大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道,数学与生活紧密相连.数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活.数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想.为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论.我们要积极地运用这些理论去解决问题.在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展.在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑到广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的"感受·理解"部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系.它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容.相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的"思考·运用"、"探究·拓展"等,以激发你探索数学的兴趣.在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

Δx	自变量 x 的增量
Δy	函数 y 的增量
$f'(x_0)$	函数 $f(x)$在 x_0 处的导数
$f'(x)$	函数 $f(x)$的导函数
y'	函数 y 的导函数
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	函数 $f(x)$由 a 至 b 的定积分
i	虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$
$\mathbf{C}$	复数集
z，$a+b\mathrm{i}$	复数 z；实部为 a，虚部为 b 的复数
$\overline{z}$	复数 z 的共轭复数
$\lvert z\rvert$，$\lvert a+b\mathrm{i}\rvert$	复数 z 的模，$a+b\mathrm{i}$ 的模

第 1 章　导数及其应用

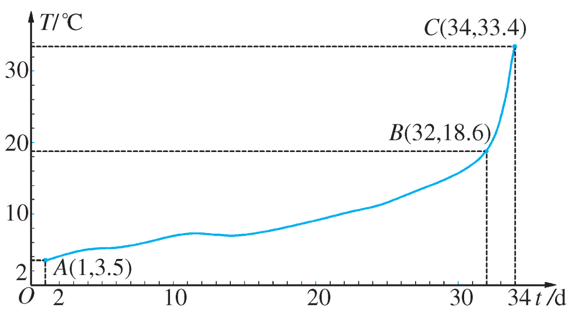
- 导数及其应用
  - 导数的概念
    - 平均变化率
    - 瞬时变化率——导数
  - 导数的运算
    - 常见函数的导数
    - 函数的和、差、积、商的导数
    - 简单复合函数的导数
  - 导数在研究函数中的应用
    - 单调性
    - 极大值与极小值
    - 最大值与最小值
  - 导数在实际生活中的应用
  - 定积分
    - 曲边梯形的面积
    - 定积分
    - 微积分基本定理

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，而且也表明过程：运动.

——恩格斯

世界充满着变化，有些变化几乎不被人们所察觉，而有些变化却让人们发出感叹与惊呼.

某市 2004 年 4 月 20 日最高气温为 33.4℃，而 4 月 19 日和 4 月 18 日最高气温分别为 24.4℃ 和 18.6℃，短短两天时间，气温陡增 14.8℃，闷热中的人们无不感叹："天气热得太快了！"



但是，如果我们将该市 2004 年 3 月 18 日最高气温 3.5℃与 4 月 18 日最高气温 18.6℃进行比较，发现两者温差为 15.1℃，甚至超过了 14.8℃，而人们却不会发出上述感叹.

这是什么原因呢？

原来前者变化得太快，而后者变化得缓慢.

- 用怎样的数学模型刻画变量变化的快与慢？
- 这样的数学模型有哪些应用？

1.1 导数的概念

1.1.1 平均变化率

在本章引言的案例中，气温“陡增”的数学意义是什么呢？

为了弄清这个问题，我们先来观察如图 1-1-1 所示的气温曲线图(以 3 月 18 日作为第一天).

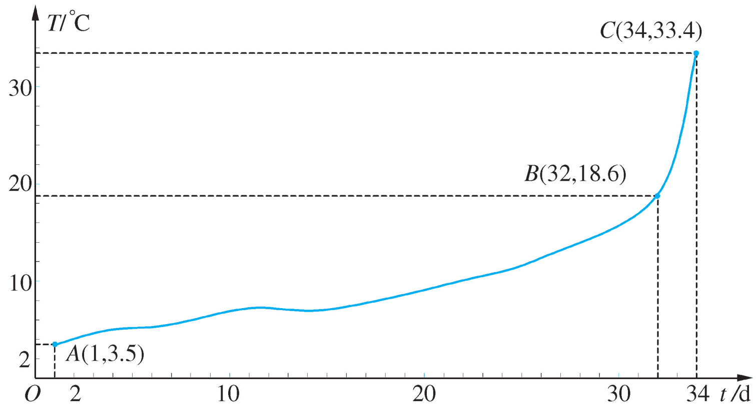


图 1-1-1

容易看出点 B，C 之间的曲线比点 A，B 之间的曲线更加“陡峭”. 陡峭的程度反映了气温变化的快与慢.

● 如何量化曲线的“陡峭”程度呢？

联想到用斜率来量化直线的倾斜程度，我们用比值

$$\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{33.4-18.6}{34-32}$$

来近似地量化点 B，C 之间这一段曲线的陡峭程度，并称该比值为气温在区间[32，34]上的平均变化率.

气温在区间[1，32]上的平均变化率为

$$\frac{18.6-3.5}{32-1}=\frac{15.1}{31}\approx 0.5.$$

气温在区间[32，34]上的平均变化率为

$$\frac{33.4-18.6}{34-32}=\frac{14.8}{2}=7.4.$$

虽然点 A，B 之间的温差与点 B，C 之间的温差几乎相同，但它

们的平均变化率却相差很大.

一般地,函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的**平均变化率**(average rates of change)为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

在图 1-1-1 中,我们可以感受到:平均变化率是曲线陡峭程度的"数量化",或者说,曲线陡峭程度是平均变化率的"视觉化".

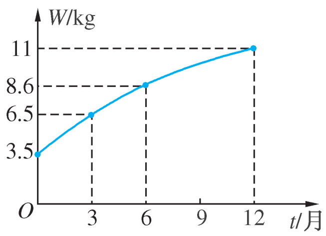


图 1-1-2

例 1 某婴儿从出生到第 12 个月的体重变化如图 1-1-2 所示,试分别计算从出生到第 3 个月以及第 6 个月到第 12 个月该婴儿体重的平均变化率.

解 从出生到第 3 个月,婴儿体重的平均变化率为

$$\frac{6.5-3.5}{3-0}=1(\text{kg/月}),$$

从第 6 个月到第 12 个月,婴儿体重的平均变化率为

$$\frac{11-8.6}{12-6}=\frac{2.4}{6}=0.4(\text{kg/月}).$$

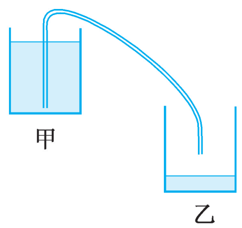


图 1-1-3

例 2 水经过虹吸管从容器甲流向容器乙(图 1-1-3),t s 后容器甲中水的体积 $V(t)=5e^{-0.1t}$(单位:cm^3),试计算第一个 10 s 内 V 的平均变化率.

解 在区间 $[0, 10]$ 上,体积 V 的平均变化率为

$$\frac{V(10)-V(0)}{10-0}\approx\frac{1.839-5}{10}=-0.3161(cm^3/s),$$

即第一个 10 s 内容器甲中水的体积的平均变化率为 $-0.3161\ cm^3/s$(负号表示容器甲中的水在减少).

例 3 已知函数 $f(x)=x^2$,分别计算函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$, $[1, 2]$, $[1, 1.1]$, $[1, 1.001]$ 上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}=4,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{1}=3,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 1.1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1,$$

函数 $f(x)$在$[1, 1.001]$上的平均变化率为

$$\frac{f(1.001)-f(1)}{1.001-1}=\frac{1.001^2-1^2}{0.001}=2.001.$$

例 4 已知函数 $f(x)=2x+1$, $g(x)=-2x$，分别计算函数 $f(x)$及 $g(x)$在区间$[-3, -1]$,$[0, 5]$上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$在$[-3, -1]$上的平均变化率为

$$\frac{f(-1)-f(-3)}{(-1)-(-3)}=\frac{[2\times(-1)+1]-[2\times(-3)+1]}{2}=2,$$

函数 $f(x)$在$[0, 5]$上的平均变化率为

$$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=2,$$

函数 $g(x)$在$[-3, -1]$上的平均变化率为

$$\frac{g(-1)-g(-3)}{(-1)-(-3)}=-2,$$

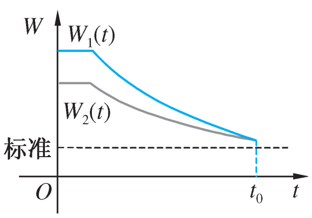
函数 $g(x)$在$[0, 5]$上的平均变化率为

$$\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=-2.$$

思考

从例 4 的求解中，你能发现一次函数 $y=kx+b$ 在区间$[m, n]$上的平均变化率有什么特点吗？

练习



（第 2 题）

1. 甲、乙两人投入相同的资金经营某商品，甲用 5 年时间获利 10 万元，乙用 5 个月时间获利 2 万元，如何比较和评价甲、乙两人的经营成果？
2. 环境保护部门在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业进行检查，连续检测结果如图所示（其中 $W_1(t)$,$W_2(t)$分别表示甲、乙两企业的排污量），试比较两个企业的治污效果.
3. 已知 $f(x)=3x+1$，求 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的平均变化率：
   (1) $a=-1$, $b=2$;
   (2) $a=-1$, $b=1$;
   (3) $a=-1$, $b=-0.9$.
4. 求经过函数 $y=x^2$ 图象上两点 A, B 的直线的斜率：
   (1) $x_A=1$, $x_B=1.001$;
   (2) $x_A=1$, $x_B=0.9$;
   (3) $x_A=1$, $x_B=0.99$;
   (4) $x_A=1$, $x_B=0.999$.
5. 若一质点的运动方程为 $S=t^2+3$（位移单位：m；时间单位：s），则在时间段$[3,3+\Delta t]$上的平均速度是多少？

1.1.2 瞬时变化率——导数

1. 曲线上一点处的切线

平均变化率近似地刻画了曲线在某区间上的变化趋势，那么，

● 如何精确地刻画曲线上某一点处的变化趋势呢？

如果将点 P 附近的曲线放大，那么就会发现，曲线在点 P 附近看上去有点像是直线(图 1-1-4).

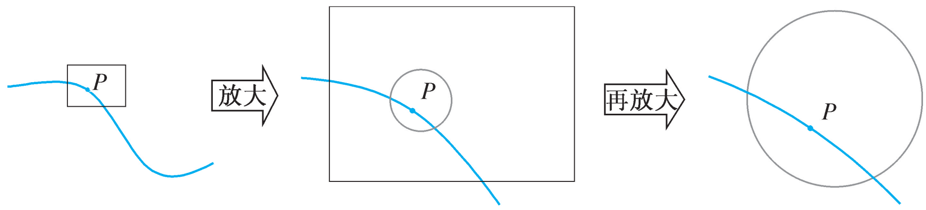


图 1-1-4

如果将点 P 附近的曲线再放大，那么就会发现，曲线在点 P 附近看上去几乎成了直线. 事实上，如果继续放大，那么曲线在点 P 附近将逼近一条确定的直线 l，该直线 l 是经过点 P 的所有直线中最逼近曲线的一条直线.

因此，在点 P 附近我们可以用这条直线 l 来代替曲线. 也就是说，在点 P 附近，曲线可以看做直线(即在很小范围内以直代曲).

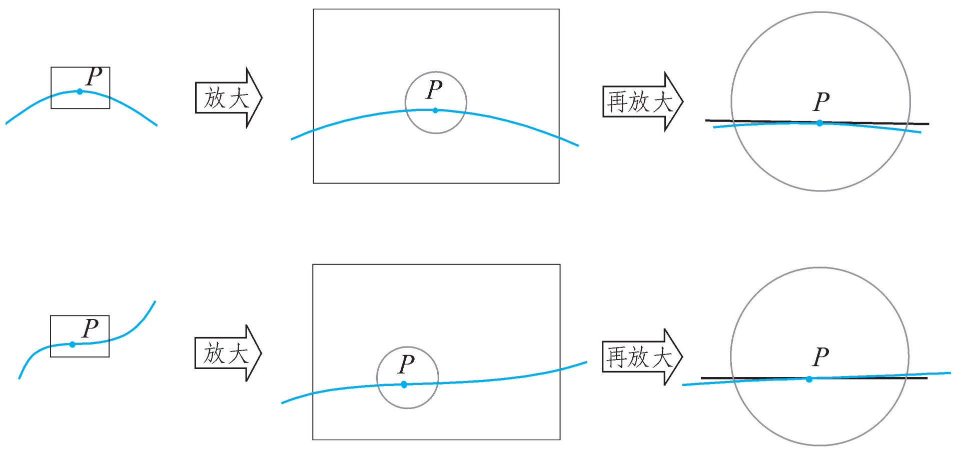


图 1-1-5

既然点 P 附近的曲线被看作直线 l，那么我们可以用直线 l 的斜率来刻画曲线经过点 P 时上升或下降的“变化趋势”.

探 究

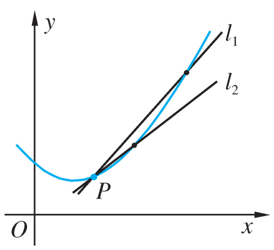


图 1－1－6

如图 1－1－6 所示，直线 l_1，l_2 为经过曲线上一点 P 的两条直线.

（1）试判断哪一条直线在点 P 附近更加逼近曲线；

（2）在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2 更加逼近曲线的直线 l_3 吗？

（3）在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2，l_3 更加逼近曲线的直线 l_4 吗？

怎样找到经过曲线上一点 P 处最逼近曲线的直线 l 呢？

如图 1－1－7，设 Q 为曲线 C 上不同于 P 的一点，这时，直线 PQ 称为曲线的**割线**（secant line）. 随着点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，割线 PQ 在点 P 附近越来越逼近曲线 C. 当点 Q 无限逼近点 P 时，直线 PQ 最终就成为在点 P 处最逼近曲线的直线 l，这条直线 l 称为曲线在点 P 处的**切线**（tangent line）.

利用这种割线逼近切线的方法，我们来计算曲线上一点处切线的斜率.

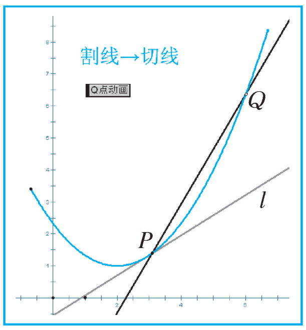


图 1－1－7

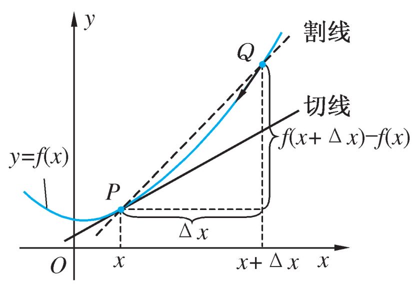


图 1－1－8

如图 1－1－8，设曲线 C 上一点 $P(x,\ f(x))$，过点 P 的一条割线交曲线 C 于另一点 $Q(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$，则割线 PQ 的斜率为

Δx 可正也可负，当 Δx 取负值时，点 Q 位于点 P 的左侧.

$$k_{PQ}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

当点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，并无限靠近点 P 时，割线 PQ 逼近点 P 的切线 l，从而割线的斜率逼近切线 l 的斜率，即当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 无限趋近于点 $P(x,\ f(x))$ 处的切线的斜率.

例 1 已知 $f(x)=x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线斜率.

分析 为求得过点 $(2,\ 4)$ 的切线斜率，我们从经过点 $(2,\ 4)$ 的任意一条直线（割线）入手.

解 设 $P(2,\ 4)$，$Q(2+\Delta x,\ (2+\Delta x)^2)$，则割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x.$$

当 Δx 无限趋近于 0 时，k_{PQ} 无限趋近于常数 4，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,4)$ 处的切线斜率为 4.

EXCEL

在 Excel 中计算可知(如图 1－1－9)，当 Δx 越接近 0，割线 PQ 的斜率 k_{PQ} 就越接近常数 4.

	A	B	C	D
1	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$
2	1	5	-1	3
3	0.1	4.1	-0.1	3.9
4	0.01	4.01	-0.01	3.99
5	0.001	4.001	-0.001	3.999
6	0.0001	4.0001	-0.0001	3.9999
7	0.00001	4.00001	-0.00001	3.99999

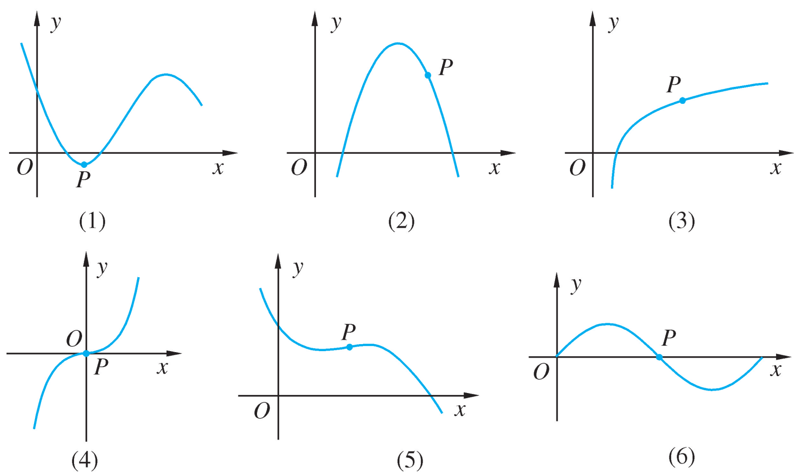
单元格 B2，D2 中的公式.

	B	C	D
2	=((2+A2)^2-2^2)/A2	-1	=((2+C2)^2-2^2)/C2

图 1－1－9

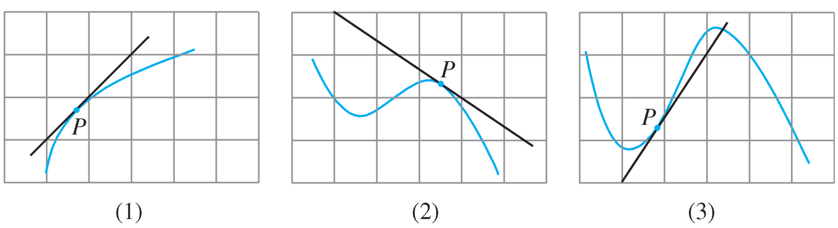
练 习

1. 利用直尺，用割线逼近切线的方法作出下列曲线在点 P 处的切线.



(第 1 题)

2. 在下列 3 个图中，直线 l 为曲线在点 P 处的切线，分别求 l 的斜率.

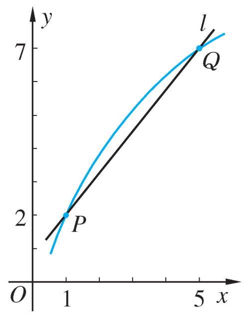


(第 2 题)

3. 如图，l 为经过曲线上点 P 和 Q 的割线.

（1）若 $P(1,\ 2)$，$Q(5,\ 7)$，求 l 的斜率；

（2）当 Q 沿曲线向点 P 靠近时，l 的斜率变大还是变小？



（第 3 题）

4.（1）运用例 1 中割线逼近切线的方法，分别求曲线 $y=x^2$ 在 $x=0$，$x=-2$，$x=3$ 处的切线斜率.

（2）用割线逼近切线的方法，求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处切线的斜率.

2. 瞬时速度与瞬时加速度

在物理学中，运动物体的位移与所用时间的比称为**平均速度**(mean velocity)，它反映了物体在某段时间内运动的快慢程度. 那么，如何精确刻画物体在某一时刻运动的快慢程度呢？

我们先看下面的实例. 跳水运动员从 10 m 跳台腾空到入水的过程中，不同时刻的速度是不同的. 假设 t s 后运动员相对于水面的高度为

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

试确定 $t=2$ s 时运动员的速度.

先求出运动员在 2 s 到 2.1 s(即 $t\in[2,\ 2.1]$) 的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{H(2.1)-H(2)}{2.1-2}=-13.59(\mathrm{m/s}).$$

同样，可以算出更短的时间内的平均速度.

由图 1－1－10 可以看出，当 Δt 越接近 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 越接近常数 -13.1，这一常数可作为运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

单元格 C2 中的公式.

	A	B	C	D	E	F
1	时间区间	Δt	平均速度	时间区间	Δt	平均速度
2	[2, 2.1]	0.1	-13.59	[1.9, 2]	-0.1	-12.61
3	[2, 2.01]	0.01	-13.149	[1.99, 2]	-0.01	-13.051
4	[2, 2.001]	0.001	-13.1049	[1.999, 2]	-0.001	-13.0951
5	[2, 2.0001]	0.0001	-13.10049	[1.9999, 2]	-0.0001	-13.09951
6	[2, 2.00001]	0.00001	-13.100049	[1.99999, 2]	-0.00001	-13.099951

	C
2	=((-4.9*(2+B2)^2+6.5*(2+B2)+10)-(-4.9*2^2+6.5*2+10))/B2

图 1－1－10

一般地，如果当 Δt 无限趋近于 0 时，运动物体位移 $S(t)$ 的平均变化率 $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数，那么这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的**瞬时速度**（instantaneous velocity），也就是位移对于时间的瞬时变化率.

类似地，我们还可以求出某一时刻物体运动的瞬时加速度.

例 2 已知一辆轿车在公路上作加速直线运动，假设 t s 时的速度为 $v(t)=t^2+3$，求当 $t=t_0$ s 时轿车的瞬时加速度 a.

解 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的时间内，轿车的平均加速度为

$$\begin{aligned}\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}&=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}\\&=\frac{(t_0+\Delta t)^2+3-(t_0^2+3)}{\Delta t}\\&=2t_0+\Delta t,\end{aligned}$$

当 Δt 无限趋近于 0 时，$\bar{a}$ 无限趋近于 $2t_0$，即 $a=2t_0$.

所以，当 $t=t_0$ s 时轿车的瞬时加速度为 $2t_0$.

一般地，如果当 Δt 无限趋近于 0 时，运动物体速度 $v(t)$ 的平均变化率 $\dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数，那么这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的**瞬时加速度**（instantaneous acceleration），也就是速度对于时间的瞬时变化率.

练 习

1. 自由落体运动的位移 S 与时间 t 的关系为 $S=\frac{1}{2}gt^2$（位移单位：m；时间单位：s；g 为常数）.
   (1) 计算 t 分别在[3,3.1],[3,3.01],[3,3.001]各时间段内的平均速度；
   (2) 计算 t 在$[3,3+\Delta t]$内的平均速度；
   (3) 求 $t=3$ 时的瞬时速度；
   (4) 求 $t=t_0$ 时的瞬时速度；
   (5) 根据(4)的结果，分别求出 $t=0,1,2$ 时的瞬时速度.
2. 一质点的运动方程为 $S=t^2+10$（位移单位：m；时间单位：s），试求该质点在 $t=3$ 时的瞬时速度.

3. 导数

前面的实际问题都涉及了函数在某一点处的瞬时变化率——导数.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，$x_0\in(a,b)$，若 Δx 无限趋近于 0 时，比值

Δx 表示自变量 x 的改变量，Δy 表示相应的函数的改变量.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

无限趋近于一个常数 A，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**可导**，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**(derivative)，记作 $f'(x_0)$.

若用符号"→"表示"无限趋近于"，则"当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于常数 A"就可以表示为

$$\text{“当 }\Delta x\to 0\text{ 时，}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to A\text{”.}$$

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率(图 1 - 1 - 11).

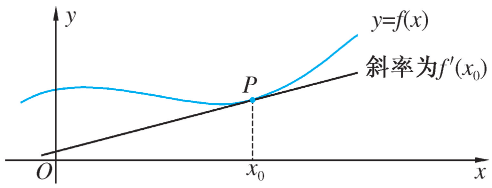


图 1 - 1 - 11

例 3 已知 $f(x)=x^2+2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数；

(2) 求 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解 (1) 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(1+\Delta x)^2+2-(1^2+2)}{\Delta x}$$

$$=2+\Delta x,$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，$2+\Delta x\to 2$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数等于 2.

(2) 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(a+\Delta x)^2+2-(a^2+2)}{\Delta x}$$

$$=2a+\Delta x,$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，$2a+\Delta x\to 2a$，所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数等于 $2a$.

若 $f(x)$ 对于区间 (a, b) 内任一点都可导，则 $f(x)$ 在各点的导数也随着自变量 x 的变化而变化，因而也是自变量 x 的函数，该函数称为 $f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$.

如无特别说明，本章所涉及的函数都是可导函数.

在不引起混淆时，导函数 $f'(x)$ 也简称为 $f(x)$ 的导数.

瞬时速度是运动物体的位移 $S(t)$ 对于时间 t 的导数，即

$$v(t)=S'(t);$$

瞬时加速度是运动物体的速度 $v(t)$ 对于时间 t 的导数，即

$$a(t)=v'(t).$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值. 例如，$f(x)$ 在 $x=2$，$x=2x_0+3$ 处的导数分别是导函数 $f'(x)$ 在该处的函数值 $f'(2)$，$f'(2x_0+3)$.

练　习

1. 质点的运动方程为 $S=3t+1$（位移单位：m，时间单位：s），分别求 $t=1$，$t=2$ 时的速度.
2. 求下列函数在 $x=x_0$ 处的导数：

   (1) $y=3x+1$，$x_0=3$；

   (2) $y=x^2$，$x_0=a$；

   (3) $y=\frac{1}{x}$，$x_0=2$.
3. $f'(1)$ 与 $f(1)$ 的含义有什么不同？$f'(1)$ 与 $f'(x)$ 的含义有什么不同？
4. 求函数 $y=(2x-1)^2$ 在 $x=3$ 处的导数.
5. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$，那么 $f(1)+f'(1)=$ ________.
6. 若某水库在泄洪过程中水面的高度与泄洪时间 t 的函数关系是 $h=f(t)$，请说明 $f'(t)$ 的实际意义.

链　接

经济学中涉及的函数，有时是“离散型”函数，我们仍将其看成“连续型”函数．参看《数学 1（必修）》“函数的应用”．

边 际 函 数

在经济学中，生产 x 件产品的成本称为成本函数，记为 $C(x)$；出售 x 件产品的收益称为收益函数，记为 $R(x)$；$R(x)-C(x)$ 称为利润函数，记为 $P(x)$．相应地，它们的导数 $C'(x)$，$R'(x)$ 和 $P'(x)$ 分别称为边际成本函数、边际收益函数和边际利润函数．

如图 1－1－12 所示，$C(x)$ 在 $x=a$ 处的导数 $C'(a)$ 称为生产规模为 a 时的边际成本值，该值给出了生产规模为 a 时，再增加 1 个产品时，成本的增加量，边际值表现为两个微增量的比．

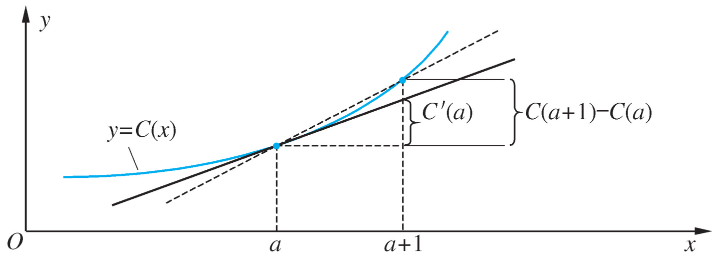


图 1－1－12

由图可见，

$$C(a+1)-C(a)\approx C'(a)\times 1=C'(a).$$

$C(a+1)-C(a)$ 表示生产规模由 a 增加为 $a+1$ 时成本的相应增加量．经济学中，边际成本 $C'(a)$ 通常近似地看成生产规模增加 1 个单位时成本的增加量．类似地，对 $R'(x)$ 和 $P'(x)$ 也有相应的数学模型．

试用上述知识解决下面的问题：设成本函数 $C(x)=0.005x^3-3x$，x 为每天生产的产品数．

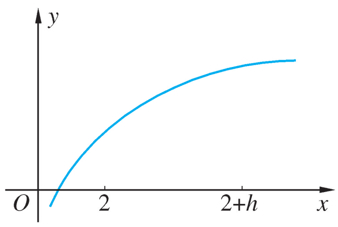
(1) 若每天生产产品数由 1 000 件改为 1 001 件，成本的绝对增加值是多少？

(2) 在 $x=1\,000$ 处的边际成本是多少？

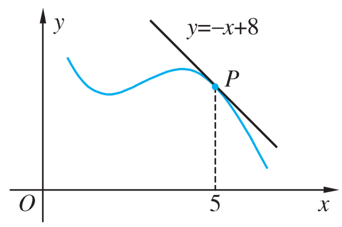
习题 1.1

感受・理解

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，在图中作线段，分别表示 $f(2)$，$f(2+h)$，$f(2+h)-f(2)$，h.



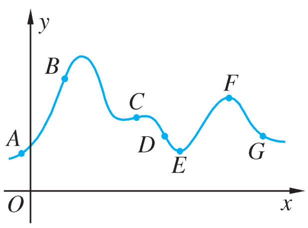
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$，求 $f(5)$ 及 $f'(5)$.

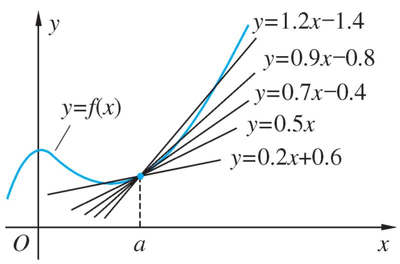
3. 如图，A，B，C，D，E，F，G 为函数 $y=f(x)$ 图象上的点. 在哪些点处，曲线的切线斜率为 0？在哪些点处，切线的斜率为正？在哪些点处，切线的斜率为负？在哪一点处，切线的斜率最大？在哪一点处，切线的斜率最小？



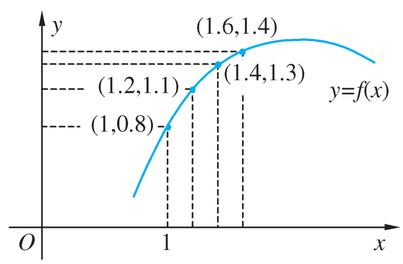
（第 3 题）

4. 曲线 $y=x^2$ 在点 $P\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$ 处的切线斜率是多少？写出该处切线的方程.

5. 如图，求 $f(a)$，并估计 $f'(a)$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 根据所给函数 $y=f(x)$ 的图象，估计 $f'(1)$.

7. 当 h 无限趋近于 0 时，$\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h}$ 无限趋近于多少？$\dfrac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$ 无限趋近于多少？

8. 已知函数 $f(x)=x^2$，记 $I_n=\left[2, 2+\dfrac{1}{2^n}\right]$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 $f(x)$在区间 I_n 上的平均变化率 a_n，并观察当 n 不断增大时 a_n 的变化趋势.

9. (1) 若 $f(x+h)-f(x)=2hx+5h+h^2$，用割线逼近切线的方法求 $f'(x)$；

(2) 若 $g(x+h)-g(x)=3hx^2+3h^2x+h^3$，用割线逼近切线的方法求 $g'(x)$.

思考・运用

10. 已知曲线 $y=x^2$ 的一条切线的斜率是 -4，求切点的坐标.

11. 设 $f(x)=-\dfrac{6}{x}$.

(1) 函数 $f(x)$ 在区间[1, 2]，[1, 1.5]，[1, 1.1]上的平均变化率各是多少？

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率是多少？

12. 蜥蜴的体温与阳光照射的关系近似为 $T(t)=\dfrac{120}{t+5}+15$，其中 $T(t)$ 为蜥蜴的体温(单位：℃)，t 为太阳落山后的时间(单位：min).

(1) 从 $t=0$ 到 $t=10$，蜥蜴的体温下降了多少？

(2) 从 $t=0$ 到 $t=10$，蜥蜴的体温的平均变化率是多少？

(3) 当 $t=10$ 时，蜥蜴的体温的瞬时变化率是多少？

(4) 蜥蜴的体温的瞬时变化率为 -1 ℃/min 时的时刻 t 是多少？(精确到 0.01)

探究・拓展

13. 航天飞机发射后的一段时间内，第 t s 时的高度 $h(t)=5t^3+30t^2+45t+4$，其中 h 的单位为 m，t 的单位为 s.

(1) $h(0)$，$h(1)$分别表示什么？

(2) 求第 1 s 内的平均速度；

(3) 求第 1 s 末的瞬时速度；

(4) 经过多长时间，飞机的速度达到 75 m/s？

14. 生产某塑料管的利润函数为 $P(n)=-n^3+600n^2+67\,500n-1\,200\,000$，其中 n 为工厂每月生产该塑料管的根数，利润 $P(n)$ 的单位为元.

(1) 求边际利润函数 $P'(n)$；

(2) 求 n 的值，使 $P'(n)=0$；

(3) 解释(2)中 n 的值的实际意义.

15. 对于函数 $f(x)$，若 $f'(x_0)$存在，则当 h 无限趋近于 0 时，下列式子各无限趋近于何值？

(1) $\dfrac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}$；

(2) $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

1.2 导数的运算

在上一节中，我们用割线逼近切线的方法引入了导数的概念，那么，

● 如何求函数的导数呢？

1.2.1 常见函数的导数

根据导数的概念，求函数导数的过程可以用下面的流程图来表示.

给定函数 $y=f(x)$

↓

计算 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

↓

令 $\Delta x\to 0$

↓

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to A(x)$

↓

$f'(x)=A(x)$

图 1－2－1

(1) 对于 $f(x)=kx+b$ (k, b 为常数)，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\frac{k(x+\Delta x)+b-(kx+b)}{\Delta x}\\&=k,\end{aligned}$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to k$，所以 $f'(x)=k$.

特别地，当 $k=0$ 时，有 $f'(x)=0$；当 $k=1$，$b=0$ 时，有 $f'(x)=1$.

(2) 对于 $f(x)=x^2$，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$= 2x + \Delta x,$$

从而，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$，所以

$$f'(x) = 2x.$$

(3) 对于 $f(x) = x^3$，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2,\end{aligned}$$

从而，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$，所以

$$f'(x) = 3x^2.$$

(4) 对于 $f(x) = \frac{1}{x}$，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x} \\ &= \frac{-1}{(x+\Delta x)x},\end{aligned}$$

从而，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{1}{x^2}$，所以

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

(5) 对于 $f(x) = \sqrt{x}$，因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}},\end{aligned}$$

从而，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

以上求导公式可以归纳如下：

(1) $(kx+b)'=k$ (k，b 为常数)；

(2) $C'=0$(C 为常数)；

(3) $(x)'=1$；

(4) $(x^2)'=2x$；

(5) $(x^3)'=3x^2$；

(6) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$；

(7) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

思　考

由上面的求导公式(3)～(6)，你能发现什么规律？

对于基本初等函数，有下面的求导公式：

(8) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为常数)；

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)；

(10) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)；

(11) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(12) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

(13) $(\sin x)'=\cos x$；

(14) $(\cos x)'=-\sin x$.

练　习

1. 对于函数 $f(x)$来说，$f'(1)$，$f'(2)$与 $f'(x)$有什么区别与联系？

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{1}{x^3}$；　(2) $y=\sqrt[3]{x^5}$；　(3) $y=4^x$；　(4) $y=\log_3 x$.

3. 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$处的切线的方程.

4. 若直线 $y=-x+b$ 为函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象的切线，求 b 及切点坐标.

5. 直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 能作为下列函数图象的切线吗？若能，求出切点坐标；若不能，简述理由.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$；　(2) $f(x)=x^4$；　(3) $f(x)=\sin x$；　(4) $f(x)=\mathrm{e}^x$.

6. 设函数 $f(x)=x^3$，求$(f(-2))'$以及 $f'(-2)$.

7. 若直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x$ ($x>0$) 的一条切线，求实数 b 的值.

1.2.2 函数的和、差、积、商的导数

已知 $f'(x)$，$g'(x)$，怎样求 $[f(x)+g(x)]'$ 呢？

例 1 求 $y=x^2+x$ 的导数.

解 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-(x^2+x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}+\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}$$

$$=2x+\Delta x+1,$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x+1$，所以 $y'=2x+1$.

由于 $(x^2)'=2x$，$x'=1$，则有

$$(x^2+x)'=(x^2)'+x'.$$

一般地，我们有函数和的求导法则：

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x),$$

即两个函数的和的导数，等于这两个函数的导数的和.

类似地，函数的差、积、商的求导法则是：

求导法则的证明不作要求.

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x),$$

$$[Cf(x)]'=Cf'(x)(C\text{ 为常数}),$$

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq 0).$$

有了函数的和、差、积、商的求导法则，我们就可以直接运用基本初等函数的求导公式求出较为复杂的函数的导数.

例 2 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=x^2+\sin x$；

(2) $g(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2$.

解 (1) $f'(x)=(x^2+\sin x)'$

$=(x^2)'+(\sin x)'$

$=2x+\cos x.$

(2) $g'(x)=\left(x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+2\right)'$

$=3x^2-3x-6.$

例 3 求下列函数的导数：

(1) $h(x)=x\sin x$；

(2) $S(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$.

解 (1) $h'(x)=(x\sin x)'$

$=x'\sin x+x(\sin x)'$

$=\sin x+x\cos x.$

(2) $S'(t)=\left(\dfrac{t^2+1}{t}\right)'$

$=\dfrac{(t^2+1)'t-(t^2+1)t'}{t^2}$

$=\dfrac{2t\cdot t-t^2-1}{t^2}$

$=\dfrac{t^2-1}{t^2}.$

思　考

例 3(2)还有其他解法吗?

练　习

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+\cos x$；　　(2) $y=2^x-2\ln x$.

2. 求曲线 $y=x^2+2x-3$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

3. 用两种方法求函数 $y=(2x-1)(x+3)$ 的导数.

4. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$；

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$.

5. 已知函数 $f(x)$的导数是 $f'(x)$，求函数$[f(x)]^2$的导数.

1.2.3 简单复合函数的导数

观察函数 $y=(3x-1)^2$ 和 $y=\sin 2x$，不难发现，$y=(3x-1)^2$ 由 $y=u^2$ 及$u=3x-1$ 复合而成；$y=\sin 2x$ 由 $y=\sin u$ 及 $u=2x$ 复合而成. 像这样由基本初等函数复合而成的函数，称为复合函数. 那么，

● 怎样求复合函数的导数呢?

先考察 $y=(3x-1)^2$，将 y 关于 x 的导数记为 y'_x. 一方面，

$$\begin{aligned}y'_x&=[(3x-1)^2]'\\&=(9x^2-6x+1)'\\&=18x-6\\&=6(3x-1).\end{aligned}$$

另一方面，将 $y=(3x-1)^2$ 看成由 $y=u^2$ 及 $u=3x-1$ 复合而成，并将 y 关于 u 的导数记为 y'_u，即 $y'_u=(u^2)'=2u$. 同理，将 u 关于 x 的导数记为 u'_x，即 $u'_x=(3x-1)'=3$. 因而有

$$\begin{aligned}y'_x&=6(3x-1)\\&=2(3x-1)\times 3\\&=2u\times 3,\end{aligned}$$

即

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

再考察 $y=\sin 2x$. 一方面，

$$\begin{aligned}y'_x&=(\sin 2x)'\\&=(2\sin x\cos x)'\\&=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'\\&=2\cos^2 x-2\sin^2 x\\&=2\cos 2x.\end{aligned}$$

另一方面，将 $y=\sin 2x$ 看成由 $y=\sin u$ 及 $u=2x$ 复合而成，仿上可得，$y'_u=(\sin u)'=\cos u$，$u'_x=(2x)'=2$. 因而也有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

一般地，我们有：

> 若 $y=f(u)$，$u=ax+b$，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即
>
> $$y'_x=y'_u\cdot a.$$

例 1 求下列函数的导数：

（1）$y=(2x-3)^3$；　　（2）$y=\ln(5x+1)$.

解 （1）$y=(2x-3)^3$ 可由 $y=u^3$ 及 $u=2x-3$ 复合而成，从而

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u\times 2=(u^3)'\times 2=3u^2\times 2\\ &=6u^2=6(2x-3)^2. \end{aligned}$$

（2）$y=\ln(5x+1)$ 可由 $y=\ln u$ 及 $u=5x+1$ 复合而成，从而

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u\times 5=(\ln u)'\times 5\\ &=\frac{1}{u}\times 5=\frac{5}{5x+1}. \end{aligned}$$

例 2 求下列函数的导数：

（1）$y=\dfrac{1}{3x-1}$；　　（2）$y=\cos(1-2x)$.

解 （1）$y=\dfrac{1}{3x-1}$ 可由 $y=\dfrac{1}{u}$ 及 $u=3x-1$ 复合而成，从而

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u\times 3=\left(\frac{1}{u}\right)'\times 3\\ &=-\frac{1}{u^2}\times 3=-\frac{3}{(3x-1)^2}. \end{aligned}$$

（2）$y=\cos(1-2x)$ 可由 $y=\cos u$ 及 $u=1-2x$ 复合而成，从而

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u\times(-2)=(\cos u)'\times(-2)\\ &=(-\sin u)\times(-2)=2\sin(1-2x). \end{aligned}$$

练　习

1. 指出以下函数可以分别看做是由哪两个函数复合而成的：

（1）$y=(3+\sin x)^4$；　　（2）$y=\ln\dfrac{1}{2x+1}$；

（3）$y=2^{2x-1}$；　　（4）$y=\dfrac{1}{1-\cos x}$.

2. 求下列函数的导数：

（1）$y=(2x+3)^2$；　　（2）$y=(1-3x)^3$；

（3）$y=e^{2x}$；　　（4）$y=\ln\dfrac{1}{x}$.

3. 求曲线 $y=\sin 2x$ 在点 $P(\pi,0)$处的切线方程.

4. 利用 $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，$(\sin x)'=\cos x$，证明$(\cos x)'=-\sin x$.

5. 求下列函数的导数：

（1）$y=\ln\dfrac{1}{2x+1}$；　　（2）$y=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$.

阅 读

$f(ax+b)$的导数的一种解释

(1) 当 $a=1$ 时，不妨设 $b<0$，设 $f'(x)=g(x)$，由图 1-2-2 可知，若 $f'(x)=g(x)$，则

$$[f(x+b)]'=g(x+b).$$

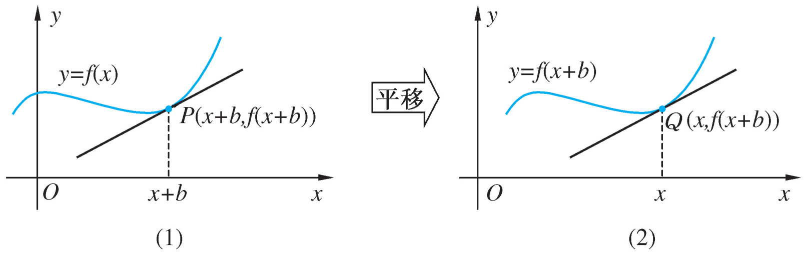


图 1-2-2

(2) 当 $a=-1$，$b=0$ 时，设 $f'(x)=g(x)$. 由图 1-2-3 可知，若 $f'(x)=g(x)$，则

$$[f(-x)]'=-g(-x).$$

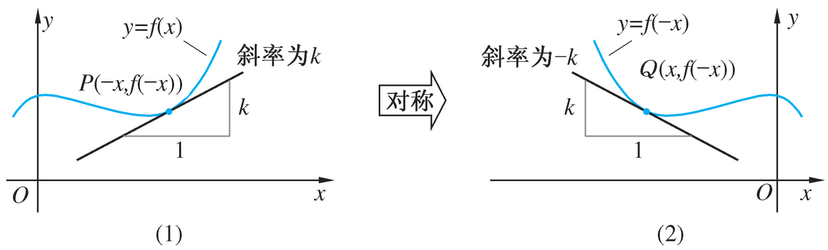


图 1-2-3

(3) 当 $a>0$，$b=0$ 时，设 $f'(x)=g(x)$，由图 1-2-4 可知，若 $f'(x)=g(x)$，则

$$[f(ax)]'=ag(ax).$$

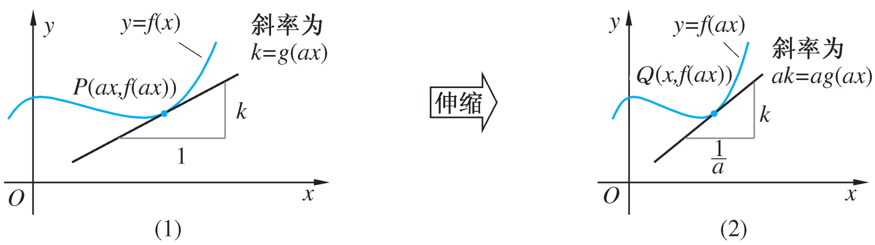


图 1-2-4

由(1)、(2)、(3)，你能得到什么结论？

习题 1.2

感受·理解

1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=x^2-3x+1$；

(2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=x+\sin x$；

(4) $f(x)=x\cos x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=2x+3^x$；

(2) $f(x)=\log_2 x+x^2$；

(3) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$；

(4) $f(x)=x\ln x$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=(2x+1)^5$；

(2) $f(x)=\sin^2 x$；

(3) $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(4) $f(x)=\ln(x+1)$.

4. (1) 求曲线 $y=e^x$ 在 $x=0$ 处切线的方程；

(2) 过原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，求切点的坐标.

5. 求曲线 $y=\dfrac{1}{2}x-\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处切线的方程.

6. 求曲线 $y=x^3+3x-8$ 在 $x=2$ 处切线的方程.

7. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，$x\in(0,2\pi)$.

(1) 求 x_0，使 $f'(x_0)=0$；

(2) 解释(1)中 x_0 及 $f'(x_0)$ 的意义.

8. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$；

(2) $f(x)=(x^2+9)\left(x-\dfrac{3}{x}\right)$；

(3) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$；

(4) $f(x)=x^2\cos x$.

9. 设 $f(5)=5$，$f'(5)=3$，$g(5)=4$，$g'(5)=1$，求 $h(5)$ 及 $h'(5)$.

(1) $h(x)=3f(x)+2g(x)$；

(2) $h(x)=f(x)g(x)+1$；

(3) $h(x)=\dfrac{f(x)+2}{g(x)}$.

10. 血液在血管中的流速满足关系式 $v(r)=k(R^2-r^2)$，其中 k 为常数，R 和 r 分别为血管的外径和内径(单位：cm). 现假定 $k=1\,000$，$R=0.2$ cm，求 $v(0.1)$ 及 $v'(0.1)$，并对所得结果作出解释.

思考·运用

11. 某港口在一天 24 h 内潮水的高度 S(单位：m)随时间 t(单位：h；$0\leqslant t\leqslant 24$)的变化近似满足关系式 $S(t)=3\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}\right)$，求 18 点时潮水起落的速度.

12. 火车开出车站一段时间内，速度 v(单位：m/s)与行驶时间 t(单位：s)之间的关系是 $v(t)=0.4t+0.6t^2$.

(1) 求火车运动的加速度 a；

(2) 火车开出几秒时加速度为 2.8 m/s^2？

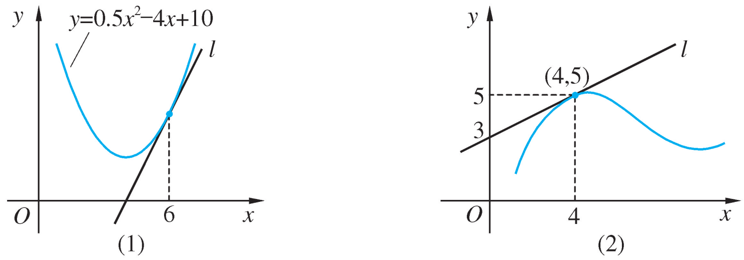
13. 质点的运动方程是 $S=5\sin t+2\cos t$.

(1) 求 $t=5$ 时的速度；

(2) 求质点运动的加速度.

14. (1) 如图(1)，直线 l 是抛物线 $y=0.5x^2-4x+10$ 在 $x=6$ 处的切线，求直线 l 在 y 轴上的截距；

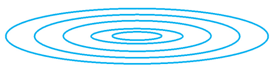
(2) 如图(2)，直线 l 是曲线 $y=f(x)$在 $x=4$ 处的切线，求 $f'(4)$.



（第 14 题）

探究·拓展

15. 如图，水波的半径以 50 cm/s 的速度向外扩张，当半径为 250 cm 时，圆面积的膨胀率是多少？



（第 15 题）

16. 设曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$，直线 $y=0$ 及 $x=t(t>0)$ 围成的封闭图形的面积为 $S(t)$，求 $S'(t)$.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 单调性

导数作为函数的变化率刻画了函数变化的趋势(上升或下降的陡峭程度),而函数的单调性也是对函数变化趋势的一种刻画,那么,

● 导数与函数的单调性有什么联系?

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是增函数,那么对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$,当 $x_1 < x_2$ 时,$f(x_1) < f(x_2)$,即 $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 同号,从而有 $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$,即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. 这表明,导数大于 0 与函数单调递增密切相关.

一般地,我们有下面的结论:

对于函数 $y = f(x)$,
如果在某区间上 $f'(x) > 0$,那么 $f(x)$ 为该区间上的增函数;
如果在某区间上 $f'(x) < 0$,那么 $f(x)$ 为该区间上的减函数.

上述结论可以用图 1-3-1 来直观理解.

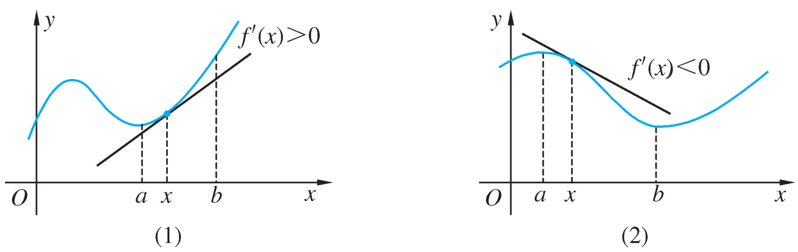


图 1-3-1

思　考

试结合 $y = x^3$ 进行思考:如果 $f(x)$ 在某区间上单调递增,那么在该区间上必有 $f'(x) > 0$ 吗?

例 1　确定函数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 在哪个区间上是增函数,在哪个区间上是减函数.

解　$f'(x) = 2x - 4$,令 $f'(x) > 0$,解得 $x > 2$.

因此,在区间 $(2, +\infty)$ 上,$f'(x) > 0$,$f(x)$ 是增函数;在区间 $(-\infty, 2)$ 上,$f'(x) < 0$,$f(x)$ 是减函数.(图 1-3-2)

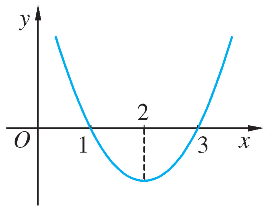


图 1－3－2

例 2 确定函数 $f(x)=2x^3-6x^2+7$ 在哪些区间上是增函数.

解 $f'(x)=6x^2-12x$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$.

因此，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 是增函数；在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 也是增函数.（图 1－3－3）

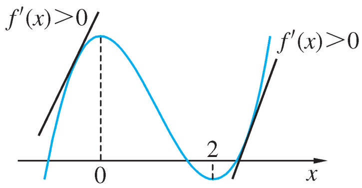


图 1－3－3

例 3 确定函数 $f(x)=\sin x\ (x\in(0,2\pi))$ 的单调减区间.

解 $f'(x)=\cos x$.

令 $f'(x)<0$，即 $\cos x<0$. 又 $x\in(0,2\pi)$，所以 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

故所求的单调减区间是 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

练　习

1. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=x-x^2$；

(2) $y=x-x^3$.

2. 讨论函数 $f(x)$ 的单调性：

(1) $f(x)=kx+b$；

(2) $f(x)=\frac{k}{x}$；

(3) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$.

3. 用导数证明：

(1) $f(x)=e^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；

(2) $f(x)=e^x-x$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是减函数.

4. (1) 证明函数 $y=-\ln x$ 在定义域上是单调减函数；

(2) 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是单调增函数.

1.3.2 极大值与极小值

观察图 1-3-4 中的函数图象，不难发现，函数图象在点 P 处从左侧到右侧由“上升”变为“下降”（函数由单调递增变为单调递减），这时在点 P 附近，点 P 的位置最高，亦即 $f(x_1)$ 比它附近点的函数值都要大. 我们称 $f(x_1)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值.

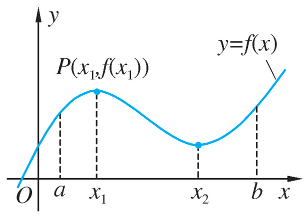


图 1-3-4

类似地，图中 $f(x_2)$ 为函数的一个极小值.

函数的极大值、极小值统称为函数的**极值**(extremum).

● 函数的极值与函数的导数有怎样的关系呢？

在这里，x_1 左（右）侧是指以 x_1 为右（左）端点的一个小区间.

继续观察图 1-3-4 中的函数图象，在函数取得极大值的 x_1 的左侧，函数单调递增，即 $f'(x)>0$；在 x_1 的右侧，函数单调递减，即 $f'(x)<0$；而在点 P 处切线平行于 x 轴，即 $f'(x)=0$. 表 1-3-1 清楚地表明了极大值与导数之间的关系.

表 1-3-1

x	x_1 左侧	x_1	x_1 右侧
$f'(x)$	$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$
$f(x)$	增↗	极大值 $f(x_1)$	↘减

类似地，极小值与导数之间的关系，如表 1-3-2 所示.

表 1-3-2

x	x_2 左侧	x_2	x_2 右侧
$f'(x)$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)>0$
$f(x)$	↘减	极小值 $f(x_2)$	增↗

例 1 求 $f(x)=x^2-x-2$ 的极值.

解 $f'(x)=2x-1$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{2}$. 列表如下.

表 1－3－3

x	$\frac{1}{2}$左侧	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$右侧
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗

因此,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 有极小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$.

例 2 求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{1}{3}$ 的极值.

解 $f'(x)=x^2-4$,令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=-2$, $x_2=2$. 列表如下.

表 1－3－4

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 $f(-2)$	↘	极小值 $f(2)$	↗

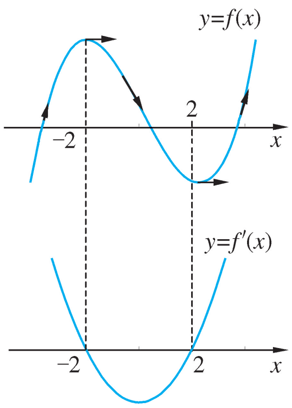


图 1－3－5

因此,当 $x=-2$ 时,$f(x)$ 有极大值 $f(-2)=\frac{17}{3}$;当 $x=2$ 时,$f(x)$ 有极小值 $f(2)=-5$.(如图 1－3－5 所示)

思　考

试联系函数 $y=x^3$ 思考:当 $f'(x_0)=0$ 时,能否肯定函数 $f(x)$ 在 x_0 取得极值?

练　习

1. 求下列函数的极值:

(1) $y=x^2-7x+6$;　　(2) $y=x+\frac{1}{x}$.

2. 如果函数 $f(x)$有极小值 $f(a)$,极大值 $f(b)$,那么 $f(a)$一定小于 $f(b)$吗?试作图说明.

3. 根据下列条件大致作出函数的图象:

(1) $f(4)=3$, $f'(4)=0$,当 $x<4$ 时 $f'(x)>0$,当 $x>4$ 时 $f'(x)<0$;

(2) $f(1)=1$, $f'(1)=0$,当 $x\neq 1$ 时 $f'(x)>0$.

4. 求函数 $y=x-\ln x$,$x\in(0,2)$ 的极值.

1.3.3 最大值与最小值

函数 $f(x)$在 x_0处取得极大值，是指在 x_0附近 $f(x_0)$比其他函数值都大，极大值是相对函数定义域内某一局部而言的.

我们知道，如果在函数定义域 I 内存在 x_0，使得对任意的 $x \in I$，总有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，那么 $f(x_0)$ 为函数在定义域上的最大值. 最大值是相对函数定义域整体而言的，如果存在最大值，那么最大值惟一.

观察函数 $y = f(x)$ 在区间$[a, b]$上的图象(图 1－3－6) 可知，$f(x_2)$，$f(x_4)$ 是极大值，而函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(b)$.

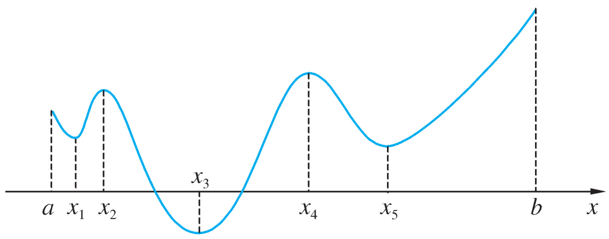


图 1－3－6

类似地，$f(x_1)$，$f(x_3)$，$f(x_5)$是极小值，而函数 $f(x)$的最小值是$f(x_3)$.

因此，求 $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值可以分为两步：

第一步　求 $f(x)$在区间(a, b)上的极值；

第二步　将第一步中求得的极值与 $f(a)$，$f(b)$比较，得到 $f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值与最小值.

例 1　求 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 在区间$[-1, 4]$上的最大值与最小值.

解　$f'(x) = 2x - 4$.

令 $f'(x) = 0$，解得 $x = 2$.

列表如下.

表 1－3－5

x	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 4)$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	-1	↗	3

从上表可知，函数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 在区间$[-1, 4]$上的最大值是 8，最小值是-1.

例 2 求 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=\frac{2\pi}{3}$, $x_2=\frac{4\pi}{3}$.

列表如下.

表 1-3-6

x	0	$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	π

从上表可知,函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的最大值是 π,最小值是 0.

思 考

你能根据表 1-3-6 大致作出函数 $f(x)$的图象吗?

练 习

1. 对于函数 $f(x)$,如果 $f(x)\leqslant c$(c 为常数)对定义域中的每个自变量 x 均成立,那么 c 一定是函数 $y=f(x)$的最大值吗?如果 $f(x)\leqslant f(x_0)$对于定义域中的每个自变量 x 均成立,那么 $f(x_0)$一定是函数的最大值吗?
2. 如果函数 $f(x)$有最小值 $f(a)$,最大值 $f(b)$,那么 $f(a)$一定小于 $f(b)$吗?
3. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值:
   (1) $f(x)=3x+2$, $x\in[-1,3]$;
   (2) $f(x)=x^2-3x$, $x\in[-1,3]$;
   (3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{3},3\right]$.
4. 求 $y=x-x^3$, $x\in[0,2]$的值域.
5. 求函数 $y=x-\ln x$,$x\in(0,1]$的值域.

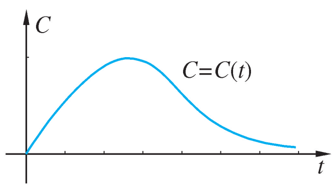
习题 1.3

感受·理解

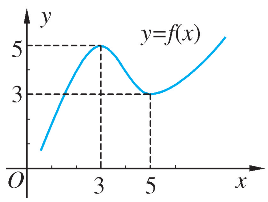
1. 设 $f(x)$是减函数,试确定$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x\neq x_0)$的符号.
2. 确定下列函数的单调区间:
(1) $y=-4x+2$; (2) $y=x\ln x$;
(3) $y=\sin x+\cos x$; (4) $y=x^2(x-3)$.
3. 求下列函数的极值:
(1) $y=2x^2-x^4$; (2) $y=\dfrac{x}{x^2+3}$;
(3) $y=x-2\cos x$; (4) $y=e^x-ex$.
4. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值:
(1) $y=x^2-2x$, $x\in[0,3]$;
(2) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$, $x\in[0,2]$;
(3) $y=\dfrac{1}{2}x-\cos x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. 分别就下列条件,确定$\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\cos\dfrac{\pi}{4}}{\Delta x}$的符号:
(1) $0<\Delta x<\dfrac{\pi}{4}$; (2) $-\dfrac{\pi}{4}<\Delta x<0$.

思考·运用

6. 当某种针剂药注入人体后,血液中药的浓度 C 与时间 t 的关系 $C=C(t)$ 的图象如图所示,试解释此图.



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,试作出 $y=f'(x)$ 的草图.

探究·拓展

8. 求下列函数的值域:
(1) $y=\dfrac{1}{x+1}+x$, $x\in[1,3]$; (2) $y=x^3-3x^2+5$, $x\in[-2,3]$;
(3) $y=x+\sin x$, $x\in[0,2\pi]$; (4) $y=2x^2-\ln x$.
9. (1) 求内接于半径为 R 的圆且面积最大的矩形;
(2) 求内接于半径为 R 的球且体积最大的圆柱.

1.4 导数在实际生活中的应用

导数在实际生活中有着广泛的应用. 例如,用料最省、利润最大、效率最高等问题,常常可以归结为函数的最值问题,从而可用导数来解决.

例 1 在边长为 60 cm 的正方形铁皮的四角切去边长相等的小正方形,再把它的边沿虚线折起(图 1 - 4 - 1),做成一个无盖的方底铁皮箱. 当箱底边长为多少时,箱子容积最大? 最大容积是多少?

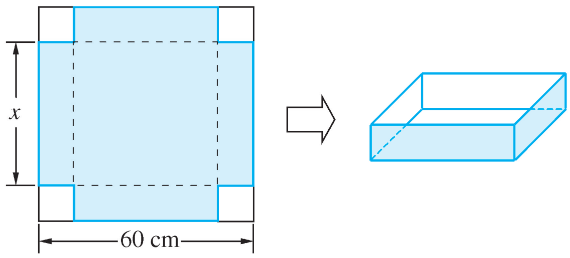


图 1 - 4 - 1

解 设箱底边长为 x(cm),则箱高为

$$h=\frac{60-x}{2}\ (0<x<60),$$

箱子的容积为

$$V(x)=x^2h=30x^2-\frac{1}{2}x^3\ (0<x<60).$$

由 $V'(x)=60x-\frac{3}{2}x^2=0$ 解得 $x_1=0$(舍), $x_2=40$. 且当 $x\in(0,40)$ 时,$V'(x)>0$;当 $x\in(40,60)$ 时,$V'(x)<0$. 所以,函数 $V(x)$ 在 $x=40$ 处取得极大值,这个极大值就是函数 $V(x)$ 的最大值, 即

$$V(40)=30\times40^2-\frac{1}{2}\times40^3=16\ 000(\mathrm{cm}^3).$$

答 当箱子底边长等于 40 cm 时,箱子容积最大,最大值为16 000 cm^3.

例 2 某种圆柱形饮料罐的容积一定,如何确定它的高与底半径,才能使它的用料最省?

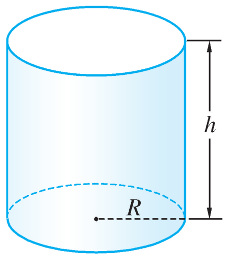


图 1－4－2

解 如图 1－4－2，设圆柱的高为 h，底半径为 R，则表面积

$$S(R) = 2\pi Rh + 2\pi R^2.$$

又 $V = \pi R^2 h$（定值），则 $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$，故

$$S(R) = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \ (R > 0).$$

由 $S'(R) = -\dfrac{2V}{R^2} + 4\pi R = 0$，解得 $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$．从而 $h = \dfrac{V}{\pi R^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，即 $h = 2R$.

当 $R < \dfrac{h}{2}$ 时，$S'(R) < 0$；当 $R > \dfrac{h}{2}$ 时，$S'(R) > 0$.

因此，当 $h = 2R$ 时，$S(R)$ 取得极小值，且是最小值.

答 当罐高与罐底的直径相等时，用料最省.

例 3 在如图 1－4－3 所示的电路中，已知电源的内阻为 r，电动势为 E. 当外电阻 R 多大时，才能使电功率最大？最大电功率是多少？

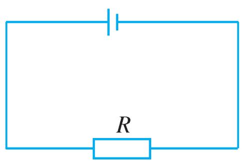


图 1－4－3

解 电功率 $P = I^2R$，其中 $I = \dfrac{E}{R+r}$ 为电流强度，则

$$P = \left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R = \frac{E^2R}{(R+r)^2} \ (R > 0).$$

$$P' = \frac{(E^2R)'(R+r)^2 - E^2R[(R+r)^2]'}{(R+r)^4}$$

$$= \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3},$$

由 $P' = 0$，解得 $R = r$.

当 $R < r$ 时，$P' > 0$；当 $r < R$ 时，$P' < 0$.

因此，当 $R = r$ 时，P 取得极大值，且是最大值，最大值为 $P = \dfrac{E^2}{4r}$.

答 当外电阻 R 等于内电阻 r 时，电功率最大，最大电功率是 $\dfrac{E^2}{4r}$.

例 4 强度分别为 a，b 的两个光源 A，B 间的距离为 d，试问：在连结两光源的线段 AB 上，何处照度最小？试就 $a = 8$，$b = 1$，$d = 3$ 时回答上述问题.（照度与光的强度成正比，与光源距离的平方成反比）

解 如图 1－4－4，设点 P 在线段 AB 上，且 P 距光源 A 为 x，则 P 距光源 B 为 $3-x$（$0 < x < 3$）.

图 1－4－4

P 点受 A 光源的照度为 $\dfrac{ka}{x^2}$，即 $\dfrac{8k}{x^2}$；

P 点受 B 光源的照度为 $\frac{kb}{(3-x)^2}$，即 $\frac{k}{(3-x)^2}$，其中 k 为比例常数.

从而，P 点的总照度为

$$I(x)=\frac{8k}{x^2}+\frac{k}{(3-x)^2}\ (0<x<3).$$

由

$$I'(x)=-\frac{16k}{x^3}+\frac{2k}{(3-x)^3}=\frac{18k(x-2)(x^2-6x+12)}{x^3(3-x)^3}=0$$

解得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$I'(x)<0$；当 $2<x<3$ 时，$I'(x)>0$.

因此，$x=2$ 时 I 取得极小值，且是最小值.

答 在连结两光源的线段 AB 上，距光源 A 为 2 处的照度最小.

例 5 在经济学中，生产 x 单位产品的成本称为成本函数，记为 $C(x)$，出售 x 单位产品的收益称为收益函数，记为 $R(x)$，$R(x)-C(x)$称为利润函数，记为 $P(x)$.

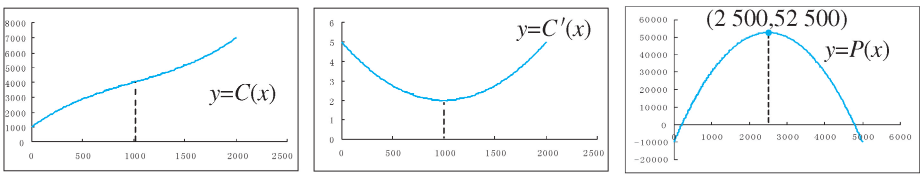
(1) 如果 $C(x)=10^{-6}x^3-0.003x^2+5x+1\,000$，那么生产多少单位产品时，边际成本 $C'(x)$ 最低？

(2) 如果 $C(x)=50x+10\,000$，产品的单价 $p(x)=100-0.01x$，那么怎样定价可使利润最大？

解 (1) $C'(x)=3\times10^{-6}x^2-0.006x+5$，记 $g(x)=C'(x)$，由

$$g'(x)=6\times10^{-6}x-0.006=0$$

解得 $x=1\,000$. 结合 $C'(x)$的图象(图 1－4－5(2))可知，当 $x=1\,000$ 时，边际成本最低.



(1) (2) (3)

图 1－4－5

(2) 由 $p(x)=100-0.01x$ 得收益函数

$$R(x)=x(100-0.01x),$$

则利润函数

$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)\\&=x(100-0.01x)-(50x+10\,000)\end{aligned}$$

$$=-0.01x^2+50x-10\,000.$$

由 $P'(x)=-0.02x+50=0$，解得 $x=2\,500$. 结合图1-4-5(3)可知，当 $x=2\,500$ 时，利润最大，此时

$$p(2\,500)=100-0.01\times2\,500=75.$$

答 生产 1 000 个单位产品时，边际成本最低；当产品的单价为 75 时，利润最大.

一般地，为使利润函数 $P(x)=R(x)-C(x)$ 最大，生产规模应确定为 $x=a$，且 $P'(a)=0$，即 $R'(a)=C'(a)$.

用图象来表示有下列 3 种形式，这就是如何确定生产规模的一般数学模型.

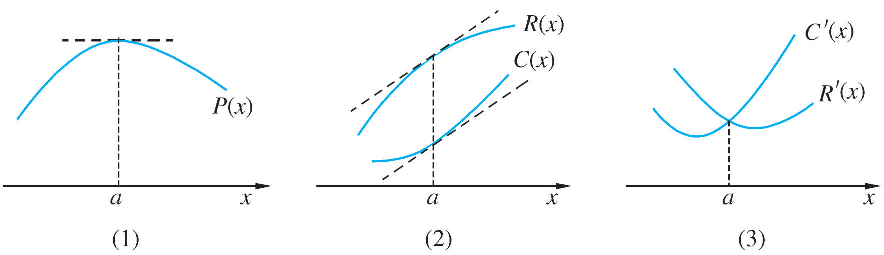


图 1-4-6

练 习

1. 把长 60 cm 的铁丝围成矩形，长、宽各为多少时矩形的面积最大？
2. 把长 100 cm 的铁丝分成两段，各围成正方形，怎样分法，能使两个正方形面积之和最小？
3. 做一个容积为 256 m^3 的方底无盖水箱，它的高为多少时材料最省？
4. 有一隧道既是交通拥挤地段，又是事故多发地段. 为了保证安全，交通部门规定，隧道内的车距 d(m)正比于车速 v(km/h)的平方与自身长 l(m)的积，且车距不得小于半个车身长. 而当车速为 60(km/h)时，车距为 1.44 个车身长. 在交通繁忙时，应规定怎样的车速，可以使隧道的车流量最大？

阅 读

圆锥曲线的光学性质(续)

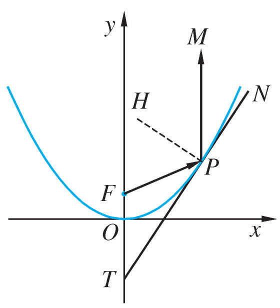


图 1-4-7

在圆锥曲线部分，我们曾介绍了圆锥曲线的光学性质，现以抛物线为例，予以证明.

抛物线的光学性质如下：位于焦点 F 的光源所射出的光线 FP，经抛物线(在实际问题中是旋转抛物线面)上的任一点 $P(x_0, y_0)$反射后，反射光线 PM 与抛物线的轴平行.

根据光学中的反射原理，光线的反射角等于入射角，在图 1-4-7 中，设 PT 是抛物线在点 P 处的切线(T 为切线与 y 轴的交点)，$PH\perp PT$，则有 $\angle MPH=\angle FPH$. 要证明反射线 PM 平行于对称轴(y 轴)，只需证 $\angle FTP=\angle MPN$ 即可. 设抛物线方程为 $y=ax^2$

$(a>0)$，则焦点 F 坐标为 $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$. 根据抛物线的定义知 $PF=y_0+\frac{1}{4a}$. 又因为 $y'=2ax$，所以切线 PN 的斜率为 $2ax_0$，于是切线 PN 的方程为

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0).$$

令 $x=0$，得

$$y=y_0-2ax_0^2=-y_0,$$

则

$$FT=y_0+\frac{1}{4a},$$

所以有 $PF=FT$. 从而

$$\angle FTP=\angle FPT.$$

又因为

$$\angle FPT=\angle MPN,$$

所以

$$\angle FTP=\angle MPN,$$

故 MP 平行于 y 轴. 这就证明了抛物线的光学性质.

问题与建模

一列车队以速度 v(km/h)行进，每辆车长 5 m，两车之间的合适间距为 $0.18v+0.006v^2$(m). 问：车速 v 为多少时，单位时段内通过的汽车数量最多？

解 记两车间距为 $av+bv^2$，其中 $a=0.18$，$b=0.006$，则一辆车占去的道路长为 $5+av+bv^2$(m)，1 h 内通过汽车的数量为

$$Q=\frac{1\,000v}{5+av+bv^2}.$$

由

$$Q'=\frac{1\,000(5-bv^2)}{(5+av+bv^2)^2}=0$$

解得 $v=\sqrt{\frac{5}{b}}$. 当 $0<v<\sqrt{\frac{5}{b}}$ 时，$Q'>0$；当 $v>\sqrt{\frac{5}{b}}$ 时，$Q'<0$. 因此，当 $v=\sqrt{\frac{5}{b}}$ 时，Q 取得极大值，也是最大值.

因此，当 $v=\sqrt{\frac{5}{0.006}}\approx 29$ km/h 时，每小时通过的车辆数最多，约为 1 900 辆.

习题 1.4

感受·理解

1. 一杯 80℃ 的热茶置于客厅桌面上，热茶的温度 T(单位：℃) 随着时间 t(单位：min) 的增加而逐渐下降，设 T 与 t 的函数关系为 $T=f(t)$，若 $f'(3)=-3$，试解释其实际意义.

2. 经过点 $M(1,\ 1)$ 作直线 l 分别交 x 轴正半轴、y 轴正半轴于 A，B 两点，设直线 l 的斜率为 k，$\triangle OAB$ 的面积为 S.

(1) 求 S 关于 k 的函数关系式 $S=f(k)$；

(2) 求 S 的最小值以及相应的直线 l 的方程.

3. 已知某养猪场的固定成本是 20 000 元，每年最大规模的养殖量为 600 头，且每养 1 头猪，成本增加 100 元，养 x 头猪的收益函数为 $R(x)=400x-\frac{1}{2}x^2$，记 $C(x)$，$P(x)$ 分别为养 x 头猪的成本函数和利润函数.

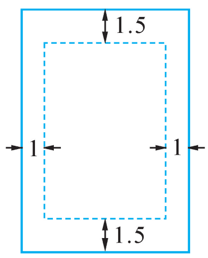
(1) 分别求 $C(x)$，$P(x)$ 的表达式；

(2) 当 x 取何值时，$P(x)$ 最大？

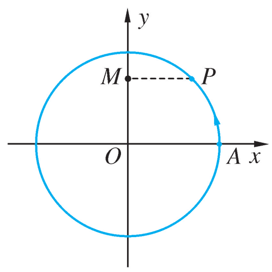
4. 甲、乙两地相距 s km，汽车从甲地以速度 v(单位：km/h)匀速行驶到乙地. 已知汽车每小时的运输成本由固定成本和可变成本组成，固定成本为 a 元，可变成本与速度 v 的平方成正比，比例系数为 k. 为使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

思考·运用

5. 出版社出版某一读物，1 页上所印文字占去 150 cm^2，上、下边要留 1.5 cm 空白，左、右两侧要留 1 cm 空白，出版商为降低成本，应选用怎样尺寸的纸张？



(第 5 题)

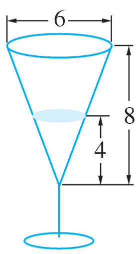


(第 6 题)

6. 如图，质点 P 在半径为 10 cm 的圆上逆时针作匀速圆周运动，角速度为 2 rad/s. 设 $A(10,\ 0)$为起始点，求时刻 t 时，点 P 在 y 轴上的射影点 M 的速度.

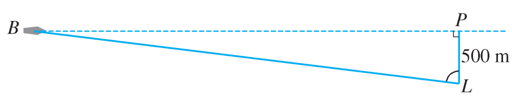
探究·拓展

7. 如图，酒杯的形状为倒立的圆锥. 杯深 8 cm，上口宽 6 cm，水以 20 cm^3/s 的流量倒入杯中，当水深为 4 cm 时，求水升高的瞬时变化率.(精确到 0.01)



(第 7 题)

8. 如图，船以定速直行，航线距灯塔 L 的最近距离为 500 m. 已知灯塔对小船现在的位置 B 及小船航线与灯塔的最近点 P 的张角 $\angle BLP=83°$，且该角正以 0.8°/min 的比率减小，求小船的速度.



(第 8 题)

1.5 定积分

微积分在几何上有两个基本问题，第一个是如何确定曲线上一点处切线的斜率，第二个是如何求曲线下方“曲边梯形”的面积.

如果曲线是直线，那么上述两个问题都很简单，如图 1－5－1(1)，直线的斜率以及阴影部分(梯形)的面积均可方便地计算出来.

通常曲边梯形是指由 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 及 $y=f(x)$ 所围成的图形，而图 1－5－2(1) 中的曲边三角形是曲边梯形的特例.

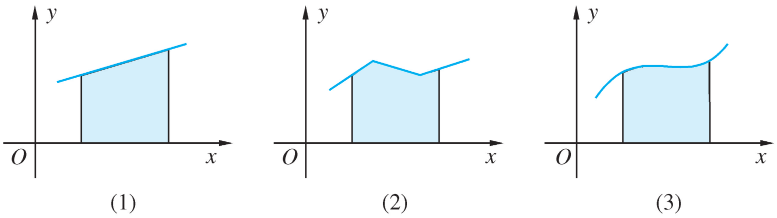


图 1－5－1

如果曲线是几条线段连成的折线，如图 1－5－1(2)，那么可分段计算线段的斜率，而阴影部分的面积也可转化为每一线段下方的阴影部分面积之和.

如果曲线既不是直线也不是折线，如图 1－5－1(3)，这时，第一个问题已经解决，就是求导数. 而第二个问题将是本节要探讨的内容. 为讨论方便，我们先假设 $f(x)$ 为非负函数.

1.5.1 曲边梯形的面积

● 如图 1－5－2(1)，直线 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 和曲线 $y=x^2$ 围成的曲边梯形的面积 S 是多少？

为了计算曲边梯形的面积 S，我们将它分割成许多小曲边梯形，如图 1－5－2(2).

对于其中的任意一个小曲边梯形，我们可以用“直边”来代替“曲边”(即在很小的范围内以直代曲). 图 1－5－2(3) 是 3 种常用的“以直代曲”的方案.

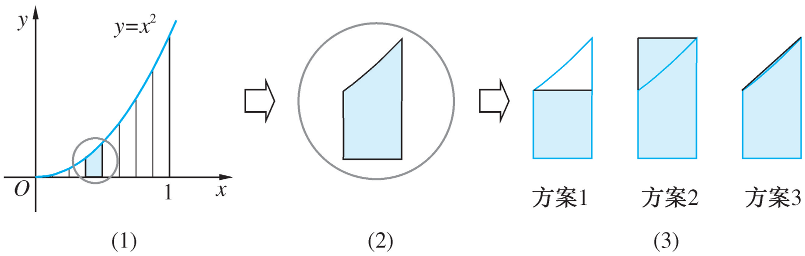


图 1－5－2

这样，我们就可以计算出任意一个小曲边梯形面积的近似值，从而也就可以计算出整个曲边三角形面积的近似值(求和)，并且分割越细，面积的近似值就越精确. 当分割无限变细时，这个近似值就无限逼近所求曲边三角形的面积 S.

下面是“以直代曲”的第 1 种方案的具体操作过程.

(1) 分割

把区间$[0, 1]$等分成 n 个小区间：

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right],$$

每个小区间的长度为

$$\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

过各区间端点作 x 轴的垂线，从而得到 n 个小曲边梯形. 它们的面积分别记作

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_i, \cdots, \Delta S_n.$$

(2) 以直代曲

对区间$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$上的小曲边梯形，以区间左端点$\frac{i-1}{n}$对应的函数值 $f\left(\frac{i-1}{n}\right)=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ 为一边的长，以 $\Delta x=\frac{1}{n}$ 为邻边的长的小矩形面积近似代替小曲边梯形的面积，即

$$\Delta S_i \approx f\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta x=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

(3) 作和

因为每个小矩形的面积是相应的小曲边梯形面积的近似值，所以 n 个小矩形面积之和就是所求曲边梯形面积 S 的近似值，即

$$\begin{aligned} S &= \Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]. \end{aligned}$$

(4) 逼近

当分割无限变细，即 $\Delta x \to 0$(亦即 $n \to +\infty$)时，

$$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\to S.$$

而当 $n\to\infty$时，

$$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\to\frac{1}{3}.$$

由此可知，$S=\frac{1}{3}$，即所求曲边三角形的面积是$\frac{1}{3}$.

以上计算曲边梯形面积的过程可以用流程图表示(图 1－5－3)：

分割 → 以直代曲 → 作和 → 逼近

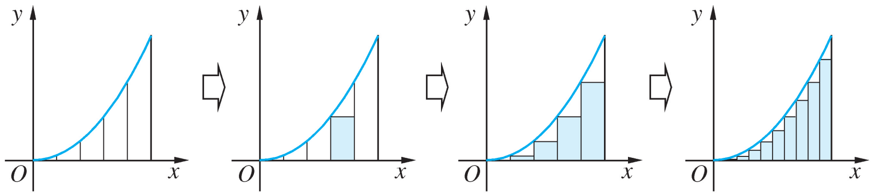


图 1－5－3

阅　读

当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\to\frac{1}{3}$. 有多种方法可以获得这一结果. 这里给出 3 种方法.

方法 1(近似数值方法)

使用 Excel 制作图 1－5－4.

	A	B	C
1	n	n^2	$[0^2+1^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]/n^3$
2	1	1	0
3	2	4	0.125
4	3	9	0.185185185
5	4	16	0.21875
6	5	25	0.24
7	6	36	0.25462963
8	7	49	0.265306122
9	8	64	0.2734375
10	9	81	0.279835391

⇨

	A	B	C
1	n	n^2	$[0^2+1^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]/n^3$
101	100	10000	0.32835
102	101	10201	0.328399177
103	102	10404	0.328447392
104	103	10609	0.328494674
105	104	10816	0.32854105
106	105	11025	0.328586546
107	106	11236	0.328631185
108	107	11449	0.328674993
109	108	11664	0.328717993

⇨

	A	B	C
1	n	n^2	$[0^2+1^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]/n^3$
1211	1210	1464100	0.332920224
1212	1211	1466521	0.332920565
1213	1212	1468944	0.332920906
1214	1213	1471369	0.332921245
1215	1214	1473796	0.332921585
1216	1215	1476225	0.332921924
1217	1216	1478656	0.332922262
1218	1217	1481089	0.3329226
1219	1218	1483524	0.332922937
1220	1219	1485961	0.332923273

单元格C101和C1211中的公式.

	C
101	=SUM(B$2:B100)/A101^3

	C
1211	=SUM(B$2:B1210)/A1211^3

图 1－5－4

由图 1－5－4 可见，当 $n\to+\infty$时，

$$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\to\frac{1}{3}.$$

方法 2(利用求和公式)

根据 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 有

$$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to+\infty$ 时，$1-\frac{1}{n}\to1$，$2-\frac{1}{n}\to2$. 故上式结果无限趋近于 $\frac{1}{3}$.

方法 3(利用体积模型)

$$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

将单位正方体每条棱 n 等分，则上述和式即是图 1-5-5(1) 中几何体的体积.

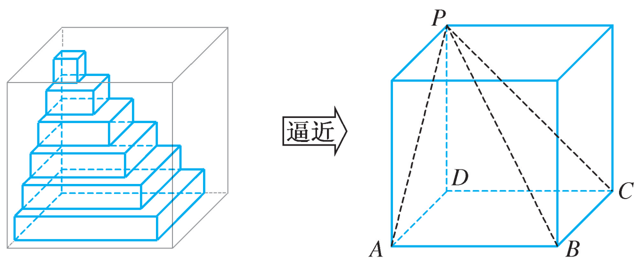


图 1-5-5

当 $n\to+\infty$ 时，该几何体无限逼近四棱锥 $P-ABCD$ (图 1-5-5(2)). 又 $V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}$，从而，当 $n\to+\infty$ 时，

$$\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\to\frac{1}{3}.$$

探 究

(1) 分别以方案 2、方案 3 完成“分割、以直代曲、作和、逼近”的步骤，重新计算曲边梯形的面积 S，并将操作过程和计算结果与方案 1 进行比较.

(2) 有没有不同于方案 1、方案 2、方案 3 的以直代曲的方案？

在“分割、以直代曲、作和、逼近”这一过程中，第二步“以直代曲”的思想是关键.

在方案 1 中，我们以小区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 的左端点 $\frac{i-1}{n}$ 对应的函数值 $f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ 作为小矩形一边的长，从而得到小矩形的面积为 $f\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta x$. 其实，当分点非常多($n$ 很大)时，可以认为 $f(x)$ 在小区

间上几乎没有变化(或变化非常小),从而可以取小区间内任意一点 x_i 对应的函数值 $f(x_i)$ 作为小矩形一边的长. 于是,可用 $f(x_i)\Delta x$ 来近似表示小曲边梯形的面积,这样,和式

$$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x \qquad (*)$$

表示了曲边梯形面积的近似值. 这一和式不仅具有直观的几何意义,还有丰富的实际背景.

例 1 火箭发射后 t s 时的速度为 $v(t)$(单位: m/s),假定 $0\leqslant t\leqslant 10$,对函数 $v(t)$按($*$)式所作的和具有怎样的实际意义?

解 将区间[0, 10]等分成 n 个小区间,每个小区间的长度为 Δt,在每个小区间上取一点,依次为 t_1, t_2, …, t_i, …, t_n. 虽然火箭的速度不是常数,但是在一个小区间内其变化很小. 所以,可以用 $v(t_1)$来代替火箭在第一个小区间上的速度,这样,

$$v(t_1)\Delta t\approx \text{火箭在第一个时段内运行的路程},$$

同理

$$v(t_2)\Delta t\approx \text{火箭在第二个时段内运行的路程},$$

从而

$$\begin{aligned}S_n&=v(t_1)\Delta t+v(t_2)\Delta t+\cdots+v(t_i)\Delta t+\cdots+v(t_n)\Delta t\\&\approx \text{火箭在 10 s 内运行的总路程}.\end{aligned}$$

这就是函数 $v(t)$在时间区间[0, 10]上按($*$)式所作的和的实际背景.

当分割无限变细($\Delta t\to 0$)时,S_n 就无限趋近于火箭在 10 s 内所运行的总路程.

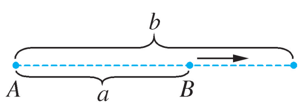


图 1-5-6

例 2 如图 1-5-6,有两个点电荷 A, B,电量分别为 q_A, q_B. 固定电荷 A,将电荷 B 从距 A 为 a 处移到距 A 为 b 处,求库仑力对电荷 B 所做的功.

解 将区间[a, b]等分成 n 个小区间,每个小区间的长度为 Δr,在每个小区间上取一点,依次为 r_1, r_2, …, r_i, …, r_n,虽然库仑力 $F=\dfrac{kq_Aq_B}{r^2}$(k 为比例常数)不是常数,但是在一个小区间内其变化很小,所以,可以用 $F(r_1)$来代替第一个小区间上的库仑力. 这样,

$$F(r_1)\Delta r\approx \text{库仑力在第一个小区间上所做的功},$$

同理

$$F(r_2)\Delta r\approx \text{库仑力在第二个小区间上所作的功},$$

从而，

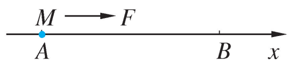
$$S_n = F(r_1)\Delta r + F(r_2)\Delta r + \cdots + F(r_i)\Delta r + \cdots + F(r_n)\Delta r$$

$\approx$ 电荷 B 移动过程中库仑力所做的总功.

当分割无限变细（$\Delta r \to 0$），S_n 就无限趋近于库仑力对电荷 B 所做的功.

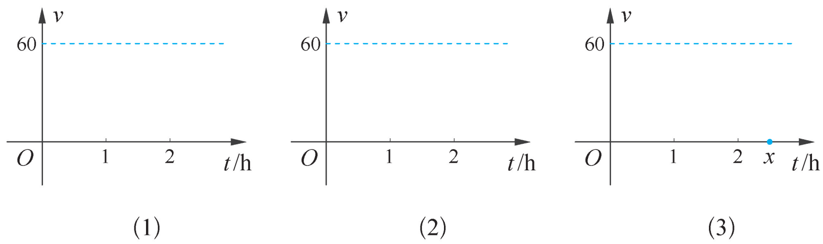
练 习

1. 设质点 M 受力 F 的作用沿 x 轴由点 $A(a, 0)$ 移动至点 $B(b, 0)$，并设 F 平行于 x 轴. 如果力 F 是质点所在位置的函数 $F = F(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，求 F 对质点 M 所作的功.



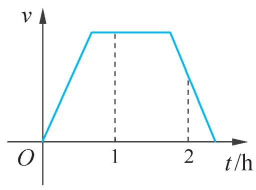
（第 1 题）

2. (1) 设汽车的速度为 60 km/h，该汽车在 0.25 h，1 h 及 x h 内走过的路程分别为15 km，60 km 和 $60x$ km. 试分别用图形的面积表示上述路程.



（第 2(1) 题）

(2) 设汽车的速度 $v(t)$ 的图象如下，试分别用图形的面积表示汽车从 $t = 0$(h) 到 $t = 1$(h)，以及从 $t = 0$(h) 到 $t = 2$(h) 所走的路程.



（第 2(2) 题）

1.5.2 定积分

在第 1.5.1 节中，我们讨论了曲边梯形面积、变速运动路程、变力做功等问题. 虽然这几个问题的实际背景不同，但是解决问题的思想方法是相同的.

一般地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，将区间 $[a, b]$ 等分成 n 个小区间，每个小区间长度为 $\Delta x\left(\Delta x=\dfrac{b-a}{n}\right)$，在每个小区间上取一点，依次为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$. 作和

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_i)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x,$$

如果当 $\Delta x\to 0$（亦即 $n\to+\infty$）时，$S_n\to S$（常数），那么称常数 S 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**(definite integral)，记为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$f(x)$ 称为被积函数，$[a, b]$ 称为积分区间，a 称为积分下限，b 称为积分上限.

按定积分的定义，第 1.5.1 节曲边梯形的面积 S 就是曲边对应的函数 $y=x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的定积分，即

$$S=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

类似地，在第 1.5.1 节例 1 中，火箭发射的速度为 $v(t)$，则 $S=\int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t$ 表示火箭在 10 s 内所运行的路程.

在第 1.5.1 节例 2 中，移动电荷 B 的过程中，库仑力所做的功可以表示为

$$S=\int_a^b F(r)\mathrm{d}r=\int_a^b \frac{kq_Aq_B}{r^2}\mathrm{d}r.$$

例 1 计算定积分 $\int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x$.

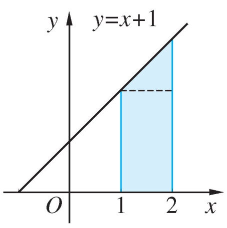


图 1-5-7

解 如图 1-5-7，所求定积分即为阴影部分的面积，且面积为 $2+\dfrac{1}{2}$，所以

$$\int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}.$$

前面，我们均假设被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负. 那么当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取负值时，定积分的几何意义是什么呢？

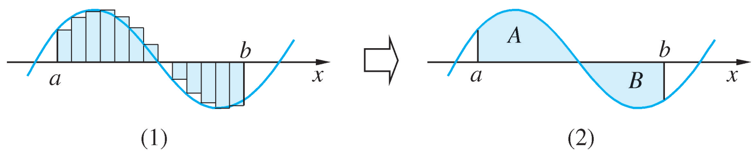


图 1－5－8

如图 1－5－8，

若 $f(x_i)>0$，则 $f(x_i)\Delta x$ 为 x 轴上方相应的小矩形的面积；

若 $f(x_i)<0$，则 $-f(x_i)\Delta x$ 为 x 轴下方小矩形的面积，也就是 $f(x_i)\Delta x$ 为小矩形面积的相反数.

因此，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{阴影 } A \text{ 的面积} - \text{阴影 } B \text{ 的面积}.$$

一般地，定积分的几何意义是在区间 $[a, b]$ 上曲线与 x 轴所围图形面积的代数和（即 x 轴上方的面积减去 x 轴下方的面积）.

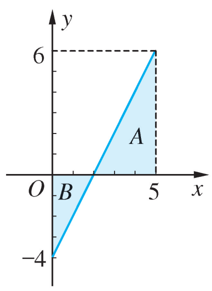


图 1－5－9

例 2 计算定积分 $\int_0^5 (2x-4)\mathrm{d}x$.

解 如图 1－5－9，计算可得 A 的面积为 9，B 的面积为 4，从而

$$\int_0^5 (2x-4)\mathrm{d}x = 9-4=5.$$

练 习

1. 计算下列定积分：

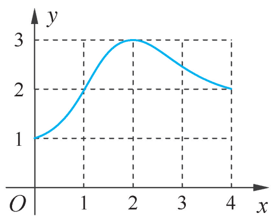
(1) $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{0} x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^3 (1-x)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x$.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{1} x\cos x\mathrm{d}x$.

3. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如下，试估计定积分 $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.



（第 3 题）

1.5.3 微积分基本定理

在第 1.5.2 节的例 1、例 2 中，我们利用几何直观计算了定积分的值. 那么，

● 对于一般的函数，如何计算它们的定积分？

例如，怎样计算 $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$？

下面的微积分基本定理给出了计算定积分的一般方法，它避免了每次都要进行"分割、以直代曲、作和、逼近"的操作.

微积分基本定理 对于被积函数 $f(x)$，如果 $F'(x)=f(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

即

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

$F(b)-F(a)$ 也可记作 $F(x)\big|_a^b$.

下面我们用第 1.5.1 节中的例 1 来验证微积分基本定理.

若火箭发射后 t s 时的速度为 $v(t)$，$S(t)$ 为火箭运动的路程，则 $\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t$ 表示火箭在 10 s 内所运行的路程，亦即

$$\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t=S(10)-S(0).$$

另一方面，因为 $S'(t)=v(t)$，所以由微积分基本定理得

$$\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{10}S'(t)\mathrm{d}t=S(10)-S(0),$$

这与前面的结果是一致的.

有了微积分基本定理，就可以方便地计算定积分.

例 1 计算下列定积分：

(1) $\int_0^5(2x-4)\mathrm{d}x$； (2) $\int_2^5 3x^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$； (4) $\int_1^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 取 $F(x)=x^2-4x$，则 $F'(x)=2x-4$，从而

$$\int_0^5(2x-4)\mathrm{d}x=\int_0^5 F'(x)\mathrm{d}x=F(5)-F(0)$$

$$= (5^2 - 4\times 5) - (0^2 - 4\times 0)$$
$$= 5.$$

(2) 取 $F(x) = x^3$，则 $F'(x) = 3x^2$，从而

$$\int_2^5 3x^2\,\mathrm{d}x = \int_2^5 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(2)$$
$$= 5^3 - 2^3$$
$$= 117.$$

(3) 取 $F(x) = -\cos x$，则 $F'(x) = \sin x$，从而

$$\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} F'(x)\,\mathrm{d}x = F(\pi) - F(0)$$
$$= -\cos\pi + \cos 0$$
$$= 2.$$

(4) 取 $F(x) = \ln x$，则 $F'(x) = \dfrac{1}{x}$，从而

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1)$$
$$= \ln 3 - \ln 1$$
$$= \ln 3.$$

思　考

若 $F'(x) = 2x - 4$，则 $F(x)$ 是否惟一？

练　习

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^5 2x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

2. 用定积分的定义求自由落体的下落距离：已知自由落体的运动速度 $v = gt$（g 是常数），求在从第 0 s 到第 t s 的时间段内，物体下落的距离 $S(t)$.

3. 求由曲线 $y = \dfrac{1}{x}$，$x = 1$，$x = 2$，$y = 0$ 所围图形的面积.

链　接

微分与积分的关系

设 $F(x)$ 在区间 (a, b) 上可导，将区间 n 等分，分点依次为 x_1，x_2，…，x_i，…，x_{n-1}，记 $a = x_0$，$b = x_n$，每个小区间的长度为 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，则 $F(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的变化为 $F(x_i) - F(x_{i-1})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 当 Δx 很小时，

$$F(x_1) - F(x_0) \approx F'(x_1)\Delta x.$$

如果 $F(x)$ 为运动的路程 $S(t)$，那么 $S(t_2)-S(t_1)\approx S'(t_2)\Delta t$ 有怎样的实际意义？对于一般函数 $F(x)$，$F(x_2)-F(x_1)\approx F'(x_2)\Delta x$ 有怎样的几何意义？

同理，

$$F(x_2)-F(x_1)\approx F'(x_2)\Delta x,$$

$$\cdots$$

$$F(x_n)-F(x_{n-1})\approx F'(x_n)\Delta x.$$

所以

$$F(b)-F(a)\approx F'(x_1)\Delta x+\cdots+F'(x_n)\Delta x.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，就有

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

也就是说，变化率的定积分给出了总的变化. 这就是微积分基本定理，它给出了微分与积分这两个关键概念之间的关系. 因为它是由牛顿、莱布尼茨共同发现的，所以称之为牛顿-莱布尼茨公式.

COMPUTER

用随机模拟方法计算曲边梯形的面积

用随机模拟[亦称蒙特卡罗(Monte Carlo)]方法不难求出曲边梯形面积的近似值. 方法是：随机地投入若干个点于曲边梯形所在的矩形内(如图 1－5－10)，若曲线上方的点数为 N_1，曲线下方的点数为 N_2，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{N_2}{N_1+N_2}\cdot pq.$$

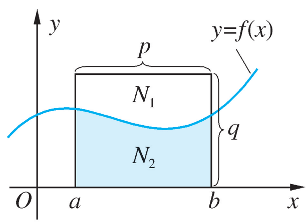


图 1－5－10

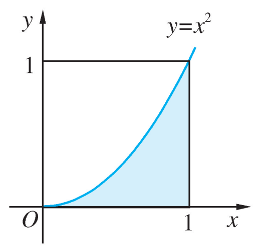


图 1－5－11

可以看出，用随机模拟方法计算积分是通过大量简单的重复抽样实现的，因而方法和程序都较简单. 下面是用随机模拟的方法计算曲边三角形面积(图 1－5－11)的流程图(图 1－5－12)及上机效果(图 1－5－13).

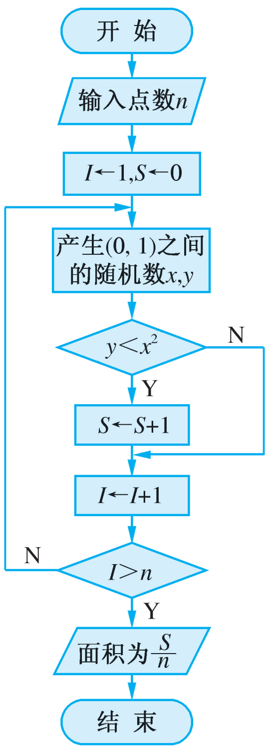
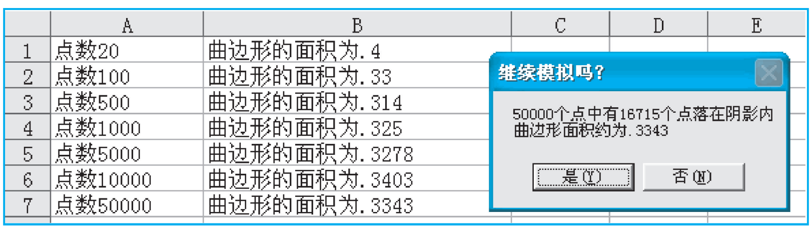


图 1－5－12



	A	B	C	D	E
1	点数20	曲边形的面积为.4			
2	点数100	曲边形的面积为.33			
3	点数500	曲边形的面积为.314			
4	点数1000	曲边形的面积为.325			
5	点数5000	曲边形的面积为.3278			
6	点数10000	曲边形的面积为.3403			
7	点数50000	曲边形的面积为.3343			

图 1－5－13

习题 1.5

感受·理解

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{2}(3x+1)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{0}^{4}\frac{5}{x+2}\mathrm{d}x$.

2. 计算下列定积分：

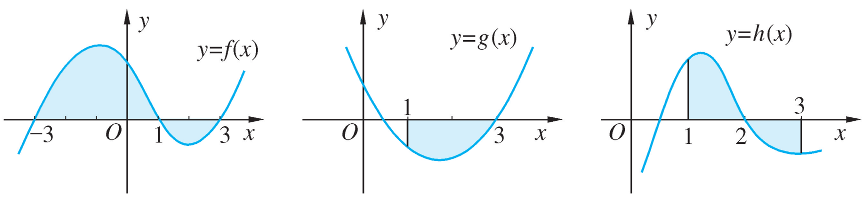
(1) $\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{0}^{\pi}(x+\cos x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

3. 求曲线 $f(x)=-2x^2-2x+24$ 与 x 轴围成的封闭区域的面积.

4. 用定积分表示下列阴影部分的面积.



(1) (2) (3)

（第 4 题）

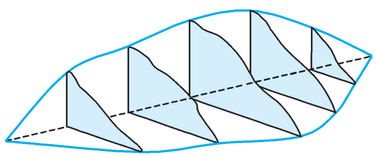
思考·运用

5. 求由曲线 $y=x^2-6x+13$ 及直线 $y=x+3$ 所围封闭区域的面积.

6. 计算 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^3, x>0,\\ x^2, x\leqslant 0.\end{cases}$

探究·拓展

7. 如图是修建公路时在小山坡边切去的 1 个几何体. 已知每隔 10 m 的直截面面积（单位：m^2）分别为 3.4，5.6，6.3，4.8，3.5，试计算大约需移动的土方数.



（第 7 题）

阅 读

微积分建立的时代背景和历史意义

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支.

微积分的产生和发展被誉为“近代技术文明产生的关键事件之一”. 微积分的建立，无论是对数学还是对其他科学以至于技术的发展都产生了巨大的影响，充分显示了人类的数学知识对于人的认识发展和改造世界的能力的巨大促进作用.

积分的思想产生得很早，公元前 200 多年，希腊科学泰斗阿基米德(Archimedes，约公元前 287～前 212)就用积分的观点求得球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 他用球体“薄片”的叠加与球的外切圆柱及相关圆锥“薄片”的叠加，并用杠杆原理得到球体积公式. 公元 5 世纪，中国数学家祖冲之、祖暅父子提出了“幂势既同，则积不容异”，也是积分概念的雏形.

微分观念的发生比积分大概迟了 2 000 年. 公元 16 世纪，伽利略发现了自由落体的运动规律 $S=\frac{1}{2}gt^2$，落体的瞬时速度近似于 $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\approx gt$. 当 Δt 很小时，这个比值接近于时刻 t 的瞬时速度，这是导数的启蒙.

同时，在探求曲线的切线的时候，人们发现，切线是割线的近似，割线的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，当 Δx 很小时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 应该是切线斜率的近似，求曲线的切线斜率，是产生导数观念的直接动因.

17 世纪，法国数学家笛卡儿(Descartes，1596～1650)建立了坐标系，使几何图形能够用函数来表示，从而为研究函数及其变化率提供了有力的工具.

在 17 世纪后半叶，牛顿(Newton，1642～1727)和莱布尼茨(Leibniz，1646～1716)总结了诸多数学家的工作之后，分别独立建立了微积分学. 牛顿和莱布尼茨对微积分学最突出的贡献是建立了微积分基本定理 $\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，它把原以为不相干的两个事物紧密联系在一起，揭示了微分与积分的逆运算关系. 所不同的是，牛顿创立的微积分有深刻的力学背景，他更多的是从运动变化的观点考虑问题，把力学问题归结为数学问题. 而莱布尼茨主要是从几何学的角度考虑，他创建的微积分的符号以及微积分的基本法则，对以后微积分的发展有极大的影响.

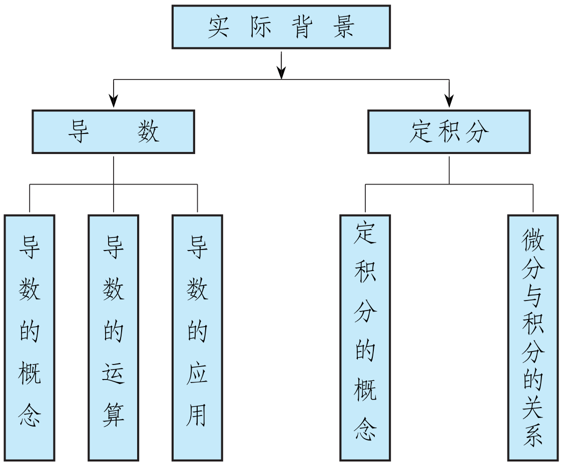
19 世纪，法国数学家柯西(Cauchy，1789～1857)和德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815～1897)为微积分学奠定了坚实的基础，使微积分学成为一套完整的、严谨的理论体系.

微积分的建立充分说明，数学来源于实践，又反过来作用于实践. 数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分.

本章回顾

本 章 概 览

本章首先通过实例由平均变化率、瞬时变化率引入了导数的概念. 然后对基本初等函数的导数，函数的和、差、积、商的导数，以及简单的复合函数的导数作了初步研究和介绍，并运用导数处理了一些简单的实际问题. 最后还通过实例引入定积分的概念，并揭示了导数与定积分之间的重要关系——牛顿-莱布尼茨公式.



导数以及定积分的引入源于“局部以直代曲”这一辩证思想，微积分的产生被誉为近代技术文明发展过程中的关键事件之一，是人类智慧的伟大结晶. 仔细地体验和感悟微积分基本思想和方法是学习本章的要点，其认识宏观与微观世界的科学方法对人们科学观的形成有着重大意义.

内 容 提 要

1. 平均变化率

函数 $f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的平均变化率为$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

2. 导数概念

设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b) 上有定义，$x_0\in(a,b)$，若 Δx 无限趋近于 0 时，比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于一个常

数 A，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$.

3. 求导公式（$a>0$，且 $a\neq1$，C 和 α 为常数）

$C'=0$，　$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$(a^x)'=a^x\ln a$，　$(e^x)'=e^x$，

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$.

4. 函数的和、差、积、商的求导法则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$.

(2) $[Cf(x)]'=Cf'(x)$（C 为常数）.

(3) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

(4) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq0)$.

5. 简单复合函数的导数

若 $y=f(u)$，$u=ax+b$，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即 $y'_x=y'_u\cdot a$.

6. 导数与函数的单调性

如果在某区间上 $f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 为该区间上的增函数；

如果在某区间上 $f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 为该区间上的减函数.

7. 函数的极值

若 $f(x_0)$ 比它附近点的函数值大，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值；

若 $f(x_0)$ 比它附近点的函数值小，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值.

x	x_1 左侧	x_1	x_1 右侧
$f'(x)$	$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$
$f(x)$	增↗	极大值 $f(x_1)$	↘减
x	x_2 左侧	x_2	x_2 右侧
$f'(x)$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)>0$
$f(x)$	↘减	极小值 $f(x_2)$	增↗

8. 定积分概念

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，将区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，每个小区间长度为 $\Delta x\left(\Delta x=\dfrac{b-a}{n}\right)$，在每个小区间上取一点，依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$. 作和 $S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_i)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$，如果当 $\Delta x\to0$ 即 $n\to+\infty$ 时，$S_n\to S$（常数），那么称常数 S 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 其中，$f(x)$ 称为被积函数，$[a,b]$ 称为积分区间，a 称为积分下限，b 称为积分上限.

9. 微积分基本定理

对于被积函数 $f(x)$，如果 $F'(x)=f(x)$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，即 $\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

复 习 题

感受・理解

1. 球半径以 2 cm/s 的速度膨胀.

(1) 当半径为 5 cm 时,表面积对时间的变化率是多少?

(2) 当半径为 8 cm 时,体积对时间的变化率是多少?

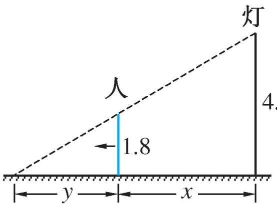
2. 在某介质中一小球下落,t s 时的高度为 $h=1.5-0.1t^2$(单位: m),求当 $t=3$ 时球的高度、速度和加速度.

3. 如图,身高 1.8 m 的人,以 1.2 m/s 的速度离开路灯,路灯高 4.2 m.

(1) 求身影的长度 y(单位: m)与人距路灯的距离 x(单位: m)之间的关系;

(2) 解释身影长的变化率与人步行速度的关系;

(3) 求当 $x=3$ 时,身影长的变化率.



(第 3 题)

4. 分别求曲线 $y=-x^2+2x$ 在点 $A(1, 1)$ 及点 $B(-1, -3)$ 处的切线方程.

5. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^5$;

(2) $y=x^2+2\sin x$;

(3) $y=\tan x$;

(4) $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(2) $y=xe^{2x}$;

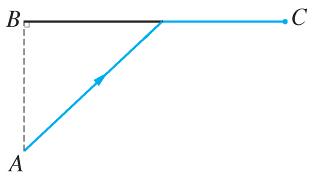
(3) $y=2^x+\ln(1-5x)$;

(4) $y=e^{-x}\cos 3x$.

7. (1) 求函数 $y=2x^2-x^4$ 的极值;

(2) 求函数 $y=3x^3-9x+5$ 在区间$[-2, 2]$上的最大值与最小值.

8. 如图,已知海岛 A 到海岸公路 BC 的距离 AB 为 50 km,B, C 间的距离为 100 km,从 A 到 C,先乘船,船速为 25 km/h,再乘汽车,车速为 50 km/h,登陆点选在何处,所用时间最少?



(第 8 题)

9. 计算定积分:

(1) $\displaystyle\int_1^2\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+\sin x)dx$.

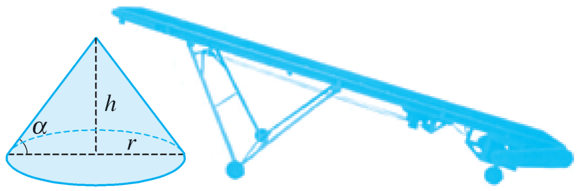
10. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=1$, $y=2$, $x=0$ 所围图形的面积.

思考·运用

11. 如图,煤场的煤堆形如圆锥,设圆锥母线与底面所成角为 α.

(1) 高 h 与半径 r 有什么关系?

(2) 传输带以 $0.3\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 送煤,求当半径 $r = 1.7\ \mathrm{m}$ 时 r 对时间 t 的变化率.



(第 11 题)

12. 已知两曲线 $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2\sin 3x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 用计算机(器)求两曲线的交点坐标;

(2) 求两曲线在交点处的夹角(即交点处两曲线的切线的夹角).

13. 求下列函数的导数:

(1) $y = \sin^4 3x \cos^3 4x$;

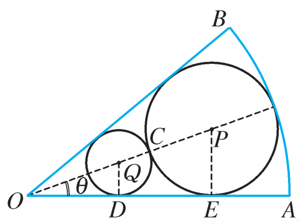
(2) $y = 2(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$.

14. 求函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的单调区间.

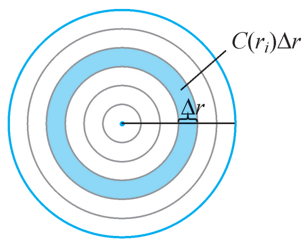
15. 计算由曲线 $y^2 = x$, $y = x^2$ 所围图形的面积.

探究·拓展

16. 如图,在半径为常量 r、圆心角为变量 $2\theta(0 < 2\theta < \pi)$ 的扇形 OAB 内作一内切圆 P,再在扇形内作一个与扇形两半径相切并与圆 P 外切的小圆 Q,求圆 Q 半径的最大值.



(第 16 题)



(第 17 题)

17. (阅读题)**先阅读**:如图,设圆的半径为 r,面积为 $S(r)$,周长为 $C(r)$. 将半径 n 等分,分点到圆心的距离依次为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$,则 $S(r) \approx C(r_1)\Delta r + C(r_2)\Delta r + \cdots + C(r_n)\Delta r$,且 Δr 越小该式的精度越高. 当 $\Delta r \to 0$ 时,$C(r_1)\Delta r + C(r_2)\Delta r + \cdots + C(r_n)\Delta r \to S(r)$,由此可知 $\int_0^r C(x)\mathrm{d}x = S(r)$.

再仿照上述过程,根据球表面积公式 $S_{球} = 4\pi r^2$,尝试导出球体积公式 $V_{球}$.

本章测试

一、填空题

1. 已知函数 $f(x)=x^2-x$，那么当 $h\to 0$ 时，$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\to$ ________.

2. 函数 $y=\sin x$ 的图象在点 $(\pi,0)$ 处的切线方程为________________.

3. 函数 $y=\sin x$ $(x\in[0,\pi])$ 的图象与坐标轴所围成的封闭区域的面积为________.

4. 当函数 $f(x)=\dfrac{5}{x}+\ln x$ 取得最小值时，x 的值为________.

5. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+1$ 在 $x=-4$ 处取得极大值，则实数 a 的值为________.

6. 已知函数 $f(x)=\tan x$，那么 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值为________.

二、选择题

7. 函数 $f(x)=x^2-\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的平均变化率为（　　）.

A. 1　　B. 2

C. π　　D. π^2

8. 函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}-1$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上（　　）.

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

C. 既有最大值，又有最小值　　D. 既无最大值，又无最小值

9. 对于函数 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则实数 x_0 的值为（　　）.

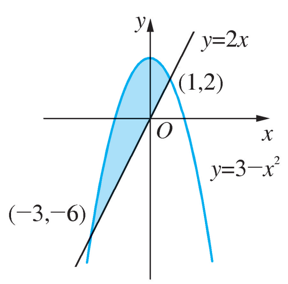
A. e^2　　B. e

C. $\dfrac{\ln 2}{2}$　　D. $\ln 2$

10. 如图所示的阴影部分的面积是（　　）.

A. $2\sqrt{3}$　　B. $9-2\sqrt{3}$

C. $\dfrac{32}{3}$　　D. $\dfrac{35}{3}$



（第 10 题）

三、解答题

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{x}$；

(2) $y=x\ln(2x+1)$.

12. 试确定函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 的单调区间.

13. 求证：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$x>\sin x$.

14. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2$，$a\in\mathbf{R}$，且 $f'(1)=3$.

(1) 求 a 的值及曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值.

15. 已知一个圆锥的母线长为 20cm，那么当圆锥的体积最大时，圆锥的高为多少？