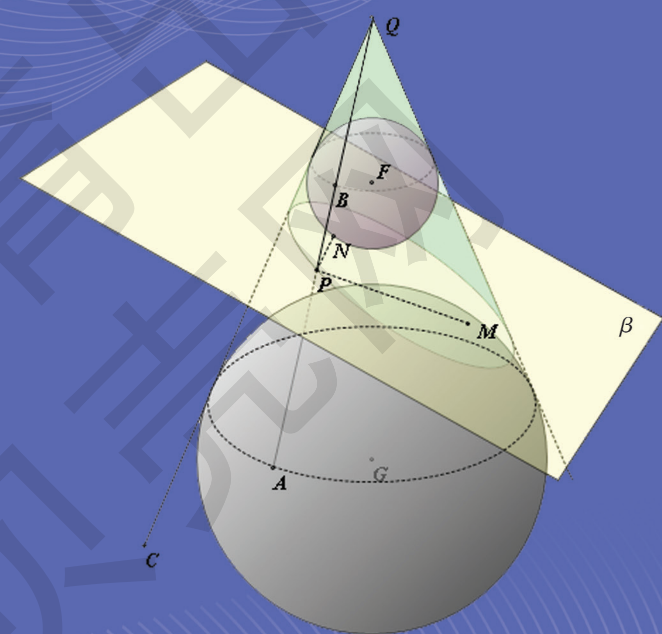
经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

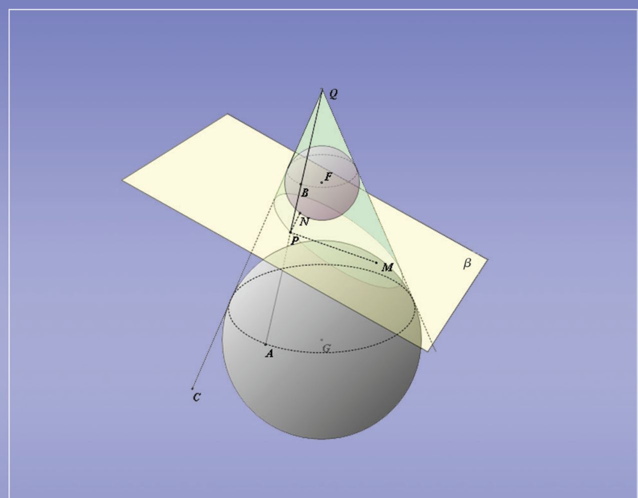
选修4-1

几何证明选讲



湖南教育出版社

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修4-1 几何证明选讲 湖南教育出版社



绿色印刷产品

ISBN 978-7-5355-4202-1

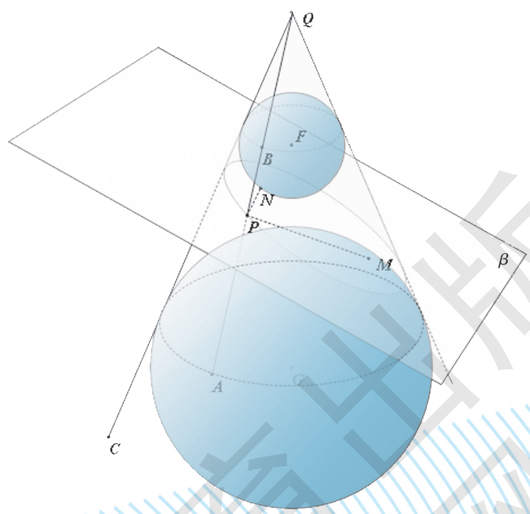
定价：5.60元

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修4–1

几何证明选讲



湖南教育出版社

主　　编　张景中　黄楚芳
执行主编　李尚志

本册主编　张景中
编　　委　于　劭　朱华伟　郑志明

普通高中课程标准实验教科书
数　　学
选修 4－1
几何证明选讲
责任编辑：胡　旺
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
客服电话：0731－85486979
湖南出版中心重印
重庆市新华书店经销
湖南天闻新华印务邵阳有限公司印刷
890×1240　16 开　印张：5.5　插页：2 页　字数：115000
2004 年 6 月第 1 版　2019 年 7 月第 8 次印刷
ISBN 978－7－5355－4202－1
定　价：5.60 元
批准文号：渝发改价格[2019]946 号　举报电话：12358

学一点几何证明

如果我们把数学比作金碧辉煌的宫殿或万紫千红的花园，几何就是这宫殿或花园门前的五彩缤纷的花坛和晶莹夺目的喷泉．它以最直接的方式展示出数学的丰富多彩，吸引人们来欣赏数学和了解数学．

几何有悠久的历史．在历史上，数学科学首先作为几何学而出现．早在2 300多年前，几何已经成为一门结构严谨而自成体系的科学．在漫长的发展历史中，许多杰出的数学家在几何领域辛勤耕耘，留下了丰富的宝藏．

几何是数学花园中最美丽的部分．它既有令人赏心悦目的优美的图形，又能提供由浅入深的众多的有趣问题让你思考探索．它把数学的直观和抽象的逻辑推理紧密地联系起来，论证严谨而优雅，命题精致而美丽．入门不难，魅力无限．

和数学的其他部分一样，几何最初来自于人类的生活实践．最古老的几何问题，也是最有实用价值的几何问题，是土地的测量和计算，和吃饭问题紧密相关．吃饭问题初步解决了，就像建筑好的住房，缝制像样的衣服，制造器皿家具．这就需要画更精确的图样，几何作图问题自然提了出来．计算和作图都要有个道理，讲清楚道理就是证明．古希腊人研究几何最讲究证明．中国古代的几何则讲究计算，把作图和推理都归结于计算，叫作寓理于算．

所谓证明，就是要由因求果，弄清楚道理．讲道理要有些规矩．正是在讨论研究大量几何问题过程中，人类认识到了讲道理的规矩，即逻辑思维的一些基本规律．

学习几何，其意义主要不在于具体的计算公式和定理，而在于提高认识事物、探索规律和表达思想的能力．几何思维，是人类理性活动发展过程中不能省略的阶段．在几何证明的过程中，可以生动地体验到，如何从纷杂的事物中找出关键的线索，如何在变化的数量中发

现不变的关系，如何从平常的事实推导出令人惊叹的结论，如何从直观的形象提炼出抽象的规律，如何把基本的概念发展成有力的方法．在历史上，许多著名的科学家，如牛顿和爱因斯坦，通过学习几何锻炼了研究和表述的能力，为取得重大科学成就创造了有利的条件．

公元前约300年，欧几里得写出了流传千古的《几何原本》，把当时人类所掌握的几何知识熔于一炉，铸成一个空前严整的科学体系．在《几何原本》中，欧几里得从少数显而易见的基本规则出发，用毋容置疑的演绎推理方法，一步一步地推导出数百条几何定理．这在人类的科学思想发展历史上，实为一大创举．几何证明的思想和方法，对人类的科学和文化产生了难以估量的影响．

几何是数学思想的摇篮．现代数学中许多重要的概念、方法和思想，或者来自于几何事实的启发，或者发源于几何问题的探索．许多不同数学领域的概念，能在几何中找到它的原型．在数学史上，由于对某些几何问题的执着的研究，导致了新的数学观念的诞生和新的数学领域的出现．几何是数学的童年，是数学的故乡．熟悉几何，能更好地了解其他数学．学好几何，有助于掌握更多的数学．

几何研究的直接对象是空间形式．世界万物的运动变化都在一定的空间中发生．光的传播路线，电磁感应的规律，物质的结晶形式，生物分子的双螺旋结构，都和几何有不解之缘．在学习几何中得到加强的空间想象能力，对于进一步学习其他科学知识大有帮助．

如果多浏览一些资料，就会知道几何和人文学科并非无关．几何与艺术，几何与语言，几何与哲学，几何与政治，上网查一查，找书读一读，大家议一议，必能眼界大开，必有丰富收获．

现代信息技术的发展，给几何提供了新的用武之地．在计算机科学技术领域，许多与几何有关的问题有待研究解决．信息技术的发展，又使几何变得更有趣，也更容易学习了．使用计算机能作出动态的几何图形，随着图形的变动和测量数据的变化，已构建的几何关系变得极为直观，能够更容易地揭示出蕴藏在特殊图形背后的一般规律．在这由现代技术提供的平台上，你可以检验自己提出的几何猜想，随心所欲地设计图案和几何变换，使几何的魅力充分地呈现

出来.

在初中数学课程中，已经学了不少几何知识. 在这个专题课程中，将要温故知新，在整理已学过的知识的基础上，探讨更丰富的几何现象，体验更犀利的思考方法，学习更严谨的表达方式，接触更深刻的数学思想.

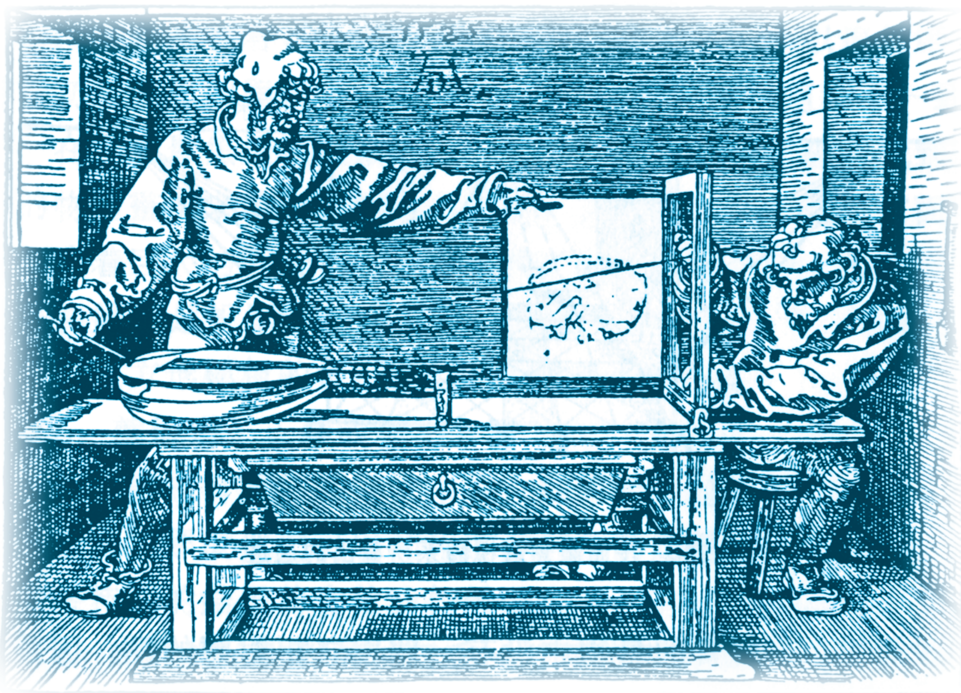
让我们开始吧. 祝同学们学得愉快，学习成功！

作 者

2007 年 6 月

目 录

第 1 章
几何证明选讲



随着几何美妙结构和精美推理的发展，数学变成了一门艺术.

17 世纪最富独创性的数学成果，来自受绘画艺术的激发而产生的灵感. 在这一世纪中，科学为数学研究提供了主要的动力. 画家们在发展聚焦透视体系的过程中，引入了新的几何思想，而且提出了一系列导致这一研究进入全新方向的问题.

数学实验

直线交点的奥秘

实验 1 任作直线 AB，在 AB 上任取一点 C；再作直线 XY，在 XY 上任取一点 Z；继续作出直线 BZ 与 CY 的交点 R，AZ 与 CX 的交点 Q，AY 与 BX 的交点 P．如图 1-1.

观察并判断：P，Q，R 三点之间有什么关系？

实验 2 从一点 O 出发作三条射线 OA，OB，OC，在 OA 上任取一点 X，在 OB 上任取一点 Y，在 OC 上任取一点 Z．再作直线 AB 与 XY 的交点 R，AC 与 XZ 的交点 Q，BC 与 YZ 的交点 P．如图1-2.

观察并判断：P，Q，R 三点之间有什么关系？

随便画几条直线，其中能有什么规律吗？

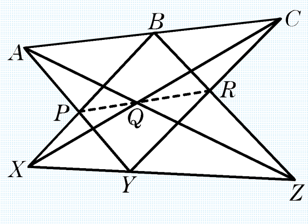


图 1-1

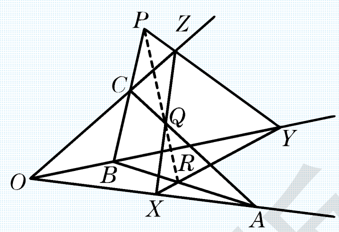


图 1-2

若有条件，最好在计算机屏幕上用具有动态几何作图功能的软件来进行试验（例如使用“Z+Z 超级画板”，这样你可以拖动 A，B，C，X，Y，Z 诸点，观察发现三个交点在变化中依然保持的关系．

上面两个实验是定性实验，下面做一个定量的实验．做定量的实验，用计算机的好处就更明显了．

实验 3 作任意四边形 $ABCD$，直线 AD，BC 交于 K，AB，CD 交于 L，AC，KL 交于 G，BD，KL 交于 F，AC，BD 交于 M．如图 1-3.

测量线段 KF，LF，KG，LG，DM，BM，DF，BF，AM，CM，AG，CG 的长度并计算出比值 $\frac{KF}{LF}$，$\frac{KG}{LG}$，$\frac{DM}{BM}$，$\frac{DF}{BF}$，$\frac{AM}{CM}$，$\frac{AG}{CG}$，拖动 A，B，C，D，观察这些比值的变化，你发现了什么？

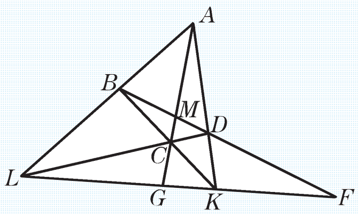


图 1-3

（如果没有计算机，可以只测量前 4 条线段及计算前两个比值.）

在前两个实验中，会看到 P，Q，R 三点总在一直线上，即三点共线. 在实验 3 中，会发现 6 个比值两两相等.

为什么随便画几条直线，就有如此看似巧合的有趣现象呢？

古代的数学家，是怎样发现这些规律的呢？

用我们所学的这一点数学知识，能说明这些规律吗？

从实验中看到，仅仅由一些直线和它们的交点构成的几何图形，其中也蕴藏着始料不及的奥秘.

最初对这类直线图形的奥秘感兴趣的不是数学家，而是 15—16 世纪的艺术家. 为了把立体的景物逼真地描绘到平面上，他们努力研究**透视**（perspective）的数学原理，并且提出了一系列的数学问题. 到 17 世纪，自学成才的大数学家、建筑师**吉拉德·笛沙格**（Girard Desargues，1591—1661），对透视的数学原理做了深入的研究，创立了一门源于艺术的科学——**射影几何（学）**（projective geometry），射影几何被认为是最美的数学分支之一.

在本专题中，我们将有机会欣赏与射影几何有关的一些漂亮的结果. 更有趣的是，我们将会发现，由于数学思想的发展，只要在小学所学的几何知识的基础上稍稍前进一小步，就能揭开上述几个实验中的奥秘，就能证明射影几何中一些著名的基本定理.

古人在 200 多年间辛辛苦苦地开发出的科学宝藏，我们经过几个小时的努力，就能欣赏享用了.

1.1 几个基本定理

几何的最大魅力，就在于它往往从平凡简单的事实出发，经过几步无可置疑的推导，得出意想不到的有趣的结果.

让我们从一个很简单的问题开始.

在$\triangle ABC$的AB边上取一点D，连线段CD. 已知$AD=2BD$，又知道$\triangle BDC$的面积是10 m^2，能求出$\triangle ADC$的面积吗（图1-4）?

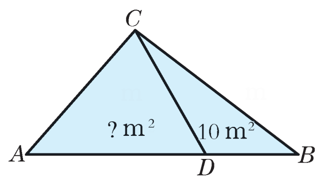


图 1-4

答案是（　　）m^2. 因为：

等高三角形的面积的比等于底之比（图1-5）.

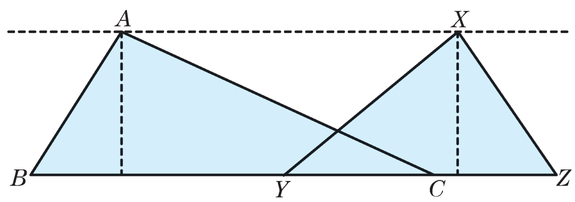


图 1-5

一个几何定理的简单特例常常是更为有用的. 让图中不同的点重合是得到特例的常用的方法之一.

图1-5中当A，X两点重合，Y，C两点也重合时，得到：

命题 1.1 若点D在直线AB上，点C是直线AB外任一点，则$\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AD}{AB}$.（见图1-4.）

若让B，Y两点重合，Z，C两点也重合时，得到：

这里用到平行线的基本性质之一：两平行线的所有公垂线段相等. 反过来也成立.

命题 1.2 若$AX /\!/ BC$，则$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle XBC}$. 反之，若$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle XBC}$并且$A$，$X$在直线$BC$同侧，则$AX /\!/ BC$.

作为练习，请画出命题1.2的图并说出它成立的道理.

命题 1.3 （**平行截割定理**）两直线分别与 3 条平行线顺次交于点 A，B，C 和 X，Y，Z，则$\frac{AB}{BC}=\frac{XY}{YZ}$.

分析 线段比可以转化为面积比，而面积可以通过平行关系过渡.

证明 如图 1-6，连 AY、BX、BZ、CY，则

$$\frac{AB}{BC}=\frac{S_{\triangle ABY}}{S_{\triangle BCY}}=\frac{S_{\triangle XBY}}{S_{\triangle BZY}}=\frac{XY}{YZ}.$$

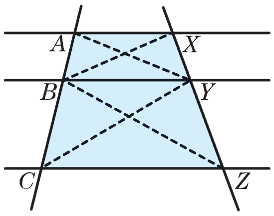


图 1-6

证毕.

你能说明上面推导中 3 步等式成立的理由吗?

在图 1-7 中，把线段 CD 延长或缩短一点，得到一个新的事实：

命题 1.4 （**共边定理**）若直线 PQ，AB 交于点 M，则

$$\frac{PM}{QM}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}.$$

分析 想象线段 AB 沿所在直线滑动，$\triangle PAB$ 和 $\triangle QAB$ 的面积不变，把 A 滑到点 M 处，问题就解决了.

证明 如图 1-7，在直线 AB 上取点 N 使 $MN=AB$，则有：

$$\frac{PM}{QM}=\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle QMN}}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}.$$

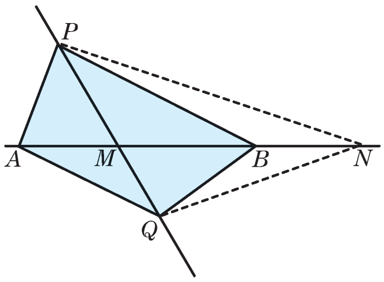


图 1-7

证毕.

要不想作辅助点 N，可以这样证明：

$$\frac{PM}{QM}=\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle QMB}}=\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle PAB}}\cdot\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}\cdot\frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle QMB}}$$

$$=\frac{MB}{AB}\cdot\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}\cdot\frac{AB}{MB}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}.$$

证毕.

这个定理中的两个三角形有公共边 AB，叫作一对共边三角形，共边定理由此得名.

想一想，如果多几条平行线，结论如何表述?

如果 B，Y 两点重合，如何证明?

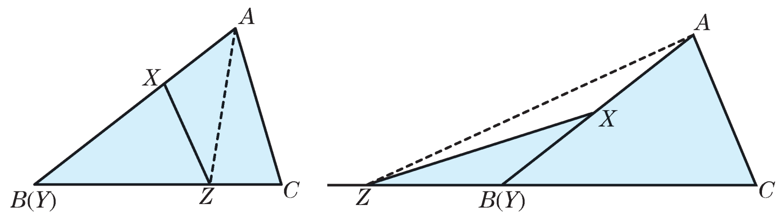
刚才两点变一点，得到有用的特例.

现在一点变两点，发现有力的推广.

共边定理还可以用等比定理证明，请你思考.

命题 1.5 （**共角定理**）若$\angle ABC$与$\angle XYZ$相等或互补，则$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}=\dfrac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$.

分析 让点B，Y重合，把相等或互补的角放到一起，如图 1-8，就看出来了.



（a） （b）

图 1-8

在几何图形中，有公共边的三角形很多，相等的或互补的角也很多，所以共边定理和共角定理有很多的用处.

证明 连接AZ,则下面的推导适合图 1-8(a)、(b)两种情形：

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABZ}} \cdot \frac{S_{\triangle ABZ}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{BC}{YZ} \cdot \frac{AB}{XY}=\frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ},$$

证毕.

上述定理中涉及两个相等或互补的角，共角定理因而得名.

命题 1.6 （**射影定理**） 设CD是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边AB上的高，则有：

（1）$CD^2=AD \cdot BD$；（2）$AC^2=AD \cdot AB$；（3）$BC^2=BD \cdot AB$.

证明 如图 1-9，根据“直角三角形两锐角互为余角”，可得

$\angle A=\angle BCD$，$\angle B=\angle ACD$，又有$\angle ACB=\angle ADC=\angle BDC$，运用共角定理：

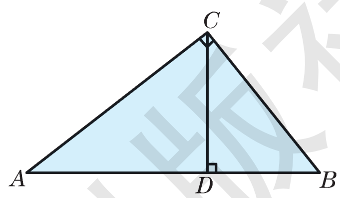


图 1-9

（1）由$\angle CAD=\angle BCD$和$\angle ACD=\angle CBD$得

$$\frac{AC \cdot CD}{BC \cdot BD}=\frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot CD},$$

两端约简得到：

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}，\text{即 } CD^2=AD \cdot BD.$$

暂停一下，想想另外两个等式的推导的思路.

即使是依样画葫芦，也该知道从何处下笔.

对一对三角形使用两次共角定理，得到的等式中本来有 8 条线段. 为什么能约去 4 条呢？这是因为所用的两个角必有一条公共边，这个公共边同在等式两端的分子或分母上出现，一定会约去.

所以，在三角形中选取两个角使用共角定理，应当考虑到两角的公共边是我们不感兴趣的线段，它将被约去.

回顾 $CD^2=AD\cdot BD$ 的证明，由于 AC 在要证的等式中不出现，所以不用$\triangle CAD$ 中 AC 的对角，用另外两角.

同样理由，为证明第 2 个等式，不用$\triangle ABC$ 中 BC 边的对角；证明第 3 个等式，不用$\triangle ABC$ 中 AC 边的对角. 下面继续证明：

(2) 由$\angle ABC=\angle ACD$ 和$\angle ACB=\angle ADC$，得

$$\frac{AB\cdot BC}{AC\cdot CD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AC\cdot BC}{AD\cdot CD},$$

两端约简得到 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AD}$，即 $AC^2=AD\cdot AB$.

(3) 由$\angle BAC=\angle BCD$ 和$\angle ACB=\angle BDC$，得

$$\frac{AB\cdot AC}{BC\cdot CD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AC\cdot BC}{BD\cdot CD},$$

两端约简得到 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{BD}$，即 $BC^2=BD\cdot AB$.

证毕.

从一点 P 向直线或平面上引垂线，垂足叫作 P 在该直线或平面上的射影.

线段上的点的射影的集合，叫作线段的射影.

一般地，点集合中的点的射影的集合，叫作该点集合的射影.

所以，这里证明的关于直角三角形的射影定理，可以叙述为：

1. 直角三角形中，两直角边在斜边上的射影的乘积，等于斜边上的高的平方.

2. 直角三角形中，一直角边的平方，等于该边在斜边上的射影与斜边的乘积.

你看，用文字叙述多啰唆，用图形和符号多简单明了！

习题　1

1. 用射影定理推出勾股定理.

2. 用共角定理证明：若 AD 是$\triangle ABC$ 中$\angle BAC$ 的平分线（如图 1-10），则有$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

3. 用共角定理证明：在$\triangle ABC$ 中，若$\angle ABC=\angle ACB$，则 $AB=AC$.

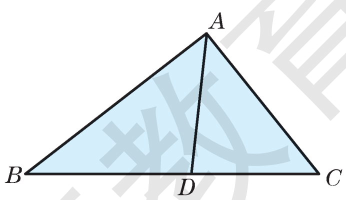


图 1-10

1.2 相似三角形

当相似比为 1 时，相似三角形就成了全等三角形.

在初中数学中，我们学过相似三角形的概念：

定义 对应角相等，对应边成比例的三角形，叫作相似三角形. $\triangle ABC$ 与 $\triangle XYZ$ 相似，记作 $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$，相似三角形对应边的比叫作相似比.

判定两个三角形相似的条件，常用的有三条：

注意，当我们说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle XYZ$ 相似，或写出 $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$ 时，就同时约定了两个三角形的顶点之间的对应关系：A 与 X 对应，B 与 Y 对应，C 与 Z 对应. 三顶点对应好了，边与边、角与角的对应关系也就确定了.

相似三角形判定定理 1（有两对对应角相等的两个三角形相似）

若在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 中有 $\angle A=\angle X$，$\angle B=\angle Y$，则 $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$.

相似三角形判定定理 2（有两边成比例且对应夹角相等的两个三角形相似）

若在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 中有 $\angle A=\angle X$，$\dfrac{AB}{XY}=\dfrac{AC}{XZ}$，则 $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$.

相似三角形判定定理 3（三边对应成比例的两个三角形相似）

若在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 中有 $\dfrac{AB}{XY}=\dfrac{AC}{XZ}=\dfrac{BC}{YZ}$，则 $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$.

想一想，如果 $\angle A=\angle X$，并且 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{XY}{YZ}$，$\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 一定相似吗？

但是，在中学里没有给出这些判定定理的证明. 在欧几里得的几何原本或过去某些教材中，证起来还有点费事. 用了共角定理，证明它们就方便了.

相似三角形判定定理 1 的证明 设在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 中有 $\angle A=\angle X$，$\angle B=\angle Y$，由于三角形内角和为 $180°$，可见 $\angle C=\angle Z$. 对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 的各个角三次使用共角定理得到：

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}&=\frac{AB\cdot AC}{XY\cdot XZ}\\&=\frac{AB\cdot BC}{XY\cdot YZ}\\&=\frac{AC\cdot BC}{XZ\cdot YZ}.\end{aligned}$$

将所得的等式分别约简，得到$\frac{AC}{XZ}=\frac{BC}{YZ}$和$\frac{AB}{XY}=\frac{AC}{XZ}$，这证明了$\triangle ABC\backsim\triangle XYZ$.

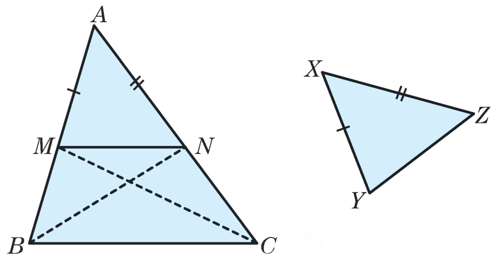


图 1-11

这三个判定定理中，最为常用的是定理1. 用它很容易证明直角三角形的射影定理和平行截割定理.

下面，我们用规范清晰的形式写出相似三角形判定定理 2 的证明：

把两个三角形搬到一起来. 在证明共角定理时就用了这个办法.

（1）$\angle A=\angle X$（已知）；

（2）$\frac{AB}{XY}=\frac{AC}{XZ}$（已知）；

（3）AB 边上取点 M，AC 边上取点 N，使 $AM=XY$，$AN=XZ$（图 1-11）；

（4）$\triangle XYZ\cong\triangle AMN$（（1）、（3），边角边公理）；

（5）$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AM}{AB}=\frac{XY}{AB}=\frac{XZ}{AC}=\frac{AN}{AC}=\frac{S_{\triangle ANB}}{S_{\triangle ABC}}$（（2）、（3），共高定理）；

（6）$S_{\triangle BMN}=S_{\triangle CMN}$（由（5），$S_{\triangle AMC}=S_{\triangle ANB}$，两端同减去 $S_{\triangle AMN}$）；

（7）$BC/\!/MN$（（6），基本定理）；

（8）$\angle AMN=\angle ABC$（（7），平行线的同位角相等）；

（9）$\triangle ABC\backsim\triangle AMN$（（8），$\angle A=\angle A$，相似三角形判定定理 1）；

（10）$\triangle ABC\backsim\triangle XYZ$（（9）、（4））.

证毕.

相似三角形判定定理 3 的证明就简单了. 下面也用规范的形式写出：

（1）$\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}=\frac{AC}{XZ}$（已知）；

（2）AB 边上取点 M，AC 边上取点 N，使 $AM=XY$，$AN=XZ$

当几何解题的头绪和步骤较多时，应当采取这样分步编号的形式来叙述.

（图 1-11）；

（3）$\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AB}{XY}=\dfrac{AC}{XZ}=\dfrac{AC}{AN}$（（1）、（2））；

（4）$\triangle ABC\backsim\triangle AMN$（（3）、$\angle A=\angle A$，相似三角形判定定理 2）；

（5）$\dfrac{BC}{MN}=\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AB}{XY}=\dfrac{BC}{YZ}$（（4）、（2）和（1））；

（6）$MN=YZ$（5）；

（7）$\triangle XYZ\cong\triangle AMN$（（6）、（2），边边边公理）；

（8）$\triangle ABC\backsim\triangle XYZ$（（7）、（4））.

证毕.

例 1　（用相似三角形知识证明平行截割定理）如图 1-12，两直线分别与 3 条平行线顺次交于点 A，B，C 和 X，Y，Z，求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{XY}{YZ}$.

看起来一目了然，一步一步说清楚却颇费口舌.

把证明写清楚的基本功要有，多数情形下不必如此详细．只要写的人和看的人都明白就行.

证明

（1）作 $BN\parallel XY$，交直线 CZ 于 N，交直线 AX 于 M.

（2）$\angle MAB=\angle NCB$（平行线内错角相等）；

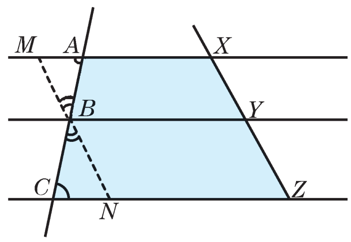


图 1-12

（3）$\angle MBA=\angle NBC$（对顶角相等）；

（4）$\triangle ABM\backsim\triangle CBN$（（2）、（3），相似三角形判定定理 1）；

（5）$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BM}{BN}$（（4），相似三角形性质）；

（6）$AX\parallel BY$（已知）；

（7）四边形 $MBYX$ 是平行四边形（（6）、（1），平行四边形定义）；

（8）四边形 $BNZY$ 是平行四边形（（1），平行四边形定义）；

（9）$BM=XY$（（7），平行四边形对边相等）；

（10）$BN=YZ$（（8），平行四边形对边相等）；

（11）$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{XY}{YZ}$（（5）、（9）、（10），等量代换）.

证毕.

上述证明，如果要简单表述，可以这样写：

（1）作 $BM\parallel XY$，交 AX 于 M，交 CZ 于 N；

（2）$\angle MAB=\angle NCB$，$\angle BMA=\angle BNC$（平行线性质）；

（3）$\triangle ABM\backsim\triangle CBN$（（2），相似三角形判定定理 1）；

（4）$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BM}{BN}$（（3），相似三角形性质）；

（5）$BM=XY$，$BN=YZ$（四边形 $BNZY$、四边形 $MBYX$ 是平行四边形）；

（6）$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{XY}{YZ}$（（4）、（5），等量代换）.

证毕.

想一想，为什么有些步骤可以从简，有些不可省略？

证明的关键之处不可省略.

作出 M，N 两点是关键，应用相似三角形判定定理是关键，不可省略.

省略之处，一旦被人提出询问，应能回答补充，指出细节，直到已知条件．否则，就不叫省略，而是模糊不清了.

例 2 （用相似三角形知识证明直角三角形的射影定理）设 CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，求证：

（1）$CD^2=AD\cdot BD$；

（2）$AC^2=AD\cdot AB$；

（3）$BC^2=BD\cdot AB$.

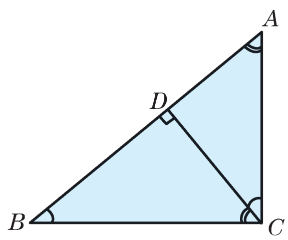


图 1-13

想一想，如何给出相似四边形的合理的定义？如何判定两个四边形的相似？

证明 （1）

1° $\angle BCA=\angle BDC=\angle ADC=90^\circ$（已知）；

2° $\angle DBC=\angle DCA$（（1），两角都是$\angle A$ 的余角）；

3° $\triangle DBC\backsim\triangle DCA$（（1）、（2），相似三角形判定定理 1）；

4° $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{BD}{CD}$（（3），相似三角形性质）；

5° $CD^2=AD\cdot BD$（（4）的变形）.

证毕.

作为练习，请写出（2）、（3）两问的证明．其中（2）的证明详细写出，（3）的证明简略地写出即可.

相似三角形对应边上的高、中线和角平分线分别叫作对应高、对应中线和对应角平分线．一般地，把对应边也算在内，称它们为对应线段．我们有

相似三角形基本性质 相似三角形的对应线段之比，等于相似比．相似三角形面积之比，等于相似比的平方.

作为练习，请写出上述性质的证明.

习题 2

解几何问题要先画出比较准确的图形.

使用动态几何作图软件在计算机屏幕上画出可以拖动变化的图形，更便于发现规律，找到方法.

1. 如图 1-14，两线段 AB、CD 交于 P，若 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$，求证：$\angle ADP = \angle CBP$.

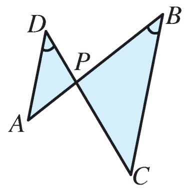


图 1-14

2. 在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$，BD 是$\angle ABC$ 的平分线.

   求证：(1) $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$；

   (2) $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. 在$\triangle ABC$ 的 BC 边上取一点 P，连接 AP. 如果得到的 3 个三角形两两相似，$\triangle ABC$ 和点 P 的位置要满足什么条件？

4. 如图 1-15，$\triangle ABC$ 的高 AD，BE 交于$\triangle ABC$ 内一点 M，求证：$\triangle ABM \backsim \triangle EDM$.

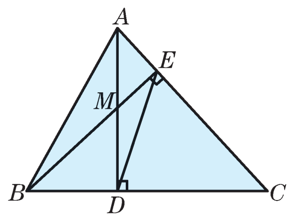


图 1-15

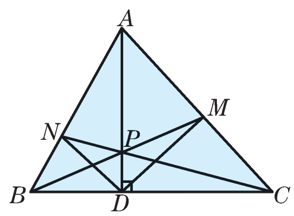


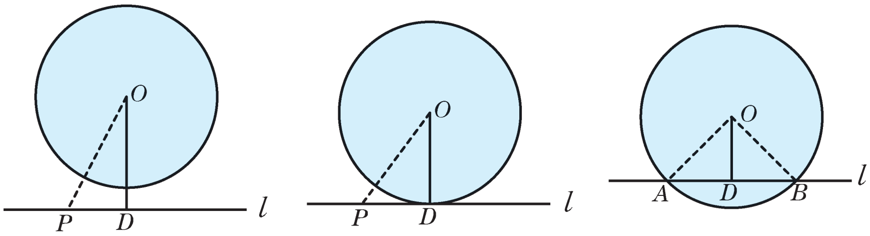
图 1-16

5. 如图 1-16，AD 是$\triangle ABC$ 的高，点 D 在 B，C 之间. 在线段 AD 上任取一点 P，作直线 BP 交 AC 于 M，作直线 CP 交 AB 于 N. 求证：$\angle MDA = \angle NDA$.

1.3 圆的切线

以点 O 为圆心，作半径为 $r(r>0)$ 的圆；再作一条直线 l. 自点 O 向直线 l 作垂线，垂足为 D，记 $d = OD$，叫作点 O 到直线 l 的距离.

让圆心和直线的距离 d 由大变小，有三种情形（图 1-17）：



(a) (b) (c)

图 1-17

（1）D 在圆外，即 $d>r$ 的情形．这时在直线 l 上任取一点 P，总有 $OP\geqslant d>r$，所以 P 在圆外．我们说直线 l 与⊙O 相离．

（2）D 在圆上，即 $d=r$ 的情形．这时在直线 l 上任取不同于 D 的点 P，总有 $OP>d=r$，可见直线 l 和⊙O 只有一个公共点 D，而直线 l 上的其他点都在圆外．我们称直线 l 与⊙O 相切，称直线 l 是⊙O 的一条切线，点 D 叫作直线 l 与⊙O 的切点．

（3）D 在圆内，即 $d<r$ 的情形．这时在直线 l 上有两点 A，B 满足条件 $OA=OB=r$，而 D 是线段 AB 的中点．线段 AB 上的点，除 A，B 之外都在⊙O 的内部；而直线 l 上在线段 AB 之外的点，都在⊙O 的外部．可见直线 l 和⊙O 有两个也只有两个公共点．我们称直线 l 与⊙O 相交，直线 l 是⊙O 的一条割线，点 A，B 叫作直线 l 与⊙O 的交点．

概括起来，简述如下：

设⊙O 的半径为 r，点 O 到直线 l 的距离为 d，则

（1）直线 l 与⊙O 相离$\Leftrightarrow d>r$；

（2）直线 l 与⊙O 相切$\Leftrightarrow d=r$；

（3）直线 l 与⊙O 相交$\Leftrightarrow d<r$．

以上三条中，最重要的是（2），它可以更明确地表述为：

命题 1.7 （**切线特征定理**）直线 l 是⊙O 的切线的充要条件是，它经过⊙O 上一点 D 并且和过点 D 的半径 OD 垂直．

切线特征定理包括了两个方面：（1）圆的切线垂直于过切点的半径，这叫作切线性质定理；（2）经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线，这叫作切线的判定定理．

火车的钢轮在铁轨上，铁轨好比是钢轮的切线．

皮带轮和上面拉直了的一段皮带，也像是圆和它的切线．

做圆周运动的质点，它的速度的方向和所在位置的圆的切线一致．如果失去了向心力，它将随惯性沿该处的切线方向飞出去．

第三种情形，这里只是描述而没有证明．你可以试着证明它．

直角三角形是半个矩形，斜边是矩形的对角线．矩形的两条对角线相等并且互相平分，所以直角三角形的三个顶点到斜边的中点的距离相等．

因为过一个点只有一条直线垂直于已知直线，所以过圆心垂直于切线的直线一定过切点，过切点垂直于切线的直线一定过圆心．这是切线特征定理的两个推论．

如图 1-18，设 P 为⊙O 外一点，如果 PA 是⊙O 的切线，A 是切点，则△POA 是以 PO 为斜边的直角三角形．设 M 是 PO 中点，则 $AM=PM=OM$，可见点 A 在以 PO 为直径的圆上．

这样，只要以 M 为圆心、MO 为半径作圆，⊙O 和⊙M 交于两点 A，B；则 PA，PB 都是⊙O 的切线，A，B 为切点．

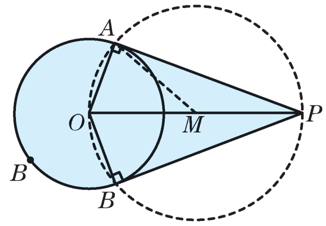


图 1-18

由此可见，从圆外一点可以引圆的两条切线，也只能引两条切线．

从点 P 到切点 A 或 B 的距离，也就是线段 PA，PB 的长度，叫作点 P 到⊙O 的切线长．由勾股定理得到：

$$PA=\sqrt{PO^2-OA^2}=\sqrt{PO^2-OB^2}=PB,$$

此外，由 $OA=OB$ 可知点 O 到∠APB 的两边等距，可见 PO 是∠APB 的角平分线．所以得到了：

命题 1.8 （**切线长定理**）从圆外一点作圆的两条切线，其切线长相等；该点到圆心的连线，平分这两条切线的夹角．

注意：$\triangle AOP\cong\triangle BOP$．

利用全等三角形，也能证明切线长定理．

但是，用勾股定理，不仅证明了这个定理，还计算出了切线长．

记点 P 到圆心 O 的距离 $OP=p$，圆半径为 r，则切线长的平方为 p^2-r^2．这个量叫作点 P 关于圆的幂．点 P 在圆内时，切线没有了意义，但这个量依然存在．点 P 关于圆的幂为正、为负或为 0，对应于 P 在圆外、圆内或圆上的三种情形．

在空间，到定点 O 距离为定长 r 的所有点组成的集合，叫作以 O 为球心，以 r 为半径的球面或球，记作 $Q(O,r)$，简称球 O．

连接球心到球面上一点的线段叫作该球的一条半径．

设点 P 到球心的距离为 p，当 $p>r$ 时，P 在球外；$p<r$ 时，P 在球内；$p=r$ 时，P 在球面上．

球心和不通过它的一条直线确定一个平面．

在这个平面上考虑问题，立体几何的问题就变成了平面几何的问题．

想一想，一条直线和一个球面至多有几个公共点？

和球面有一个并且只有一个公共点的直线，叫作该球的一条切

线．图 1-19 画出了从球外一点 P 到球 O 的几条切线．

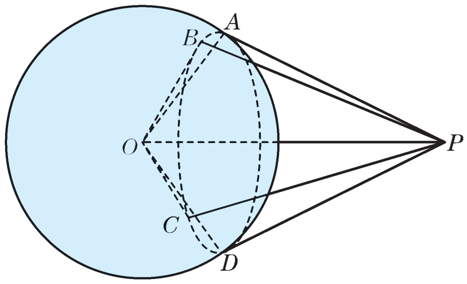


图 1-19

作为练习，比照有关圆的切线的推理，请给出球的切点和球外一点到球的切线长的定义，并证明下列有关球的切线的定理：

命题 1.9 （球的切线特征定理）直线 l 是球 O 的切线的充要条件是，它经过球 O 上点 D 并且和过点 D 的球半径 OD 垂直．

命题 1.10 （球的切线长定理）从球外一点作球的若干条切线，其切线长相等；该点到球心的连线和每条切线的夹角相等．

和球面有一个并且只有一个公共点的平面，叫作该球的一个切平面．这个公共点叫作该球和该平面的切点．

比照有关圆的切线的推理，容易证明：

命题 1.11 （球的切平面特征定理）平面 α 是球 O 的切平面的充要条件是，它经过球 O 上一点 D 并且和过点 D 的球半径 OD 垂直．

那么，球的切线和切平面之间有什么关系呢？

想一想，圆的切线和球的切线有哪些相同的性质，有哪些不同的性质？

如图 1-20，平面 α 是球 O 的一张切平面，切点为 A，于是$OA\perp\alpha$．

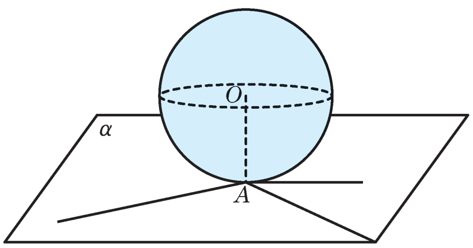


图 1-20

根据立体几何中学过的知识，平面 α 内的每条直线都垂直于 OA．特别是，平面 α 内的每条通过点 A 的直线都垂直于 OA，因而这样的直线都是球 O 的切线．

反过来，若 AP 是球 O 的过点 A 的切线，则有 $OA\perp AP$，于是，AP 在过点 A 且垂直于 OA 的平面内，即在切平面 α 内．综上得到：

命题 1.12 （球的切线和切平面之间的关系）球的切平面内的每一条过切点 A 的直线，都是球的切线；反过来，球的每一条过点 A 的切线，都在与球相切于点 A 的切平面内．

习题 3

1. 如图 1-21，三角形 ABC 的内切圆和三边 BC，AC，AB 分别切于点 M，N，P，若已知 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，求 BM，CN 和 AP.

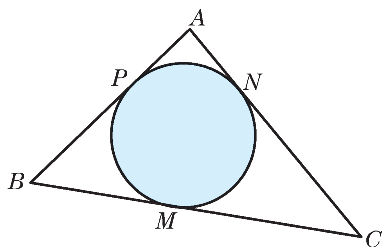


图 1-21

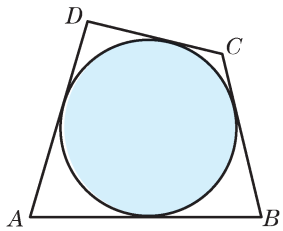


图 1-22

2. 如图 1-22，若 $ABCD$ 是圆外切四边形，求证：$AB+CD=BC+AD$.

1.4 圆周角定理

> 这就是从特殊到一般的思考方法．不管会不会有结果，能提出问题，就有了前进一步的可能．

有些几何定理证明起来并不难，关键是发现它．

由于几何学历史悠久，我们很难了解到许多定理当初是如何发现的，只能想象和推测．

容易想到，人们常常是先看到一些特殊的几何事实，再提出更一般的问题，探讨更一般的规律．

例如，在 1.1 节我们得到共边定理，就是把一个特殊图形中的一个点分成两个点，从特殊推广到一般．又如，研究了圆的切线，进一步想到了球的切线．

切线的特征是垂直于一条半径，也就是垂直于一条直径．直径是圆的特殊的弦．切线和直径的夹角是直角，和其他的弦的夹角是多少呢？

如图 1-23，AB 和⊙O 相切于 D，E 是圆周上一点．当点 E 由 D 处出发逆时针运动时，切线和弦所成的角$\angle BDE$ 随着圆弧 DE 的增

长而变大．当 DE 所对的圆心角 $\angle DOE$ 达到 90° 时，$\angle BDE=45^\circ$（为什么?），当 $\angle DOE$ 达到 180° 时，$\angle BDE=90^\circ$．这提示我们，$\angle BDE$ 是不是总等于 $\angle DOE$ 的一半呢?

这个猜想果然是对的．我们把切线和过切点的弦所成的角叫作弦切角，便有了下面的定理：

命题 1.13　（**弦切角定理**）弦切角等于它所夹的弧所对的圆心角的一半．

证明　如图 1-23，要证明 $\angle BDE=\frac{1}{2}\angle DOE$.

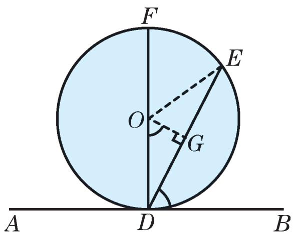


图 1-23

（1）自 O 向 DE 作垂线，垂足为 G；

（2）$DO=EO$，$\triangle ODE$ 是等腰三角形（已知）；

（3）$\angle DOG=\frac{1}{2}\angle DOE$（(2)，等腰三角形性质）.

（4）$\angle BDE+\angle ODG=90^\circ$（切线性质：$BD\perp OD$）；

（5）$\angle DOG+\angle ODG=90^\circ$（(1)，直角三角形两锐角互余）；

（6）$\angle BDE=\angle DOG=\frac{1}{2}\angle DOE$（(4)、(5)、(3)）.

证毕.

但是，图 1-23 画的是 $\angle BDE$ 为锐角的情形．如果是钝角呢?

仍来看这个图．$\angle ADE$ 也是弦切角，它是钝角．这时有：

$$\begin{aligned}\angle ADE &=180^\circ-\angle BDE\\ &=180^\circ-\frac{1}{2}\angle DOE\\ &=\frac{360^\circ-\angle DOE}{2}.\end{aligned}$$

上式最后的（$360^\circ-\angle DOE$）恰好是 $\overset{\frown}{EFD}$ 所对的圆心角的度数，也就是弦切角 $\angle ADE$ 所夹的弧所对圆心角的度数．这说明弦切角定理普遍成立.

为了方便，我们引进圆弧的度数的概念：

几何证明要画图看图，图上总是一种具体情形，就容易忽略其他的情形.

不要忘了想一想图上没有画出来的情形.

当点在圆弧上运动时，过该点的切线的方向角时刻在改变．切线方向角在一段弧上改变量的总和，正是这段弧的度数．

定义　圆弧的度数，等于所对的圆心角的度数．

具体来说，在$\odot O$中，半圆的度数定义为180°，不超过半圆的圆弧$\overset{\frown}{AB}$的度数，定义为$\angle AOB$的度数．超过半圆的圆弧$\overset{\frown}{AXB}$的度数，定义为$360^\circ-\angle AOB$的度数．

于是，弦切角定理可以简单地表述为：

命题 1.14　（**弦切角定理**）弦切角的度数，等于所夹弧的度数的一半．

从圆周上一点P所作两弦PA，PB所成的角$\angle APB$，叫作$\overset{\frown}{APB}$所含的圆周角，或$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角．如图 1-24，从弦切角定理立刻推出：

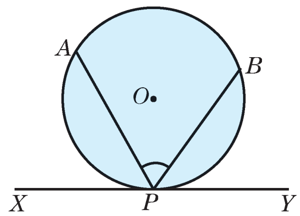


图 1-24

命题 1.15　（**圆周角定理**）圆周角的度数，等于所对弧度数的一半．

我们早已知道，直径所对的圆周角是直角．

证明　如图 1-24，过P作切线XY，有

$$\begin{aligned}\angle APB &=180^\circ-\angle BPY-\angle APX\\ &=\frac{360^\circ-2\angle BPY-2\angle APX}{2}.\end{aligned}$$

由弦切角定理，$2\angle BPY$等于$\overset{\frown}{BP}$的度数，$2\angle APX$等于$\overset{\frown}{AP}$的度数，由360°减去这两弧的度数，得到$\overset{\frown}{AB}$的度数．

证毕．

圆周角定理的下述推论是几何推理中十分常用的工具．

命题 1.16　（**圆周角定理推论 1**）圆周角的度数，等于同弧所对的圆心角之半．

命题 1.17　（**圆周角定理推论 2**）同弧或等弧所对的圆周角相等．

例 1　设P，Q两点在直线AB的同侧．$\odot O$为$\triangle PAB$的外接圆．求证：当点Q在$\odot O$外时$\angle AQB<\angle APB$，点Q在$\odot O$内时$\angle AQB>\angle APB$，点Q在$\odot O$上时$\angle AQB=\angle APB$；反过来也成立．

证明　如图 1-25，射线AQ与$\odot O$交于Q_2，Q_2与P在AB同

侧．若 Q 在圆上，Q 与 Q_2 重合，由圆周角定理有$\angle AQB=\angle APB$；若 Q 在圆外，Q 在图上 Q_1 处，因三角形外角大于内对角，将有 $\angle AQ_1B<\angle AQ_2B=\angle APB$；而当点 Q 在圆内时由三角形外角大于内对角有$\angle AQB>\angle AQ_2B=\angle APB$.

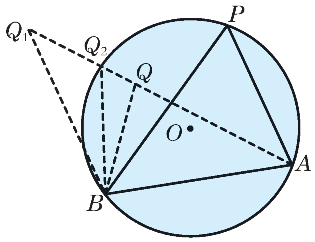


图 1-25

反过来，若$\angle AQB>\angle APB$，由上面的推理，Q 不可能在圆上或圆外，只能在圆内；同理可证$\angle AQB$ 小于或等于$\angle APB$ 时 Q 在圆外或圆上．证毕.

例 1 证明中后半部分，用的是穷举排除方法．也是一种反证法.

命题 1.18　四边形内接于圆的充分必要条件是其对角互补.

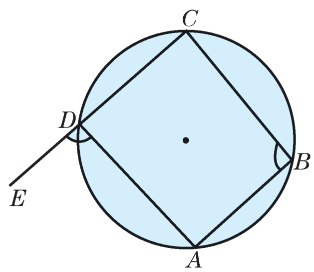


图 1-26

根据圆周角定理，容易推出圆内接四边形对角互补．再应用例 1 的办法，可以证明反过来也成立．注意，四边形有一双对角互补，另一双也就互补.

作为练习，请写出详细的证明.

如图 1-26，$\angle B$ 和$\angle ADC$ 互补等价于$\angle B=\angle ADE$，因此得到四边形内接于圆的另一个充分必要条件：

命题 1.19　四边形内接于圆的充分必要条件是其外角等于其内对角.

注意，四边形有一个外角等于其内对角，则它所有的外角都等于其内对角.

例 2　若$\odot O$ 的直径为 d，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，则 $BC=d\sin A$.

证明　过 C 作$\odot O$ 的直径 CF，则由圆周角定理，$\angle A$ 与$\angle BFC$ 相等或互补，如图 1-27.

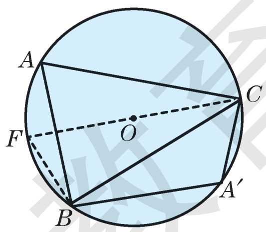


图 1-27

又由圆周角定理，直径 CF 所对的圆周角$\angle FBC$ 为直角．在$\mathrm{Rt}\triangle FBC$中，有 $BC=FC\sin\angle BFC=d\sin\angle A$.

证毕.

圆周角定理是平面几何最重要的定理之一.

根据等腰三角形的性质，你可以直接证明圆周角定理，用圆周角定理推出弦切角定理.

例 3 若两圆交于 A，B，过点 A，B 的直线分别与两圆交于 P，Q 和 M，N，如图 1-28. 求证：$PM /\!/ QN$.

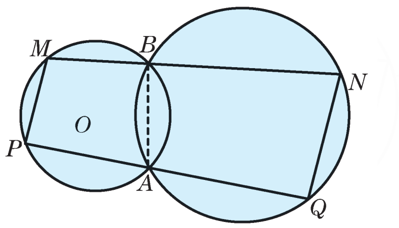


图 1-28

证明 如图，由圆内接四边形外角等于内对角的性质，得

$$\angle M=\angle BAQ=180^\circ-\angle N.$$

即$\angle M$与$\angle N$互补，根据平行线的“同旁内角互补”判定法则，得 $PM /\!/ QN$.

证毕.

习题 4

1. 自$\odot O$外一点 P 作$\odot O$的两条切线，切点为 A，B；连接 AB，OA 和 OB，直接证明$\angle AOB=2\angle PAB$.（弦切角定理的另一证法.）
2. 设$\triangle ABC$和$\triangle XYZ$外接于同一个圆，求证：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot CA}{XY\cdot YZ\cdot ZX}$.
3. 运动场上跑道的边线转弯处是一段圆弧，你能设计一些方案来测量圆弧的半径吗？
4. 圆的两弦 AB，CD 交于 P，如图 1-29. 求证：$\angle BPC$ 等于$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}$两弧度数和的一半.

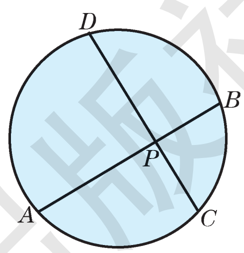


图 1-29

1.5 圆幂定理

两点的关系用距离来描述：距离小，离得近；距离大，离得远.

点和圆的关系用点到圆的幂（简称圆幂）来描述：点在圆内时圆幂为负，点在圆上时圆幂为 0，点在圆外时圆幂为正. 当点在圆外时，圆幂越大，点离圆越远.

你可能想到，为什么不用 $p-r$ 来描述点和圆的关系呢？为什么不用切线长本身来描述点和圆的关系？

你想得有道理. 古人可能也这样想过. 你也可以这样想下去，看看能不能挖出来一点宝贝.

但是，把 p^2-r^2 作为一个几何量来考虑，确实带来许多有趣的东西，你马上就会知道了.

还记得圆幂是什么吗？点在圆外时，它就是点到圆的切线长的平方. 设⊙O 半径为 r，点 P 到圆心的距离 $PO=p$，则点 P 到⊙O 的切线长的平方等于 p^2-r^2，这个式子当点 P 不在⊙O 外时也有意义，叫作点 P 到⊙O 的幂.

一眼看出 $p^2-r^2=(p+r)(p-r)$，这个等式有几何意义吗？

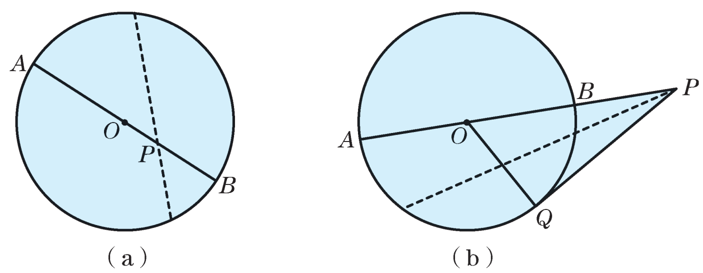


图 1-30

如图 1-30，作直线 PO 和⊙O 交于两点 A，B. 不难看出：

$$PA=p+r, \qquad PB=|p-r|,$$

因为 $p=PO$，所以想到作直线 PO 并不奇怪.

可见 $|p^2-r^2|=PA\cdot PB$. 在图 1-30(b)的情形，有 $PA\cdot PB=PQ^2$.

在图 1-30(b) 的情形，设想过点 P 的直线从 PA 的位置转动到切线 PQ 的位置，乘积 $PA\cdot PB$ 在这个过程中如何变化呢？开始它等于圆幂，最后也等于圆幂，中间是变大还是变小？

学数学提问题极为重要. 提出上面的问题之后，你会发现回答起来并不难，用学过的知识足以解决它.

如图 1-31，过点 P 的直线与⊙O 交于 A，B 两点. 自 O 向 PA

许多有趣的几何事实，证明起来不难，关键是发现它.

从特殊现象出发，推测一般的情形，是发现几何奥秘的重要途径.

作垂线，垂足为 D. 记 $OD=d$，$PO=p$，$OA=OB=r$；根据“等腰三角形底边上的高平分底边”，可得 $AD=BD$，于是

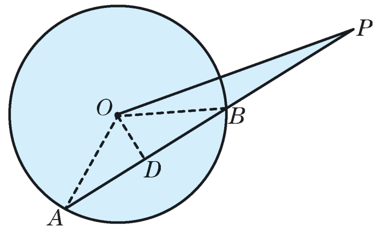


图 1-31

$$PA\cdot PB=(PD+AD)(PD-BD)$$
$$=(PD+AD)(PD-AD)$$
$$=PD^2-AD^2.$$

由勾股定理得 $PD^2=p^2-d^2$，$AD^2=r^2-d^2$，代入上式得：

$$PA\cdot PB=p^2-r^2.$$

我们意外地发现，乘积 $PA\cdot PB$ 的值竟然与 d 的大小无关！

若 P 在圆内，如图 1-32，几乎完全相同的推导，得到：

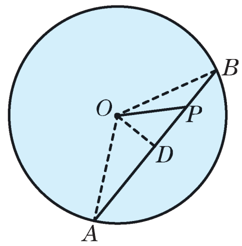


图 1-32

$$PA\cdot PB=(PD+AD)(BD-PD)$$
$$=(PD+AD)(AD-PD)$$
$$=AD^2-PD^2=r^2-p^2.$$

只用文字来叙述定理，比用具体字母要费力.

这也是一种锻炼.

这样，我们用直接计算的办法，得到了一个有趣的定理：

命题 1.20 （圆幂定理）过定点的直线与定圆交于两点，则此定点到两交点距离的乘积等于它到此定圆的幂的绝对值.

定理中有一些特殊情形：当定点在圆上时，圆幂为 0；当定点在圆外并且两交点重合时，定点到交点的距离就是定点到圆的切线长. 这些特殊情形，很容易验证定理成立.

定理的一般情形，可以分为定点在圆外和在圆内两类. 不用勾股定理来计算，只用几何推理来证明，是另一种风格.

定点在圆内的情形，圆幂定理可以表述为：

命题 1.21 （相交弦定理）圆的两弦 AB，CD 相交于 P，则有 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.（图 1-33.）

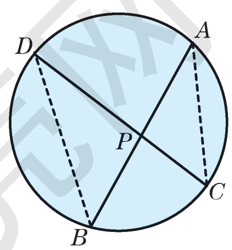


图 1-33

证明 （1）$\angle A=\angle D$（圆周角定理）；

（2）$\angle B=\angle C$（圆周角定理）；

（3）$\dfrac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle DPB}}=\dfrac{PA\cdot AC}{PD\cdot DB}=\dfrac{PC\cdot AC}{PB\cdot DB}$（（1）、（2），共角定理）；

（4）$\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$（（3），约简）；

（5）$PA\cdot PB=PC\cdot PD$（（4），等式变形）．

证毕．

定点在圆外的情形，圆幂定理可以表述为：

命题 1.22　（**切割线定理**）自圆外一点 P 作圆的切线 PC，又作圆的割线与圆交于 A，B，则有 $PA\cdot PB=PC^2$．（图 1-34.）

证明　（1）$\angle A=\angle PCB$（同弧所对的圆周角和弦切角相等）；

（2）$\angle BPC=\angle CPA$（显然）．

（3）$\triangle BPC\backsim\triangle CPA$（（1）、（2），相似三角形判定定理）．

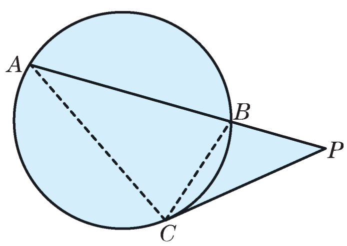


图 1-34

（4）$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PC}{PB}$（（3），相似三角形对应边成比例）．

（5）$PA\cdot PB=PC^2$（（4）的变形）．

证毕．

想一想，怎样从圆幂定理推出上面两个定理？反过来，又如何从这两个定理推出圆幂定理？

作为练习，请用相似三角形性质证明相交弦定理，再用共角定理证明切割线定理．

例 1　两圆相交于 M，N 两点；在直线 MN 上任取两圆外的点 P，自 P 向两圆作切线 PA，PB，如图 1-35，求证：$PA=PB$．

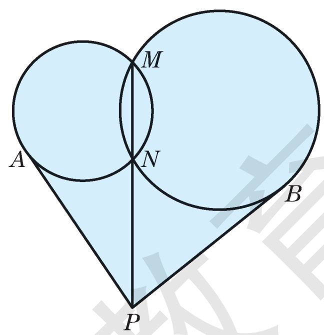


图 1-35

证明　由切割线定理（或圆幂定理），

$$PA^2=PM\cdot PN,$$

图上只有两条弦，实际上过点 P 有无穷多条弦．每条弦被 P 分成的两段长度乘积都相等．

这好比戏台上的几个兵，却代表了千军万马．

注意，图上的一条割线，代表了过点 P 的无穷多条割线．

$$PB^2=PM\cdot PN,$$

故得 $$PA^2=PB^2,$$

所以 $$PA=PB.$$

证毕.

例 2 两线段 AB，CD 交于点 P. 已知 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，求证：A，B，C，D 四点共圆.

证明 如图 1-36，过 A，B，C 三点作圆与直线 CP 交于 E，由相交弦定理得 $PA\cdot PB=PC\cdot PE$. 将此等式与已知的条件 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 相比，得到 $1=\dfrac{PE}{PD}$，即 $PD=PE$，这表明 D，E 两点重合，即 D 在 A，B，C 三点确定的圆上.

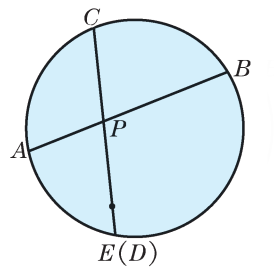


图 1-36

证毕.

要证明一个点具有某种几何性质，可以先作出另一个有这种性质的点，再证明两个点重合. 这种方法叫作几何推理的同一法.

习题 5

1. 半径为 r 的圆的圆心 O 到弦 AB 距离为 d，用多种方法推出计算弦 AB 长度的公式.
2. 圆的两弦 AB，CD 的延长线交于点 P；用共角定理和相似三角形两种方法证明：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.
3. 两线段 AB，CD 的延长线交于点 P. 已知 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，求证：A，B，C，D 四点共圆.
4. 用不同的方法证明例 2 的结论.（提示：用相似三角形.）

数学文化

欧几里得《几何原本》

欧几里得（Euclid，约前 330—前 275），生于雅典，古希腊几何学的集大成者，约在公元前 300 年，欧几里得潜心研究、整理当时人类所掌握的几何知识，写出最负盛名的著作**《几何原本》**（*elements of geometry*），《几何原本》既是几何学的逻辑表现形式，又构成了一个时代的数学史．从几条经过精心选择的公理出发，欧几里得演绎出了所有古典时期希腊大师们已掌握的最重要的结论，近 500 条定理、公理、编排顺序、表达的方式、一些所偏爱的课题的完成，这些都是欧几里得的贡献．

通过中学阶段的学习，我们对欧几里得《几何原本》中的大部分内容已很熟悉了．现在，我们关心的是欧几里得《几何原本》的结构．

我们知道，几何学研究点、线、平面、角、圆、三角形等等．对于欧几里得和希腊人来说，在这部著作中，欧几里得当时所给出的这些术语，并不表示物质实体本身，而是从物质实体中抽象出来的概念．事实上，来源于物质实体的数学抽象，仅仅只反映了物质实体的少量性质．拉紧的绳子可看作数学上的直线，而绳子的颜色、制成绳子的材料，却不是直线的性质．为了使抽象术语的含义更精确，欧几里得首先给这些术语下了定义．他将直线定义为两端保持平直的线，很显然，这一概念是从拉紧的弦、木匠的水平尺抽象而来的．他说：点，就是不包含任何部分的东西．按类似的方法，他定义了三角形、圆、多边形等等．

欧几里得在对所要研究的概念给出定义后，就开始确立关于这些概念的事实或定理．为了进行这一演绎过程，他需要有前提，如同亚

里士多德指出的那样："并不是所有的东西都能被证明，否则证明的过程将会永无止境．证明必须从某个地方起步，用以起步的这些东西是能得到认可的，但却不是不可证明的．这些就是所有科学的第一普遍的原理，被人们称之为公理，或常识．"

在公理的选择方面，欧几里得显示出了伟大的洞察力和判断力．欧几里得为几何学寻求了一套足够的、而且能被普遍接受的公理系统．而且，由于希腊人的几何研究是其研究真理的主要部分，因此这些公理必须是无可置疑的、绝对真实的．

欧几里得提出的公理，表述了点、线和其他几何图形的性质，而且这些性质为其相对应的实物所具有．很明显，所讨论的这些性质确实非常适用于物质实体，因此人们都愿意接受这些公理，并把它们作为进一步推理的基础．欧几里得选择的公理所具有的非凡优点，就在于尽管这些公理可被人立刻接受，但一点也不流于肤浅，因为它们导出了深刻的推论．而且，他所选择的公理非常有限（总共才 10 条），却推演出了整个几何学系统的结构．

为了对欧几里得的选择的明智性加深认识，让我们来回顾几条公理．他断言："连接任意两点可作一条直线"；"过给定点和给定的中心可以作一个圆"；"整体大于其任何一个部分"．显然，这些都无懈可击，而且能被所有的人接受．

挑选出了几何学研究所涉及的概念，选择好了关于这些概念的基本公理之后，欧几里得开始着手建立定理、结论．当然，证明的方法是严格的演绎法．

从公理出发，一些简单的定理立刻就能得到证明，这些定理就成了那些更深奥的定理的基石，这样，整个一座精美的大厦就严密地建立起来了．的确，许多学生不禁感慨万分：这么多看似复杂的定理，竟能从少数几个自明的公理推导出来，真是不可思议！

下一步，看看欧几里得关于物体的大小、形状的基本性质的研究内容．他首先关注的是，在什么条件下，两个物体的大小、形状相同，也就是在什么条件下这些物体是全等的．例如，假设一位测量员测量两块地，形状为三角形，他怎么确定这两块地是否相等呢？他必

须测量每条边、每个角，甚至两块地的面积后，才能判断它们是否相等吗？要是这样，就用不着欧几里得的定理了．例如，如果已知两个三角形中的对应边相等，那么这两个三角形就在所有各方面都相等．这一事实似乎不过是一件微不足道的小问题，但是读者会看到，如果问在什么条件下，两个四边形，即两个具有四条边的图形全等，情形就不完全一样了．当然，这样的问题以及相关的问题，适用于所有各种几何图形．

欧几里得接着问道：如果图形不相等，那么它们之间彼此又有什么重要的关系呢？它们之间又有哪些共同的几何性质呢？他主要考虑的是形状关系．大小不等、但形状相同的图形，即相似形，有许多共同的几何性质．例如，对三角形来说，相似意味着，一个三角形的角与另一个三角形相对应的角相等．从这个确定的性质出发，就可以得出结论：任意两条对应边的比是常数．这样，如果$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是相似三角形（图 1-37），则$\dfrac{AB}{A'B'}$等于$\dfrac{BC}{B'C'}$．而且，如果在这两个三角形中，两条对应边的比是r，则两者面积之比是r^2．

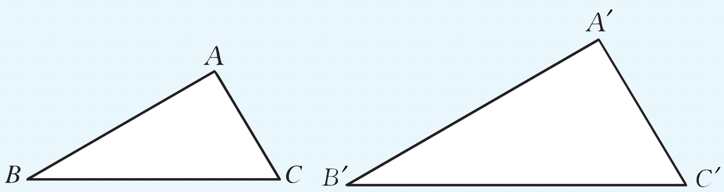


图 1-37　两个相似三角形

如果图形形状和大小都不相同，那么它们之间还存在什么关系呢？当然，它们可能有相同的面积，用几何学术语说，就是等积的．或者它们可以内接于同一个圆中．它们之间可能的关系和彼此间相关的问题不胜枚举．欧几里得选择了其中最基本的关系．

对于所有研究的概念，欧几里得不仅将其应用于由直线构成的图形，而且也应用于圆和球．他对于这些图形的浓厚兴趣耐人寻味．因为在希腊人看来，圆和球是最完美的图形．

从美学欣赏的观点出发，另一类有吸引力的图形同样使他们着迷．在三角形中，等边三角形尤其引人注意，因为它的所有边在长度

上都相等，所有的角的大小都相等．同理，在四边形中，正方形最富有吸引力．在具有五边、六边和多边的平面图形中，以能够作成具有相同的边和角的图形最富有吸引力．这样的图形称为正多边形，人们对它们作过详细的研究．立体图形也有类似的情况．立体封闭的表面能够由正多边形形成，任何一面只能由同一种多边形构成．例如，一个立方体的表面就由沿边相联的六个正方形组成．一个多面体，如果有像立方体这种类型的表面，则称之为正多面体．

与正多面体有关的第一个问题是，有多少种不同类型的正多面

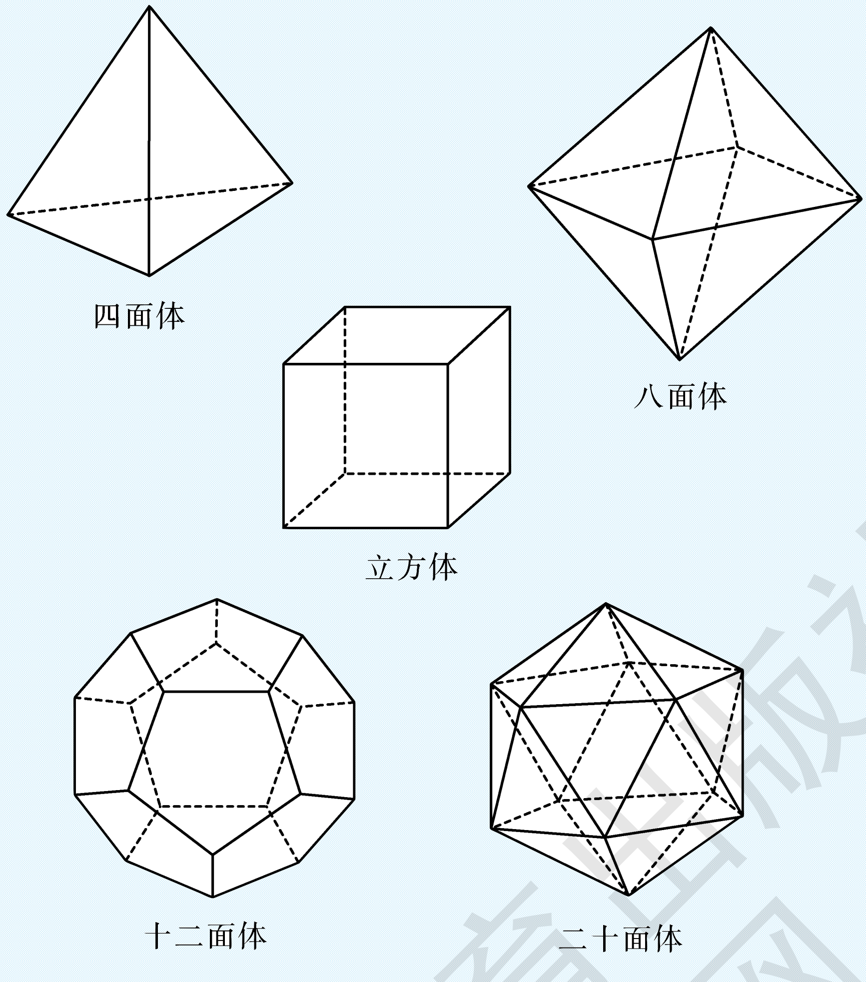


图 1-38　5 种正多面体

体？经过严格的推理，欧几里得证明了，存在且只存在 5 种正多面体．证明过程在这里就不再重复了．图 1-38 中的5种图形就是这些正多面体．柏拉图非常推崇这些图形，他甚至认为，神也会运用这些图形．于是，他详细阐述了某个希腊学派的思想，该学派宣称，所有的

物质都由土、气、火和水四种元素构成．柏拉图则更进一步认为，火元素是四面体，气元素是八面体，水元素是二十面体，土元素是立方体．最后一种形状——十二面体，被神保留下来作为宇宙本身的形状．

希腊人还仔细研究了另外一类曲线．我们都熟悉圆锥状图形，例如冰淇淋就呈圆锥形．如果有两个非常长的圆锥体，如图 1-39 所示放置，则可得到数学家称为圆锥表面的图形，或者有时简称为圆锥体．这个圆锥表面由两部分构成，它们从 O 点向两方无限延伸．如果圆锥表面被一个平面所切（仅仅是一个像桌面一样光滑、没有厚度而且可以向所有方向延伸的表面），那么相切所产生的曲线，其形状取决于平面相对于圆锥的位置．当平面完全切过圆锥的某处时，横断面的曲线是椭圆（图 1-39 中 DEF）、或者是一个圆（图 1-39 中 ABC）；如果切割的平面倾斜，切过圆锥的两部分，那么横断面的曲线由两部分组成，称为一组双曲线（图 1-39 中 RST，$R'S'T'$）；最后，如果切面与圆锥的任意一条线如 POP' 平行，则横断面的曲线就是一条抛物线（图 1-39 中 GIK）．

欧几里得以类似的方法，将有关圆锥曲线的基本事实加以归纳收集，并整理成书，但这部书失传了．在欧几里得稍后不久，另一位著

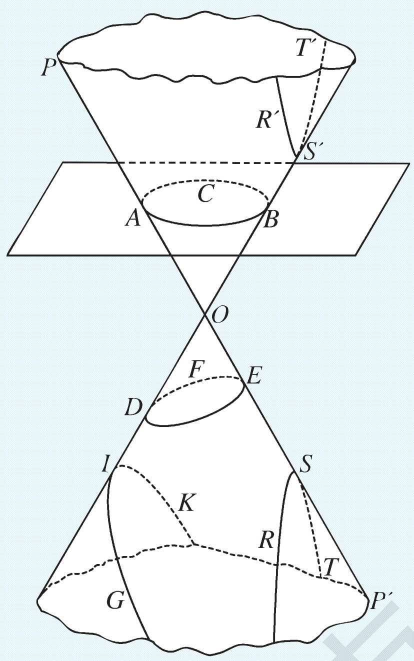


图 1-39　圆锥表面和由其相切平面所成的圆锥曲线

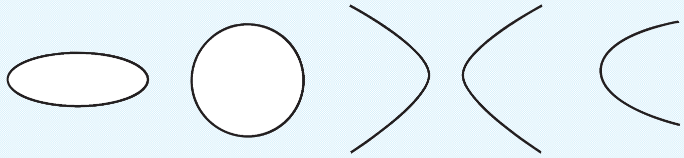


图 1-40　圆锥曲线

名的数学家阿波罗尼奥斯又写了关于圆锥曲线的一部著作，对欧几里得的学说进行了深化、扩充，他也因为该书而著称于世，就像欧几里得因为其《几何原本》流芳百世一样．在这个古典时期，还有一些学者写成了许多其他的数学著作，可惜只有少部分幸存．根据现有的书籍和残篇来判断，完全可以断定，这个时代是一个富有巨大创造力、对数学有着强烈兴趣的时代，是历史上无与伦比的光辉灿烂的时代．

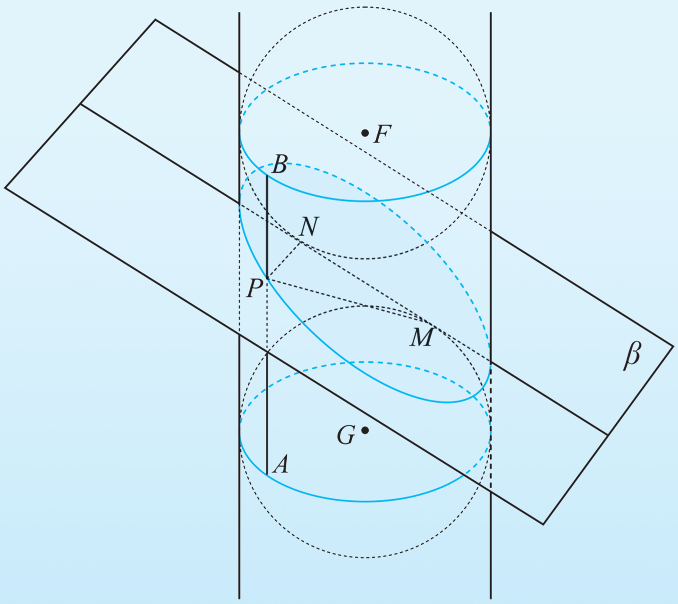
欧几里得几何的创立，对人类的贡献不仅仅在于产生了一些有用的、美妙的定理，更主要的是它孕育出了一种理性精神．人类任何其他的创造，都不可能像欧几里得的几百条证明那样，显示出这么多的知识都是仅仅靠推理而推导出来的．这些大量深奥的演绎结果，使得希腊人和以后的文明了解到理性的力量，从而增强了他们利用这种才能获得成功的信心．受这一成就的鼓舞，西方人把理性运用于其他领域．神学家、逻辑学家、哲学家、政治家和所有真理的追求者，都纷纷仿效欧几里得几何的形式和推演过程．

甚至在希腊人中间，数学也被看作是所有科学的标准，亚里士多德特别强调，每一门科学都必须像欧几里得的几何学一样，通过一些适用于这门科学的有效方法，确立几条基本原理，从这几条基本原理中，以演绎的形式推导出真理．在柏拉图学院的门口，写有这样的箴言：“不懂数学者不得入内”，这典型地反映了他们对待数学的态度．

欧几里得几何学的重要性，远远超出了作为逻辑实践和推理模式本身的价值．以前，数学只不过是推动其他领域进步的工具，随着几何学美妙结构和精美推理的发展，数学变成了一门艺术．希腊人就是这样欣赏数学的．算术、几何、天文学对他们来说，就是音乐之于精神、思维之于艺术．

第 2 章

平面和圆柱面的截线



欧几里得独具慧眼，一览无余地欣赏着美，他很幸运，尽管只那么一次，而且还是远远地，依然闻到了镶嵌在宝石上的檀香散发出的浓郁的香味.

E. 圣·文森特·米莱（Edna St. Vincent Millay）

2.1 平行投影

把立体的东西画在平面上，是既有趣又有用的工作．绘画、建筑、考古、机械制图、计算机图形学里，都关心这件事．

物体在光线的照射下，就会在地面或墙壁上出现影子．人们根据这种现象加以抽象的研究，总结其中的规律，提出用投影的方法来表达物体．射影几何的建立，就源于古代艺术和建筑的需求．

在工程应用中，将投射线通过物体，向选定的面投射，并在该面上得到图形的方法称为投影法．常用的投影法有中心投影法（图 2-1（a）和平行投影法（图 2-1(b)）．中心投影法是投射线汇交一点的投影法（投影中心位于有限远处）；平行投影法是投射线相互平行的投影法（投射中心位于无限远处）．

从右面的图上看到，四面体在平面上的投影可能是四边形，也可能是三角形．

它会不会是其他的形状呢？

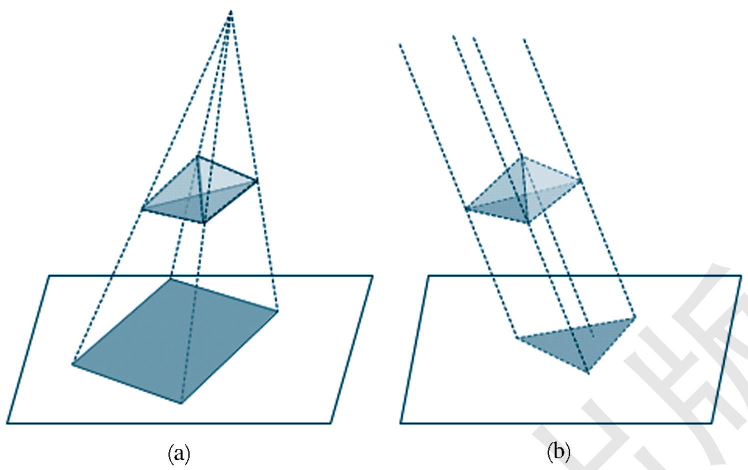


图 2-1

由于平行投影下物体的大小和投影的大小关系更为密切，所以工程中多采用平行投影．

本章主要涉及**平行投影**（parallel projection），下一章再来讨论**中心投影**（central projection）．

在数学中，如何定义平行投影呢？

定义　设空间有一个点集 M，一个平面 α 和一条不平行于平面 α

的直线 s，经过 M 中每一点 X，作平行于 s 或与 s 重合的直线交平面 α 于点 Y，这样就确定了一个由 M 到 α 的映射 $Y=s(X)$，称此映射为由 s 确定的点集 M 到平面 α 的平行投影.

想一想，如果不用映射的概念，你能够把平行投影说清楚吗？

平面 α 叫作投影平面，$Y=s(X)$ 叫作 X 的投影，直线 s 叫作投影线.

若直线 s 垂直于平面 α，映射 $Y=s(X)$ 叫作正投影.

若直线 s 不垂直于平面 α，映射 $Y=s(X)$ 叫作斜投影.

点集 M 在映射 $Y=s(X)$ 下的像，叫作 M 在平面 α 上的投影.

平行投影基本定理　不平行于投影线的线段，在平面上的投影仍为线段. 线段上的点分线段的比保持不变，端点仍为端点.

平行于投影线的线段，它的投影又如何呢？

证明　如图 2-2，C 是线段 AB 上任一点，而 D，E，F 分别是 A，B，C 在平面 α 上的平行投影. 要证明的是 F 在线段 DE 上，并且 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{DF}{EF}$.

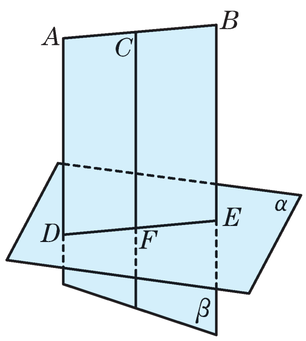


图 2-2

作出投影线 AD，CF，BE，因 $AD/\!/BE$，故 A，B，D，E 确定一平面 β；于是线段 AB 在平面 β 上，故 C 在平面 β 上；由 $CF/\!/AD$，F 也在平面 β 上；于是 D，E，F 在平面 α 和平面 β 的交线上，即三点共线.

解决立体几何的问题，常常要应用平面几何的知识，这就先要证明有关的点和线在同一平面上.

这一点容易被忽略，而且常常不知道如何表述，需要在平凡中注意下功夫.

由于 D，E，F 和 A，B，C 在同一平面上，故可以应用平行截割定理推出 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{DF}{EF}$，于是由 C 在 A，B 之间可知 F 在 D，E 之间.

证毕.

直线或线段若平行于投影线，其投影成为一点. 这叫作退化现象.

为了暂时避免讨论退化情形，我们下面专门考察不和投影线平行的平面 β 到平面 α 的平行投影. 这样的投影是平面 β 到平面 α 的一对一的映射，称为平面 β 到平面 α 的平行投影**变换**（transformation），称 β 为变换的原平面，α 为变换的投影平面或像平面. 两平面相交时，其交线叫作变换的基线.

根据平行投影定义和上述平行投影基本定理，可以推出：

平行投影变换的基本性质

1. 线段的投影仍为线段；
2. 线段中心的投影为投影的中点；
3. 平行四边形的投影仍为平行四边形；
4. 平行线段的投影仍为平行线段；
5. 平行或共线线段的比等于线段投影的比；
6. 若原平面和像平面平行，则线段和它的投影长度相等；
7. 若两平面相交，则平行于基线的线段和它的投影长度相等；
8. 两个多边形的面积比，等于其投影的面积比.

概括地说，在平行投影变换下，线段变为线段，平行线变为平行线，平行或共线的线段比不变，面积比不变.

上述性质的1，2由平行投影基本定理直接推出.

由2结合“平行四边形的对角线相互平分”和“对角线相互平分的四边形是平行四边形”，可以推出3.

由3结合平行投影基本定理，可推出4和5.

层层剥笋，步步为营，是几何学推理的风格.

根据“平行四边形对边相等”可推出6.

关于7的推导，如图2-3，设 MN 在原平面 β 上并且平行于基线；自 M，N 分别向基线引垂线，垂足为 S，R，则 $MN=SR$；设 MN 的投影为 PQ，注意到 SR 的投影为 SR，于是 PQ 平行于 SR，并且 $\dfrac{PQ}{SR}=\dfrac{MN}{SR}$，故 $PQ=MN$.

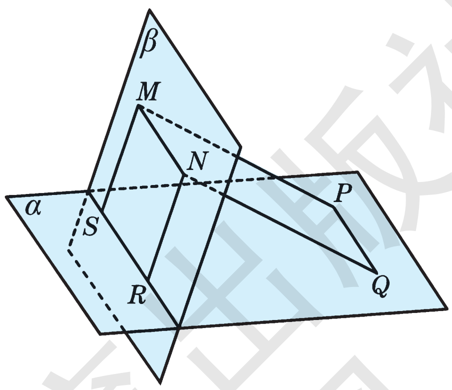


图 2-3

性质8作为练习，放在后面讨论.

在正投影的情形，也就是投影线垂直于像平面时，称这样的投影变换为正投影变换. 正投影变换除了具有上面所述的性质外，还有自己的特殊性质：

正投影变换的性质　若正投影变换的原平面和像平面相交，则垂直于基线的直线的像仍垂直于基线.

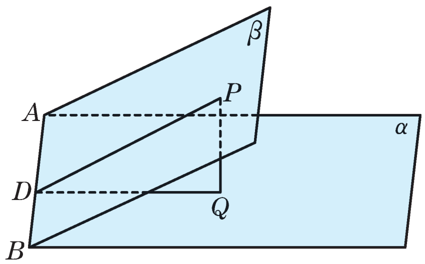


图 2-4

证明　如图 2-4，P 是原平面 β 上一点，自 P 向基线 AB 引垂线，垂足为 D，向像平面 α 引垂线，垂足为 Q，由于 D 的像仍为 D，故线段 PD 的像为 QD；要证明的是 $QD \perp AB$.

由 $PQ \perp$ 平面 α，故 $PQ \perp AB$；又已知 $PD \perp AB$，于是 $AB \perp$ 平面 PQD，所以 $AB \perp QD$. 证毕.

动手画出空间几何图形的直观图，既要有推理的素养，又要有空间直观的想象力．这一节提供了不少机会让你画图，一定要试一试.

画好一幅自己看得明白的立体几何直观图，是一件愉快的事.

习题　6

1. 写出平行投影变换性质 3，4，5，6 的证明并画出对应的直观图.
2. 阅读下面的思路分析，探讨平行投影变换性质 8 的证明方法.

   关于性质 8 的思路分析：如果原平面平行于像平面，由性质 6 可知多边形和它的投影全等，面积相等．所以只要考察两平面相交的情形.

   过多边形的诸顶点，作平行于基线的直线，将多边形分割成若干个底边平行于基线的梯形或三角形．而梯形和三角形都可以看成半个平行四边形，因此，只要证明底边平行于基线的平行四边形的面积与它的投影的面积的比是仅与这个平行投影变换有关的常数就够了．不妨设所考虑的平行四边形和它的投影的底边就在基线上；由性质 7，平行四边形和它的投影有相等的底，它们的面积的比等于高的比，这也就是点和它的投影到基线的距离之比.

   在图 2-4 上添加 P 的投影 R（注意，这时 Q 不是 P 的投影了），连接 QR，则投影线的方向由 $\angle QPR=\theta$ 和 $\angle DQR=\varphi$ 所确定．再设 $\angle PDQ=\gamma$ 也为已知，自 R 向基线 AB 引垂线，垂足为 E，不难求出 $\dfrac{PD}{QE}$，这就是点和它的投影到基线的距离之比，也就是平面 β 上的多边形和它在平面 α 上的投影的面积之比.

想一想，曲线包围的面积和它的投影面积的比，又该如何确定？

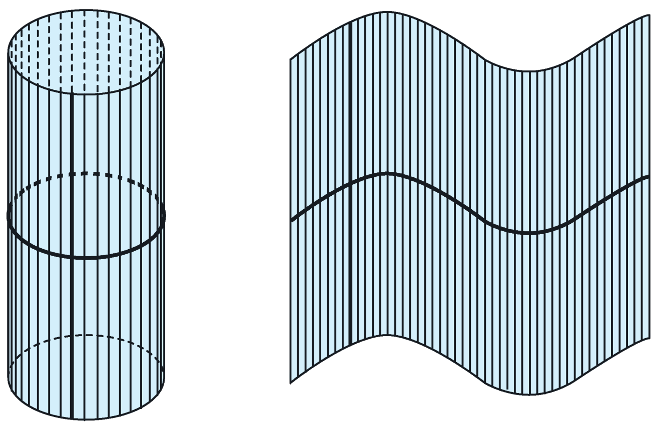
2.2 平面和圆柱面的截线

我们早就知道，线动成面.

一般说来，平行于定直线并沿定曲线移动的直线形成的曲面称为柱面. 定曲线称为柱面的准线，动直线称为柱面的母线.

若柱面的准线为圆，并且母线垂直于圆所在的平面，这样的柱面就叫作圆柱面，过准线圆心并平行于母线的直线叫作圆柱面的轴线，准线圆的半径 r 也叫作圆柱面的半径.

图 2-5(a)、(b)分别画出了圆柱面和某个一般柱面的部分形象.



(a)　　(b)

图 2-5

很多几何事实，我们能看出来，能猜出来.

看出来猜出来，就提出了问题：为什么会是这样？

当使用严谨推理的手段证明、修正或否定了直观的印象和猜测时，我们对事物的认识就更深了一层，从感性认识上升到了理性认识.

矩形 $ABCD$ 以 AB 边为轴旋转一周，直线 CD 就形成了圆柱面.

我们用一个不平行于圆柱面 Σ 的母线的平面 β 来截割 Σ，所得交线 s 叫作平面 β 和圆柱面 Σ 的**截线**（transversal）.

设圆柱面 Σ 的准线 $\odot O$ 所在的平面为 α，且 Σ 的母线垂直于 α，如果把母线看成投影线，截线 s 就是 $\odot O$ 在平面 β 上的投影. 反过来，也可以说 $\odot O$ 是截线 s 在平面 α 上的投影. 由于母线垂直于平面 α，所以 $\odot O$ 还是截线 s 在平面 α 上的正投影.

截线 s 是一条什么曲线呢？

如果平面 β 垂直于圆柱面的轴线，β 叫作圆柱面的正截面．容易想到：

命题 2.1　圆柱面的两个正截面在母线上截得的线段相等；正截面截圆柱面的截线是圆，其半径等于圆柱面的半径．

这是因为，同垂直于母线的两平面平行．应用平行四边形的性质和平行投影的性质，请参看图 2-6(a) 来完成上述命题的证明．

这里的推理可以应用上节关于平行投影变换的性质直接完成，也可以从头做起．

从头做起的好处，是让我们多练习几次基本的方法．

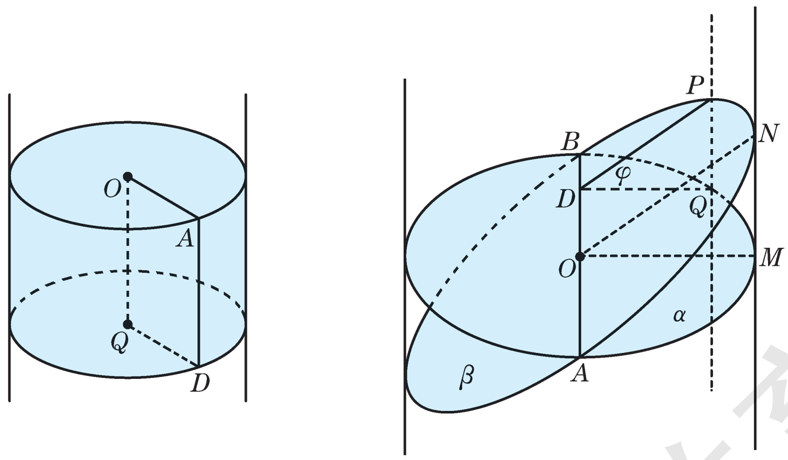
下面设平面 β 和圆柱面的轴线相交成锐角，这时称 β 为圆柱面的斜截面．过轴线并垂直于 β 的平面叫作斜截面 β 的轴面．斜截面的轴面的下面的性质，今后将发挥重要的作用．

命题 2.2　圆柱面的斜截面的轴面，垂直于斜截面和正截面的交线．

作为练习，请写出上述命题的证明．

如图 2-6(b)，圆柱面的准线⊙O 所在的平面为 α，不妨设斜截面 β 也经过点 O，所以斜截面 β 与正截面 α 的交线也过点 O．这条交线和圆柱面的交点记为 A，B，则 AB 是⊙O 的直径．

设 β 的轴面交⊙O 于 M，交 β 的截线于 N，则 ON，OM 分别是 AB 在平面 β，α 上的垂线，因而∠NOM 正是平面 α，β 所成的二面角．



(a)　　　　(b)

图 2-6

设 P 是 β 和圆柱面的截线上不同于 A，B 的任一点，过 P 作平行于 β 的轴面的平面交 AB 于 D，交⊙O 于 Q，则在 Rt△PDQ 中，

如果你没有学过关于二面角的知识，也可以直接证明$\angle PDQ$的大小与点P的位置无关，即比值$\dfrac{QD}{PD}$与点P的位置无关．因为根据平行投影变换的性质有$\dfrac{PD}{NO}=\dfrac{QD}{MO}$，即$\dfrac{QD}{PD}=\dfrac{MO}{NO}$（为定值），这就是我们所要的结论．

$\angle PDQ$也是平面α，β所成的二面角，记此二面角为φ，则有$\dfrac{QD}{PD}=\cos\varphi$，也就是说，对截线上任意不同于$A$，$B$的点$P$，$P$到$AB$的距离和它在平面$\alpha$上的正投影到$AB$的距离的比是一个常数．这是一个关键的结论．

现在，我们再在纸面上画出平面截割圆柱面的截线，看看它的真面目．

设想在图2-6(b)中，让截线固定在平面β上，再让平面β带着这条固定的截线旋转一个角度φ，转到与平面α重合的位置．这时，直线PD和QD重合，点P在线段DQ的延长线上，$PD=kQD$，这里$k=\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

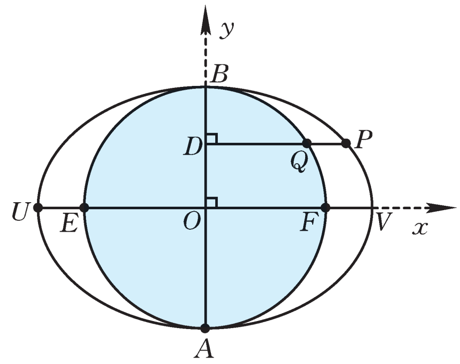


图2-7

这样，就有了在纸上画出截线的办法：先作出$\odot O$和它的一条直径AB，在$\odot O$上任取一点Q，自Q向AB引垂线，垂足为D，再在DQ的延长线上取点P，使得$PD=kQD$，则P是截线上的一个点，如图2-7.

过O作垂直于AB的另一条直径EF，同上法作出截线和直线EF的交点U，V，则U，V是截线上离直线AB最远的点．而A，B是截线上离直线EF最远的点．

由圆的对称性容易推出，该截线有AB，EF两条对称轴．所以只要画出它的四分之一，例如图2-7中BPV这段曲线．

这样作图，就是把$\odot O$上的所有点沿垂直于AB的方向向外移动，使它到AB的距离扩大到原来的k倍．简单地说，就是把圆周沿与AB垂直的方向扩大到k倍，就得到了圆柱面的截线．

取直线EF，AB分别为x，y轴建立直角坐标系（如图2-7），则$\odot O$上的点Q的坐标(u,v)满足圆方程

$$u^2+v^2=r^2\ (r=OA\text{ 是圆柱面的半径}).$$

设截线上的点P的坐标为(x,y)，由$PD=kQD$和$PD\perp AB$得到

$$u=\frac{x}{k},\qquad v=y.$$

代入上述圆方程，整理后得到$\frac{x^2}{(kr)^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$，这是椭圆的标准方程．椭圆的半长轴和半短轴分别为 kr 和 r.

于是，我们得到了如下定理.

圆柱面截线定理　不平行于圆柱面母线的平面截割圆柱面，其截线是一个椭圆．椭圆的半短轴等于圆柱面的半径 r，椭圆的半长轴等于$\frac{r}{\cos\varphi}$，这里 φ 是截割平面与圆柱面母线所成角的余角．特别地，截割平面垂直于母线时，此椭圆是半径为 r 的圆.

既然圆按比例沿一个方向放大成为椭圆，自然会想到，把一个圆沿着一条直径的法方向按一定的比例压缩，是不是也能得到椭圆呢？

确实不错，如图 2-8，以 O 为圆心的两圆半径分别为 r 和 $R=kr$ $(k>1)$，在大圆上任取一点 M，半径 OM 与小圆交于 N．自 M 向大圆的一条直径 AB 引垂线，垂足为 D，自 N 向 MD 引垂线，垂足为 P．想一想，当点 M 在大圆上运动时，点 P 的轨迹是不是椭圆？

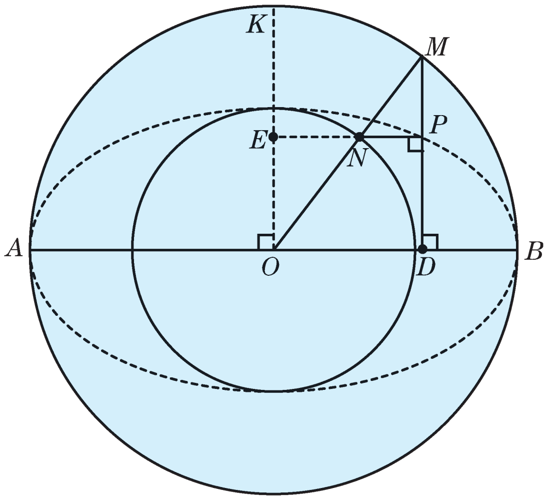


图 2-8

若已知 $\theta=\angle MOD$，如何计算 PE 和 PD？

根据计算结果，能写出点 P 的轨迹方程吗？

如图 2-8，过 O 作垂直于 AB 的半径 OK，延长 PN 交 OK 于 E，这就容易看出：

$$\triangle OEN\backsim\triangle MDO\text{（为什么？）}.$$

因此

$$\frac{PD}{MD}=\frac{OE}{MD}=\frac{ON}{OM}=\frac{r}{R}=\frac{1}{k},$$

$$\frac{PE}{NE}=\frac{OD}{NE}=\frac{OM}{ON}=\frac{R}{r}=k.$$

前一等式表明，P 的轨迹可由大圆沿 AB 的法方向按比例 $1:k$ 均匀压缩而得；后一等式表明，同一个轨迹可由小圆沿 AB 方向按比例 $k:1$ 均匀放大而得.

图 2-8 提供了比图 2-7 更方便的作出圆柱面的截线的方法.

作为练习，用圆规、直尺在纸上画出半径分别为 5 cm 和 8 cm 的同心圆，仿图 2-8 取点 M 的 8～16 个不同位置作出对应的点 P，连成椭圆.

圆柱的斜截面和正截面如图 2－9 所示.

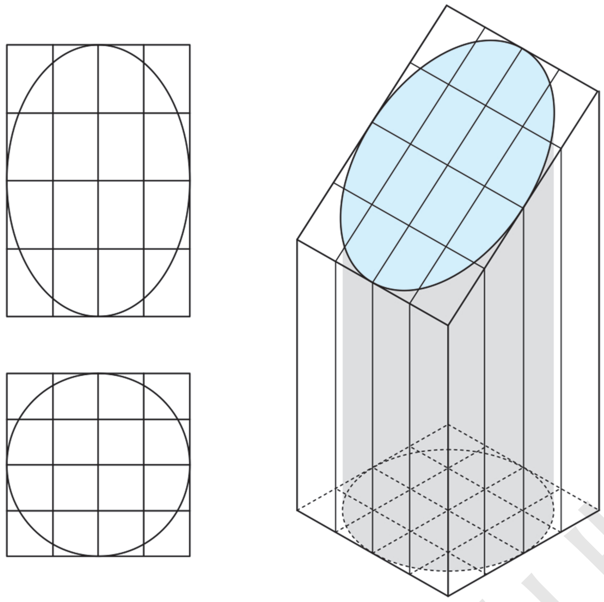


图 2-9

你能在上面的直观图上，找出斜截面的轴面吗?

2.3 圆柱面的截面的焦球

仍设圆柱面的准线为⊙O，半径为 r.

以轴线上任一点 S 为圆心、以 r 为半径作球，此球与圆柱面的公共点是以 S 为圆心、r 为半径的$\odot S$；它也就是过 S 并垂直于母线的平面截割圆柱面所得的截线，它是一条准线.

因为$\odot S$ 上的每个点都在圆柱面上并且到球心 S 的距离等于球半径 r，所以都是球面和圆柱面的公共点. 另一方面，圆柱面上的其他点 T 到 S 的连接线段总是某条母线的斜线，而斜线比垂线长，故 T 到球心 S 的距离大于 r，T 在球外.

这样的球，叫作圆柱面的内切球. 圆柱面的每条母线，都是其内切球的切线.

设平面 β 截割圆柱面，与平面 β 相切的圆柱面的内切球叫作截割平面 β 的焦球. 显然，平面 β 的两侧各有一个焦球. 若平面 β 垂直于母线，两焦球与平面 β 的切点是同一个点，即截线圆的圆心. 而当平面斜截圆柱面时，有趣的情形出现了：两个焦球与平面 β 的切点恰好是截线椭圆的两个焦点. 焦球的命名，就是由此而来.

要证明这个有趣的事实非常容易. 观察图 2-10，想想切线的性质，便清楚了.

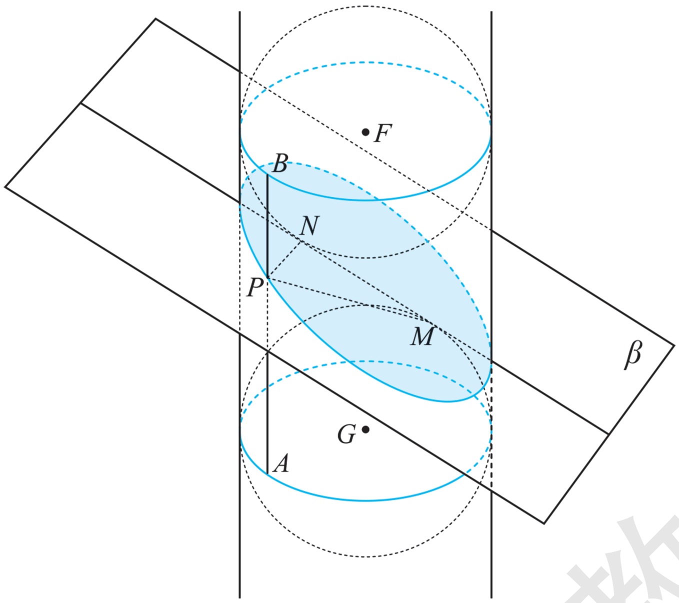


图 2-10

如图 2-10，平面 β 和它的两个焦球 G，F 分别相切于 M，N；设

P 是截线上的任一点，过 P 点的母线和两个焦球分别相切于 A，B. 因为点 P 在平面 β 上，故 PM，PN 分别是两个焦球的切线. 同时，PA，PB 分别也是这两个焦球的切线.

由切线长定理，点到球的所有切线长度相等，可知：

$$PM=PA，PN=PB.$$

因而

$$PM+PN=PA+PB=AB=GF.$$

这表明动点 P 到两定点 M，N 的距离之和等于定长 GF. 根据椭圆的基本定义，这从另一个角度证明了截线是椭圆，同时证明了这两个切点是椭圆的焦点.

例 1 已知圆柱面的半径 $r=3$，截割平面 β 与母线所成的角 $\theta=30°$，求此截割平面的两个焦球球心的距离.

解法一 由图 2-10 和上面的论述可知两个焦球球心的距离等于截线椭圆的长轴；而 $2r$ 与长轴 $2a$ 的比等于平面 β 与准线平面 α 夹角 φ 的余弦；因为母线垂直于准线平面，故截割平面 β 与母线所成的角 θ 与 φ 互为余角，可得

$$\varphi=60°, \qquad 2a=\frac{2r}{\cos 60°}=12.$$

解法二 自两焦球球心 F，G 向平面 β 分别引垂足 A，B，则 F，A，G，B 在同一平面上(为什么?). 如图2-11，两焦球与平面 $FAGB$ 的交线为两个半径为 r 的圆，公切线 AB 和连心线 GF 交于 M，易知 $MG=MF$，且由已知条件 $\angle AMF=30°$，于是 $MF=2AF=2r=6$，两球球心距离 $FG=2MF=12$.

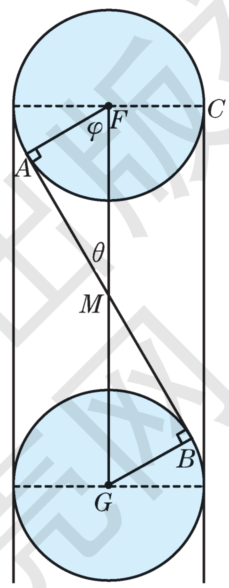


图 2-11

我们已经从两个方面考察了平面斜截圆柱面得到的截线的性质. 下面从第三个方面来考察，将会有新的收获.

如图 2-12，平面 β 斜截圆柱面，并且

和焦球 E 相切于 F；过 E 作圆柱面的正截面 α 和平面 β 交于直线 w. 自 E 向 w 引垂线，垂足为 G，过 G，F，E 作平面 π，则平面 π 垂直于直线 w，因而垂直于平面 β 和 α，故平行于母线；又因为 π 过焦球球心 E，所以 π 过圆柱面的轴线，从而就是 β 的轴面.

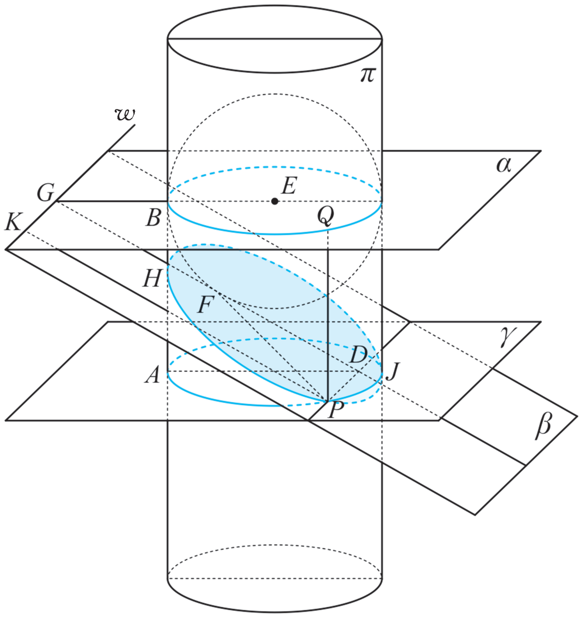


图 2-12

由作图知轴面 π 与斜截面 β 交于直线 GF，GF 与$\odot E$ 切于 F；又设线段 GE 与圆柱面交于 B，过 B 的母线与平面 β 交于 H，则 H 也是直线 GF 和母线 BH 的交点.

现在进入主题. 设 P 是斜截面 β 截圆柱面所得的截线上任一点，过 P 作圆柱面的正截面 γ 交母线 BH 于 A，交直线 GH 于 D，再自 P 向直线 w 引垂线，垂足为 K；则由平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta=$ 直线 w，平面 $\beta \cap$ 平面 $\gamma=DP$，平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，知 $DP /\!/ GK$. 由 $DG \perp GK$ 得 $DG /\!/ PK$，于是四边形 $PKGD$ 为矩形，推出 $PK=DG$.

另一方面，设过 P 的母线与平面 α 交于 Q，则 PQ 与焦球 E 切于 Q，由切线长定理得 $PF=PQ=AB$.

但是，观察轴面上由诸点 G，B，H，F，D，A 和有关的线段构成的图形，立刻发现有 $GB /\!/ AD$，因而 $\triangle ADH \backsim \triangle BGH$，于是 $\dfrac{AB}{DG}=\dfrac{HB}{HG}$，从而有 $\dfrac{PF}{PK}=\dfrac{HB}{HG}$.

这证明了，对于截线上任一点 P，P 到焦点 F 的距离与它到直线

w 的距离之比是一个常数$\dfrac{HB}{HG}$.

注意到 $HB\perp BG$，故 $HB<HG$，可见这个常数小于 1.

直线 w 和圆柱面的这条椭圆截线有特定的关系，它叫作这个椭圆的准线.

至此，我们得到了平面斜截圆柱面所得截线 Σ 的三个特征，也就是椭圆的三个特征，并且知道了与这些特征有关的一些几何元素和几何量：

1. 将圆柱的准线圆按适当比例 $k=\dfrac{1}{\cos\varphi}$沿一定方向均匀放大可以得到截线 Σ，准线圆的半径 r 和 kr 分别为此截线椭圆的短半轴和长半轴；

2. Σ 上的点到某两定点的距离的和等于定值，这两定点叫作此截线椭圆的焦点，此定值就是椭圆的长轴长；

3. Σ 上的点到一个焦点的距离与它到某条定直线距离的比等于某个小于 1 的定值，此定直线叫作椭圆的准线，此定值叫作椭圆的离心率.

这三条性质中的每一条，都可以作为椭圆的定义. 而且从其中任一条性质可以推出其余的两条.

作为练习，自己动手尝试在纸上画出图 2-12 中的所有的点和直线，列出作图步骤，根据作图步骤和推理找出你能够找到的直线和直线、直线和平面以及平面和平面之间的平行关系和垂直关系. 并回答：若平面 β 和圆柱面母线所成的角为 30°，截线椭圆的离心率是多少？

2.4 圆锥曲线的统一定义

在几何研究中，以至于数学的研究中，人们常常从特殊情形受到启发，发现更一般的规律.

同样是椭圆的特征性质，它们在几何上的意义有所不同.

把椭圆仅仅看成是圆沿一个方向均匀扩大或均匀压缩的结果，这一事实所包含的几何意义就比较单纯，没有给我们留下联想和推广的空间.

把椭圆看成是到两定点距离之和为定值的动点的轨迹，就会启发我们，从和想到差，试问到两定点距离之差为定值的动点的轨迹是什么曲线？

一旦提出了有意义的问题，推导论证常常并不困难. 用解析几何的方法，容易导出到两定点距离之差为定值的动点的轨迹的曲线方程，并且能够画出它的图象，推出它的基本性质. 根据它的形象，给这种曲线起个名字叫双曲线.

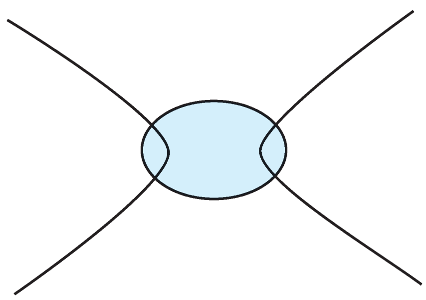


图 2-13

只看样子，你能说出这两种曲线有什么共同之处吗？

在现实生活中，人们有不少机会看到或用到椭圆. 但是，双曲线是不常看到的图象. 即使看见，也不容易想到它和椭圆有密切的联系. 正是数学推理的结果，揭示出隐藏在现象背后事物之间的内在联系，使我们从感性认识提高到理性认识.

当发现了椭圆又是到定点和定直线距离之比为一个小于 1 的正常数的动点的轨迹时，我们的认识更深入了一步. 椭圆的这条性质提供了更大的联想空间：如果这个常数大于 1 或等于 1，又能得到什么曲线呢？

探讨的结果，得出了二次曲线的统一定义：

圆锥曲线的统一定义 平面内，动点 M 到定点 F 的距离和它到一条定直线的距离之比是常数 e，当 $0<e<1$ 时，点 M 的轨迹是椭圆；当 $e>1$ 时，点 M 的轨迹是双曲线；当 $e=1$ 时，点 M 的轨迹是抛物线．其中定点 F 为其焦点，定直线是相应的准线．

我们曾经用两个同心圆来构图，作出椭圆上的点；根据上述的统一定义，不难用一种构图作出这三种曲线．

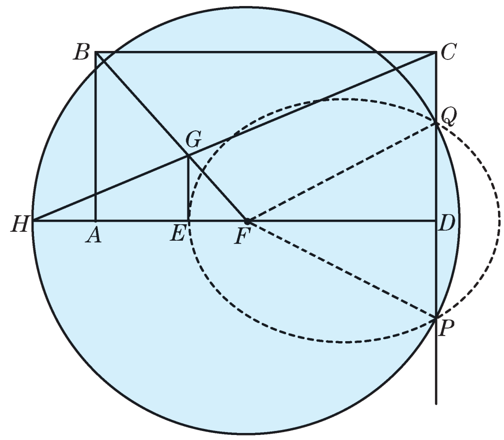


图 2-14

如图 2-14，取矩形 $ABCD$ 的一边 AB 所在直线为准线，在 AD 上取定点 F 为焦点，在线段 AF 上取点 E，过 E 作 AD 的垂线与直线 BF 交于 G，直线 CG，AD 交于 H；以 F 为圆心，FH 为半径作圆与直线 CD 交于 P，Q 两点，则当矩形的边 AB 固定而边长 BC 变化时，点 P，Q 在一条离心率 $e=\dfrac{EF}{AE}$ 的圆锥曲线上．对应的焦点和准线如上所述，分别是点 F 和直线 AB．

只要注意到图中有 $AB\parallel EG$，因而 $\dfrac{FG}{GB}=\dfrac{EF}{AE}$；另一方面有 $\triangle GBC\backsim\triangle GFH$，因而 $\dfrac{FH}{BC}=\dfrac{FG}{GB}$，又因 $FP=FQ=FH$，故得

$$\frac{FP}{BC}=\frac{FQ}{BC}=\frac{FH}{BC}=\frac{FG}{GB}=\frac{EF}{AE}=e.$$

在图 2-14 中，$EF<AE$，$e<1$，轨迹是椭圆．

在图 2-15 中，$EF>AE$，$e>1$，轨迹是双曲线．

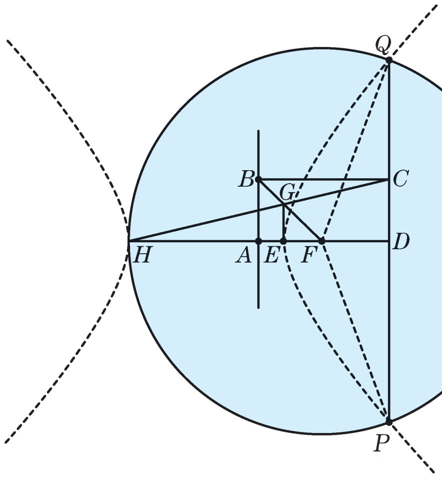


图 2-15

在图 2-16 中，$EF=AE$，$e=1$，轨迹是抛物线.

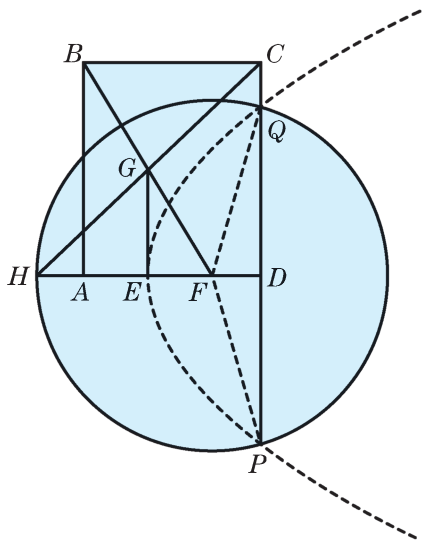


图 2-16

如果在纸上作图，让 BC 的长度多取几个值，描点连线，可以画出曲线的大体模样.

如果有条件，使用动态几何作图软件来画图，拖动图中的点 C，可以看到点 P，Q 在轨迹上运动.

选择 P，Q 两点进行跟踪，可以看到 P，Q 在运动中留下的踪迹，类似图中所示. 改变点 E 的位置来调节离心率 e，踪迹的曲线类型将作相应的变化.

想一想，为了尽可能多地作出轨迹上的点，在三个图中点 C 的变化范围有什么不同?

在这三个图中，是把线段 BC 的长度作为自变量，P，Q 随着 BC 的变化而运动，各画出曲线的一半．能不能选择另一个量作为自变量，让它驱动一个点来画出全部的曲线图象呢？

如图 2-17，让 $\theta=\angle PFx$ 作为自变量，记焦点到准线的距离 $AF=d$，离心率$\dfrac{EF}{AE}=e$，待定的长度 $FP=\rho$，则动点 P 到准线 AB 的距离为：

$$AD=AF+FP\cos\theta=d+\rho\cos\theta,$$

但是由$\dfrac{FP}{AD}=e$ 可得 $AD=\dfrac{FP}{e}=\dfrac{\rho}{e}$，代入上式后解出：

$$\rho=\frac{d}{\dfrac{1}{e}-\cos\theta}=\frac{ed}{1-e\cos\theta}.$$

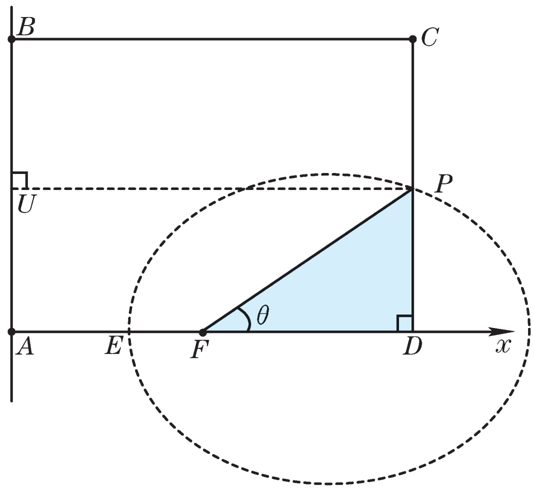


图 2-17

如果把 F 看作极坐标系的极点，射线 Fx 看作极轴，这个等式就成了圆锥曲线在极坐标系中的标准方程．

根据上述方程，在 0 到 2π 之间取若干个 θ 的值，计算出对应的 ρ 值来，可以画出对应于离心率$\dfrac{EF}{AE}=e$ 的圆锥曲线图象来．

想一想，如果计算出遇到 $\rho<0$ 的情形，对应的点该如何作出？如果遇到分母为 0，又说明什么呢？

利用直线和圆的作图，有很多方法构成动点轨迹来画圆锥曲线．

如图 2-18，P 在定圆$\odot F$上运动，G 是圆内一定点，PG 的中垂线和 PF 交于Q，想一想，Q 的轨迹是什么曲线？如果点 G 在圆外，它又是什么曲线呢？

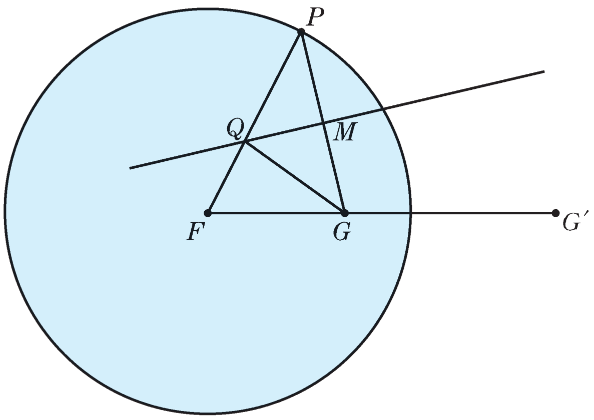


图 2-18

数学文化

绘画和透视

中世纪的绘画多半是为教堂画装饰物，主要是通过描绘的图像来表现基督教教义和思想．到这个时期快要结束时，画家们也和欧洲其他思想家一样，开始对自然界感兴趣，开始探索和真实地描绘自然界．画家们复兴了生机盎然的世界中壮丽的、令人愉悦的本质，重新描绘出美丽的画卷，这种美丽的画卷被证明是物质世界的幸福之所在，是满足自然需要的不可剥夺的权利，是由大地、空气、河流、海洋所带来的欢乐．

在描绘现实世界的问题中，由于几个方面的原因使得文艺复兴时期的画家们对数学产生了兴趣．第一个原因在任何时期都起作用，那就是艺术家们追求逼真的绘画创造．除去颜色和创作意图，那么画家在画布上所画的东西就是位于一定空间的几何形体了．处理这些理想化物体所使用的语言，它们所拥有的理想的比例，描绘它们位于空间中相互位置的关系，都需要利用欧氏几何，才能使这几方面有机地结合起来．

文艺复兴时期的艺术家们转向数学，不仅是因为他们试图逼真地再现自然界，而且因为他们受复兴的希腊哲学的影响．他们完全熟悉而且满脑子都充满了这样的信念：数学是真实的现实世界的本质，宇宙是有秩序的，而且能按照几何方式明确地理性化．因此，像希腊哲学家一样，他们认为要透过现象认识本质，即他们需要在画布上真实地展示其题材的现实性，他们最后所要解决的问题就必定归结到与一定的数学内容相关．艺术家试图发现其作品中数学本质的最有趣的论据，可以在达·芬奇对比例的研究中找到．在这一研究中，他试图使理想人物的结构适应理想的图形——正方形和圆．

全然为了精确地绘画而利用数学，与数学是现实的本质这种哲学观念，仅仅是文艺复兴时期的艺术家寻求利用数学的两个原因. 除此还有另外的原因. 中世纪晚期和文艺复兴时期的艺术家，也是他们那个时代的建筑师和工程师，因此他们必然地爱好数学. 商人、世俗王侯、教会人士把所有的建筑问题都交给艺术家. 艺术家设计、建造教堂、医院、皇宫、修道院、桥梁、堡垒、水闸、运河、城墙、战争器械，在达·芬奇的笔记中，可以找到大量的诸如此类设计的图纸，他自己曾服务于米兰城的统治者**拉多瓦·斯福尔扎**（Lodovico Sforza），不仅作为一位建筑师、雕刻家、画家，而且还作为一名工程师、军事工程建造技师和战争武器专家为其服务. 艺术家甚至还被人邀请去解决炮兵部队中炮弹运行的问题，在那个时期，解决这类问题需要有高深的数学知识. 文艺复兴时期的艺术家是最优秀的实用数学家，而且在15世纪，他们也是最博学、多才多艺的理论数学家.

激发文艺复兴时期艺术家数学天才的那些特殊问题，就是如何在二维的画布上描绘现实中的三维景物. 通过创立一整套全新的数学透视理论体系，艺术家们解决了这一问题，随之他们创立了一种全新的绘画风格.

15世纪和16世纪早期几乎所有的绘画大师，都试图将他们绘画中的数学原理与数学和谐、实用透视学的特殊性质和主要目的结合起来. **西纽雷利**（Signorelli）、**布拉曼特**（Bramante）、**米开朗琪罗**（Michelangelo）、**拉斐尔**（Raphael），以及许多其他人对数学都有着浓厚的兴趣，而且力图将数学应用于艺术. 他们精心创作了难度极大、风格迥异的艺术品，利用高超而惊人的技巧发展、掌握了缩距法，甚至将这些技法的处理置于情感和激情的表现之上. 所有这些，都是为了在他们的作品中展示科学因素. 这些大师们意识到，艺术创作尽管利用的是独特的想象，但也应受规律制约.

这些艺术家们所发展的数学体系的基本原理，可以通过阿尔贝蒂、达·芬奇、丢勒所使用的术语得到解释. 这些人把艺术家的画布想象为一块玻璃屏板，通过它，艺术家能看到所要画的景物，就如同我们能够通过窗户看见户外的景物一样. 从一只认为是固定不动的眼

睛出发，设想光线能投射到景物中的每一点．这样的一束光线称为**射影**（projection）线．在这些光线穿过玻璃屏板（画面）之处都标出一个点子．这样的点集称为一个**截影**（cross section）（或称**截面**或**截景**）．这一截景给眼睛的印象，与景物自身产生的效果是一样的．然后，艺术家们断言，写实主义绘画——作画逼真的问题，就是将眼睛看景物时投射在插入其间的玻璃屏板上物体的大小、位置及其相互关系，在画布上表现出来．事实上，阿尔贝蒂就曾明确地宣称，一幅画就是投射线的一个截景．

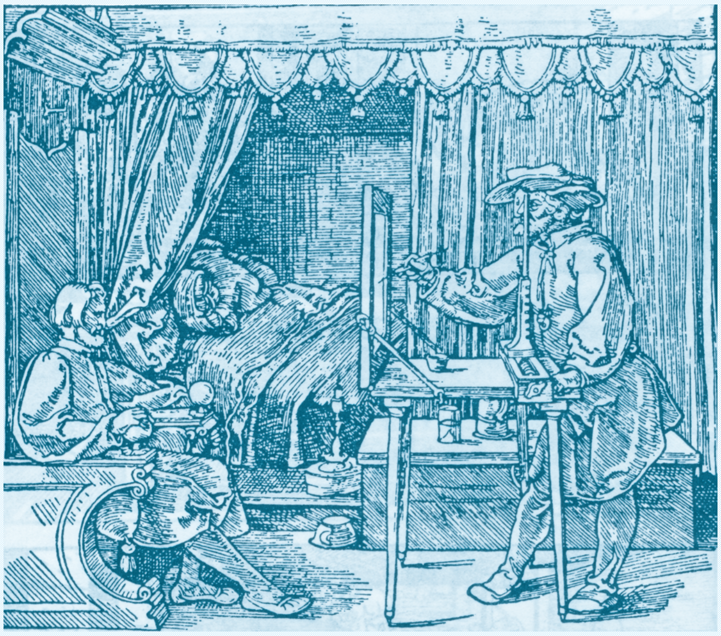


图 2-19　丢勒：为坐着的男人画像

这条原则可以通过丢勒的几幅木刻作品而得到说明．第一幅木刻（图 2-19）显示了艺术家在一块刻有小方格的玻璃屏板或纸上绘画时，将一只眼睛固定地看着某处，而从眼睛射向景物的光线则交于屏板（或纸）上的某些点．第二幅木刻（图 2-20）显示，艺术家在即使眼睛与屏板严重偏离的情况下，也能准确地画出图像．在这幅木刻中，眼睛牢牢地盯住景物中的一个点，在该点上有一根系在墙上的细绳子．第三幅木刻（本书章头图）显示的是如何在屏板之外绘画．

由于画布不透明和不可穿透，因此对于一位希望描绘出仅仅在他的想象中才能存在的景物的艺术家来说，他就不能简单地通过描点的

方式来画出丢勒的“截景”．他必须有指导自己绘画的规则．这样，那些专注于研究透视的学者，就从投影线和截景原理中获得了一系列定理，其中包括聚焦透视体系的大部分内容．这个体系被自文艺复兴以来的几乎所有艺术家采用．

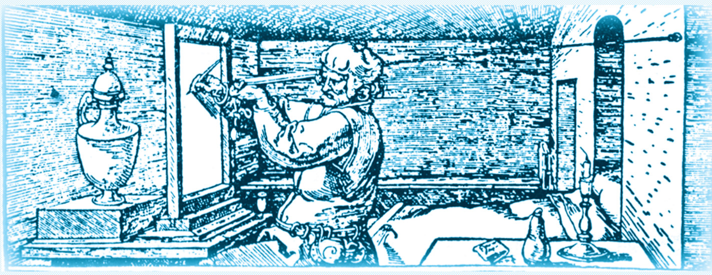


图 2-20　丢勒：画罐

数学透视学的基本定理和规则是什么呢？假设画布处于通常的垂直位置．从眼睛到画布的所有垂线，或者到画布的延长部分的垂线，都相交于画布上的一点，该点称为**主没影点**（principal vanishing point）（这就是不久将出现这个术语的原因）．经过主没影点的水平线称为地平线，这是因为如果观察者通过画布看外面的空间，这条地平线将对应于真正的地平线．这些概念在图 2-21 中可以看到．这幅图显示的是一个人所观察到的大厅过道．这个人的眼睛位于点 O（没画出），处于与本页纸垂直且通过点 P 的垂线上．P 点就是主没影点，而线段 D_2PD_1 就是水平线．

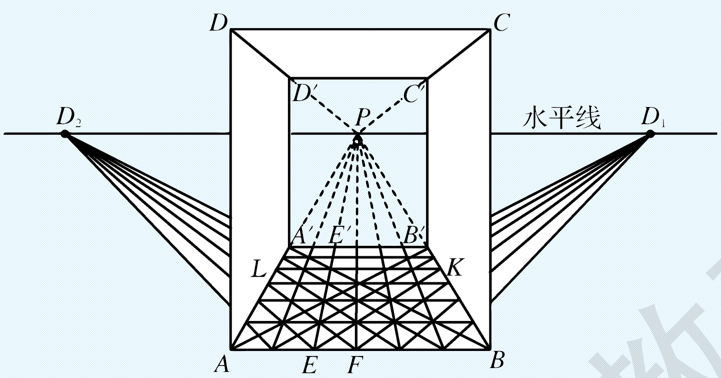


图 2-21　按照聚焦透视体系所画出的过道

第一条基本定理是，景物中所有与画布所在平面垂直的水平线，

在画布上画出时都必须相交于主没影点．这样，诸如像 AA'，EE'，DD'和其他线段（图 2-21）都相交于 P．所有实际上平行的线，应该画作相交，这看起来似乎是不对的．但是，这却是人眼观看平行线的实际情况，如大家所熟知的两条无限伸长的铁轨看起来相交在一起的情况就是一例．也许，现在我们清楚了为什么将 P 点称为没影点．在现实的景物中没有一个与之相对应的点，因为现实中平行线自身绝不会相交．

一幅画应该是投影线的一个截景，从这条一般的原理出发，可以推导出另一条定理：任何与画布所在平面不垂直的平行线束，画出来时应该与其垂直的平行线相交成一定的角度，以便收敛于地平线上的一点，收敛的点取决于这些平行线与画布所在平面的角度．在这些水平平行线中，有两条非常重要．如图 2-21 中的 AB'和 EK，在实际景象中，它们是平行的，而且与画布所在平面成 45°，相交于点 D_1，该点称为**对角没影点**（diagonal vanishing point）．PD_1 的长度必须等于 OP 的长度——从眼睛到主没影点的距离．类似地，如 BA'和 FL 这样的水平平行线，在实际景象中与画布成 135°角，那么画出来也必须相交于图 2-21 中的第二个对角点 D_2，而且 PD_2 必须等于 OP．随着观察者后退，实际景物中上升或下降的平行线被画出来时，也必须相交于相应的地平线的上方或下方的点．这个点将位于从眼睛发出的平行于所讨论的穿过画布的那条线上．

从投影线和截景的一般原理出发，可以写出第三条定理：景物中与画布所占平面平行的平行水平线，画出来时也将是水平平行的，而那些与画布所在平面垂直的平行线画出来也应是垂直平行的．用眼睛观看，所有的平行线都是收敛的，所以这个第三条定理初看起来就与视觉不协调了．

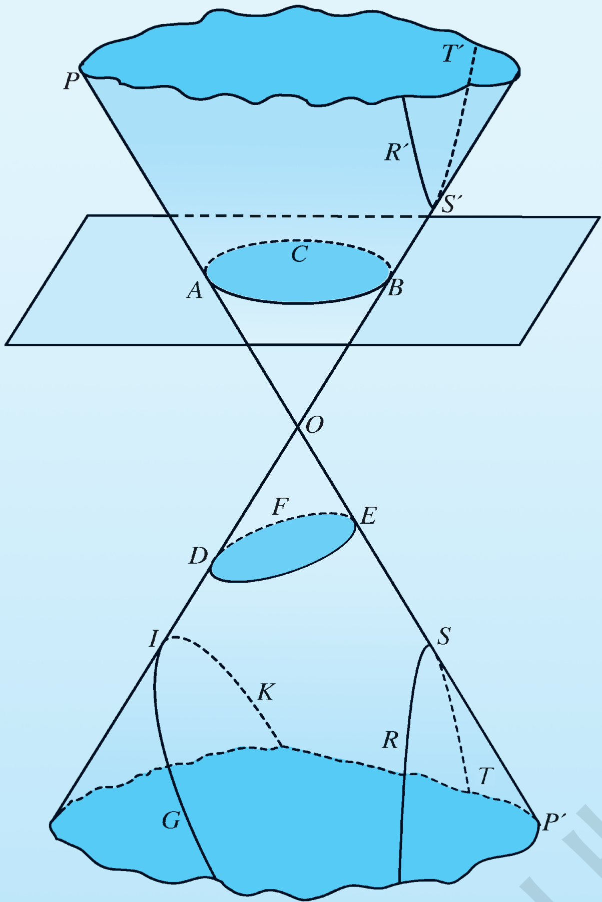
在创立聚焦透视体系很久以前，艺术家们就已经认识到，远处的物体画出来时应该缩小．但是，在确定缩小的比例方面，他们面临着巨大的困难．新体系提供了所需要的定理，这些定理也可以从绘画是投影线的截景的一般原理中推导出来．在图 2-21 所画出的正方形楼板的情形中，适当地处理对角线如 AB'，BA'，EK 和 FL，就得到

了正确的缩小方法.

有一点在讨论中已经暗示过了，而且这一点对于外行看一幅根据聚焦体系而创造的画，也是十分重要的. 那就是，艺术家眼睛的位置与画的创作密不可分. 当观察者的眼睛位于主没影点的水平线上，而且位于从主没影点到两个对角没影点的等距离点的正前方时，从这样的位置观察画面，则可达到最佳效果. 实际上，如果画能挂在适合观察者的高度而又能上下移动的位置上，效果也是很好的.

第 3 章

平面和圆锥面的截线



大自然这部书，在永恒的意识中记录了大自然的思想；在无所不在的圣殿中绘出了大自然的真实形象；大自然美丽的画卷充斥着巨大的全宇宙.

T. 康柏内拉（T. Campanella）

3.1　圆锥面和圆锥曲线

在点光源的照射下，空间的物体在平面上留下的影子，是中心投影的概念在现实生活中的原型．我们用眼睛看东西或用照相机拍照片时，如果把瞳孔或镜头看作一个点，从物体上反射出的光线经过瞳孔或镜头在视网膜上或感光底片上成像的情形，也近似于中心投影．

中心投影下物体投影到平面上的像的大小，和物体的位置远近有密切的关系，就像我们看到或照相机拍到的景物一样．因此，中心投影和画家的写生，和空中摄影测量大有关系．

正如平行投影和柱面有关，中心投影和锥面有关．

本书中不打算讨论一般的中心投影，只研究中心投影下圆在平面上的投影的性质，也就是平面截割圆锥面的截线的性质．

锥面的一般定义如下：

定义　设空间有一条定曲线 Σ 和不在 Σ 上的一定点 A，动点 P 在 Σ 上运动时，直线 AP 上的点的轨迹，叫作以 A 为顶点，以 Σ 为准线的锥面．每条直线 AP 都叫作此锥面的母线．如图 3－1(a)．

和柱面的定义对比一下：柱面是由一些相互平行的直线上的点组成的曲面，而锥面是由一些经过同一点的直线上的点组成的曲面．

最早被人们做了详细研究的锥面是圆锥面：

定义　若锥面的准线为一圆，锥面的顶点在过圆心且垂直于圆所在平面的直线上，则此锥面叫作圆锥面．如图 3－1(b)．

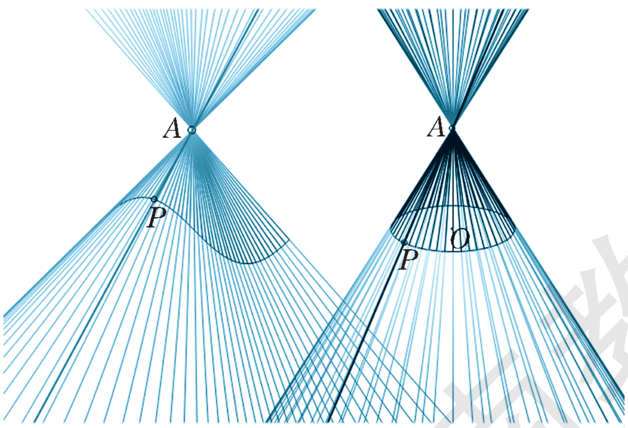


图 3-1

过圆锥面的顶点和它的准线圆的圆心的直线，叫作此圆锥面的轴线.

也就是说，在通过圆心且垂直于圆所在的平面的直线上取一点作为顶点，从此顶点向圆周上每点作直线，所有这些直线上的点组成了一个圆锥面. 当顶点在圆心时，此圆锥面即圆所在的平面，这时称它退化为平面，以下若不特别说明，所提到的圆锥面都是非退化的.

用母线来组成圆锥面，不过是组成圆锥面的方法之一.

想一想，还有什么别的方法，也能生成圆锥面?

例如，圆锥面可以看成是一条和轴线相交的直线以轴线为旋转轴旋转一周所形成的曲面.

由此可见有：

命题 3.1 圆锥面的轴线和每条母线所成的锐角相等，轴线上任一点到每条母线的距离相等.

和圆柱面情形类似，如果平面 β 垂直于圆锥面的轴线，β 叫作圆锥面的正截面. 容易想到：

命题 3.2 圆锥面顶点到正截面之间所截的母线上的线段相等；正截面截圆锥的截线是圆，其半径等于 $d\tan\theta$，这里 d 是圆锥面顶点到正截面的距离，θ 是圆锥面的半顶角.

若平面 β 不和圆柱面的轴线垂直，称 β 为圆柱面的斜截面，过轴线并垂直于 β 的平面叫作 β 的轴面. 类似圆柱面的情形有：

命题 3.3 圆锥面的斜截面的轴面，垂直于斜截面和正截面的交线.

作为练习，请证明上述两个命题.

用平面 β 来截割圆锥面，得到的截线是什么样子的曲线呢?

若平面 β 包含圆锥面的轴线，则平面 β 包含准线圆的圆心 O，因而包含其一条直径 PQ，也就包含了经过这条直径两端的母线 AP 和 AQ. 这时平面 β 和其他的母线只能交于顶点 A 而不会有第二个公共点（为什么），得到的截线就是两条母线. 这是圆锥面的轴截面.

如图 3-2，$\angle PAQ$ 叫作圆锥面的顶角，它的半角（即 $\angle PAO$）

值得思考的是，为什么要提出用平面来截割圆锥面的问题？古代数学家是从实际问题出发提出了这样的问题呢，还是在纯几何的研究中提出了这样的问题呢？

你能不能发挥自己的想象，提出猜想？

当然，如果能查到有关的资料，就更值得高兴了.

的大小，叫作圆锥面的半顶角．半顶角是刻画一个圆锥面的几何性质的唯一的参数．

一般地，当平面 β 经过顶点 A 时，有三种情形：

（1）β 和轴线成的角大于半顶角 θ 时，它和圆锥面的每条母线都交于顶点．这时得到的“截线”退化成一个点．

（2）β 和轴线成的角等于半顶点 θ 时，作为截线的两条母线重合为一．

（3）β 和轴线成的角小于半顶角 θ 时，截线是两条母线．

有趣的事情，都发生在截割平面 α 不经过顶点的情形．和上面的情形对应，也可以分三种情形：

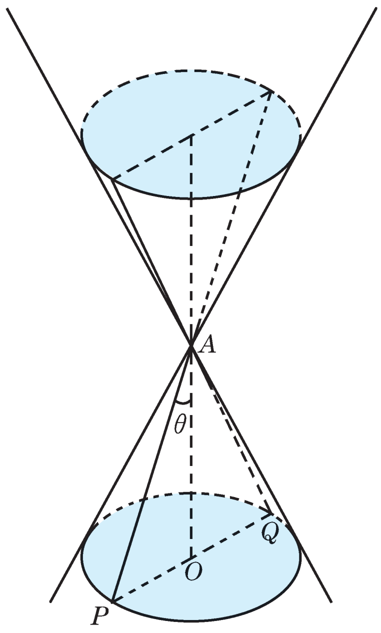


图 3-2

1．α 和轴线成的角大于半顶角 θ 时，上述情形(1)中有一个平面 β 平行于 α，可见平面 α 和圆锥面的每条母线都交于一点．这时得到的截线是封闭曲线．如图 3-3．

如果平面 α 垂直于轴线，想一想截线是哪种曲线？你一定想到了是圆．

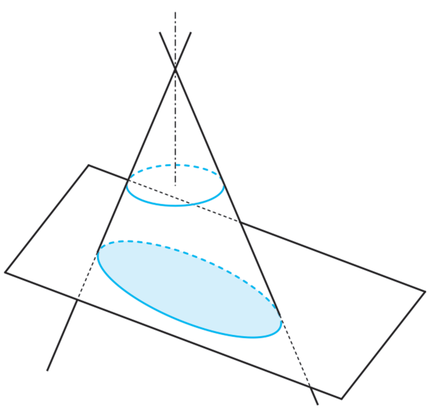


图 3-3

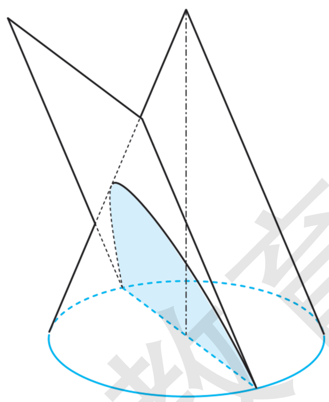


图 3-4

当平面 α 不垂直于轴线时，截线是椭圆．这个事实并不明显．古代的不少数学家开始只想到平面和圆柱面的截线是椭圆．

2. 平面 α 和轴线成的角等于半顶角 θ 时，上述情形(2)中有一个平面 β 平行于 α，因而平面 α 不可能和平面 β 所包含的那一条母线相交，但和其余的每条母线都交于一点．这时得到的截线不是封闭曲线，如图 3-4，后面将会证明它是抛物线．

3. 平面 α 和轴线成的角小于半顶角 θ 时，上述情形(3)中有一个平面 β 平行于 α，因而平面 α 不可能和平面 β 所包含的那两条母线相交，但和其余的每条母线都交于一点．这时得到的截线是两支不封闭的曲线，如图 3-5，后面将会证明它是双曲线．

这是我们把椭圆、抛物线和双曲线统称为圆锥曲线的由来．

上述事实不是一眼能够看出来的．古代数学家为此花了很大的力气．今天，我们站在前人的肩膀上，几个小时就能够掌握前人上百年才得到的知识．

在证明这些事实之前，建议大家设计一些实验来观察圆锥面和平面的截线的形状和性质．

实验的方式可以是多种多样的，可以制作实物模型，可以用光线投影，可以在计算机屏幕上画动态立体图形．

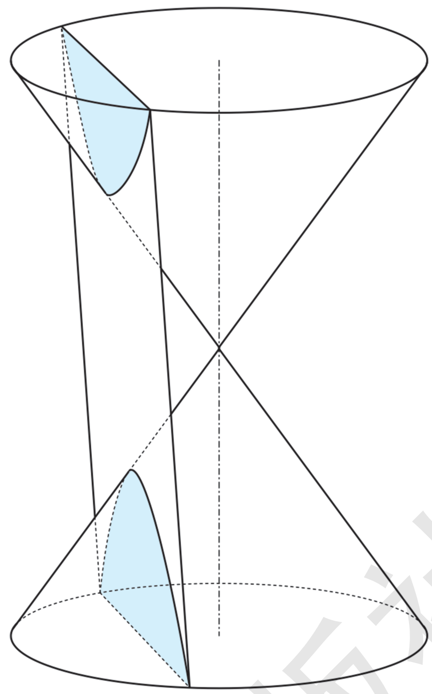


图 3-5

但是，实验不可能证明出截线到底是哪种曲线．最后还是推理解决问题．

圆锥的斜截面和它的轴面（1）

观察图 3-6 中的直观图，找出斜截面的轴面，以及斜截面和轴线所成的角．为什么说这个角大于圆锥顶角的一半？

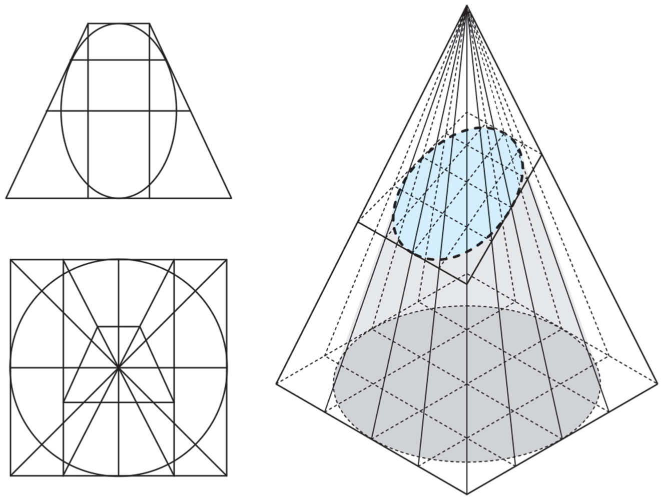


图 3-6

圆锥的斜截面和它的轴面（2）

观察 3-7 中的直观图，在斜截面的轴面上，找出和斜截面平行的母线.

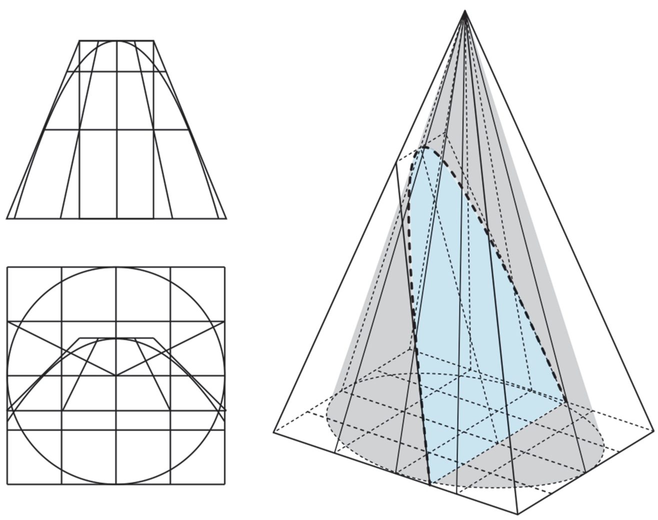


图 3-7

圆锥的斜截面和它的轴面（3）

斜截面斜到什么程度，才能得到图 3-8 截线？

你能在斜截面的轴面上，作出斜截面和轴线的交角，并说明它比圆锥面的半顶角要小吗？

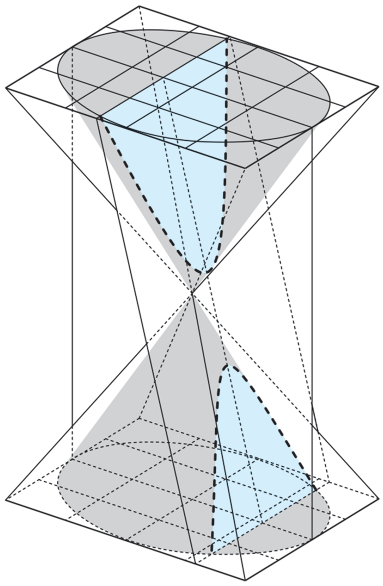


图 3-8

从上面的讨论和观察，我们不难理解下面的定理：

命题 3.4 （圆锥面截线定理）设圆锥面的半顶角为 θ，平面 β 不经过圆锥面的顶点，且和圆锥面的轴线交角为 φ（当 β 与轴线平行时，记 $\varphi=0$），则

（1）$\varphi>\theta$，平面 β 与圆锥面的截线为椭圆；

（2）$\varphi=\theta$，平面 β 与圆锥面的截线为抛物线；

（3）$\varphi<\theta$，平面 β 与圆锥面的截线为双曲线.

这个有趣的定理是公元前约 400 年的古希腊数学家蒙爱启玛斯等发现的. 那时他们用垂直于圆锥面的一条母线的平面来截圆锥面，当圆锥面的顶角为锐角、直角或钝角时，分别得到椭圆、抛物线或双曲线. 100 多年后，古希腊数学家阿波罗尼奥斯才指出只要从不同的角度用平面截一个圆锥面，就能产生这三种曲线. 古人 100 多年的探索历程，我们将在几个课时里来欣赏体验.

3.2 圆锥截面的焦球

在研究平面截割圆柱面的截线性质时，截割平面的焦球起了重要的作用.

自然会想到，焦球也能够帮我们发现圆锥面和平面的截线的性质.

圆柱面的截割平面的焦球满足两个条件，首先它是圆柱面的内切球，其次它要和截割平面相切.

在圆锥面轴线上取不同于顶点的任一点 G，由命题 3.1，G 到每一条母线的距离相等，以 G 为球心，此距离为半径作球，则球 G 和每条母线相切，称它为圆锥面的内切球.

和截割平面 β 相切的内切球，叫作 β 的焦球.

观察图 3-9，你发现了什么？

图上画出了圆锥面的截割平面 β 和与它分别切于 M，N 的两个焦球.

在平面 β 和圆锥面的截线上任取一点 P，它与两切点的连线 PM，PN 分别是两焦球的切线.

另一方面，过点 P 的母线 QP 分别和两焦球切于 A，B.

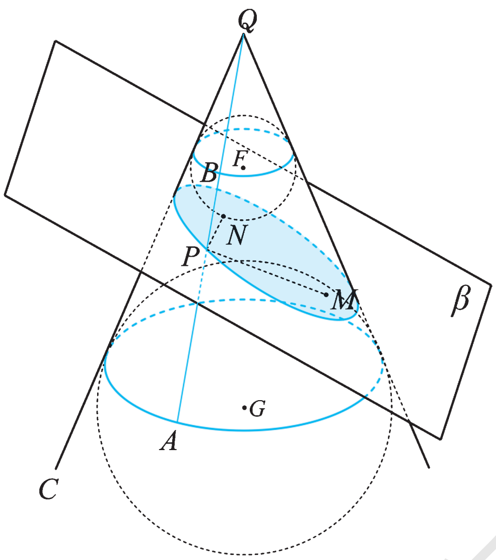


图 3-9

PM 和 PA，PN 和 PB 有什么关系？

当 P 的位置改变时，AB 长度会变吗？

对照上节的图 3-3 到图 3-5 所画的三种情形，可以判断图 3-9 所画的是 $\varphi>\theta$ 的情形.

对比 2.3 节的图 2－10，有类似的推理：如图 3-9，由切线长定理，点到球的所有切线长度相等，可知

$$PM=PA,\ PN=PB;$$

因而

$$PM+PN=PA+PB=AB=QA-QB;$$

由切线长定理，QA 和 QB 的长度当 P 的位置改变时保持不变，因而 AB 的长度也保持不变．这表明，当截面 β 和圆锥面的轴线所成角 φ 大于圆锥面的半顶角 θ 时，截线上的动点 P 到两定点 M，N 的距离之和等于定长．根据椭圆的定义，这证明了截线是椭圆，同时证明了两焦球和截面的两个切点是椭圆的焦点．

圆锥面截线定理（命题 3.4）情形（1）得证．

我们似乎一眼就看出了这个证明．

这是不是太容易了呢？

你能够对这个证明提出疑问吗？

例如，焦球是不是一定有呢？

如果没有焦球，这个证明就不成立了．

可以设想，在平面 β 上方先作圆锥面的较小的内切球，逐渐放大直到碰上平面 β，就成了焦球．

类似地，在平面 β 下方先作圆锥面的较大的内切球，逐渐缩小直到碰上平面 β，就成了另一个焦球．

这样的说明很直观，对我们自己很有说服力，但不能算是几何的证明．

要用几何证明来确认圆锥面的截割平面当 $\varphi>\theta$ 时确有这样的两个焦球，最有效的办法是给出焦球的构造方法．

这是一个空间作图的问题．

解决空间作图问题的主要思路，是把它化为平面作图问题．

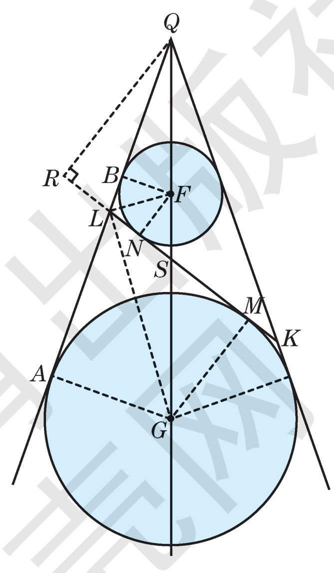


图 3-10

图 3-10 画出了斜截面 β 的轴面 π 上的几何图形：LK 是轴面和斜

截面 β 的交线；Q 是圆锥面的顶点；QL 和 QK 是轴面所包含的两条母线；S 是轴线和平面 β 的交点.

在 $\triangle QLK$ 中作 $\angle QLK$ 的角平分线和轴线交于 F，再作其外角的角平分线和轴线交于 G；容易想到，F，G 分别是斜截面 β 的两个焦球球心.

为了证明 F 是焦球的球心，自 F 分别向 LK 和 LQ 作垂线，垂足分别为 N，B，因 F 在 $\angle QLK$ 的平分线上，故 $FN=FB$.

以 F 为球心过点 N 作球，要证明的是球 F 和平面 β 相切，并且和每条母线都相切.

由于圆锥面的轴线上的点到每条母线等距，故 F 到每条母线的距离都相等，并等于球半径，如 $FN=FB$，这证明了球 F 和每条母线都相切.

要证明球 F 和平面 β 相切，只要证明 FN 和平面 β 垂直. 由于 FN 垂直于平面 π 和平面 β 的交线 LK，而平面 π 和平面 β 垂直，所以 FN 垂直于平面 β. 这证明了球 F 和平面 β 相切.

同理可以证明，自点 G 向直线 LK 引垂线，垂足为 M，再以 G 为球心过 M 作球，则球 G 也是截面 β 的焦球，M 是此焦球和 β 的切点.

如果要问，斜截面 β 的轴面是如何作出来的呢？

只要自圆锥面的顶点 Q 向平面 β 引垂线，垂足为 R，则轴线和 R 所确定的平面就是平面 β 的轴面. 证明留作练习.

注意，在图 3-10 中，必须有 $\angle LSQ>\angle SQK$，即斜截面 β 和轴线的交角大于圆锥面的半顶角. 想一想，如果 $\angle LSQ=\angle SQK$，还能作出两个焦球吗？如果 $\angle LSQ<\angle SQK$，第二个焦球在什么位置？

例　已知圆锥面的半顶角为 $15°$，截割平面 β 与圆锥轴线所成的角等于 $45°$，平面 β 与轴线的交点到圆锥面顶点的距离为 d，求：

（1）截割平面的两焦球的半径；

（2）两焦球球心到圆锥面顶点的距离；

（3）平面 β 和圆锥面的截线椭圆的长短轴长度.

分析　如图 3-11 是截割平面 β 的轴面，由题设 $\angle LQS=$

$\angle KQS=15^\circ$，$\angle LSQ=45^\circ$，推知 $\angle QLS=120^\circ$，用正弦定理可以求出 LQ 长度，再用正弦定理求出 QF，QG 和两焦球的半径 FB，GA.

知道了 $\odot F$ 和 $\odot G$ 的圆心距离 FG 和两圆半径，用勾股定理或三角函数可以算出外公切线 AB，即所求的椭圆的长轴；也可以求出内公切线 MN，即椭圆两焦点的距离；进一步用勾股定理可求出椭圆的短轴.

作为练习，请根据上述分析，用其他方法写出求解过程.

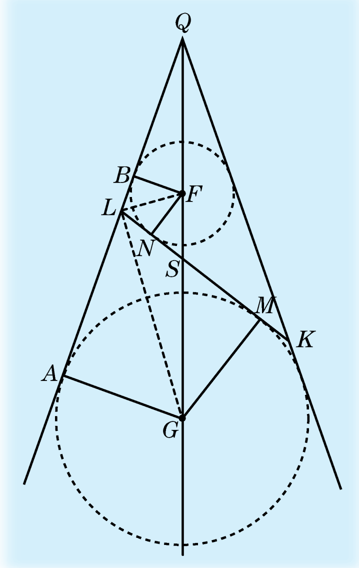


图 3-11

3.3 圆锥面截线的准线和离心率

上一节我们把研究圆柱面截线的双球法推广到了圆锥面.

在研究圆柱面的截线性质时，我们还从一个焦球出发，引出了截线椭圆的准线和离心率，这样的研究方法能不能推广到圆锥面呢？

回过头观察 2.3 节的图 2-12，图中的焦球和圆柱面切于它的大圆，大圆所在的平面 α 和截割平面 β 交于直线 w，w 正是截线椭圆的准线，有趣的推理就是从这两个平面的交线展开的.

直观地看，图 3-9 中圆锥面和焦球的公共点也组成一个圆，这个圆所在的平面和截割平面的交线是不是截线椭圆的准线呢？

讨论这个问题的前提，是下列命题成立：

命题 3.5 圆锥面的内切球和圆锥面的公共点组成一个圆，这个圆所在的平面垂直于圆锥面的轴线.

我们把命题 3.5 的证明放在后面，先避开它推出我们所关心的结果：

命题 3.6 （圆锥面截线的准线定理）设圆锥面的斜截面 β 的焦

球中心和圆锥面顶点在平面 β 的同侧，焦球切平面 β 于点 F，β 的轴面 π 所含的一条母线和焦球切于 B. 过 B 作圆锥面的正截面 α 与 β 交于直线 w，则 β 和圆锥面的截线上的任一点 P 到点 F 的距离与到直线 w 的距离之比为定值.

分析　比照 2.3 节中的图 2–12 作出图 3–12，就会发现，那里的推理现在基本有效，为了避免机械的重复，这里用不同的风格写出证明.

证明　如图 3–12，设圆锥面顶点为 V.

（1）轴面 π 和直线 w 交于 G（由命题 3.3，$w\perp$ 平面 π）；

（2）直线 GF 和 VB 交于 H（GF，VB 都在平面 π 上，想一想，会不会平行?）；

（3）母线 PV 和焦球 C 切于 Q；

（4）过 P 作圆锥面的正截面 γ 和 VB 交于 A，和 GF 交于 D；

（5）P 到直线 w 的垂足为 K.

注意，要证明的 $\dfrac{PF}{PK}$ 为定值.

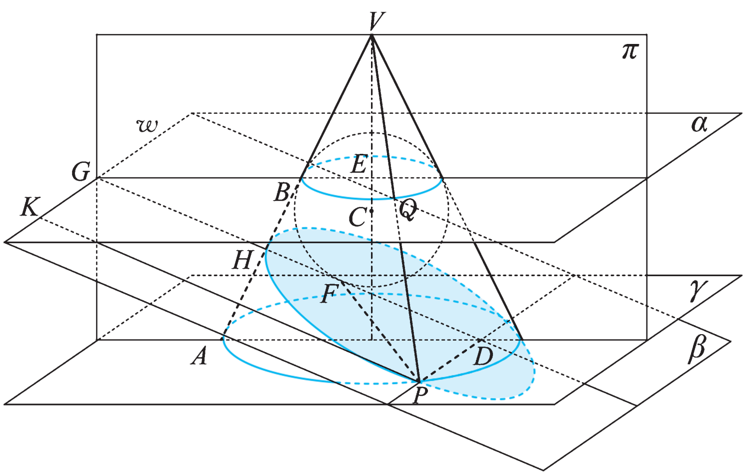


图 3–12

（6）$PD\perp$ 平面 π（（4），PD 是 β 和正截面 γ 的交线，命题 3.3）；

（7）$PD\perp GD$（（6），GD 在 π 上，直线垂直于平面的性质）；

（8）$\alpha /\!/ \gamma$（（4），α，γ 同垂直于轴线，垂直于同一直线的平面平行）；

（9）$KG /\!/ PD$（（8）、（5）、（1）、（4），平行平面性质）；

观察三角形 BHG 的边角和轴线的关系，若已知半顶角 $\angle BVE=\theta$，截面和轴线交角 $\angle GEV=\varphi$，你能够用三角函数表示定值 $\dfrac{HB}{HG}$ 吗?

(10) $PK=DG$（(9)、(5)、(7)，平行线处处等距）;

(11) $PF=PQ$（(3)，已知焦球切 β 于 F，点到球的切线等长）;

(12) $VA=VP$（(4)，命题 3.2）;

(13) $VB=VQ$（(3)，已知 B 是 VB 和焦球的切点，点到球的切线等长）;

(14) $AB=PQ=PF$（(12)、(13)、(11)）;

(15) $BG /\!/ DA$（(8)、(1)、(4)，平行平面性质）;

(16) $\dfrac{AB}{DG}=\dfrac{HB}{HG}$（(15)、(2)，平行截割定理）;

(17) $\dfrac{PF}{PK}=\dfrac{HB}{HG}$（(16)、(14)、(10)）.

证毕.

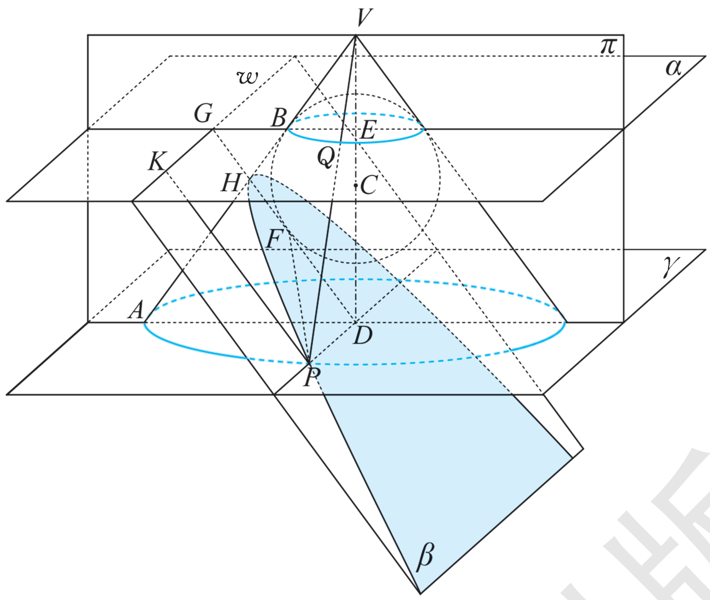


图 3-13

图 3-13 画出了命题 3.4 中的情形(2)（即 $\varphi=\theta$ 的情形）.

在图上，θ 和 φ 分别是哪两个角？

前面关于图 3-12 的推理，是否依然有效？

$\triangle GBH$ 是哪种三角形？

上面看到，不用命题 3.5，命题 3.6 的表述中要提到斜截面的轴面，有拖泥带水之感.

现在，我们给出命题 3.5 的证明.

命题 3.5　圆锥面的内切球和圆锥面的公共点组成一个圆，这个圆所在的平面垂直于圆锥面的轴线.

证明　如图 3-14，以 A 为顶点的圆锥面的一个内切球球心为 C. 设 E 是球面和圆锥面的一个公共点，过 E 向轴线 AC 引垂足 Q，过 Q 作垂直于 AC 的平面 α，只要证明球 C 和圆锥面的任一公共点 P 在平面 α 上.

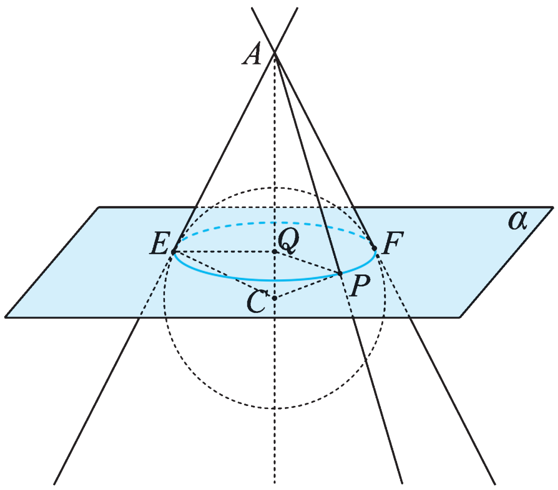


图 3-14

（1）E 是母线 AE 和球 C 的切点（已知）；

（2）P 是母线 AP 和球 C 的切点（已知）；

（3）$AE=AP$（（1）、（2），点到球的切线等长）；

（4）$AQ=AQ$（显然）；

（5）$\angle EAQ=\angle PAQ$（已知 QA 是轴线，命题 3.1）；

（6）$\triangle AQE\cong\triangle AQP$（（3）、（4）、（5），边角边）；

（7）$\angle EQA=\angle PQA$（（6））；

（8）$EQ\perp AC$（已知）；

（9）$PQ\perp AC$（（7）、（8））；

（10）P 在平面 α 上（（9），平面 α 过 Q 且垂直于 AC）.

证毕.

有了命题 3.5，你能够把命题 3.6 表述得更为简洁吗？

把命题 3.6 结论中的定值和 θ，φ 两角联系起来，你能把命题 3.6 表述得更为明确吗？

你能给出更简单的证明吗？
用命题 3.2 试试.

3.4 圆锥面的双曲线截线的探索

在圆锥面截线定理（命题 3.4）中，情形(3)，即 $\varphi<\theta$ 的情形，前面尚未论证.

观察图 3-15，你发现了什么？

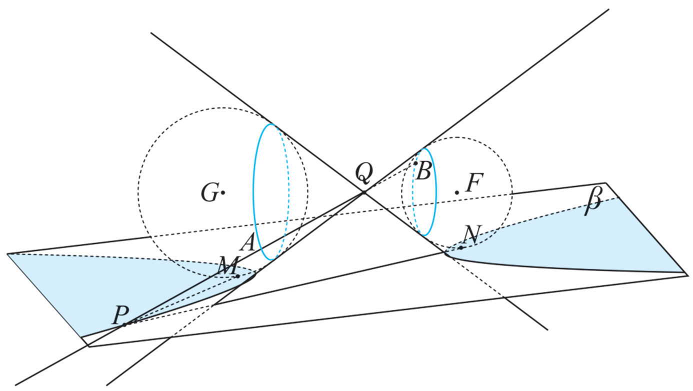


图 3-15

和图 3-9 对比来考虑，那里的推理哪些仍然有效？哪些要调整？

为什么两个焦球到截面 β 的同侧来了？

可不可以想象，在平面上放两个球，两球之间有一个点光源 Q，在光的照射下，两球在平面上的影子的边缘，就是我们感兴趣的截线？

Q 的位置在何处，才能使两球的影子的边缘，成为一个双曲线的两支？为什么？

请比照 3.2 节的推理，尝试给出命题 3.4 中情形(3)的证明.

继续减小截面 β 和轴线的交角，得到图 3-16.

在图 3-12 中，逐渐减小截面 β 和轴线的交角，当 β 和右面的母线平行时，就成了图 3-13.

观察图 3-16，对照命题 3.6 的证明，那里的推理，是否仍然有效？

在图 3-12、3-13 和 3-16 中，$\triangle GHB$ 有何不同？

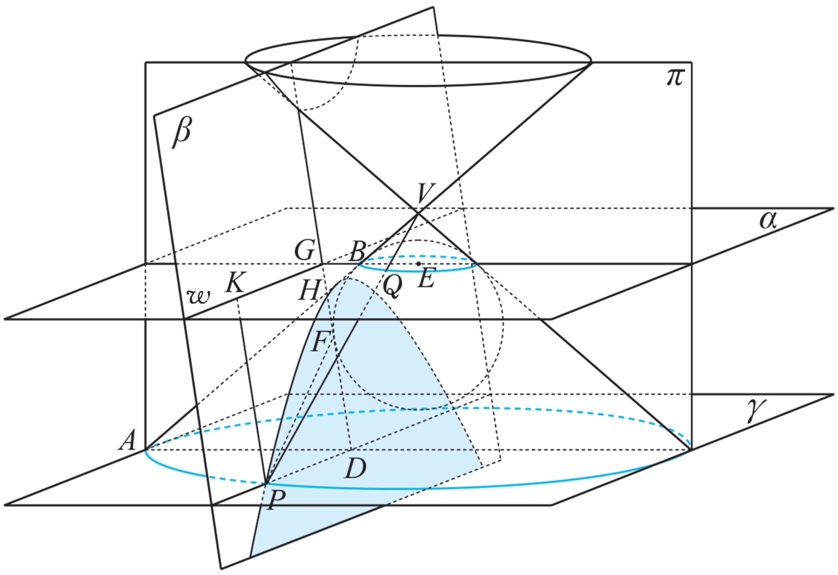


图 3-16

图 3-16 中，只看到双曲线截线的一支，另一支在哪里？你能够把这个图画得更完全一些吗？

数学文化

从艺术中诞生的科学:射影几何

17 世纪最富独创性的数学成果，来自受绘画艺术的激发而产生的灵感. 在这一世纪中，科学为数学研究提供了主要的动力. 画家们在发展聚焦透视体系的过程中，引入了新的几何思想，而且提出了一系列导致这一研究进入全新方向的问题. 通过这一方式，艺术家们“偿还”了他们利用数学方法、思想而“拖欠”数学的“债务”.

在透视学研究中产生的第一个思想是，人所触觉到的世界与人所看到的世界，这二者有一定的区别. 相应地，应该有两种几何学，一种是触觉几何学，一种是视觉几何学. 欧氏几何是触觉几何学，因为它与我们的触觉一致，但与我们的视觉却并非总是一致. 例如，欧几里得对恒不相交的直线（诸如平行线）的研究. 这样的直线只有用手接触才会存在，而用眼去看却绝不存在. 我们绝不可能看到平行线. 笔直的铁轨延伸到远处后，我们会看到它们的确相交了.

有许多其他的理由表明，欧氏几何是一门触觉几何. 例如，它研究全等图形，即两个上下叠合的图形. 叠合是一种用手完成的动作. 欧氏几何的定理中也常常涉及测量，这又是另一种由手完成的行动. 欧几里得的几何世界是有限的，这个世界实际上就是进入我们感官的世界. 这样人们所考虑的就不是整条直线，而认为直线是一条能够向两个方向充分延长的线段. 因此，从一个给定的图形出发，就不会试图去考虑无穷远处的图形.

由于欧几里得几何能够被十分合理地认为它所研究的是由触觉产生的问题，所以这门几何就为视觉几何留下了广阔的研究余地. 以此为目的，在透视学的研究中提出了第二个重要的思想. 聚焦透视体系中的基本思想，是投影和截景体系. 投影线就是一束从眼睛出发，到

一个物体或景物各点形成的一束光线；截景就是用一块放置于眼睛与被观察物体之间的玻璃屏板与投影相截所形成的图形．尽管玻璃屏板上截景的大小、形状，会随着屏板放置的位置、角度的变化而变化，但是每一个截景对眼睛产生的视觉印象（图 3-17），与物体本身对眼睛产生的视觉印象，则是一样的．

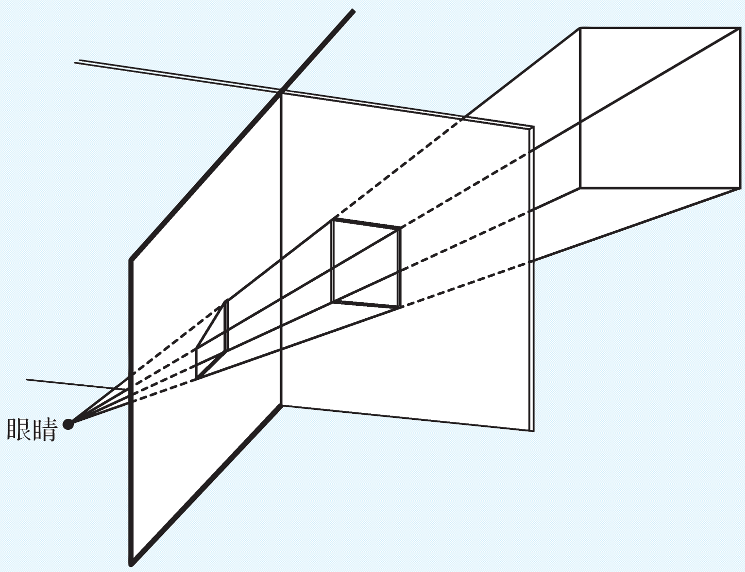


图 3-17　同一个投影的两个不同截景

这一事实提出了几个重大的数学问题．假设我们考虑同一个投影的两个不同截景．既然它们在眼睛中产生的视觉印象相同，那么它们就应该有相同的几何性质．这样一来，截景的相同性质是什么呢？还有，物体原形和由该原形所确定的截景有什么共同的性质？最后，如果两个不同的观察者观察同一个景物，那么就会形成两个不同的投影（图 3-18）．如果每个投影形成一个截景，那么就应该有两个截景，考虑到这些截景是由同一个景物所产生的，那么这些截景就应该有相同的几何性质．这些相同的几何性质是什么呢？

通过透视学的研究，数学家们还开辟了另一个研究方向．我们知道，艺术家不能画出与物体本身一模一样的作品．取而代之的是，他们在画布上必须将平行线画成收敛于一点；为了考虑眼睛的确有视觉假象的存在，他们必须引入前缩法和其他技术．为了实现这一表现手法，艺术家们需要一些能帮助他们确定线段的位置、其他哪些线段必

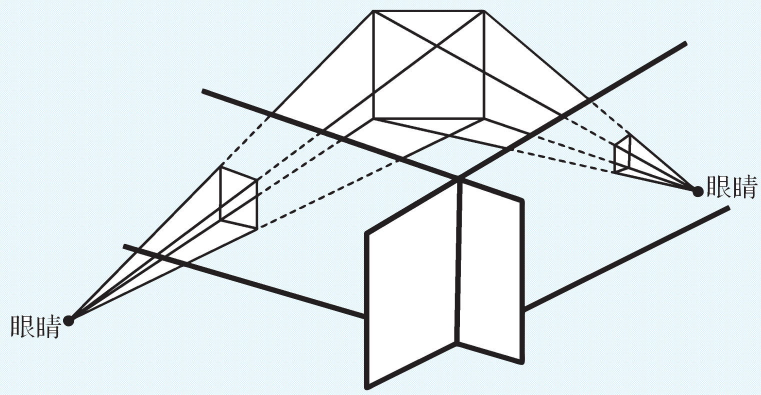


图 3-18　同一景物的两个不同投影的截景

须与已知的任意线段相交的一系列定理．因此，数学家以此为动机去研究直线、曲线相交的定理．

第一个探索由艺术家在透视学研究中提出的这些问题的大数学家，是自学成才而闻名于世的建筑师、工程师**吉拉德·笛沙格**(Girard Desargues，1593—1662)．他从事这方面研究的动力，是为了帮助他那些在工程、绘画和建筑方面的同事．“我坦率地承认，”他写道，“我绝不对物理或几何的学习或研究抱有兴趣，除非能通过它们获得有助于目前需要的某种知识……能增加生活的幸福与便利，能有助于健康和施展某种技艺……我看到好在一部分艺术根植于几何，其他还有如建筑上切割石块，制作日晷，特别是透视法．”他头一步工作是收集、编辑整理许多有用的定理，通过写信和传单传播他所获得的成果．后来，他写了一本论透视的小册子，但几乎没引起人们的注意．

笛沙格从他的初步工作开始，向高深的富有创造性的数学研究迈进．他在射影几何基础方面做出的主要贡献，囊括于他 1639 年的著作《试论锥面截一平面所得结果的初稿》之中，但像他为艺人们所做出的贡献一样，没有引起人们的注意．这部书所有的复制本都失传了．尽管当时有人欣赏他的著作，但大多数人持轻视和嘲弄的态度．在探索了多年建筑学、工程方面的问题以后，笛沙格又回到了他原先所涉猎的学术领域．他的两位同时代人，**P. de 拉伊尔**（Philippe de la Hire）和 **B. 帕斯卡**（Blaise Pascal），在这门学科快要被长时间埋

没之前，研究了笛沙格的工作，并且将笛沙格的初步工作大大向前推进了．幸运的是，拉伊尔将笛沙格的著作抄录了一份复本．200 年后，一个偶然的机会人们发现了这一手抄本，这个手抄本告诉了我们笛沙格所做出的贡献．

笛沙格的新几何使人最惊奇的事实——尽管这不是最重要的——就是，这种新几何中不包括平行线．就如同平行线在画布上必须相交于一点一样，空间（欧几里得意义上）中的平行线，笛沙格也要求它们相交于一点，该点位于无穷远处，但却被假定存在着．该点对应于真实空间中画在画布上的平行线相交的那一点．增加了“无穷远点”这一概念，表明与欧氏几何不矛盾，但却是对欧氏几何的重大扩充，它符合人们的眼睛所看到的内容．

射影几何中的基本定理——这条定理现在在所有数学中都很重要——是由笛沙格提出的，并以他的名字命名．这是数学家对由透视学提出的问题所作的回报．

假设眼睛位于点 O，从 O 点看一个$\triangle ABC$（图 3-19）．我们知道，从 O 点到三角形边上各点的线形成一个射影．这一射影的一个截景含有一个$\triangle A'B'C'$，其中 A 对应于 A'，B'对应于 B，C'对应于 C．$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$称为从 O 点看去的透视图．笛沙格定理断言：

笛沙格定理　对于从一点透视出来的两个三角形，它们之间的对应边 AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$以及 AC 与 $A'C'$（或它们的延长线）相交的三个交点，必定在同一条直线上．

特别针对我们所讨论的图形，笛沙格定理告诉我们：如果延长 AC 边与 $A'C'$边，它们将相交于 P 点；延长 AB 与 $A'B'$边，它们将相交于 Q 点；延长 BC 与 $B'C'$边，它们将相交于 R 点．那么，P，Q，R 将在同一直线上．笛沙格定理对两个三角形在同一平面或不在同一平面上的两种情形都成立．

在射影几何中具有同样典型意义的又一定理，由法国著名的早慧思想家帕斯卡在他 16 岁时给出了证明，帕斯卡将这一定理附在一篇关于圆锥曲线的论文中，这篇论文非常出色，以致笛卡儿不相信它出自一位如此年轻的人之手．帕斯卡定理，像笛沙格定理一样，论述的

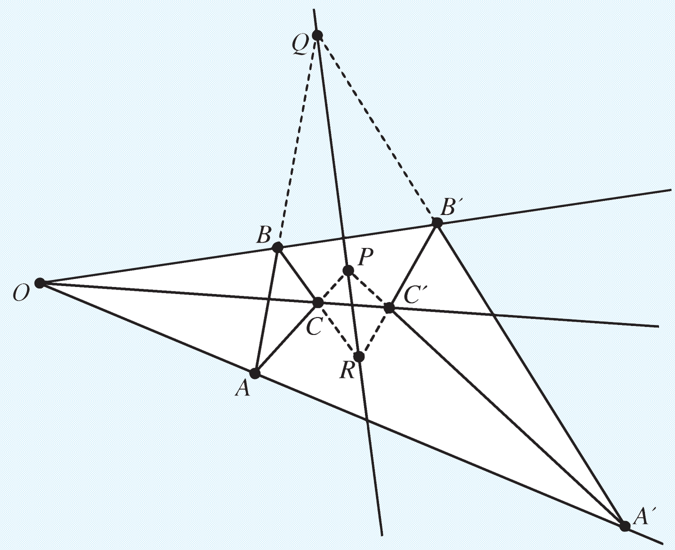


图 3-19　笛沙格定理

是一个几何图形的任何射影的截景所共有的性质．用更精确的数学化语言来说，这个定理论述的是一个几何图形在射影和截面取景下的不变性．

帕斯卡曾经这样说：画任意内接于一个圆的六边形，内接点分别为 A，B，C，D，E，F（图 3-20）．将一对对应边延长，例如将 AB 和 DE 延长，使它们相交于 P 点．延长另一对对应边使它们相交于 Q 点，延长第三对对应边使它们相交于 R 点．然后，帕斯卡说，P，Q，R 将总是位于同一条直线上．

帕斯卡定理　若一六边形内接于一圆，则每两条对应边相交而得的三点在同一直线上．

甚至人们熟悉的数学内容也受到了射影几何概念的启发．就像我们在第二、三章中看到的那样，圆、椭圆、抛物线和双曲线是锥面的截面（截景）．如果我们想象眼睛位于 O 点，即锥面的顶点，再设想截面（截景）表面的直线，如 OA 是从 O 到圆 ABC 的光线，那么这些直线就形成了一个投影，而且用各种不同的平面与这一投影相截所形成的截面（截景），就会形成圆、抛物线、椭圆和双曲线．通过把一个闪光信号灯的光线聚集在一个由金属丝绕成的圆圈上，然后观察金属圈在一块纸板上所形成的斜影，读者就可以检验上述结论的正确

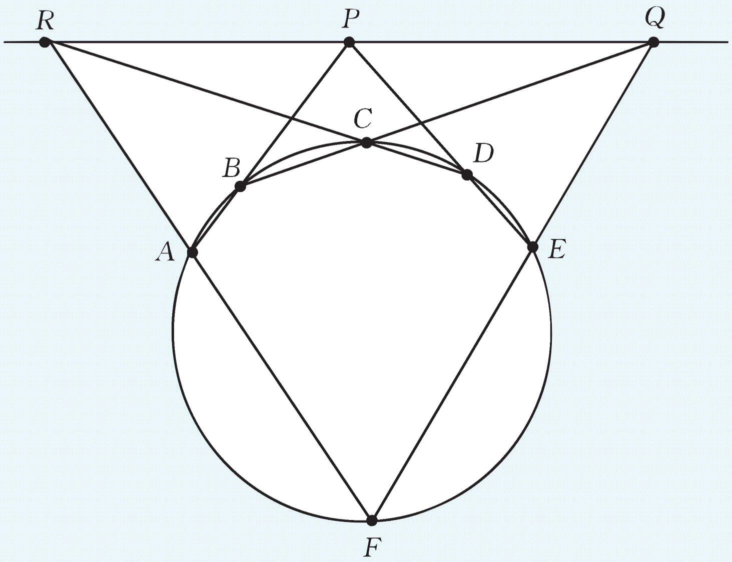


图 3-20　帕斯卡定理

性. 当纸板转动时，截面（截景）将发生变化，从而给出各种圆锥曲线截面（截景）. 由于四种圆锥曲线都能由一个圆锥的截面（截景）得到，而且由于帕斯卡定理论述的是关于圆在投射和截面取景下的不变性，因此，显而易见帕斯卡定理对所有圆锥曲线都适用.

我们将考虑另一个射影几何定理. 帕斯卡定理告诉我们的是有关内接于一个圆内的六边形的内容. **C. J. 布利安桑**（C. J. Brianchon）在 19 世纪早期为射影几何的复兴做出了贡献，发现了一个著名的定理，该定理描述的是外切于一个圆的六边形的性质. 该定理（图 3-21）叙述如下：

布利安桑定理　如果一个六边形外切于一个圆，则对应顶点的连线(三条)相交于一点.

如我们所期望的那样，布利安桑定理不仅对圆适用，而且对任何圆锥曲线也都适用.

笛沙格定理、帕斯卡定理和布利安桑定理是射影几何中业已证明了的一类定理的代表. 我们可以这样来刻画射影几何中所有这些定理的特征：它们集中表现了投影和截面取景（射影和截景）的思想，论述了同一个物体的相同射影或不同射影的截景所形成的几何图形的性质.

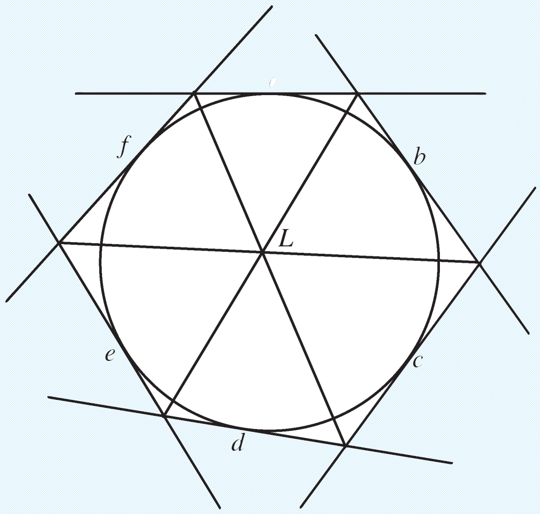


图 3-21　布利安桑定理

射影几何能够被用于解决一些实际问题．由于人们已经在这门学科的内部发现了潜在的乐趣，由于它的美，由于它的优雅，由于它在发现定理中带来的直觉的自由，以及为了它所需要的证明而作出的严密的演绎推理，所有这些，给这门学科提供了充足的养料．但由于人们偏爱应用数学，射影几何曾在短时间里遭到冷遇，直到 19 世纪它又东山再起，后来证明射影几何是许多新几何学的源泉．也许正是由于绘画，使这门学科的思想变得丰富多彩、绚丽多姿，因而由笛沙格创造的这门“诞生于艺术的科学”，成了今天最美的数学分支之一．

课程总结报告参考题

一、知识的总结：

1. 本专题学了哪些几何概念和几何命题？按照你认为的最适合的顺序和分组表述这些概念和命题.

2. 这些概念和命题之间有何联系. 前面的的概念和命题有哪些在后面被直接或间接地应用了？

3. 本专题的表述和推理过程中，用到了哪些以前学过的几何命题和概念？

4. 你觉得数学证明有用吗？有趣吗？有力量吗？哪些命题不证明也能看出来？哪些命题不证明就很难想到？

二、知识和能力的拓展：

通过查阅书刊和网上资料，用计算机作图测量，提出问题独立思考，对专题中的某些内容和应用作进一步的探讨. 例如：

1. 了解平行投影、中心投影的性质和应用.

2. 了解圆锥曲线更多的性质、作图方法和实际应用.

3. 用平面几何方法证明椭圆的不同定义的等价性.

4. 了解圆锥曲线研究的历史.

三、学习本专题的感受和体会.

附　录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英　文　名	页　码
透视	perspective	3
射影几何（学）	projective geometry	3
几何原本	elements of geometry	25
平行投影	parallel projection	32
中心投影	central projection	32
变换	transformation	33
截线	transversal	36
射影	projection	52
截影	cross section	52
主没影点	principal vanishing point	53
对角没影点	diagonal vanishing point	54