大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学，你感到高中阶段的学习生活有趣吗？

我们知道，数学与生活紧密相连. 数学可以帮助我们认识世界，改造世界，创造新的生活. 数学是高中阶段的重要学科，不仅是学习物理、化学等学科的基础，而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题，我们要认真观察、实验、归纳，大胆提出猜想. 为了证实或推翻提出的猜想，我们要通过分析，概括、抽象出数学概念，通过探究、推理，建立数学理论. 我们要积极地运用这些理论去解决问题. 在探究与应用过程中，我们的思维水平会不断提高，我们的创造能力会得到发展. 在数学学习过程中，我们将快乐地成长.

考虑到广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受 · 理解”部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系. 它体现了教材的基本要求，是所有学生应当掌握的内容. 相信你一定能学好这部分内容.

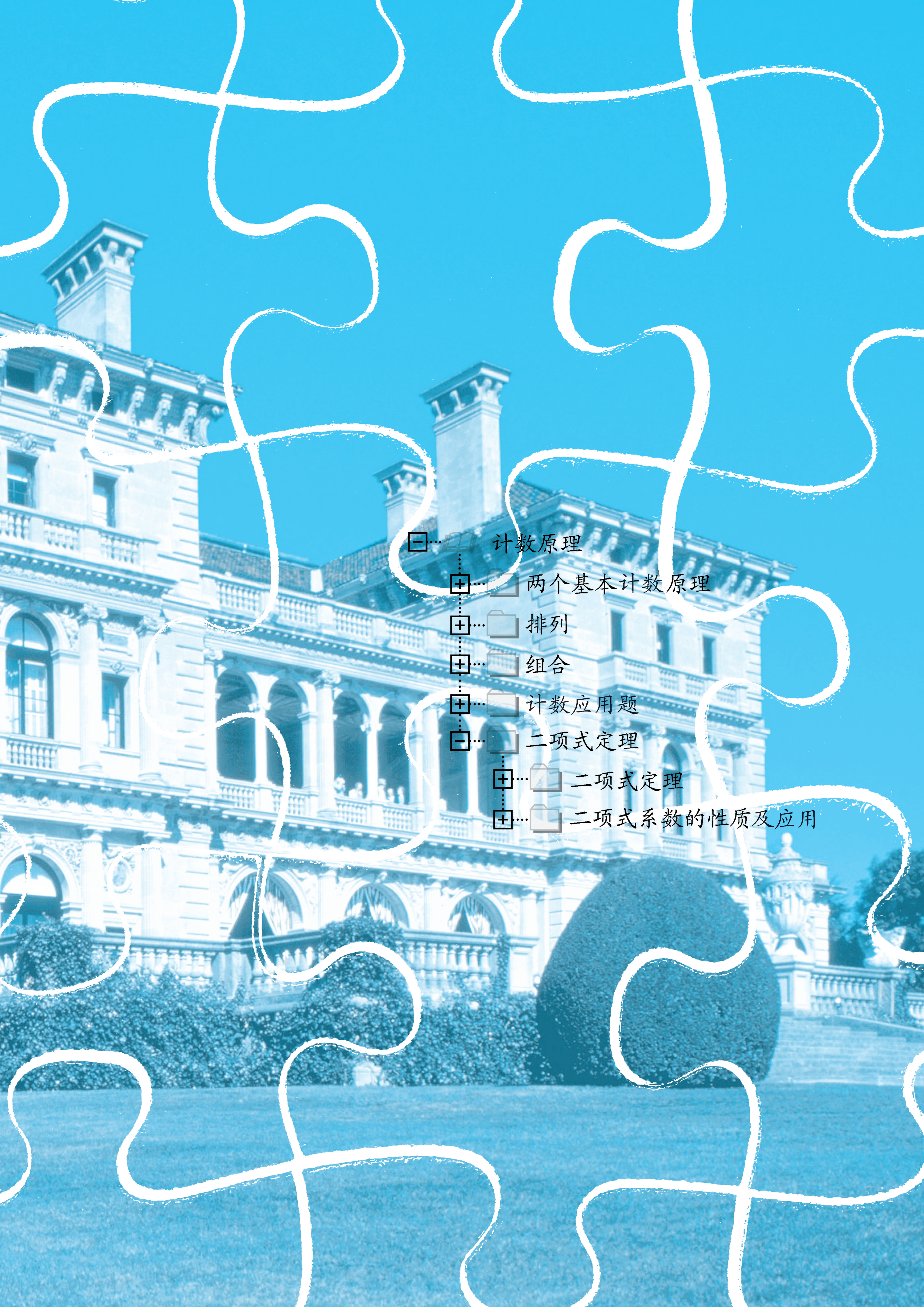
本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接，以及习题中的“思考 · 运用”、“探究 · 拓展”等，以激发你探索数学的兴趣. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

A_n^m	从 n 个不同的元素中选出 m 个不同元素的排列数
$n!$	将 n 个不同的元素进行全排列的排列数
C_n^m	从 n 个不同的元素中选出 m 个不同元素的组合数
$P(X=x_i)$	随机变量 X 取值为 x_i 时对应的随机事件发生的概率
$X \sim H(n, M, N)$	随机变量 X 服从参数为 n，M，N 的超几何分布
$X \sim B(n, p)$	随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布
$\overline{A}$	随机事件 A 的对立事件
$P(A)$	随机事件 A 发生的概率
$P(A \mid B)$	随机事件 B 发生的条件下随机事件 A 发生的概率
$P(AB)$	随机事件 A，B 同时发生的概率
$E(X)$（或 μ）	随机变量 X 的均值或数学期望
$V(X)$（或 σ^2）	随机变量 X 的方差
$\sqrt{V(X)}$（或 σ）	随机变量 X 的标准差
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	随机变量 X 服从参数为 μ，σ^2 的正态分布
χ^2	χ^2 分布
$\overline{X}$	X 数据的均值

第 1 章　计 数 原 理



计数原理

- 两个基本计数原理
- 排列
- 组合
- 计数应用题
- 二项式定理
  - 二项式定理
  - 二项式系数的性质及应用

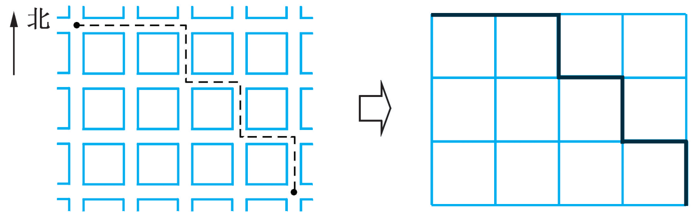
有待探索的自然界是有规律的.相信基本规律是简明单纯的.

——爱因斯坦

人们在社会生活的各个方面都经常需要进行计数,如电话号码的编排、密码的设定、彩票的设计、集成电路的布线安排,以及计算机的程序编制,等等.

某市目前汽车牌照的号码使用 2 个英文字母后接 4 个阿拉伯数字的方式构成(其中第一个字母是固定不变的),那么可能的汽车牌照号码共有多少个?估计该市到 2008 年汽车保有量将达到 1 000 000 辆,到时怎样调整汽车牌照号码的构成方式,才可以满足需要?

下图是某城市的街道.西北角是某同学的家,东南角是学校.问:从家经东西 4 条街、南北 5 条街到学校(最短距离),有几种不同的走法?



● 利用怎样的模型刻画和解决计数问题?

1.1 两个基本计数原理

（1）如图 1－1－1(1)，从甲地到乙地有 3 条公路、2 条铁路，某人要从甲地到乙地，共有多少种不同的方法？

（2）如图 1－1－1(2)，从甲地到乙地有 3 条道路，从乙地到丙地有 2 条道路，那么从甲地经乙地到丙地共有多少种不同的方法？

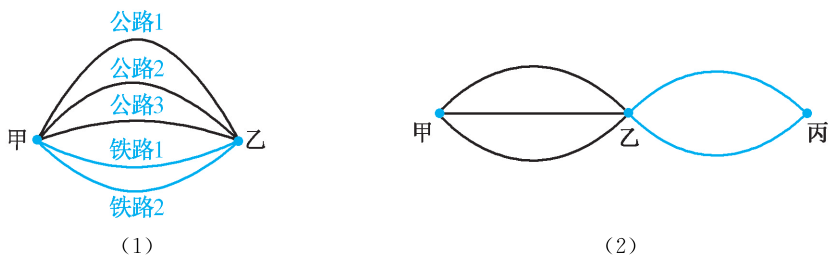


图 1－1－1

- 上述两个问题有什么区别？
- 由这两个问题分别可以得到怎样的数学模型？

首先考察问题(1).

公路有 3 条，走任意一条公路都能完成从甲地到乙地这件事；而铁路有 2 条，走任意一条铁路也都能完成从甲地到乙地这件事. 所以从甲地到乙地共有

$$3+2=5$$

种不同的方法.

再考察问题(2).

必须经过先从甲地到乙地，再从乙地到丙地两个步骤，才能完成从甲地经乙地到丙地这件事(图 1－1－2).

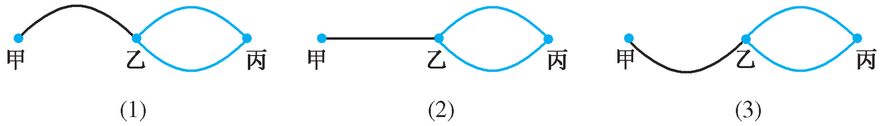


图 1－1－2

从甲地到乙地有 3 种不同的方法，从乙地到丙地有 2 种不同的方法. 所以，从甲地经乙地到丙地共有

$$3\times 2=6$$

种不同的方法.

根据上述分析可知，在问题(1)中，任选一种方法都能达到完成

这件事的目的.在问题(2)中,必须依次连续完成两个步骤,才能达到完成这件事的目的.

一般地,我们有:

分类计数原理又称为加法原理.

分类计数原理 如果完成一件事,有 n 类方式,在第 1 类方式中有 m_1 种不同的方法,在第 2 类方式中有 m_2 种不同的方法,……在第 n 类方式中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

分步计数原理又称为乘法原理.

分步计数原理 如果完成一件事,需要分成 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法,……做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法.

例 1 某班共有男生 28 名、女生 20 名,从该班选出学生代表参加校学代会.

(1) 若学校分配给该班 1 名代表,则有多少种不同的选法?

(2) 若学校分配给该班 2 名代表,且男、女生代表各 1 名,则有多少种不同的选法?

解 (1) 选出 1 名代表有 2 类方式:第 1 类是从男生中选出 1 名代表,有 28 种不同方法;第 2 类是从女生中选出 1 名代表,有 20 种不同方法.根据分类计数原理,共有不同的选法种数是

$$28 + 20 = 48.$$

(2) 选出男、女生代表各 1 名,可以分成 2 个步骤完成:

第一步 选 1 名男生代表,有 28 种不同方法;

第二步 选 1 名女生代表,有 20 种不同方法.

根据分步计数原理,选出男、女生代表各 1 名,共有不同的选法种数是

$$28 \times 20 = 560.$$

答 选出 1 名代表有 48 种不同的选法;选出男、女生代表各 1 名,有 560 种不同的选法.

例 2 (1) 在图 1－1－3(1)的电路中,仅合上 1 只开关接通电路,有多少种不同的方法?

(2) 在图 1－1－3(2)的电路中，仅合上 2 只开关接通电路，有多少种不同的方法？

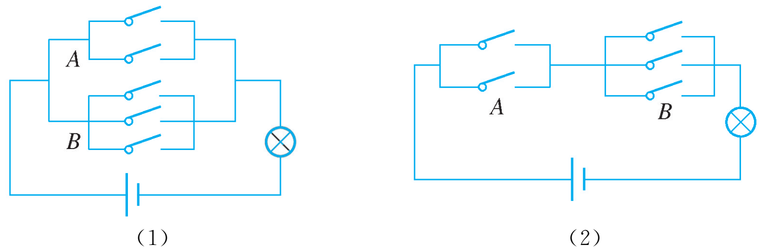


图 1－1－3

解 (1)在图 1－1－3(1)中，按要求接通电路，只要在 A 中的 2 只开关或 B 中的 3 只开关中合上 1 只即可. 根据分类计数原理，共有

$$2+3=5$$

种不同的方法.

(2) 在图 1－1－3(2)中，按要求接通电路必须分两步进行：第一步，合上 A 中的 1 只开关；第二步，合上 B 中的 1 只开关. 根据分步计数原理，共有

$$2\times 3=6$$

种不同的方法.

答 图 1－1－3(1)的电路中，仅合上 1 只开关接通电路，有 5 种不同的方法；图 1－1－3(2)的电路中，仅合上 2 只开关接通电路，有 6 种不同的方法.

例 3 为了确保电子信箱的安全，在注册时，通常要设置电子信箱密码. 在某网站设置的信箱中，

(1) 密码为 4 位，每位均为 0～9 这 10 个数字中的 1 个数字，这样的密码共有多少个？

(2) 密码为 4 位，每位是 0～9 这 10 个数字中的 1 个，或是从 A 到 Z 这 26 个英文字母中的 1 个，这样的密码共有多少个？

(3) 密码为 4～6 位，每位均为 0～9 这 10 个数字中的 1 个，这样的密码共有多少个？

解 (1) 设置 4 位密码，每一位上都可以从 0～9 这 10 个数字中任取 1 个，有 10 种取法. 根据分步计数原理，4 位密码的个数是

$$10\times 10\times 10\times 10=10\,000.$$

(2) 设置 4 位密码，每一位上都可以从 0～9 这 10 个数字或从 A 到 Z 这 26 个英文字母中任取 1 个，共有 $10+26=36$ 种取法. 根据分步计数原理，4 位密码的个数是

$$36\times 36\times 36\times 36=1\,679\,616.$$

(3) 设置的密码为 4～6 位，每位均为 0～9 这 10 个数字中的 1 个，这样的密码共有 3 类. 其中 4 位密码、5 位密码、6 位密码的个数分别为 10^4，10^5，10^6. 根据分类计数原理，设置由数字 0～9 组成的 4～6 位密码的个数是

$$10^4+10^5+10^6=1\ 110\ 000.$$

答 满足条件的密码的个数分别为 10 000，1 679 616 和 1 110 000 个.

例 4 有 5 种不同的书(每种不少于 3 本)，从中选购 3 本送给 3 名同学，每人各 1 本，共有多少种不同的送法？

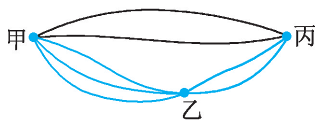
解 送给第一个同学 1 本书有 5 种不同的选购方法，送给第二、第三个同学各 1 本书，仍各有 5 种不同的选购方法. 因此，根据分步计数原理，送给 3 名同学每人各 1 本书的不同方法种数是

$$5\times5\times5=125.$$

答 共有 125 种不同的送法.

练 习

1. 已知某种新产品的编号由 1 个英文字母和 1 个数字组合而成，且英文字母在前. 其中英文字母可以是 A，B，C，D，E，F 这 6 个字母中的 1 个，数字可以是 1，2，…，9 这 9 个数字中的 1 个. 问：共有多少种不同的编号？
2. 某人有 4 枚明朝不同年代的古币和 6 枚清朝不同年代的古币.
   (1) 若从中任意取出 1 枚，则有多少种不同取法？
   (2) 若从中任意取出明、清古币各 1 枚，则有多少种不同取法？
3. 从甲地到乙地，可以乘飞机，也可以乘火车，还可以乘长途汽车. 每天飞机有 2 班，火车有 4 班，长途汽车有 10 班. 一天中，乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的方法？
4. 手表厂为了生产更多款式新颖的手表，给统一的机芯设计了 4 种形状的外壳、2 种颜色的表面及 3 种形式的数字. 问：共有几种不同的款式？
5. 现有高中一年级的学生 4 名，高中二年级的学生 5 名，高中三年级的学生 3 名.
   (1) 从中任选 1 人参加夏令营，有多少种不同的选法？
   (2) 从每个年级的学生中各选 1 人参加夏令营，有多少种不同的选法？



(第 6 题)

6. 如图，从甲地到乙地有 3 条公路，从乙地到丙地有 2 条公路，从甲地不经过乙地到丙地有 2 条水路. 问：
   (1) 从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法？
   (2) 从甲地到丙地共有多少种不同的走法？
7. 若 4 名学生报名参加数学、计算机、航模兴趣小组，每人选报 1 项，则不同的报名方式有(　　).
   A. 3^4 种　　B. 4^3 种　　C. $3\times2\times1$ 种　　D. $4\times3\times2$ 种

习题 1.1

感受·理解

1. 为了准备晚饭,小张找出了 3 种冷冻蔬菜、5 种罐装蔬菜和 4 种不同的新鲜蔬菜.如果晚饭时小张只吃 1 种蔬菜,那么共有多少种不同的选择?

2. 在数学选修课程目录中,1 个学生在选修系列 3 中发现了 4 门有趣的课程,在选修系列 4 中发现了 6 门有趣的课程.如果这个学生决定在选修系列 3 和选修系列 4 中各选 1 门有趣的课程作为新学期的选修课,那么他有多少种不同的选择?

3. 一个口袋里有 5 封信,另一个口袋里有 4 封信,每封信的内容均不相同.

(1) 若从 2 个口袋里任意取出 1 封信,则有多少种不同的取法?

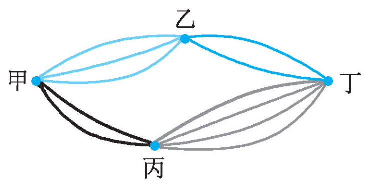
(2) 若从 2 个口袋里各自任意取出 1 封信,则有多少种不同的取法?

4. 某校“数学俱乐部”有高一学生 10 人,高二学生 8 人,高三学生 7 人.

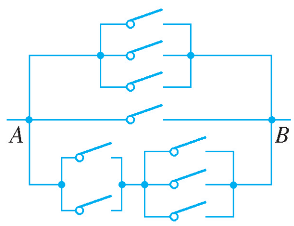
(1) 若从中选出 1 人担任总干事,则有多少种不同的选法?

(2) 若从每一个年级各选 1 名担任年级组长,则有多少种不同的选法?

5. 如图,从甲地到乙地有 3 条路,从乙地到丁地有 2 条路;从甲地到丙地有 2 条路,从丙地到丁地有 4 条路.问:从甲地到丁地共有多少种不同的走法?



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图,一条电路从 A 处到 B 处接通时,可以有多少条不同的线路(每条线路仅含 1 条通路)?

7. (1) 连续抛掷 1 颗骰子 2 次,用树形图画出掷出的点数的所有可能情况;

(2) 第一次抛壹元币,第二次抛伍角币,第三次抛壹角币,试用树形图画出 3 次抛掷后 3 枚硬币向上的一面是正面或是反面的所有可能情况.

8. 已知一个两位数中的每个数字都从 1, 2, 3, 4 中任意选取.

(1) 如果两位数中的数字不允许重复使用,那么能得到多少个不同的两位数?

(2) 如果两位数中的数字允许重复使用,那么能得到多少个不同的两位数?

9. 用 1,5,9,13 中任意一个数作分子,4,8,12,16 中任意一个数作分母,可组成多少个不同的分数?可组成多少个不同的真分数?

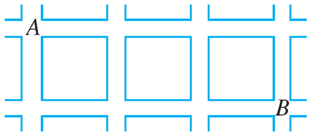
10. (1) 乘积 $(a+b+c+d)(m+n)(x+y+z)$ 展开后共有多少项?

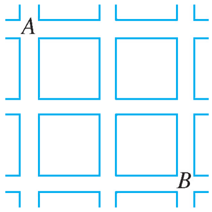
(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ 展开后共有多少项?

思考·运用

11. (1) 如图(1),从 A 处沿街道走到 B 处,使路程最短的不同走法有多少种?

(2) 如图(2),从 A 处沿街道走到 B 处,使路程最短的不同走法有多少种?


(1)


(2)

(第 11 题)

12. 以正方形的 4 个顶点中某一顶点为起点、另一个顶点为终点作向量,可以作出多少个不相等的向量?

13. (1) 如果 $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,那么在平面直角坐标系内,集合 $\{(x, y) \mid x, y \in A\}$ 中有多少个不同的点?

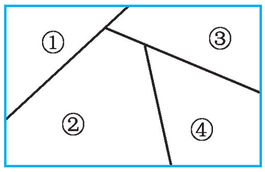
(2) 如果 $k \in \{1, 3, 5, 7\}$, $b \in \{2, 4, 6, 8\}$,那么方程 $y = kx + b$ 所表示的不同的直线共有多少条?

14. 集合$\{1, 2, 3, 4\}$有多少个子集?

探究·拓展

15. 如果使用 2 个大写的英文字母后接 4 个阿拉伯数字的方式构成汽车牌照号码(英文字母中的 I 和 O 避而不用,以免与数字中的 1 和 0 混淆),那么可能的汽车牌照号码有多少个?调查你所在地区的车牌号码(或电话号码)构成方式的变迁,并指出新的构成方式有什么优点.

16. 用 4 种不同颜色给如图所示的地图上色,要求相邻两块涂不同的颜色,共有多少种不同的涂法?



(第 16 题)

1.2 排　　列

考察下面两个问题：

(1) 高二(1)班准备从甲、乙、丙这 3 名学生中选出 2 人分别担任班长和副班长，有多少种不同的选法？

(2) 从 1，2，3 这 3 个数字中取出 2 个数字组成两位数，这样的两位数共有多少个？

● 上面两个问题有什么共同特征？可以用怎样的数学模型来刻画？

先考察问题(1)中的所有可能的选法. 因为甲、乙、丙这 3 个学生任何一个都可能当班长，也都可能当副班长，所以可将所有可能的情形用树形图表示(图 1－2－1)：

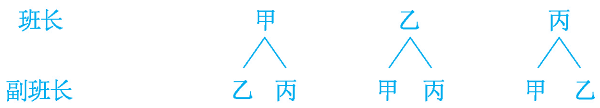


图 1－2－1

即共有 6 种不同的选法：甲、乙，甲、丙，乙、甲，乙、丙，丙、甲，丙、乙.

事实上，这 6 种选法分别是从甲、乙、丙这 3 个学生中选 2 个学生，并按一定的顺序排成一列(班长排在第 1 位，副班长排在第 2 位)而得到的.

类似地，问题(2)中的每个两位数都是从 3 个不同的数字中取 2 个数字，按一定的顺序排成了一列.

一般地，从 n 个不同的元素中取出 m $(m \leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**(arrangement).

如无特别说明，取出的 m 个元素都是不重复的.

例 1　(1) 写出从 a，b，c，d 这 4 个字母中，取出 2 个字母的所有排列；

(2) 写出从 a，b，c，d 这 4 个字母中，取出 3 个字母的所有排列.

解　(1) 把 a，b，c，d 中的任意一个字母排在第 1 个位置上，有 4 种排法；第 1 个位置上的字母排好后，第 2 个位置上的字母就有 3 种排法.

如果第 1 个位置是 a，那么第 2 个位置可以是 b，c 或 d，有 3 个排列，即 ab，ac，ad.

同理，第 1 个位置更换为 b，c 或 d，也分别各有 3 个排列，如

图 1-2-2 所示.

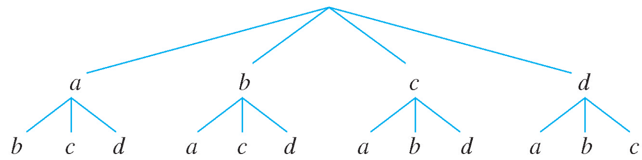


图 1-2-2

因此，共计有 12 个不同的排列，它们是

$$ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bc,\ bd,$$
$$ca,\ cb,\ cd,\ da,\ db,\ dc.$$

(2) 根据(1)，从 4 个字母中取出 2 个字母的排列有 12 个，在每一种这样的排列后面排上其余 2 个字母中的任何一个，就得到取出 3 个字母的所有排列. 可以画出树形图，如图 1-2-3 所示.

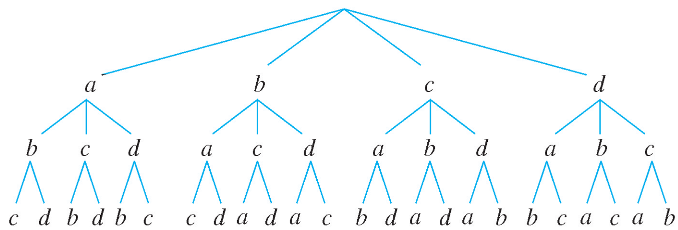


图 1-2-3

因此，共计有 24 个不同的排列，它们是

$$abc,\ abd,\ acb,\ acd,\ adb,\ adc,$$
$$bac,\ bad,\ bca,\ bcd,\ bda,\ bdc,$$
$$cab,\ cad,\ cba,\ cbd,\ cda,\ cdb,$$
$$dab,\ dac,\ dba,\ dbc,\ dca,\ dcb.$$

abc 与 acb 是相同的排列吗？

思　考

你能写出 $a,\ b,\ c,\ d$ 这 4 个字母都取出的所有排列吗？

练　习

1. 写出从 a, b, c, d, e 这 5 个字母中取出 2 个字母的所有排列.

2. 用红、黄、蓝 3 面小旗(3 面小旗都要用)竖挂在绳上表示信号，不同的顺序表示不同的信号，试写出所有的信号.

3. 从 0，1，2，3 这 4 个数字中选出 3 个不同的数字组成 1 个三位数，试写出所有满足条件的三位数.

4. a, b, c 排成一行，其中 a 不排第 1 位，b 不排第 2 位，c 不排第 3 位，写出所有满足条件的排列.

从例 1(2)的树形图中可以看出,处理排列问题可分步进行. 例如,例 1(2)将构成排列的过程分为 3 个步骤,从第 1 位到第 3 位依次选填:

第 1 位可从这 4 个字母中任取 1 个来填,有 4 种不同方法;

第 2 位从剩下的 3 个字母中任取 1 个来填,有 3 种不同方法;

第 3 位从剩下的 2 个字母中任取 1 个来填,有 2 种不同方法(如图 1 - 2 - 4).

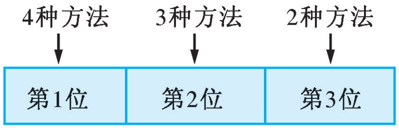


图 1 - 2 - 4

根据分步计数原理可知,从 4 个字母中任取 3 个字母的所有排列的个数为 $4\times3\times2=24$.

一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**,用符号 A_n^m 表示,如例 1(2)中的排列数可以表示为 $\mathrm{A}_4^3=24$.

思　考

"排列"与"排列数"有何区别与联系?

一般地,为了求出从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的排列数,可以把这 m 个元素所排列的位置划分为第 1 位、第 2 位、……第 m 位(如图 1 -2 - 5).

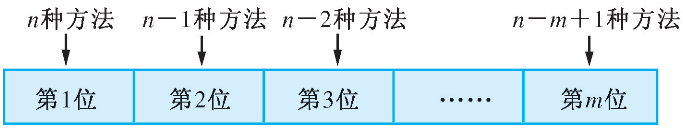


图 1 - 2 - 5

第一步　第 1 位可以从 n 个元素中任取 1 个来填,有 n 种不同方法;

第二步　第 2 位只能在余下的 $n-1$ 个元素中任取 1 个来填,有 $n-1$ 种不同方法;

第三步　第 3 位只能在余下的 $n-2$ 个元素中任取 1 个来填,有 $n-2$ 种不同方法;

……

第 m 步　第 m 位只能在余下的 $n-(m-1)$ 个元素中任取 1 个来填,有 $n-m+1$ 种不同方法.

根据分步计数原理,我们得到**排列数公式**

排列数 A_n^m 是 m 个连续正整数的积,其中最大的因数为 n.

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1),$$

其中 $n,m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\leqslant n$.

n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个**全排列**. 在排列数公式中，当 $m=n$ 时，即有

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

A_n^n 称为 n 的**阶乘**(factorial)，通常用 $n!$ 表示，即

$$A_n^n=n!.$$

例 2 计算：

(1) A_5^3； (2) A_5^5；

(3) A_{10}^4； (4) A_{35}^4.

解 (1) $A_5^3=5\times4\times3=60$.

(2) $A_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120$.

(3) $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5\ 040$.

(4) $A_{35}^4=35\times34\times33\times32=1\ 256\ 640$.

例 3 求证：$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}(n>m)$.

证 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)(n-m)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{(n-m)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

为了使上述结论在 $m=n$ 时也成立，我们规定 $0!=1$.

由此可知，排列数公式还可以写成

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

例 4 求证：$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}\ (n\geqslant m\geqslant 2)$.

证法 1 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-m)!}$$

$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!}$$

$$=nA_{n-1}^{m-1}.$$

证法 2 $nA_{n-1}^{m-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!}$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}$$

$$=A_n^m.$$

EXCEL

在 Ecxel 中计算排列数的方法：如图 1-2-6，在单元格中输入"$=$PERMUT(35，4)"，可得 $A_{35}^4=1\ 256\ 640$；在单元格中输入"$=$FACT(5)"，可得 $A_5^5=120$.

通过"插入/函数/PERMUT(或 FACT)"来操作也可以.

(1) (2)

图 1-2-6

练　习

1. 计算：

(1) A_{12}^4；　　(2) A_6^6；

(3) $A_9^4-A_9^3$；　　(4) $\frac{A_7^5}{A_7^4}$.

2. 计算下表中的阶乘数，并填入表中：

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

3. 用排列数符号 A_n^m 表示下列各式：

(1) $10\times9\times8\times7\times6=$ ________；

(2) $24\times23\times22\times\cdots\times3\times2\times1=$ ________；

(3) $k(k-1)(k-2)(k-3)=$ ________ $(k\in\mathbf{N}$ 且 $k\geqslant4)$.

4. 下列各式中，不等于 $n!$ 的是(　　).

A. A_n^n　　B. $\frac{1}{n+1}A_{n+1}^{n+1}$

C. A_{n+1}^n　　D. nA_{n-1}^{n-1}

5. 求证：

(1) $A_7^4+4A_7^3=A_8^4$；

(2) $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$.

例 5 有 5 本不同的书，从中选 3 本送给 3 名同学，每人各 1 本，共有多少种不同的送法？

解 从 5 本不同的书中选出 3 本分别送给 3 名同学的一种选法，对应于从 5 个元素中取出 3 个元素的一个排列. 因此，不同送法的种数是

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

答 共有 60 种不同的送法.

思 考

例 5 与第 1.1 节例 4 这两个问题有什么区别？

例 6 某足球联赛共有 12 支球队参加，每队都要与其余各队在主、客场分别比赛 1 次，共要进行多少场比赛？

一个排列对应一场比赛.

分析 由于任何两队间进行 1 次主场比赛与 1 次客场比赛，所以 1 场比赛相当于从 12 个不同元素中任取 2 个元素的 1 个排列.

解 因为 1 场比赛对应于从 12 个不同元素中任取 2 个元素的 1 个排列，所以总共进行的比赛场次是

$$A_{12}^2 = 12 \times 11 = 132.$$

答 共要进行 132 场比赛.

例 7 用 0～9 这 10 个数字能组成多少个没有重复数字的三位数？

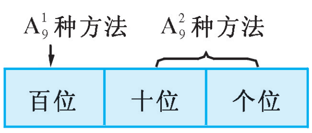


图 1－2－7

解法 1 （1）由于百位上的数字不能是 0，因此，为了得到这个三位数，可以分两步完成. 如图 1－2－7，

第一步 先排百位上的数字，可从 1～9 这 9 个数字中任选 1 个，有 A_9^1 种选法；

第二步 再排十位和个位上的数字，可以从余下的 9 个数字中任选 2 个，有 A_9^2 种选法.

根据分步计数原理，所求的三位数的个数是

$$A_9^1 A_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648.$$

解法 2 考虑到 0 是一个特殊元素，因此，符合条件的三位数可以分成 3 类（图 1－2－8）：

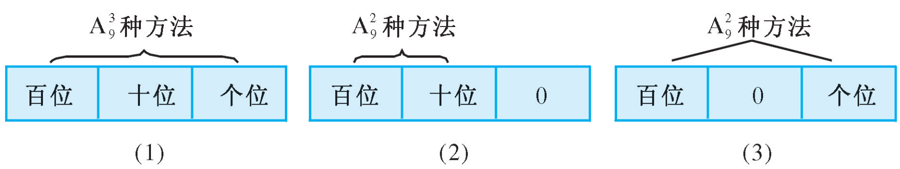


图 1－2－8

第一类　每一位数字都不是 0 的三位数有 A_9^3个；
第二类　个位数字是 0 的三位数有 A_9^2个；
第三类　十位数字是 0 的三位数有 A_9^2个.
根据分类计数原理，符合条件的三位数的个数是

$$A_9^3+A_9^2+A_9^2=648.$$

解法 3　从 0～9 这 10 个数字中任取 3 个数字的排列数为 A_{10}^3，其中 0 在首位的排列数为 A_9^2，这些排列不能构成三位数. 因此，所求的三位数的个数是

$$A_{10}^3-A_9^2=10\times9\times8-9\times8=648.$$

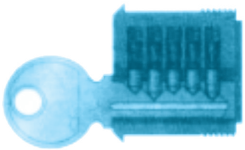
答　可以组成 648 个没有重复数字的三位数.

思　考

在上面的 648 个数中，有多少个数是奇数？

练　习

1. 从 5 名高中学生中挑选 2 人，分别担任初一年级两个班的辅导员，有多少种不同的安排方案？
2. 有 4 种不同的蔬菜，从中选出 3 种，分别种植在不同土质的 3 块土地上进行试验，有多少种不同的种植方法？
3. 如图，按 5 粒不同弹子的排列顺序制造弹子锁，能生产多少种不同的锁？
4. 从 0，1，2，3，4，5，6 这 7 个数字中取出 4 个数字，试问：
   (1) 有多少个没有重复数字的排列？
   (2) 能组成多少个没有重复数字的四位数？



（第 3 题）

习题 1.2

感受・理解

1. 写出从 a,b,c 这 3 个字母中取出 2 个字母的所有排列.
2. (1) 已知 $A_{10}^m=10\times9\times\cdots\times5$，那么 $m=$ ________；
   (2) 已知 $A_n^2=56$，那么 $n=$ ________；
   (3) 已知 $A_n^2=7A_{n-4}^2$，那么 $n=$ ________.
3. 计算：
   (1) $4A_4^2+5A_5^3$；
   (2) $A_4^1+A_4^2+A_4^3+A_4^4$；
   (3) $\dfrac{2A_{12}^7A_5^3}{A_{12}^{12}}$；
   (4) $\dfrac{A_{10}^3A_7^7}{10!}$.
4. 12 名选手参加校园歌手大奖赛，比赛设一等奖、二等奖、三等奖各 1 名，每人最多获得 1 种奖项. 问：一共有多少种不同的获奖情况？

5. (1) 一天有 6 节课,安排 6 门学科,这一天的课程表有几种排法?
(2) 上午有 4 节课,一个教师要上 3 个班级的课,每个班 1 节课,若不能连上 3 节,则这个教师的课有几种排法?

6. 有红、黄、蓝小旗各 1 面,信号兵从中选择 1 面、2 面或 3 面,将其从上到下挂在竖直旗杆上表示信号.若不同的顺序表示不同的信号,则一共可以表示多少种不同的信号?

a 类的 10 个元素叫做天干,b 类的十二个元素叫做地支.

7. 按序给出 a,b 两类元素,a 类中的元素排序为甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸,b 类中的元素排序为子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥.在 a,b 两类中各取 1 个元素组成 1 个排列,分别求满足下列条件的排列的个数.
(1) 从 a 类中选取奇数位的任意 1 个排在首位,b 类中选取奇数位的任意 1 个排在末位;
(2) 从 a 类中选取偶数位的任意 1 个排在首位,b 类中选取偶数位的任意 1 个排在末位.

思考・运用

8. 求证:$A_n^n = A_n^m \cdot A_{n-m}^{n-m}$.

9. 证明 $(n+1)!-n! = n\cdot n!$,并用它来化简 $1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+10\times10!$.

10. (1) 由数字 1,2,3,4,5 可以组成多少个没有重复数字的五位数?可以组成多少个没有重复数字的正整数?
(2) 由数字 1,2,3,4 可以组成多少个没有重复数字的比 1 300 大的正整数?

11. 学校要安排一场文艺晚会的 11 个节目的演出顺序,除第一个节目和最后一个节目已确定外,4 个音乐节目要求排在第二、五、七、十的位置,3 个舞蹈节目要求排在第三、六、九的位置,2 个曲艺节目要求排在第四、八的位置,共有多少种不同的排法?

探究・拓展

12. 规定 $A_x^m = x(x-1)\cdots(x-m+1)$,其中 $x\in\mathbf{R}$,m 为正整数,且 $A_x^0=1$,这是排列数 A_n^m($n, m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\leqslant n$)的一种推广.
(1) 求 A_{-15}^3 的值.
(2) 我们已经知道排列数的两个等式:① $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$,② $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$($m,n\in\mathbf{N}^*$).这两个性质能否推广到 A_x^m($x\in\mathbf{R}$,$m\in\mathbf{N}^*$)的情形?若能推广,写出推广后的等式并给予证明;若不能,试说明理由.
(3) 确定函数 $f(x)=A_x^3$ 的单调区间.

1.3 组　　合

考察下面两个问题：

(1) 高二(1)班从甲、乙、丙这 3 名学生中选 2 名学生代表，有多少种不同的选法？

(2) 从 1，2，3 这 3 个数字中取出 2 个数字，能构成多少个不同的集合？

● 这两个问题与上一节中相应的排列问题有何区别？有何联系？

与排列问题不同的是，这两个问题都与所选的元素的顺序无关. 如问题(1)中甲、乙两同学当选代表就与他们的顺序无关，只要选出的元素相同就是同样的结果.

上节中相应的排列问题还可以这样解决：第一步，先从 3 个元素中选出 2 个元素构成一组；第二步，再将这组中的 2 个元素按一定的顺序排成一列. 上面的问题其实就是第一个步骤的结果. 这就是本节将要研究的组合问题.

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**(combination).

怎样才能无重复无遗漏地把所有的组合写出来呢？

例 1　写出从 a，b，c 这 3 个元素中，每次取出 2 个元素的所有组合.

解　先画一个示意图(图 1－3－1)：

图 1－3－1

由此即可写出所有的组合：

$$ab,\ ac,\ bc.$$

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示.

如无特别说明，取出若干个元素都是指无重复地选取.

由例 1 我们得到 $C_3^2=3$. 如果不写出所有的组合，怎样才能知道组合的种数呢？

我们已经知道，组合是选择的结果，排列是选择后再排序的结果.

一般地，求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m，可分为两步：

第一步　先求出从这 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m；

第二步　求每一个组合中 m 个元素的全排列数 A_m^m.

根据分步计数原理，得到 $A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$，因此，我们得到**组合数公式**

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

这里 $n, m \in \mathbf{N}^*$，并且 $m \leqslant n$. 因为

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

所以，上面的组合数公式还可以写成

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

我们以从 4 个不同元素 a, b, c, d 中取出 3 个元素为例，从表 1－3－1中可以看出组合与排列的关系.

表 1－3－1

所有组合	所有排列					
$a\ b\ c$	$a\,b\,c$	$a\,c\,b$	$b\,a\,c$	$b\,c\,a$	$c\,a\,b$	$c\,b\,a$
$a\ b\ d$	$a\,b\,d$	$a\,d\,b$	$b\,a\,d$	$b\,d\,a$	$d\,a\,b$	$d\,b\,a$
$a\ c\ d$	$a\,c\,d$	$a\,d\,c$	$c\,a\,d$	$c\,d\,a$	$d\,a\,c$	$d\,c\,a$
$b\ c\ d$	$b\,c\,d$	$b\,d\,c$	$c\,b\,d$	$c\,d\,b$	$d\,b\,c$	$d\,c\,b$

例 2　计算：

（1）C_9^2；　　（2）C_8^5；　　（3）C_{35}^7.

解　（1）$C_9^2 = \dfrac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$.

（2）$C_8^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$.

（3）$C_{35}^7 = \dfrac{35 \times 34 \times \cdots \times 29}{7 \times 6 \times \cdots \times 1} = 6\ 724\ 520$.

EXCEL

或通过“插入/函数/COMBIN”来操作.

在 Excel 中计算组合数的方法如下：如图 1－3－2 所示，在单元格中输入“$=$COMBIN(35，7)”，可得 $C_{35}^{7}=6\ 724\ 520$.

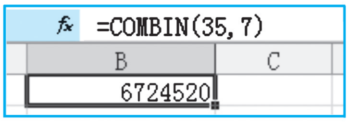


图 1－3－2

练 习

1. 下列问题是排列问题，还是组合问题？

(1) 从 9 名学生中选出 4 名学生参加一个联欢会，共有多少种不同的选法？

(2) 北京、上海、天津、广东这 4 支足球队举行单循环赛，共有多少场比赛？

(3) 从 2，3，5，7，11 这 5 个质数中，每次取 2 个数分别作为分子和分母构成一个分数，共有多少个不同分数？

(4) 空间有 8 个点，其中任何 4 点都不共面，从这 8 个点中任意选取 4 点作为顶点构成一个四面体，共有多少个四面体？

2. 甲、乙、丙、丁 4 支足球队举行单循环赛，

(1) 列出所有各场比赛的双方；

(2) 列出所有冠亚军的可能情况.

3. 计算：

(1) C_{15}^{3}；　　(2) C_{200}^{3}；

(3) C_{200}^{197}；　　(4) $C_{6}^{3}\div C_{8}^{4}$.

4. 6 个朋友聚会，每两人握手 1 次，一共握手多少次？

5. (1) 平面内有 10 个点，以其中 2 个点为端点的线段共有多少条？

(2) 平面内有 10 个点，以其中 2 个点为端点的有向线段共有多少条？

6. 化简：$C_{n+1}^{n}\cdot C_{n}^{n-2}$.

7. 填空：

(1) 从 5 人中选派 3 人去参加某个会议，不同的方法共有________种；

(2) 从5 件不同的礼物中选出 3 件分别送给 3 位同学，不同的方法共有______种；

(3) 设集合 A 有 m 个元素，集合 B 有 n 个元素，从这两个集合中各取出 1 个元素，不同的方法共有________种.

8. 在桥牌比赛中，发给 4 名参赛者每人 13 张牌，一名参赛者可能得到多少种不同的牌？（用排列数记号或组合数记号表示）

例 3 在歌手大奖赛的文化素质测试中，选手需从 5 个试题中任意选答 3 题，问：

(1) 有几种不同的选题方法？

(2) 若有 1 道题是必答题，有几种不同的选题方法？

分析 由题意可知，所选的试题与顺序无关，所以这是一个组合问题.

解 (1) 所求不同的选题方法数，就是从 5 个不同元素里每次取出 3 个元素的组合数，

$$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3!}=10(\text{种}).$$

(2) 因为已有 1 道题必选，所以只要在另外 4 道题中选 2 道，不同的选题方法有

$$C_4^2=\frac{4\times3}{2!}=6(\text{种}).$$

对于(1)，还可以换一个角度考虑：从 5 道试题中剔去 2 题，将剩下的 3 题取出，这样共有 C_5^2 种不同的选题方法. 由此可见，$C_5^3=C_5^2$.

注意到(2)与(1)的关系：C_5^3 种方法中包括含必答题与不含必答题两类，方法数分别为 C_4^2 和 C_4^3. 由此可见，$C_5^3=C_4^2+C_4^3$.

一般地，我们可以得到组合数的两个重要性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m},$$
$$C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m.$$

为了使第一个性质在 $m=n$ 时也能成立，我们规定 $C_n^0=1$.

例 4 在 100 件产品中，有 98 件合格品，2 件不合格品. 从这 100 件产品中任意抽出 3 件，问：

(1) 一共有多少种不同的抽法？

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件是不合格品的抽法有多少种？

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品的抽法有多少种？

解 (1) 所求的不同抽法的种数，就是从 100 件产品中取出 3 件的组合数，

$$C_{100}^3=\frac{100\times99\times98}{3\times2\times1}=161\ 700.$$

(2) 从 2 件不合格品中抽出 1 件不合格品的抽法有 C_2^1 种，从 98 件合格品中抽出 2 件合格品的抽法有 C_{98}^2 种. 因此，抽出的 3 件中恰好有 1 件是不合格品的抽法种数是

$$C_2^1C_{98}^2=2\times4\ 753=9\ 506.$$

(3) 方法 1　抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品,包括两种情况:恰有 1 件不合格品,恰有 2 件不合格品.

由(2)知恰有 1 件不合格品的抽法有 $C_2^1C_{98}^2$ 种. 同理,恰有 2 件是不合格品的抽法有 $C_2^2C_{98}^1$ 种.

根据分类计数原理,抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品的抽法的种数是

$$C_2^1C_{98}^2+C_2^2C_{98}^1=9\ 506+98=9\ 604.$$

方法 2　抽出的 3 件中至少有 1 件是不合格品的抽法种数,也就是从 100 件中抽出 3 件的抽法种数减去 3 件中全是合格品的抽法种数,即

$$C_{100}^3-C_{98}^3=161\ 700-152\ 096=9\ 604.$$

答　不同的抽法分别有 161 700, 9 506 和 9 604 种.

思　考

在例 4 中,若"抽出的 3 件中至多有 1 件是不合格品",应如何求解?

例 5　房间里有 5 盏电灯,分别由 5 个开关控制,至少开 1 盏灯用以照明,有多少种不同的方法?

解法 1　因为开灯照明,只与开灯的多少有关,而与开灯的先后顺序无关,所以这是一个组合问题.

开 1 盏灯有 C_5^1 种方法,开 2 盏灯有 C_5^2 种方法,……5 盏灯全开有 C_5^5 种方法. 根据分类计数原理,不同的开灯方法有

$$C_5^1+C_5^2+\cdots+C_5^5=31(\text{种}).$$

解法 2　将开灯这一事件视为 5 个步骤依次连续完成,对任何 1 盏电灯都有"开"或"不开"两种处理方法. 根据分步计数原理,5 盏电灯就有$2\times2\times2\times2\times2=2^5$种处理方法,其中 1 盏都不开的情况应除外. 所以不同的开灯方法有

$$2\times2\times2\times2\times2-1=2^5-1=31(\text{种}).$$

答　至少开 1 盏灯用以照明,有 31 种不同的方法.

思　考

比较例 5 中的两种解法,你能推测出什么结论?

练 习

1. 计算：

(1) C_{50}^{48}；

(2) $C_{99}^{2}+C_{99}^{3}$；

(3) $C_{4}^{1}+C_{4}^{2}+C_{5}^{3}$.

2. 若 $C_n^6=C_n^5$，则 $n=$ ________，$C_n^{10}=$ ________.

3. 求证：$rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$.

4. 已知 A,B,C,D 4 个点，其中任意 3 个点不在同一条直线上，从中取出两点作直线，共能作出多少条直线？写出所有的直线.

5. 学校开设了 6 门选修课，问：

(1) 某学生从中选 3 门，共有多少种不同的选法？

(2) 某学生从中至少选 2 门，共有多少种不同的选法？

(3) 某学生从中至多选 4 门，共有多少种不同的选法？

6. 一个口袋内装有 7 个不同的白球和 1 个黑球.

(1) 从口袋内取出 3 个球，共有多少种不同的取法？

(2) 从口袋内取出 3 个球，其中必有 1 个黑球，有多少种取法？

(3) 从口袋内取出 3 个球，其中没有黑球，有多少种取法？

习题 1.3

感受・理解

1. 若 $C_{28}^{x}=C_{28}^{3x-8}$，则 x 的值为________.

2. 用组合数公式证明：

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；

(2) $C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m$.

3. 圆上有 10 个点，问：

(1) 以这些点为端点，一共可画多少条弦？

(2) 以这些点为顶点，一共可画多少个三角形？

4. (1) 空间有 8 个点，其中任何 4 点不共面，过每 3 个点作 1 个平面，一共可以作多少个平面？

(2) 空间有 10 个点，其中任何 4 点不共面，以每 4 个点为顶点作 1 个四面体，一共可以作多少个四面体？

5. 某人打算选购 8 种股票和 4 种债券，经纪人向他推荐了 12 种股票和 7 种债券. 问：此人有多少种不同的选法？

6. 在一次考试中，要求在第 1 题的 4 个小题中选做 3 个小题，在第 2 题的 3 个小题中选做 2 个小题，在第 3 题的 2 个小题中选做 1 个小题. 问：有多少种不同的选法？

7. 学校要从歌咏队 10 名队员中选派 6 人参加一场演出，其中二重唱的 2 人要么都去，要么都不去. 问：共有多少种选派方法？

8. 已知一个集合有 6 个元素，那么该集合的非空真子集共有多少个？

9. 在 200 件产品中，有 3 件不合格品，从中任取 5 件，问：

(1)“恰有 2 件不合格品”的取法有多少种？

(2)“没有不合格品”的取法有多少种？

(3)“至少有 1 件不合格品”的取法有多少种？

思考·运用

10. 利用组合数的性质进行计算：

(1) $C_m^5 - C_{m+1}^5 + C_m^4 =$ ________；

(2) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2 =$ ________.

11. 从 5 名男生和 4 名女生中选出 4 人参加辩论比赛.

(1) 如果 4 人中男生和女生各 2 人，那么有多少种不同选法？

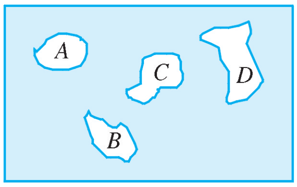
(2) 如果男生中的甲与女生中的乙必须在内，那么有多少种不同选法？

(3) 如果男生中的甲与女生中的乙至少要有 1 人在内，那么有多少种不同选法？

(4) 如果 4 人中既有男生又有女生，那么有多少种不同选法？

12. 一份试卷有 10 个题目，分为 A，B 两组，每组 5 题，要求考生选择 6 题，且每组至多选 4 题. 问：考生有多少种不同的选答方法？

13. 如图，湖面上有 4 个相邻的小岛 A，B，C，D，现要建 3 座桥梁，将这 4 个小岛连接起来，共有多少种不同的方案？



(第 13 题)

探究·拓展

14. 甲、乙、丙 3 个人值周，从周一至周六，每人值 2 天，但甲不值周一，乙不值周六. 问：可以排出多少种不同的值周表？

15. (阅读题) DNA 是形成所有生物体中染色体的一种双股螺旋线状分子，由称为碱基的化学成分组成. 它看上去就像是两条长长的平行螺旋状链，两条链上的碱基之间由氢键相结合. 在 DNA 中只有 4 种类型的碱基，分别用 A，C，G 和 T 表示，DNA 中的碱基能够以任意顺序出现. 两条链之间能形成氢键的碱基或者是A－T，或者是 C－G，不会出现其他的联系. 因此，如果我们知道了两条链中一条链上碱基的顺序，那么我们也就知道了另一条链上碱基的顺序. 由氢键联系着的两个碱基称为碱基对.

一个典型的细菌基因是一段有着 1 500 个碱基对的 DNA，试计算可能的细菌基因数目.

1.4 计数应用题

运用排列组合的知识，结合两个基本计数原理，能够解决很多计数问题.

例 1 高二(1)班有 30 名男生，20 名女生. 从 50 名学生中选 3 名男生、2 名女生分别担任班长、副班长、学习委员、文娱委员、体育委员，共有多少种不同的选法？

解 完成这件事情可分 3 步进行：

第一步 从 30 名男生中选 3 名男生，有 C_{30}^{3} 种方法；

第二步 从 20 名女生中选 2 名女生，有 C_{20}^{2} 种方法；

第三步 将选出的 5 名学生进行分工，即全排列，有 A_5^5 种方法.

根据分步计数原理，共有

$$C_{30}^{3}C_{20}^{2}A_5^5 = 92\ 568\ 000$$

种选法.

答 共有 92 568 000 种不同的选法.

思 考

如果分两步解决上面问题，即先从 30 名男生中选 3 名男生担任 3 种不同职务，再从 20 名女生中选 2 名女生担任 2 种不同职务，那么结果为 $A_{30}^{3}A_{20}^{2}$. 这样做对吗？为什么？

例 2 2 名女生、4 名男生排成一排，问：

(1) 2 名女生相邻的不同排法共有多少种？

(2) 2 名女生不相邻的不同排法共有多少种？

(3) 女生甲必须排在女生乙的左边(不一定相邻)的不同排法共有多少种？

解 (1) 因为 2 名女生必须相邻，所以可以将 2 名女生看成 1 个元素，与 4 名男生共 5 个元素排成一排，不同的排法有 A_5^5 种. 又因为 2 名相邻的女生有 A_2^2 种排法，因此不同的排法种数是

$$A_5^5A_2^2 = 120 \times 2 = 240.$$

(2) **方法 1** 2 名女生不相邻的排列可以分成 2 步完成：

第一步 将 4 名男生排成一排，有 A_4^4 种排法；

第二步 排 2 名女生. 由于 2 名女生不相邻，于是可以在每 2 名男生之间及两端共 5 个位置中选出 2 个排 2 名女生，有 A_5^2 种排法.

根据分步计数原理，不同的排法种数是

$$A_4^4A_5^2=24\times20=480.$$

方法 2 因为 2 名女生的排法只有相邻与不相邻两种情况，所以由(1)的结果可知，2 名女生不相邻的排法种数是

$$A_6^6-A_5^5A_2^2=720-240=480.$$

(3) **方法 1** 女生甲必须排在女生乙左边的排列可以分成 2 步完成：

第一步 排 2 名女生．女生的顺序已经确定，这 2 名女生的排法种数为从 6 个位置中选出 2 个位置的组合数，即为 C_6^2；

第二步 排 4 名男生．将 4 名男生在剩下的 4 个位置上进行排列的方法数有 A_4^4种．

根据分步计数原理，不同的排法种数是

$$C_6^2A_4^4=360.$$

方法 2 将 6 名学生全排列，共有 A_6^6种不同的排法．其中，在男生位置确定之后，女生的排法数有 A_2^2种．因为女生的顺序已经确定，所以这 A_2^2种排法中，只有 1 种符合要求，故满足条件的排法种数是

$$\frac{A_6^6}{A_2^2}=360.$$

答 分别有 240，480 和 360 种不同的排法．

例 3 从 0，1，2，…，9 这 10 个数字中选出 5 个不同的数字组成五位数，其中大于 13 000 的共有多少个？

解法 1 满足条件的五位数有两类：

第一类 万位数大于 1，这样的五位数共有 $8\times A_9^4$个；

第二类 万位数为 1，千位数不小于 3，这样的五位数共有 $7\times A_8^3$个．

根据分类计数原理，大于 13 000 的五位数共有

$$8A_9^4+7A_8^3=26\ 544\ (\text{个}).$$

解法 2 由 0，1，2，…，9 这 10 个数字中不同的 5 个数字组成的五位数共有 $9A_9^4$个，其中不大于 13 000 的五位数的万位数都是 1，且千位数小于 3，这样的数共有 $2A_8^3$个，所以满足条件的五位数共有

$$9A_9^4-2A_8^3=26\ 544\ (\text{个}).$$

答 大于 13 000 的五位数共有 26 544 个．

思 考

在例 3 中，大于 13 500 的数共有多少个？

练　习

1. 文娱晚会中，学生的节目有 9 个，教师的节目有 2 个，如果教师的节目不排在最后 1 个，那么有多少种排法？

2. 从 1，3，5，7，9 中任取 3 个数字，从 2，4，6，8 中任取 2 个数字，一共可以组成多少个没有重复数字的五位数？

3. 有同一排的电影票 6 张，3 个教师和 3 个学生按下述要求入座，分别有多少种坐法？

(1) 师生相间；

(2) 3 个学生要相邻坐在一起.

4. 将 4 位司机、4 位售票员分配到 4 辆不同班次的公共汽车上，每一辆汽车分别有 1 位司机和 1 位售票员，共有多少种不同的分配方案？

5. 电视台有 8 个节目准备分 2 天播出，每天播出 4 个，其中某电视剧和某专题报道必须在第一天播出，某谈话节目必须在第二天播出，共有多少种不同的播出方案？

习题 1.4

感受 · 理解

1. 壹圆、贰圆、伍圆、拾圆面值的人民币各 1 张，一共可以组成多少种币值?

2. 抛掷 4 枚编了号的硬币，至少有 2 枚正面向上的情况有多少种?

3. 凸五边形有多少条对角线? 凸 n 边形呢?

4. 某旅行团要从 8 个景点中选 2 个景点作为当天的旅游地，满足下列条件的选法各有多少种?

(1) 甲、乙 2 个景点至少选 1 个;

(2) 甲、乙 2 个景点至多选 1 个;

(3) 甲、乙 2 个景点必须选 1 个且只能选 1 个.

5. 7 个人站成一排，问:

(1) 甲必须站在正中间，有多少种排法?

(2) 甲、乙两人必须站在两端，有多少种排法?

(3) 甲必须站在乙的右边(不一定相邻)，有多少种排法?

6. 7个小孩站成 2 排，3 个女孩站在前排，4 个男孩站在后排，有多少种站法?

7. 7 个人站成 2 排，前排站 3 人，后排站 4 人，有多少种站法?

思考 · 运用

8. 某医院有内科医生 12 名、外科医生 8 名，现要派 5 名医生参加赈灾医疗队，问:

(1) 某内科医生必须参加，某外科医生因故不能参加，有几种选法?

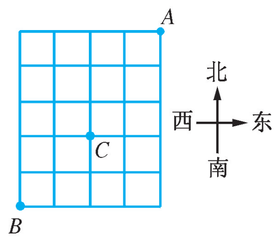
(2) 内科医生和外科医生中都要有人参加，有几种选法?

9. (1) 4 个不同的小球放入编号为 1，2，3，4 的 4 个盒子中，一共有多少种不同的放法?

(2) 4 个不同的小球放入编号为 1，2，3，4 的 4 个盒子中，恰有 1 个空盒的放法共有多少种?

探究 · 拓展

10. 如图所示，某地有南北街道 5 条、东西街道 6 条，一邮递员从该地东北角的邮局 A 出发，送信到西南角的 B 地，且途经 C 地，要求所走路程最短，共有多少种不同的走法?



(第 10 题)

1.5 二项式定理

由多项式的乘法法则可以知道：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

● 你能写出 $(a+b)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式吗？

1.5.1 二项式定理

为了确定 $(a+b)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式，我们必须明确展开式中的项是如何产生的. 为此，我们先看 $n=2$，3 的情形：

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ba+b^2\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

上面展开式中的每一项都是从两个括号中各取 1 个字母的乘积.

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)(a+b)\\&=(a^2+ab+ba+b^2)(a+b)\\&=a^3+a^2b+a^2b+ab^2+ba^2+b^2a+b^2a+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

由上述过程可以看出，$(a+b)^3$ 展开式中的每一项都是从 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 的每个括号中各取 1 个字母的乘积.

一般地，由

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{个}(a+b)}$$

可知，$(a+b)^n$ 展开式是从每个括号中各取 1 个字母的一切可能乘积的和. 它的每一项都具有 $a^{n-r}b^r(r=0,1,2,\cdots,n)$ 的形式，其系数就是在 $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ 的 n 个括号中选 r 个取 b 的方法种数.

具体地，在这 n 个括号中，

每个都不取 b 的情况有 1 种，即 C_n^0 种，所以 a^n 的系数是 C_n^0；
恰有 1 个取 b 的情况有 C_n^1 种，所以 $a^{n-1}b$ 的系数是 C_n^1；
恰有 2 个取 b 的情况有 C_n^2 种，所以 $a^{n-2}b^2$ 的系数是 C_n^2；
……
恰有 r 个取 b 的情况有 C_n^r 种，所以 $a^{n-r}b^r$ 的系数是 C_n^r；
……
都取 b 的情况有 C_n^n 种，所以 b^n 的系数是 C_n^n.
因此，

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}^*).$$

这个公式叫做**二项式定理**(binomial theorem)，右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的**二项展开式**，它一共有 $n+1$ 项，其中 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 叫做二项展开式的**第 $r+1$ 项**(也称**通项**)，用 T_{r+1} 表示，即

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r.$$

$C_n^r (r=0,1,\cdots,n)$ 叫做第 $r+1$ 项的**二项式系数**.

例 1 利用二项式定理展开下列各式：

(1) $(a-b)^6$；

(2) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$.

解 (1)
$$\begin{aligned}(a-b)^6 &= [a+(-b)]^6 \\ &= C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5(-b) + C_6^2 a^4(-b)^2 + \\ &\quad C_6^3 a^3(-b)^3 + C_6^4 a^2(-b)^4 + C_6^5 a(-b)^5 + C_6^6(-b)^6 \\ &= a^6 - 6a^5 b + 15a^4 b^2 - 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 - 6ab^5 + b^6.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 &= 1 + C_4^1\left(\frac{1}{x}\right) + C_4^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4\left(\frac{1}{x}\right)^4 \\ &= 1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

例 2 在 $(1+2x)^7$ 的展开式中，求：

(1) 第 4 项的二项式系数；

(2) 含 x^3 的项的系数.

解 (1) 由二项式定理可知，在 $(1+2x)^7$ 展开式中，第 4 项的二项式系数为

$$C_7^3 = 35.$$

（2）由二项式定理可知，在$(1+2x)^7$展开式中，第$r+1$项为

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= C_7^r \cdot 1^{7-r} \cdot (2x)^r \\ &= C_7^r \cdot 2^r \cdot x^r. \end{aligned}$$

当$r=3$时，$(1+2x)^7$展开式中含x^3的项的系数为

$$C_7^3 \cdot 2^3 = 280.$$

例 3 求$\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$的二项展开式中的常数项.

解 设二项展开式中的常数项为第$r+1$项，即

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r = (-1)^r C_6^r \cdot \frac{1}{2^r} \cdot x^{6-2r}.$$

根据题意，得

$$6-2r=0,$$

$$r=3.$$

所以二项展开式中的常数项为

$$T_4 = -\frac{C_6^3}{8} = -\frac{5}{2}.$$

练　习

1. 利用二项式定理展开下列各式：

（1）$(1+x)^5$；

（2）$(2-x)^4$.

2. $(x-2y)^7$的展开式中第3项的二项式系数是（　　）.

A. C_7^2　　B. C_7^3　　C. $4C_7^2$　　D. $16C_7^5$

3. $(x-1)^{10}$的展开式中含x^5的项的系数是（　　）.

A. C_{10}^6　　B. $-C_{10}^6$　　C. C_{10}^5　　D. $-C_{10}^5$

4. 写出$(x^3+2x)^9$的展开式的第k项$(1 \leqslant k \leqslant 10, k \in \mathbf{N}^*)$.

5. 求$(1-2x)^6$的展开式中含x^2的项.

6. 求$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$的展开式中的常数项.

1.5.2 二项式系数的性质及应用

当 n 依次取 0,1,2,3,…时,观察$(a+b)^n$ 展开式的二项式系数:

C_0^0	$(a+b)^0$ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ 1
$C_1^0 \quad C_1^1$	$(a+b)^1$ ⋯ ⋯ ⋯ 1 1
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$	$(a+b)^2$ ⋯ ⋯ 1 2 1
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$	$(a+b)^3$ ⋯ 1 3 3 1
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$	$(a+b)^4$ ⋯ 1 4 6 4 1
$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$	$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1
$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$	$(a+b)^6$ 1 6 15 20 15 6 1
……	……

图 1-5-1

● 二项式系数有什么特点?

图 1-5-1 左侧是根据二项式定理得到的,右侧是算出组合数的值后所得的结果.由此我们发现:

(1) 每一行中的二项式系数是“对称”的,即第 1 项与最后一项的二项式系数相等,第 2 项与倒数第 2 项的二项式系数相等,……

(2) 图中每行两端都是 1,而且除 1 以外的每一个数都等于它肩上两个数的和(图 1-5-2).

1 ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ 2^0
1 1 ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ 2^1
1 2 1 ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ 2^2
1 3 3 1 ⋯ ⋯ ⋯ 2^3
1 4 6 4 1 ⋯ ⋯ ⋯ 2^4
1 5 10 10 5 1 ⋯ ⋯ 2^5
1 6 15 20 15 6 1 ⋯ 2^6

图 1-5-2

(3) 图中每行的二项式系数从两端向中间逐渐增大.

(4) 第 1 行为 $1=2^0$,第 2 行的两数之和为 2,第 3 行的三数之和为 2^2,……第 7 行的各数之和为 2^6(图 1-5-2).

一般地,$(a+b)^n$ 展开式的二项式系数 C_n^0,C_n^1,…,C_n^n 有如下性质:

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$;

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$;

(3) 当 $r<\frac{n-1}{2}$ 时,$C_n^r<C_n^{r+1}$;当 $r>\frac{n-1}{2}$ 时,$C_n^{r+1}<C_n^r$;

当 n 为偶数时,二项式系数中,以 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大;当 n 为奇数时,二项式系数中以 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$(两者相等)最大.

(4) $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

(1)、(2)证明从略.下面给出(3)、(4)的证明.

证 (3) 当 $r<\frac{n-1}{2}$ 时，要证明 $C_n^r<C_n^{r+1}$，只要证

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}<\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!},$$

即要证

$$\frac{1}{n-r}<\frac{1}{r+1},$$

即要证

$$r<\frac{n-1}{2},$$

而 $r<\frac{n-1}{2}$ 是已知条件，故结论得证.

同理，当 $r>\frac{n-1}{2}$ 时，$C_n^{r+1}<C_n^r$ 也成立.

(4) 在二项式定理中，令 $a=b=1$，就有

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n,$$

这表明 $(a+b)^n$ 的展开式的各项的二项式系数的和等于 2^n.

例 1 证明：在 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

证 在二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$$

中，令 $a=1$，$b=-1$，得

$$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n,$$

即

$$0=(C_n^0+C_n^2+\cdots)-(C_n^1+C_n^3+\cdots),$$

所以

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots,$$

即在 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

例 2 用二项式定理证明：$99^{10}-1$ 能被 1 000 整除.

证 $99^{10}-1$

$=(100-1)^{10}-1$

$=C_{10}^{0}100^{10}-C_{10}^{1}100^{9}+\cdots+C_{10}^{8}100^{2}-C_{10}^{9}100+C_{10}^{10}-1$

$=C_{10}^{0}100^{10}-C_{10}^{1}100^{9}+\cdots+C_{10}^{8}100^{2}-1\ 000.$

因为上式的每一项都能被 1 000 整除，所以 $99^{10}-1$ 能被 1 000 整除.

练　习

1. 填空：

(1) $(x+y)^{10}$ 的展开式中二项式系数的最大值是________；

(2) $C_{64}^{1}+C_{64}^{3}+\cdots+C_{64}^{63}=$ ________；

(3) 3^{8} 被 5 除所得的余数是________.

2. $C_{12}^{5}+C_{12}^{6}$ 等于(　　).

A. C_{13}^{5}　　B. C_{13}^{6}　　C. C_{13}^{11}　　D. C_{12}^{7}

3. 求证：$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m-1}+C_{n-1}^{m}+C_{n-1}^{m-1}$.

4. 证明：$1+2C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+\cdots+2^{n-1}C_{n}^{n-1}+2^{n}C_{n}^{n}=3^{n}$.

5. 证明：当 n 为偶数时，$C_{n}^{0}+C_{n}^{2}+C_{n}^{4}+\cdots+C_{n}^{n}=2^{n-1}$.

习题 1.5

感受・理解

1. 利用二项式定理展开下列各式：

(1) $(a+2b)^5$；

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^7$.

2. 化简 $C_m^7-C_{m+1}^8+C_m^8$.

3. 化简：

(1) $(1+x)^6-(1-x)^6$；

(2) $(1+\sqrt{x})^5+(1-\sqrt{x})^5$；

(3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$.

4. 已知 $0<p<1$.

(1) 写出 $[p+(1-p)]^n$ 的展开式；

(2) 化简 $C_3^0p^3+C_3^1p^2(1-p)+C_3^2p(1-p)^2+C_3^3(1-p)^3$.

5. (1) 求 $(1-2x)^{15}$ 展开式中的前 4 项；

(2) 求 $(2a^3-3b^2)^{10}$ 展开式中的第 8 项；

(3) 求 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 展开式中的第 7 项.

6. (1) 求 $\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{10}$ 展开式中含 $\dfrac{1}{x^5}$ 的项；

(2) 求 $\left(2x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$ 展开式中的常数项.

7. 若 $\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式中的第 4 项是常数项，求 n 的值.

8. 求证：$2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^n=1$.

思考・运用

9. 用二项式定理证明：$(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除$(n\in \mathbf{N}^*)$.

10. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，求这两项的二项式系数.

11. 在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中，前 3 项的系数成等差数列，求展开式中 x 的一次项.

12. 求 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ $(x\neq -1$，且 $x\neq 0)$ 展开式中 x^3 的系数.

13. 设 $(2x+\sqrt{3})^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，求下列各式的值：

(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$；

(2) $a_1+a_2+a_3+a_4$；

(3) $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$.

探究·拓展

14. 从函数角度看，C_n^r 可看成是以 r 为自变量的函数 $f(r)$，其定义域是 $\{r \mid r \in \mathbf{N}, r \leqslant n\}$.

(1) 画出函数 $\varphi(r) = C_7^r\ (r = 0, 1, 2, \cdots, 7)$ 的图象；

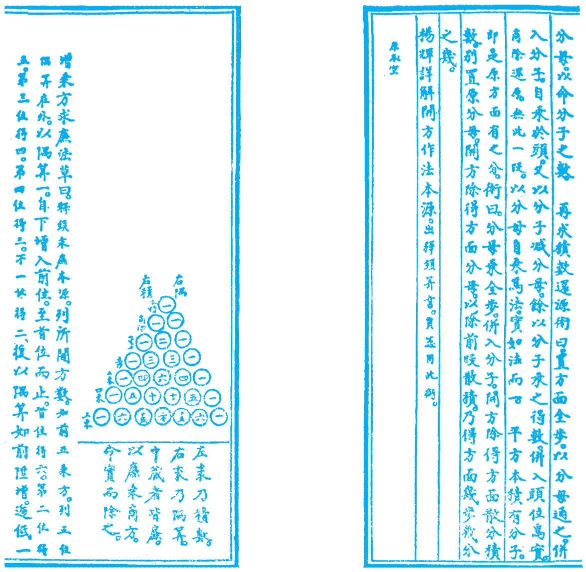
(2) 证明：$f(r) = \dfrac{n - r + 1}{r} f(r - 1)$；

(3) 试利用(2)的结论来证明：当 n 为偶数时，$(a + b)^n$ 的展开式最中间一项的二项式系数最大；当 n 为奇数时，$(a + b)^n$ 的展开式最中间两项的二项式系数相等且最大.

阅 读

二项式定理史略

宋代数学家贾宪(约 11 世纪上半叶)有一部著作《黄帝九章算法细草》,其中有二项系数表即“开方作法本源”图. 贾宪的书已失传,杨辉《详解九章算法》(1261)中征引了贾宪的材料,说明“出释锁算书,贾宪用此术”. 现在传本的杨辉算书中没有这个“开方作法本源”图,只在明朝《永乐大典》(1407)抄录的杨辉《详解九章算法》中,还保存着这份宝贵遗产. 可惜这部分的《永乐大典》被掠至英国,现藏在剑桥大学图书馆内. 如图1－5－3所示的是《永乐大典》卷一六三四四第五、六页.



(1) (2)

图 1－5－3

如图所示,“开方作法本源”图中每一横行即是二项式某次幂展开式中的各项系数,即

$$(x+a)^0=1,$$
$$(x+a)^1=x+a,$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$$
$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4,$$
$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5,$$
$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

二项展开式的系数对于开方是极为重要的. 从《九章算术》的开平方术、开立方术和刘徽注中可知,古代数学家已经知道

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

两式的代数意义. 贾宪把这些公式扩充到$(x+a)^6$的展开式,并指出各项系数所遵循的规律.

“左袤乃积数，右袤乃隅算”，“袤”字本是“衺”字，衺是古“邪”字，通“斜”. 就是说，左边斜线上的数字（一、一、一、……）是各次开方积（常数 a^n）的系数，右边斜线上的数字（一、一、一、……）是各项开方的“隅算”（x^n）的系数. 第三句“中藏者皆廉”是说图中各横行中的“二”，“三、三”，“四、六、四”等分别是二次方、三次方、四次方时除“积”、“隅”以外各项的系数（“廉”）. “以廉乘商方”是说用各次廉乘商（一位得数）的相应次方. “命实而除之”是说从被开方数“实”中减去最后所得的廉与商的乘积.

元朝数学家朱世杰《四元玉鉴》(1303)卷首的“古法七乘方图”也给出二项式系数，如图1－5－4.

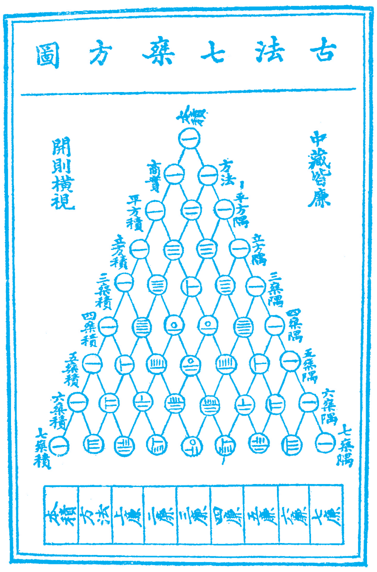


图 1－5－4

法国数学家帕斯卡(Blaise Pascal，1623～1662)在他的著作《算术三角形专论》中，给出了图 1－5－5. 所以，欧洲把这种二项式系数表称为帕斯卡三角形.

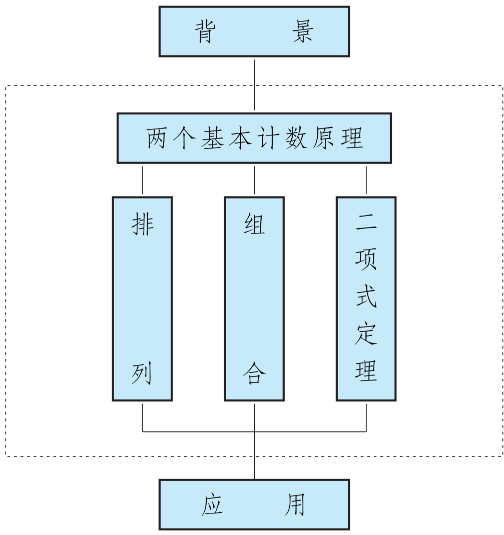
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

图 1－5－5

本章回顾

本 章 概 览

本章用排列和组合两个模型刻画了两类计数问题，以分类计数原理和分步计数原理为工具，研究了解决排列、组合问题的方法，运用排列、组合知识解决了相关的应用问题．根据多项式乘法的运算法则得到了二项式定理，并研究了二项式定理的一些简单应用．



两个基本计数原理是处理计数问题的理论基础．解决计数问题时，要善于设计完成一件事情的合理的过程，建立适当的模型，灵活运用两个基本计数原理，并注意区分排列与组合是两类不同的问题．

排列组合、二项式定理等知识不仅能帮助我们解决社会生活中的计数问题，而且在数学的其他领域也有着广泛的应用，它是概率论和数理统计的基础．

内 容 提 要

1．分类计数原理

如果完成一件事情，有 n 类方式，在第 1 类方式中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方式中有 m_2 种不同的方法，……在第 n 类方式中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法．

2. 分步计数原理

如果完成一件事情，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

3. 排列和排列数公式

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 特别地，n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列.

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.

排列数公式(n, $m\in\mathbf{N}^*$, $m\leqslant n$)：

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

特别地，

$$\mathrm{A}_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

4. 组合和组合数公式

从 n 个不同元素中任意取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

从 n 个不同元素中任意取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

组合数公式($n,m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n$)：

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合数的两个重要性质：

$$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m},\ \mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}.$$

5. 二项式定理

$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 叫做二项式定理. 右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，它一共有 $n+1$ 项，其中 $\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r$ 叫做二项展开式的第 $r+1$ 项(也称通项)，用 T_{r+1} 表示. $\mathrm{C}_n^r(r=0, 1, 2, \cdots, n)$ 叫做第 $r+1$ 项的二项式系数，$T_{r+1}=\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r$.

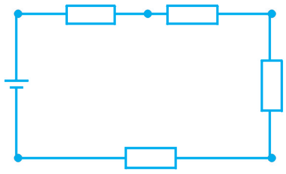
复 习 题

感受·理解

1. 已知两条异面直线 a，b 上分别有 5 个点和 8 个点，用这 13 个点可确定多少个不同的平面？

2. 从集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 中分别取 2 个不同的数作为对数的底数与真数，一共可得到多少个不同的对数值？

3. 从 4 台甲型电视机和 5 台乙型电视机中任选 3 台，要求甲、乙两种型号的电视机都要选，有多少种不同的选法？



（第 4 题）

4. 如图所示，某电子器件由 4 个电阻串联而成形成回路，它共有 5 个焊接点．如果焊接点脱落，那么整个电路就会不通．问：焊接点脱落的可能情况共有多少种？

5. 3 张卡片的正、反两面分别写有数字 1，2；3，4；5，6．将这 3 张卡片排成一排，可构成多少个不同的三位数？

6. 由 10 个元素组成的集合有多少个子集？

7. 由 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字可以组成多少个没有重复数字的奇数？

8. 求下列各展开式中的指定项：

(1) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 展开式中的第 4 项；

(2) $(2x+5)^4$ 展开式中的第 3 项．

9. 求证：$3^{2n}+C_n^1\cdot 3^{2n-2}+C_n^2\cdot 3^{2n-4}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 3^2+1=10^n$．

10. 证明 $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$，并利用这一结果化简：

(1) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{9}{10!}$；

(2) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$．

思考·运用

11. 将 3 个教师分到 6 个班级任教，每个教师教 2 个班，共有多少种不同的分法？

12. 设 $(3x-1)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7$，求：

(1) $a_0+a_2+a_4+a_6$；

(2) $a_1+a_3+a_5+a_7$；

(3) $|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|+|a_7|$．

13. 求 $(x^2+3x+2)^5$ 展开式中含 x 项的系数．

14. 设实数 $x>0$，试判别 $(1+x)^{10}$ 与 $1+10x+45x^2$ 的大小关系，并说明理由．

15. 有 10 只不同的试验产品，其中有 4 只不合格品、6 只合格品．现每次取 1 只测试，直到 4 只不合格品全部测出为止．问：最后 1 只不合格品正好在第 5 次测试时被发现的不同情形有多少种？

16. 已知 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中，第 5 项与第 3 项的二项式系数之比为 14∶3，求展开式的常数项．

探究 · 拓展

17. （阅读题）我们曾用组合模型发现了组合恒等式 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 和 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$. 这里所使用的方法，实际上是将一个量用两种方法分别算一次，由结果相同得到等式，这是一种非常有用的思想方法，叫做"算两次". 对此，我们并不陌生，如列方程时就要从不同的侧面列出表示同一个量的代数式，几何中常用的等积法也是"算两次"的典范. 再如，我们还可以用这种方法，结合二项式定理得到很多组合恒等式，如由等式

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

可得，左边 x^n 的系数为 C_{2n}^n，而右边

$$\begin{aligned}&(1+x)^n(1+x)^n\\&=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n),\end{aligned}$$

x^n 的系数为

$$\begin{aligned}&C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\cdots+C_n^nC_n^0\\&=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2,\end{aligned}$$

由 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ 恒成立可得

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

你能用"算两次"的方法证明等式 $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$ 吗？你能通过"算两次"独立发现新的组合恒等式吗？

18. 根据杨辉三角，你还能发现有关组合数的哪些性质？

本章测试

一、填空题

1. 从 3 名女同学和 2 名男同学中，选出 1 人主持某次主题班会，不同的选法种数为________.
2. 若 $C_n^3 = C_n^7$，则 n 的值是________.
3. 在$(1+2x)^5$的展开式中含 x^2 的项的系数为________.
4. 2 位同学分别从甲、乙、丙 3 门课程中选修 1 门，且 2 人选修的课程不同，则不同选法共有________种.
5. 设$(x-1)^{21}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{21}x^{21}$，则 $a_{10}+a_{11}=$ ____________.
6. 今有 2 个红球、3 个黄球，同色球不加以区分，将这 5 个球排成一列有________种不同的方法(用数字作答).

二、选择题

7. $89\times90\times91\times\cdots\times100$ 可以表示为(　　).

A. A_{100}^{10}　　B. A_{100}^{11}

C. A_{100}^{12}　　D. A_{100}^{13}

8. 从 7 本书中任意选取 2 本，共有不同的选法种数为(　　).

A. 84　　B. 42

C. 30　　D. 21

9. 若$\left(x-\dfrac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$展开式中常数项为 60，则常数 a 的值为(　　).

A. 4　　B. 2

C. 8　　D. 6

10. 由 1，2，3，4，5，6 组成没有重复数字且 1，3 不相邻的六位数的个数是(　　).

A. 36　　B. 72

C. 480　　D. 600

三、解答题

11. 某校足球队有高一学生 6 人，高二学生 5 人，高三学生 8 人.

(1) 若每个年级各选 1 名学生担任召集人，则有多少种不同的选法？

(2) 若选派 2 人外出参观学习，要求这 2 人来自不同年级，则有多少种不同的选法？

12. 由 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字，

(1) 可以组成多少个无重复数字的四位数？

(2) 可以组成多少个无重复数字且能被 25 整除的四位数？

13. 甲组有 5 名男生，3 名女生；乙组有 6 名男生，2 名女生. 若从甲、乙两组中各选出 2 名学生，则选出的 4 人中恰有 1 名女生的不同选法共有多少种？

14. 已知 $f(x)=(1+x)^m+(1+x)^n(m\in\mathbf{N}^*,n\in\mathbf{N}^*)$，$f(x)$的展开式中含 x 项的系数为 11，那么当 m，n 为何值时，含 x^2 的项的系数取得最小值？

15. 在 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中，第 2，3，4 项的二项式系数依次成等差数列.

（1）证明展开式中没有常数项；

（2）求展开式中所有的有理项.

第 2 章　概　　率

- 概率
  - 随机变量及其概率分布
  - 超几何分布
  - 独立性
    - 条件概率
    - 事件的独立性
  - 二项分布
  - 随机变量的均值和方差
    - 离散型随机变量的均值
    - 离散型随机变量的方差与标准差
  - 正态分布

有一个颠扑不破的真理，那就是当我们不能确定什么是真的时，我们就应该去探求什么是最可能的.

——笛卡儿

在现实生活中，我们会遇到许多较为复杂的概率问题. 例如：

工厂生产的一批产品共 N 件，其中有 M 件不合格品，在随机取出的 n 件产品中，不合格品数 X 的可能值有哪些？它们的概率各是多少？

种植 n 粒棉花种子，每一粒种子可能出苗，也可能不出苗，其出苗率为 67%. 问：出苗数 y 的可能值有哪些？它们的概率各是多少？

- 用怎样的数学模型刻画上述问题？
- 如何运用这些数学模型解决相关的实际问题？

2.1 随机变量及其概率分布

在一块地里种下 10 棵树苗，成活的树苗棵数 X 是 0，1，…，10 中的某个数；

抛掷一颗骰子，向上的点数 Y 是 1，2，3，4，5，6 中的某一个数；

新生婴儿的性别，抽查的结果可能是男，也可能是女. 如果将男婴用 0 表示，女婴用 1 表示，那么抽查的结果 Z 是 0 和 1 中的某个数；

……

● 上述现象有哪些共同特点？

上述现象中的 X，Y，Z，实际上是把每个随机试验的基本事件都对应一个确定的实数，即在试验结果（样本点）与实数之间建立了一个映射.

例如，上面的植树问题中成活的树苗棵数 X：

$X=0$，表示成活 0 棵；

$X=1$，表示成活 1 棵；

……

“$X>7$”表示什么意思？

一般地，如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做**随机变量**（random variable）. 通常用大写拉丁字母 X，Y，Z（或小写希腊字母 ξ，η，ζ）等表示，而用小写拉丁字母 x，y，z（加上适当下标）等表示随机变量取的可能值.

引入随机变量后，随机试验中我们感兴趣的事件就可以通过随机变量的取值表达出来.

上面新生婴儿的性别 Z 是一个随机变量，$Z=0$，表示新生婴儿是男婴；$Z=1$，表示新生婴儿是女婴.

例 1 （1）掷一枚质地均匀的硬币 1 次，若用 X 表示掷得正面的次数，则随机变量 X 的可能取值有哪些？

（2）一个实验箱中装有标号为 1，2，3，3，4 的 5 只白鼠，若从中任取 1 只，记取到的白鼠的标号为 Y，则随机变量 Y 的可能取值有哪些？

解 （1）抛掷硬币是随机试验，结果有两种可能，一种是正面向上，另一种是反面向上，所以变量 X 的取值可能是 1（正面向上），也可能是 0（反面向上），故随机变量 X 的取值构成集合 $\{0, 1\}$.

（2）根据条件可知，随机变量 Y 的可能值有 4 种，它的取值集合是 $\{1, 2, 3, 4\}$.

引入了随机变量后，随机事件就可以用随机变量来表示了.

在例 1(1)中，随机事件“掷一枚硬币，正面向上”可以用随机变量表示为$\{X=1\}$，随机事件“掷一枚硬币，反面向上”可以用随机变量表示为$\{X=0\}$.

在例 1(2)中，也可用$\{Y=1\}$，$\{Y=2\}$，$\{Y=3\}$，$\{Y=4\}$分别表示取到 1 号、2 号、3 号和 4 号白鼠这 4 个随机事件. 另一方面，在例 1(2)中，可以用$\{Y\leqslant 3\}$这样的记号表示“取到 1 号、2 号或 3 号白鼠”这件事情. 也就是说，复杂的事件也可以用随机变量的取值来表示.

这样，我们就可以用随机事件发生的概率来表示随机变量取值的概率了. 如例 1(1)中$\{X=1\}$的概率可以表示为$P(\{X=1\})=P\{$掷一枚硬币，正面向上$\}=\frac{1}{2}$，其中$P(\{X=1\})$常简记为$P(X=1)$. 同理，$P(X=0)=\frac{1}{2}$. 这一结果可用表 2-1-1 来描述.

表 2-1-1

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

例 1(2)中随机变量 Y 所表示的随机事件发生的概率也可用表 2-1-2 来描述.

表 2-1-2

Y	1	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

上面的两个表格分别给出了随机变量 X, Y 表示的随机事件的概率，描述了随机变量的分布规律.

一般地，假定随机变量 X 有 n 个不同的取值，它们分别是 x_1, x_2, …, x_n，且

$$P(X=x_i)=p_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \quad ①$$

则称①为随机变量 X 的**概率分布列**，简称为 X 的分布列. 也可以将①用表 2-1-3 的形式来表示.

表 2-1-3

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

我们将表 2-1-3 称为随机变量 X 的**概率分布表**. 它和①都叫做随机变量 X 的**概率分布**(probability distribution).

显然,这里的 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$满足条件

$$p_i \geqslant 0,$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

例 2　从装有 6 只白球和 4 只红球的口袋中任取 1 只球,用 X 表示"取到的白球个数",即

$$X=\begin{cases}1, & \text{当取到白球时,}\\ 0, & \text{当取到红球时,}\end{cases}$$

求随机变量 X 的概率分布.

解　由题意知

$$P(X=0)=\frac{4}{6+4}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{6}{6+4}=\frac{3}{5},$$

故随机变量 X 的概率分布列为 $P(X=0)=\frac{2}{5}$, $P(X=1)=\frac{3}{5}$, 概率分布表如下.

表 2-1-4

X	0	1
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

在例 2 中,随机变量 X 只取两个可能值 0 和 1. 像这样的例子还有很多,如:在射击中,只考虑"命中"与"不命中";对产品进行检验时,只关心"合格"与"不合格". 我们把这一类概率分布称为 **0-1 分布**或**两点分布**,并记为 $X\sim 0-1$ 分布或 $X\sim$两点分布. 此处"$\sim$"表示"服从".

例 3　同时掷两颗质地均匀的骰子,观察朝上一面出现的点数. 求两颗骰子中出现的较大点数 X 的概率分布,并求 X 大于 2 小于 5 的概率 $P(2<X<5)$.

解　依题意易知,掷两颗骰子出现的点数有 36 种等可能的情况:

(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，(2，1)，…，(6，5)，(6，6). 因而 X 的可能取值为 1，2，3，4，5，6，详见表 2－1－5.

表 2－1－5

X 的值	出　现　的　点	情况数
1	(1，1)	1
2	(2，2) (2，1) (1，2)	3
3	(3，3) (3，2) (3，1) (2，3) (1，3)	5
4	(4，4) (4，3) (4，2) (4，1) (3，4) (2，4) (1，4)	7
5	(5，5) (5，4) (5，3) (5，2) (5，1) (4，5) (3，5) (2，5) (1，5)	9
6	(6，6) (6，5) (6，4) (6，3) (6，2) (6，1) (5，6) (4，6) (3，6) (2，6) (1，6)	11

由古典概型可知 X 的概率分布如表 2－1－6 所示.

表 2－1－6

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

从而

$$\begin{aligned}P(2<X<5)&=P(X=3)+P(X=4)\\&=\frac{5}{36}+\frac{7}{36}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

思　考

在例 3 中，求两颗骰子出现较小点数 Y 的概率分布.

练　习

1. 你每次接听电话的时间长度是一个随机变量吗？

2. 引入随机变量后，(　　).

A. 随机事件个数与随机变量一一对应

B. 随机变量与区间一一对应

C. 随机变量的取值是实数

D. 随机变量与自然数一一对应

3. 已知随机变量 X 的概率分布如下：

X	-1	-0.5	0	1.8	3
P	0.1	0.2	0.1	0.3	a

求：(1) a；　(2) $P(X<0)$；

(3) $P(-0.5\leqslant X<3)$；　(4) $P(X<-2)$；

(5) $P(X>1)$；　(6) $P(X<5)$.

2.2 超几何分布

在产品质量管理中，常常通过抽样来分析合格品和不合格品的分布，进而分析产品的质量.

● 假定一批产品共 N 件，其中有 M 件不合格品，随机取出的 n 件产品中，不合格品数 X 的概率分布如何？

现以 $N=100$，$M=5$，$n=10$ 为例，研究抽取的 10 件产品中不合格品数 X 的概率分布.

从 100 件产品中随机抽取 10 件有 C_{100}^{10} 种等可能基本事件. $\{X=2\}$ 表示的随机事件是“取到 2 件不合格品和 8 件合格品”，依据分步计数原理知有 $C_5^2C_{95}^8$ 种基本事件，根据古典概型，得

$$P(X=2)=\frac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}.$$

类似地，可以求得 X 取其他值时对应的随机事件的概率，从而得到不合格品数 X 的概率分布如表 2-2-1 所示.

表 2-2-1

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{C_5^0C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}$	$\frac{C_5^1C_{95}^9}{C_{100}^{10}}$	$\frac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}$	$\frac{C_5^3C_{95}^7}{C_{100}^{10}}$	$\frac{C_5^4C_{95}^6}{C_{100}^{10}}$	$\frac{C_5^5C_{95}^5}{C_{100}^{10}}$

对一般情形，一批产品共 N 件，其中有 M 件不合格品，随机取出的 n 件产品中，不合格品数 X 的概率分布如表 2-2-2 所示.

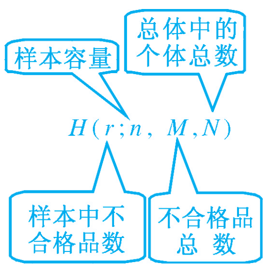
表 2-2-2

X	0	1	2	…	l
P	$\frac{C_M^0C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^lC_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}$

其中 $l=\min(n, M)$.

一般地，若一个随机变量 X 的分布列为

$$P(X=r)=\frac{C_M^rC_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}, \qquad ①$$



其中 $r=0, 1, 2, 3, \cdots, l$，$l=\min(n, M)$，则称 X 服从**超几何分布**(hypergeometric distribution)，记为 $X\sim H(n, M, N)$，并将 $P(X=r)=\frac{C_M^rC_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}$ 记为 $H(r; n, M, N)$.

例 1 高三(1)班的联欢会上设计了一项游戏：在一个口袋中装有 10 个红球、20 个白球，这些球除颜色外完全相同，一次从中摸出 5 个球，摸到 4 个红球 1 个白球的就获一等奖. 求获一等奖的概率.

解 用随机变量 X 表示取到的红球数，则 X 服从超几何分布 $H(5,10,30)$.

由公式①得

$$H(4;5,10,30)=\frac{C_{10}^{4}C_{20}^{5-4}}{C_{30}^{5}}=\frac{700}{23\ 751}\approx 0.029\ 5.$$

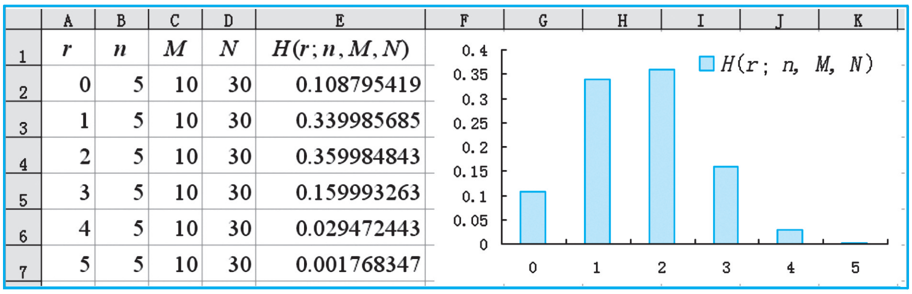
答 获一等奖的概率约为 2.95%.

本题中 X 的概率分布如下.

表 2-2-3

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2\ 584}{23\ 751}$	$\frac{8\ 075}{23\ 751}$	$\frac{8\ 550}{23\ 751}$	$\frac{3\ 800}{23\ 751}$	$\frac{700}{23\ 751}$	$\frac{42}{23\ 751}$

我们也可以把分布列用图形直观地表示出来(图 2-2-1).



	A	B	C	D	E
1	r	n	M	N	$H(r;n,M,N)$
2	0	5	10	30	0.108795419
3	1	5	10	30	0.339985685
4	2	5	10	30	0.359984843
5	3	5	10	30	0.159993263
6	4	5	10	30	0.029472443
7	5	5	10	30	0.001768347

图 2-2-1

例 2 生产方提供 50 箱的一批产品，其中有 2 箱不合格产品. 采购方接收该批产品的准则是：从该批产品中任取 5 箱产品进行检测，若至多有 1 箱不合格产品，则接收该批产品. 问：该批产品被接收的概率是多少？

解 用 X 表示“5 箱中不合格产品的箱数”，则 X 服从超几何分布 $H(5,2,50)$. 这批产品被接收的条件是 5 箱中没有不合格产品或只有 1 箱不合格产品，所以被接收的概率为 $P(X\leqslant 1)$，即

$$P(X\leqslant 1)=\frac{C_{2}^{0}C_{48}^{5}}{C_{50}^{5}}+\frac{C_{2}^{1}C_{48}^{4}}{C_{50}^{5}}=\frac{243}{245}.$$

答 该批产品被接收的概率是 $\frac{243}{245}$(约为 0.991 84).

EXCEL

在 Excel 中，可以直接使用超几何分布函数进行计算. 例如，按“插入/函数/统计”选择超几何分布函数“HYPGEOMDIST”，然后依次输入 r，n，M，N 的值，或直接在单元格内输入“＝HYPGEOMDIST(4；5，10，30)”，即可得到例 1 中获一等奖的概率约为 0.029 472 443.

练 习

1. 一个班级有 30 名学生，其中有 10 名女生. 现从中任选 3 名学生当班委，令随机变量 X 表示 3 名班委中女生的人数，随机变量 Y 表示 3 名班委中男生的人数，试求 X 与 Y 的概率分布.
2. 设 50 件商品中有 15 件一等品，其余为二等品. 现从中随机选购 2 件，用 X 表示所购 2 件商品中一等品的件数，写出 X 的概率分布.

习题 2.2

感受·理解

1. 写出下列随机变量的可能取值，并说明随机变量所表示的随机试验的结果.
   (1) 从甲地到乙地有汽车、火车和飞机 3 种直达交通工具，旅费分别为 100 元、80 元和 400 元，某人从甲地去乙地旅游，他的旅费为 X；
   (2) 盒内装着标有 1～4 号的大小相同的 4 个小球，随机抽取 2 个，所得的号码之和为 Y.
2. 设随机变量 X 只能取 5，6，7，…，16 这 12 个值，且取每个值的机会是均等的，试求：
   (1) $P(X>8)$；
   (2) $P(6<X\leqslant 14)$；
   (3) $P(X\geqslant 10)$.
3. 在 0－1 分布中，设 $P(X=0)=p$，$0<p<1$，求 $P(X=1)$ 的值.
4. 设 15 件同类型的零件中有 2 件是不合格品，从其中任取 3 件，以 X 表示取出的 3 件中的不合格品的件数，试求 X 的概率分布.

思考·运用

5. 随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{k}{15}$，$k=1, 2, 3, 4, 5$，试求：
   (1) $P(X<3)$；
   (2) $P\left(\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right)$；
   (3) $P(2\leqslant X\leqslant 4)$.

探究·拓展

6. 1 000 只灯泡中含有 $n(2\leqslant n\leqslant 992)$ 只不合格品，从中一次任取 10 只，问：恰含有 2 只不合格品的概率 $f(n)$是多少？当 n 为何值时，$f(n)$取得最大值？

2.3 独立性

抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次.

(1) 2 次都是正面向上的概率是多少?

(2) 在已知有 1 次出现正面向上的条件下,2 次都是正面向上的概率是多少?

(3) 在第 1 次出现正面向上的条件下,第 2 次出现正面向上的概率是多少?

● 上述几个问题有什么区别? 它们之间有什么关系?

2.3.1 条件概率

两次抛掷硬币的基本事件构成集合 $S=\{$正正,正反,反正,反反$\}$,其中两次都是正面向上的事件记为 A,即 $A=\{$正正$\}$,故

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

两次抛掷硬币,其中至少有 1 次正面向上的事件记为 B,即 $B=\{$正正,正反,反正$\}$,那么,在 B 发生的条件下,A 发生的概率为$\frac{1}{3}$.

这说明,在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率产生了变化.

一般地,对于两个事件 A 和 B,在已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率,称为事件 B 发生的条件下事件 A 的**条件概率**(conditional probability),记为 $P(A|B)$.

在“|”之后的部分表示条件.

比如,若记“2 次抛掷硬币,其中有 1 次正面向上”为事件 B,“2 次抛掷硬币都是正面向上”为事件 A,则 $P(A|B)$就表示“已知 2 次抛掷硬币试验中有 1 次正面向上的条件下,2 次都是正面向上的概率”.

思 考

若事件 A 与 B 互斥,则 $P(A|B)$等于多少?

事件 AB 表示事件 A 和事件 B 同时发生.

在上面的问题中,$P(B)=\frac{3}{4}$, $P(AB)=\frac{1}{4}$, $P(A|B)=\frac{1}{3}$,我们发现

$$P(A \mid B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

一般地，若 $P(B)>0$，则事件 B 发生的条件下 A 发生的条件概率是

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

利用条件概率，我们有

$$P(AB)=P(A \mid B)P(B).$$

此公式称为乘法公式.

例 1　抛掷一颗质地均匀的骰子的基本事件构成集合 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，令事件 $A=\{2, 3, 5\}$，$B=\{1, 2, 4, 5, 6\}$，求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，$P(A|B)$.

解　$A \cap B=\{2, 5\}$，由古典概型可知

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$P(B)=\frac{5}{6},$$

$$P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

所以

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{5}.$$

例 2　如图 2－3－1 所示的正方形被平均分成 9 个部分，向大正方形区域随机地投掷一个点（每次都能投中），设投中最左侧 3 个小正方形区域的事件记为 A，投中最上面 3 个小正方形或正中间的 1 个小正方形区域的事件记为 B，求 $P(AB)$，$P(A|B)$.

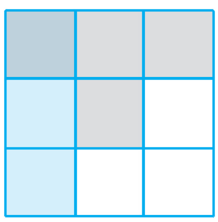


图 2－3－1

解 根据几何概型，得

$$P(AB)=\frac{1}{9},$$

$$P(B)=\frac{4}{9},$$

所以

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{4}.$$

例 3 在一个盒子中有大小一样的 20 个球，其中有 10 个红球、10 个白球. 某人无放回地依次从中摸出 1 个球，求第 1 次摸出红球且第 2 次摸出白球的概率.

解 记“第 1 次摸出红球”为事件 A，“第 2 次摸出白球”为事件 B，由乘法公式得

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(B\mid A)P(A)\\&=\frac{10}{19}\times\frac{10}{20}\\&\approx 0.2632.\end{aligned}$$

答 所求概率约为 0.263 2.

练　习

1. 从一批含有 10 件合格品、3 件不合格品的产品中随机地逐个抽取，抽出后的产品不放回，设 X 表示直到取得合格品时的抽取次数，试求：

   (1) 直到第 2 次才取到合格品的概率 $P(X=2)$；

   (2) 直到第 3 次才取到合格品的概率 $P(X=3)$.

2. 抛掷两颗质地均匀的骰子各 1 次，

   (1) 向上的点数之和为 7 时，其中有 1 个的点数是 2 的概率是多少？

   (2) 向上的点数不相同时，其中有 1 个的点数为 4 的概率是多少？

2.3.2 事件的独立性

现在我们回到第 2.3 节开头的问题(3)，抛掷 2 次硬币，第一次出现正面向上的条件，对第二次出现正面向上的概率是否产生影响？

设 B 表示事件“第一次正面向上”，A 表示事件“第二次正面向上”，由古典概型知

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4},$$

所以

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}.$$

即 $P(A)=P(A\mid B)$，这说明事件 B 的发生不影响事件 A 发生的概率.

一般地，若事件 A，B 满足 $P(A\mid B)=P(A)$，则称**事件 A，B 独立**.

当 A，B 独立时，若 $P(A)>0$，因为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A),$$

所以

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

故

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B),$$

即 B，A 也独立. 这说明 A 与 B 独立是相互的，此时事件 A 和 B 同时发生的概率等于事件 A 发生的概率与事件 B 发生的概率之积，即

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

如果我们认为任何事件与必然事件独立，任何事件与不可能事件独立，那么两个事件 A，B 相互独立的充要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

今后我们将遵循此约定.

两个事件的独立性可以推广到 $n(n>2)$ 个事件的独立性：若事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则这 n 个事件同时发生的概率

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

例 1 求证：若事件 A 与 B 相互独立，则事件 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

证 因为

$$P(AB)+P(A\overline{B})=P(A),$$

所以

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB).$$

因为 A，B 相互独立，所以

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

于是

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)(1-P(B))\\&=P(A)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

因此，事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

类似可证，$\overline{A}$ 与 B 相互独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

例 2 如图 2－3－2，用 X，Y，Z 这 3 类不同的元件连接成系统 N，每个元件是否正常工作不受其他元件的影响. 当元件 X，Y，Z 都正常工作时，系统 N 正常工作. 已知元件 X，Y，Z 正常工作的概率依次为 0.80，0.90，0.90，求系统 N 正常工作的概率.

图 2－3－2

解 若将元件 X，Y，Z 正常工作分别记为事件 A，B，C，则系统 N 正常工作为事件 ABC.

根据题意，有

$$P(A)=0.80,\ P(B)=0.90,\ P(C)=0.90.$$

因为事件 A，B，C 是相互独立的，所以系统 N 正常工作的概率

$$\begin{aligned}P&=P(ABC)\\&=P(A)P(B)P(C)\\&=0.80\times0.90\times0.90\\&=0.648.\end{aligned}$$

答 系统 N 正常工作的概率为 0.648.

思　考

若 X，Y，Z 按图 2－3－3 的方式连接成一个系统，每个元件是否正常工作不受其他元件的影响. 当元件 X 正常工作和 Y，Z 中至少有 1 个正常工作时，系统就正常工作. 求这个系统正常工作的概率.

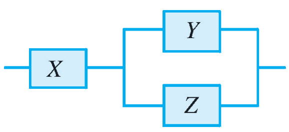


图 2－3－3

例 3　已知加工某一零件共需两道工序，第 1，2 道工序的不合格品率分别为 3％和 5％，且各道工序互不影响．问：加工出来的零件是不合格品的概率是多少？

分析　设 A 表示事件"加工出来的零件是不合格品"，A_1，A_2 分别表示事件"第 1 道工序出现不合格品"和"第 2 道工序出现不合格品"，解决问题的过程可以用流程图表示（图 2－3－4）：

用 A_i 表示第 $i(i=1,2)$ 道工序加工出来的产品为不合格品的事件

↓

用 A_i 的运算表示事件 A

↓

计算 $P(A)$

图 2－3－4

解法 1　设 A 表示事件"加工出来的零件是不合格品"，A_1，A_2 分别表示事件"第 1 道工序出现不合格品"和"第 2 道工序出现不合格品"．因为依常理，第 1 道工序为不合格品，则该产品为不合格品，所以

$$A = A_1 + \overline{A}_1 A_2,$$

因为各道工序互不影响，所以

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 + \overline{A}_1 A_2) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A}_1 A_2) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2) \\ &= 0.03 + 0.97 \times 0.05 \\ &= 0.078\,5. \end{aligned}$$

解法 2　设 A 表示事件"加工出来的零件是不合格品"，A_1，A_2 分别表示事件"第 1 道工序出现不合格品"和"第 2 道工序出现不合格品"．因为 $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2$，所以

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) \\ &= [1-P(A_1)][1-P(A_2)] \\ &= (1-0.03)(1-0.05) \\ &= 0.921\,5, \end{aligned}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.921\,5 = 0.078\,5.$$

答　加工出来的零件是不合格品的概率为 7.85％．

思　考

如果 A 和 B 是两个相互独立的事件，那么 $1-P(A)P(B)$ 表示什么么？

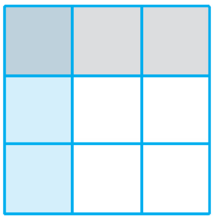
练　习

1. 下面的说法对吗？

(1) 如果昨天有飞机失事，那么今天乘飞机要安全一些；

(2) 连续掷一枚硬币接连出现 5 次正面，第 6 次出现反面的可能性会增大.

2. 如图所示的正方形被平均分成 9 个部分，向大正方形区域随机地投掷一点（每次都能投中），投中最左侧 3 个小正方形区域的事件记为 A，投中最上面 3 个小正方形区域的事件记为 B，试判断 A 与 B 是否为独立事件.



（第 2 题）

3. 3 个人独立地翻译密码，每人译出此密码的概率依次为0.35，0.30，0.25. 设随机变量 X 表示译出此密码的人数，试求：

(1) 3 个人同时译出此密码的概率 $P(X=3)$；

(2) 至多有 2 个人译出此密码的概率 $P(X\leqslant 2)$；

(3) 3 个人都未能译出此密码的概率 $P(X=0)$；

(4) 此密码被译出的概率 $P(X\geqslant 1)$.

2.4 二项分布

射击 n 次，每一次射击可能击中目标，也可能击不中目标，而且当射击条件不变时，可以认为每次击中目标的概率 p 是不变的；

抛掷一颗质地均匀的骰子 n 次，每一次抛掷可能出现“5”，也可能不出现“5”，而且每次掷出“5”的概率 p 都是 $\frac{1}{6}$；

种植 n 粒棉花种子，每一粒种子可能出苗，也可能不出苗，其出苗率是 67%．

一般地，由 n 次试验构成，且每次试验相互独立完成，每次试验的结果仅有两种对立的状态，即 A 与 $\overline{A}$，每次试验中 $P(A)=p>0$．我们将这样的试验称为 **n 次独立重复试验**，也称为**伯努利试验**（Bernoulli trials）．

▲瑞士数学家雅·伯努利（J. Bernoulli，1654～1705），对微积分、微分方程、变分法和概率论都作出了重要贡献．n 次独立重复试验就是由他首先研究的，故又称伯努利概型．

● 在 n 次独立重复试验中，如果每次试验事件 A 发生的概率均为 p，那么在这 n 次试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率是多少？

我们先研究下面的问题：射击 3 次，每次射中目标的概率都为 $p>0$．设随机变量 X 是射中目标的次数，求随机变量 X 的概率分布．

分析 1　这是一个 3 次独立重复试验，设“射中目标”为事件 A，则 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p$（记为 q），用图 2－4－1 的树形图来表示该试验的过程和结果．

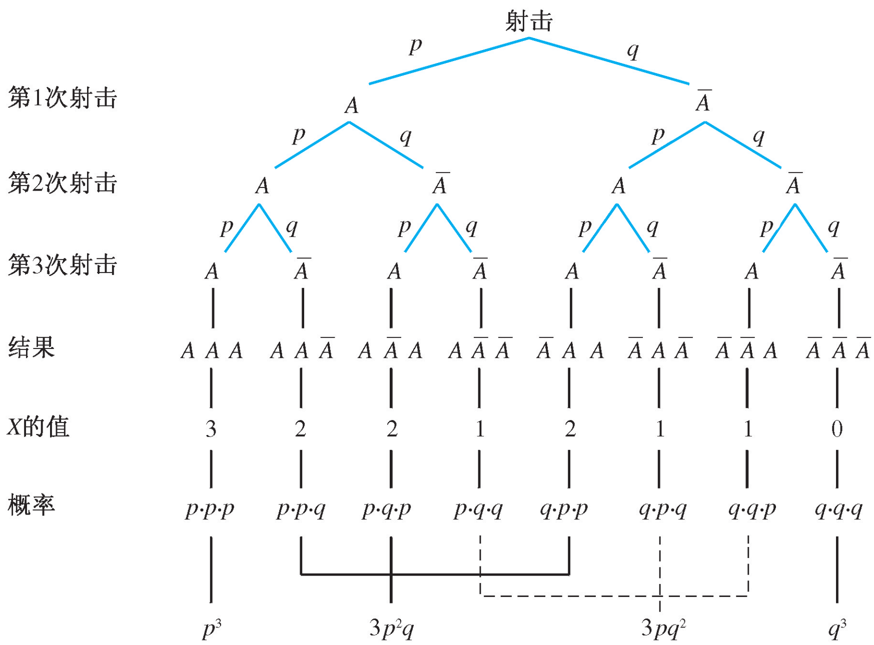


图 2－4－1

由树形图可见，随机变量 X 的概率分布如表 2－4－1 所示.

表 2－4－1

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

分析 2 在 $X=k$ 时，根据试验的独立性，事件 A 在某指定的 k 次发生时，其余的 $3-k$ 次则不发生，其概率为 p^kq^{3-k}. 而 3 次试验中发生 k 次 A 的方式有 C_3^k 种，故有

$$P(X=k)=C_3^kp^kq^{3-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

因此，概率分布可以表示为表 2－4－2.

表 2－4－2

X	0	1	2	3
P	$C_3^0q^3$	$C_3^1pq^2$	$C_3^2p^2q$	$C_3^3p^3$

一般地，在 n 次独立重复试验中，每次试验事件 A 发生的概率均为 $p(0<p<1)$，即 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$. 由于试验的独立性，n 次试验中，事件 A 在某指定的 k 次发生，而在其余 $n-k$ 次不发生的概率为 p^kq^{n-k}. 又由于在 n 次试验中，事件 A 恰好发生 k 次的方式有 C_n^k 种，所以在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

$P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(n)$ 等于 1 吗？

它恰好是 $(q+p)^n$ 的二项展开式中的第 $k+1$ 项.

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},$$

其中 $0<p<1$，$p+q=1$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则称 X 服从参数为 n，p 的**二项分布**(binomial distribution)，记作 $X\sim B(n,\ p)$.

例 1 求随机抛掷 100 次均匀硬币，正好出现 50 次正面的概率.

分析 将一枚均匀硬币随机抛掷 100 次，相当于做了 100 次独立重复试验，每次试验有 2 个可能结果，即出现正面 (A) 与出现反面 $(\overline{A})$，且 $P(A)=0.5$.

解　设 X 为抛掷 100 次硬币出现正面的次数，依题意，随机变量 $X\sim B(100, 0.5)$，则

$$
\begin{aligned}
P(X=50) &= \mathrm{C}_{100}^{50}p^{50}q^{100-50} \\
&= \mathrm{C}_{100}^{50}\,0.5^{100} \\
&\approx 8\%.
\end{aligned}
$$

答　随机抛掷 100 次均匀硬币，正好出现 50 次正面的概率约为 8%.

思　考

“随机抛掷 100 次均匀硬币正好出现 50 次反面”的概率是多少？

例 2　设某保险公司吸收 10 000 人参加人身意外保险，该公司规定：每人每年付给公司 120 元，若意外死亡，公司将赔偿 10 000 元. 如果已知每人每年意外死亡的概率为 0.006，那么该公司会赔本吗？

解　设这 10 000 人中意外死亡的人数为 X，根据题意，X 服从二项分布 $B(10\,000, 0.006)$：

$$
P(X=k)=\mathrm{C}_{10\,000}^{k}0.006^{k}(1-0.006)^{10\,000-k}.
$$

死亡人数为 X 人时，公司要赔偿 X 万元，此时公司的利润为 $(120-X)$ 万元. 由上述分布，公司赔本的概率为

$$
\begin{aligned}
P(120-X<0) &= 1-P(X\leqslant 120) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{120}P(X=k) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{120}\mathrm{C}_{10\,000}^{k}0.006^{k}\cdot 0.994^{10\,000-k} \\
&\approx 0,
\end{aligned}
$$

这说明，公司几乎不会赔本.

答　公司几乎不会赔本.

EXCEL

在 Excel 中，计算二项分布的函数是“BINOMDIST”，选择“插入/函数/统计”，可依提示输入相应的参数，或在单元格内直接输入“=BINOMDIST (120, 10000, 0.006, 1)”，就可得到例 2 中 $P(X\leqslant 120)$ 的值(如图 2－4－2).

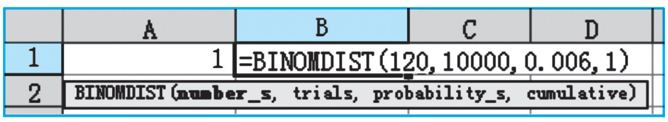


图 2－4－2

函数 BINOMDIST 中最后一个参数 cumulative 为一逻辑值，用于确定函数的形式．若 cumulative 为 1，则函数 BINOMDIST 返回累积分布函数，即至多 number_s 次成功的概率；若 cumulative 为 0，则函数 BINOMDIST 返回概率密度函数，即 number_s 次成功的概率．

练　习

1. 某种灯泡使用寿命在 1 000 h 以上的概率为 0.2，求 3 个灯泡使用 1 000 h 后，至多只坏 1 个的概率．

2. 甲、乙、丙 3 人独立地破译某个密码，每人译出密码的概率均为 0.25，设随机变量 X 表示译出密码的人数．

(1) 写出 X 的分布列；

(2) 密码被译出的概率是多少？

3. 对患某种病的人，假定施行手术的生存率是 70%，现有 8 个病人施行该种手术，设 X 为 8 个病人中生存下来的人数．

(1) 求 $P(X=7)$；

(2) 写出 X 的概率分布．

习题 2.4

感受 · 理解

1. 一个盒子中装有 a 只黑球和 b 只白球，现在从中先后有放回地任取 2 只球，设 A 表示“第一次取得黑球”的事件，B 表示“第二次取得黑球”的事件，试计算 $P(A)$与 $P(A|B)$的值，并判断 A 与 B 是否为独立事件.

2. 电路中，电压超过额定值的概率为 p_1，在电压超过额定值的情况下，电气设备被烧坏的概率为 p_2. 求电压超过额定值且电气设备烧坏的概率.

3. 某种动物活到 20 岁的概率是 0.8，活到 25 岁的概率是 0.4. 问：现龄 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少？

4. 如果某种报警器的可靠性为 80%，那么安装 2 只这样的报警器能将可靠性提高到多大？

5. 已知甲、乙、丙 3 名运动员击中目标的概率分别为 0.7，0.8，0.85，若他们 3 人分别向目标各发 1 枪，求命中目标的次数 X 的概率分布.

6. 制药厂组织 2 组技术人员分别独立地试制不同类型的新药，设每组试制成功的概率都是 0.40. 当第一组成功时，该组研制的新药的年销售额为 400 万元，若失败则没有收入；当第二组成功时，该组研制的新药的年销售额为 600 万元，若失败则没有收入. 以 X 表示这两种新药的年销售总额，求 X 的概率分布.

7. 批量较大的一批产品中有 30%的一级品，进行重复抽样检查，共取 5 个样品，求：

(1) 取出的 5 个样品中恰有 2 个一级品的概率；

(2) 取出的 5 个样品中至少有 2 个一级品的概率.

8. 某单位有 18 个人，其中 O 型血有 9 人，A 型血有 3 人，B 型血有 4 人，AB 型血有 2 人. 现从中选出 2 人，问：在第一人是 A 型血的条件下，第二人是 O 型血的概率是多少？

思考 · 运用

9. 证明：若 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$，则事件 A 与 B 是独立的.

10. 某城市小汽车的普及率为 20%，即平均每 10 个家庭中有 2 个家庭有小汽车. 若从这个城市中任意选出 9 个家庭，试求 3 个以上(包括 3 个)的家庭有小汽车的概率.

探究 · 拓展

11. 在本节的例 2 中，求该公司盈利额不少于 400 000 元的概率.

2.5 随机变量的均值和方差

前面所讨论的随机变量的取值都是离散的，我们把这样的随机变量称为离散型随机变量.

● 怎样刻画离散型随机变量取值的平均水平和稳定程度呢？

2.5.1 离散型随机变量的均值

甲、乙两个工人生产同一种产品，在相同的条件下，他们生产 100 件产品所出的不合格品数分别用 X_1，X_2 表示，X_1，X_2 的概率分布如下.

表 2－5－1

X_1	0	1	2	3
p_k	0.7	0.1	0.1	0.1
X_2	0	1	2	3
p_k	0.5	0.3	0.2	0

● 如何比较甲、乙两个工人的技术？

在《数学 3(必修)》“统计”一章中，我们曾用公式

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

计算样本的平均值，其中 p_i 为取值为 x_i 时的频率值.

类似地，若离散型随机变量 X 的概率分布如表 2－5－2 所示，则称

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

为离散型随机变量 X 的**均值**或**数学期望**，记为 $E(X)$ 或 μ，即

$$E(X)=\mu=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n,$$

其中，x_i 是随机变量 X 的可能取值，p_i 是概率，$p_i\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

表 2－5－2

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

离散型随机变量 X 的均值也称为 X 的概率分布的均值.

对于前面的问题,通过计算可以求得

$$E(X_1)=0\times 0.7+1\times 0.1+2\times 0.1+3\times 0.1=0.6,$$

$$E(X_2)=0\times 0.5+1\times 0.3+2\times 0.2+3\times 0=0.7.$$

由于 $E(X_1)<E(X_2)$,即甲工人生产出的废品数的均值小,从这个意义上讲,甲的技术比乙的技术好.

例 1　高三(1)班的联欢会上设计了一项游戏,在一个口袋中装有 10 个红球、20 个白球,这些球除颜色外完全相同.某学生一次从中摸出 5 个球,其中红球的个数为 X,求 X 的数学期望.

分析　从口袋中摸出 5 个球相当于抽取 $n=5$ 个产品,随机变量 X 为 5 个球中的红球个数,则 X 服从超几何分布 $H(5, 10, 30)$.

解　由第 2.2 节例 1 可知,随机变量 X 的概率分布如表 2 - 5 - 3 所示.

表 2 - 5 - 3

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2\,584}{23\,751}$	$\frac{8\,075}{23\,751}$	$\frac{8\,550}{23\,751}$	$\frac{3\,800}{23\,751}$	$\frac{700}{23\,751}$	$\frac{42}{23\,751}$

从而

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{2\,584}{23\,751}+1\times\frac{8\,075}{23\,751}+2\times\frac{8\,550}{23\,751}+\\&\quad 3\times\frac{3\,800}{23\,751}+4\times\frac{700}{23\,751}+5\times\frac{42}{23\,751}\\&=\frac{5}{3}\\&\approx 1.666\,7.\end{aligned}$$

答　X 的数学期望约为 1.666 7.

例 2　从批量较大的成品中随机取出 10 件产品进行质量检查,若这批产品的不合格品率为 0.05,随机变量 X 表示这 10 件产品中的不合格品数,求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.

解　由于批量较大,可以认为随机变量 $X\sim B(10, 0.05)$,

$$P(X=k)=p_k=C_{10}^{k}p^{k}(1-p)^{10-k},\ k=0, 1, 2, \cdots, 10.$$

随机变量 X 的概率分布如表 2 - 5 - 4 所示.

表 2－5－4

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$C_{10}^{0}p^{0}(1-p)^{10}$	$C_{10}^{1}p^{1}(1-p)^{9}$	$C_{10}^{2}p^{2}(1-p)^{8}$	$C_{10}^{3}p^{3}(1-p)^{7}$	$C_{10}^{4}p^{4}(1-p)^{6}$	$C_{10}^{5}p^{5}(1-p)^{5}$
X	6	7	8	9	10	
p_k	$C_{10}^{6}p^{6}(1-p)^{4}$	$C_{10}^{7}p^{7}(1-p)^{3}$	$C_{10}^{8}p^{8}(1-p)^{2}$	$C_{10}^{9}p^{9}(1-p)^{1}$	$C_{10}^{10}p^{10}(1-p)^{0}$	

一般地，由定义可求出超几何分布和二项分布的数学期望的计算公式：

当 $X\sim H(n, M, N)$ 时，$E(X)=\dfrac{nM}{N}$；

当 $X\sim B(n, p)$ 时，$E(X)=np$.

故

$$E(X)=\sum_{k=0}^{10}kp_k=0.5.$$

答 随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 为 0.5.

EXCEL

先利用 Excel 的自动填充和引用功能计算超几何分布，再根据数学期望的定义计算期望值(图 2－5－1).

单元格 B2，B3 中的公式. B3 也可直接输入函数“＝SUMPRODUCT(B1：G1，B2：G2)”来计算.

	A	B	C	D	E	F	G
1	r	0	1	2	3	4	5
2	$H(r;n,M,N)$	0.108795419	0.339985685	0.359984843	0.159993263	0.029472443	0.001768347
3	$E(x)$						1.666666667

	B	C	D	E
2	=HYPGEOMDIST(B1,5,10,30)	=HYPGEOMDIST(C1,5,10,30)	=HYPGEOMDIST(D1,5,10,30)	=HYPGEOMDIST(E1,5,10,30)
3	=B1*B2+C1*C2+D1*D2+E1*E2+F1*F2+G1*G2			

图 2－5－1

练　习

1. 设随机变量 X 的概率分布如下表，试求 $E(X)$.

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. 假定 1 500 件产品中有 100 件不合格品，从中抽取 15 件进行检查，其中不合格品件数为 X，求 X 的数学期望.

3. 从甲、乙 2 名射击运动员中选择 1 名参加比赛，现统计了这 2 名运动员在训练中命中环数 X，Y 的概率分布如下，问：哪名运动员的平均成绩较好？

X	8	9	10
P	0.3	0.1	0.6
Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

4. 某商家有一台电话交换机，其中有 5 个分机专供与顾客通话. 设每个分机在 1 h 内平均占线 20 min，并且各个分机是否占线是相互独立的，求任一时刻占线的分机数目 X 的数学期望.

2.5.2　离散型随机变量的方差与标准差

甲、乙两名工人生产同一种产品，在相同的条件下，他们生产 100 件产品所出的不合格品数分别用 X_1，X_2 表示，X_1，X_2 的概率分布如表 2－5－5 所示.

表 2－5－5

X_1	0	1	2	3
p_k	0.6	0.2	0.1	0.1
X_2	0	1	2	3
p_k	0.5	0.3	0.2	0

从均值看，$E(X_1)$，$E(X_2)$都是 0.7，那么，

● 如何比较甲、乙两名工人的技术？

我们知道，当样本平均值相差不大时，可以利用样本方差考察样本数据与样本平均值的偏离程度. 能否用一个类似于样本方差的量来刻画随机变量的波动程度呢？

一般地，若离散型随机变量 X 的概率分布如表 2－5－6 所示，则 $(x_i-\mu)^2(\mu=E(X))$ 描述了 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 相对于均值 μ 的偏离程度，故

$$(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n$$

（其中 $p_i\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$）刻画了随机变量 X 与其均值 μ 的平均偏离程度，我们将其称为离散型随机变量 X 的**方差**，记为 $V(X)$或 σ^2. 即

$$V(X)=\sigma^2=(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n,$$

其中，$p_i\geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n$，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

表 2－5－6

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

方差也可用公式 $V(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2$ 计算，有兴趣的同学可以尝试证明.

随机变量 X 的方差也称为 X 的概率分布的方差，X 的方差 $V(X)$ 的算术平方根称为 X 的**标准差**，即

$$\sigma=\sqrt{V(X)}.$$

思　考

随机变量的方差和样本方差有何区别和联系？

随机变量的方差和标准差都反映了随机变量的取值偏离于均值的平均程度．方差或标准差越小，随机变量偏离于均值的平均程度就越小．

对于前面的问题，通过计算可以求出 X_1，X_2 的标准差分别为 1.005，0.781，这说明乙的技术稳定性较好，甲的技术稳定性较差．

例 1　已知随机变量 X 的分布如表 2－5－7 所示，求方差 $V(X)$ 和标准差 $\sqrt{V(X)}$．

表 2－5－7

X	0	1
P	$1-p$	p

解　因为 $\mu=0\times(1-p)+1\times p=p$，所以

$$V(X)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p$$
$$=p(1-p),$$
$$\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}.$$

例 2　求第 2.5.1 节例 1 中超几何分布 $H(5,10,30)$ 的方差和标准差．

解　第 2.5.1 节例 1 中的超几何分布如表 2－5－8 所示．

表 2－5－8

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2\,584}{23\,751}$	$\frac{8\,075}{23\,751}$	$\frac{8\,550}{23\,751}$	$\frac{3\,800}{23\,751}$	$\frac{700}{23\,751}$	$\frac{42}{23\,751}$

数学期望为 $\mu=\frac{5}{3}$，由公式 $V(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2$ 有

$$V(X)=0\times\frac{2\,584}{23\,751}+1\times\frac{8\,075}{23\,751}+4\times\frac{8\,550}{23\,751}+$$

$$9\times\frac{3\,800}{23\,751}+16\times\frac{700}{23\,751}+25\times\frac{42}{23\,751}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$=\frac{204\,750}{213\,759}\approx 0.957\,9,$$

故标准差

$$\sigma\approx 0.978\,7.$$

例 3　求第 2.5.1 节例 2 中的二项分布 $B(10,\ 0.05)$ 的方差和标准差.

解　$p=0.05$，该分布如表 2-5-9 所示.

表 2-5-9

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$C_{10}^0p^0(1-p)^{10}$	$C_{10}^1p^1(1-p)^9$	$C_{10}^2p^2(1-p)^8$	$C_{10}^3p^3(1-p)^7$	$C_{10}^4p^4(1-p)^6$	$C_{10}^5p^5(1-p)^5$
X	6	7	8	9	10	
p_k	$C_{10}^6p^6(1-p)^4$	$C_{10}^7p^7(1-p)^3$	$C_{10}^8p^8(1-p)^2$	$C_{10}^9p^9(1-p)^1$	$C_{10}^{10}p^{10}(1-p)^0$	

一般地，由定义可以求出超几何分布和二项分布的方差的计算公式：

当 $X\sim H(n,\ M,\ N)$ 时，$V(X)=\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$；

当 $X\sim B(n,\ p)$ 时，$V(X)=np(1-p)$.

由第 2.5.1 节例 2 知 $\mu=E(X)=0.5$，由 $V(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\mu^2$ 得

$$\sigma^2=0^2\times C_{10}^0 0.05^0\times 0.95^{10}+1^2\times C_{10}^1 0.05^1\times 0.95^9+\cdots+10^2\times C_{10}^{10}0.05^{10}\times 0.95^0-0.5^2$$

$$\approx 0.725-0.25$$

$$=0.475,$$

故标准差

$$\sigma\approx 0.689\,2.$$

练　习

1. 设随机变量 X 的概率分布如下表所示，试求 X 的标准差.

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. 假定 1 500 件产品中有 100 件不合格品，从中抽取 15 件进行检查，求 15 件中不合格品件数 X 的标准差.

习题 2.5

感受·理解

1. 设随机变量 X 的概率分布如下表所示，且 $E(X)=2.5$，求 a 和 b.

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	a	b

2. 对 0－1 分布，证明方差 $V(X)\leqslant\frac{1}{4}$.

3. 甲、乙、丙 3 人独立地破译某个密码，每人译出此密码的概率均为 0.25. 假定随机变量 X 表示译出此密码的人数，求 $E(X)$，$V(X)$和 $\sqrt{V(X)}$.

4. 某人每次射击命中目标的概率为 0.8，现连续射击 3 次，求击中目标的次数 X 的数学期望和方差.

5. 对第 2.4 节例 2，计算保险公司的期望收入.

思考·运用

6. 假定某射手每次射击命中目标的概率为$\frac{2}{3}$. 现有 3 发子弹，该射手一旦射中目标，就停止射击，否则就一直独立地射击到子弹用完. 设耗用子弹数为 X，求：

(1) X 的概率分布；

(2) 均值 $E(X)$；

(3) 标准差 $\sqrt{V(X)}$.

7. 某养鸡场流行一种传染病，鸡的感染率为 10%. 现对 10 000 只鸡进行抽血化验，以期查出所有病鸡. 有 3 种方案：① 逐只化验；② 按 40 只鸡一组分组，并把同组的 40 只鸡抽到的血混合在一起化验，若发现有问题，再分别对该组 40 只鸡逐只化验；③ 将②中的 40 只一组改为 4 只一组再做. 问：哪种方案化验次数的期望值较小？

探究·拓展

8. (阅读题)在考察野生动物时，常常需要了解野生动物种群的大小. 一种常用的方法是，先捕捉一定数量的动物，做上记号(假定记号不会消失)，放回到原群体中，过适当时间后，再捕捉第二个样本，统计其中有标记的动物数，最后根据以上资料就可以估计该种群的大小. 它的原理是：在捕捉第二个样本时，捉到有标记的动物数 X 是一个服从超几何分布的随机变量，依据超几何分布的期望，就可以估计该种群的大小.

现有某野生动物研究小组在山区随机捕捉了 40 只山猫，做上记号后放回山里. 一个月后他们又在该山区捕捉了 20 只山猫，发现其中有 2 只有记号. 试估计该山区山猫种群的数量.

2.6 正态分布

从某中学的男生中随机地选出 84 名，测量其身高，数据（单位：cm）如下：

164	175	170	163	168	161	177	173	165	181	155	178
164	161	174	177	175	168	170	169	174	164	176	181
181	167	178	168	169	159	174	167	171	176	172	174
159	180	154	173	170	171	174	172	171	185	164	172
163	167	168	170	174	172	169	182	167	165	172	171
185	157	174	164	168	173	166	172	161	178	162	172
179	161	160	175	169	169	175	161	155	156	182	182

● 上述数据的分布有怎样的特点？

为了研究身高的分布，可以先根据这些数据作出频率分布直方图。

第一步　对数据分组（取组距 $d=4$）；

第二步　列出频数（或频率）分布表，如图 2－6－1 所示；

N	O	P	Q	R	S
区间号	区间	频数 v_i	频率 f_i	累积频率 F_i	$\frac{f_i}{d}=\frac{v_i}{336}$
1	153.5~157.5	5	0.05952381	0.05952381	0.014880952
2	157.5~161.5	8	0.095238095	0.154761905	0.023809524
3	161.5~165.5	10	0.119047619	0.273809524	0.029761905
4	165.5~169.5	15	0.178571429	0.452380952	0.044642857
5	169.5~173.5	18	0.214285714	0.666666667	0.053571429
6	173.5~177.5	15	0.178571429	0.845238095	0.044642857
7	177.5~181.5	8	0.095238095	0.94047619	0.023809524
8	181.5~185.5	5	0.05952381	1	0.014880952

图 2－6－1

第三步　作出频率分布直方图，如图 2－6－2 所示。

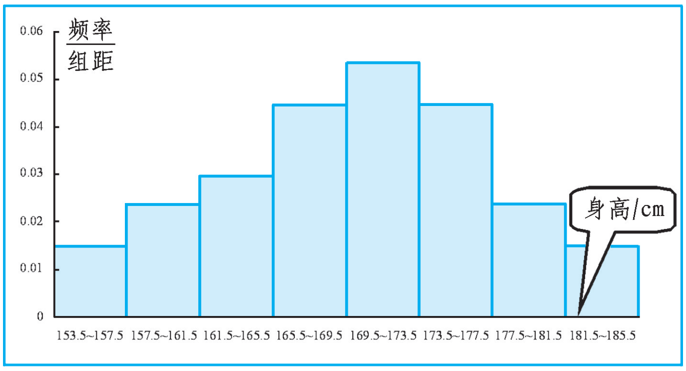


图 2－6－2

由图 2－6－2 可以看出，上述数据的分布呈现“中间高，两边低，左、右大致对称”的特点.

可以设想，如果数据无限增多且组距无限缩小，那么频率分布直方图上的频率折线将趋于一条光滑的曲线，我们将此曲线称为**概率密度曲线**(图 2－6－3).

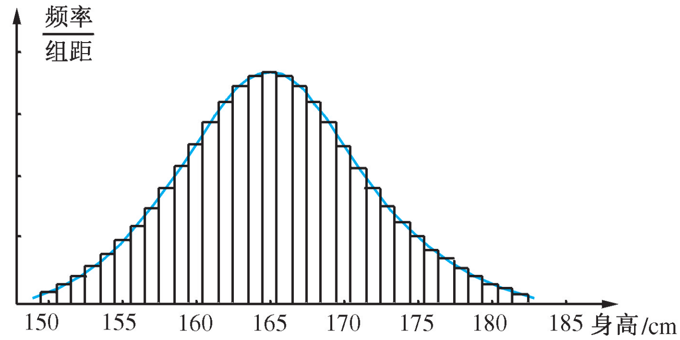


图 2－6－3

从图 2－6－3 可以看出，曲线存在一条过曲线峰顶的对称轴，身高的平均值就在曲线峰顶在 x 轴上的垂直投影处，身高在平均值附近的人相对较多，而远离平均值的人相对较少，即很高的人或很矮的人所占的比例差不多，且很小，这正和实际的情况相吻合. 我们把具有这种特性的曲线叫做**正态密度曲线**，它的函数表达式是

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbf{R},$$

这里有两个参数 μ 和 σ，其中 $\sigma>0$，$\mu\in\mathbf{R}$.

如图 2－6－4，不同的 μ 和 σ 对应着不同的正态密度曲线.

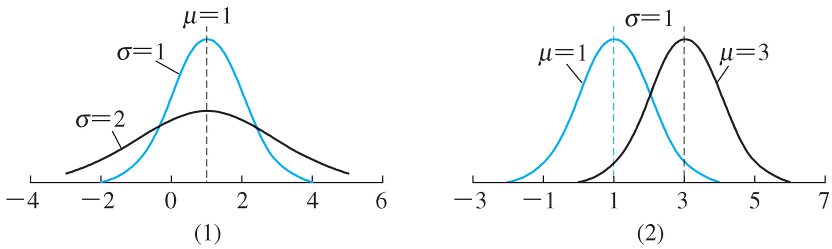


图 2－6－4

正态密度曲线图象具有如下特征：

(1) 当 $x<\mu$ 时，曲线上升；当 $x>\mu$ 时，曲线下降；当曲线向左右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线；

(2) 正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称；

(3) σ 越大，正态曲线越扁平；σ 越小，正态曲线越尖陡；

(4) 在正态曲线下方和 x 轴上方范围内的区域面积为 1.

若 X 是一个随机变量，则对任给区间 $(a,\ b]$，$P(a<X\leqslant b)$ 恰好是正态密度曲线下方和 X 轴上 $(a,\ b]$ 上方所围成的图形的面积，我

正态分布在统计学上的应用始于拉普拉斯和高斯. 1893 年，英国数学家皮尔逊 (K. Pearson，1857～1936) 首先使用“正态分布”这一名称.

们就称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的**正态分布**（normal distribution），简记为 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$.

现实世界中的很多随机变量遵循正态分布. 例如，反复测量某一个物理量，其测量误差 X 通常被认为服从正态分布；某一地区同性别同年龄组儿童的体重 W，被近似地认为服从正态分布；某地每年 1 月份的平均气温 T，也被近似地认为服从正态分布.

若 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则随机变量 X 在 μ 的附近取值的概率很大，在离 μ 很远处取值的概率很小.

具体地，如图 2－6－5 所示，随机变量 X 取值

落在区间 $(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)$ 上的概率约为 68.3%，

落在区间 $(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)$ 上的概率约为 95.4%，

落在区间 $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ 上的概率约为 99.7%.

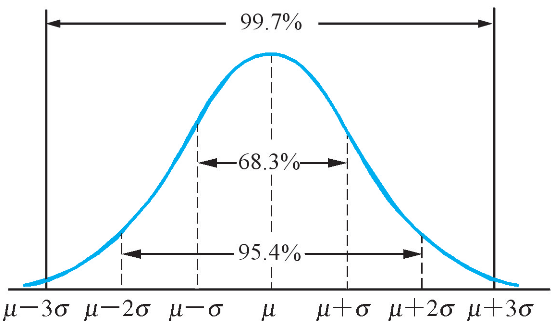
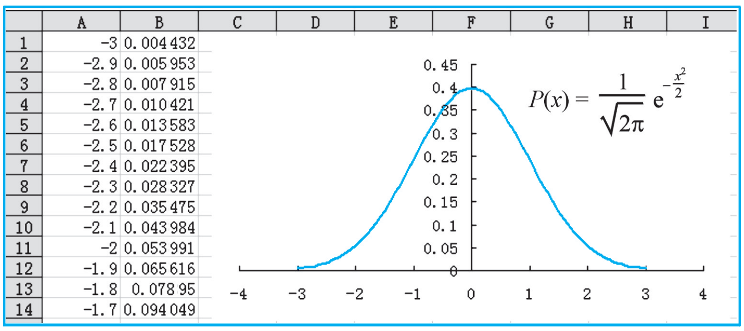


图 2－6－5

事实上，μ 就是随机变量 X 的均值，σ^2 就是随机变量 X 的方差，它们分别反映 X 取值的平均大小和稳定程度.

我们将正态分布 $N(0,\ 1)$ 称为标准正态分布[图 2－6－6，其中 A 栏为 x 的取值，B 栏为 $P(x)$ 的值]，通过查标准正态分布表（见附表 1）可以确定服从标准正态分布的随机变量的有关概率.



	A	B
1	-3	0.004432
2	-2.9	0.005953
3	-2.8	0.007915
4	-2.7	0.010421
5	-2.6	0.013583
6	-2.5	0.017528
7	-2.4	0.022395
8	-2.3	0.028327
9	-2.2	0.035475
10	-2.1	0.043984
11	-2	0.053991
12	-1.9	0.065616
13	-1.8	0.07895
14	-1.7	0.094049

图 2－6－6

例 1　若随机变量 $Z\sim N(0,\ 1)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(Z\leqslant 1.52)$；　(2) $P(Z>1.52)$；

(3) $P(0.57<Z\leqslant 2.3)$；　(4) $P(Z\leqslant -1.49)$.

解　(1) $P(Z\leqslant 1.52)=0.9357$（图 2－6－7(1)）.

只要求掌握用查表法求标准正态分布的有关概率. 该表是针对 $Z\geqslant 0$ 设计的，若 $Z<0$，则须转换再查. 查表前，可画个草图，以帮助查表.

$$\begin{aligned}(2)\ P(Z>1.52)&=1-P(Z\leqslant 1.52)\\&=1-0.9357\\&=0.0643.\end{aligned}$$

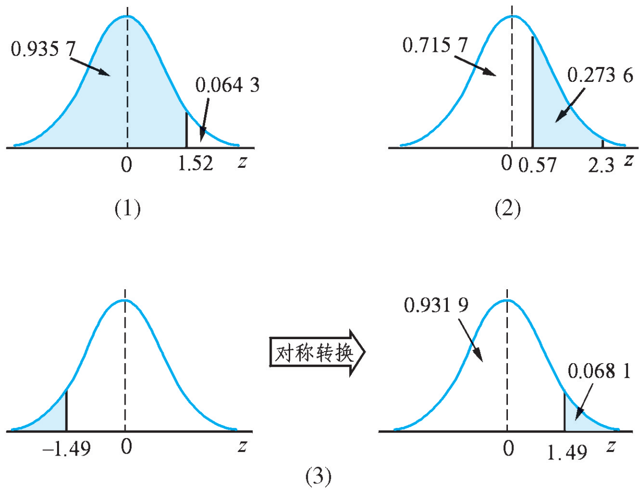


图 2－6－7

$$\begin{aligned}(3)\ P(0.57<Z\leqslant 2.3)&=P(Z\leqslant 2.3)-P(Z\leqslant 0.57)\\&=0.9893-0.7157\\&=0.2736\text{(图 2－6－7(2))}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\ P(Z\leqslant -1.49)&=P(Z\geqslant 1.49)\\&=1-P(Z\leqslant 1.49)\\&=1-0.9319\\&=0.0681\text{(图 2－6－7(3))}.\end{aligned}$$

实　验

设想有一块长 100 mm、高 60 mm、宽 7 mm 的透明塑料板，中间有一个宽 2～3 mm、深 50 mm 的小槽(图 2－6－8).

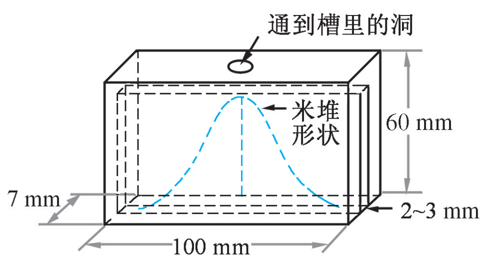


图 2－6－8

如果从上面的洞往里不断地丢进米粒(或沙粒)，那么米粒(或沙粒)在槽中堆积起来的边缘形状就像一条左右对称的光滑曲线，此曲线就是通常所说的正态曲线. 它也很像寺庙里的大钟从钟顶正中垂直切开的切口形状，因此正态曲线也叫钟形曲线.

从这个小试验可以看到，米堆正中部分向上突起像山峰一样，两旁平缓向下（无限）延伸，大部分的米粒堆在正中部分，而在两端只有少量的米粒.

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（$\mu\neq 0$ 或 $\sigma^2\neq 1$）时，如何计算 $P(a<X\leqslant b)$ 呢？在下面的“链接”中，介绍了将非标准正态分布化为标准正态分布的方法，有兴趣的同学可以参阅.

在实际生活中遇到的很多随机现象，随机变量大体满足其取值以某个值为中心且左右对称这种特性，一般都可以尝试用正态分布来描述这个随机变量的取值规律.

数学家们发现，在多种微小因素影响下，如果没有一种影响占主导地位，那么这样的随机变量服从正态分布. 特别是在独立地大数量重复试验时，就平均而言，任何一个随机变量的分布都将趋近于正态分布，这就是**中心极限定理**. 中心极限定理告诉我们，在平均重复观察多次后，我们可以利用正态分布对随机事件进行分析和预报.

EXCEL

在 Excel 中，计算正态分布的函数是“NORMDIST”，选择“插入/函数/统计”，按提示输入相应的参数，或在单元格内直接输入“=NORMDIST(184.5, 184, 2.5, 1)”，就可以得到 $P(X\leqslant 184.5)$ 的值（图 2-6-9）.

	A	B
1	0.579259709	=NORMDIST(184.5,184,2.5,1)
2	NORMDIST(x, mean, standard_dev, cumulative)	

图 2-6-9

$P(X>184.5)$ 和 $P(179<X\leqslant 189)$ 可分别转化为 $1-P(X\leqslant 184.5)$ 和 $P(X\leqslant 189)-P(X\leqslant 179)$ 来计算（图 2-6-10）.

	A	B
1	(1) P (X>184.5)	(2) P (179<X≤189)
2	=1-NORMDIST(184.5,184,2.5,1)	=NORMDIST(189,184,2.5,1)-NORMDIST(179,184,2.5,1)
3	0.420740290560897	0.954499736103641

图 2-6-10

练　习

1. 若随机变量 $Z\sim N(0,1)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(Z\leqslant 2.75)$；　　(2) $P(Z<0.5)$；

(3) $P(Z>-1.5)$；　　(4) $P(2<Z<2.9)$；

(5) $P(-2<Z\leqslant 2.9)$.

2. 若随机变量 $\xi\sim N(0,1)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(0<\xi<1.90)$；

(2) $P(-1.83<\xi<0)$；

(3) $P(|\xi|<1)$.

链　接

正态分布的标准化

可以证明，对任何一个正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 来说，通过 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 转化为标准正态分布 $Z\sim N(0,1)$.

例如，某批待出口的水果罐头，每罐净重 X（单位：g）服从正态分布 $N(184,2.5^2)$，求：

（1）随机抽取 1 罐，其净重超过 184.5 g 的概率；

（2）随机抽取 1 罐，其净重在 179 g 与 189 g 之间的概率.

解　（1）

$$\begin{aligned}P(X>184.5)&=P\left(\frac{X-184}{2.5}>\frac{184.5-184}{2.5}\right)\\&=P(Z>0.2)\\&=1-P(Z\leqslant 0.2)\\&=1-0.5793=0.4207.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}P(179<X\leqslant 189)&=P\left(\frac{179-184}{2.5}<\frac{X-184}{2.5}\leqslant\frac{189-184}{2.5}\right)\\&=P(-2<Z\leqslant 2)\\&=P(Z\leqslant 2)-P(Z\leqslant -2)\\&=P(Z\leqslant 2)-P(Z\geqslant 2)\\&=P(Z\leqslant 2)-[1-P(Z\leqslant 2)]\\&=2P(Z\leqslant 2)-1\\&=2\times 0.9772-1\\&=0.9544.\end{aligned}$$

答　随机抽取 1 罐，其净重超过 184.5 g 的概率是 0.4207，在 179 g 与 189 g 之间的概率为 0.9544.

习题 2.6

感受·理解

1. 若随机变量 $\xi \sim N(0, 1)$，$\Phi(x) = P(\xi \leqslant x)$，判断下列等式是否成立：

(1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$；

(2) $P\{|\xi| \leqslant x\} = 1 - 2\Phi(x)$；

(3) $P\{|\xi| < x\} = 2\Phi(x) - 1$；

(4) $P\{|\xi| > x\} = 2[1 - \Phi(x)]$.

2. 若随机变量 $X \sim N(0, 1)$，查标准正态分布表，计算：

(1) $P(X < 2.2)$；

(2) $P(X > 1.76)$；

(3) $P(X < -0.78)$；

(4) $P(|X| < 1.55)$；

(5) $P(|X| > 2.5)$；

(6) $P(-1.8 < X < 2)$.

3. 若随机变量 $Z \sim N(0, 1)$，且 $P(-a < Z \leqslant a) = 0.6$，$a > 0$，求 a.

思考·运用

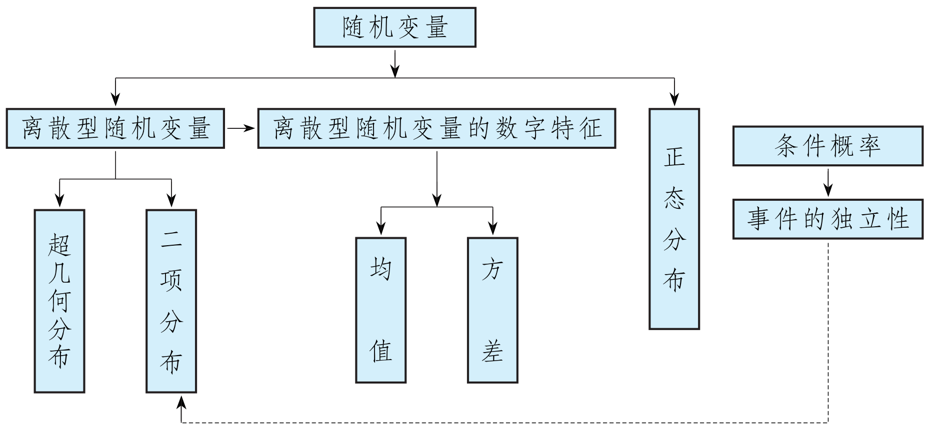
4. 在电子仪器的测量中常常会混进噪声，下面是一批检波器测量噪声(噪声电平)的 100 个观测值，试作出这些数据的频率直方图，判断其是否服从正态分布，再估计噪声在区间$[-2.5, 2.5]$上的概率.

0.1	−1.0	1.9	−0.1	0.0	0.3	−1.2	0.0	−0.4	0.1
1.5	0.3	1.0	−1.3	0.5	−1.2	−3.4	−3.0	−0.5	1.9
0.2	0.1	0.7	1.3	2.4	−0.5	0.5	−3.5	0.4	0.7
2.0	−0.4	−1.3	−1.9	−0.5	−1.5	−0.1	−1.1	0.0	0.2
−2.3	0.5	0.7	−2.1	−0.6	−0.4	2.4	1.5	1.6	0.6
−0.1	0.5	−0.1	1.1	2.5	−2.6	−0.3	1.2	−0.8	−2.4
0.7	1.2	0.5	0.0	−0.5	−0.3	−1.8	0.2	−1.9	−0.8
−0.4	−1.1	2.9	−1.1	0.4	0.0	−0.4	−0.3	1.7	−1.5
−1.0	1.1	0.0	−1.1	0.9	1.7	−0.3	2.1	0.7	0.7
−0.6	2.3	2.0	−1.1	1.2	1.0	0.1	−0.5	−0.3	−0.2

本章回顾

本 章 概 览

本章通过引入随机变量的概念，研究了几种类型的随机变量的概率分布，以及条件概率、事件的独立性及相互独立的事件同时发生的概率公式. 通过研究随机变量的数字特征如均值（数学期望）和方差（或标准差），以及随机变量的概率分布，对随机变量的总体水平及稳定程度进行了刻画，并通过样本均值和方差（或标准差）对总体进行估计.



通过引入随机变量描述随机事件，使我们能够运用分析的方法研究概率问题，为研究复杂的随机现象提供了工具. 超几何分布、二项分布、n 重独立重复试验及正态分布等，都是重要的概率模型，在社会生产、生活和科学研究中有着广泛的应用.

概率论是现代统计学的理论基础，是处理数据、进行统计推断的理论依据. 我们要善于运用概率的思想和理论，分析、处理现实世界中大量存在的随机现象.

内 容 提 要

1. 随机变量

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这个变量叫做随机变量. 通常用大写拉丁字母 X，Y，Z 等表示，而用小写拉丁字母 x，y，z 等表示随机变量取的可能值.

2. 随机变量 X 的概率分布

假定随机变量 X 有 n 个不同的取值，它们分别是 x_1，x_2，x_3，…，x_n，且 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1, 2, 3, \cdots, n$. 通常把这个式子叫做随机变

量 X 的概率分布列，用表格表示如下：

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

(1) $p_i \geqslant 0, i=1, 2, 3, \cdots, n$;　(2) $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$. 此表称为随机变量 X 的概率分布表. 随机变量 X 的概率分布列和分布表都叫做随机变量 X 的概率分布.

3. 超几何分布

若一个随机变量 X 的分布列为 $P(X=r)=\dfrac{C_M^r C_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}$，其中 $r=0, 1, 2, 3, \cdots, l, l=\min(n, M)$，则称 X 服从超几何分布，记作 $X \sim H(n, M, N)$，并将 $P(X=r)=\dfrac{C_M^r C_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}$ 记为 $H(r; n, M, N)$.

4. 条件概率与事件的独立性

对于两个事件 A 和 B，在已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，称为事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率，记为 $P(A|B)$.

条件概率公式：若 $P(B)>0$，则事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率是 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，从而 $P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)$. 事件 AB 表示事件 A 和 B 同时发生.

若事件 A，B 满足 $P(A|B)=P(A)$，则称事件 A，B 独立. 此时事件 A 和 B 同时发生的概率 $P(AB)=P(A)P(B)$.

5. n 次独立重复试验与二项分布

由 n 次试验构成，且每次试验相互独立完成，每次试验的结果仅有两种对立的状态，即 A 与 $\bar{A}$，每次试验中 $P(A)=p>0$，这样的试验叫 n 次独立重复试验，也称伯努利试验.

若随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}(k=0, 1, 2, \cdots, n, 0<p<1, p+q=1)$，则称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记作 $X \sim B(n, p)$.

6. 离散型随机变量的均值(数学期望)

若离散型随机变量 X 所有可能取的值是 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，相对应的概率为 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$，则称 $E(X)=\mu=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n(p_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n, p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$ 为离散型随机变量 X 的均值或数学期望.

7. 离散型随机变量的方差与标准差

$V(X)=\sigma^2=(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n(\mu=E(X), p_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n, p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$，它刻画了随机变量 X 与其均值 μ 的平均偏离程度，称其为离散型随机变量 X 的方差. 方差的算术平方根称为 X 的标准差，即 $\sigma=\sqrt{V(X)}$.

复 习 题

感受·理解

1. 甲、乙两人射击，中靶的概率分别为 0.8，0.7. 若两人同时独立射击，则他们都击中靶的概率是（　　）.

A. 0.56　　B. 0.48　　C. 0.75　　D. 0.6

2. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6，0.7. 若两人各投 2 次，则两人投中次数相等的概率为（　　）.

A. 0.248 4　　B. 0.25　　C. 0.90　　D. 0.392 4

3. 已知随机事件 A，B，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{2}$，求 $P(AB)$，$P(A\mid B)$.

4. 某种小麦在田间出现自然变异植株的概率为 0.004 5，今调查该种小麦 100 株，试计算获得 2 株和 2 株以上变异植株的概率.

5. 一批产品共 100 件，其中有 5 件不合格品. 从中任取 50 件，问：没有不合格品的概率是多少？恰有 1 件不合格品的概率是多少？

6. 在编号为 1，2，3，…，n 的 n 张赠券中，采用不放回方式抽样，求在第 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 次抽样时抽到 1 号赠券的概率.

7. 某批产品中有 20% 的不合格品，进行重复抽样检查，共取 5 个样品，其中不合格品数为 X，试确定 X 的概率分布.

8. 若一个人由于输血而引起不良反应的概率为 0.001，求：

（1）2 000 人中恰有 2 人引起不良反应的概率；

（2）2 000 人中多于 1 人引起不良反应的概率.

9. 对批量（即一批产品中所含产品的件数）很大的一批产品，进行抽样质量检查时，采用一件一件地抽取进行检查. 若检查的 5 件产品中未发现不合格产品，则停止检查并认为该批产品合格；若检查的 5 件中发现不合格产品，则也停止检查并认为该批产品不合格. 假定该批产品的不合格率为 0.05，检查产品的件数为 X，问：

（1）各次抽查是否可认为相互独立？为什么？

（2）求 X 的概率分布.

10. 膨胀仪是测量金属膨胀系数的一种精密仪器，测量的膨胀系数通过感光设备的照相底片显示出来. 现用玻璃板测量的结果 ξ_1 和用照相底板测量的结果 ξ_2 的概率分布如下表，试比较两种测量方法哪一种精确度更高.

ξ_1	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2
p_k	0.10	0.15	0.50	0.15	0.10
ξ_2	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2
p_k	0.13	0.17	0.40	0.17	0.13

思考·运用

11. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ 为 n 个事件（$n>2$），并假定 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，试用条件概率的计算公式化简下列式子，并说明结果的意义：

$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

12. 一群人中，37.5%的人为 A 型血，20.9%的人为 B 型血，33.7%的人为 O 型血，7.9%的人为 AB 型血. 已知能允许输血的血型配对如下表，现在这群人中任选 1 人为输血者，再选 1 人为受血者，问：输血能成功的概率是多少？（注：“+”表示允许输血，“/”表示不允许输血）

受血者＼输血者	A 型	B 型	AB 型	O 型
A 型	+	/	/	+
B 型	/	+	/	+
AB 型	+	+	+	+
O 型	/	/	/	+

13. 一部车床生产某种零件的不合格品率为 2%，若从这部车床生产的一组 5 个零件的随机样本中发现有 2 个或 2 个以上的不合格品，则停机维修. 试求停机维修的概率.

14. 试由 $P(A|B)>P(A)>0$ 推出 $P(B|A)>P(B)$，并作直观上的解释.

15. 一段繁忙的公路有大量汽车通过，设每一辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为 0.000 01，若每天在该段时间内有 1 000 辆汽车通过，则出事故的车辆数不少于 2 的概率是多少？

探究·拓展

16. 在一种称为“幸运 35”的福利彩票中，规定从 01，02，…，35 这 35 个号码中任选 7 个不同号码组成一注，并通过摇奖机从这 35 个号码中摇出 7 个不同的号码作为特等奖. 与特等奖号码仅 6 个相同的为一等奖，仅 5 个相同的为二等奖，仅 4 个相同的为三等奖，其他的情况不得奖. 为了便于计算，假定每个投注号只有 1 次中奖机会（只计奖金额最大的奖），该期的每组号码均有人买，且彩票无重复号码. 若每注彩票为 2 元，特等奖奖金为 100 万元/注，一等奖奖金为1 万元/注，二等奖奖金为 100 元/注，三等奖奖金为 10 元/注，试求：

（1）奖金额 X（元）的概率分布；

（2）这一期彩票售完可以为福利事业筹集多少资金？（不计发售彩票的费用）

17. （操作题）用抛掷 1 枚一角硬币和 1 枚五分硬币来模拟孟德尔的豌豆实验，设 2 枚硬币的正面对应 DD，一角硬币的正面与五分硬币的反面对应 Dd，一角硬币的反面与五分硬币的正面对应 dD，2 枚硬币的反面对应 dd. 抛掷这 2 枚硬币 100 次，记下出现 DD，Dd，dD 和 dd 的次数，考察你的结果是否基本符合 1∶1∶1∶1 的比例.

本章测试

一、填空题

1. 袋中有大小相同的红球 4 个，白球 3 个，从袋中任意取出 1 个球（不放回），直到取出的球是白球为止. 设取到白球的次数为 X，则随机变量 X 的所有可能取值为________________.

2. 已知 $P(AB)=\frac{3}{10}$，$P(A)=\frac{3}{5}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，那么 $P(B|A)=$__________.

3. 3 个同学猜同一个谜语，如果每人猜对的概率都是 $\frac{1}{3}$，并且各人猜对与否互不影响，那么他们同时猜对的概率为________.

4. 某人参加一次考试，共有 4 道试题，至少答对其中 3 道试题才能合格. 若他答每道题的正确率均为 0.5，并且答每道题之间相互独立，则他能合格的概率为________.

5. 若随机抛掷一枚质地均匀的正方体骰子 1 次，则所得点数 X 的数学期望是________.

6. 已知随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{i}{2a}(i=1, 2, 3)$，那么实数 $a=$________.

二、选择题

7. 设随机变量 X 的可能取值为 $1, 2, \cdots, n$，并且取 $1, 2, \cdots, n$ 是等可能的. 若 $P(X<4)=0.3$，则下面结论正确的是（　　）.

A. $n=3$　　B. $n=4$

C. $n=10$　　D. n 不能确定

8. 已知随机变量 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$，那么 $V(X)$ 等于（　　）.

A. 1　　B. $\frac{4}{3}$

C. 2　　D. 6

9. 已知盒子里有 10 个球（除颜色外其他属性都相同），其中 6 个白球，4 个黑球. 从盒子中一次随机地取出 2 个球，其中至少有 1 个黑球的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{5}$

10. 已知随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$，$P(X \leqslant 4)=0.8$，那么 $P(X \leqslant 0)$ 的值为（　　）.

A. 0.2　　B. 0.32

C. 0.4　　D. 0.8

三、解答题

11. 在 1，2，3，…，9 这 9 个自然数中，任取 2 个不同的数.

(1) 求这 2 个数中恰有 1 个是奇数的概率；

(2) 设 X 为所取的 2 个数中奇数的个数，求随机变量 X 的概率分布及数学期望.

12. 已知随机变量 X 的概率分布如下表所示，$E(X)=\frac{4}{3}$，求实数 a，b 的值及 $V(X)$.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{6}$

13. 已知 10 道试题中有 4 道选择题，甲、乙两人依次不放回地抽取 1 道，求：

(1) 甲抽到选择题的概率；

(2) 在甲抽到选择题的情况下，乙抽到选择题的概率.

14. 甲、乙两人投篮命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$，并且他们投篮互不影响. 现每人分别投篮 2 次，求甲比乙进球数多的概率.

15. 甲、乙两名运动员进行羽毛球单打比赛，根据以往比赛的胜负情况知道，每一局甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 如果比赛采用“三局两胜(即有一方先胜 2 局即获胜，比赛结束)”或“五局三胜(即有一方先胜 3 局即获胜，比赛结束)”两种规则，求在哪种比赛规则下，甲胜的概率较大.