编 写 说 明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学(选修)4-4(坐标系与参数方程)》的教师教学用书，编写时按教科书分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教科书分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接，在每章的最后给出教科书中习题的参考解答.

编写本书的目的旨在帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及例题解析仅供教师在教学过程中参考，在相关链接中所提供的短文是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教科书的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议.

编　者

2016 年 12 月

目　　录

第 1 章　坐标系

一、教学目标

1. 回顾在平面直角坐标系中刻画点的位置的方法，体会坐标系的作用.

2. 通过具体例子，了解在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.

3. 能在极坐标系中用极坐标刻画点的位置，体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化.

4. 能在极坐标系中给出简单图形(如过极点的直线、过极点或圆心在极点的圆)的方程. 比较这些图形在极坐标系和平面直角坐标系中的方程，体会在用方程刻画平面图形时选择适当坐标系的意义.

5. 借助具体实例(如圆形体育场看台的座位、地球的经纬度等)了解在柱坐标系、球坐标系中刻画空间中点的位置的方法，并与空间直角坐标系中刻画点的位置的方法相比较，体会它们的区别.

二、教材说明

1. 坐标系是解析几何的基础. 在坐标系中，可以用有序实数组确定点的位置，进而用方程刻画几何图形. 为便于用代数的方法刻画几何图形或描述自然现象，需要建立不同的坐标系. 极坐标系、柱坐标系、球坐标系等是与直角坐标系不同的坐标系，对于有些几何图形，选用这些坐标系可以使建立的方程更加简单.

2. 本章主要内容有：坐标系的作用，平面直角坐标系下的伸缩变换，极坐标系，柱坐标系和球坐标系等.

3. 平面直角坐标系和空间直角坐标系是学生在义务教育阶段和高中必修阶段已经分别学习过的内容. 本章教材在处理这部分内容时只作简单回顾，其目的是让学生体会坐标系的作用. 对于平面直角坐标系的伸缩变换，学生实际上已经在必修教材的三角函数部分有所了解，只是在必修教材中未正式给出相应的伸缩变换公式，因此本章教材在引入时直接沿用了三角函数中的伸缩变换作为例子，从而给出伸缩变换公式.

4. 极坐标系是本章的重点内容. 极坐标系中的有关概念，例如极角、极径等是学生首次接触到的知识. 教材在编写时注意了从生活中的例子入手，把它与平面直角坐标系进行比较.《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称《课标》)要求学生能够写出一些简单图形(如过极点的直线、过极点或圆心在极点的圆)的极坐标方程，本章教材除给出了上述括号中列举的三类图形的极坐标方程之外，还给出了阿基米德螺线(等角螺线)的极坐标方程，其理由

是阿基米德螺线的极坐标方程形式简单，在机械工程中有着广泛的应用，并且有着丰富的文化内涵，有助于培养学生的数学应用意识以及对学生进行数学文化的渗透. 极坐标与平面直角坐标的互化是学生需要掌握的重点内容，因此单独设立一节. 在推导出极坐标与平面直角坐标的互化公式后，教材安排了两个例题进行巩固，其中例 2 实际上是圆锥曲线的统一的极坐标方程.

5. 对于柱坐标系和球坐标系，《课标》只要求做简单了解，其内容不宜编写得过多过深. 因此这两部分内容都分别安排了一节，每一节中分别推导了柱坐标系与空间直角坐标系的关系式、球坐标系与空间直角坐标系的关系式. 每一节中都只安排了一个例题，其作用是让学生体会建立相应柱坐标系和球坐标系的方法并了解其中涉及的一些参数的意义.

6. 教材在本章中还设置了《阅读与思考》和《数学文化》两个专栏，以供学生进一步学习. 在本章教材最后安排了习题 1，以供教师在教学中使用.

7. 本章教材严格按照《课标》的要求编写，具有如下特点：

(1)内容的选取体现数学的本质、与学生的已有知识和生活实际联系.

例如，在《1. 1　坐标系的作用》中，教材选取了学生最熟悉的几何图形中的圆和抛物线作为例子，说明平面直角坐标系在刻画平面上的点的位置中所起的作用. 又选取了“一架直升机的位置”，“你家吊在天花板上的灯泡的位置”的例子，说明空间直角坐标系在刻画空间中的点的位置时所起的作用；在《1. 2　平面直角坐标系中的伸缩变换》中，教材从学生在必修课程《数学 4》的三角函数内容中所学习的有关知识入手，引出了伸缩变换公式；在《1. 3　极坐标系》中则引述了甲、乙两人的一段对话，用来表明生活中存在着使用极坐标描述位置的时候；在《1. 5　柱坐标系》和《1. 6　球坐标系》中则分别使用了圆形体育场看台的座位、地球的经纬度等例子引入相应的坐标系. 上述内容或者是学生已有的知识，或者与学生的生活实际紧密联系.

(2)注意渗透数学文化，体现人文精神.

《课标》指出：数学是人类文化的重要组成部分. 数学课程应适当反映数学的历史、应用和发展趋势，数学对推动社会发展的作用，数学的社会需求，社会发展对数学发展的推动作用，数学科学的思想体系，数学的美学价值，数学家的创新精神. 数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观. 为此，高中数学课程提倡体现数学的文化价值，并在适当的内容中提出对数学文化的学习要求.

本章教材在贯彻“体现数学的文化价值”这一课程基本理念时，主要在两个地方进行了渗透. 其一是在本章的章头引言中引用了数学家拉格朗日评价笛卡儿坐标系的一段名言；其二是在本章的最后安排了“数学文化”专栏，介绍了数学家阿基米德和他的螺线.

(3)内容设计具有一定的弹性，便于学生进一步的学习.

在《1. 3　极坐标系》中介绍了阿基米德螺线的极坐标方程以及它在机械凸轮装置中的应用，给学生留下进一步探索的空间. 在引入了极坐标的概念后，教材安排了一个“阅读与思考”专栏，介绍了一些重要平面曲线的极坐标方程，例如对数螺线、玫瑰线、心脏线和双纽

线的极坐标方程及其性质，让学有余力的同学进一步了解这些知识，但不要求学生掌握.

三、课时安排建议

本章教学时间约需9课时，具体分配如下(仅供参考)：

1.1　坐标系的作用	1课时
1.2　平面直角坐标系中的伸缩变换	1课时
1.3　极坐标系	2课时
1.4　极坐标与平面直角坐标的互化	1课时
1.5　柱坐标系	1课时
1.6　球坐标系	2课时
小结与复习	1课时

四、教学建议

1. 数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，为未来发展和进一步学习打好基础。

2. 坐标系的教学应着重让学生理解平面和空间中点的位置都可以用有序数组(坐标)来刻画，在不同坐标系中，这些数所体现的几何含义不同. 同一几何图形的方程在不同坐标系中具有不同的形式. 因此，选择适当的坐标系可以使表示图形的方程具有更方便的形式.

3. 在坐标系的教学中，可以引导学生尝试自己建立坐标系，说明建立坐标系的原则，激励学生的发散思维和创新思维，并通过具体实例说明这样建立坐标系有哪些方便之处. 教学中应培养学生根据给定条件选择并建立相应类型的坐标系(直角坐标系、极坐标系、柱坐标系和球坐标系)的能力，

4. 教学过程中应注意适当使用信息技术工具(例如，Z＋Z超级画板、几何画板等)展示有关内容(例如，函数图象的伸缩变换，一些重要平面曲线的极坐标方程等).

5. 教学过程中应加强数学文化的渗透，让学生了解有关知识的来龙去脉(例如，各种坐标系的来历、对数螺线的历史等).

6. 努力培养学生的数学应用意识. 例如教材第3节简单介绍了利用等速螺线的性质，可以把匀速转动转化成匀速直线运动的机械凸轮装置，可以让学生适当了解机械凸轮在工业上应用的情况.

五、评价建议

1. 数学学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评、互评. 总之，应将评价贯穿数学学习的全过程，既要发挥评价的甄别与选拔功能，更要突出评价的激励与发展功能.

数学教学的评价应有利于营造良好的育人环境，有利于数学教与学活动过程的调控，有利于学生和教师的共同成长.

2. 建议在本章结束时安排一个小测验，主要测试学生对基础知识和基本技能的掌握程度，例如，伸缩变换公式，极坐标与平面直角坐标的互化公式，柱坐标系和球坐标系的公式，以及极坐标的一些基本概念等. 重点考查学生对上述知识的熟练掌握程度，以及给定具体问题选择并建立适当坐标系的能力. 测验的目的不是将学生分层，而是了解学生的基本学习情况，检查学生是否达到了《课标》规定的教学要求，因此测验题不宜太偏、太难.

3. 建议安排一个开放式作业，让学生对本章涉及的有关内容进行探究. 可以根据学生的兴趣提供多样化的主题，包括：有关数学文化的知识(例如，坐标系的来历及其作用，螺线的历史等)，有关信息技术与课程整合内容(例如，一些重要平面曲线的极坐标方程)或者有关极坐标系的应用的内容(例如，机械凸轮在机械工业中的应用).

4. 期末总成绩应由测验成绩、开放式作业成绩以及学生平时表现的成绩组成，三者各占一定的比例. 例如，期末总成绩＝测验成绩(80％)＋开放式作业成绩(15％)＋平时表现成绩(5％). 当然，上述各分项成绩的组成及百分比可根据具体情况灵活设定.

1.1 坐标系的作用

教材线索

本节先从如何描述一个圆的位置的问题入手，用单位圆、同心圆和抛物线的例子复习了在平面直角坐标系中刻画一个图形的位置和形状的方法；然后用刻画一架直升机的位置和吊在天花板上的灯泡的位置的例子重温了在空间直角坐标系中刻画一个图形的位置的方法. 最后指出本节的主题：有了坐标系，才使代数与几何学相结合，使这两门重要学科都受益，从而双双获得长足进步，创造了解析几何等现代几何学；有了坐标系，才能通过解析表达式深入研究函数，进而促进了微积分等现代数学的产生与发展.

教学目标

(一)知识与技能

1. 知道在平面直角坐标系中刻画点的位置的方法.

2. 知道在空间直角坐标系中刻画点的位置的方法.

(二)过程与方法

借助具体的例子，回顾在两类坐标系中刻画点的位置的方法.

(三)情感、态度与价值观

体会坐标系的作用及坐标系产生的重要历史意义，感受数学的文化价值.

教材分析

1. 重点：

平面直角坐标系和空间直角坐标系中刻画点的位置的方法.

2. 难点：

(1)空间直角坐标系中刻画点的位置的方法.

(2)如何选择适当的坐标系刻画点的位置.

3. 如何刻画平面上半径为 10 cm 的一个圆的位置？教材通过取定圆心为原点，过圆心的水平线为 x 轴，过圆心且与水平线垂直的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，从而得到半径为 10 cm 的圆的方程为 $x^2+y^2=100$. 这说明取定坐标系之后，我们就可以用代数式子($x^2+y^2=100$)表示几何图形(圆). 也可以根据给定的代数式子画出相应的几何图形，因而

坐标系的建立使得数与形之间架起了一座桥梁. 为什么要以圆心为原点建立坐标系呢？事实上，以圆心以外的其他任意一点(例如圆上的某一点)为原点同样可以建立平面直角坐标系，但是这样得到的方程(例如，$(x-10)^2+y^2=100$)要比以圆心为原点建立坐标系所得方程复杂. 因此，我们在建立坐标系的过程中就应该“避繁就简”，力求建立最恰当的坐标系，使得图形的代数形式尽可能的简单或者运算尽可能的简便.

4. 为什么说一个代数方程($y=x^2+4x+5$)可以代表一条几何曲线(抛物线)？这是因为平面直角坐标系建立后，每一个有序实数对(x, y)就对应着平面上的一个点. 给定一个实数 x，就可以根据代数方程($y=x^2+4x+5$)确定一个 y，从而得到一个有序实数对 (x, y). 把所有这些有序实数对(x, y)在平面上所代表的点用光滑的曲线连接起来就得到一条曲线(抛物线). 因此一个代数方程确实可以代表一条几何曲线. 而且通过对代数方程($y=x^2+4x+5$)的研究(例如，做恒等变形 $y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$)，可以得到相应的几何曲线的性质(例如，抛物线的顶点为$(-2, 1)$，对称轴为 $x=-2$，开口向上).

5. 如何刻画空间中某一个点的位置？教材中实际上引入了两种空间坐标系，一种是地理空间坐标系(用经度、纬度和海拔表示现实世界空间中的点的位置)，另一种是空间直角坐标系.《课标》中并未要求学生学习有关地理坐标系的知识，但是这种坐标系在生活中应用相当广泛，因而有必要让学生有所了解. 但由于篇幅有限，教材并未展开，只是通过一个例子(描述一架直升机的位置)做了简单介绍，用有序数组$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, 1\ 000\right)$表示位于东经 $120°$，北纬 $45°$，距地面 1 000 km 的一架直升机的位置.

空间直角坐标系是学生在高中必修课中已经学习过的内容，教材通过例子“吊在天花板上的灯泡的位置”回顾了空间直角坐标系的建立. 在这个例子中，如何恰当地选择空间直角坐标系的原点成为解决问题的关键.

教学建议

1. 如何刻画一个图形的位置和形状是几何学的重要内容. 坐标系产生以前，数学研究的重心主要集中在几何方面. 坐标系产生以后，数学研究的重心开始向代数转化. 而对代数的深入研究反过来又促进了几何学的研究(例如用群论的方法解决了古代三大几何作图不能实现的问题). 所以说，有了坐标系，实现了几何代数化和代数几何化，使代数与几何双双受益. 教学中要运用丰富的历史材料和现实材料说明建立坐标系的作用.

2. 对于平面直角坐标系和空间直角坐标系的教学，关键是引导学生认识到建立坐标系的作用，认识到选取适当的坐标系能够使运算简化. 在高中必修课结束之后，学生应该具有自己建立适当的坐标系的能力，而不仅仅是在已建立好的坐标系的基础上进行运算.

3. 教学中可适当介绍笛卡儿、费马等人发明坐标系的历史典故，对学生进行数学文化的教育.

相关链接

坐标系发展的历史

坐标系的发展经历了漫长的历史．用坐标系来确定点的位置，早在纪元前就有人使用了．公元前 4 世纪，我国战国时代的石申就曾利用坐标方法记录了一百多颗恒星的方位，著成世界上最早的星表——《石氏星经》．阿波罗尼奥斯在研究圆锥曲线的时候也曾引用了两条正交的直线作为一种坐标轴．1486 年．法国数学家奥雷斯姆在他的著作中已经像后来的笛卡儿那样使用了纵轴和横轴来确定点的位置和变化状态了．

1630 年，法国数学家费马(1601—1665)写成《平面与立体轨迹引论》(发表于 1679 年)，在这篇文章中费马把希腊数学中使用立体图形所发现的曲线的特征，通过引进坐标，以统一的方式译成了代数语言，使得各种不同的曲线都能用代数方程表示和研究．他还具体研究了直线、圆和其他圆锥曲线的方程，注意到了坐标轴可以平移和旋转并以此来化简方程．

1637 年，法国数学家笛卡儿出版了一本名为《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》的著作，在这本著作的附录中包含了他的解析几何名篇《几何》．笛卡儿的解析几何是以如下两个观念为基础的：一是坐标观念，二是把有互相关联的两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线的观念．对坐标，笛卡儿与前人所不同的是他不仅用坐标表示点的位置．而且将坐标通过“点动成线”的观点具体地用到建立曲线的方程上．对方程，笛卡儿不仅把它看成是未知数与已知数的关系式，而且更多地把它看做两个变量之间的关系式，这正是对处理几何曲线十分有效的新方法的思想基础．笛卡儿还把不同次数的几条曲线同时表示在一个坐标系中，这就使得解析几何的应用范围极大地扩展了．这是包括费马在内的任何前人都未曾做到的，这也是笛卡儿的贡献的独特之处．

恩格斯高度评价了笛卡儿的革新思想，他说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．”

笛卡儿创立了解析几何学，他的贡献是伟大的，但是解析几何作为一门学科毕竟在当时还很不完善，例如，笛卡儿当时尚未自觉地引进第二条坐标轴——y 轴．一百多年后瑞士数学家克拉默(1704—1752)在他的《代数曲线分析引论》中才正式引入 y 轴．正是由于许多数学家在各个方面做了大量的修正和补充，才使它日臻完善．

1655 年，英国数学家沃利斯(1616—1703)首先引进负的纵、横坐标，这就使得解析几何可以在整个平面内研究曲线，从而摆脱了原来的局限．

1691 年瑞士数学家雅各布·伯努利引入了极坐标(1671 年牛顿也曾提出过极坐标，但他的文章发表在 1736 年)，这极大地便利了某些曲线方程的建立，也使人们对曲线的认识更进了一步．这时期先后发现了双纽线、卵形性、对数螺线、悬链线、旋轮线等各种特殊曲线．

1799 年德国数学家赫尔曼(1678—1733)把极坐标的概念进一步完善，并给出了直角坐标和极坐标的变换公式. 瑞士数学家欧拉(1707—1783)则第一个在坐标系中明确地使用三角函数，给出了现代形式下的极坐标系，他还开创了曲线的参数表示.

解析几何的一个重要发展是由平面推广到空间. 这一工作最初出现在 17 世纪，笛卡儿曾认识到：一个含有三个未知数(这三个数定出轨迹上的一个点 C)的方程，所代表的点 C 的轨迹是一个平面、一个球面或者是一个更复杂的曲面，这说明笛卡儿已经体会到他的方法可以推广到三维空间中的曲线和曲面上，但是他没有进一步去考虑这种推广.

1679 年法国数学家拉伊尔(1640—1718)对三维坐标几何做了较为特殊的讨论. 他先用三个坐标表示空间中的点 P，然后写出了曲线的方程，1715 年雅各布·伯努利的弟弟约翰·伯努利(1667—1748)首先引入了我们现在通用的三个坐标平面. 在这个基础上，通过法国数学家帕朗(1666—1716)、克莱罗(1713—1765)以及约翰·伯努利、赫尔曼等人的工作，弄清了曲面能用三个坐标变量的一个方程表示的思想；1731 年克莱罗又指出描述一条空间曲线需要两个曲面方程，他还揭示了这样一个事实——空间曲线的投影方程，即垂直于投影平面的柱面的方程，可以通过决定这条曲线的两个曲面方程的某种组合给出；赫尔曼则在 1732 年给出了绕 z 轴旋转的曲面方程的一般形式：$x^2+y^2=f(z)$.

1748 年欧拉的《分析引论》一书的出版，是解析几何发展史上的重要一步，它给现代形式下的解析几何做了系统的叙述，此书也可以视为现代意义下的第一本解析几何教程. 在这本书中，欧拉还给出了空间坐标的变换公式和六种曲面(锥面、柱面、椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面、双曲抛物面以及抛物柱面)的标准形式.

1.2　平面直角坐标系中的伸缩变换

教材线索

本节先通过比较函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的图象之间的关系，以及 $y=2\sin x$ 和 $y=\sin x$ 的图象之间的关系，指出相应曲线上的点之间满足一定的关系式，然后给出了上述关系式的一般形式，即伸缩变换公式 $\begin{cases}x'=lx(l>0),\\ y'=y\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky(k>0).\end{cases}$ 接着教材分析了伸缩变换的几何性质：原点(0，0)是不动点；当 $k=1$，$l=1$ 时，在上述伸缩变换公式表达的伸缩变换下每点都是不动点；除此之外，除原点外的每点都移动了位置，图形发生了伸缩；伸缩变换把直线变成直线. 作为伸缩变换公式的应用，本节最后通过例 1 和例 2，分别研究了平面直角坐标系在伸缩变换作用下平面图形(正方形和单位圆)的变化情况.

教学目标

(一)知识与技能

1. 掌握平面直角坐标系中的伸缩变换公式 $\begin{cases}x'=lx(l>0),\\ y'=y\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky(k>0).\end{cases}$

2. 了解在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.

(二)过程与方法

1. 借助具体的正弦函数图象的例子，研究伸缩变换公式.

2. 借助具体例子(例如，正方形、单位圆等)，研究平面图形的变换情况.

(三)情感、态度与价值观

初步体会伸缩变换公式在解决有关图形面积变化的问题中的作用.

教材分析

1. 重点：平面直角坐标系中的伸缩变换公式、伸缩变换的性质.

2. 难点：平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况.

3. 正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象之间的变换关系是学生最熟悉的一种伸缩变换. 教材从学生最熟悉的这一内容入手，分别比较了函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的图象之间的关系，以及 $y=2\sin x$ 和 $y=\sin x$ 的图象之间的关系. 通过考察函数 $y=\sin x$ 图象上的任意

一点 $M(x, y)$ 在进行伸缩变换后所得到的点 $M'(x', y')$ 的坐标之间的关系，分别得到关系式 $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x, \\ y'=y \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases}$ 在此基础上，教材不加证明地将此结果推广到一般形式，即分别得到两个伸缩变换公式 $\begin{cases} x'=lx(l>0), \\ y'=y \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky(k>0). \end{cases}$ 前者称为平行于 x 轴的伸缩变换（也称为向着 y 轴的压缩变换），后者称为平行于 y 轴的伸缩变换（也称为向着 x 轴的压缩变换），这里所讨论的是参数 l 和 k 都为正的常数，它们表示进行伸缩变换的“伸缩比”.

4. 伸缩变换的性质是本节的重点内容之一. 函数图象在经过伸缩变换之后哪些性质改变，哪些性质保持不变，这是值得关注的一个问题. 教材指出在伸缩变换过程中，原点是不动点. 伸缩变换把直线变成直线，把多边形变成边数一致的多边形；但是伸缩变换不能实现曲线段与直线段的互变，例如它不能把圆变成正方形.

教学建议

1. 研究平面直角坐标系中的伸缩变换，应该从学生最熟悉的图形入手，然后逐步引入一些不熟悉的图形，找出其中所共有的规律. 除了教材中正弦函数图象的例子之外，教学中还可以介绍一些其他的函数图象，例如椭圆、双曲线、抛物线等经过伸缩变换后的图形.

2. 为了生动形象地展示图形进行伸缩变换的过程，有条件的学校和班级可以采用信息技术工具（例如 Z+Z 超级画板、几何画板等）来展示不同函数图象的伸缩变换过程.

3. 可引导学生自主探索伸缩变换的性质，考察常见的图形（例如正三角形、正方形、圆）在伸缩变换后的形状以及伸缩变换前后图形的面积之间的关系.

例题解析

例 1 今有正方形 $ABCD$，A，B，C，D 的坐标分别是 $(2, 2)$，$(-2, 2)$，$(-2, -2)$，$(2, -2)$，问在伸缩变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\frac{1}{2}y, \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}y, \\ y'=y \end{cases}$ 的作用下，正方形 $ABCD$ 分别变成什么图形？（解答见教材 P6）

解析 例题 1 的结果表明，伸缩变换将平行直线变成平行直线. 证明如下：

设 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 为两平行直线，则 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=lx(l>0), \\ y'=y, \end{cases}$ 直线 l_1 和 l_2 分别变成直线 l'_1：$A_1x'+B_1ly'+C_1l=0$ 和 l'_2：$A_2x'+B_2ly'+C_2l=0$，显然有 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1l}{B_2l}\neq\frac{C_1l}{C_2l}$，所以直接 $l'_1 \parallel l'_2$. 同理可证伸缩变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=kx(k>0) \end{cases}$ 也将平行直线变成平行直线.

经过例 1 中的伸缩变换$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$和$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\ y'=y\end{cases}$后，所得矩形面积是原来正方形面积的一半，即 $S_{矩形}=\dfrac{1}{2}S_{正方形}$，其中的$\dfrac{1}{2}$恰好是伸缩变换公式中的伸缩变换系数.

例 2　在伸缩变换$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=y\end{cases}$与$\begin{cases}x'=x,\\ y'=2y\end{cases}$作用下，单位圆变成什么图形？（解答见教材 P7）

解析　在几何学中，图形的各种变换，对研究图形及其性质有重大的意义. 椭圆可以看作是圆周向着它的一条直径做均匀压缩的结果. 并且这种压缩不仅施行在给定的圆周上，而且也施行在整个平面上. 于是，在把圆周变成椭圆的同时，它的直径也变成椭圆的直径，从而可以通过研究圆的直径的性质得到椭圆直径的对应性质. 例 2 中，单位圆在两种伸缩变换（都为拉伸过程）$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=y\end{cases}$和$\begin{cases}x'=x,\\ y'=2y\end{cases}$的作用下分别变成焦点在 x 轴上和焦点在 y 轴上的椭圆.

本题可推广为：在伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{b}{a}x,\\ y'=y\end{cases}$的作用下，圆 $x^2+y^2=a^2$ 变成椭圆$\dfrac{x'^2}{b^2}+\dfrac{y'^2}{a^2}=1$；在伸缩变换$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{b}{a}y\end{cases}$的作用下，圆 $x^2+y^2=a^2$ 变成椭圆$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$，其中 $a>0$，$b>0$. 进一步研究表明，圆 $x^2+y^2=a^2$ 的面积 $S_{圆}$ 与伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{b}{a}x\\ y'=y\end{cases}$后所得到的椭圆$\dfrac{x'^2}{b^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$ 的面积 $S_{椭圆}$ 之间有如下关系式：$S_{椭圆}=\dfrac{b}{a}S_{圆}$. 从而可以得到椭圆的面积公式为 $S_{椭圆}=\pi ab$.

例 1 和例 2 的结果表明，一个封闭图形在伸缩变换前的面积 S 与伸缩变换后的面积 S' 之间有如下关系式：$S'=kS$，其中 $k>0$ 为伸缩系数.

相关链接

1. 伸缩变换的矩阵表示

《普通高中数学课程标准（实验）》选修系列 4 中设置了《矩阵与变换》专题. 根据矩阵的有关知识，我们可以用矩阵表示平面直角坐标系中的伸缩变换.

一般地，对于伸缩变换公式$\begin{cases}x'=x,\\ y'=ky(k>0),\end{cases}$其伸缩变换的矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$，该伸缩变换可写为$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. 由于$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{vmatrix}=k>0$，从而伸缩变换矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$可逆，也就是伸

缩变换可逆，其逆变换为$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. 类似地，对于伸缩变换公式$\begin{cases}x'=lx(l>0),\\y'=y,\end{cases}$其伸缩变换的矩阵为$\begin{pmatrix}l&0\\0&1\end{pmatrix}$，该伸缩变换可写为$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，其逆变换为$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{l}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

2.“压缩”变换

“伸缩变换”有时也叫作“压缩变换”. 平面上的平移、旋转和反射都是保持距离不变的正交变换，而压缩变换却不是一种保持距离不变的变换. 平面上向着定直线l(压缩轴)的压缩，是指平面上这样的变换：它使压缩轴上所有的点保持原位(不动点)，而压缩轴以外的每个点P则变成这样的点P'，使得$\overrightarrow{PP'}\perp l$于$P_0$，$\overrightarrow{P_0P'}=k\,\overrightarrow{P_0P}$，其中$k$是对于所有的点都一样的正常数，叫作压缩系数. 当$0<k<1$时，$P'$比$P$更接近于压缩轴，这是真的压缩；当$k>1$时，$P'$比$P$离压缩轴更远些，这是广义的“压缩”，实际上是伸长；当$k=1$时，得到恒等变换，所有的点都保持原位，全为不动点.

利用同样的方法可以定义空间压缩变换，而只须把压缩轴相应地改成压缩平面就可以了.

1.3 极坐标系

教材线索

本节先通过甲、乙两人的一段对话指出生活中存在着极坐标的例子，然后给出极坐标系以及极点、极轴、极径、极角等概念，并通过具体的事实指出使用极坐标的优点与不足. 优点是：在极坐标系中，许多曲线的方程变得十分简洁，而且几何形象也表达得十分明确. 不足是：它并不能像平面直角坐标系那样，能建立与平面上的点的一一对应. 本节教材详细介绍了四类简单图形的极坐标方程：过极点直线的极坐标方程，圆心在极点的圆的极坐标方程，圆心在极轴且过极点的圆的极坐标方程以及阿基米德螺线的极坐标方程. 最后介绍了阿基米德螺线(等速螺线)在机械凸轮中的应用.

教学目标

(一)知识与技能

1. 知道在极坐标系中刻画点的位置的方法.

2. 掌握简单图形(过极点的直线、圆心在极点的圆、圆心在极轴且过极点的圆以及阿基米德螺线)的极坐标方程.

(二)过程与方法

1. 借助生活中的实例引入极坐标的概念.

2. 研究简单图形的极坐标方程的特点.

3. 比较简单图形在极坐标系和平面直角坐标系中的方程.

(三)情感、态度与价值观

1. 体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别.

2. 体会在用方程刻画平面图形时选择适当坐标系的意义.

3. 通过阿基米德螺线，感受数学的文化价值.

教材分析

1. 重点：几类简单图形(过极点的直线、圆心在极点的圆、圆心在极轴且过极点的圆以及阿基米德螺线)的极坐标方程.

2. 难点：

(1)极坐标(ρ, θ)与平面上的点的关系.

(2)几类简单图形的极坐标方程的推导.

3. 教材第一段给出了一个在生活中使用极坐标描绘某个点的位置的例子，为极坐标系的引入创设了问题情境.

4. 教材第二段到第七段给出了极坐标系的定义及极径、极角等相关概念，并讨论了平面上的点与极坐标$(\rho，\theta)$的对应关系.

5. 教材的其他部分依次讨论了四类简单图形(过极点的直线、圆心在极点的圆、圆心在极轴且过极点的圆以及阿基米德螺线)的极坐标方程.

(1)过极点的直线的极坐标方程：教材在这一部分先给出了平面直角坐标系中过原点O的直线方程，形如$y=kx$，其中k为斜率，$k=\tan\theta$，θ是此直线与Ox轴的夹角. 并指出由上述直角坐标方程不易看出夹角的大小，而如果用极坐标表示，则可将过极点O的射线方程写成$\theta=\theta_0$，$\theta_0\in[0，2\pi)$. 如果极径ρ只能取正值，则必须用两条射线$\theta=\theta_0$和$\theta=\theta_0+\pi$，$\theta_0\in[0，2\pi)$表示整条直线. 因此教材在此处补充规定极径ρ可取负值，并约定$M(\rho，\theta)$关于极点的对称点M'的极坐标写成$M'(-\rho，\theta)$. 于是过原点与x轴夹角为θ_0的直线l的极坐标方程为$l：\theta=\theta_0$.

(2)圆心在极点的圆的极坐标方程是$\rho=r_0$，其中r_0是圆的半径. 教材未在正文中对此类极坐标方程做过多的解释，而以旁注的形式说明了上述方程的含义.

(3)圆心在极轴且过极点的圆的极坐标方程是$\rho=2r_0\cos\theta$，此处的r_0是圆的半径，也是圆心到极点的距离. 教材利用“圆的直径所对的圆周角为直角”这条性质及”三角函数关系”得到上述方程.

(4)《课标》中并没有明确将阿基米德螺线的极坐标方程作为必须要掌握的内容，但是由于其形式简单、应用广泛、内涵丰富，教材在编写时仍然加上了这部分内容. 在阿基米德螺线的极坐标方程的推导过程中，教材使用了运动合成的思想，即该螺线的形成是两种运动合成的结果. 其中，一种运动是“动点M随时间的增加绕定点O逆(或顺)时针匀速绕动”，其运动方程是$\theta=\omega t$，另一种运动是“动点M随时间的增加做匀速直线运动”，其运动方程是$\rho=vt$. 联系两种运动的量是时间t，由时间t的相等可以得到ρ与θ的关系为$\rho=\dfrac{v}{\omega}\theta$，一般将此式写为$\rho=\alpha\theta(\alpha\neq0)$. 这种运动合成的思想可以应用到第二章平摆线的讨论及一些类似的问题中.

阿基米德螺线又称为等速螺线。利用等速螺线的性质，可以制成把匀速转动转化成匀速直线运动的机械凸轮装置. 教材在编写时加入了这部分内容，以加强学生的数学应用意识. 本章结尾处还专门以“数学文化”专栏的形式介绍了数学家阿基米德和他的螺线.

教学建议

1. 引导学生思考：在平面内建立直角坐标系，可以确定平面内点的位置，除了直角坐标系以外，是否还可以有其他的坐标系来确定平面内点的位置呢？问题提出后，可结合教材P8的一段对话引入极坐标的概念：“甲问乙：张庄在哪里？乙答：在从我们站的这里向东北5 km的地方.”这段对话里涉及了方向(东北)和距离(5 km)，可借此引入极坐标系的概念.

2. 在极坐标系的定义中有四个要素：极点、极轴、长度单位和角度正向. 这四个要素缺一不可.

3. 对于极点 O，它的极径 $\rho=0$，极角 θ 可以取任何实数. 因此极点 O 的表示有无数种形式.

4. 极坐标并不像平面直角坐标系那样，能建立与平面上的点之间的一一对应关系. 对于给定的 ρ 与 θ，由极坐标(ρ,θ)可以唯一地确定一个点 M，但是反过来，平面上给定一点，却可以写出这个点的无数多个极坐标. 例如，如果我们给出了一个点的极坐标(ρ,θ)，则$(\rho,\theta+2n\pi)$也是这个点的极坐标，其中 $\rho\geqslant 0$，n 为任意整数. 通常情况下我们约定 $\rho\in[0,+\infty)$，$\theta\in(-\infty,+\infty)$. 有时候为了研究的需要，我们往往取消对 ρ 的限制，规定 ρ 可以取负值. 如果 ρ 取负值，可以做如下规定：设有点 $M(\rho,\theta)$，其中 $\rho<0$，那么点 M 在角 θ 的终边的反向延长线上，距离极点为 $|\rho|$ 的位置上. 根据此规定，如果我们给出了一个点的极坐标(ρ,θ)，则$(\rho,\theta+2n\pi)$和$(-\rho,\theta+(2n+1)\pi)$都是这个点的极坐标，其中 $\rho\in(-\infty,+\infty)$，n 为任意整数.

如果规定 $\rho>0$，$\theta\in[0,2\pi)$，则平面上的点与极坐标一一对应(除极点外).

5. 对于“过极点直线的极坐标方程”的教学，要让学生理解，如果极径取正值，则 $\theta=\theta_0$ $(\theta_0\in[0,2\pi))$只能表示过极点 O 的射线而不是整条直线. 因此必须对极径的取值范围做补充，规定允许极径取负值. 而在允许极径取负值的情况下，如果要在极坐标系中画出某个点，例如点 $P\left(-2,\dfrac{\pi}{4}\right)$，则可以按如下思路考虑：先作有向角 $\angle xOM=\dfrac{\pi}{4}$，然后在射线 OM 的反向延长线 OM' 上取点 P，使得 $|OP|=2$，则 $P\left(-2,\dfrac{\pi}{4}\right)$为所求点，如图 1－1.

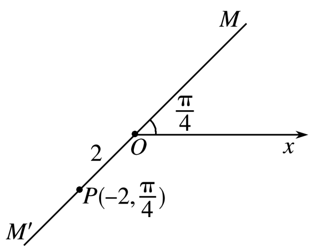


图 1－1

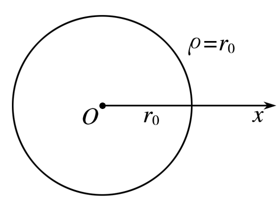


图 1－2

6. 对于“圆心在极点的圆的极坐标方程”的教学，教材以旁注的形式说明了该极坐标方程所表示的含义，但未给出具体的图形，在教学中应补充图形，如图 1－2.

7. 对于“圆心在极轴且过极点的圆的极坐标方程”的教学，应注意引导学生考虑直角三角形中边与角的关系以及圆周上任一点的坐标所表示的含义.

8. 对于“阿基米德螺线的极坐标方程”的教学，应注意引导学生考虑两种运动合成的思想. 这种运动合成的思想对于本章 1. 5 和 1. 6 节中的例题仍然适用. 这部分内容可结合本章结尾的“数学文化”专栏——《数学家阿基米德和他的螺线》进行教学. 有条件的学校和班级可以考虑在教学过程中展示机械凸轮的实物模型或用计算机软件模拟机械凸轮的工作原理.

相关链接

1．直线的极坐标方程

定理 1．3．1　设两定点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ 和 $P_2(\rho_2, \theta_2)$ 与极点 O 不在同一条直线上，则经过 P_1，P_2 两点的直线方程为

$$\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_1-\theta)}{\rho_2}+\frac{\sin(\theta-\theta_2)}{\rho_1}. \tag{1.3.1}$$

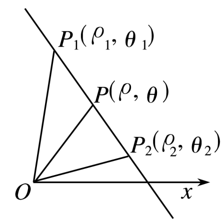


图 1－3

证明：设点 $P(\rho, \theta)$ 为直线 P_1P_2 上的任意一点，如图 1－3，当 P 点在线段 P_1P_2 的内部时，则 $\triangle P_2OP_1$ 的面积等于 $\triangle P_2OP$ 与 POP_1 的面积之和，于是

$$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)=\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta_1-\theta)+\frac{1}{2}\rho_2\rho\sin(\theta-\theta_2).$$

因为 $\rho\neq0$，$\rho_1\neq0$，$\rho_2\neq0$，将等式两边同时除以 $\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\rho$，即得

$$\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_1-\theta)}{\rho_2}+\frac{\sin(\theta-\theta_2)}{\rho_1}.$$

当 P 点在线段 P_1P_2 的外部时，则 $\triangle P_2OP_1$ 的面积等于 $\triangle POP_2$ 与 $\triangle POP_1$ 的面积之差，同理可得出上述结论.

式子(1.3.1)称为直线在极坐标系中的两点式方程.

注：过点 $(a, 0)$，倾斜角为 θ_0 的直线(如图 1－4)的极坐标方程为

$$\rho\sin(\theta_0-\theta)=a\sin\theta_0. \tag{1.3.2}$$

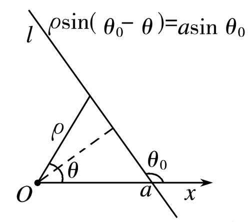


图 1－4

式子(1．3．2)称为直线在极坐标系中的点斜式方程.

特别地，若 $a>0$，则

(1)过点 $(a, 0)$，且与极轴垂直的直线的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=a$，如图 1－5(a).

(2)过点 (a, π)，且与极轴垂直的直线的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=-a$，如图 1－5(b).

(3)过点 $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$，且与极轴平行的直线的极坐标方程为 $\rho\sin\theta=a$，如图 1－5(c).

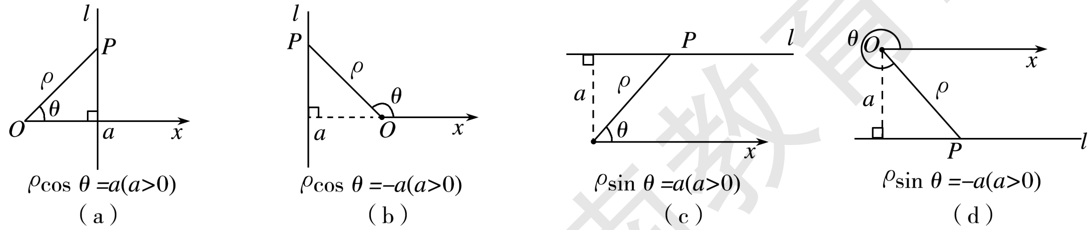


图 1－5

(4)过点$\left(a,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$，且与极轴平行的直线的极坐标方程为$\rho\sin\theta=-a$，如图 1－5(d).

2. 圆的极坐标方程

定理 1.3.2 设圆的半径为r，圆心坐标为$O'(\rho_0,\ \theta_0)$，则圆的极坐标方程为

$$\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0. \qquad (1.3.3)$$

证明：如图 1－6，设$P(\rho,\ \theta)$为圆上任意一点，在$\triangle POO'$中，由余弦定理得$|PO'|^2=|OP|^2+|OO'|^2-2|OP||OO'|\cdot\cos(\theta-\theta_0)$，

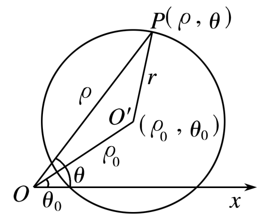


图 1－6

由此得方程$r^2=\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)$，

即$\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$.

式子(1.3.3)是圆在极坐标系中的一般方程.

(1)当圆心在极点O处，即$\rho_0=0$时，圆的方程为$\rho=r$，如图 1－7(a).

(2)当圆心在$O'(r,\ 0)$处，即$\rho_0=r$，$\theta_0=0$时，圆的方程为$\rho=2r\cos\theta$，如图 1－7(b)，

(3)当圆心在$O'(r,\ \pi)$处，即$\rho_0=r$，$\theta_0=\pi$时，圆的方程为$\rho=-2r\cos\theta$，如图 1－7(c).

(4)当圆心在$O'\left(r,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，即$\rho_0=r$，$\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$时，圆的方程为$\rho=2r\sin\theta$，如图 1－7(d)

(5)当圆心在$O'\left(r,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$，即$\rho_0=r$，$\theta_0=\dfrac{3\pi}{2}$时，圆的方程为$\rho=-2r\sin\theta$，如图 1－7(e).

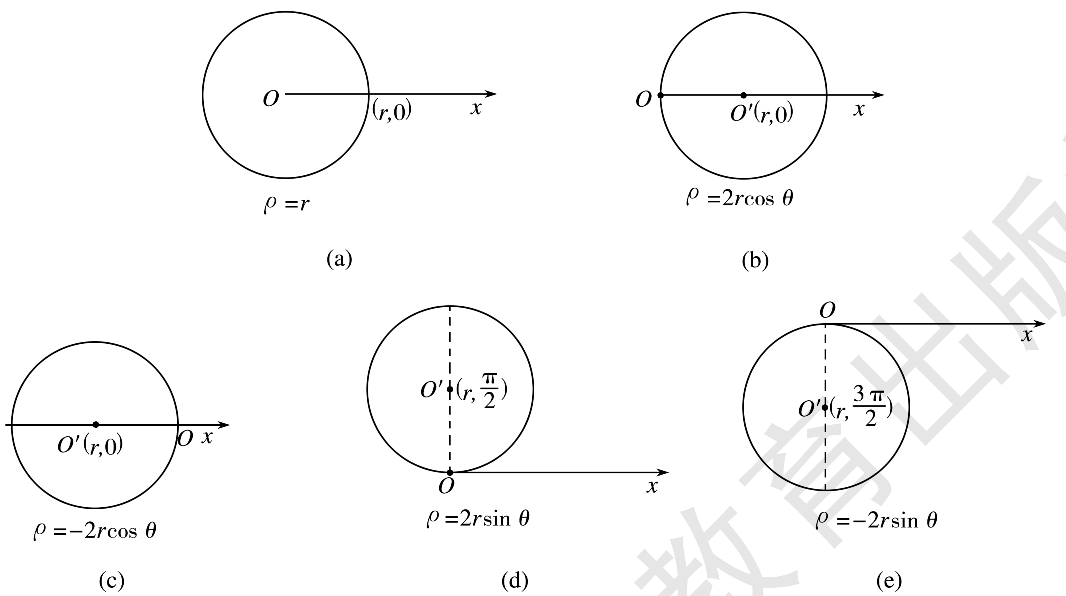


图 1－7

1.4　极坐标与平面直角坐标的互化

教材线索

本节给出了极坐标与平面直角坐标互化的公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$和$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0),\end{cases}$并利用前一个公式将圆在平面直角坐标系中的方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 转化成了它在极坐标系中的方程 $\rho=2a\cos\theta$(例 1)，利用后一个公式将圆锥曲线的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$化成了直角坐标方程，并根据 e 的不同取值分别得到了椭圆、抛物线和双曲线的方程(例 2).

教学目标

(一)知识与技能

掌握将曲线的平面直角坐标方程与极坐标方程互化的方法.

(二)过程与方法

通过具体的实例，研究两种坐标方程互化的方法.

(三)情感、态度与价值观

体会不同的坐标系在处理不同的问题时各自所具有的优越性.

教材分析

1. 重点：

曲线的极坐标方程和平面直角坐标方程的互化.

2. 难点：

将曲线的极坐标方程转化为平面直角坐标方程.

3. 教材 P11 指出了利用教材提供的公式进行极坐标与平面直角坐标互化的前提条件：把极轴与平面直角坐标系 xOy 的 x 正半轴重合，且两种坐标系取相同的长度单位.

4. 设同一个点 M 的直角坐标为$(x,\ y)$，极坐标为$(\rho,\ \theta)$，那么由直角三角形中边和角的关系式，可以得到公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}$　①

教材 P11 公式①是将曲线的直角坐标转化为极坐标的公式，把它代入曲线的直角坐标方程就可以消去 x 和 y 从而把直角坐标方程化为极坐标方程，公式①中的两个式子平方相

加或相除得公式 $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0).\end{cases}$ ②

公式②是将曲线的极坐标方程转化为直角坐标方程的公式.

5. 例 1 和例 2 分别是两种互化公式的应用. 例 1 将中心在 $(a, 0)$，半径为 a 的圆在平面直角坐标系中的方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 转化为极坐标系中的方程 $\rho=2a\cos\theta$. 例 2 研究了极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 在平面直角坐标系中所表示的曲线，它实际上是圆锥曲线的统一的极坐标方程.

教学建议

1. 教学过程中应注意：必须是以直角坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，长度单位相同的条件下，同一点的直角坐标和极坐标才具有公式①和②两个关系式，否则上述两个公式就不成立.

2. 化点的直角坐标为极坐标时，要根据 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$ 确定 θ 角，一般来说，三角方程 $\tan\theta=a$ 的解有无穷多个，在 $[0, 2\pi)$ 上有两个解，哪个解是所求的极角？这必须根据点所在的象限决定取舍，且取点所在象限中的最小正角.

3. 在进行坐标转化时，要尽可能“凑出” $\rho\cos\theta$，$\rho\sin\theta$ 或 x^2+y^2 等形式的项，以使运算简便.

4. 例 1 和例 2 中都含有未知参数，对于基础比较差的学生理解互化公式可能有困难，可以在讲解例 1 和例 2 之前补充几个简单的例子，例如：(1)把点 P 的极坐标 $\left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 化成直角坐标；(2)把点 $M(-2, -2)$ 化为极坐标.

例题解析

例 1 在平面直角坐标系中，把曲线的方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 化成极坐标系中的方程. (解答见教材 P12)

解析 本题曲线方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 中的参数 $a\neq 0$. 在此前提下，方程表示平面直角坐标系中，中心在 $(a, 0)$、半径为 a 的圆，转化成极坐标方程后，此圆过极点，圆心在极轴上.

例 2 已知曲线的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，求此曲线的直角坐标方程，其中 e 与 p 是正的常数. (解答见教材 P13)

解析 圆锥曲线的统一定义为：平面上与一个定点 F 的距离和一条定直线 l 的距离之比等于常数 e 的动点的轨迹叫做圆锥曲线. 其中，定点 F 为圆锥曲线的一个焦点，定直线 l 为准线，p 为焦点到准线的距离，e 为离心率. 当 $0<e<1$ 时，轨迹为椭圆；当 $e=1$ 时，轨迹为抛物线；当 $e>1$ 时，轨迹为双曲线. 在满足如下三个条件的情况下，本题中所给定的

极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 为圆锥曲线的统一的极坐标方程：(1)以一个焦点为极点；(2)焦点到对应准线垂直方向的反方向为极轴的方向；(3)焦点到准线的距离为 $p=|FK|$，离心率为 e，如图 1－8.

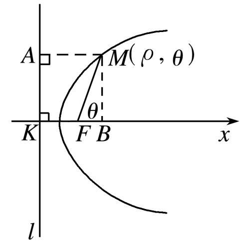


图 1－8

本题在利用互化公式得到式子 $(1-e^2)x^2+y^2-2pe^2x-e^2p^2=0$ 之后，需要分 $1-e^2$ 为正数、零和负数三种情况进行讨论，从而分别得到三种不同类型的曲线，即椭圆、抛物线和双曲线.

相关链接

圆锥曲线的统一的极坐标方程的建立和应用

圆锥曲线的统一的极坐标方程的建立经历了如下的过程：

统一定义 $\longrightarrow \dfrac{|MF|}{|MA|}=e \longrightarrow$ 统一的极坐标方程.

要想解决好这个发展过程，要解决好三个问题.

第一，三种圆锥曲线的统一定义(见本节例 2).

第二，建立极坐标系. 曲线和坐标系的相对位置影响方程的形式. 可以采用如下的方式建立极坐标系：过焦点 F 作准线 l 的垂线，垂足为 K，以焦点 F 为极点，FK 的反向延长线为极轴，建立极坐标系. 抛物线的情形如图 1－8. 对于椭圆而言，极点是左焦点，极轴穿过右焦点和右准线，但和左准线不相交，如图 1－9. 对于双曲线而言，极点是右焦点，极轴不过另一焦点，和两条准线都不相交，如图 1－10.

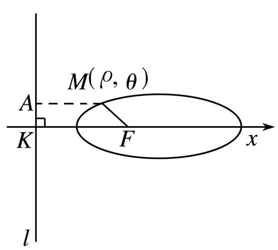


图 1－9

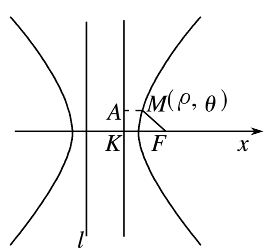


图 1－10

第三，怎样用极坐标 (ρ,θ) 表示 $|MA|$？注意到 $|FK|$ 是常量，记为 p，即 $|FK|=p$，这个量称为准焦距，即焦点到相应准线的距离. 接着作辅助线：过点 M 作 $MB\perp Fx$，垂足为 B，如图 1－8，则 $|MA|=p+FB$，而 $|FB|=\rho\cos\theta$，故 $|MA|=p+\rho\cos\theta$.

于是 $\dfrac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e$，即 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$.

1.5 柱坐标系

教材线索

本节先通过如何确定圆形体育场看台的座位的问题引入柱坐标系在生活中的应用实例，然后给出柱坐标系的一般概念，并得出空间直角坐标与柱坐标的互化公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\\z=z.\end{cases}$紧接着教材指出应用柱坐标的时机：当动点绕定直线旋转时，用柱坐标系刻画动点的位置与轨迹一般比空间直角坐标系方便一些. 最后教材通过一个具体的例题说明了在某些时候使用柱坐标系比使用空间直角坐标系更简明更方便.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解在柱坐标系中刻画空间中点的位置的方法.
2. 掌握空间直角坐标与柱坐标的互化公式.

(二)过程与方法

借助具体实例(如圆形体育场看台的座位)研究柱坐标系问题.

(三)情感、态度与价值观

1. 体会在柱坐标系与空间直角坐标系中刻画点的位置的方法的区别.
2. 感受用柱坐标系处理某些问题时的优越性.

教材分析

1. 重点：

空间直角坐标与柱坐标的互化.

2. 难点：

建立柱坐标系解题的方法.

3. 柱坐标$(\rho，\theta，z)$唯一地确定一个空间中的一个点M. 但是由于同一个点M'的极坐标$(\rho，\theta)$也可以用$(\rho，2k\pi+\theta)$表示(若允许$\rho<0$，还可以用$(\rho，2k\pi+\pi+\theta)$$(k\in\mathbf{Z})$表示，因此给定空间中一点$M$，其柱坐标的表示方法不一定唯一. 在柱坐标中，约定$\rho\in[0，+\infty)$，$\theta\in(-\infty，+\infty)$，$z\in(-\infty，+\infty)$.

2. 教材中给出的“蚂蚁沿半径为 1 的圆柱面螺旋式上升”的例子很有代表性，通过比较同一个点的直角坐标和柱坐标，充分体现了在涉及与柱面有关的问题中，使用柱坐标比使用直角坐标更加方便.

教学建议

1. 柱坐标系与空间直角坐标系和极坐标系紧密相关. 将空间中的点投影到平面上之后，关于柱坐标系的讨论就转化为关于极坐标系的讨论. 因此，教学中应从学生已经掌握的空间直角坐标系和极坐标系的知识出发，建立起三种坐标系之间的联系.

2. 由于在涉及与柱面有关的问题时，使用柱坐标比使用直角坐标更方便，所以在教学过程中可适当和学生介绍有关柱面的知识，让学生认识不同的柱面.

例题解析

例 一只蚂蚁沿半径为 1 的圆柱面螺旋式地上升，设空间直角坐标系的 z 轴即此圆柱的轴，此蚂蚁在 z 轴方向匀速上升的速度为 $v>0$，匀速绕 z 轴转动的角速度 $\omega>0$，求 t 时刻蚂蚁所在的点的直角坐标与柱坐标.（解答见教材 P19）

解析 本题也可以先求点的柱坐标再求点的直角坐标. 方法如下：

如图 1－11，蚂蚁的运动是两种运动合成的结果：一种运动是蚂蚁在 z 轴方向匀速上升的直线运动，其速度为 v；另一种运动是蚂蚁绕 z 轴匀速旋转的圆周运动，其角速度为 ω. 两种运动同时进行，它们所经历的时间 t 相同. 设 t 时刻，蚂蚁爬到点 M，点 M 的空间直角坐标为$(x(t),\ y(t),\ z(t))$，点 M 在 xOy 面上的投影为 $M'(\rho,\ \theta,\ 0)$. 由于蚂蚁从 A 点开始爬行，因此，点 M 的竖坐标等于蚂蚁在$[0,\ t]$这段时间内在 z 轴方向爬行的距离 vt，即有 $z(t)=vt$；蚂蚁绕 z 轴做匀速圆周运动旋转的角度就是 M'的极坐标中的极角，即有 $\theta=\omega t$；又由于蚂蚁始终在半径为 1 的圆柱面上爬行，因此 M'在极坐标中的极径为 $\rho=1$. 因此，点 M 的柱坐标为$(\rho,\ \theta,\ z)=(1,\ \omega t,\ vt)$. 而由

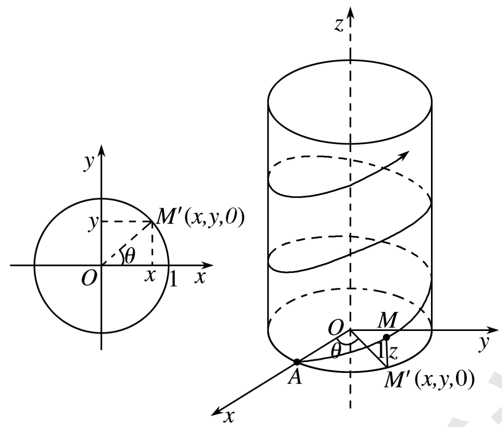


图 1－11

直角坐标与柱坐标的互化公式：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$

可得点 M 的直角坐标为$(x(t),\ y(t),\ z(t))=(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ vt)$.

上述蚂蚁运动的轨迹为螺旋线，螺旋线是一种常见的曲线. 例如，平头螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线. 当我们拧紧平头螺丝钉时，它的外缘曲线上的任一点 M，一方面绕螺丝钉的轴旋转，另一方面又沿平行于轴线的方向前进，点 M 就走出一段螺旋线.

几种常见的柱面

设 C 是一条空间曲线，过 C 的每点作一条直线彼此平行，则所有这些直线上的点组成的空间曲面叫作一个柱面，C 叫作它的准线，这每条直线都叫作它的母线.

直观地说，可把柱面视为一条直线沿 C 平行移动而扫过的曲面.

假设柱面 S 的一条准线 C 在与它的母线垂直的平面 π 上，取空间直角坐标系 $Oxyz$，使 π 为 Oxy 面，C 在 π 上的平面直角坐标系 Oxy 下有方程 $F(x, y)=0$，则此柱面 S 在此空间直角坐标系 $Oxyz$ 下就有方程

$$F(x, y)=0. \qquad (*)$$

如图 1－12 所示.

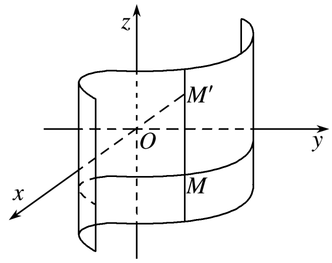


图 1－12

结论：若一个三元方程 $F(x, y, z)=0$ 中有一个字母没有出现，它的图形就是个柱面，且这柱面的母线平行或重合于不出现的那个字母所对应的坐标轴，它的在出现的两个字母所对应的坐标平面上的准线，就是同一个方程视为二元方程所代表的那条平面曲线. 当然，这平面曲线要假定是存在的.

例如，三元方程 $G(y, z)=0$ 是母线平行于 Ox 轴的柱面，其一条准线是 Oyz 平面上的曲线 $G(y, z)=0$. 如果它存在的话. 这条准线作为空间曲线的方程是 $\begin{cases}G(y, z)=0, \\ x=0.\end{cases}$

于是，坐标平面上任意一条曲线都确定一个柱面，即以这曲线为准线，母线垂直于此坐标平面，方程则与平面曲线方程形式上相同.

其中，用 Oxy 面上的三条曲线

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0(a>b>0)$，　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0(a>0, b>0)$，　(3) $x^2+2py=0$，

分别作为空间曲面的方程，都表示母线平行或重合于 Oz 轴的柱面，准线分别为椭圆、双曲线、抛物线，所以它们分别叫作**椭圆柱面**、**双曲柱面**和**抛物柱面**，如图 1－13 所示. 因为它们都是二次的方程，故统称为**二次柱面**.

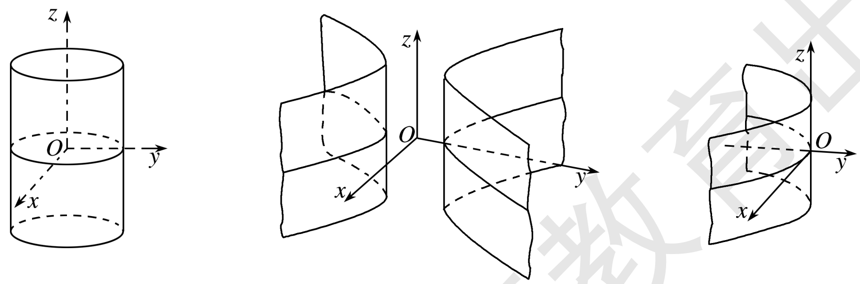


图 1－13

1.6　球坐标系

教材线索

本节先从地球的经纬度谈起，给出了地球的经线、经度、纬线、纬度和国际日期变更线等概念，然后指出数学家沿用这种描述地球经纬度的方法创立了球坐标系，并给出了球坐标系的定义，推导出了点 M 在球坐标系中的坐标 $M(r,\theta,\varphi)$ 与它在空间直角坐标系中的坐标 $M(x,y,z)$ 的关系：$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$ 紧接着通过比较半径为 r_0，中心在原点的球的球坐标方程 $r=r_0$ 和空间直角坐标方程 $x^2+y^2+z^2=r_0^2$，说明了在某些时候使用球坐标方程比使用空间直角坐标方程更简洁，表达的几何含义也比较直观明白，而且在处理有关球的问题时更方便. 最后通过一个例子具体说明了可以从球坐标方程直接“解读”曲线的性状.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解在球坐标系中刻画空间中点的位置的方法.

2. 掌握空间直角坐标与球坐标的互化公式.

(二)过程与方法

借助具体实例(如地球的经、纬度等)研究球坐标系问题.

(三)情感、态度与价值观

1. 体会在球坐标系中与空间直角坐标系中刻画点的位置的方法的区别.

2. 感受用球坐标系处理某些问题时的优越性.

教材分析

1. 重点：

空间直角坐标与球坐标的互化.

2. 难点：

(1)球坐标系与空间直角坐标系的关系式的推导.

(2)建立球坐标系解题的方法.

3. 本书开篇即介绍了地球的经纬度. 地球的经纬度是刻画地球上点的位置的一种方法. 把地球近似看成一个球体，过南北极的直径 NS 与英国伦敦格林尼治天文台这个点确定的平面 α 与地球表面相交形成的圆上含格林尼治天文台的半圆叫做“本初子午线”，上述平面 α 绕地轴 NS 旋转所得平面 β 与地球表面的交线在南北极间的弧线叫作子午线，也叫经线. 设本初子午线向东的子午线 L 是平面 β 形成的，α 与 β 之间的不大于 $180°$ 的夹角为 θ_1，则称 L 是东经 θ_1 的子午线. 同理有西经 θ_2 的子午线. 由上述内容可以看出，经度的计算实际上是考虑两个半平面相交成的二面角的大小，其中，起始位置的半平面为本初子午线. 东西经 $180°$ 是同一条子午线，叫作“国际日期变更线”，它通过美俄之间的白令海峡. 图 1－14 是飞机经过“国际日期变更线”时所拍摄的图片.

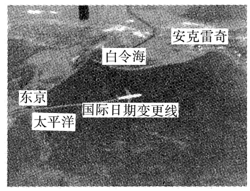


图 1－14

4. 地球纬度的定义如下：取定地球表面一点 M，过 M 作平面 γ 与赤道平面平行，γ 与地球表面的交线叫作纬线，纬线上一点与地球中心 O 所连直线与赤道平面的夹角 ψ，叫作 M 点的纬度. 球坐标系中“纬度”的定义如下：在空间中任取一点 M，连接线段 OM，O 点是空间直角坐标系的原点，过 M 作 xOy 平面的垂线，垂足是 M'，连接线段 OM'，则以 Oz 轴为始边，逆时针方向为正的 $\varphi=\angle zOM$ 的大小为 M 点的“纬度”，比较地球纬度 ψ 和球坐标系中“纬度”φ 的概念可以发现，这两个角度并不是相等关系，而是互余关系，如图 1－15 所示.

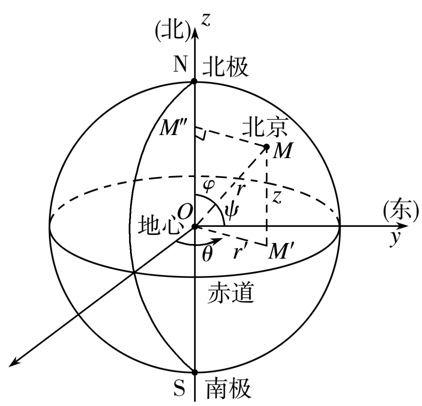


图 1－15

5. 一个点的球坐标也称为空间极坐标，它与平面上的点的极坐标之间的关系如下：设 $M(r, \theta, \varphi)$是空间某个点 M 的球坐标，过此点 M 向平面 xOy 作垂线，垂足为 M'，则点 M'的极坐标为 $M'(r\sin\varphi, \theta)$.

6. 什么时候可以考虑使用球坐标？教材指出：球坐标在处理含平方和 $x^2+y^2+z^2$ 的方程或有关球的问题时是比较方便的，在处理空间旋转体的有关问题时也往往提供方便.

教学建议

1. 教学中可以从学生熟悉的地球经纬度问题出发，说明坐标系在现实生活中有着广泛的应用.

2. 教学中应注意地球的经纬度与球坐标系中的“经度”、“纬度”之间的关系，并注意其

取值范围的不同. 球坐标 $M(r, \theta, \varphi)$ 中各参数的取值范围分别为 $r\in[0, +\infty)$，$\theta\in(-\infty, +\infty)$，$\varphi\in[0, \pi]$.

3. 球坐标与直角坐标的关系式的推导过程中，所涉及的边角关系较为复杂，可以考虑采用信息技术工具(例如 Z+Z 超级画板、几何画板等)呈现边角之间的关系.

4. 教学中可适当补充有关用球坐标处理的不含参数的数学问题.

例题解析

例 一只蚂蚁在一个母线与轴线夹角 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面上从顶点出发盘旋着向上爬行，已知它上升的速度为 $v>0$，盘旋的角速度为 $\omega>0$，求 t 时刻此蚂蚁的位置.(解答见教材 P23)

解析 与 1.5 节例题相似，本题也是考虑一只蚂蚁绕某曲面爬行的问题. 因此，同样可以运用运动合成的思想来考虑这个问题. 蚂蚁的运动是两种运动合成的结果：一种运动是蚂蚁在 z 轴方向匀速上升的直线运动，其速度为 v；另一种运动是蚂蚁绕 z 轴匀速旋转的圆周运动，其角速度为 ω，两种运动同时进行，它们所经历的时间 t 相同. 由于蚂蚁从坐标原点开始爬行，因此，蚂蚁在 $[0, t]$ 这段时间内在 z 轴方向移动的距离为 vt，由于蚂蚁始终在一个母线与轴线夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面上爬行，故蚂蚁在时刻 t 所在位置的向径为 $r=vt/\cos\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}vt$；蚂蚁绕 z 轴做匀速圆周运动旋转的角度为 $\theta=\omega t$；因此，点 M 的球坐标为 $(\rho, \theta, \varphi)=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}vt, \omega t, \frac{\pi}{6}\right)$. 如图 1－16. 根据点的球坐标，可以直接“解读”出这条曲线的性质.

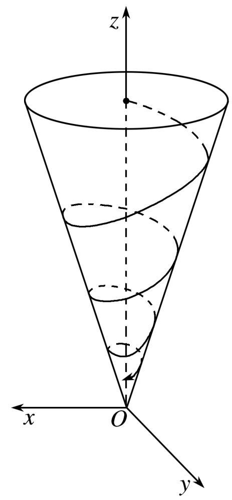


图 1－16

相关链接

全球定位系统(GPS)简介

最古老、最简单的导航方法是星历导航，人类通过观察星座的位置变化来确定自己的方位. 最早的导航仪是中国人发明的指南针，几个世纪以来它经过不断的改进而变得越来越精密，并一直为人类广泛应用着. 最早的航海表是英国人 John Harrison 经过 47 年的艰苦工作于 1761 年发明的，在其随后的两个世纪，人类通过综合地利用星历知识、指南针和航海表来进行导航和定位.

进入 20 世纪以后，随着科学技术水平的不断提高，人类逐渐发明了许多新的定位方法.

1957 年 10 月，世界上第一颗人造地球卫星的成功发射宣告空间科学的发展跨入了一个崭新的时代，也使电子导航技术的发展进入了一个新的阶段. 1973 年美国国防部批准其陆海空三军联合研制第二代卫星导航定位系统——全球定位系统(GPS). 起初的 GPS 方案由 24 颗卫星组成，这些卫星分布在互成 120°的三个轨道平面上，每个轨道平面分布 8 颗卫星，这样的卫星布局可保证在地球上的任何位置都能同时观测到 6～9 颗卫星. 目前的方案是由 21 颗工作卫星和 3 颗备用卫星组成整个系统，6 个轨道平面的每个平面上分布 4 颗卫星，这样的配置使同时出现在地平线以上的卫星数目随时间和地点而异，最少为 4 颗，最多可达 11 颗.

GPS 系统主要有三大组成部分，即空间星座部分、地面监控部分和用户设备部分. GPS 的空间星座部分中 24 颗卫星基本均匀分布在 6 个轨道平面内，轨道平面相对赤道平面的倾角为 55°，各轨道平面之间的交角为 60°，每个轨道平面内的卫星相差 90°，任一轨道平面上的卫星比西边相邻轨道平面上的相应卫星超前 30°. 卫星轨道平均高度为 20 200 km，卫星运行周期为 11 小时 58 分. 每颗卫星每天约有 5 个小时在地平线以上，同时位于地平线以上的卫星数目随时间和地点而不同，可为 4～11 颗；GPS 的地面监控部分目前主要由分布在全球的 5 个地面站组成，其中包括卫星检测站、主控站和信息注入站. GPS 的用户设备主要由接收机硬件和处理软件组成. 用户通过用户设备接收 GPS 卫星信号，经信号处理而获得用户位置、速度等信息，最终实现利用 GPS 进行导航和定位的目的.

GPS 系统的建立给导航和定位技术带来了巨大的变化，它从根本上解决了人类在地球上的导航和定位问题，可以满足不同用户的需要. 对舰船而言，它能在海上协同作战、海洋交通管制、海洋测量、石油勘探、海洋捕鱼、浮标建立、管道铺设、浅滩测量、暗礁定位、海港领航等方面作出贡献；对飞机而言，它可以在飞机进场、着陆、中途导航、飞机会合和空中加油、武器准确投掷及空中交通管制等方面进行服务；在陆地上，可用于各种车辆、坦克、陆军部队、炮兵、空降兵和步兵等的定位，还可用于大地测量、摄影测量、野外调查和勘探的定位，甚至可以深入每个人的生活中去，如用于汽车、旅行、探险、狩猎等方面；在空间技术方面，可以用于弹道导弹的引航和定位，空间飞行器的导航和定位等.

教材习题参考解答

习题 1

1. (1)$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{3}x,\\ y'=y.\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{1}{4}y.\end{cases}$

2. 极坐标系中各点的位置如图 1－17.

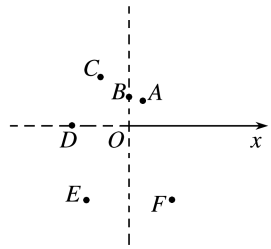


图 1－17

3. (1)$\rho=10$ 表示圆心在极点，半径为 10 的圆，如图 1－18(a)；

(2)$\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$表示过极点且与极轴夹角为$\dfrac{\pi}{6}$的直线，如图 1－18(b).

图 1－18

4. (1)极坐标方程为 $\rho\sin\theta=5\sqrt{2}$，如图 1－19(a)；

(2)极坐标方程为 $\rho\cos\theta=5\sqrt{2}$，如图 1－19(b)；

(3)极坐标方程为 $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=\dfrac{1}{2}$，如图 1－19(c)；

(4)极坐标方程为 $\rho=-2\cos\theta$，如图 1－19(d).

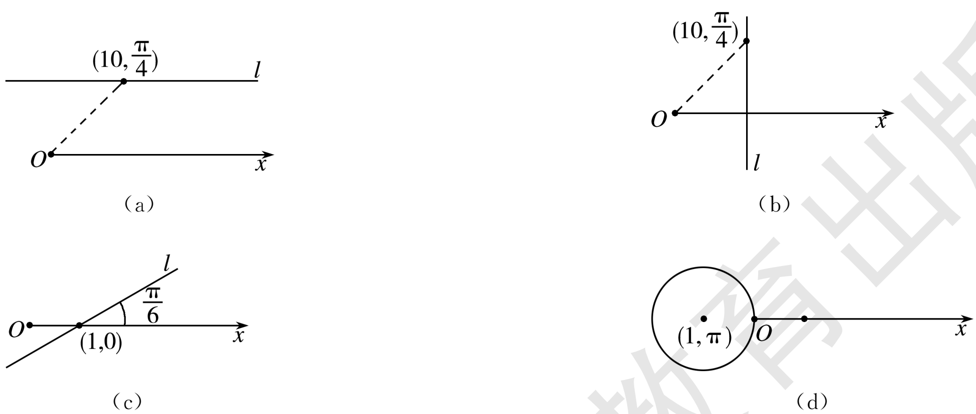


图 1－19

5. (1)$\rho\cos\theta=1$ 表示的曲线如图 1－20(a)；

(2)$\rho=6\cos\theta$ 表示的曲线如图 1－20(b)；

(3)$\rho=10\sin\theta$ 表示的曲线如图 1－20(c)；

(4)$\rho=10(1+\cos\theta)$表示的曲线如图 1－20(d).

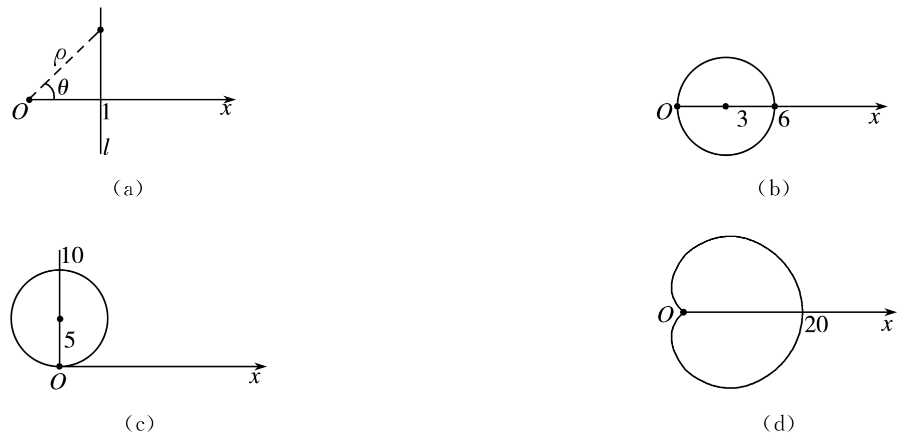


图 1－20

6. $\rho=a\cos\theta$.

7. (1)$\rho=1$；　　(2)$\rho^2\sin 2\theta-2=0$；

(3)$\rho=-2\cos\theta$；　　(4)$\rho^2\cos 2\theta-1=0$.

8. (1)$x^2+x^2y^2-y^2=0$；　　(2)$x=1$；　　(3)$y^2=-6x$；

(4)$2x-3y-3=0$；　　(5)$(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

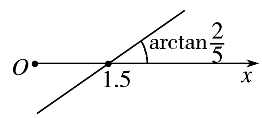


图 1－21

9. 如图 1－21(提示：方程的直角坐标方程为 $2x-3y-3=0$).

10. (1)$\rho=\alpha\theta(\alpha\neq0)$(提示：方程表示的曲线为等速螺线)，如图 1－22(a)；

(2)$\rho=\dfrac{a}{\theta}(\alpha\neq0)$(提示：方程表示的曲线为双曲螺线)，如图 1－22(b).

图 1－22

11. (1)$\rho^2=a\cos 2\theta$；　　(2)$\rho\cos(\theta-a)=p$(p，a 为常数)；

(3)$\rho^2\cos^2\theta-2p\rho\sin\theta-p\varphi=0$.

12. (1)$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-4y^2=0$；　　(2)$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\dfrac{17}{4}$；

(3)$\sqrt{3}x+y-2=0$.

13. 点 M 的直角坐标为$(5\sqrt{3}+2，8)$.

14．(1)$\rho=1$ 表示以 z 轴为轴线，以 1 为底面半径的柱面 Σ；

(2)$z=1$ 表示与 xOy 平面距离为 1 的平面；

(3)$\begin{cases}\rho=1,\\ z=1\end{cases}$表示以空间直角坐标系中的点(0，0，1)为圆心，以 1 为半径的圆.

15．(1)$r=1$ 表示以原点为球心，以 1 为半径的球面，如图 1－23(a).

(2)$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$表示以 z 轴为轴线，顶点为原点，且母线与轴线夹角为$\dfrac{\pi}{6}$的圆锥面，如图 1－23(b).

(3)$\begin{cases}r=1,\\ \varphi=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$表示以空间直角坐标系中的点$\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆心，以$\dfrac{1}{2}$为半径的圆，如图 1－23(c).

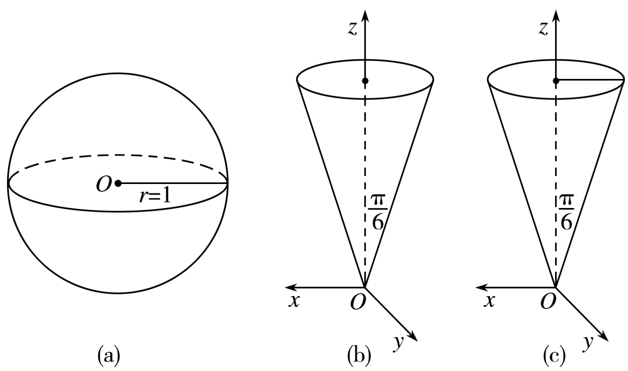


图 1－23

第 2 章　参数方程

一、教学目标

1. 通过分析抛物运动中时间与运动物体位置的关系，写出抛物运动轨迹的参数方程，体会参数的意义.

2. 分析直线、圆和圆锥曲线的几何性质，选择适当的参数并写出它们的参数方程.

3. 举例说明某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便，感受参数方程的优越性.

4. 借助教具或计算机软件，观察圆在直线上滚动时圆上定点的轨迹(平摆线)、直线在圆上滚动时直线上定点的轨迹(渐开线)，了解平摆线和渐开线的生成过程，并能推导出它们的参数方程.

5. 通过阅读材料，了解其他摆线(变幅平摆线、变幅渐开线、外摆线、内摆线、环摆线)的生成过程；了解摆线在实际中应用的实例(例如，最速降线是平摆线，椭圆是特殊的内摆线——卡丹转盘，圆摆线齿轮与渐开线齿轮，收割机、翻土机等机械装置的摆线原理与设计，星形线与公共汽车门)；了解摆线在刻画行星运动轨道中的作用.

二、教材说明

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程，是曲线在同一坐标系下的又一种表示形式. 某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便. 学习参数方程有助于学生进一步体会解决问题中数学方法的灵活多变. 本章内容是在学生建立了曲线和方程的概念，研究了直线、圆、椭圆、双曲线和抛物线的直角坐标方程和它们的几何性质的基础上学习的，参数方程是平面解析几何的主要内容之一，是进一步学习数学的基础，在生产实际中很多实际问题需要用参数方程来解决.

本章主要内容有：抛物运动轨迹的参数方程，直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线、平摆线和渐开线的参数方程等.

抛物运动是生活中常见的一种运动，教材从抛物运动入手，引入参数方程的定义有着重要的现实意义. 抛物运动中以时间 t 作为参数，建立起来的参数方程是学生熟知的形式. 学生易于接受，也便于学生了解参数的作用.

直线的参数方程的建立用到了平面向量中的有关知识，教材给出了两种不同的建立直线的参数方程的方法.

圆锥曲线的参数方程是本章的重点内容．教材分别给出了圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程．教材详细讲解了圆的参数方程中的参数的几何意义，有助于学生了解参数的作用．限于篇幅，未对其他三种圆锥曲线中的参数的几何意义作详细说明．利用圆锥曲线的参数方程，可以制成所谓的“椭圆规”，该工具经常被用来画椭圆．教材例题的引入有助于培养学生的应用意识．

《课标》要求学生能够借助教具或计算机软件，了解平摆线和渐开线的生成过程并能推导其参数方程．本章教材在正文部分使用教具形象地展现了平摆线和渐开线的生成过程，并结合平面几何和三角函数的有关知识推导了这两种曲线的参数方程．从这两种曲线的参数方程，学生不难感受到这些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便，从而感受参数方程的优越性．

为提高学生学习参数方程的兴趣，便于学生记忆本章内容，本章在章头引言中编写了一首诗，用简短的 60 个字“设参数，写方程，算坐标，表图形．时光逝，角度增，点运动，曲线成．方向定，走直线，绕中心，画圆圈．天行健，圆锥线，车轮滚，出摆线．造齿轮，作速降，曲线美，应用宽”就把本章内容全部包括在内．在本章教材的最后安排了习题 2，以供教师在教学中使用．

在本章教材的结尾处，教材连续安排了《阅读与思考·美丽曲线种种》，《数学实验·用计算机和教具绘制展现各种曲线》和《数学文化·数学家卡丹和帕斯卡》等三个专栏，用来体现课标中的相关内容和理念．这些内容不要求学生掌握，但可作为学生开展课外活动或教师在课堂上拓宽学生视野的素材使用．同时，教材还安排了一系列的课程总结报告参考题，以供学生在完成学习总结报告时参考使用．

对照《课标》的要求，本章教材主要具有如下特色：

1．注意培养学生的学习兴趣，体现数学的美．

在章头引言中即编排了一首优美的诗，用简短的 60 个字即表达了本章教材的主要内容，体现了数学的简洁美；在《阅读与思考》介绍了各种与本章内容相关的美丽曲线，例如，长幅平摆线、短幅平摆线、外摆线、内摆线、变幅外摆线、变幅内摆线、卡丹转盘、叶形线、速降线、收割机和翻土机运作中的摆线以及公共汽车门描绘的星形线．兴趣是最好的老师，提供美的东西给学生，让他们对所要学习的内容产生浓厚的兴趣，从而以更积极的心态来学习本章内容．

2．注意渗透数学文化，体现人文精神．

本章除专门在教材结束之处安排了一个《数学文化》专栏，介绍了数学家卡丹和帕斯卡之外，还在教材中的四处地方，以旁注的形式进行数学文化的渗透．例如，教材 P36 介绍了鲍克拉斯提出并解决的一道名题；教材 P38 指出数学史上研究旋轮线的第一人是法国天才数学家帕斯卡；教材 P39 指出意大利科学家伽利略曾建议用平摆线的一拱修筑拱桥的桥洞，我国古建筑赵州桥的桥洞也近似成平摆线形；教材 P52 指出欧拉和拉格朗日由速降线问题

推广研究范围而创造出一门叫作变分法的重要数学分支.

3. 注意信息技术与数学课程的整合.

本章教材在结束之处专门安排了《数学实验·用计算机和教具绘制展现各种曲线》的专栏，详细地展现了用“Z+Z 超级画板”的免费版本绘制各种摆线的操作方法，体现了课标中要求实施信息技术与课程整合的基本理念. 除此之外，教材还在两处以旁注的形式给予实施信息技术与课程整合的建议. 例如，教材 P38 建议用计算机软件来演示旋轮线的生成过程，教材 P40 建议用计算机软件演示渐开线的生成过程.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 9 课时，具体分配如下(仅供参考)：

2.1　从抛物运动谈起	1 课时
2.2　直线的参数方程	1 课时
2.3　圆锥曲线的参数方程	3 课时
2.4　平摆线及其参数方程	1 课时
2.5　渐开线及其参数方程	1 课时
数学实验(选学)	1 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，为未来发展和进一步学习打好基础.

2. 参数方程的教学应该让学生理解使用参数方程解决问题的优越性：(1)用参数方程能明确地揭示质点的运动规律. 质点在平面上运动时，它的位置与时间有关，也就是质点的坐标 x，y 是时间 t 的函数：$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$(2)有时建立两个变量之间的直接联系比较困难，甚至不可能，而利用参数建立两个变量之间的间接联系比较容易. 例如教材 P30 的炮弹飞行轨迹的问题就很有代表性. (3)有时参数方程的形式比普通方程简单，而且所选择的参数的物理意义或几何意义通常比较明确. 例如，本章所涉及的平摆线和渐开线的参数方程等.

3. 参数方程的教学过程中要交待各个参数的几何意义或物理意义，让学生了解参数方程的推导过程，学习选择参数建立参数方程的方法. 在具体的问题中，学生应该能够根据问题的性质和图形的特点选择适当的参数建立参数方程.

4. 对于直线、圆、椭圆、双曲线和抛物线(含抛物运动抛迹)的参数方程的教学，要注意引导学生关注参数方程和普通方程的互化问题，应该做到如下几点：(1)掌握化参数方程为普通方程的方法；(2)能够正确判断参数方程表示什么曲线；(3)能够画出参数方程所表示的曲线的图形.

5. 对于平摆线和圆的渐开线的教学，应借助实物或者信息技术工具展示这两类曲线的生成过程，并引导学生关注运动过程中的不变关系，从而据此建立相应的参数方程，并体会参数方程表示上述曲线的优越性.

五、评价建议

1. 数学学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评、互评. 总之，应将评价贯穿数学学习的全过程，既要发挥评价的甄别与选拔功能，更要突出评价的激励与发展功能.

数学教学的评价应有利于营造良好的育人环境，有利于数学教与学活动过程的调控，有利于学生和教师的共同成长.

2. 美国心理学家加德纳(H. Gardner)在 80 年代初期提出的多元智能理论对学习的评价产生了很大的影响. 目前普遍认为人的智力是由语言智能、逻辑数学智能、空间智能、身体动觉智能、音乐智能、人际智能、内省智能、自然观察者智能等八种智能构成的. 多元智能理论成为评价内容多元化的思考依据，它提醒人们注意学生的个体差异和发展的不均衡性，同时强调每一个学生的独特价值，主张尽可能建构有助于促进个体价值实现的个体化评价指标；它还从新的角度提供了设计学生评价方法的新思路，如教学中开放题的设计思路等，为建立促进学生全面发展的评价体系提供了依据.

基于上述理论，教师在评价过程中就不能只考虑学生最终的测验成绩，而应综合考察学生在整个学习过程中的表现及终结性评价的结果. 建议期末总成绩应由测验成绩、开放式作业成绩以及学生平时表现的成绩组成，三者各占一定的比例. 例如，期末总成绩＝测验成绩(80％)＋开放式作业成绩(15％)＋平时表现成绩(5％). 当然，上述各分项成绩的组成及百分比可根据具体情况灵活设定.

2.1　从抛物运动谈起

教材线索

本节先从研究炮弹飞行轨迹问题入手，导出了炮弹飞行曲线的参数方程 $\begin{cases} x=|\overrightarrow{v_0}|\cos\theta\cdot t, \\ y=|\overrightarrow{v_0}|\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$ 然后教材给出了参数方程的一般定义，并指出参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式. 最后应用上述参数方程解决了一个飞机投炸弹的问题.

教学目标

(一)知识与技能

1. 掌握抛物运动轨迹的参数方程的写法.

2. 了解抛物运动中的参数的意义.

(二)过程与方法

分析抛物运动中时间与运动物体位置的关系，能写出抛物运动轨迹的参数方程.

(三)情感、态度与价值观

通过抛物运动的例子，感受参数方程的优越性.

教材分析

1. 重点：

炮弹飞行轨迹的参数方程的推导.

2. 难点：

建立曲线的参数方程的方法.

3. 教材开门见山的提出问题：“炮管与地面夹角为 θ，一发炮弹以初速度 $\overrightarrow{v_0}$ 射出，不计空气阻力，试写出平面直角坐标系中炮弹飞行轨迹的方程.”要解决上述问题，首先要对炮弹运动的规律进行分析. 根据物理学规律可知，炮弹的运动是一个斜抛运动，它由水平方向的匀速直线运动和竖直方向的上抛运动合成. 由于初速度向量 $\overrightarrow{v_0}$ 可以分解成水平分量 v_x^0 与竖直分量 v_y^0，且满足：$v_x^0=$

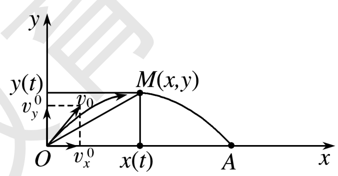
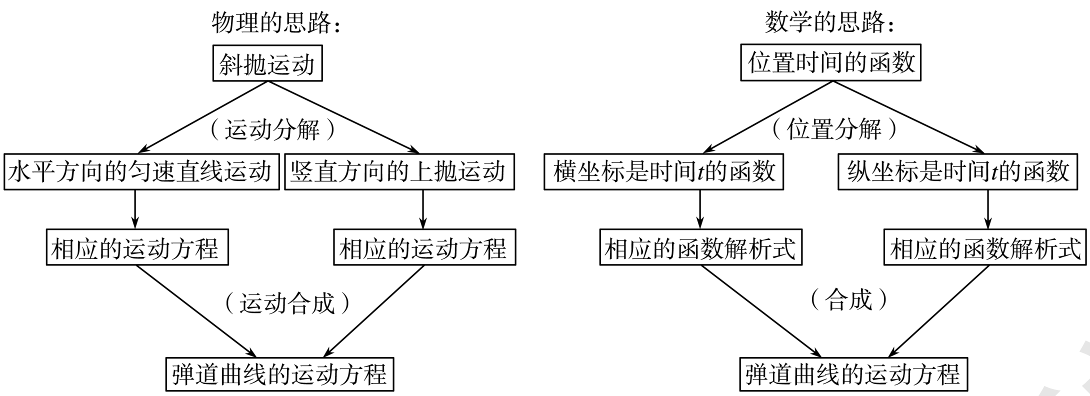


图 2－1

$|\overrightarrow{v_0}|\cos\theta$，$v_y^0=|\overrightarrow{v_0}|\sin\theta$，这样就得到炮弹在两个方向运动的初速度（如图 2－1）．再对炮弹作受力分析知道，炮弹在水平方向没有受力（因为不计空气阻力），由于惯性的作用继续作匀速直线运动，而它在竖直方向受到竖直向下的重力的作用，与运动方向相反．根据上述分析，立即可以求得炮弹在水平方向飞行的距离 $x(t)$和它在竖直方向达到的高度 $y(t)$满足如下关系式：$\begin{cases}x(t)=|\overrightarrow{v_0}|\cos\theta\cdot t,\\ y(t)=|\overrightarrow{v_0}|\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}$（$t$ 为参数）．由于两个运动同时进行，所以时间 t 相同．

由上述方程给定的曲线，非常清晰地表明了曲线所包含的物理意义．其中时间参数 t 的范围是：从炮弹发出 $t=0$ 时刻到炮弹落地 $t=T$ 时刻中间的任意值．其中落地时刻 T 可以通过求解方程$|\overrightarrow{v_0}|t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2=0$ 得到 $T=\dfrac{2|\overrightarrow{v_0}|}{g}\sin\theta$．

由以上分析可以看出，炮弹飞行轨迹的参数方程的推导可以从物理和数学两个方面的思路加以解决．其中物理的思路来源于运动的合成与分解，对物理的思路做出数学的解释，于是产生了曲线的参数方程的概念，同时也得到了求曲线的参数方程的方法．



4．教材在分析了抛物运动的轨迹方程后给出了参数方程及参数的定义：一般地，在取定的平面直角坐标系 xOy 中，如果一条曲线 L 上任意一点的坐标$(x,\ y)$的每个分量都是某个变量 t 的函数，即$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$而且对于 t 的每个允许值，由上述方程组所确定的点$(x,\ y)$在 L 上，则称它是曲线 L 的参数方程．联系 x 和 y 之间关系的中间变量 t 称为参数方程的参变量，简称参数．

在此，教材指出上述参数方程中的参数可以取为某种物理量（例如时间），也可以取为某种几何量（例如角度），还可以取没有什么明显含义的参数．事实上，在本章中所涉及的参数方程中的参数，绝大多数都有着明显的几何意义或物理意义．在接下来的章节里，有些参数方程中的参数的意义给予了明确的说明，有些则没有说明．无论哪一种情况，都有必要让学生了解这些参数的意义，以便在解题时加以灵活运用．

5. 教材指出，参数方程与普通方程是曲线方程的不同形式，许多曲线，既可以写出它的普通方程，也可以建立它的参数方程，两种方程可以互化. 例如，本节给定的抛物运动的参数方程$\begin{cases} x(t)=|\overrightarrow{v_0}|\cos\theta\cdot t, \\ y(t)=|\overrightarrow{v_0}|\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2, \end{cases}$就可以化为普通方程 $y=-\frac{g}{2|\overrightarrow{v_0}|^2\cos^2\theta}x^2+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$.

但是有的曲线可以建立它的参数方程，而不能或很难写出它的普通方程. 例如本章第四节、第五节将要讨论的平摆线和渐开线的参数方程就很难转化成普通方程.

教学建议

1. 炮弹飞行轨迹的参数方程的获得是建立在对运动规律的分析的基础之上的，因此在教学中要紧扣其物理意义，从而建立起函数关系式. 在建立起参数方程之后，要分析参数方程中参数 t 的取值范围.

2. 对于常见的参数方程，必须让学生了解其参数的几何意义(或物理意义). 事实上，可以借助信息技术工具(例如 Z+Z 超级画板、几何画板等)清晰地展示其几何意义(特别是本章所涉及的直线、圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程中的参数的几何意义).

3. 教学中应注意将参数方程化为普通方程的几种方法. 在将参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程时，常采用如下方法进行转化：

(1)代入消参法. 把参数方程中的一个函数关系式 $x=\varphi(t)$(或 $y=\psi(t)$)化为 $t=\varphi^{-1}(x)$(或 $t=\psi^{-1}(y)$)，然后把它代入另一个函数关系式 $y=\psi(t)$(或 $x=\varphi(t)$)中，就能消去参数 t. 例如教材中的炮弹飞行轨迹的参数方程就是通过代入消参法化为普通方程的.

(2)分步消参法. 参数方程经过几次处理后，变成参数的一次函数，然后再用代入消参法. 例如把参数方程$\begin{cases} x=a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=at\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程时可将两式相除，得$\frac{y}{x}=t$，再代入 $x=a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$，得到它的普通方程为 $y^2=x^2\cdot\frac{a-x}{a+x}(x\neq -a)$.

(3)比较消参法. 把参数方程中的两个函数关系，各化成同一个参数函数式，比较后消去参数，化为普通方程. 例如：把参数方程$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t-5 \end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程时，可在两个式子中分别解出 t，得 $t=2(x-1)$和 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}(y+5)$，从而得到 $2(x-1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}(y+5)$，即 $y=\sqrt{3}(x-1)-5$.

(4)综合消参法．综合运用有关代数知识和三角知识，把参数方程中的参数 t 消去．

例题解析

例 一架轰炸机在距地面 H 的高空匀速水平飞行，飞行速度为 v_0，试建立从此飞机上投下的炸弹的运动方程，且从中计算出炸弹落地的时间和落点．(解答见教材 P32)

分析：如图 2－2，飞机在水平方向的速度是 v_0，则投下的炸弹的水平速度也是 v_0，即炸弹以 v_0 的速度沿水平方向做匀速直线运动，同时它又做自由落体运动(也就是它沿着竖直向下的方向做匀加速直线运动，加速度为 g)，因此，在建立坐标系时，本着最简便的原则，可以取投弹时飞机所在的点为坐标原点 O，以飞机飞行的方向为 x 轴的正方向，以竖直向下的方向为 y 轴的正方向建立坐标系 xOy(这不同于学生常见的坐标系中 x 轴的正向为水平向右，而 y 轴的正向为竖直向上)．这样建立的坐标系将使得本题中的曲线方程具有最简单的形式．由此可进一步说明建立适当的坐标系的重要性．

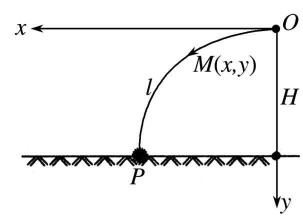


图 2－2

利用时间作为参数，教材建立了炸弹运动的参数方程 $\begin{cases} x(t)=v_0t, \\ y(t)=\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$ 这实际上是炸弹在不同方向(水平向左和竖直向下)的运动过程中，时间与位移之间的关系，也就是分别列出炸弹在水平方向的位移与时间的关系式 $x(t)=v_0t$，以及炸弹在竖直方向的位移与时间的关系式 $y(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，由于两种运动同时进行，时间 t 相同，因此将它们并在一起组成一个方程组，即得到参数为 t 的抛物运动方程．这种方法可以运用在其他类似的情境中．

由于飞机与地面的高度 H 已经给定，相当于炸弹在竖直向下的方向上运动的位移已经确定，从而就可以根据关系式 $H=\dfrac{1}{2}gt^2$，求出炸弹落地的时间 $t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$，从而代入 $x(t)=v_0t$ 得到炸弹在水平方向运动的位移 $x=v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$，即炸弹的落点为 $\left(v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}},\ H\right)$．

在参数方程 $\begin{cases} x(t)=v_0t, \\ y(t)=\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ 中，消去参数 t，即可得到炸弹在 $t\in\left[0,\ \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\right]$ 的任意时刻内，水平方向的位移 x 与竖直方向的位移 y 之间的关系式为 $y=\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$，其中 $x\in\left[0,\ v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}\right]$．

此题在最后实际上给出了化参数方程为普通方程的一种方法，即直接用代入法消去参数 t，从而将参数方程化为普通方程．

相关链接

漫谈参数

不少学生对参数概念比较模糊. 事实上，参数的应用很广，例如，直线和曲线有“参数方程”；在解某些极值问题或轨迹问题时，往往要首先设好“参数”. 什么是参数？我们可以这样理解：在讨论某些几何(或其他对象)元素的集合中，这些元素都和一些数联系在一起，当确定这些数时，就确定了某个具体元素，我们称这些数是这个集合元素的“参数”.

和参数联系在一起的还有一个概念，叫作“自由度”. 例如，我们把全体实数作为研究对象时，则一次只要选定一个数，这个实数就具体地被确定了，因此，我们称实数有一个自由度，或者说，实数有∞个. 平面上点的坐标是由两个有序实数组成的，要确定一点，必须两次选定具体实数，而且两次的选法是独立的. 平面上点的个数就好像在无限多个实数中任取两个实数的排列，且两个实数可重复，看起来要比实数“多”些，但是它们都是无穷多. 如何比较多少呢？我们就用自由度这个概念来区分. 我们说，平面上的点有两个自由度，或者∞^2个. 一个集合的元素有多少自由度，我们就说它与几个参数有关，或含有几个参数. 因此，下面的几句话代表同一个意思：(1)有 n 个自由度；(2)有∞^n 个；(3)与 n 个参数有关.

从平面直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 可知，要确定一条具体的直线，只要确定 A，B，C 的值. 所以平面上以直线为元素的集合，其元素与两个参数有关，或者说，平面上有∞^2 条直线，可以看作它和平面上的点一样多.

如果一个集合中的元素与 n 个参数有关，则对于这 n 个参数如再加限制，使它们满足 $m(m\leqslant n)$个等式条件，则原集合中受到这个限制的那些元素只与$(n-m)$个参数有关了. 例如，平面上的点与两个参数 x，y 有关，如果 x，y 适合 $f(x，y)=0$，则被限制在一曲线上，所以曲线上的点一般与一个参数有关.

通过一个定点$(x_0，y_0)$的直线全体，可以用点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$表示，其中 k 为参数，所以与一个参数有关，它们全体称为一个直线束. 以坐标原点为中心，以坐标轴为对称轴的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的全体与两个参数有关，平面上所有圆 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 的全体与三个参数 A，B，C 有关. 平面上所有二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的全体与 a，b，c，d，e，f 六个参数有关.

因为 n 个参数如果满足一个等式条件，则只有$(n-1)$个独立参数. 因此，要想在一个与 n 个参数有关的元素集合中确定某些具体元素(即不含参数的具体元素)，就要有 n 个独立条件，列出这 n 个参数所满足的 n 个方程，才能解决.

2.2　直线的参数方程

教材线索

本节开门见山地提出问题：过 xOy 平面上定点 $M_0(x_0, y_0)$，与 x 轴正向夹角为 θ 的直线如何用参数方程来表达？紧接着用向量的方法分别得出从 M_0 向右行和向左行的射线的参数方程，然后统一成直线的标准参数方程 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta, \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in[0, \pi)$，$t\in(-\infty, +\infty)$，t 为参数)，并将上式转化成直线的点斜式方程 $y-y_0=\tan\theta(x-x_0)$. 最后，教材指出直线的参数方程的建立途径不是唯一的，并利用向量平行的条件给出了直线的另一种参数方程，即 $\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \end{cases}$ $t\in(-\infty, +\infty)$.

教学目标

(一)知识与技能

1. 掌握直线的参数方程的写法.

2. 理解直线的参数方程中参数的几何意义.

(二)过程与方法

借助建立直线的参数方程的不同途径，研究直线的参数方程.

(三)情感、态度与价值观

通过直线的参数方程的例子，感受参数方程在解决某些问题时的优越性.

教材分析

1. 重点：

直线的参数方程.

2. 难点：

建立直线参数方程的方法.

3. 要理解直线的参数方程 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta, \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in[0, \pi)$，$t\in(-\infty, +\infty)$，t 为参数)，首先要掌握以下两个方面的知识：

第一，平行于坐标轴的有向线段的数量.

设$\overrightarrow{AB}$是平行于 x 轴的有向线段，端点坐标为 $A(x_1, y)$，$B(x_2, y)$，那么其数量 $AB=x_2-x_1$；设$\overrightarrow{CD}$是平行于 y 轴的有向线段，端点坐标为 $C(x, y_1)$，$D(x, y_2)$，那么其数量 $CD=y_2-y_1$.

第二，有向线段$\overrightarrow{M_0M}$在 x 轴上的射影$\overrightarrow{M'_0M'}$的数量.

设直线 M_0M 的倾斜角为θ，那么 $M'_0M'=M_0M\cdot\cos\theta$. 这里 M_0M，M'_0M'分别表示有向线段$\overrightarrow{M_0M}$和$\overrightarrow{M'_0M'}$的数量.

如果有向线段$\overrightarrow{M_0M}$在 y 轴上的射影是$\overrightarrow{M''_0M''}$，那么$M''_0M''=M_0M\cdot\sin\theta$.（如图 2－3）.

直线 l 可以看成是一个动点 M 从 M_0 出发，沿倾斜角为 θ 的方向，向右或向左运动而形成的（设向右的方向为正，向左的方向为负），因此动点 M 的轨迹完全可以通过有向线段$\overrightarrow{M_0M}$的数量来刻画，因此可以选择$\overrightarrow{M_0M}$的数量：$M_0M=t$ 为参数.

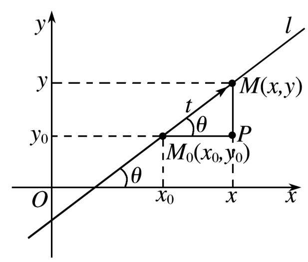


图 2－3

则由前面的分析可知有如下关系式：

$$\begin{cases}M_0P=M_0M\cdot\cos\theta=t\cdot\cos\theta,\\ PM=M_0M\cdot\sin\theta=t\cdot\sin\theta,\end{cases}$$

又因为 $M_0P=x-x_0$，$PM=y-y_0$，

所以有$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta.\end{cases}$（$\theta\in[0, \pi)$，$t\in(-\infty, +\infty)$，$t$ 为参数）

我们可以用映射的思想来理解直线的参数方程：该方程可以理解为一个对应法则，借助它，在集合 $A=\{(x, y)\mid(x, y)\in l\}$（直线 l 上的所有的点组成的集合）和 $B=\{t\mid t\in\mathbf{R}\}$（参数 t 的取值集合）之间构成一一映射的关系. 就是说，直线 l 上的任何一个点都对应着唯一的一个实数 t，不同的点对应不同的实数；反之，任何一个实数都对应着直线 l 上唯一的一个点，不同的实数对应着不同的点.

教学建议

1. 在教学中要注意到直线的标准参数方程$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数）中，参数 t 有着明显的几何意义：它表示从点 M_0 到点 M 的有向线段$\overrightarrow{M_0M}$的数量，习惯上规定从点 M_0 到点 M 方向向上时为正（也就是当点 M 位于从 M_0 向右行的射线上时为正），反之则为负. 如图 2－4(a)中，$t=|\overrightarrow{M_0M}|$，图 2－4(b)中，$t=-|\overrightarrow{M_0M}|$.

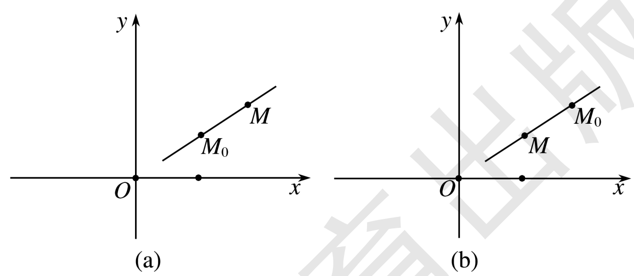


图 2－4

显然，在直线的标准参数方程中，有 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，所以在应用上述几何意义时，必须确保参数 t 的系数要满足上述关系.

如果给定直线的参数方程不是标准参数方程，但又希望使用上述几何意义，则需要先将非标准参数方程化成标准参数方程的形式. 例如，给定直线的非标准参数方程$\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+bt\end{cases}$（$t$ 为参数），则可以设 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，从而就可以将上述方程化为$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数）的标准形式.

2. 直线的标准参数方程应用广泛，其应用通常涉及如下方面：(1)求线段的长；(2)求与中点、三等分点……n 等分点有关的问题；(3)求轨迹的方程等. 由于篇幅所限，教材在本节未安排例题，教学中可适当补充有关例题，例如：

例 过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，作倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线，交抛物线于 A，B 两点，求弦 AB 的长.

解 抛物线的焦点 F 的坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，弦 AB 所在的直线方程可写为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+t\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=0+t\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}\ (t\text{ 为参数})$$

将上述直线的标准参数方程代入抛物线方程 $y^2=2x$，得

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，化简得 $t^2-2\sqrt{2}t-2=0$.

由于直线与抛物线有两个交点 A，B，所以上述方程有两实根 t_1 和 t_2. 由 t 的几何意义可知，t_1 和 t_2 即表示向量$\overrightarrow{FA}$和$\overrightarrow{FB}$的数量(不妨设 $t_1=|\overrightarrow{FA}|=FA>0$，$t_2=|\overrightarrow{FB}|=-FB<0$，如图 2－5)，因此有如下关系：

$$|AB|=|FA+FB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2},$$

又由一元二次方程根与系数的关系可知：

$$t_1+t_2=2\sqrt{2},\ t_1t_2=-2,$$

所以 $|AB|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4(-2)}=4$，即弦 AB 的长为 4.

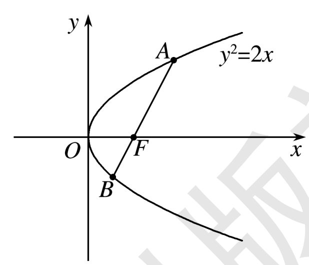


图 2－5

3. 在应用直线的标准参数方程解决有关问题时，经常涉及以下知识，教学中可借助有关例题或习题加以巩固.

(1)当出现关于 t 的一元二次方程 $at^2+bt+c=0$ 后，由一元二次方程根与系数的关系，设 t_1 和 t_2 为方程的两根，则有如下关系式：

$$t_1+t_2=-\frac{b}{a},\ t_1t_2=\frac{c}{a}.$$

(2)若参数方程所表示的直线与另一二次曲线相交得一弦 P_1P_2，则弦的中点所对应的

参数 $t=\frac{t_1+t_2}{2}$；若 $M_0(x_0, y_0)$恰为弦的中点，则 $t_1+t_2=0$；若 $M_0(x_0, y_0)$为弦的三等分点、四等分点……n 等分点，则分别有 $t_2=-2t_1$，$t_2=-3t_1$，…，$t_2=-(n-1)t_1$. 若需要求弦长 l，则有 $l=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$.

相关链接

直线的比值参数方程

若 $P_1(x,\ y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$为两个不同的定点，动点 $P(x, y)$分 P_1P_2 为两线段 P_1P 和 PP_2，设$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则$\begin{cases}x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$（$\lambda$ 为参数），称上述参数方程为比值参数方程(此即解析几何中的定比分点坐标公式，但是从参数方程的角度来看，它确实是直线的一种参数方程).

比值参数方程的作用是：过已知两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的直线上的任何一点，均可用坐标$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$表示. 因此，它在解决下面几方面的问题上，能简化计算：第一，研究有关中点问题时，只需求证 $\lambda=1$；第二，当分点的横坐标和纵坐标有一个为零时，例如横坐标为零，即 $x_1+\lambda x_2=0$，得 $\lambda=-\frac{x_1}{x_2}$，从而代入 $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，可求得纵坐标之值；第三，有关三角形的平行线问题；第四，有关三直线交于一点的问题；等等.

2.3 圆锥曲线的参数方程

教材线索

本节依次推导出了圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程，从推导圆的参数方程 $\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta,\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$\theta\in[0,\ 2\pi)$）的过程可以看出，θ 的几何意义为：连接圆上一点与圆心的直线和 x 轴正半轴的夹角. 椭圆、双曲线和抛物线的参数方程中的参数也都有相应的几何意义. 在椭圆的参数方程部分，教材以例题的形式给出了一个由希腊数学家鲍克拉斯提出并解决的数学史上的名题，并依此例题的原理，给出制作画椭圆的“椭圆规”的方法.

教学目标

(一)知识与技能

1. 掌握圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程的写法.

2. 理解圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程中参数的几何意义.

3. 能运用圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程解决有关问题.

(二)过程与方法

借助圆、椭圆、双曲线和抛物线的几何性质，研究它们的参数方程.

(三)情感、态度与价值观

1. 通过圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程的例子，感受参数方程在解决某些问题时的优越性.

2. 通过历史名题感受数学的文化价值和应用价值.

教材分析

1. 重点：

圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程的推导.

2. 难点：

应用圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程解决有关问题.

3. 以 $M_0(x_0,\ y_0)$为中心，以 r 为半径的圆，可以看作是一个质点绕点 $M_0(x_0,\ y_0)$做等速圆周运动的轨迹，如图 2－6. 设质点运动的角速度为 ω，从圆周与 L_1 的正向的交点 A 的位置开始按逆时针方向运动，经过时间 t 后，质点到达圆周上点 $M(x,\ y)$的位置，此时

所转过的角度为 $\theta=\omega t$，取此角度 θ 作为参数，即可得到圆的参数方程 $\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta,\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$\theta\in[0,\ 2\pi)$）．教材在得到圆的参数方程之后，进一步将它化为普通方程，证实了上述方程确实是圆的普通方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 的参数方程表达形式．

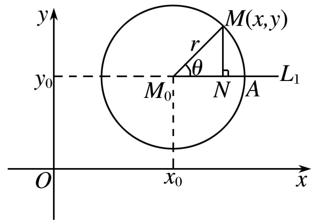


图 2－6

4．椭圆的参数方程 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数，$\varphi\in[0,\ 2\pi)$），φ 的几何意义如下：

如图 2－7，分别以 a，$b(a>b)$ 为半径，以原点为圆心作两个同心圆．设 A 为大圆上任意一点，点 B 是大圆半径 OA 与小圆的交点，过 A 作 $AN\perp Ox$，垂足为 N，过点 B 作 $BM\perp AN$，垂足为 M．则点 M 的轨迹方程为椭圆 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi,\end{cases}$ $\varphi\in[0,\ 2\pi)$，其中 $\varphi=\angle xOA$．

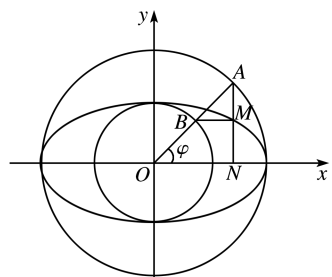


图 2－7

这是因为：设点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，$\varphi=\angle xOA$，因为点 A 的横坐标也是 x，由于 A 是角 φ 终边上的一个点，该点到原点的距离为 a，根据任意角三角函数的定义，有 $\cos\varphi=\dfrac{x}{a}$，故 $x=a\cos\varphi$．点 B 的纵坐标是 y，由于 B 是角 φ 终边上的一点，该点到原点的距离为 b，根据三角函数的定义，有 $\sin\varphi=\dfrac{y}{b}$，故 $y=b\sin\varphi$，上述角 φ 称为椭圆的离心角，以 a，$b(a>b)$ 为半径，以原点为圆心的两个同心圆分别称为椭圆的大辅助圆和小辅助圆，其直径分别是椭圆的长轴和短轴．

5．教材中给出了双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程 $\begin{cases}x=a\sec\varphi,\\ y=b\tan\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数，$\varphi\in[0,\ 2\pi)$），其中参数 φ 的几何意义补充如下：

如图 2－8，不妨设 $a>b>0$．分别以原点为圆心，a，b 的长为半径作同心圆，半径为 b 的圆与 x 轴相交于点 C．过点 O 作射线 OA 与两圆分别相交于点 B 和点 A，记 $\angle xOA=\varphi$．过点 A 作 $AD\perp OA$，交 x 轴于点 D．过点 C 作 $CE\perp x$ 轴，与射线 OA 相交于点 E．过点 E 作 $EM\parallel x$ 轴，过点 D 作 $DM\perp x$ 轴，两直线相交于点 M，则点 M 的坐标为 $(x,\ y)=\left(\dfrac{a}{\cos\varphi},\ b\tan\varphi\right)$，即点 M 为双曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\varphi},\\ y=b\tan\varphi\end{cases}$ $\varphi\in[0,\ 2\pi)$ 的轨迹上任意的一点．其中参数 φ 的意义如上所述，注意 $\varphi\neq\angle xOM$．

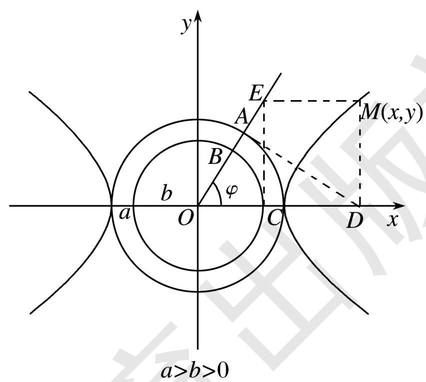


图 2－8

6. 对于抛物线的标准方程 $y^2=2px$，教材给出了它的一种参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2p}t^2,\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数），其中参数 t 的几何意义为曲线上任意一点的纵坐标.

较常用的抛物线的参数方程还有如下两种：

（1）令 $y=2pt$，则 $x=2pt^2$，所以 $\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt\end{cases}$（$t$ 为参数）是抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程. 其中参数 t 的几何意义为：过原点 $(0,0)$ 与抛物线上任意一点 $M(x,y)$ 的直线的斜率的倒数（如图 2－9），即 $k_{OM}=\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2pt}{2pt^2}=\dfrac{1}{t}$，也就是 $t=\dfrac{1}{k_{OM}}$.

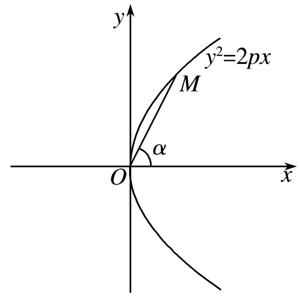


图 2－9

（2）设 $P(x,y)$ 是抛物线上的任意一点，F 是抛物线焦点，连接 FP，过 P 作 $PM\perp x$ 轴于点 M，令 $\angle PFM=\varphi$（如图 2－10）. 因为 P 在抛物线上，所以点 P 与焦点 F 之间的距离等于它到准线 l 的距离，即 $FP=QP=x+\dfrac{p}{2}$. 又因为 $FM=x-\dfrac{p}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle FMP$ 中，$\cos\varphi=\dfrac{FM}{FP}=\dfrac{x-\dfrac{p}{2}}{x+\dfrac{p}{2}}$，即 $x\cos\varphi+\dfrac{p}{2}\cos\varphi=x-\dfrac{p}{2}$，

所以 $x=\dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}=\dfrac{p}{2}\cot^2\dfrac{\varphi}{2}$.

又 $\sin\varphi=\dfrac{MP}{FP}=\dfrac{y}{x+\dfrac{p}{2}}$，故有

$$\begin{aligned}y&=\left(x+\frac{p}{2}\right)\sin\varphi=\left(\frac{p}{2}\cot^2\frac{\varphi}{2}+\frac{p}{2}\right)\sin\varphi\\&=\frac{p}{2}\left(1+\cot^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi\\&=\frac{p}{2}\csc^2\frac{\varphi}{2}\cdot2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\&=p\cot\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

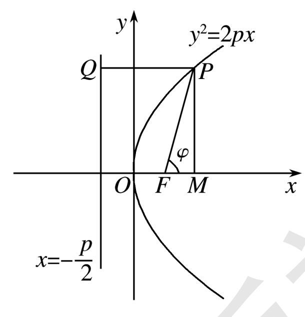


图 2－10

所以，抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程又可以写为 $\begin{cases}x=\dfrac{p}{2}\cot^2\dfrac{\varphi}{2},\\ y=p\cot\dfrac{\varphi}{2}\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），其中 φ 表示过焦点 F 与抛物线上任意一点 P 的直线的倾斜角. 容易验证，只要令 $t=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\varphi}{2}$，上述参数方程立即可化为参数方程 $\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt\end{cases}$（$t$ 为参数）.

教学建议

1. 椭圆参数方程中的参数，即离心角 $\varphi=\angle xOA$ 不同于椭圆上的点 M 与中心 O 的连线的倾斜角 $\angle xOM$，如图 2－7，在教学中要提醒学生注意，以免选错角度.

2. 教学中要注意所得到的曲线的参数方程与普通方程是否等价. 例如，若曲线的普通方程为 $y=x^3$，则可取 $\begin{cases}x=t,\\y=t^3\end{cases}$ 为其参数方程，如果取 $\begin{cases}x=t^2,\\y=t^6\end{cases}$ 作为其参数方程，就相当于限定了 $x\geqslant0$，这显然缩小了原来方程的定义域，从而导致参数方程与普通方程不等价.

3. 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程的教学过程中，除了介绍教材中的参数方程之外，还可以适当补充另外两种形式的参数方程：$\begin{cases}x=2pt^2,\\y=2pt\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=\dfrac{p}{2}\cot^2\dfrac{\varphi}{2},\\y=p\cot\dfrac{\varphi}{2}.\end{cases}$ 并注意结合图形介绍相应的参数方程中参数的几何意义，从而根据不同的条件使用不同的参数方程. 对于以其他形式给定的抛物线方程(例如 $x^2=2py$)，也要能够写出相应的参数方程.

4. 圆、椭圆、双曲线和抛物线的参数方程中的参数都有着明显的几何意义，教学中可以适当运用信息技术工具(例如 Z＋Z 超级画板、几何画板等)，展示这些参数的几何意义.

例题解析

例 一条动直线上取定三个点 A，B，C，其中 A，B 两点分别在一个直角的两边上滑动. 求 C 点的轨迹.(解答见教材 P36)

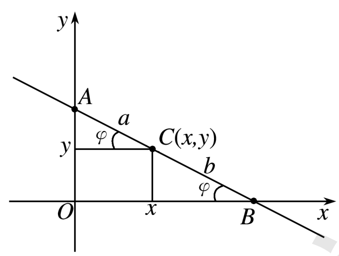


图 2－11

分析 教材画出了点 C 位于线段 AB 以内的示意图(如图 2－11)，并给出了证明. 注意到在教材中所展示的“椭圆规”中，点 M 位于线段 AB 以外(仍在同一条直线上)，下面证明此时点 M 的轨迹仍为椭圆.

如图 2－12 所示，在一条直线上取定三个点 A，B，M，其中 M 位于线段 AB 之外，不妨设它在靠近 B 的一端. 由于取定点 A，B，M 之后，这三个点之间的位置关系就始终保持不变，因此，把直角的两边分别视为 x 轴正半轴和 y 轴负半轴，直线上的两点 B 与 A 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，设 $AM=a$，$BM=b$，从点 M 向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为 C 和 D. 设点 M 的坐标为 $(x，y)$，$\angle CBM=\theta$，则

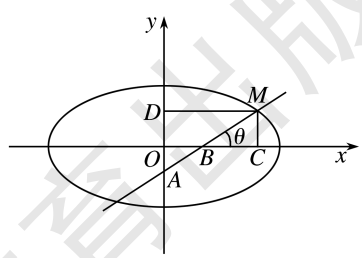


图 2－12

$$\begin{aligned}x&=OB+BC=AB\cdot\cos\theta+BM\cdot\cos\theta\\&=(a-b)\cos\theta+b\cos\theta=a\cos\theta,\end{aligned}$$

$$y=BM\cdot\sin\theta=b\sin\theta,$$

从而有$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta\end{cases}$$\theta\in[0，2\pi)$，因此点 M 的轨迹是以 a 和 b 为半轴的一个椭圆.

相关链接

化曲线的普通方程为参数方程的几种类型

化曲线的普通方程为参数方程，实际上就是如下数学问题：

已知 $F(x，y)=0$，求$\begin{cases}x=f(t),\\ y=\varphi(t).\end{cases}$

类型 1　已知 $F(x，y)=0$ 和 $x=f(t)$，t 为参数. 求$\begin{cases}x=f(t),\\ y=\varphi(t).\end{cases}$

解题思路：由$\begin{cases}F(x，y)=0,\\ x=f(t)\end{cases}$消去 x，得到 $y=\varphi(t)$.

类型 2　已知 $F(x，y)=0$ 和 $H(x，y，t)=0$，t 为参数. 求$\begin{cases}x=f(t),\\ y=\varphi(t).\end{cases}$

解题思路：由$\begin{cases}F(x，y)=0,\\ H(x，y，t)=0\end{cases}$分别消去 y，得到 $x=f(t)$，消去 x，得到 $y=\varphi(t)$.

以上两种题型都对参数 t 作了限制，因而解题方向明确.

类型 3　已知 $F(x，y)=0$. 求$\begin{cases}x=f(t),\\ y=\varphi(t).\end{cases}$ t 为参数，可以任意选定.

这类题型中，由于选择参数的任意性，所以解题方向多样化，结果也不唯一. 但应掌握以下几个主要而常见的方法.

方法 1　如果方程 $F(x，y)=0$ 可以化为$\dfrac{f(x)}{a}=\dfrac{\varphi(y)}{b}$的形式，则可以设比值 t 为参数.

方法 2　如果方程 $F(x，y)=0$ 可以化为$[f(x，a)]^2+[\varphi(y，b)]^2=1$ 的形式，则可以作三角代换：$\begin{cases}f(x，a)=\cos\theta,\\ \varphi(y，b)=\sin\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

方法 3　如果方程 $F(x，y)=0$ 可以化为$[f(x，a)]^2-[\varphi(y，b)]^2=1$ 的形式，则可以用三角代换：$\begin{cases}f(x，a)=\sec\theta,\\ \varphi(y，b)=\tan\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

例如：

(1)圆的方程$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 可以化为$\left(\dfrac{x-x_0}{r}\right)^2+\left(\dfrac{y-y_0}{r}\right)^2=1$ 的形式，作三角代换$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{r}=\cos\theta,\\ \dfrac{y-y_0}{r}=\sin\theta,\end{cases}$得到参数方程为$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta,\\ y=y_0+r\sin\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

(2)椭圆方程 $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$，作三角代换 $\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=\cos\theta,\\ \frac{y-y_0}{b}=\sin\theta,\end{cases}$ 得到参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+a\cos\theta,\\ y=y_0+b\sin\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

(3)双曲线方程 $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$，作三角代换 $\begin{cases}\frac{x-x_0}{a}=\sec\theta,\\ \frac{y-y_0}{b}=\tan\theta,\end{cases}$ 得到参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+a\sec\theta,\\ y=y_0+b\tan\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

2.4 平摆线及其参数方程

教材线索

本节开门见山地给出平摆线的定义：一个圆沿此圆所在的平面内一直线滚动，圆周上某个点 M 运动的轨迹称为平摆线，也称为旋轮线. 并指出平摆线的普通方程很难求得，因此可以考虑求其参数方程. 利用三角函数知识和平面几何知识进行推导，得到平摆线的参数方程为 $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $\theta\in(-\infty, +\infty)$. 最后研究了平摆线的几何性质.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解平摆线的生成过程，并能推导出它的参数方程.

2. 了解平摆线的简单的几何性质.

3. 了解推导平摆线的参数方程的方法.

(二)过程与方法

借助实物模型或计算机软件，研究平摆线的有关性质.

(三)情感、态度与价值观

1. 通过数学史知识，感受数学的文化价值.

2. 通过平摆线图形生成过程的展示，感受数学的美.

教材分析

1. 重点：

(1)平摆线的参数方程的推导.

(2)平摆线的简单的几何性质.

2. 难点：

平摆线的参数方程的推导.

3. 平摆线在我们的生活中不难观察到. 例如，有时候当一个人骑着自行车从你面前经过时，你会发现自行车的某个车轮上粘着一件东西(例如一块彩色的口香糖). 当车轮继续向前时，这样东西就会在空中画出一条漂亮的弧线，这条弧线就是平摆线. 车轮每旋转一周就

相当于画出平摆线的一拱.

4. 对于平摆线的参数方程的建立，教材结合三角函数的知识，用平面几何的方法进行了推导. 根据教材的推导过程，我们可以发现：动点 M 的运动实际上是由两个运动合成的，一个运动是动点 M 沿着 x 轴正向的匀速直线运动，另一个运动是动点 M 绕圆心 B 按顺时会方向做匀速圆周运动.

在运动的过程中，始终存在着如下的关系：线段 OA 之长等于弧$\overset{\frown}{MA}$之长(如图 2－13). 利用这个关系，可以很快地得到动点 M 的坐标$(x，y)$满足$\begin{cases}x=a\theta-a\sin\theta,\\y=a-a\cos\theta.\end{cases}$

事实上，由于产生平摆线的圆周既可以沿 x 轴的正向向前滚动，也可以沿 x 轴的负向向前滚动，所以动点 M 的圆周运动既可以是按顺时针方向的运动，也可以是按逆时针方向的运动. 因此参数 θ 的取值范围是$(-\infty，+\infty)$.

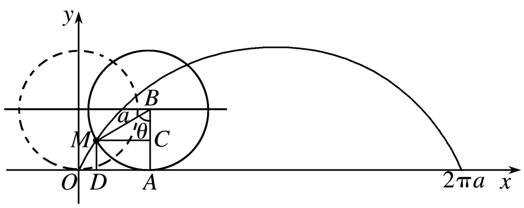


图 2－13

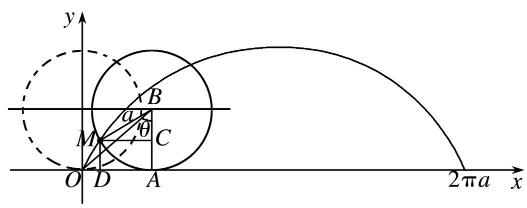


图 2－14

我们也可以用向量的方法来建立平摆线的参数方程(如图 2－14).

因为$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$，且向量$\overrightarrow{BM}$的方向角 $\alpha=\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{3\pi}{2}-\theta$，

所以$\overrightarrow{OM}=(a\theta，a)+(a\cos\alpha，a\sin\alpha)=(a\theta，a)+\left(a\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)，a\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)$.

$=(a\theta，a)+(-a\sin\theta，-a\cos\theta)=(a\theta-a\sin\theta，a-a\cos\theta)$.

即$(x，y)=(a\theta-a\sin\theta，a-a\cos\theta)$，

从而得到平摆线的参数方程为$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\y=a(1-\cos\theta).\end{cases}$($\theta$ 为参数)

教学建议

1. 平摆线的定义是一种发生定义，在教学过程中要借助实物或者信息技术工具展示其形成过程，以帮助学生对平摆线形成一个比较直观的印象. 特别是要在演示过程中引导学生注意观察圆周上的某个点 M 运动时与其他量之间的几何位置关系.

2. 在教学中可引导学生思考：为什么圆滚过一周时，恰好得到平摆线的一拱，并且动点 M 滚过的水平距离恰好为 $2\pi a$. 对于学有余力的学生，还可以引导其进一步思考如下问题：(1)平摆线一拱的长度是多少？(2)平摆线的一拱与 x 轴所围成的图形的面积是多少？

3. 由于摆线有许多初等几何难以解决的问题，因此它在数学史上曾被戏称为“争吵的祸根”. 因此，教学过程中可以简单介绍摆线发展的历史. 例如法国数学家帕斯卡是第一位研究摆线的数学家，他将摆线(旋轮线)称为“几何学中的美人”. 而意大利科学家伽利略曾建议用平摆线的一拱来修筑拱桥的桥洞. 除了平摆线之外，教材在本章的《阅读与思考》部分进一步介绍了变幅平摆线，外摆线与内摆线，变幅外摆线和变幅内摆线等各种不同类型的摆线方程及图形. 在有条件的学校和班级，可以引导学生利用信息技术工具(例如 Z+Z 超级画板、几何画板等)开展数学实验. 教学中可以引导学生完成一篇关于摆线的研究报告(可以研究各种摆线的不同性质，或者研究摆线发展的历史，也可以撰写利用信息技术工具研究各种摆线的心得体会等).

相关链接

1. 如何计算摆线一拱的长度

计算摆线一拱的长度问题，需要用到微积分的知识，即利用微积分中最常用的“元素法”，结合“以直代曲”的思想来求解. 计算曲线弧长的一般方法如下：

设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数. 现在用元素法来计算这曲线弧的长度.

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$，曲线 $y=f(x)$ 对应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一段弧的长度 Δs 可以用该曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线上相应的一小段的长度来近似代替(如图 2－15). 而这相应切线段的长度为 $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$，

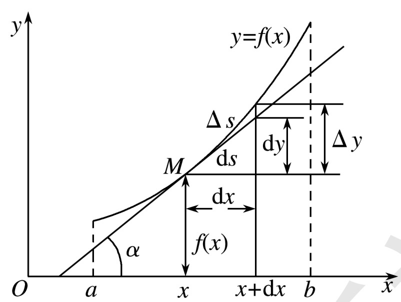


图 2－15

从而得弧长元素 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$，以 $\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a,b]$ 上作定积分，便得所求的弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$.

若曲线弧由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数. 可取参数 t 为积分变量，它的变化区间为 $[\alpha,\beta]$. 相应于 $[\alpha,\beta]$ 上任一小区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 的小弧段的长度的近似值，即弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2+\psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

于是所求弧长为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

下面计算摆线$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$的一拱($0\leqslant\theta\leqslant2\pi$)的长度.

解：取参数θ为积分变量，弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta,$$

从而得所求弧长 $s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=-4a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a$.

所以，摆线一拱的长度为相应动圆半径的8倍.

2. 类似地，利用微积分的有关知识，可以求得平摆线的一拱与x轴所围成的图形的面积是$3\pi a^2$，也就是相应动圆面积的3倍.

2.5 渐开线及其参数方程

教材线索

本节首先给出圆周的渐开线的定义：在一个固定的圆盘的圆周上缠绕着一条无弹性的柔软细线，在此细线的外端系上一支铅笔，把此线拉紧保持与此圆相切地逐渐展开，铅笔画出的曲线称为此圆周的渐开线. 渐开线的普通方程很难求得，因此可以考虑求其参数方程. 利用三角函数知识和平面几何知识进行推导，得到圆的渐开线的参数方程为：

$$\begin{cases} x=r(\cos\theta+\theta\sin\theta), \\ y=r(\sin\theta-\theta\cos\theta). \end{cases}(\theta\text{ 为参数}) \qquad (*)$$

最后研究了渐开线的几何性质并指出利用计算器进行简单的计算就可以描绘其草图，从而体现了参数方程的优越性.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解渐开线的生成过程，并能推导出它的参数方程.
2. 了解渐开线的简单的几何性质.
3. 了解推导渐开线的参数方程的方法.

(二)过程与方法

借助实物模型或计算机软件，研究渐开线的有关性质.

(三)情感、态度与价值观

通过渐开线图形生成过程的展示感受数学的美.

教材分析

1. 重点：

(1)渐开线的参数方程的推导.

(2)渐开线的简单的几何性质.

2. 难点：

渐开线的参数方程的推导.

3. 在一个固定的圆盘的圆周上缠绕着一条无弹性的柔顺细线，在此细线的外端系上一

支铅笔，把此线拉紧保持与此圆相切地逐渐展开，铅笔画出的曲线称为此圆周的渐开线，此圆称为渐开线的基圆.

圆的渐开线的定义是一种发生定义，它的生成过程可以形象地用实物演示或者用计算机软件呈现. 它实际上是把圆弧逐渐拉直形成的，所以它是曲变直的产物. 该定义中，“把此线拉紧保持与此圆相切地逐渐展开”这句话非常关键，它把圆的渐开线与圆的几何关系交待得很清楚，从而为建立渐开线的参数方程提供了几何关系，即线段 BM 与 $\overset{\frown}{BA}$ 的长度相等，而 $\overset{\frown}{BA}=r\theta$，所以 $BM=\overset{\frown}{BA}=r\theta$(图 2-16). 在注意到上述关系后，参数方程的建立就变得十分简单.

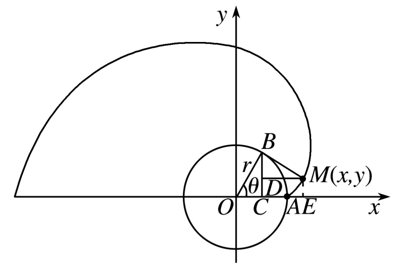


图 2-16

圆的渐开线的参数方程也可以用向量的办法求得.

因为 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$，且向量 $\overrightarrow{BM}$ 的方向角为 $\alpha=-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta-\dfrac{\pi}{2}$，

所以向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式为

$$(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)+\left(r\theta\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ r\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=(r\cos\theta+r\theta\sin\theta,\ r\sin\theta-r\theta\cos\theta),$$

从而可以得到圆的渐开线的参数方程(＊).

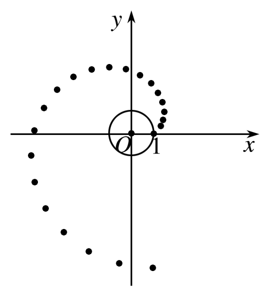


图 2-17

4. 教材指出，根据圆的渐开线的参数方程(＊)，只要从计算器上求得 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的值，则可通过+，−，×得出渐开线上一点 $(x,\ y)$ 的位置，因此，对不同的 θ 值，可以画出此渐开线上的许多点，进而可以描绘其草图. 下面，我们取定 $r=1$，并取若干个 θ，分别计算 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的值，进而计算出 x 和 y 的值，最后描点作图(如图 2-17).

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$\sin\theta$	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26	0
$\cos\theta$	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26	0	−0.26	−0.5	−0.71	−0.87	−0.97	−1
x	1	1.07	1.13	1.26	1.41	1.52	1.57	1.51	1.31	0.96	0.44	0.31	−1
y	0	0.02	0.05	0.15	0.34	0.63	1	1.44	1.91	2.37	2.77	2.92	3.14
θ		$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
$\sin\theta$		−0.26	−0.5	−0.71	−0.87	−0.97	−1	−0.97	−0.87	−0.71	−0.5	−0.26	0
$\cos\theta$		−0.97	−0.87	−0.71	−0.5	−0.26	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1
x		−1.85	−2.70	−3.48	−4.13	−4.56	−4.71	−4.55	−4.03	−3.18	−2.01	−0.59	1
y		3.03	2.67	2.07	1.23	0.19	−1	−2.25	−3.48	−4.59	−5.49	−6.08	−6.28

教学建议

1. 圆的渐开线的定义是一种发生定义，在教学过程中要借助实物或者信息技术工具展示其形成过程，以帮助学生对圆的渐开线形成一个比较直观的印象. 特别是要在演示过程中引导学生注意观察圆的渐开线的某个点 M 与其他量之间的几何位置关系，例如 $BM=\overset{\frown}{AB}$（如图 2－16）.

2. 从渐开线的参数方程$\begin{cases}x=r(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\y=r(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}$ $\theta\in(-\infty,\ +\infty)$中，我们不易求得其普通方程，而其参数方程的求得却是比较容易的，这就说明了某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示要方便，从而也就进一步说明了引入参数方程的必要性. 教材中指出，利用计算器求出 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 的值，则可通过＋，－，×运算得到渐开线上一点$(x,\ y)$的位置，进而画出渐开线的草图（如图 2－17），教学中可引导学生开展这方面的尝试. 当然，也可以采用其他信息技术工具（例如 Z＋Z 超级画板、几何画板，Excel，图形计算器等）画出上述草图或者更加精确的图形.

3. 除教材内容外，还可以引导学有余力的学生研究圆的渐开线的切线和法线问题（见本节相关链接）以及正方形的渐开线的问题.

相关链接

圆的渐开线的切线和法线

如图 2－18，设 $M(x,\ y)$是圆的渐开线上的任意一点，B 是基圆上的对应点，则 MB 是基圆的切线，因而 MB 垂直于半径 OB（其中 $OB=r$）. 又设$\angle AOB=\theta$，则有关系式

$$\begin{cases}x=r(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\y=r(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}\theta\in(-\infty,\ +\infty).$$

分别对 x 和 y 求导，得

$$x'=r(-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta)=r\theta\cos\theta,$$

$$y'=r(\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta)=r\theta\sin\theta.$$

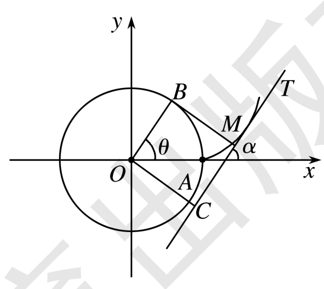


图 2－18

设 MT 是圆的渐开线在点 P 的切线，MT 与 x 轴的夹角为 α，则

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=\frac{r\theta\sin\theta}{r\theta\cos\theta}=\tan\theta.$$

所以 $\alpha=\theta$，从而 $MT /\!/ OB$，所以 $MB\perp MT$，这说明 MB 是圆的渐开线在 M 点的法线，这就证明了圆的渐开线的一个基本性质：

性质 1 圆的渐开线在任意点的法线，同时也是基圆的切线.

又因为两平行线间的距离处处相等，所以作切线 MT 的垂线 OC，必有 $OC=BM$，而 BM 等于弧$\overset{\frown}{BA}$的长 $r\theta$，从而得到 $OC=r\theta$. 这样就证明了圆的渐开线的另一重要性质：

性质 2 从基圆圆心到圆的渐开线在任意点的切线的距离，与该点的参数值 θ 成正比，比例系数等于基圆的半径 r.

由于参数值 θ 等于切线 MT 与 x 轴的夹角 θ，所以上述性质又可以叙述成：

性质 3 从基圆圆心到圆的渐开线在任意点的切线的距离，与该切线与 x 轴的夹角 θ 成正比，比例系数等于基圆的半径 r.

数学实验——用计算机和教具绘制展现各种曲线

（选学）

教材线索

本数学实验分为两部分：(1)运用计算机技术绘制展现各种曲线；(2)用教具画摆线. 在第(1)部分，教材采用“Z＋Z 超级画板”的免费版本作为平台，详细介绍了画各种摆线的方法；在第(2)部分，教材介绍了使用教具“繁花规”画各种摆线的方法.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解各种摆线的生成过程和轨迹形状.

2. 了解用教具或计算机绘制各种摆线的方法.

(二)过程与方法

借助教具或计算机软件，研究各种摆线的图形.

(三)情感、态度与价值观

1. 体会“做数学”的乐趣.

2. 感受摆线等曲线的美.

教材分析

1. 重点：

用计算机软件研究摆线的轨迹形状.

2. 难点：

熟练地使用计算机软件进行实验操作.

教学建议

1. 本节为选学内容，仅供有条件的学校或班级开展教学，不开展本次数学实验的班级可以将本课时用于综合复习.

2. 开设本次数学实验的方式可以多样化. 根据不同学校和班级的条件，教师可以采取“讲解演示”的方式开展本次数学实验，即仅由教师在课堂上进行演示，学生不参与操作；也可以采用“自主探究”的方式，即教师带领学生在数学实验室开展实验，学生在教师的指导下

亲自进行操作；或者也可以采用“在线学习”的方法，即教师将有关素材以网页的形式发布，让学生在适当的时候独立进行操作.

3. 教学中，可以参考教材 P54～P60 中给出的步骤，应用“Z＋Z 超级画板”的免费版本进行操作. 相关软件可以从 http：//www. zplusz. org 等网站下载. 当然，教师也可以采用其他信息技术工具(如几何画板等)开展上述实验.

相关链接

用几何画板作内摆线和外摆线

一个定圆与一个动圆内切，动圆在定圆内内切地滚动，动圆圆周上一个指定点 M 的轨迹叫作内摆线或圆内旋轮线. 一个圆固定不动，另一个圆与此固定的圆外切着滚动，在动圆周上一个指定点运动的轨迹叫作外摆线或圆外旋轮线.

利用几何画板，可以很方便地作出内摆线和外摆线的图形. 下面以定圆半径 R 与动圆半径 r 的比值 $m=\dfrac{R}{r}$ 为整数的情形为例，给出在几何画板中作圆的内摆线和外摆线的统一轨迹的方法(事实上，对下面的方法略加修改，即可得到变幅内摆线和变幅外摆线的统一轨迹的作法).

1. 打开几何画板(以 4.06 版为例)，选择[图表]→[定义坐标系]，[图表]→[隐藏网格].

2. 在 x 轴上任取一点 C，过点 C 作直线 $j\perp x$ 轴；在直线 j 上任取一点 D，选择[度量]→[纵坐标]，得到点 D 的纵坐标 y_D；选择[度量]→[计算]，利用四舍五入函数 round，计算 round(y_D)的标签改为 m；当 m 为正整数时，将 m 看作定圆半径 R 和动圆半径 r 的比值，即 $m=\dfrac{R}{r}$；当 m 为负整数时，记 $-m=\dfrac{R}{r}$(如图 2－19).

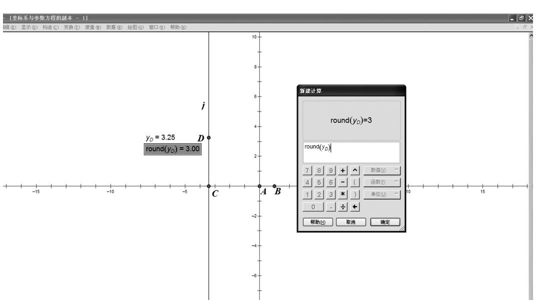


图 2－19

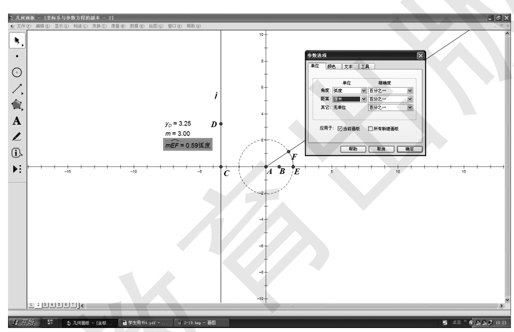


图 2－20

3. 以点 A 为圆心，定长 R 为半径作圆 A，记圆 A 与 x 轴的右交点为 E，则 $AE=R$；在圆 A 上任取一点 F，作射线 AF.

4. 依次选择点 A，E，F，并选择[构造]→[圆上的弧]，得到弧$\overset{\frown}{EF}$.

5. 选择弧$\overset{\frown}{EF}$，并选择[度量]→[弧度角]，计算出弧$\overset{\frown}{EF}$的角度；选择[编辑]→[参数选项]→[单位]，将其中的角度单位改为弧度，则弧$\overset{\frown}{EF}$的度数变成弧度制表示，它与$\angle AEF$的弧度数相等，其变化范围是$[0，2\pi]$(如图 2－20).

6. 选择[度量]→[计算]，计算$\dfrac{1}{m}$；选择[变换]→[标记比值]，将$\dfrac{1}{m}$作为放缩的比率；以点 F 为放缩中心，将点 A 按标记的比$\dfrac{1}{m}$放缩到 A'(如图 2－21)(注：点 A' 即为动圆的中心，且半径 $r=A'F$)；以 A'为中心，$A'F$ 为半径作圆 A'(如图 2－22).

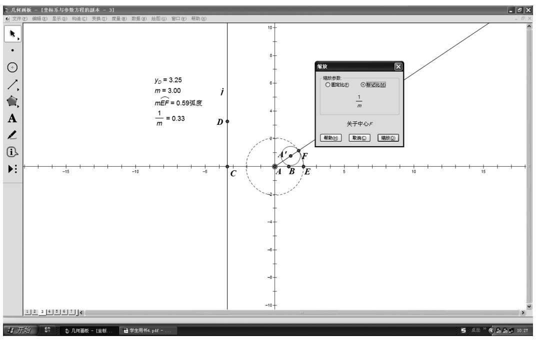


图 2－21

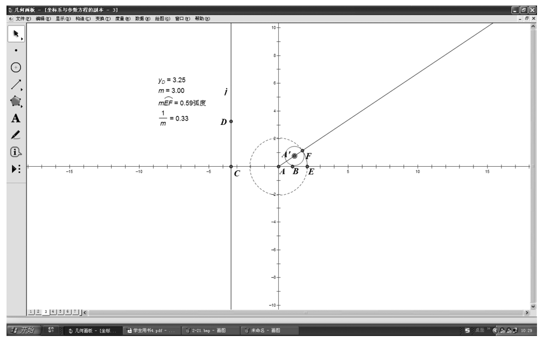


图 2－22

7. 选择[度量]→[计算]，计算出 t 等于$\overset{\frown}{EF}$的弧度数，并计算$-m\times t$ 的值；选择[变换]→[标记角度]，以点 A'为中心，将点 F 旋转上述标记的角度$-m\times t$，与圆 A'交于点 F'，则易知$\overset{\frown}{A'F'}=\overset{\frown}{EF}$(如图 2－23).

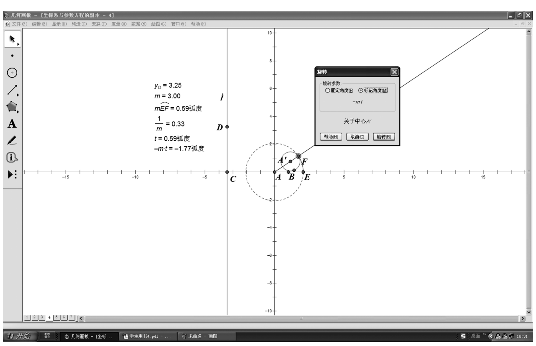


图 2－23

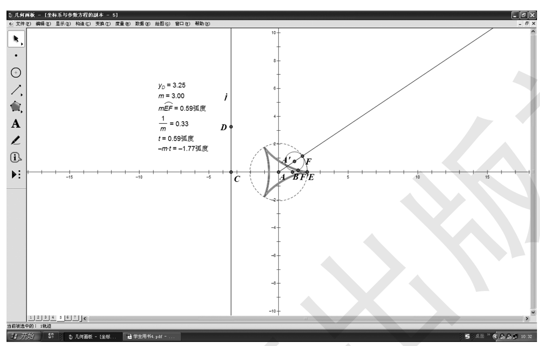


图 2－24

8. 同时选择点 F 和点 F'，选择[构造]→[轨迹]，即可画出摆线图形(如图 2－24 为 $m=3$的内摆线).

9. 调整点 D 的位置，使得 m 取不同的整数. 当 m 为正整数时，所得到的摆线为内摆线(如图 2－25 为 $m=4$ 的内摆线)；当 m 为负整数时，所得到的摆线为外摆线(如图 2－26 为 $m=-3$ 的外摆线).

10. 上述过程中，若作射线 $A'F'$，并在射线 $A'F'$ 上任取一点 F''，则同时选择点 F 和点 F''，选择[构造]→[轨迹]，即可构造出变幅内摆线或变幅外摆线的轨迹.

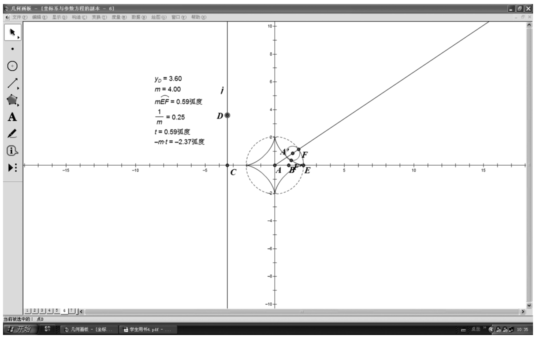


图 2－25

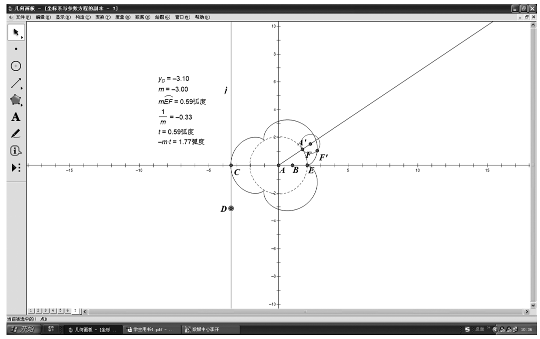


图 2－26

教材习题参考解答

习题 2

1. (1) $bx-ay+ay_1-bx_1=0$； (2) $y^2=2px\ (p>0)$.

2. (1) $\begin{cases}x=a\tan\theta,\\ y=a\cot\theta;\end{cases}$（$\theta$ 为参数） (2) $\begin{cases}x=a\sec\theta,\\ y=b\tan\theta;\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

(3) $\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\ y=\sin\theta-4\cos\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

3. (1) $2x-y-7=0$，表示一条直线；

(2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 表示焦点在 x 轴上，长半轴长为 4，短半轴长为 3 的椭圆；

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 表示焦点在 x 轴上，实半轴长为 a，虚半轴长为 b 的双曲线；

(4) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$ 表示焦点在直线 $y=-3$ 上，以 $(2,\ -3)$ 为中心，长半轴长为 5，短半轴长为 3 的椭圆.

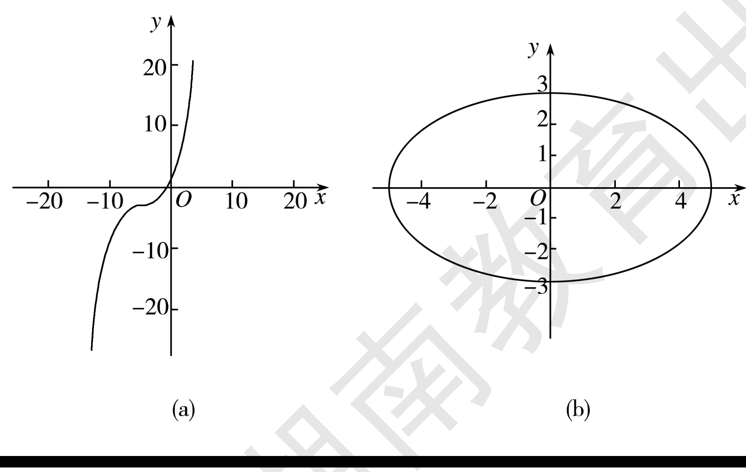
4. (1) 普通方程为 $y=-\dfrac{2g}{v_0^2}x^2+\sqrt{3}x$，射程为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2g}v_0^2$.

(2) 略.

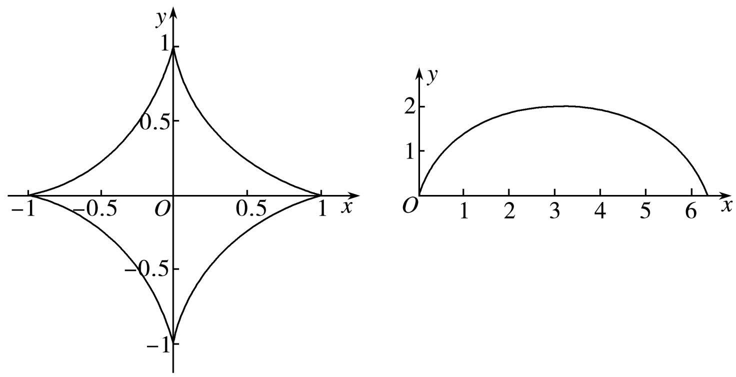
5. (1) $\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$； (2) $\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

6. (1) 如图 2-27(a)（提示：可化为普通方程 $y=\left(\dfrac{x+5}{3}\right)^3-\dfrac{x+5}{3}$，用描点法作图）；

(2) 如图 2-27(b)（提示：可化为普通方程 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$）；



(a) (b)



(c)　　　　　　(d)

图 2－27

(3)如图 2－27(c)(提示：可化为普通方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，这是一条星形线，用描点法作图)；

(4)如图 2－27(d)(提示：这是一条平摆线，用描点法作图).

7. $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=4\sin\theta. \end{cases}$ (θ 为参数)

8. (1) $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t, \\ y=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t; \end{cases}$ (t 为参数)　　(2) $10+6\sqrt{3}$；　　(3) $5\sqrt{3}+1$，10.

9. $\begin{cases} x=1+9t, \\ y=1+12t. \end{cases}$ (t 为参数)

10. $\begin{cases} x=\sqrt{r^2-(a+b)^2\sin^2\theta}+b\cos\theta, \\ y=a\sin\theta. \end{cases}$ (θ 为参数)

11. $\begin{cases} x=2a\cos^2\theta, \\ y=2a\tan\theta. \end{cases}$ (θ 为参数)