的高.

$$S_{直棱柱侧}=ch.$$

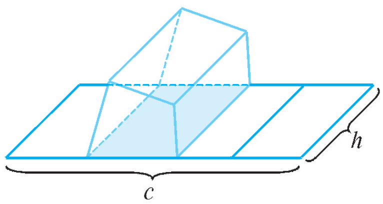


图 1－3－1

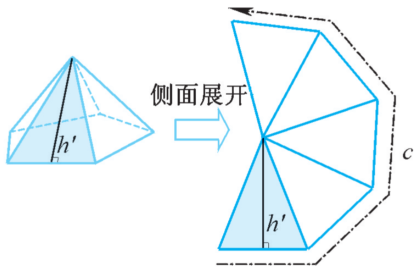


图 1－3－2

如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面的正投影是底面中心，那么称这样的棱锥为**正棱锥**(regular pyramid). 正棱锥的侧棱长都相等.

棱锥的侧面展开图是由各个侧面组成的，展开图的面积就是棱锥的侧面积. 如果正棱锥的底面周长为 c，斜高(即侧面等腰三角形底边上的高)为 h'，由图 1－3－2 可知它的侧面积是

设正 n 棱锥底面边长为 a，则侧面展开图的面积等于 $n\cdot\frac{1}{2}ah'=\frac{1}{2}ch'$.

$$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'.$$

正棱锥被平行于底面的平面所截，截面和底面之间的部分叫做**正棱台**(regular truncated pyramid). 与正棱锥的侧面积公式类似，若设正棱

台的上、下底面的周长分别为 c'，c，斜高为 h'，则其侧面积是(图 1－3－3)

$$S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'.$$

正棱台的侧面均为全等的等腰梯形.

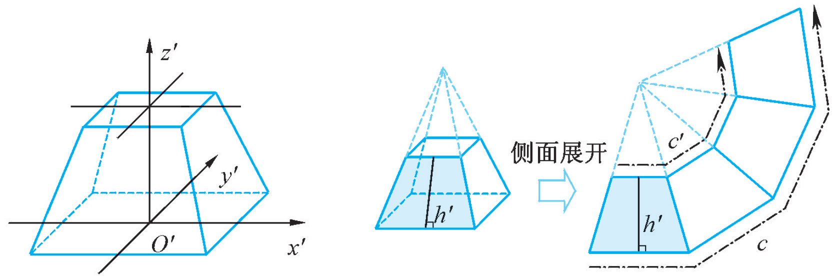


图 1－3－3

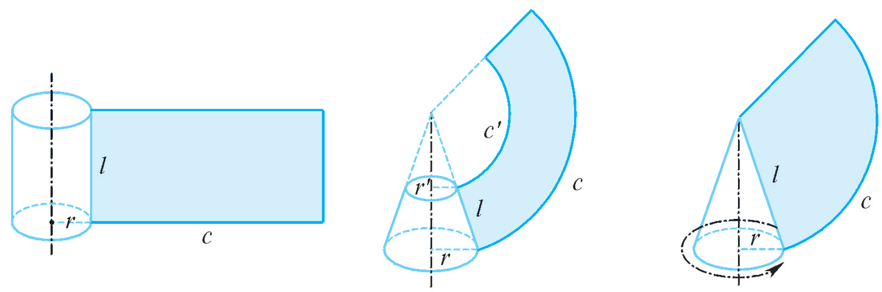
正棱柱、正棱锥和正棱台的侧面积公式之间的关系可用图 1－3－4表示：

$S_{\text{正棱柱侧}}=ch$ $\xleftarrow{c'=c}$ $S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'$ $\xrightarrow{c'=0}$ $S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'$

图 1－3－4

圆柱、圆锥和圆台的侧面可以沿其母线剪开后展在平面上，这时展开图的面积就是它们的侧面积. 但球的表面是不可展的.

通过将圆柱、圆锥和圆台的侧面展开，我们可以得到它们的侧面积公式(图 1－3－5)，它们之间的关系与图 1－3－4 类似.



$S_{\text{圆柱侧}}=cl=2\pi rl$ $\xleftarrow{c'=c}$ $S_{\text{圆台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')l=\pi(r+r')l$ $\xrightarrow{c'=0}$ $S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$

图 1－3－5

例 1 设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底面的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板？(保留两位有效数字)

分析 本题即计算正四棱锥的侧面积，根据公式，只需计算斜高. 为此，在正四棱锥中作出相应的直角三角形，再解三角形即可.

解 如图 1－3－6，S 表示塔的顶点，O 表示底面的中心，则 SO 是高. 设 SE 是斜高.

Rt△SOE 包含了高、斜高和底面正多边形内切圆半径之间的数量关系，在图 1－3－6 中还能作出哪些类似的直角三角形？

在 Rt△SOE 中，根据勾股定理，得

$$SE=\sqrt{\left(\frac{1.5}{2}\right)^2+0.85^2}\approx 1.13(\mathrm{m}),$$

所以 $S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'$

$$=\frac{1}{2}\times(1.5\times 4)\times 1.13$$

$$\approx 3.4(\mathrm{m}^2).$$

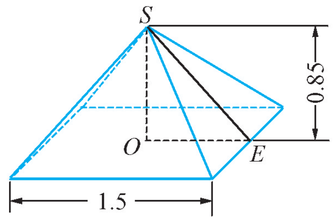


图 1－3－6

答 制造这种塔顶需要铁板约 3.4 m^2.

例 2 一个直角梯形上底、下底和高之比为 $2:4:\sqrt{5}$. 将此直角梯形以垂直于底的腰为轴旋转一周形成一个圆台(图 1－3－7)，求这个圆台上底面积、下底面积和侧面积之比.

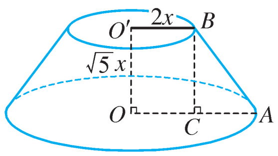


图 1－3－7

解 由题意，可设直角梯形上底、下底和高为 $2x$，$4x$，$\sqrt{5}x$，它们分别是圆台的上、下底面半径和高.

在图 1－3－7 中，过点 B 作 $BC\perp OA$ 于 C，则在Rt△ABC 中，$AC=OA-OC=OA-O'B=4x-2x=2x$，$BC=O'O=\sqrt{5}x$，所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(2x)^2+(\sqrt{5}x)^2}=3x$.

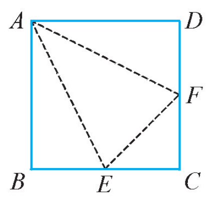
因此，$S_{上}:S_{下}:S_{侧}=[\pi(2x)^2]:[\pi(4x)^2]:[\pi(2x+4x)\times 3x]$

$$=2:8:9.$$

即这个圆台上底面积、下底面积和侧面积之比为 $2:8:9$.

练 习

1. 已知圆柱的高和底面半径分别为 a，b，求其侧面积.
2. 已知正四棱柱的底面边长是 3 cm，侧面的对角线长是 $3\sqrt{5}$ cm，求这个正四棱柱的侧面积.
3. 求底面边长为 2 m，高为 1 m 的正三棱锥的全面积.
4. 如图，E，F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 BC，CD 的中点，沿图中虚线折起，使 B，C，D 三点重合，此时 4 个面围成怎样的几何体？
5. 如果用半径为 r 的半圆形铁皮卷成一个圆锥筒，那么这个圆锥筒的高是多少？
6. 已知一个正三棱台的两个底面的边长分别为 8 cm 和 18 cm，侧棱长为 13 cm，求它的侧面积.



(第 4 题)

链 接

圆锥、圆台侧面积公式的推导

先考察半径为 R，弧长为 d 的扇形的面积(图 1－3－8).

因为弧长为 $2\pi R$ 的扇形(圆)的面积为 πR^2，所以弧长为 d 的扇形的面积为

$$S_{扇形}=\frac{d}{2\pi R}\cdot\pi R^2=\frac{1}{2}Rd.$$

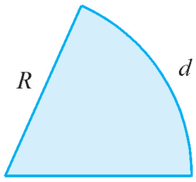


图 1－3－8

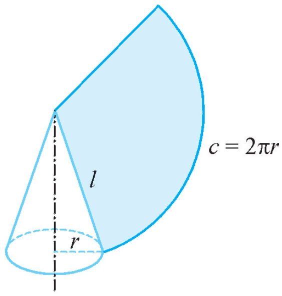


图 1－3－9

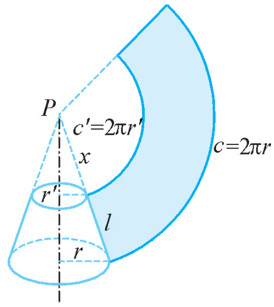


图 1－3－10

圆锥侧面展开图是扇形(图 1－3－9)，这个扇形的半径为圆锥的母线长 l，扇形的弧长等于圆锥底面的周长 $c=2\pi r$，故圆锥的侧面积为

$$S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.$$

圆台侧面展开图是扇环(图 1－3－10)，其面积为两个扇形的面积之差，即

$$\begin{aligned}S_{\text{圆台侧}}&=\frac{1}{2}c(l+x)-\frac{1}{2}c'x\\&=\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}(c-c')x,\end{aligned}$$

其中，x 为图 1－3－10 中小圆锥的母线长.

由相似三角形的性质可知，$\frac{r}{r'}=\frac{x+l}{x}$，即$\frac{c}{c'}=\frac{x+l}{x}$，

所以$\frac{c-c'}{c'}=\frac{l}{x}$，故$(c-c')x=c'l$. 于是，

$$S_{\text{圆台侧}}=\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}c'l=\frac{1}{2}(c+c')l,$$

或

$$S_{\text{圆台侧}}=\pi(r+r')l.$$

1.3.2 空间几何体的体积

类似于用单位正方形的面积度量平面图形的面积，我们用单位正方体(棱长为 1 个长度单位的正方体)的体积来度量几何体的体积.

一个几何体的体积是单位正方体体积的多少倍，那么这个几何体的体积的数值就是多少.

例如，某长方体纸盒的长、宽、高分别为7 cm，5 cm，4 cm，则每层

有 7×5 个单位正方体(图 1-3-11),共有 4 层,因此它的体积为

$$7 \times 5 \times 4 = 140\ (\mathrm{cm}^3).$$

长方体的长、宽、高分别为 a, b, c,那么它的体积为

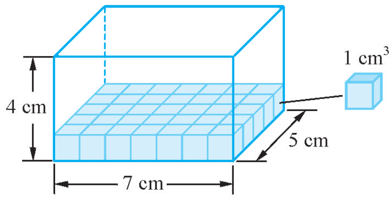


图 1-3-11

$$V_{长方体} = abc,$$

或

$$V_{长方体} = Sh.$$

这里 S, h 分别表示长方体的底面积和高.

长方体体积公式是计算其他几何体体积的基础,我们将上述结论作为已知事实来运用.

这一点可用祖暅原理来说明.有关祖暅原理的介绍见阅读材料.

棱柱(圆柱)可由多边形(圆)沿某一方向平移得到,因此,两个底面积相等、高也相等的棱柱(圆柱)应该具有相等的体积(图 1-3-12).

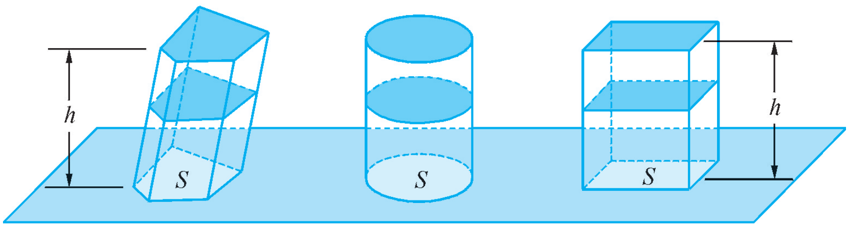


图 1-3-12

柱体(棱柱、圆柱)的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积,即

$$V_{柱体} = Sh.$$

类似地,底面积相等、高也相等的两个锥体,它们的体积也相等(图 1-3-13).由于底面积为 S,高为 h 的圆锥的体积为 $V_{圆锥} = \frac{1}{3}Sh$,所以

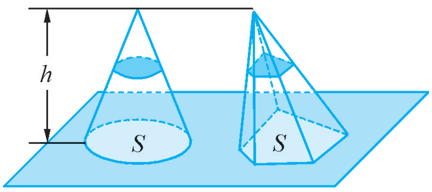


图 1-3-13

$$V_{锥体} = \frac{1}{3}Sh.$$

台体(棱台、圆台)的体积可以转化为锥体的体积来计算(图 1－3－14).如果台体的上、下底面面积分别为 S', S,高是 h,可以推得它的体积是

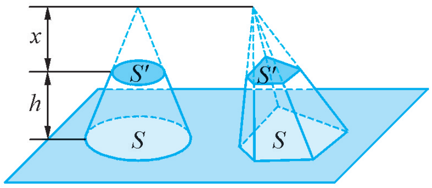


图 1－3－14

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').$$

柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系如下:

$$V_{柱体}=Sh \xleftarrow{S'=S} V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S') \xrightarrow{S'=0} V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$$

做一个倒沙实验检验这一结果.

运用类似的方法我们还能证实这样一个有趣的结论:一个底面半径和高都等于 R 的圆柱,挖去一个以上底面为底面,下底面圆心为顶点的圆锥后,所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等(图 1－3－15).由此得到

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

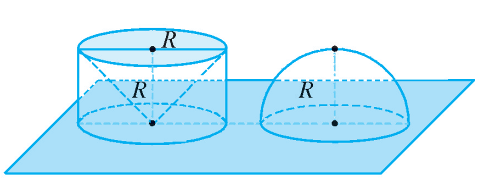


图 1－3－15

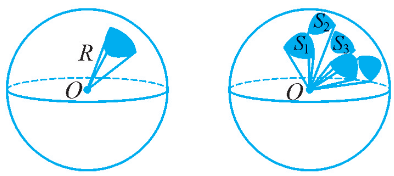


图 1－3－16

设想一个球由许多顶点在球心,底面都在球面上的“准锥体”组成,这些“准锥体”的底面并不是真正的多边形,但只要这些“准锥体”的底面足够地小,就可以把它们近似地看成棱锥(图 1－3－16).

这时,这些“准锥体”的高趋向于球半径 R,底面积 S_1, S_2, S_3, …的和趋向于球面积,所有这些“准锥体”的体积的和趋向于球的体积,因此

$$\frac{4}{3}\pi R^3=V_{球}=\frac{1}{3}RS_1+\frac{1}{3}RS_2+\frac{1}{3}RS_3+\cdots=\frac{1}{3}RS_{球面},$$

所以

$$S_{球面}=4\pi R^2.$$

它表明球的表面积是球的大圆面积的 4 倍.

球面被经过球心的平面截得的圆叫做球的大圆，大圆的半径等于球半径.

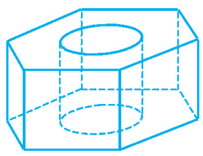


图 1－3－17

例 1 有一堆相同规格的六角螺帽毛坯(图 1－3－17)共重6 kg. 已知毛坯底面正六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是10 mm. 那么这堆毛坯约有多少个？(铁的密度是 7.8 g/cm^3)

分析 六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差，再由密度算出一个六角螺帽毛坯的质量即可.

解 因为$V_{正六棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10\approx 3.741\times 10^3(\text{mm}^3)$，

$$V_{圆柱}\approx 3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 10=0.785\times 10^3(\text{mm}^3),$$

所以一个毛坯的体积为

$$\begin{aligned}V&=3.741\times 10^3-0.785\times 10^3\\&=2.956\times 10^3(\text{mm}^3)\\&=2.956(\text{cm}^3).\end{aligned}$$

约有毛坯 $6\times 10^3\div(7.8\times 2.956)\approx 260$(个).

答 这堆毛坯约有 260 个.

例 2 图 1－3－18 是一个奖杯的三视图(单位：cm)，试画出它的直观图，并计算这个奖杯的体积(精确到 0.01 cm^3).

解 采用斜二测画法. 先画底座，这是一个正四棱台；再画杯身，是长方体；最后画出球体. 如图 1－3－19.

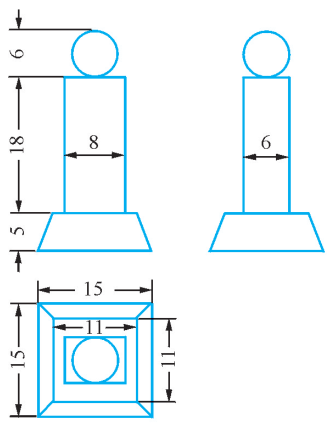


图 1－3－18

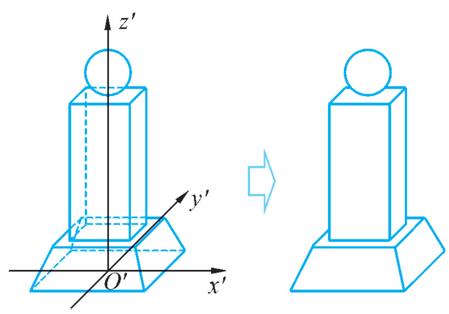


图 1－3－19

因为 $V_{正四棱台}=\frac{1}{3}\times 5\times(15^2+15\times 11+11^2)\approx 851.667(\text{cm}^3)$，

$$V_{长方体} = 6 \times 8 \times 18 = 864(\text{cm}^3),$$

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 \approx 113.097(\text{cm}^3),$$

所以这个奖杯的体积为

$$V = V_{正四棱台} + V_{长方体} + V_{球} \approx 1\,828.76(\text{cm}^3).$$

计算组合体的体积时，应考虑将其转化为计算柱、锥、台、球等常见几何体的体积.

练　习

1. 用一张长 12 cm、宽 8 cm 的矩形铁皮围成圆柱形的侧面，求这个圆柱的体积.
2. 已知一个铜质的五棱柱的底面积为 16 cm^2，高为 4 cm，现将它熔化后铸成一个正方体的铜块，那么铸成的铜块的棱长为多少(不计损耗)?
3. 若一个六棱锥的高为 10 cm，底面是边长为 6 cm 的正六边形，求这个六棱锥的体积.
4. 一个正四棱台形油槽可以装煤油 190 L，假如它的上、下底面边长分别为 60 cm 和 40 cm，求它的深度.
5. 钢球由于热膨胀而使半径增加千分之一，那么它的体积增加约几分之几?
6. 计算地球的表面积(地球的半径约为 6 370 km，结果保留 4 位有效数字).

问题与建模

体积的近似计算

在有些情况下，我们需要用近似方法来计算体积. 例如，铺路时估算挖掘的土方量；两头分别为矩形和圆的通风管道，它的体积也需要估算. 下面是两种常用的近似计算体积的方法.

(1) 网格标高法　用网格分割某区域，如果知道每个网格点的高度(深度)，我们就能估算这一区域的体积(图 1－3－20).

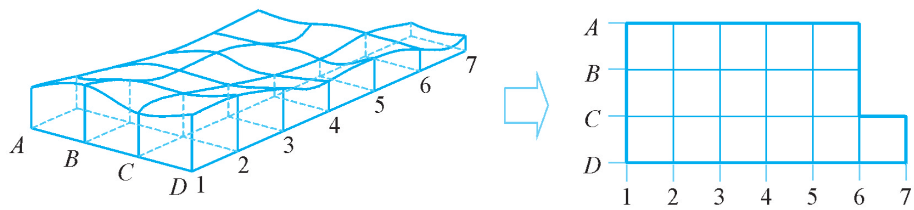


图 1－3－20

设某网格小正方形四个角上的高度分别为 h_1，h_2，h_3，h_4. 我们将这个小正方形区域近似地看成长方体，它的底面积为网格小正方形的面积 S，高取 h_1，h_2，h_3，h_4 的平均值. 因此这一小区域的体积可用

$$S \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}$$

来估算，于是整块区域的体积为

$$V \approx \frac{1}{4}S(H_1 + 2H_2 + 3H_3 + 4H_4), \qquad (*)$$

其中，H_1 = 仅位于一个小区域上的格点的高度之和，

H_2 = 仅位于两个小区域上的格点的高度之和，

H_3 = 仅位于三个小区域上的格点的高度之和，

H_4 = 仅位于四个小区域上的格点的高度之和.

在图 1-3-20 中，仅位于一个小区域上的格点为 $A1$，$A6$，$C7$，$D1$，$D7$；仅位于两个小区域上的格点为 $A2$，$A3$，$A4$，$A5$，$B1$，$B6$，$C1$，$D2$，$D3$，$D4$，$D5$，$D6$；仅位于三个小区域上的格点为 $C6$；仅位于四个小区域上的格点为 $B2$，$B3$，$B4$，$B5$，$C2$，$C3$，$C4$，$C5$.

例 1 在图 1-3-21 的网格区域内拟建一座工厂，每个网格小正方形的面积为 20 m×20 m，格点处的深度(单位：m)如表所示，在此深度内的土石需要挖走. 试估算：

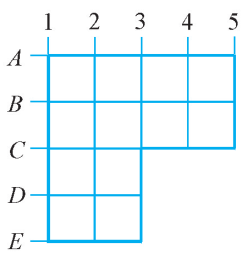


图 1-3-21

	1	2	3	4	5
A	4.575	4.002	3.917	3.571	3.000
B	5.001	4.597	3.718	3.200	3.199
C	5.213	4.777	2.517	2.818	3.222
D	4.876	4.213	3.000		
E	4.213	3.917	3.517		

1) 应挖走的土方；

2) 挖掘机挖土时，泥土因变松而使体积增加 15%，如果每辆翻斗车能装运 18 m³，那么运走这些土石需要多少车次？

解 1) 我们用模型(*)来估算. 先求出 $H_1 \sim H_4$：

$$H_1 = 4.575 + 3.000 + 3.222 + 4.213 + 3.517 = 18.527\ (\text{m}),$$

$$H_2 = 4.002 + 3.917 + 3.571 + 5.001 + 3.199 + 5.213 + 2.818 + 4.876 + 3.000 + 3.917 = 39.514\ (\text{m}),$$

$$H_3 = 2.517\ (\text{m}),$$

$$H_4 = 4.597 + 3.718 + 3.200 + 4.777 + 4.213 = 20.505\ (\text{m}).$$

又每个网格小正方形的面积为

$$S = 20 \times 20 = 400\ (\text{m}^2),$$

因此，应挖走的土方为

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{1}{4}S(H_1 + 2H_2 + 3H_3 + 4H_4) \\ &= \frac{1}{4} \times 400 \times (18.527 + 2 \times 39.514 + 3 \times 2.517 + 4 \times 20.505) \\ &= 18\,712.6\ (\text{m}^3). \end{aligned}$$

2）共需

$$18\,712.6\times115\%\div18\approx1\,196(\text{车次}).$$

（2）平均面积法　如果几何体的剖面由一种形状逐渐变化为另一种形状，这时可用两头面积的平均值乘以长度来估算体积.

如图 1－3－22，该几何体的体积为

$$V\approx\frac{S_1+S_2}{2}\times l=\frac{1}{2}(S_1+S_2)l.$$

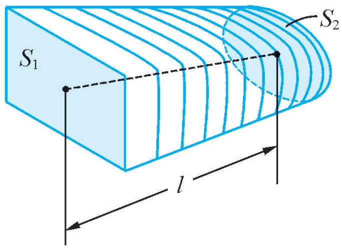


图 1－3－22

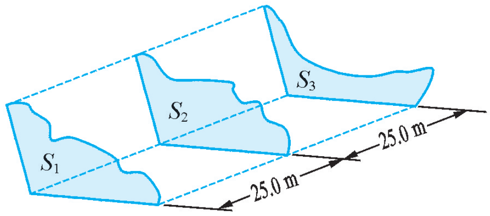


图 1－3－23

例 2　图 1－3－23 显示了某路段的三个横断面，其面积分别为 $S_1=46.2\text{ m}^2$，$S_2=52.7\text{ m}^2$，$S_3=35.3\text{ m}^2$，相邻两个横断面的间距为 25.0 m. 筑路时需将这部分沙土清除掉，试估算这部分沙土的体积.

解　先估算 S_1 和 S_2 之间的体积，

$$V_1\approx\frac{1}{2}(S_1+S_2)l$$

$$=\frac{1}{2}\times(46.2+52.7)\times25$$

$$=1\,236.25\ (\text{m}^3).$$

再估算 S_2 和 S_3 之间的体积，

$$V_2\approx\frac{1}{2}(S_2+S_3)l$$

$$=\frac{1}{2}\times(52.7+35.3)\times25$$

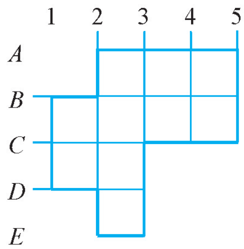
$$=1\,100\ (\text{m}^3).$$

因此，需清运沙土的体积约为

$$1\,236.25+1\,100\approx2\,336.25\ (\text{m}^3).$$

练　习

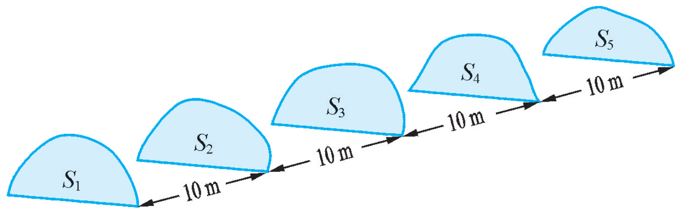
1. 某优质煤矿覆盖层的网格图(每个网格小正方形的面积为 10 m×10 m)及深度(单位：m)表如下. 现欲露天开采这一煤矿，试估算需要清除的覆盖层的体积.



（第 1 题）

	1	2	3	4	5
A		5.180	7.203	4.182	3.980
B	6.732	6.108	5.819	8.234	7.410
C	4.287	7.154	6.104	6.205	5.657
D	5.345	5.254	8.290		
E		5.452	7.235		

2. 如图，某巷道的五个横断面面积分别为 $S_1=40.1\ \mathrm{m}^2$，$S_2=42.5\ \mathrm{m}^2$，$S_3=43.7\ \mathrm{m}^2$，$S_4=42.1\ \mathrm{m}^2$，$S_5=38.7\ \mathrm{m}^2$，相邻两个横断面之间的距离均为 10 m. 试估算这一巷道的体积.



（第 2 题）

习题 1.3

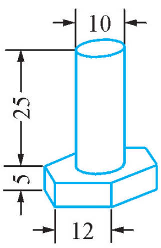
感受·理解

1. 正六棱柱形的除锈滚筒（两端是封闭的），筒长 1.6 m，底面外接圆半径是 0.46 m，制造这个滚筒需要多少平方米铁板？（精确到 $0.1\ \mathrm{m}^2$）

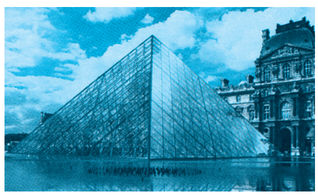
2. 一个正六棱锥的底面边长为 6 cm，高为 15 cm，画出它的直观图（比例尺为 1∶3），并计算该棱锥的体积.

3. 一个正三棱锥的高和底面边长都为 a，求它的侧棱和底面所成角的余弦值.

4. 要电镀螺杆（尺寸如图，单位：mm），如果每平方米用锌 0.11 kg，电镀 100 个这样的螺杆需要锌多少克？（精确到 0.1 g）



（第 4 题）


（第 5 题）

5. 如图，某展览馆外墙为正四棱锥的侧面，四个侧面均为底边长为35.4 m，高为 27.9 m 的等腰三角形. 试求：

（1）展览馆的高度；

（2）外墙的面积；

（3）该四棱锥的体积.

6. (1) 火星的半径约是地球的一半，地球表面积是火星表面积的多少倍?

(2) 木星的表面积约是地球的 120 倍，它的体积约是地球的多少倍?

7. 有一种空心钢球，质量为 142 g，测得外径等于 5.0 cm，求它的内径(钢的密度为 7.9 g/cm^3，结果精确到 0.1 cm).

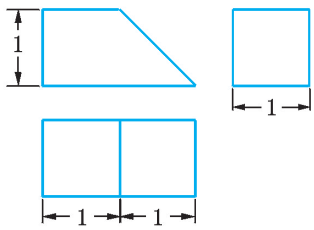
8. 用油漆涂 100 个圆台形水桶(桶内外侧都要涂)，桶口直径为 30 cm，桶底直径为 25 cm，母线长是 27.5 cm. 已知每平方米需用油漆 150 g，共需用油漆多少千克?(精确到0.1 kg)

思考·运用

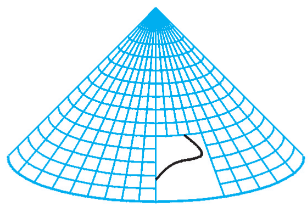
9. 一几何体按比例绘制的三视图如图所示(单位：m).

(1) 试画出它的直观图；

(2) 求它的体积.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图，某养路处建造圆锥形仓库用于贮藏食盐(供融化高速公路上的积雪之用). 已建的仓库的底面直径为 12 m，高 4 m. 养路处拟建一个更大的圆锥形仓库，以存放更多的食盐. 现有两个方案：一是新建仓库的底面直径比原来的大 4 m(高不变)，二是高度增加 4 m(底面直径不变).

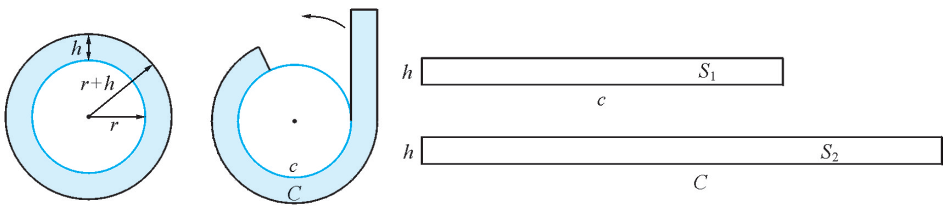
(1) 分别计算按这两个方案所建仓库的体积；

(2) 分别计算按这两个方案所建仓库的表面积；

(3) 哪一个方案更经济些?

探究·拓展

11. (阅读题) 假设半径为 r 的圆的面积为 $A=\pi r^2$，我们用下面的方法推出圆的周长公式 $c=2\pi r$.



(第 11 题)

如图，设 h 是一个正数，考察半径分别为 r 和 $r+h$ 的两个同心圆所围成的圆环(图中阴影区域). 这个圆环的面积为

$$B=\pi(r+h)^2-\pi r^2=2\pi rh+\pi h^2.$$

可以看出，$S_1<B<S_2$，其中 S_1 是以小圆周长为长，h 为宽的矩形的面积，S_2 是以大圆周长为长，h 为宽的矩形的面积.

所以有　$ch<2\pi rh+\pi h^2<Ch$，即　$c<2\pi r+\pi h<C$.

假若 h 越来越小(趋于 0),那么大圆的周长 C 趋近于小圆的周长 c,且 πh 趋于 0,因此我们得到

$$c \leqslant 2\pi r \leqslant c.$$

从而 $c=2\pi r$.

用类似的方法证明:假设半径为 R 的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,那么球的表面积为 $S=4\pi R^2$.

实习作业

1. 观察学校、公园或城市中的建筑,描述它们的基本结构,尝试画出其直观图或三视图.
2. 到附近工厂了解三视图在模具设计与零件加工中的应用,选择某零件实物,画出其三视图.
3. 访问家装公司或广告公司,了解立体几何在家装设计、广告设计、商标设计中的应用.
4. 到商店或超市观察商品包装方式,研究空间图形的展开与折叠在商品包装中的应用.

阅 读

祖 暅 原 理

取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上,将它如图 1-3-24 那样改变一下形状,这时高度没有改变,每页纸的面积也没有改变,因而这摞书或纸张的体积与变形前相等.

我国齐梁时代的数学家、祖冲之的儿子祖暅提出一条原理:“幂势既同,则积不容异.”这里“幂”指水平截面的面积,“势”指高.因此,这句话的意思是:两个等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等,则这两个几何体的体积相等(图 1-3-25).

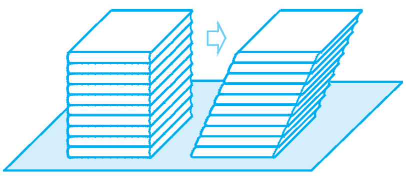


图 1-3-24

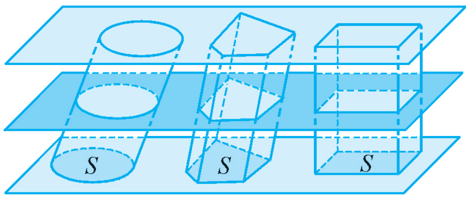


图 1-3-25

祖暅不仅首次明确地提出了这一原理,还成功地将其应用于球体积的推算.我们把这条原理称为**祖暅原理**.

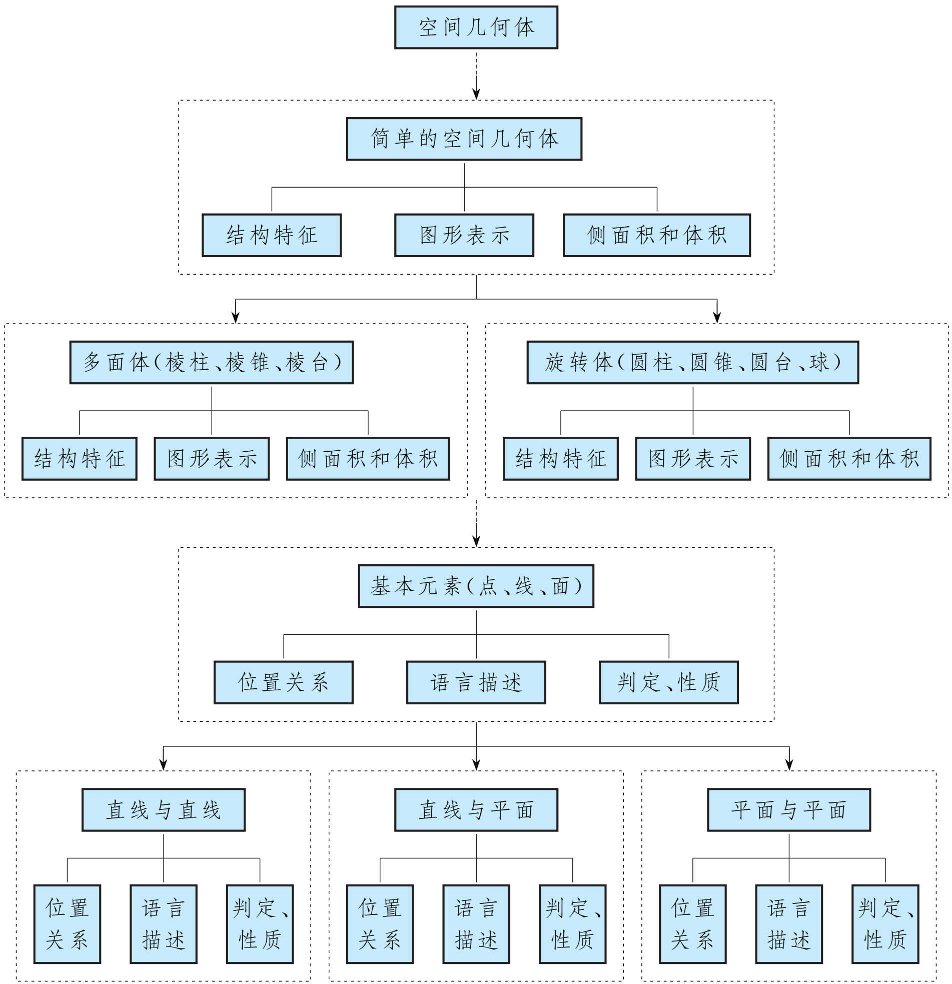
祖暅原理在西方文献中称“卡瓦列利原理”,它在 1635 年由意大利数学家卡瓦列利(B. Cavalieri,1598～1647)独立提出,对微积分的建立有重要影响.

以长方体体积公式和祖暅原理为基础,我们就可以求出柱、锥、台、球等几何体的体积.

本章回顾

本 章 概 览

我们首先从直观上认识了柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征. 借助长方体模型，抽象出空间点、线、面位置关系. 学习了可作为推理依据的 4 个公理，以及线线、线面、面面平行或垂直的判定与性质定理，并运用这些知识解决有关空间位置关系的简单推理论证及应用问题.



学习本章应注意体会“转化”的思想方法，如面面垂直与线面垂直的转化、线面平行与线线平行的转化，并善于将空间问题转化为平面问题来处理.

内 容 提 要

1. 平面的基本性质

公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是经过这个公共点的一条直线.

公理 3：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3：经过两条平行直线，有且只有一个平面.

2. 空间直线

公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

定理：过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线是异面直线.

3. 直线与平面平行

判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

4. 直线与平面垂直

判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

性质定理：如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

5. 两平面平行

判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

性质定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么所得的两条交线平行.

6. 两平面垂直

判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

性质定理：如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

7. 空间角

(1) 异面直线所成的角：a 与 b 是异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a，b 所成的角. 异面直线所成的角 α 的取值范围为 $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$.

(2) 直线与平面所成的角：平面的一条斜线与它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线与这个平面所成的角. 一条直线垂直于平面，则它们所成的角是直角；一条直线与平面平行或在平面内，则它们所成的角是 0° 的角. 直线与平面所成的角 α 的取值范围为 $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$.

(3) 二面角的平面角：以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角. 二面角的平面角 α 的取值范围为 $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

8. 距离

(1) 点到平面的距离：从平面外一点引平面的垂线，这个点和垂足间的距离，叫做这个点到这个平面的距离.

(2) 直线和平面的距离：一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离，叫做这条直线和这个平面的距离.

(3) 两个平行平面间的距离：两个平行平面的公垂线段都相等，把公垂线段的长度叫做两个平行平面间的距离.

9. 侧面积公式

$$S_{\text{直棱柱侧}} = ch,\ S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2}ch',\ S_{\text{正棱台侧}} = \frac{1}{2}(c+c')h';$$

$$S_{\text{圆柱侧}} = cl,\ S_{\text{圆锥侧}} = \frac{1}{2}cl,\ S_{\text{圆台侧}} = \frac{1}{2}(c+c')l.$$

10. 体积公式

$$V_{\text{柱体}} = Sh,\ V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh,\ V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h.$$

11. 球

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3,\ S_{\text{球面}} = 4\pi R^2.$$

复 习 题

感受・理解

1. 两个平面可以将空间分成________个部分.

2. 三条直线两两平行,则过其中任意两条直线最多共可确定________个平面.

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各个表面的对角线中,与 AD_1 所成角为 $60°$ 的有(　　).

A. 4 条　　B. 6 条

C. 8 条　　D. 10 条

4. 若两个平行平面的距离等于 10,夹在这两个平面间的线段 AB 长为 20,则 AB 与这两个平面所成的角为________.

5. 若长方体三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$,则长方体的体积等于(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. 6

C. $6\sqrt{6}$　　D. 36

6. 在正三棱锥 $S-ABC$ 中,求证: $SA\perp BC$.

7. 指出下列命题是否正确,并说明理由:

(1) 矩形的平行投影一定是矩形;

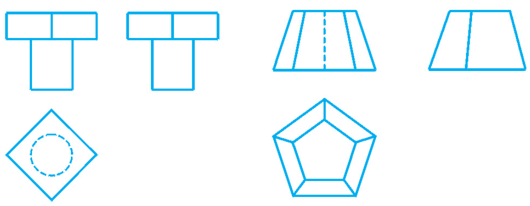
(2) 梯形的平行投影一定是梯形;

(3) 两条相交直线的平行投影不可能平行;

(4) 平行四边形的平行投影可能是正方形;

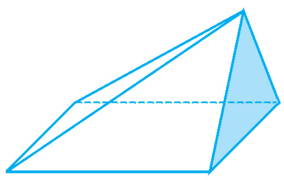
(5) 正方形的平行投影一定是菱形.

8. 两个空间图形的三视图如下,分别画出其实物的大致形状,并指出它们是什么几何体.



(1)　　(2)

(第 8 题)



(第 9 题)

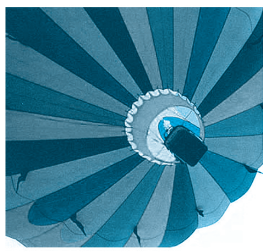
9. 画出如图所示的四棱锥的三视图(带阴影的面为正面),其中底面为正方形,带阴影的侧面为正三角形,且垂直于底面.

10. 用长、宽分别是 3π 与 π 的矩形硬纸卷成圆柱的侧面,试求圆柱底面的半径.

11. 如图,某人打算用 A 型材料制作一个近似于球形的热气球,半径为 10 m.

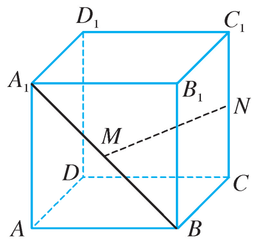
(1) 制作这样一个热气球,大约需要多少材料?

(2) 如果 A 型材料的价格为 280 元/m^2,试估计用料的总费用. 如果直径增加 4 m,那么需增加多少费用?



(第 11 题)

12. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 A_1B 和 CC_1 的中点．求证：MN // 平面 $ABCD$．

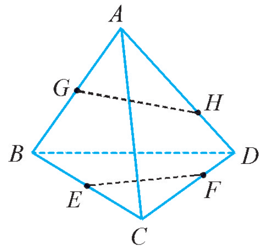


（第 12 题）

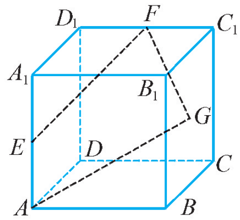
13. 三个球的半径的比是 1∶2∶3．求证：其中最大的一个球的体积是另两个球的体积之和的 3 倍．

思考·运用

14. 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，E，G 分别是 BC，AB 的中点，F 在 CD 上，H 在 AD 上，且有 $DF : FC = DH : HA = 2 : 3$．试判定直线 EF，GH，BD 的位置关系．

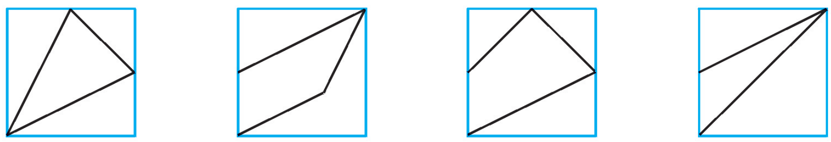


（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 E，F 分别是 AA_1，D_1C_1 的中点，G 是正方形 BCC_1B_1 的中心，则空间四边形 $AEFG$ 在该正方体的面上的正投影不可能是（　　）．



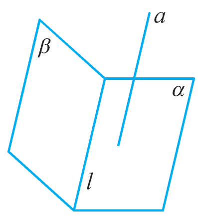
A　　　　B　　　　C　　　　D

16. 如图，已知 $a \parallel \alpha$，$a \parallel \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，求证：$a \parallel l$．

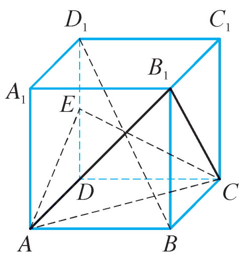
17. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 DD_1 的中点．求证：

（1）BD_1 // 平面 EAC；

（2）平面 $EAC \perp$ 平面 AB_1C．



（第 16 题）

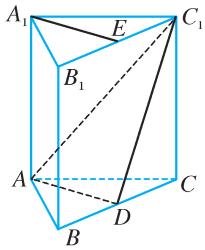


（第 17 题）

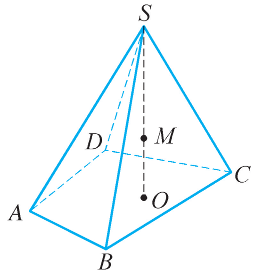
18. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D 在边 BC 上，$AD \perp C_1D$．

（1）求证：$AD \perp$ 平面 BCC_1B_1；

（2）如果点 E 是 B_1C_1 的中点，求证：A_1E // 平面 ADC_1．



（第 18 题）



（第 19 题）

19. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SO\perp$ 平面 $ABCD$，O 为垂足，点 M 在 SO 上，且 $SM:MO=2:1$，经过点 M 作与底面 $ABCD$ 平行的平面 α，分别交棱 SA，SB，SC，SD 于 A_1，B_1，C_1，D_1.

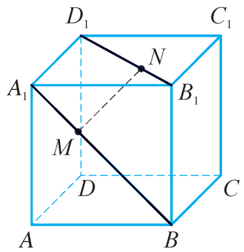
（1）求证：四边形 $A_1B_1C_1D_1\backsim$四边形 $ABCD$；

（2）求棱锥 $S-A_1B_1C_1D_1$ 的体积与棱台$A_1B_1C_1D_1-ABCD$的体积之比.

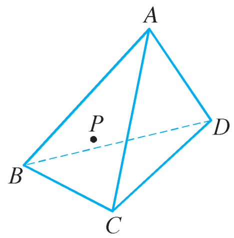
20. 设 P，A，B，C 是球 O 表面上的四个点，PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=1$ m，求球的体积与表面积.

探究·拓展

21. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 N 在线段 B_1D_1 上，且 $D_1N=2NB_1$，点 M 在线段 A_1B 上，且 $BM=2MA_1$. 求证：$MN\parallel$ 平面 AC_1B.



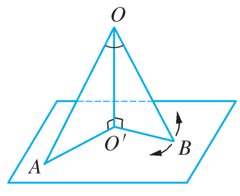
（第 21 题）



（第 22 题）

22. 如图，一个四面体木块 $ABCD$，在$\triangle ABC$ 的面内有一点 P，要经过点 P 在平面 ABC 内画一条直线 l，使 $l\perp AD$，怎样画？写出作法，并给予证明.

23. （操作题）用硬纸剪一个三边均不等的锐角三角形 AOB，然后以 AB 边上的高OO'为折痕，折得两个直角三角形，使之直立于桌面上（如图），那么，$\angle AO'B$ 就是$\angle AOB$ 在桌面上的射影. 转动其中一个直角三角形，观察$\angle AOB$ 与$\angle AO'B$ 的大小关系，是否存在某个位置，使 $\angle AOB=\angle AO'B$？



（第 23 题）

本章测试

一、填空题

1. 四面体共有________条棱.

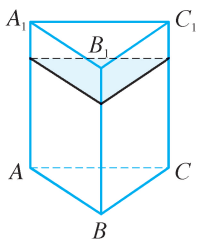
2. 与同一条直线都相交的两条直线的位置关系是________.

3. 用半径为 2 cm 的半圆形纸片卷成一个圆锥筒，则这个圆锥筒的高为________cm.

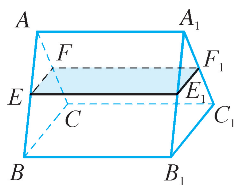
4. 若线段 AB 的端点 A，B 到平面 α 的距离分别为 a，b，且 A，B 在 α 的同侧，则线段 AB 中点 M 到平面 α 的距离是________.

5. 把一个半径为 R 的实心铁球铸成三个小球(不计损耗)，三个小球的体积之比为 $1:3:4$，则其中最小球的半径为________.

6. 一个封闭的正三棱柱容器，高为 $2a$，内装水若干(如图甲，底面处于水平状态). 将容器放倒(如图乙，一个侧面处于水平状态)，这时水面与各棱交点为 E，F，F_1，E_1，分别为所在棱的中点，则图甲中水面高度为________.



图甲



图乙

(第 6 题)

二、选择题

7. 在空间，到一圆周上各点距离相等的点的集合是(　　).

A. 一个点　　B. 一条直线

C. 一个平面　　D. 一个球面

8. 若 a，b 为两条异面直线，α，β 为两个平面，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，则下列结论中正确的是(　　).

A. l 至少与 a，b 中一条相交

B. l 至多与 a，b 中一条相交

C. l 至少与 a，b 中一条平行

D. l 必与 a，b 中一条相交，与另一条平行

9. 关于异面直线 a，b，有下列四个命题：

① 过直线 a 有且仅有一个平面 β，使 $b \parallel \beta$；

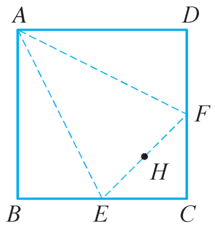
② 过直线 a 有且仅有一个平面 β，使 $b \perp \beta$；

③ 在空间存在平面 β，使 $a \parallel \beta$，$b \parallel \beta$；

④ 在空间不存在平面 β，使 $a \perp \beta$，$b \perp \beta$.

其中，正确的命题的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第 10 题）

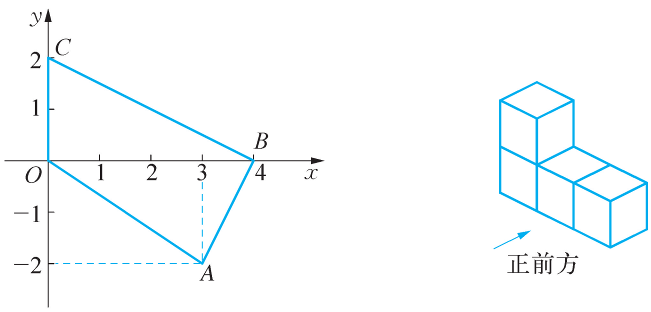
10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC，CD 的中点，H 为 EF 的中点. 沿 AE，EF，FA 将正方形折起，使 B，C，D 重合于点 O，构成四面体，则在四面体 $A-OEF$ 中，下列说法中正确的是（　　）.

A. $AH\perp$ 平面 OEF　　　　B. $AO\perp$ 平面 OEF

C. $AE\perp$ 平面 OEF　　　　D. $AF\perp$ 平面 OEF

三、解答题

11. (1) 画出图(1)中平面四边形 $OABC$ 水平放置的直观图.



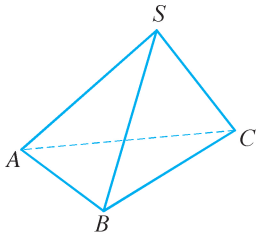
(1)　　　　(2)

（第 11 题）

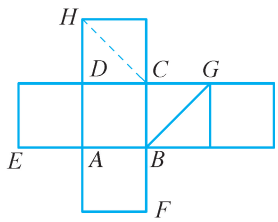
(2) 四个小立方体组成如图(2)所示的几何体，试作出其三视图.

12. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=AC$，$SB=SC$.

求证：$SA\perp BC$.



（第 12 题）



（第 13 题）

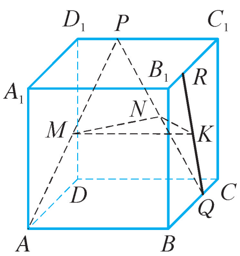
13. 如图为正方体的平面展开图.

(1) 作出该正方体的直观图；

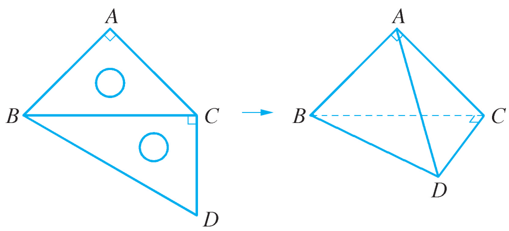
(2) 在正方体中，求证：$BG\parallel$ 平面 ACH.

14. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q，R 分别为棱 D_1C_1，BC，B_1C_1 上异于顶点的点，M，N，K 分别为线段 AP，PQ，QR 的中点.

求证：平面 $MNK\parallel$ 平面 $ABCD$.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 一副三角板如图拼接，将$\triangle BCD$ 折起，使得二面角$A-BC-D$ 为直二面角.

求证：平面 $ABD\perp$ 平面 ACD.