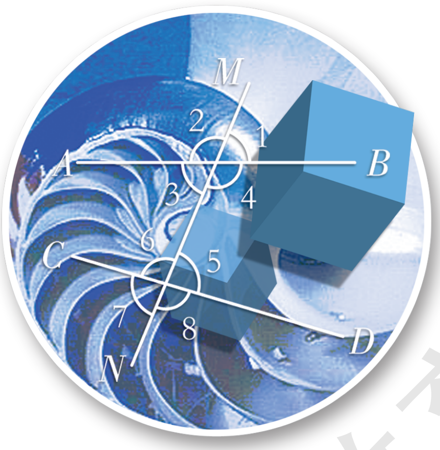
义务教育教科书

数学

SHUXUE

七年级下册



湖南教育出版社

义务教育教科书 数学 七年级下册

主　　编： 严士健　黄楚芳

执行主编： 丘维声

副 主 编： 赵雄辉　胡　旺

编　　委： 袁宏喜　张　华　肖果能　周大明　胡伟红　邹楚林

欢迎走进五彩缤纷的数学园地

亲爱的同学们：

你们在上学期学习了精彩的数学内容，有什么值得分享的经验和体会吗？请不要忘记随时在思考中提出问题，并学会讲道理，这样，你将会在数学园地中感受到数学的乐趣，并提高自身的素质。

在本书中，我们将学习“二元一次方程组”，学会列多个未知数来更好地描述现实生活中的数量关系；在“整式的乘法”和“因式分解”中将学习多项式的运算和变形，这将是我们进一步学好数学的基础；“相交线与平行线”将帮助我们从数学的角度来分析和判断平面中直线的相交与平行关系；我们还将学习“轴对称与旋转”，它们将是我们今后研究几何图形的有力工具；“数据的分析”将帮助我们掌握平均数、中位数、众数和方差的计算方法，这些新知识将帮助我们从定量的角度对现实生活中的实际问题作出合理的解释。

当然，在我们同行的路途中，“综合与实践”同样精彩。因为任何缜密的思维，只有在通往实践的过程中，才具备非凡的价值。在这里，我们将通过思考与实践来感受数学的无穷魅力！“IT 教室”将帮助我们从计算机软件的角度来进一步认识所学的数学知识，体会数学与现代信息技术的紧密关联；而“数学与文化”将使我们从更广阔的时空去体会数学之美、数学的文化与价值。

要学好这些内容，需要我们充满信心，养成良好的学习习惯，克服许许多多的困难。要善于回忆和归纳学过的知识与方法，并找到适合自己的数学学习方法。同学们可以依照书中的栏目设置，多“观察”“探究”“动脑筋”“说一说”“做一做”“议一议”，多动手试一试，从熟悉的生活事例中认识数学，把数学应用到我们的生活中去，不断提高自己探索问题的能力。

同学们，让我们在五彩缤纷的数学园地里探寻吧！

Contents 目录

第1章

二元一次方程组

我们已学会建立一元一次方程模型来解决许多实际问题．你能解决下面的问题吗？

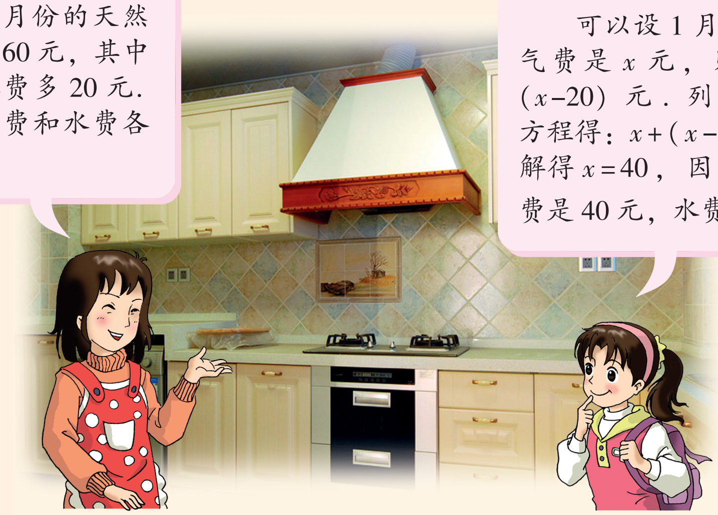
地球的表面积约为 5.1 亿千米^2，其中海洋面积约为陆地面积的 2.4 倍，则地球上的海洋面积和陆地面积各是多少？

这个问题可以建立一元一次方程模型求解，也可以直接设两个未知数列出方程组求解．如何根据实际问题中的数量关系建立二元一次方程组？如何解二元一次方程组？学了本章以后，你将能解决这些问题．

1.1 建立二元一次方程组

动脑筋

我们家 1 月份的天然气费和水费共 60 元，其中天然气费比水费多 20 元. 你知道天然气费和水费各是多少吗?



可以设 1 月份的天然气费是 x 元，则水费是 $(x-20)$ 元. 列一元一次方程得：$x+(x-20)=60$. 解得 $x=40$，因此天然气费是 40 元，水费是 20 元.

想一想，还有其他的方法吗?

问题中既要求水费，又要求天然气费，可以设 1 月份的天然气费是 x 元，水费是 y 元.

根据题意得

$$x+y=60, \qquad ①$$

$$x-y=20. \qquad ②$$

说一说

观察方程①、②各含有几个未知数? 含未知数的项的次数是多少?

像方程 $x+y=60$，$x-y=20$ 这样，含有两个未知数（二元），并且含未知数的项的次数都是 1，称这样的方程为**二元一次方程**（linear equation with two unknowns）.

在方程①和②中，x 都表示 1 月份的天然气费，y 都表示 1 月份的水费，所以它们必须**同时满足**方程①和②，因此把方程①和②用大括号联立起来，得

$$\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20. \end{cases}$$

像这样，把两个含有相同未知数的二元一次方程（或者一个二元一次方程，一个一元一次方程）联立起来，组成的方程组，叫做**二元一次方程组**（system of linear equations with two unknowns）.

做一做

把 $x=40$，$y=20$ 代入方程组 $\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20 \end{cases}$ 的每一个方程中，每一个方程左、右两边的值相等吗?

$40+20=60$，$40-20=20$.
每一个方程左、右两边的值都相等.

在一个二元一次方程组中，使每一个方程的左、右两边的值都相等的一组未知数的值，叫做这个**方程组的一个解**.

我们把 $x=40$，$y=20$ 叫做二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20 \end{cases}$ 的一个解. 这个解通常记做 $\begin{cases} x=40, \\ y=20. \end{cases}$

求方程组的解的过程叫做**解方程组**（solving a system of equations）.

例 小玲在文具店买了 3 本练习本，2 支圆珠笔，共花去 8 元，其中购买的练习本比圆珠笔多花 4 元.

（1）为了知道练习本、圆珠笔的单价是多少元，你能列出相应的方程组吗？

（2）$\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是列出的二元一次方程组的解吗？

解　（1）设练习本的单价是 x 元，圆珠笔的单价是 y 元.

根据题意得

$$\begin{cases} 3x+2y=8, & ① \\ 3x-2y=4. & ② \end{cases}$$

（2）把 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程①中，左边 = 右边，

把 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程②中，左边 = 右边，

所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ 的解.

练习

1. $\begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases}$ 是上例中方程组的解吗？

2. 一条船顺流航行，每小时行 24 km；逆流航行，每小时行 18 km.

（1）为了求轮船在静水中的速度 x 与水的流速 y，你能列出相应的方程组吗？

（2）$\begin{cases} x=21, \\ y=3 \end{cases}$ 是列出的二元一次方程组的解吗？

3. $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是下列哪个方程组的解？

（1）$\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+3y=5; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 3x-4y=2, \\ 4x-3y=6. \end{cases}$

习题 1.1

A 组

1. 已知两个自然数的和是 98，差是 4. 设这两个自然数分别是 x，y（其中 $x>y$），请你列出关于 x，y 的方程组.

2. 某项球类比赛，每场比赛须分出胜负，其中胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在全部 15 场比赛中得到 26 分，为了求出这个队胜、负场数分别是多少，请你列出相应的方程组.

3. $\begin{cases} x=2, \\ y=5 \end{cases}$ 是下列哪个方程组的解？

(1) $\begin{cases} 5x-y=5, \\ 2x+3y=17; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x+y=15, \\ 3x-y=1. \end{cases}$

B 组

4. 某灾区在地震后有9 000 灾民急需帐篷居住. 某企业准备捐助甲、乙两种型号的帐篷共 2 000 顶，其中甲种帐篷每顶可安置 6 人，乙种帐篷每顶可安置 4 人. 设该企业捐助甲种帐篷 x 顶，乙种帐篷 y 顶，恰好安置全体灾民，那么下面列出的方程组中正确的是（　　）

(A) $\begin{cases} x+4y=2\,000, \\ 4x+y=9\,000 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} x+y=2\,000, \\ 6x+y=9\,000 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x+y=2\,000, \\ 4x+6y=9\,000 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} x+y=2\,000, \\ 6x+4y=9\,000 \end{cases}$

5. 甲、乙两人从相距 6 km 的 A，B 两地匀速相向而行，1 h 后相遇. 已知甲的速度比乙的速度快 1 km/h，为了求出甲、乙的速度，请你列出相应的方程组.

6. 某阶梯教室从第 2 排起，每一排都比前一排增加相同数目的座位. 已知第 5 排有 36 个座位，第 20 排有 66 个座位. 为了知道第 1 排有多少个座位，以及每一排比前一排多几个座位，你能列出相应的方程组吗？

1.2 二元一次方程组的解法

1.2.1 代入消元法

探究

在 1.1 节中，我们列出了二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=60, & ① \\ x-y=20, & ② \end{cases}$$

并且知道 $x=40$，$y=20$ 是这个方程组的一个解. 这个解是怎么得到呢？

我会解一元一次方程，可是现在方程①和②中都有两个未知数……

方程①和②中的 x 都表示 1 月份的天然气费，y 都表示 1 月份的水费，因此方程②中的 x，y 分别与方程①中的 x，y 的值相同.

由②式可得

$$x=y+20. \qquad ③$$

于是可以把③代入①式，得

$$(y+20)+y=60. \qquad ④$$

解方程④，得 $y=$__________.

把 y 的值代入③式，得 $x=$__________.

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=\_\_\_\_\_\_, \\ y=\_\_\_\_\_\_. \end{cases}$

议一议

同桌同学讨论，解二元一次方程组的基本想法是什么？

例 1 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 5x - y = -9, & ① \\ 3x + y = 1. & ② \end{cases}$$

解 由②式得 $y = -3x + 1.$ ③

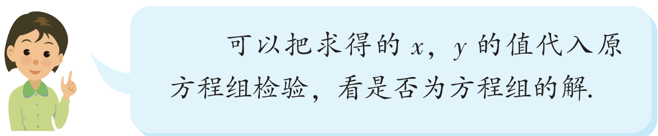
把③代入①式，得 $5x - (-3x + 1) = -9.$

解得 $x = -1.$

把 $x = -1$ 代入③式，得 $y = 4.$

因此原方程组的解是

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 4. \end{cases}$$



解二元一次方程组的基本想法是：**消去一个未知数**（简称为**消元**），**得到一个一元一次方程，然后解这个一元一次方程.**

在上面的例子中，消去一个未知数的方法是：把其中一个方程的某一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示，然后把它代入到另一个方程中，便得到一个一元一次方程. 这种解方程组的方法叫做**代入消元法**（elimination by substitution），简称**代入法**.

例 2 用代入法解方程组：

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, & ① \\ 5x - 7y = 1. & ② \end{cases}$$

解 由①式得 $x = \frac{3}{2}y.$ ③

把③代入②式，得 $5\left(\frac{3}{2}y\right) - 7y = 1,$

解得 $y = 2.$

把 $y = 2$ 代入③式，得 $x = 3.$

因此原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

做一做

在例 2 中，用含 x 的代数式表示 y 来解原方程组.

练习

1. 把下列方程改写为用含 x 的代数式表示 y 的形式.

（1）$2x - y = -1$；（2）$x + 2y - 2 = 0$.

2. 用代入法解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x + y = 128, \\ x - y = 4; \end{cases}$（2）$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 5a + 2b = 11, \\ 3a + b = 7; \end{cases}$（4）$\begin{cases} 3m - n + 1 = 0, \\ 2m + 3n - 3 = 0. \end{cases}$

1.2.2 加减消元法

探究

如何解下面的二元一次方程组？

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1, & ① \\ 2x - 3y = 5. & ② \end{cases}$$

我们可以用学过的代入消元法来解这个方程组，得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$

还有没有更简单的解法呢？

我们知道解二元一次方程组的关键是消去一个未知数，使方程组转化为一个一元一次方程.

分析方程①和②，可以发现未知数 x 的系数相同，因此只要把这两个方程的两边分别相减，就可以消去其中一个未知数 x，得到一个一元一次方程.

$$\begin{array}{r} \boxed{2x} + 3y = -1 \\ - \quad \boxed{2x} - 3y = 5 \\ \hline 6y = -6 \end{array}$$

即①－②，得 $2x+3y-(2x-3y)=-1-5$，

$6y=-6$，

解得 $y=-1$.

把 $y=-1$ 代入②式可以吗?

把 $y=-1$ 代入①式，得 $2x+3\times(-1)=-1$，

解得 $x=1$.

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$

做一做

解上述方程组时，在消元的过程中，如果把方程①与方程②相加，可以消去一个未知数吗？

例 3 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 7x+3y=1, & ① \\ 2x-3y=8. & ② \end{cases}$$

分析 因为方程①、②中 y 的系数相反，用①＋②即可消去未知数 y.

解 ①＋②，得 $7x+3y+2x-3y=1+8$，

$9x=9$，

解得 $x=1$.

把 $x=1$ 代入①式，得 $7\times1+3y=1$，

解得 $y=-2$.

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

两个二元一次方程中同一未知数的系数相同或相反时，把这两个方程相减或相加，就能消去这个未知数，从而得到一个一元一次方程，这种解方程组的方法叫做**加减消元法**（elimination by addition and subtraction），简称**加减法**.

例 4 用加减法解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 2x+3y=-11, & ① \\ 6x-5y=9. & ② \end{cases}$$

分析 这两个方程中没有同一个未知数的系数相同或相反，直接加减这两个方程不能消去任一个未知数. 但如果把①式两边都乘 3，所得方程与方程②中 x 的系数相同，这样就可以用加减法来解.

解 ①×3，得 $6x+9y=-33$. ③

②−③，得 $-14y=42$，

解得 $y=-3$.

把 $y=-3$ 代入①式，得 $2x+3\times(-3)=-11$，

解得 $x=-1$.

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3. \end{cases}$

做一做

在例 4 中，如果先消去 y 应如何解？会与上述结果一致吗？

练习

用加减法解二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ -2x+3y=18; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5a-2b=11, \\ 5a+3b=-4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3m+2n=8, \\ 6m-5n=-47; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x-4y=34, \\ 5x+2y=31. \end{cases}$

加减消元法和代入消元法是解二元一次方程组的两种方法，它们都是通过消去其中一个未知数（消元），使二元一次方程组转化为一元一次方程，从而求解，只是消元的方法不同. 我们可以根据方程组的具体情况来灵活选择适合它的消元方法.

例 5 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{m}{5}-\dfrac{n}{2}=2, & ① \\ 2m+3n=4. & ② \end{cases}$$

分析 方程①与方程②不能直接消去 m 或 n，在方程①的两边都乘 10，去分母得 $2m-5n=20$，使得两个方程中未知数 m 的系数相同，然后用加减法来解.

解 ①×10，得 $2m-5n=20.$ ③

②－③，得 $3n-(-5n)=4-20,$

解得 $n=-2.$

把 $n=-2$ 代入②式，得 $2m+3\times(-2)=4,$

解得 $m=5.$

因此原方程组的解是 $\begin{cases} m=5, \\ n=-2. \end{cases}$

例 6 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x+4y=8, & ① \\ 4x+3y=-1. & ② \end{cases}$$

分析 为了使方程组中两个方程的未知数 x 的系数相同（或相反），可以在方程①的两边都乘 4，在方程②的两边都乘 3，然后将这两个方程相减，就可将 x 消去.

解 ①×4，得 $12x+16y=32.$ ③

②×3，得 $12x+9y=-3.$ ④

③－④，得 $16y-9y=32-(-3),$

解得 $y=5.$

把 $y=5$ 代入①式，得 $3x+4\times5=8,$

解得 $x=-4.$

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=-4, \\ y=5. \end{cases}$

你能用代入法解例 6 的方程组吗?

例 7 在方程 $y=kx+b$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=-1$ 时，$y=3$．试求 k 和 b 的值.

分析 把 x，y 的两组值分别代入 $y=kx+b$ 中，可得到一个关于 k，b 的二元一次方程组.

解 根据题意得
$$\begin{cases}-1=k+b, & ①\\ 3=-k+b. & ②\end{cases}$$

①+②，得 $2=2b$，

解得 $b=1$.

把 $b=1$ 代入①式，得 $k=-2$.

所以 $k=-2$，$b=1$.

练习

1. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y=5,\\ x-3y=6;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-5y=24,\\ 5x+2y=31.\end{cases}$

2. 已知 $\begin{cases}x=-1,\\ y=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2,\\ y=3\end{cases}$ 都是方程 $y=ax+b$ 的解，求 a，b 的值.

习题 1.2

A 组

1. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}2x-5y=21,\\ y=-x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2s+t=6,\\ t=\dfrac{1}{2}s+1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y=-2x+3,\\ y=3x-7;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}a-3b=1,\\ 5a-9b=-13.\end{cases}$

2. 解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases}2(x+2y)-5y=-1, \\ 3(x-y)+y=2;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y=7, \\ -\dfrac{2}{3}x+y=-13;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}m+2n+5=0, \\ 7m-2n-13=0;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}2x+5y=0, \\ x+3y=1;\end{cases}$

（5）$\begin{cases}2x-y=3, \\ 4x+3y=-13;\end{cases}$　　（6）$\begin{cases}1.5p-2q=-1, \\ -4.5p+7q=8.\end{cases}$

3. 当 $x=2$，-2 时，代数式 $kx+b$ 的值分别是 -2，-4，求 k，b 的值.

B 组

4. 解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases}3x+4y=-14, \\ 5x-3y=25;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}\dfrac{m}{5}-\dfrac{n}{2}=-2, \\ 2(m+n+5)-(-m+n)=23.\end{cases}$

5. 有一个两位数，个位上的数比十位上的数大 5，如果把这两个数的位置进行对换，那么所得的新数与原数的和是 143. 求这个两位数.

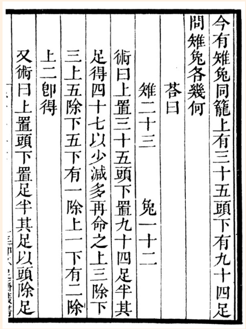
6. 地球的表面积约为 5.1 亿千米²，其中海洋面积约为陆地面积的 2.4 倍，则地球上的海洋面积和陆地面积各是多少？

7. 从 A 城到 B 城的航线长 1 200 km，一架飞机从 A 城飞往 B 城，需要 2 h，从 B 城飞往 A 城，需要 2.5 h. 假设飞机保持匀速，风速的大小和方向不变，求飞机的速度与风速.

1.3 二元一次方程组的应用

动脑筋

“鸡兔同笼”是我国古代著名的数学趣题之一. 大约在 1 500 年前成书的《孙子算经》中，就有关于“鸡兔同笼”的记载：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”这四句话的意思是：有若干只鸡兔关在一个笼子里，从上面数，有 35 个头；从下面数，有 94 条腿. 问笼中各有几只鸡和兔？


今有雉兔同籠上有三十五頭下有九十四足
問雉兔各幾何
荅曰
雉二十三　兔一十二
術曰上置三十五頭下置九十四足半其
足得四十七以少減多再命之上三除下
三上五除下五下有一除上一下有二除
上二即得
又術曰上置頭下置足半其足以頭除足

宋刻《孙子算经》书影

本问题涉及的等量关系有：

$$鸡头数 + 兔头数 = \underline{\qquad\qquad},$$

$$鸡的腿数 + 兔子的腿数 = \underline{\qquad\qquad}.$$

设鸡有 x 只，兔有 y 只.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad\qquad}, \\ y = \underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

答：笼中有 $\underline{\qquad}$ 只鸡，$\underline{\qquad}$ 只兔.

例 1 某业余运动员针对自行车和长跑项目进行专项训练. 某次训练中，他骑自行车的平均速度为 10 m/s，跑步的平均速度为 $\frac{10}{3}$ m/s，自行车路段和长跑路段共 5 km，共用时 15 min. 求自行车路段和长跑路段的长度.

分析 本问题涉及的等量关系有：

自行车路段长度＋长跑路段长度＝总路程，

骑自行车的时间＋长跑时间＝总时间.

解 设自行车路段的长度为 x m，长跑路段的长度为 y m.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} x+y=5\,000, \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{\dfrac{10}{3}}=15\times 60. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3\,000, \\ y=2\,000. \end{cases}$

因此自行车路段的长度为 3 000 m，长跑路段的长度为 2 000 m.

例 2 某食品厂要配制含蛋白质 15%的食品 100 kg，现在有含蛋白质分别为 20%，12%的甲乙两种配料. 用这两种配料可以配制出所要求的食品吗？如果可以的话，它们各需多少千克？

分析 本问题涉及的等量关系有：

甲配料质量＋乙配料质量＝总质量，

甲配料含蛋白质质量＋乙配料含蛋白质质量＝总蛋白质质量.

解 设含蛋白质 20% 的配料需用 x kg，含蛋白质 12% 的配料需用 y kg.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} x+y=100, \\ x\cdot 20\%+y\cdot 12\%=100\cdot 15\%. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=37.5, \\ y=62.5. \end{cases}$

答：可以配制出所要求的食品，其中含蛋白质 20% 的配料需用 37.5 kg，含蛋白质 12% 的配料需用 62.5 kg.

建立二元一次方程组解决实际问题的步骤如下：

实际问题 $\xrightarrow[\text{设两个未知数}]{\text{分析等量关系}}$ 列二元一次方程组 → 解方程组 → 检验解是否符合实际情况

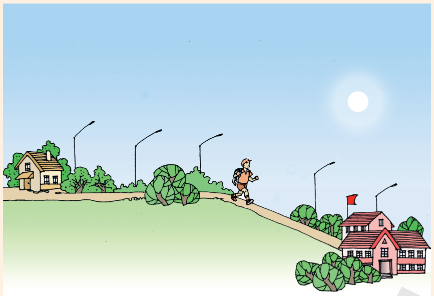
练习

1. 一块金与银的合金重 250 g，放在水中称，减轻了 16 g. 已知金在水中称，金重减轻 $\frac{1}{19}$；银在水中称，银重减轻 $\frac{1}{10}$. 求这块合金中含金、银各多少克.

2. 甲、乙两种商品原来的单价和为 100 元，因市场变化，甲商品降价 10%，乙商品提价40%，调价后两种商品的单价和比原来的单价和提高了 20%. 求甲、乙两种商品原来的单价.

动脑筋

小华从家里到学校的路是一段平路和一段下坡路. 假设他始终保持平路每分钟走 60 m，下坡路每分钟走 80 m，上坡路每分钟走 40 m，则他从家里到学校需 10 min，从学校到家里需 15 min. 问小华家离学校多远?



小华家到学校的路程分为两段：平路与坡路（回家所走的上坡路长即为去学校的下坡路长）. 根据问题中涉及的路程、速度与时间的数量关系，可得

走平路的时间 + 走下坡的时间 = __________,

走上坡的时间 + 走平路的时间 = __________.

设小华家到学校平路长 x m，下坡长 y m.

根据等量关系得

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad\qquad}, \\ y = \underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

因此，平路长为 ______ m，下坡长为 ______ m，小华家离学校 ______ m.

例 3 某城市规定：出租车起步价所包含的路程为 0~3 km，超过 3 km 的部分按每千米另收费. 甲说："我乘这种出租车走了 11 km，付了 17 元." 乙说："我乘这种出租车走了 23 km，付了 35 元." 请你算一算：出租车的起步价是多少元？超过 3 km 后，每千米的车费是多少元？

分析 本问题涉及的等量关系有：

总车费 = 0~3 km 的车费(起步价) + 超过 3 km 的车费.

解 设出租车的起步价是 x 元，超过 3 km 后每千米收费 y 元.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} x+(11-3)y=17, \\ x+(23-3)y=35. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+8y=17, \\ x+20y=35. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=5, \\ y=1.5. \end{cases}$$

答：这种出租车的起步价是 5 元，超过 3 km 后每千米收费 1.5 元.

例 4 某装订车间的工人要将一批书打包后送往邮局，其中每包书的数目相等. 第一次他们领来这批书的 $\frac{7}{12}$，结果打了 14 个包还多 35 本；第二次他们把剩下的书全部取来，连同第一次打包剩下的书一起，刚好又打了 11 包. 那么这批书共有多少本？

解 设这批书共有 x 本，每包书有 y 本.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} \frac{7}{12}x=14y+35, \\ \left(1-\frac{7}{12}\right)x+35=11y. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1\,500, \\ y=60. \end{cases}$$

答：这批书共有 1 500 本.

练习

1. 星期日，小军与小明所在年级分别有同学去颐和园和圆明园参观，其参观人数和门票花费如下表：

	颐和园参观人数	圆明园参观人数	门票花费总　计
小军所在年级	30	30	750 元
小明所在年级	30	20	650 元

问：颐和园和圆明园的门票各多少元？

2. 王先生家厨房需更换地面瓷砖，他采用两种颜色的地砖搭配使用，其中彩色地砖 24 元/块，单色地砖 12 元/块，购买的单色地砖数比彩色地砖数的 2 倍少 15 块，买两种地砖共花去 2 220 元. 求购买的彩色地砖数和单色地砖数.

习题 1.3

A 组

1. 小红买了 80 分与 60 分的邮票共 17 枚，花去 12.2 元. 试问：80 分与 60 分邮票各买了多少枚？

2. 小亮对小芬说：“我的生日的月和日相加是 37，月的 2 倍和日相加是 43.” 小芬说：“这不可能啊！” 你觉得小芬说得对吗？为什么？

3. 小英家今年 1 月份用水 20 t，交水费 43 元；2 月份用水 18 t，交水费 38 元. 该城市实行阶梯水价，14 t 以内按正常收费，超出部分则收较高水费. 问：在限定量以内的水费每吨多少元？超出部分的水费每吨多少元？

4. 某企业向商业银行申请了甲、乙两种贷款，共计 35 万元，每年需付出利息 4.4 万元. 甲种贷款每年的利率是 12%，乙种贷款的利率是 13%. 求这两种贷款的金额各是多少.

5. 某水果公司收购某种水果 104 t，准备加工后上市销售. 该公司加工该种水果的能力是：每天可以精加工 4 t 或粗加工 8 t. 现水果公司计划用 16 天完成这项加工任务，则应安排几天精加工，几天粗加工？

B 组

6. 某农户种植核桃树和杏树，已知种植的核桃树棵数比总数的一半多 11 棵，种植的杏树棵数比总数的三分之一少 2 棵. 问两种果树各种植了多少棵？

7. 某中学组织一批学生春游，原计划租用 45 座客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租用同样数量的 60 座客车，则多出一辆车，且其余客车恰好坐满. 已知 45 座客车租金为每辆 220 元，60 座客车租金为每辆 300 元，问：

（1）这批学生的人数是多少？原计划租用多少辆 45 座客车？

（2）若租用同一种车，要使每位学生都有座位，应该怎样租用才合算？

8. 某天，一蔬菜经营户用 60 元从蔬菜批发市场购进西红柿和豆角共 40 kg 到菜市场去卖，西红柿和豆角这天的批发价、零售价（单位：元/kg）如下表所示：

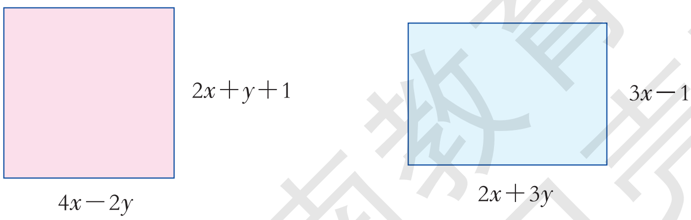
品名	批发价	零售价
西红柿	1.2	1.8
豆角	1.6	2.5

问他当天卖完这些西红柿和豆角能赚多少钱？

9. 如图，有一个正方形和一个长方形. 若正方形的周长与长方形的周长相等，求：

（1）x，y 的值；

（2）正方形和长方形的面积.

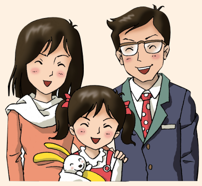


（第 9 题图）

*1.4 三元一次方程组

动脑筋

小丽家三口人的年龄之和为 80 岁，小丽的爸爸比妈妈大 6 岁，小丽的年龄是爸爸与妈妈年龄和的 $\frac{1}{7}$. 试问这家人的年龄分别是多少岁？



可建立二元一次方程组来解决. 设爸爸的年龄为 x 岁，小丽的年龄为 y 岁，则妈妈的年龄为 $(x-6)$ 岁. 根据题意得：

$$\begin{cases} x+y+x-6=80, \\ y=\frac{1}{7}(x+x-6). \end{cases}$$

解这个方程组得 $x=38$，$y=10$.

因此爸爸的年龄为 38 岁，妈妈的年龄为 32 岁，小丽的年龄为 10 岁.

想一想，还有其他的方法列方程组求解吗？

因为要求三个人的年龄，所以可设爸爸的年龄为 x 岁，妈妈的年龄为 y 岁，小丽的年龄为 z 岁. 根据题意得：

$$x+y+z=80,$$
$$x-y=6,$$
$$x+y=7z.$$

三人的年龄必须同时满足上述三个方程，所以，我们把这三个方程联立在一起写成：

$$\begin{cases} x+y+z=80, \\ x-y=6, \\ x+y=7z. \end{cases}$$

* 本节为选学内容.

可以发现，这个方程组中含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数均为 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做**三元一次方程组**.

在三元一次方程组中，适合每一个方程的一组未知数的值，叫做这个方程组的一个解.

动脑筋

解二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，使其转化为一元一次方程来求解，那么我们在解三元一次方程组时，能不能同样利用代入法或加减法来消去一个或两个未知数，使其转化为二元一次方程组或一元一次方程呢？

现在我们来解下面的三元一次方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=80, & ① \\ x-y=6, & ② \\ x+y=7z. & ③ \end{cases}$$

我们把①、②两式相加得到一个只含 x 和 z 的二元一次方程，即 $2x+z=86$. 再把 ②、③两式相加又得到一个只含 x 和 z 的二元一次方程，即 $2x=6+7z$.

由此可得一个关于 x，z 的二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x+z=86, \\ 2x-7z=6. \end{cases}$$

解这个方程组，得
$$\begin{cases} x=38, \\ z=10. \end{cases}$$

把 x=38，z=10 代入①式，得 $38+y+10=80$，

解得 $y=32$.

因此，三元一次方程组的解为
$$\begin{cases} x=38, \\ y=32, \\ z=10. \end{cases}$$

从上面解方程组的过程可以看出，解三元一次方程组的基本想法是：先消去一个未知数，将解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 消元的基本方法仍然是代入法和加减法.

例 解三元一次方程组：

$$\begin{cases} 5x+4y+z=0\,, & ① \\ 3x+y-4z=1\,, & ② \\ x+y+z=-2\,. & ③ \end{cases}$$

分析 通过观察发现，z 或 y 的系数较为简单，可以先消去 z 或 y 来求解.

解 ②×4－①，得 $7x-17z=4$.

②－③，得 $2x-5z=3$.

两次转化都必须是消去同一个未知数.

由此得到 $\begin{cases} 7x-17z=4\,, \\ 2x-5z=3\,. \end{cases}$

解这个二元一次方程组得 $\begin{cases} x=-31\,, \\ z=-13\,. \end{cases}$

把 $x=-31$，$z=-13$ 代入③式，得 $y=42$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=-31\,, \\ y=42\,, \\ z=-13\,. \end{cases}$

做一做

请你用其他的方法来解上例中的方程组.

练习

1. 解下列三元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x+y=7\,, \\ 2y+z=6\,, \\ x-z=7\,; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 2x+2y+z=4\,, \\ 2x+y+2z=7\,, \\ x+2y+2z=-6\,. \end{cases}$

2. 有甲、乙、丙三人，若甲、乙的年龄之和为 15 岁，乙、丙的年龄之和为 16 岁，丙、甲的年龄之和为 17 岁，则甲、乙、丙三人的年龄分别为多少岁？

习题 1.4

A 组

1. 解下列三元一次方程组：

（1）$\begin{cases} y=x+1, \\ 2x+y+z=1, \\ x-2y+z=-6; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 3x-2z=1, \\ 3z+2y=2, \\ 3y-x=-18. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 4x+2y+z=3, \\ 25x+5y+z=60; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 3a+4b=7, \\ 5a-9b+7c=8, \\ 2a+3b+c=9. \end{cases}$

3. 当 $x=1$，3，-2 时，代数式 ax^2+bx+c 的值分别为 -9，-3，12，试求 a，b，c 的值.

B 组

4. 一个三位数是它各数位上数字之和的 27 倍. 已知百位上的数字与个位上的数字之和比十位上的数字大 1. 如果把百位上的数字与个位上的数字交换位置，则所得的新数比原数大 99. 求这个三位数.

5. （中国古代数学问题）[①]今有上等谷 3 束，中等谷 2 束，下等谷 1 束，共是 39 斗；上等谷 2 束，中等谷 3 束，下等谷 1 束，共是 34 斗；上等谷 1 束，中等谷 2 束，下等谷 3 束，共是 26 斗. 问上、中、下三等谷每束各是几斗？

（中国古代借助算筹来列方程组）

① 选自《九章算术》，原文是：今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何？

小结与复习

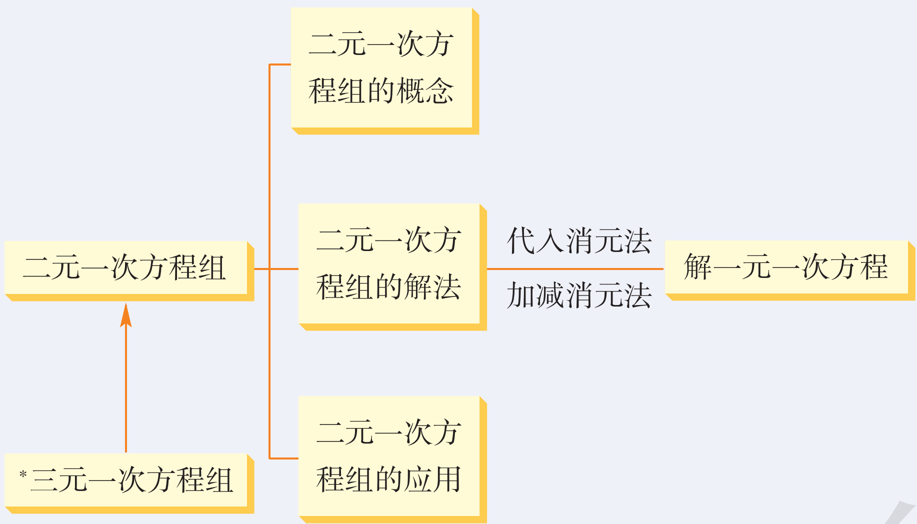
回顾

1. 解二元一次方程组的基本想法是什么？解方程组的方法有哪些？

2. 用二元一次方程组解决实际问题有哪些步骤？

***3.** 解三元一次方程组与解二元一次方程组有何联系与区别？

本章知识结构



注意

1. 解二元一次方程组时，要注意观察未知数的系数特征，灵活选择方法.

***2.** 解三元一次方程组的基本想法与解二元一次方程组的想法是一致的. 通过消元，将三元一次方程组转化为二元一次方程组或一元一次方程，进而求解.

复习题 1

A 组

1. 分别用代入法和加减法解方程组：$\begin{cases} x+y=7, \\ 3x+y=17. \end{cases}$

2. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} m=2n+13, \\ m=-3n-12; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y=10, \\ -3x+5y=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7x+3y=15, \\ 2x-3y=12; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x+2y=6, \\ y=\dfrac{1}{2}x+2. \end{cases}$

3. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 4x+3y=1, \\ 3x-4y=-18; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3m-5n+23=0, \\ 5m+n-27=0. \end{cases}$

4. 已知等式 $y=kx+b$，当 $x=20$，30 时，y 的值分别为 68，86，求 k，b 的值.

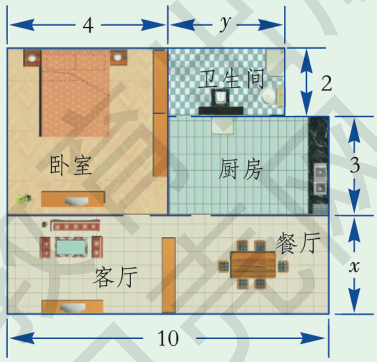
5. 晓玲想通过饮用牛奶和橙汁来提高身体中钙和维生素 A 的含量. 一盎司①牛奶含 38 毫克钙和 56 微克维生素 A，一盎司橙汁含 5 毫克钙和 60 微克维生素 A，她每天应喝牛奶和橙汁各多少盎司，才能保证身体中每日摄入 550 毫克钙和 1 200 微克维生素 A？

6. 小刚从今年 2 月初起刻苦练习跳高，每个月的跳高成绩都比上一个月有提高，而且提高的高度相同. 3 月份，7 月份他的跳高成绩分别为 1.45 m，1.53 m. 你能算出他 2 月份的跳高成绩以及每个月提高的高度吗？

7. 大伟购买了一套经济适用房，户型图如图所示，他打算将地面铺上地砖，请根据图中的数据（单位：m）回答下列问题：

(1) 写出用含 x，y 的代数式表示的地面总面积.

(2) 已知客、餐厅面积之和比卫生间面积多 22 m²，且地面总面积是卫生间面积的 9.5 倍，铺 1 m² 地砖的平均费用为 85 元，求铺地砖的总费用为多少元.



(第 7 题图)

① 盎司是英制质量单位的一种，1 盎司=28.349 5 克.

8. 小亮所在年级到某地参加志愿者活动. 车上准备了 5 箱矿泉水，每箱的瓶数相同. 到达目的地后，先从车上搬下 2 箱，发给每位志愿者 1 瓶矿泉水，有 8 位未领到. 接着又从车上搬下 3 箱，继续分发，最后每位志愿者都有 2 瓶矿泉水，还剩下 8 瓶. 问：有多少人参加志愿者活动？每箱有多少瓶矿泉水？

*__9.__ 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x=2y, \\ 2x-y+z=2, \\ x-2y+3z=-3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+z=-4, \\ x-y+z=0, \\ 4x+2y+z=-3. \end{cases}$

B 组

10. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 2(x+y-1)=3(3-y)-3, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{6}=4, \\ \dfrac{(5x+15y)-5}{3}=0. \end{cases}$

11. 某城市一种出租车的起步价为 10 元，两位乘客分别乘这种出租车走了 10 km 和 14 km，车费分别为 21.2 元和 27.6 元，且一路顺利，没有停车等候. 你能算出这种出租车起步价所允许行驶的最远路程吗？超过起步路程但行驶不到 15 km 时，超过部分每千米车费为多少元？（本题不考虑用计程器计费的某些特殊规定.）

C 组

12. 下列二元一次方程组有解吗？

$$\begin{cases} x-3y=2, \\ -2x+6y=5. \end{cases}$$

13. 下列二元一次方程组有多少解？

$$\begin{cases} x-3y=2, \\ -2x+6y=-4. \end{cases}$$

14. 在一次国际象棋女子挑战赛上，我国女子国际象棋特级大师谢军在苦战 15 盘后，以净胜俄罗斯棋手加里亚莫娃 2 分的优异成绩，第三次夺得棋后桂冠. 比赛的积分规则是胜得 1 分，负得 0 分，和棋各得 0.5 分. 问两位棋手最后的积分各是多少？

数学与文化

高斯消元法

计算机技术的迅猛发展，使得实际问题中含有成千上万个未知数的一次方程组有可能求解. 为了使计算机能够机械地执行命令，解一次方程组需要一种统一的算法. 现在我们以下面的二元一次方程组为例，说明这种统一的消元法.

已知 $\begin{cases} 2x+3y-7=0, \\ 3x-5y+18=0. \end{cases}$

第一步，把方程组写成如下的标准形式：

$$\begin{cases} 2x+3y=7, & ① \\ 3x-5y=-18. & ② \end{cases}$$

按标准形式将数据输入到计算机中.

第二步，把标准形式的方程组化成阶梯形：

①×$\left(-\dfrac{3}{2}\right)$，加到方程②上，得

$$\begin{cases} 2x+\ \ 3y\ \ =7, & ③ \\ \quad -\dfrac{19}{2}y=-\dfrac{57}{2}. & ④ \end{cases}$$

由③、④组成的方程组叫做阶梯形方程组，其中第二个方程（即方程④）已经不含未知数 x.

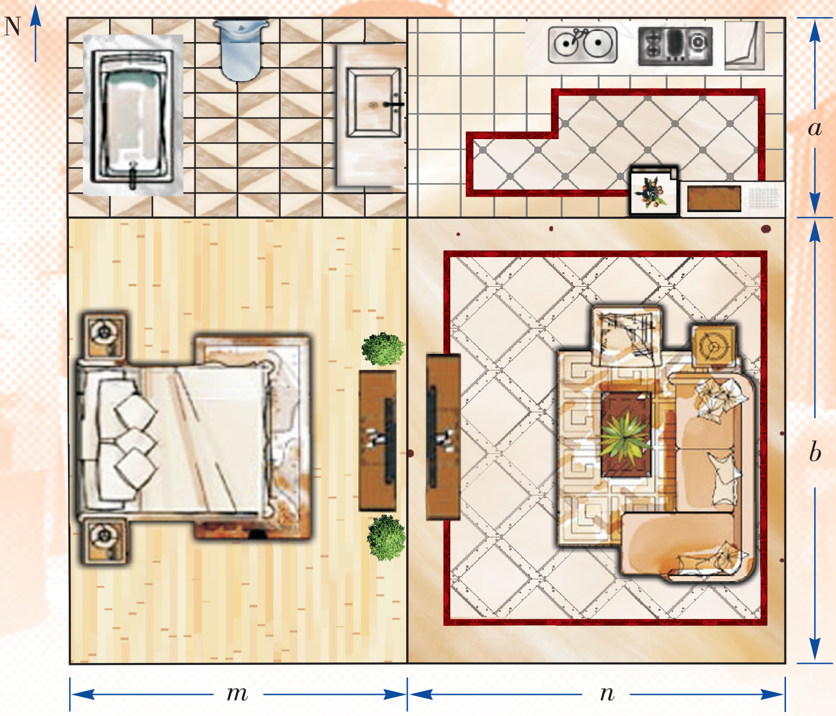
第三步，解方程④，得 $y=3.$

往回代入③，解得 $x=-1.$

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$

上述这种解一次方程组的方法叫做高斯消元法，其中第二步叫做消元算法，第三步叫做回代算法. 高斯消元法不仅可以用来解任意一个二元一次方程组，而且可以用来解任意一个三元一次方程组，以及解任意一个 n 元一次方程组，其中 n 是任一正整数且 $n\geqslant 2$.（注：有 n 个未知数，并且含未知数的每一项都是 1 次的方程叫做 n 元一次方程. 含有相同未知数的若干个 n 元一次方程联立起来，组成的方程组叫做 n 元一次方程组.）

高斯消元法的实质在我国《九章算术》的“方程”一章中就已体现.



$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)$$
$$=am+an+bm+bn$$

第2章

整式的乘法

整式包括单项式和多项式，我们已经知道整式可以进行加减运算，整式可以像数一样进行乘法运算吗？

上图是一套房子的户型简图，这套房子的一边长为 $a+b$，另一边长为 $m+n$，你能算出这套房子的面积吗？本章将帮助我们解决这些问题.

2.1 整式的乘法

2.1.1 同底数幂的乘法

做一做

$2^2\times2^4=$ ______________；　　$a^2\cdot a^4=$ ______________；

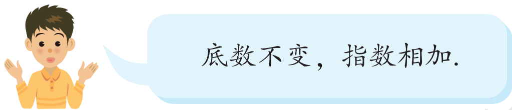
$a^2\cdot a^m=$ ______________（m 是正整数）.

$$2^2\times2^4=(\underbrace{2\times2}_{2\text{ 个 }2})\times(\underbrace{2\times2\times2\times2}_{4\text{ 个 }2})=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2}_{(2+4)\text{ 个 }2}=2^6.$$

$$a^2\cdot a^4=(\underbrace{a\cdot a}_{2\text{ 个 }a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a}_{4\text{ 个 }a})=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{(2+4)\text{ 个 }a}=a^6.$$

$$a^2\cdot a^m=(\underbrace{a\cdot a}_{2\text{ 个 }a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ 个 }a})=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(2+m)\text{ 个 }a}=a^{2+m}.$$

通过观察，你发现上述式子的指数和底数是怎样变化的？



我们把上述运算过程推广到一般情况（即 $a^m\cdot a^n$），即

$$\begin{aligned}a^m\cdot a^n&=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ 个 }a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{ 个 }a})\\&=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m+n)\text{ 个 }a}\\&=a^{m+n}\ (m,\ n\text{ 都是正整数}).\end{aligned}$$

也就是

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m，n \text{ 都是正整数}).$$

于是，我们得到：同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

例 1 计算：（1）$10^5 \times 10^3$；（2）$x^3 \cdot x^4$.

解 （1）$10^5 \times 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$.

（2）$x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$.

例 2 计算：（1）$-a \cdot a^3$；（2）$y^n \cdot y^{n+1}$（n是正整数）.

解 （1）$-a \cdot a^3 = -1 \cdot a^{1+3} = -a^4$.

（2）$y^n \cdot y^{n+1} = y^{n+n+1} = y^{2n+1}$.

议一议

当三个或三个以上的同底数幂相乘时，怎样用公式表示运算的结果呢？

例 3 计算：（1）$3^2 \times 3^3 \times 3^4$；（2）$y \cdot y^2 \cdot y^4$.

解 （1）$3^2 \times 3^3 \times 3^4$

$= (3^2 \times 3^3) \times 3^4 = 3^5 \times 3^4 = 3^9$.

（2）$y \cdot y^2 \cdot y^4$

$= (y \cdot y^2) \cdot y^4 = y^3 \cdot y^4 = y^7$.

例 3 还可以如下计算：

（1）$3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$.

（2）$y \cdot y^2 \cdot y^4 = y^{1+2+4} = y^7$.

练习

1. 计算：

（1）$10^6 \times 10^4$；（2）$x^5 \cdot x^3$；

（3）$a \cdot a^4$；（4）$y^4 \cdot y^4$.

2. 计算：

(1) $2\times2^3\times2^5$；　　(2) $x^2\cdot x^3\cdot x^4$；

(3) $-a^5\cdot a^5$；　　(4) $a^m\cdot a$ (m是正整数)；

(5) $x^{m+1}\cdot x^{m-1}$ (其中$m>1$，且m是正整数).

2.1.2 幂的乘方与积的乘方

做一做

$(2^2)^3=$ ________；　　$(a^2)^3=$ ________；

$(a^2)^m=$ ________ (m是正整数).

$$(2^2)^3=2^2\cdot2^2\cdot2^2=2^{2+2+2}=2^{2\times3}=2^6.$$

$$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^{2\times3}=a^6.$$

$$(a^2)^m=\underbrace{a^2\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^2}_{m\text{个}a^2}=a^{\overbrace{2+2+\cdots+2}^{m\text{个}2}}=a^{2\times m}=a^{2m}.$$

通过观察，你发现上述式子的指数和底数是怎样变化的？

底数不变，指数相乘.

同样，我们把上述运算过程推广到一般情况，即

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n\text{个}a^m}$$

$$= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}$$

$$= a^{mn}\ (m,\ n\text{都是正整数}).$$

也就是

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}\quad (m,\ n\text{都是正整数}).}$$

于是我们得到：幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 4 计算：

(1) $(10^5)^2$； (2) $-(a^3)^4$.

解 (1) $(10^5)^2 = 10^{5\times 2} = 10^{10}$.

(2) $-(a^3)^4 = -a^{3\times 4} = -a^{12}$.

例 5 计算：

(1) $(x^m)^4$（m 是正整数）； (2) $(a^4)^3 \cdot a^3$.

解 (1) $(x^m)^4 = x^{m\times 4} = x^{4m}$.

(2) $(a^4)^3 \cdot a^3 = a^{4\times 3} \cdot a^3 = a^{12+3} = a^{15}$.

练习

1. 填空：

(1) $(10^4)^3 =$ ________； (2) $(a^3)^3 =$ ________；

(3) $-(x^3)^5 =$ ________； (4) $(x^2)^3 \cdot x^2 =$ ________.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(a^4)^3 = a^7$； (2) $(a^3)^2 = a^9$.

3. 自编两道幂的乘方运算题，并与同学交流计算过程与结果.

做一做

$(3x)^2=$ ________; $(4y)^3=$ ________; $(ab)^3=$ ________.

$$(3x)^2=3x\cdot 3x=(3\cdot 3)\cdot(x\cdot x)=9x^2.$$

$$\begin{aligned}(4y)^3&=(4y)\cdot(4y)\cdot(4y)\\&=(4\cdot 4\cdot 4)\cdot(y\cdot y\cdot y)\\&=64y^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ab)^3&=(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\quad\text{（乘方的意义）}\\&=(a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b)\quad\text{（使用交换律和结合律）}\\&=a^3b^3.\end{aligned}$$

通过观察上述运算过程，你能推导出下面的公式吗?

$(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）.

$$\begin{aligned}(ab)^n&=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{ 个 }ab}\\&=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{ 个 }a})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{ 个 }b})\\&=a^nb^n\ (n\text{ 是正整数}).\end{aligned}$$

于是我们得到：积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

议一议

$(abc)^n = ?$ (n 是正整数).

例 6 计算：

(1) $(-2x)^3$；　　(2) $(-4xy)^2$；

(3) $(xy^2)^3$；　　(4) $\left(-\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^4$.

解 (1) $(-2x)^3=(-2)^3\cdot x^3=-8x^3$.

(2) $(-4xy)^2=(-4)^2\cdot x^2\cdot y^2=16x^2y^2$.

(3) $(xy^2)^3=x^3\cdot(y^2)^3=x^3y^6$.

(4) $\left(-\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^4$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot x^4\cdot(y^2)^4\cdot(z^3)^4=\frac{1}{16}x^4y^8z^{12}.$$

括号内每一个因式都要乘方.

例 7 计算：$2(a^2b^2)^3-3(a^3b^3)^2$

解 $2(a^2b^2)^3-3(a^3b^3)^2$

$=2a^6b^6-3a^6b^6$

$=-a^6b^6$.

结果中如果有同类项的要合并.

练习

1. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{2}x\right)^3$；　　(2) $(-xy)^4$；

(3) $(-2m^2n)^3$；　　(4) $(-3ab^2c^3)^4$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(ab^3)^2=ab^6$；　　(2) $(2xy)^3=6x^3y^3$.

3. 计算：$-(xyz)^4+(2x^2y^2z^2)^2$.

2.1.3 单项式的乘法

动脑筋

怎样计算 $4xy$ 与 $-3xy^2$ 的乘积？

$$\begin{aligned}&4xy\cdot(-3xy^2)\\=&[4\cdot(-3)](x\cdot x)(y\cdot y^2)\\=&\underline{\qquad\qquad\qquad}.\end{aligned}$$

一般地，单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘.

例 8 计算：

(1) $(-2x^3y^2)\cdot(3x^2y)$；　　(2) $(2a)^3\cdot(-3a^2b)$；

(3) $(2x^{n+1}y)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}x^ny^2\right)$ (n是正整数).

解 (1) $(-2x^3y^2)\cdot(3x^2y)$

$=[(-2)\cdot 3](x^3\cdot x^2)(y^2\cdot y)$

$=-6x^5y^3$.

(2) $(2a)^3\cdot(-3a^2b)$

$=[2^3\cdot(-3)](a^3\cdot a^2)b$

$=-24a^5b$.

(3) $(2x^{n+1}y)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}x^ny^2\right)$

$=\left[2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right](x^{n+1}\cdot x^n)(y\cdot y^2)$

$=-\dfrac{1}{2}x^{2n+1}y^3$.

例 9 天文学上计算星球之间的距离是用“光年”做单位的，1 光年就是光在 1 年内所走过的距离. 光的速度约为 3×10^8 m/s，1 年约为 3×10^7 s. 计算 1 光年约多少米.

解　根据题意，得

$$\begin{aligned}&3\times10^8\times3\times10^7\\=&(3\times3)\times(10^8\times10^7)\\=&9\times10^{15}\ (\mathrm{m}).\end{aligned}$$

答：1 光年约 9×10^{15} m.

练习

1. 计算：

（1）$(2x^2y)\left(-\dfrac{1}{4}xy^2z\right)$；　　（2）$(-2x^2y)^2\cdot 4xy^2$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

（1）$4x^2\cdot 3x^3=12x^6$；　　（2）$-x^2\cdot(2x)^2=4x^4$.

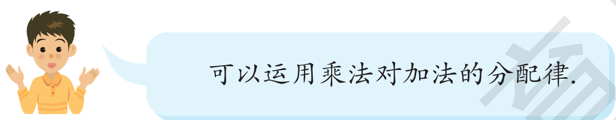
3. 计算（其中 n 是正整数）：

（1）$(-2x^{n+1})\cdot 3x^n$；　　（2）$\left(-\dfrac{1}{2}x^ny\right)^2\cdot 4xy^2$.

2.1.4　多项式的乘法

动脑筋

怎样计算单项式 $2x$ 与多项式 $3x^2-x-5$ 的积？



$$\begin{aligned}2x\cdot(3x^2-x-5)&=2x\cdot 3x^2+2x\cdot(-x)+2x\cdot(-5)\\&=6x^3-2x^2-10x.\end{aligned}$$

一般地，单项式与多项式相乘，先用单项式乘多项式中的每一项，再把所得的积相加.

例 10 计算：

(1) $2x^2 \cdot \left(4xy - \frac{1}{2}x + 1\right)$；　　(2) $\left(\frac{1}{2}b^2 - 4a^2\right) \cdot (-4ab)$.

解 (1) $2x^2 \cdot \left(4xy - \frac{1}{2}x + 1\right)$

$$= 2x^2 \cdot 4xy + 2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + 2x^2 \cdot 1$$

$$= 8x^3y - x^3 + 2x^2.$$

(2) $\left(\frac{1}{2}b^2 - 4a^2\right) \cdot (-4ab)$

$$= \frac{1}{2}b^2 \cdot (-4ab) - 4a^2 \cdot (-4ab)$$

$$= -2ab^3 + 16a^3b.$$

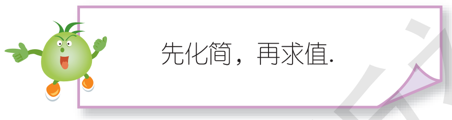
例 11 求 $-\frac{1}{2}x^2 \cdot (2xy - 4y^2) - 4x^2 \cdot (-xy)$ 的值，其中 $x = 2$，$y = -1$.

解 $-\frac{1}{2}x^2 \cdot (2xy - 4y^2) - 4x^2 \cdot (-xy)$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot 2xy - \frac{1}{2}x^2 \cdot (-4y^2) - 4x^2 \cdot (-xy)$$

$$= -x^3y + 2x^2y^2 + 4x^3y$$

$$= 3x^3y + 2x^2y^2.$$



当 $x = 2$，$y = -1$ 时，

原式的值为 $3 \times 2^3 \times (-1) + 2 \times 2^2 \times (-1)^2 = -24 + 8 = -16$.

练习

1. 计算：

(1) $-2x^2 \cdot (x - 5y)$；　　(2) $(3x^2 - x + 1) \cdot 4x$；

(3) $(2x + 1) \cdot (-6x)$；　　(4) $3a \cdot (5a - 3b)$.

2. 先化简，再求值：

$-2xy\left[3xy^2 - \frac{1}{2}x\left(4y^2 - \frac{1}{2}x\right)\right]$，其中 $x = -2$，$y = \frac{1}{2}$.

动脑筋

有一套居室的平面图如图 2-1 所示，怎样用代数式表示它的总面积呢？

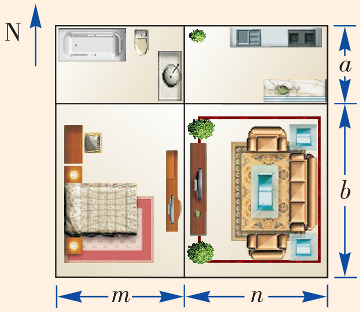


图 2-1

南北向总长为 $a+b$，东西向总长为 $m+n$，所以居室的总面积为：

$$(a+b)\cdot(m+n)；\quad ①$$

北边两间房的面积和为 $a(m+n)$，南边两间房的面积和为 $b(m+n)$，所以居室的总面积为：

$$a(m+n)+b(m+n)；\quad ②$$

四间房(厅)的面积分别为 am，an，bm，bn，所以居室的总面积为：

$$am+an+bm+bn.\quad ③$$

这三个代数式之间有什么关系呢？

上面三个代数式都正确表示了该居室的总面积，因此有

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

撇开上述式子的实际意义，想一想，这几个代数式为什么相等呢？它们利用了乘法运算的什么性质？事实上，由代数式①到代数式②，是把 $m+n$ 看成一个整体，利用乘法分配律得到 $a(m+n)+b(m+n)$，继续利用乘法分配律，就得到结果 $am+an+bm+bn$. 这个运算过程可表示为：

$$(a+b)(m+n)=\underset{\text{Ⅰ}}{am}+\underset{\text{Ⅱ}}{an}+\underset{\text{Ⅲ}}{bm}+\underset{\text{Ⅳ}}{bn}.$$

一般地，多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 12 计算：(1) $(2x+y)(x-3y)$；

(2) $(2x+1)(3x^2-x-5)$；

(3) $(x+a)(x+b)$.

解 (1) $(2x+y)(x-3y)$

$=2x\cdot x+2x\cdot(-3y)+y\cdot x+y\cdot(-3y)$

$=2x^2-6xy+yx-3y^2$

$=2x^2-5xy-3y^2$.

运算熟练后，第一步可以省略.

(2) $(2x+1)(3x^2-x-5)$

$=6x^3-2x^2-10x+3x^2-x-5$

$=6x^3+x^2-11x-5$.

(3) $(x+a)(x+b)$

$=x^2+bx+ax+ab$

$=x^2+(a+b)x+ab$.

第(3)小题的直观意义如图 2-2.

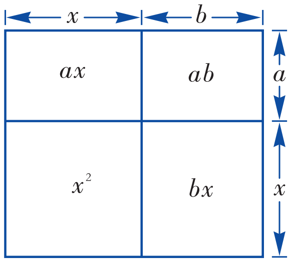


图 2-2

例 13 计算：

(1) $(a+b)(a-b)$；

(2) $(a+b)^2$；

(3) $(a-b)^2$.

解 (1) $(a+b)(a-b)$

$=a^2-ab+ba-b^2$

$=a^2-b^2$.

(2) $(a+b)^2$

$=(a+b)(a+b)$

$=a^2+ab+ba+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$.

(3) $(a-b)^2$

$=(a-b)(a-b)$

$=a^2-ab-ba+b^2$

$=a^2-2ab+b^2$.

练习

1. 下列计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(3a-b)(2a+b)=3a\cdot 2a+(-b)\cdot b=6a^2-b^2$；

(2) $(x+3)(1-x)=x\cdot 1+x\cdot x+3-3\cdot x=x^2-2x+3$.

2. 计算：

(1) $(x-2)(x+3)$；　　(2) $(x+1)(x+5)$；

(3) $(x+4)(x-5)$；　　(4) $(x-3)^2$.

3. 计算：

(1) $(x+2y)^2$；　　(2) $(m-2n)(2m+n)$；

(3) $(3a+2b)(3a-2b)$；　　(4) $(3a-2b)^2$.

习题 2.1

A 组

1. 填空：

(1) $a^2\cdot a^3=$ ________；　　(2) $x\cdot x^3\cdot x^4=$ ________.

2. 计算：

(1) $(a^2)^3$；　　(2) $-(x^m)^5$（m 是正整数）；

(3) $-(2x^2y)^3$；　　(4) $(p^2q)^n$ （n 是正整数）.

3. 计算：

(1) $(-a)^3\cdot a^2$ ；　　(2) $x\cdot(-x)^2$；

(3) $(-x)^2\cdot(-x)^3$；　　(4) $(-a)^3\cdot(-a)^2\cdot(-a)$.

4. 计算：

(1) $2a^3\cdot 3ab$；　　(2) $3x^2y\cdot(-2xy^2)$；

(3) $(2\times10^5)(3\times10^6)$；　　(4) $(1.2\times10^4)(2.5\times10^7)$；

(5) $(1.25a\times10^4)(0.8b\times10^2)$.

5. 光的速度约为 3×10^8 m/s. 从太阳系外距地球最近的一颗恒星(比邻星)发出的光，需要 4 年时间才能到达地球，1 年以 3×10^7 s 计算，求这颗恒星与地球的距离.

6. 长方体的长是 2.4×10^4 cm，宽是 1.5×10^3 cm，高是 0.6×10^3 cm，求这个长方体的体积及表面积.

7. 计算：

(1) $(-2a^2)\left(4ab-\frac{1}{2}ab^2+1\right)$；　　(2) $(2x^2y-xy)\cdot 3xy$；

(3) $3x^2(-2xy)^2-x^3(xy^2-2)$；　　(4) $4m(m^2n-mn^2)-3mn(5m^2+mn)$.

8. 下列计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(3m+2n)(7m-6n)=21m^2-18m+14n-12n^2$；

(2) $(-xy+2y^2)(2xy-3y^2)=2x^2y^2-3xy^3+4xy^3-6y^4=2x^2y^2+xy^3-6y^4$.

9. 计算：

(1) $(x+2)(x-2)$；　　(2) $(2x+1)(2x-1)$；

(3) $(3m+n)^2$；　　(4) $(x-2)^2$.

10. 计算：

(1) $2x\cdot(x^2-4x)-(x^2+1)(2x-3)$；

(2) $(4a+3b)(a-2b)-(3a-2b)\cdot a$.

11. 先化简，再求值：$(2x-1)(3x+2)-(4x-3)(2x-5)$，其中$x=-\frac{1}{2}$.

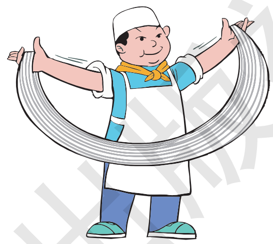
B 组

12. 填空：

(1) $x^{2m}\cdot x^{m-1}=$________ （m 是正整数）；

(2) $y\cdot y^n\cdot y^{2n+1}=$________ （$n$ 是正整数）；

(3) $-a^2\cdot(-a)^3\cdot(-a)=$________.



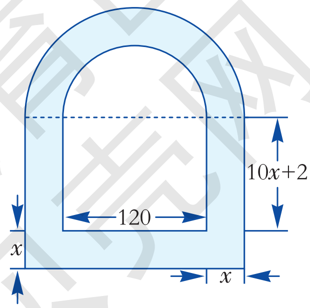
13. 制作拉面需将长条形面团摔匀拉伸后对折，并不断重复若干次这组动作. 随着不断地对折，面条根数不断增加. 若一碗面约有 64 根面条，则面团需要对折多少次？若一个拉面店一天能卖出 2 048 碗拉面，用底数为 2 的幂表示拉面的总根数.

14. 计算：

(1) $(2x^2+y^2)(2x^2-y^2)$；

(2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

15. 求如图所示的窗户的边框面积（上部为半圆）.（单位：cm）



（第 15 题图）

2.2 乘法公式

2.2.1 平方差公式

动脑筋

计算下列各式，你能发现什么规律：

$$(a+1)(a-1)=a^2-a+a-1^2=\underline{\qquad\qquad},$$
$$(a+2)(a-2)=a^2-2a+2a-2^2=\underline{\qquad\qquad},$$
$$(a+3)(a-3)=a^2-3a+3a-3^2=\underline{\qquad\qquad},$$
$$(a+4)(a-4)=a^2-4a+4a-4^2=\underline{\qquad\qquad}.$$

我们用多项式乘法来推导一般情况

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

我们把

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

叫做**平方差公式**（difference of square formula），即两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差.

说一说

如图 2–3（a），将边长为 a 的大正方形剪去一个边长为 b 的小正方形，并将剩余部分沿虚线剪开，得到两个长方形，再将这两个长方形拼成如图 2–3（b）. 你能用这两个图来解释平方差公式吗?

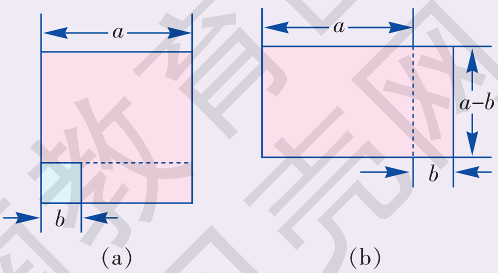


图 2–3

对于满足平方差公式特征的多项式的乘法，可以利用该公式进行简便计算.

例 1 运用平方差公式计算：

(1) $(2x+1)(2x-1)$；　　　　(2) $(x+2y)(x-2y)$.

分析 第(1)题，可以把“$2x$”看成平方差公式中的“a”，“1”看成“b”；第(2)题，可以把“x”看成平方差公式中的“a”，“$2y$”看成“b”.

解 (1) $(2x+1)(2x-1)$

$=(2x)^2-1^2$

$=4x^2-1$.

(2) $(x+2y)(x-2y)$

$=x^2-(2y)^2$

$=x^2-4y^2$.

例 2 运用平方差公式计算：

(1) $\left(-2x-\dfrac{1}{2}y\right)\left(-2x+\dfrac{1}{2}y\right)$；　　　　(2) $(4a+b)(-b+4a)$.

解 (1) $\left(-2x-\dfrac{1}{2}y\right)\left(-2x+\dfrac{1}{2}y\right)$

$=(-2x)^2-\left(\dfrac{1}{2}y\right)^2$

$=4x^2-\dfrac{1}{4}y^2$.

(2) $(4a+b)(-b+4a)$

$=(4a+b)(4a-b)$

$=(4a)^2-b^2$

$=16a^2-b^2$.

将括号内的式子转化为平方差公式形式.

例 3 计算：$1\ 002\times 998$.

解 $1\ 002\times 998$

$=(1\ 000+2)(1\ 000-2)$

$=1\ 000^2-2^2$

$=1\ 000\ 000-4$

$=999\ 996$.

运用平方差公式可以简化一些运算.

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(x-2)(x+2)=x^2-2$；

(2) $(-2x-1)(2x-1)=4x^2-1$.

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(m+2n)(m-2n)$；

(2) $(3a+b)(3a-b)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)$；

(4) $(-1+5a)(-1-5a)$.

3. 计算：

(1) 202×198；

(2) 49.8×50.2.

2.2.2 完全平方公式

动脑筋

计算下列各式，你能发现什么规律？

$(a+1)^2=(a+1)(a+1)=a^2+a+a+1^2=a^2+2\cdot a\cdot1+1^2$,

$(a+2)^2=$____________$=$__________$=a^2+$_______$+2^2$,

$(a+3)^2=$____________$=$__________$=a^2+$_______$+$__^{2},

$(a+4)^2=$____________$=$__________$=a^2+$_______$+$__^{2}.

我们用多项式乘法来推导一般情况

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

做一做

$(a-b)^2=?$

把$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 中的“b”换做“$-b$”，试试看.

$$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

我们把

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

都叫做**完全平方公式**（complete square formula）. 即两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加（或减）它们的积的 2 倍.

说一说

把一个边长为 $a+b$ 的正方形按图 2-4 分割成 4 块，你能用这个图来解释完全平方公式吗?

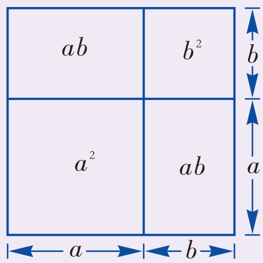


图 2-4

利用完全平方公式，可以对形如两数和(或差)的平方的乘法进行简便运算.

例 4 运用完全平方公式计算：

(1) $(3m+n)^2$；　　(2) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

解 (1) $(3m+n)^2$

$=(3m)^2+2\cdot 3m\cdot n+n^2$

$=9m^2+6mn+n^2$.

把“$3m$”看成完全平方公式中的“a”.

(2) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=x^2-x+\dfrac{1}{4}$.

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(x+2)^2=x^2+4$；　　(2) $(-a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(x+4)^2$；　　(2) $(2a-3)^2$；　　(3) $\left(5m-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

3. 自编两个可以利用完全平方公式计算的题，并与同学交流解题过程.

说一说

$(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$，$(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 相等吗？为什么？

相等.

因为 $(b-a)^2=[-(a-b)]^2=(a-b)^2$，所以 $(a-b)^2=(b-a)^2$；

又因为 $(-a-b)^2=[-(a+b)]^2=(a+b)^2$，所以 $(a+b)^2=(-a-b)^2$.

用完全平方公式将它们分别展开，可得……

例 5 运用完全平方公式计算：

(1) $(-x+1)^2$；　　(2) $(-2x-3)^2$.

解 (1) $(-x+1)^2$

$=(-x)^2+2(-x)\cdot 1+1^2$

$=x^2-2x+1$.

(2) $(-2x-3)^2$

$=[-(2x+3)]^2$

$=(2x+3)^2$

$=4x^2+12x+9$.

第(1)题我是这样做的：

$(-x+1)^2$

$=(1-x)^2$

$=1^2-2\cdot 1\cdot x+x^2$

$=1-2x+x^2$.

对吗？

例 6 计算：

(1) $(a+b)^2-(a-b)^2$；　　(2) $(a+b+1)^2$.

解 (1) $(a+b)^2-(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab$.

(2) $(a+b+1)^2$

$=[(a+b)+1]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)+1$

$=a^2+2ab+b^2+2a+2b+1$.

例 7 计算：

(1) 104^2；　　(2) 198^2.

解 (1) $104^2=(100+4)^2$

$=100^2+2\times100\times4+4^2$

$=10\,000+800+16$

$=10\,816$.

(2) $198^2=(200-2)^2$

$=200^2-2\times200\times2+2^2$

$=40\,000-800+4$

$=39\,204$.

练习

1. 运用完全平方公式计算：

(1) $(-2a+3)^2$；　　(2) $\left(-3x+\dfrac{1}{2}\right)^2$；

(3) $(-x^2-4y)^2$；　　(4) $(1-2b)^2$.

2. 计算：

(1) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$；　　(2) $(a-b+1)^2$.

3. 计算：

(1) 103^2；　　(2) 297^2.

2.2.3 运用乘法公式进行计算

动脑筋

(1) $(x+1)(x^2+1)(x-1)=?$　　(2) $(x+y+1)(x+y-1)=?$

对于问题(1)，如果直接按从左至右的运算顺序进行计算，计算过程很繁琐，而且容易出错. 通过观察，发现$(x+1)$与$(x-1)$可以凑成平方差公式，然后再与(x^2+1)相乘，可以简化运算.

$$\begin{aligned}&(x+1)(x^2+1)(x-1)\\=&(x+1)(x-1)(x^2+1)\quad\text{（交换律）}\\=&(x^2-1)(x^2+1)\\=&x^4-1.\end{aligned}$$

对于问题(2)，通过观察，发现可以把 $x+y$ 看做一个整体，这样就可以用平方差公式来计算.

$$\begin{aligned}&(x+y+1)(x+y-1)\\=&[(x+y)+1][(x+y)-1]\\=&(x+y)^2-1\\=&x^2+2xy+y^2-1.\end{aligned}$$

遇到多项式的乘法时，我们要先观察式子的特征，看能否运用乘法公式，以达到简化运算的目的.

例 8 运用乘法公式计算：

(1) $[(a+3)(a-3)]^2$；　　(2) $(a-b+c)(a+b-c)$.

解 (1) $[(a+3)(a-3)]^2$

$$\begin{aligned}&=(a^2-9)^2\\&=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 9+9^2\\&=a^4-18a^2+81.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ &(a-b+c)(a+b-c)\\
&=[a-(b-c)][a+(b-c)]\\
&=a^2-(b-c)^2\\
&=a^2-(b^2-2bc+c^2)\\
&=a^2-b^2+2bc-c^2.
\end{aligned}
$$

做一做

运用乘法公式计算：$(a+b+c)^2$.

例 9 一个正方形花圃的边长增加到原来的 2 倍还多 1 m，它的面积就增加到原来的 4 倍还多 21 m²，求这个正方形花圃原来的边长.

解 设正方形花圃原来的边长为 x m.

由数量关系，得

$$(2x+1)^2=4x^2+21,$$

化简，得

$$4x^2+4x+1=4x^2+21,$$

即 $$4x=20,$$

解得 $$x=5.$$

答：这个正方形花圃原来的边长为 5 m.

练习

1. 运用乘法公式计算：

(1) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$；　(2) $(a+2b-1)(a+2b+1)$；

(3) $(2m+n-1)(2m-n+1)$；　(4) $(x+1)^2(x-1)^2$.

2. 计算：$(a-b-c)^2$.

3. 一个正方形的边长增加 2 cm，它的面积就增加 16 cm²，求这个正方形原来的边长.

习题 2.2

A 组

1. 运用平方差公式计算：

(1) $(2x+y)(2x-y)$；

(2) $(-a-b)(-a+b)$；

(3) $(0.2x-0.1)(0.1+0.2x)$；

(4) 102×98.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(5a+4b)^2$；

(2) $(3x-2y)^2$；

(3) $(-2m-1)^2$；

(4) 9.98^2 .

3. 运用乘法公式计算：

(1) $(-x-2)(x-2)$；

(2) $x^2-(x-1)^2$；

(3) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$；

(4) $(-x-1)(x+1)$.

4. 计算：

(1) $(2x-y)(2x+y)-(3x+2y)(3x-2y)$；

(2) $(2a-b)(2a+b)-(2a-b)^2$.

B 组

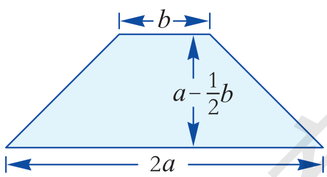
5. 运用乘法公式计算：

(1) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$；

(2) $(x+2y-1)^2$.

6. 先化简后求值：$(2x+y)(2x-y)(4x^2+y^2)$，其中 $x=\frac{1}{2}$， $y=\frac{1}{3}$.

7. 求下图的面积：



(第 7 题图)

8. 已知 $(a-b)^2=49$， $ab=18$， 求代数式 a^2+b^2 的值.

9. 已知甲数为 $2a$，乙数比甲数的 2 倍多 3，丙数比甲数的 2 倍少3，求甲、乙、丙三数的积. 当 $a=-\frac{1}{3}$ 时，积是多少?

小结与复习

回顾

1. $a^m \cdot a^n$，$(a^m)^n$，$(ab)^n$ 分别怎么计算？

2. 单项式与单项式相乘，怎么乘？多项式与多项式相乘，怎么乘？

3. 本章学习了哪几个乘法公式？你能从图形的角度来解释乘法公式吗？

本章知识结构

- 整式的乘法
  - 幂的运算
  - 单项式的乘法
  - 多项式的乘法
  - 乘法公式
    - 平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
    - 完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

注意

1. 同底数幂的乘法和幂的乘方容易混淆，运算时要注意区分.

2. 多项式与多项式相乘注意不要漏乘.

3. 运用乘法公式进行运算，关键是要把握公式的特征，灵活选用公式.

复习题 2

A 组

1. 计算：

(1) $-b \cdot b^3$；　　(2) $a^2 \cdot a^3 \cdot (-a)^4$；

(3) $-x \cdot (-x)^2$；　　(4) $(-2a^2b)^3$；

(5) $5x \cdot (-2xy)$；　　(6) $\left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot (-2xy)^2$.

2. 计算:

(1) $6xy\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)$；　　(2) $\left(5m-\frac{1}{2}mn\right) \cdot (-3m)$；

(3) $(2a+5)(a-1)$.

3. 计算:

(1) $(x+2)(x-2)$；　　(2) $(-3a-1)(-1+3a)$；

(3) $(2m+5)^2$；　　(4) $(-3+2y)^2$.

4. 计算：

(1) $(x+3)(x-3)-(x+3)^2$；　　(2) $(xy+z)(-xy+z)$；

(3) $(x+2y-1)(x-2y+1)$.

5. 先化简，再求值.

(1) $4x^2-2x(-x+2y)$，其中 $x=-1$，$y=2$；

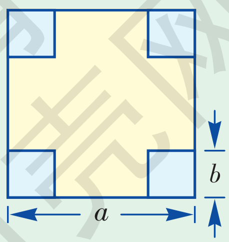
(2) $(x-2y)(x+2y)-(x-2y)^2$，其中 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$.

6. 运用乘法公式计算：

$$500^2-499\times501.$$

7. 已知甲数是 a，乙数比甲数的 2 倍多 1，丙数比乙数少 2，试求甲、乙、丙三数的和与积，并计算当 $a=-\frac{5}{2}$ 时的和与积分别是多少.

8. 如图，把边长为 a 的正方形的四角，各剪去一个边长为 $b\left(b<\frac{a}{2}\right)$ 的正方形，然后把它折成一个无盖的纸盒，求纸盒的容积.（结果要求用关于 a，b 的多项式表示.）



（第 8 题图）

B 组

9. 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=4$．求：

(1) ab 的值；　　(2) a^2+b^2 的值.

10. 计算：

(1) $2x^3-2x[x^2-2(x-3)]$；　　(2) $(x-1)(x^2+x+1)$.

11. 解下列方程（组）：

(1) $(x-1)(1+x)-(x+2)(x-3)=2x-5$；

(2) $\begin{cases}(2x+1)(y-2)=2xy, \\ x-2y=4.\end{cases}$

12. 先化简，再求值：

(1) $xy-2x\left[2y-\dfrac{1}{2}(x+y)\right]$，其中 $x=-3$，$y=\dfrac{2}{3}$；

(2) $2(a+b)(a-b)-(a+b)^2+(a-b)^2$，其中 $a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$.

C 组

13. 解方程：$(x+2)^2-5(x-1)^2=-4x^2+9x-2$.

14. 计算：

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$；　　(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

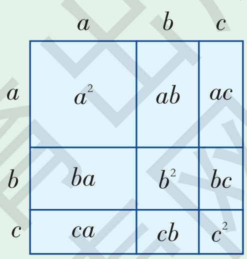
(3) $(a+b)^3$；　　(4) $(a-b)^3$.

15. 求值：

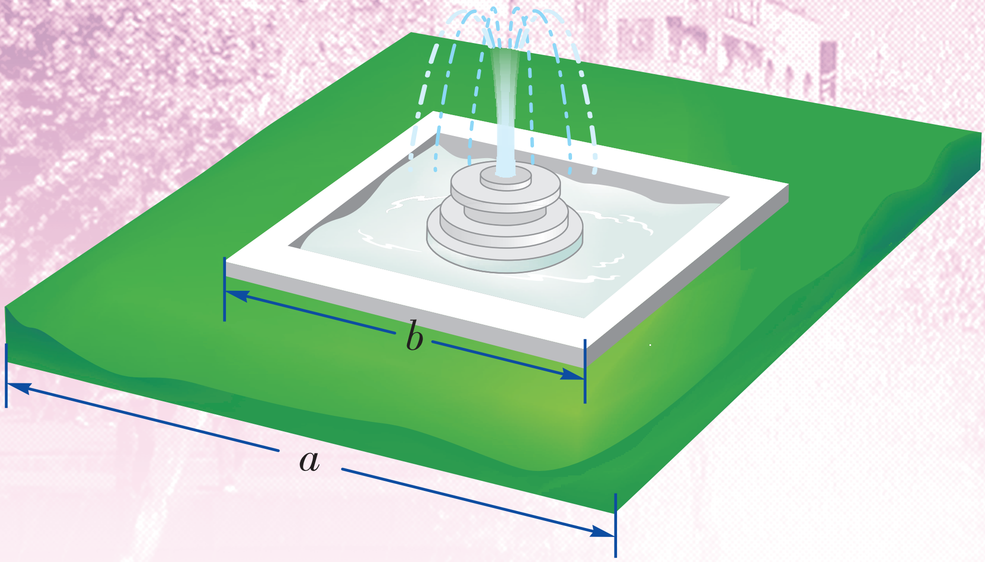
(1) 已知 $a+\dfrac{1}{a}=3$，求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 和 $a^4+\dfrac{1}{a^4}$ 的值；

(2) 已知 $a-b=2$，$ab=1$，求 a^2+b^2 的值.

16. 把一个边长为 $a+b+c$ 的正方形按如图所示分割成 9 块，你能用这个图来解释 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 吗？



(第 16 题图)



$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

第3章

因式分解

在一块边长为 a 的正方形空地中间，有一个边长为 b 的正方形水池，若在空地上种草，则草地面积为 a^2-b^2？若 $a=118$ m，$b=18$ m，如何较简便地计算出草地面积呢？

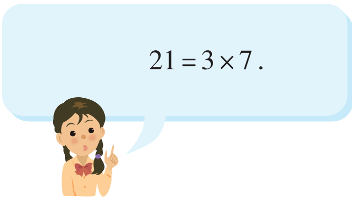
在上例中，我们可以应用平方差公式，将多项式 a^2-b^2 改写成 $(a+b)(a-b)$ 的形式，从而达到简化运算的效果. 事实上，在代数运算和解决实际问题的过程中，我们经常要将一个多项式写成若干个多项式相乘的形式，这个过程就叫做因式分解.

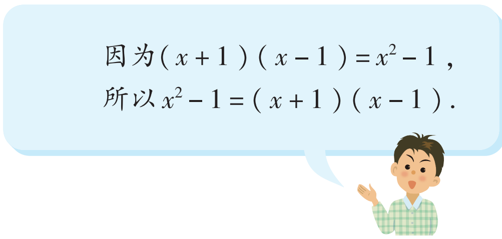
3.1 多项式的因式分解

说一说

（1）21 等于 3 乘哪个整数？

（2）x^2-1 等于 $x+1$ 乘哪个多项式？





对于整数 21 与 3，有整数 7 使得 $21=3\times7$，我们把 3 叫做 21 的一个因数，同理 7 也是 21 的一个因数.

类似地，对于多项式 x^2-1 与 $x+1$，由整式的乘法有多项式 $x-1$ 使得 $x^2-1=(x+1)(x-1)$ 成立，我们把多项式 $x+1$ 叫做 x^2-1 的一个因式. 同理，$x-1$ 也是 x^2-1 的一个因式.

一般地，对于两个多项式[①] f 与 g，如果有多项式 h 使得 $f=gh$，那么我们把 g 叫做 f 的一个**因式**（factor）. 此时，h 也是 f 的一个因式.

把 x^2-1 写成 $(x+1)(x-1)$ 的形式叫做把这个多项式因式分解.

一般地，把一个多项式表示成若干个多项式的乘积的形式，称为把这个多项式**因式分解**（factorization，factoring）.

① 在现代数学文献中，把单项式看成是只有一项的多项式.

为什么要把一个多项式因式分解呢?

我们来看一个例子,素(质)数[①]是正整数中的“基本建筑块”,我们可以把每一个大于 1 的正整数都表示成若干个素(质)数的乘积的形式. 例如

$$12=2\times2\times3, \quad ①$$

$$30=2\times3\times5. \quad ②$$

有了①式和②式,就容易求出 12 和 30 的最大公因数为$2\times3=6$,

进而很容易把分数$\frac{12}{30}$约分:分子与分母同除以 6,得$\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$.

类似的,我们应用因式分解的办法将多项式表示成若干个最基本的多项式的乘积的形式,这将为以后学习分式的约分,解一元二次方程等架起解决的桥梁.

例 1 下列各式由左边到右边的变形,哪些是因式分解,哪些不是,为什么?

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

(2) $m^2+m-4=(m+3)(m-2)+2$.

解 (1) 是. 因为从左边到右边是把多项式 $a^2+2ab+b^2$ 表示成了多项式 $a+b$ 与 $a+b$ 的积的形式.

(2) 不是. 因为$(m+3)(m-2)+2$ 不是几个多项式乘积的形式.

例 2 检验下列因式分解是否正确.

(1) $x^2+xy=x(x+y)$;

(2) $a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$;

(3) $2m^2-n^2=(2m-n)(2m+n)$.

分析 检验因式分解是否正确,只要看等式右边的几个多项式的乘积与左边的多项式是否相等.

① 素数都大于 1.

解 (1) 因为 $x(x+y)=x^2+xy$,

所以因式分解 $x^2+xy=x(x+y)$ 正确.

(2) 因为 $(a-2)(a-3)=a^2-5a+6$,

所以因式分解 $a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$ 正确.

(3) 因为 $(2m-n)(2m+n)=4m^2-n^2\neq 2m^2-n^2$,

所以因式分解 $2m^2-n^2=(2m-n)(2m+n)$ 不正确.

练习

1. 求 4，6，14 的最大公因数 .

2. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是，为什么？

(1) $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$;

(2) $2x^2y+4xy^2=2xy(x+2y)$;

(3) $x^2-2=(x+1)(x-1)-1$;

(4) $4a^2-4a+1=(2a-1)^2$.

3. 检验下列因式分解是否正确.

(1) $-2a^2+4a=-2a(a+2)$;

(2) $x^3+x^2+x=x(x^2+x)$;

(3) $m^2+3m+2=(m+1)(m+2)$.

习题 3.1

A 组

1. 求 36 和 60 的最大公因数 .

2. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是，为什么？

(1) $4x^2-8x-1=4x(x-2)-1$;

(2) $ax^2-bx^2-x=x(ax-bx-1)$;

(3) $x^2-y^2-1=(x+y)(x-y)-1$.

3. 检验下列因式分解是否正确.

(1) $x^2-7x-10=(x-2)(x-5)$;

(2) $4m^2-4m+1=4m(m-1)$;

(3) $10x^2y-5xy^2=5xy(2x-y)$;

(4) $a^3b^2-a^2b+a^2=a^2(ab^2-b)$.

B 组

4. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些是多项式乘法？

(1) $(x+5)(x-1)=x^2+4x-5$;

(2) $(x+2)(x-2)=x^2-4$;

(3) $12ax-12ay=12a(x-y)$;

(4) $x^2-10xy+25y^2=(x-5y)^2$.

5. 小明在水果店里买了苹果、梨、葡萄各 a kg，这三种水果的单价分别为 x，y，z 元.

(1) 用两种方法计算他共花了多少元.

(2) 在你得到的两个式子中，分别要做多少次加法，多少次乘法？按照哪个式子计算较简便？

(3) 你能从这个例子中体会到因式分解的用处吗？

3.2 提公因式法

说一说

下列每个式子含字母的因式有哪些?

xy，xz，xw.

xy 的因式有 x，y，…

xz 的因式有 x，z，…

xw 的因式有 x，w，…

由此看出，xy，xz，xw 有公共的因式 x.

几个多项式的公共的因式称为它们的**公因式**（common factor).

如何把多项式 $xy+xz+xw$ 因式分解?

把乘法分配律从右到左地使用，便得出

$$xy+xz+xw=x(y+z+w).$$

像上面那样，如果一个多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，这种把多项式因式分解的方法叫做**提公因式法**.

例 1 把 $5x^2-3xy+x$ 因式分解.

分析 多项式各项均含有 x，因此公因式为 x. 第 3 项将 x 提出后，括号内的因式为 1.

解 $5x^2-3xy+x$

$=x(5x-3y+1)$.

例 2 把 $4x^2-6x$ 因式分解.

分析 先确定公因式的系数，再确定字母. 这两项的系数为 4，6，它们的最大公约数是 2；两项的字母部分 x^2 与 x 都含有字母 x，且 x 的最低次数是 1，因此公因式为 $2x$.

解 $4x^2-6x$

$=2x(2x-3)$.

例 3 把 $8x^2y^4-12xy^2z$ 因式分解.

分析 公因式的系数是 8 与 12 的最大公约数 4；公因式含的字母是各项中相同的字母 x 和 y，它们的指数取各项中次数最低的，因此公因式为 $4xy^2$.

解 $8x^2y^4-12xy^2z$

$=(4xy^2)\cdot 2xy^2-(4xy^2)\cdot 3z$

$=4xy^2(2xy^2-3z)$.

练习

1. 说出下列多项式中各项的公因式：

(1) $-12x^2y+18xy-15y$；　　(2) $\pi r^2h+\pi r^3$；

(3) $2x^my^{n-1}-4x^{m-1}y^n$ (m，n 均为大于 1 的整数).

2. 在下列括号内填写适当的多项式：

(1) $3x^3-2x^2+x=x(\qquad\qquad)$；

(2) $-30x^3y^2+48x^2yz=-6x^2y(\qquad\qquad)$.

3. 把下列多项式因式分解：

(1) $3xy-5y^2+y$；　　(2) $-6m^3n^2-4m^2n^3+10m^2n^2$；

(3) $4x^3yz^2-8x^2yz^4+12x^4y^2z^3$.

说一说

下列多项式中各项的公因式是什么？

(1) $2am(x+1)+4bm(x+1)+8cm(x+1)$；

(2) $2x(3a-b)-y(b-3a)$.

$2am(x+1)$，$4bm(x+1)$ 与 $8cm(x+1)$ 的公因式是 $2m(x+1)$.

$b-3a$ 可以看做 $-(3a-b)$，所以 $2x(3a-b)$ 与 $y(b-3a)$ 的公因式是 $3a-b$.

例 4 把下列多项式因式分解：

(1) $x(x-2)-3(x-2)$；　　(2) $x(x-2)-3(2-x)$.

解 (1) $x(x-2)-3(x-2)$

$=(x-2)(x-3)$.

(2) $x(x-2)-3(2-x)$

$=x(x-2)-3[-(x-2)]$

$=x(x-2)+3(x-2)$

$=(x-2)(x+3)$.

把第 2 项中的 $2-x$ 转化为 $-(x-2)$.

例 5 把 $(a+c)(a-b)^2-(a-c)(b-a)^2$ 因式分解.

解 $(a+c)(a-b)^2-(a-c)(b-a)^2$

$=(a+c)(a-b)^2-(a-c)(a-b)^2$

$=(a-b)^2[(a+c)-(a-c)]$

$=(a-b)^2(a+c-a+c)$

$=2c(a-b)^2$.

例 6 把 $12xy^2(x+y)-18x^2y(x+y)$ 因式分解.

解 $12xy^2(x+y)-18x^2y(x+y)$

$=6xy(x+y)(2y-3x)$.

议一议

因式分解时，如何确定多项式各项的公因式？

练习

把下列多项式因式分解：

(1) $y(x-y)+x(x-y)$；　　(2) $y(x-y)+x(y-x)$；

(3) $a(x-y)^2-b(y-x)^2$；　　(4) $4a^2b(a-b)-6ab^2(a-b)$.

习题 3.2

A 组

1. 在下列括号内填写适当的多项式：

(1) $-2x^2+10x-10xy=-2x(\qquad\qquad\qquad)$；

(2) $\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}\pi r^2(\qquad\qquad\qquad)$.

2. 把下列多项式因式分解：

(1) $-4x^2+10x$；　　(2) $3y^2-5xy-y$；

(3) $15a^3b-21a^2b^3+6a^2b^2$；

(4) $(x-1)(x^2+x+1)+(x+1)(x^2+x+1)$；

(5) $a(a+b)(b-a)-b(a+b)(a-b)$；

(6) $24a^3b^2(a+b^2)-36a^2b^3(a+b^2)$.

B 组

3. 把下列多项式因式分解：

(1) $x(y-3)-(2y-6)$；

(2) $(x+y)^3-(x-y)^2(x+y)$；

(3) $x(x^2-xy)-(4x^2-4xy)$.

4. 从一座楼房的房顶掉下一个小球，经过某个窗户下边框时的速度 $v_0=2.75$ m/s，再经过 2.5 s，小球着地. 已知小球降落的高度 h 满足公式：$h=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g=9.8$ m/s^2，t 为小球下落的时间. 求该窗户下边框离地的高度. 怎样计算较简便？

3.3 公式法

动脑筋

如何把 x^2-25 因式分解？

我们学过平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，把这个乘法公式从右到左地使用，得 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

因此

$$\begin{array}{ccccccc} x^2-25= & x^2 & - & 5^2 & = & (x+5) & (x-5). \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\ & \boxed{a^2} & - & \boxed{b^2} & = & \boxed{(a+b)} & \boxed{(a-b)} \end{array}$$

像上面那样，把乘法公式从右到左地使用，就可以把某些形式的多项式进行因式分解，这种因式分解的方法叫做**公式法**.

例 1 把 $25x^2-4y^2$ 因式分解.

分析 $25x^2=(5x)^2$，$4y^2=(2y)^2$，$25x^2-4y^2=(5x)^2-(2y)^2$，原式即可用平方差公式进行因式分解.

解 $25x^2-4y^2$

$=(5x)^2-(2y)^2$

$=(5x+2y)(5x-2y)$.

例 2 把 $(x+y)^2-(x-z)^2$ 因式分解.

分析 将 $(x+y)$ 看成 a，$(x-z)$ 看成 b，原式即可用平方差公式进行因式分解.

解 $(x+y)^2-(x-z)^2$

$=[(x+y)+(x-z)][(x+y)-(x-z)]$

$=(2x+y-z)(y+z)$.

例 3 把 x^4-y^4 因式分解.

解 x^4-y^4

$=(x^2)^2-(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

在因式分解时，必须进行到每一个因式都不能分解为止.

例 4 把 $x^3y^2-x^5$ 因式分解.

分析 $x^3y^2-x^5$ 有公因式 x^3，应先提出公因式，再进一步进行因式分解.

解 $x^3y^2-x^5$

$=x^3(y^2-x^2)$

$=x^3(y+x)(y-x)$.

练习

1. 填空：

（1）$9y^2=(\qquad)^2$；　　（2）$\dfrac{36}{25}x^2=(\qquad)^2$；

（3）$\dfrac{9}{4}t^2=(\qquad)^2$.

2. 把下列多项式因式分解：

（1）$9y^2-4x^2$；　　（2）$1-25x^2$；

（3）$\dfrac{9}{25}m^2-16n^2$；　　（4）$(x+y)^2-(y-x)^2$；

（5）x^4-16；　　（6）$9x^4-36y^2$；

（7）a^3-ab^2.

3. 计算：

（1）$49.6^2-50.4^2$；

（2）$13.3^2-11.7^2$.

4. 手表表盘的外圆直径 D=3.2 cm，内圆直径 d = 2.8 cm，在外圆与内圆之间涂有防水材料. 试求涂上防水材料的圆环的面积（结果保留 π）. 怎样计算较简便？

动脑筋

你能将多项式 $a^2+2ab+b^2$ 或 $a^2-2ab+b^2$ 进行因式分解吗？

我们学过完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

将完全平方公式从右到左地使用,就可以把形如这样的多项式进行因式分解.

例如，$x^2+4x+4=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=(x+2)^2$.

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$$

例 5 把 $9x^2-3x+\dfrac{1}{4}$ 因式分解.

分析 $9x^2=(3x)^2$，$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，$3x=2\cdot 3x\cdot\dfrac{1}{2}$，原式即可用完全平方公式进行因式分解.

解 $9x^2-3x+\dfrac{1}{4}$

$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

例 6 把$-4x^2+12xy-9y^2$ 因式分解.

解 $-4x^2+12xy-9y^2$

$=-(4x^2-12xy+9y^2)$

$=-[(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2]$

$=-(2x-3y)^2$.

例 7 把 $a^4+2a^2b+b^2$ 因式分解.

解 $a^4+2a^2b+b^2$

$=(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot b+b^2$

$=(a^2+b)^2$.

例 8 把 x^4-2x^2+1 因式分解.

解 x^4-2x^2+1

$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 1+1^2$

$=(x^2-1)^2$

$=[(x+1)(x-1)]^2$

$=(x+1)^2(x-1)^2$.

练习

1. 填空（若某一栏不适用，填入“不适用”）：

多项式	能否表示成 $(a+b)^2$ 或 $(a-b)^2$ 的形式	a，b 各表示什么
$x^2-10x+25$		
x^2+2x+4		
$1+y+\frac{y^2}{4}$		
$4x^2-12xy+9y^2$		

2. 把下列多项式因式分解：

（1）$x^2+5x+\frac{25}{4}$；　（2）$16y^2-24y+9$；

（3）$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$；　（4）$3x^4+6x^3y^2+3x^2y^4$.

习题 3.3

A 组

1. 把下列多项式因式分解：

（1）x^2-81；　（2）$\frac{1}{4}a^2-b^2$；

（3）$9(x-y)^2-25$；　（4）$(x^2-y)^2-(2y-2)^2$；

（5）x^4-81；　（6）$3x^6-3x^2$；

（7）$(a^2-2b)^2-(1-2b)^2$.

2. 把下列多项式因式分解：

(1) $x^2+7x+\frac{49}{4}$；

(2) $m^2-10m+25$；

(3) $25x^2+20xy+4y^2$；

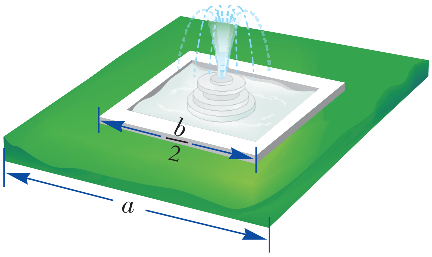
(4) $p^2-pq+\frac{1}{4}q^2$；

(5) $-x^2+14xy-49y^2$；

(6) $x^4-8x^2y^2+16y^4$；

(7) x^4+4x^2+4.

3. 如图，在边长为 a 的正方形空地的中间，有一个边长为 $\frac{b}{2}\left(a>\frac{b}{2}\right)$ 的正方形水池. 若在空地上种草，试问：草地的面积是多少？如果 $a=124$ m，$b=48$ m，那么草地的面积是多少？怎样计算较简便？



(第 3 题图)

B 组

4. 把下列多项式因式分解：

(1) $4x^2-(y^2-2y+1)$；

(2) $(x^4+4x^2+4)-4y^2$；

(3) $(x-4)(x+1)+3x$；

(4) $(x+y)^2+12(x+y)+36$.

5. 已知 $9m^2+xm+16$ 可以用完全平方公式进行因式分解，求 x.

6. 在日常生活中，如取款、上网都需要密码. 有一种用因式分解产生的密码，方便记忆. 其原理是：对于多项式 x^4-y^4，其因式分解的结果是 $(x^2+y^2)\cdot(x+y)(x-y)$，若取 $x=9$，$y=9$，则各个因式的值是 $x^2+y^2=162$，$x+y=18$，$x-y=0$，于是就把“162180”作为一个六位数的密码. 对于多项式 x^3-xy^2，若取 $x=21$，$y=5$，用上述方法产生的密码是多少？

小结与复习

回顾

1. 什么叫多项式的因式分解？因式分解与多项式的乘法有什么关系？

2. 什么叫公因式？怎样确定公因式？

3. 因式分解有哪些方法？写出公式法分解因式时所用的公式.

本章知识结构

- 因式分解
  - 概念
  - 因式分解的方法
    - 提公因式法
    - 公式法

注意

1. 运用整式乘法可以检验因式分解的结果是否正确.

2. 提公因式时，如果多项式的首项为负数，一般先把负号提出来，并把括号内的各项变号.

3. 因式分解一定要进行到每一个因式都不能再分解为止. 如 x^4-1 可以分解为 $(x^2+1)(x^2-1)$，但是 x^2-1 还可以分解为 $(x+1)(x-1)$，于是 $x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

复习题 3

A 组

1. 把下列多项式因式分解：

(1) x^2-xy+x；　(2) m^2n-mn^2+mn；

(3) $9x^3y^3-21x^3y^2+12x^2y^2$；　(4) $x^2(x-y)+y^2(x-y)$.

2. 把下列多项式因式分解：

(1) x^2-9；　(2) $49m^2-81n^2$；

(3) $x^2-\frac{1}{144}$；　(4) $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{25}b^2$.

3. 把下列多项式因式分解：

(1) $4x^2+20x+25$；　(2) x^4+6x^2+9；

(3) x^4-18x^2+81；　(4) $(x-y)^2+2(x-y)w+w^2$；

(5) $4a^4+12a^2b^2+9b^4$.

4. 把下列多项式因式分解：

(1) $-6x^2+12x-6$；　(2) $-9x^2+24xy-16y^2$；

(3) $a^2(a-b)+2ab(a-b)+b^2(a-b)$；　(4) $(x+y+1)^2-(x-y+1)^2$；

(5) x^4-16；　(6) x^4-16y^4.

5. 计算：

(1) $17\times0.11+37\times0.11+46\times0.11$；　(2) 256^2-156^2.

B 组

6. 把下列多项式因式分解：

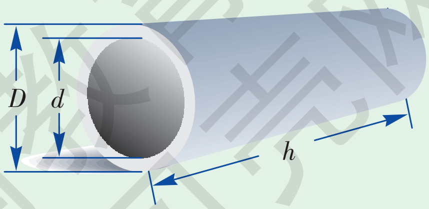
(1) $y^2-(x^2-10x+25)$；　(2) $(a^2-9b^2)+(a-3b)$；

(3) $(x^3-x^2)+(x-1)$；　(4) $ax-bx-ay+by$.

7. 把下列多项式因式分解：

(1) $(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$；　(2) $x^3z-4x^2yz+4xy^2z$.

8. 一种混凝土排水管，其形状为空心的圆柱体，它的内径 $d=68$ cm，外径 $D=88$ cm，长 $h=200$ cm. 浇制一节这样的排水管需要多少立方米的混凝土（结果保留 π）？怎样计算较简便？



（第 8 题图）

9. 先化简，再求值：

$(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$，其中 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$.

10. 已知 $2x-1=3$，求代数式$(x-3)^2-2(x-3)+1$的值.

C 组

11. 把下列多项式因式分解：

(1) x^2-4y^2+x+2y；

(2) $(x+y)^2-4(x+y-1)$；

(3) $x^{n+1}-2x^n+x^{n-1}$ (n是大于1的正整数).

12. 你能把多项式 x^2+5x+6 因式分解吗?

(1) 上式能利用完全平方公式进行因式分解吗?

(2) 常数项6是哪两个因数的乘积? 一次项系数5是否等于6的某两个因数的和?

(3) 由多项式乘法，$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，将该式从右到左地使用，即可对形如 $x^2+(a+b)x+ab$ 的多项式进行因式分解.

多项式 $x^2+(a+b)x+ab$ 的特征是二次项系数为1,常数项为两数之积,一次项系数为这两数之和.

你能据此将 x^2+5x+6 写成两个一次多项式的乘积吗?

$$x^2+(\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_)x+\_\_\_\_\_\_\times\_\_\_\_\_\_$$
$$=(x+\_\_\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_\_\_).$$

请把填上数后的两个一次多项式相乘，验证乘积是否等于 x^2+5x+6.

(4) 从第(3)题，你能看出把 x^2+5x+6 进行因式分解的关键步骤是什么吗?

(5) 你能运用上述方法将多项式 x^2-x-2进行因式分解吗?

第4章

相交线与平行线

在我们生活的现实世界中，随处可见由平行和垂直交织而成的图形，如上图中，表示人行道的线条之间是平行关系，这些线条和表示自行车道的线条之间是垂直关系．

什么样的两条直线叫做平行线？平行线有什么性质？怎样判定两条直线平行呢？什么样的两条直线叫互相垂直？垂线有哪些性质？

通过本章的学习，这些问题将迎刃而解．

4.1 平面上两条直线的位置关系

4.1.1 相交与平行

观察

小明家客厅的窗户由两扇窗页组成，图 4–1 表示两扇窗页开合的状态. 当我们把两扇窗页近似地看成在同一平面内，并且考虑每扇窗页的四条边所在的直线时，这些直线的相互位置有哪些关系？

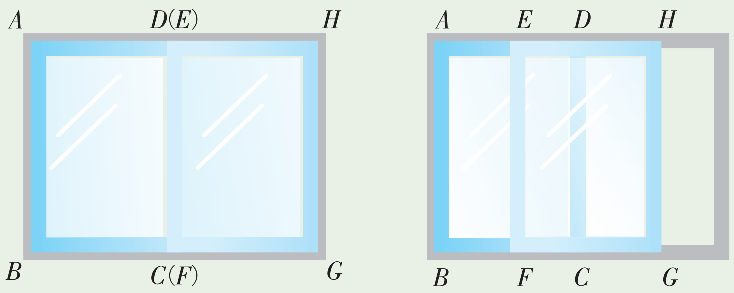


图 4–1

AD 和 AB，EH 和 EF 相交，
AD 和 EH，BC 和 FG 重合，
AB 和 DC，AD 和 BC 既不相交，也不重合！

同一平面内的两条直线有三种位置关系：相交、重合、既不相交也不重合.

如果两条直线有两个公共点，那么它们一定重合. 在本书中，如果没有特别说明，两条重合的直线只当做一条.

如果两条直线有且只有一个公共点，那么称这两条直线相交，也称它们是相交直线，这个公共点叫做它们的交点.

一段笔直的铁路上的两条铁轨，一行挺立的电杆，一排栅栏里的竖条，都给我们以两条直线既不相交也不重合的形象. 这样的两条直线没有公共点.



在同一平面内，没有公共点的两条直线叫做平行线（parallel lines）.

平行用符号“//”表示. 如图 4-2，AB 与 CD 平行，记做“$AB//CD$”，读做“AB 平行于 CD”.

图 4-2

做一做

如图 4-3，任意画一条直线 a，并在直线 a 外任取一点 P. 请画一条过点 P 且与 a 平行的直线.

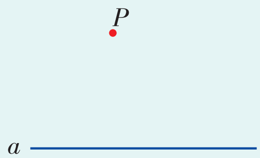


图 4-3

画法：1. 把三角尺的 BC 边靠紧直线 a，再用直尺（或另一块三角尺）靠紧三角尺的另一边 AC.

2. 沿直尺推动三角尺，使原来和直线 a 重合的一边经过点 P.

3. 沿三角尺的这条边画直线 b.

则直线 b 就是过点 P 且与直线 a 平行的直线（如图 4-4）.

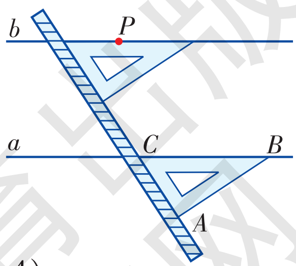


图 4-4

人们从长期的实践经验中抽象出如下**基本事实**：

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

说一说

如图 4-5，如果直线 a 与 c 都和直线 b 平行，那么 a 与 c 平行吗？

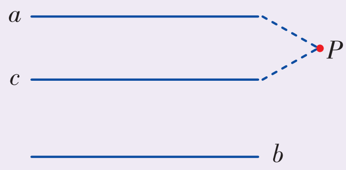


图 4-5

若 a 与 c 不平行，就会相交于某一点 P（如图 4-5），那么过点 P 就有两条直线与 b 平行，这是不可能的. 所以 $a/\!/c$.

由此我们得到：

平行于同一条直线的两条直线平行.

也就是说，$a/\!/b$，$c/\!/b$，那么 $a/\!/c$.

一条线段向两端无限延伸就得到一条直线，这说明直线有两个方向，它们是互为相反的方向，取定一个方向，就确定了另一个方向. 在每条直线上取定一个方向，两条直线平行也就是它们的方向相同或相反；反过来，具有方向相同或相反的两条直线平行，如图 4-6（a）、（b）所示.

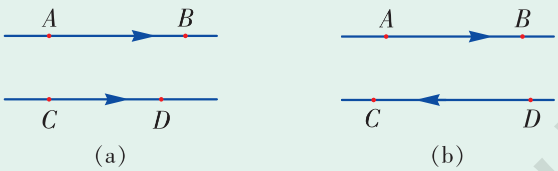
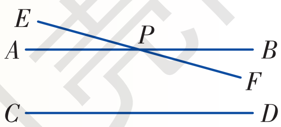


图 4-6

练习



（第 1 题图）

1. 如图，在同一平面内，若 $AB/\!/CD$，EF 与 AB 相交于点 P，EF 能与 CD 平行吗？为什么？

2. 请举出生活中平行线的例子.

3. 如图是用电脑画出来的“花”，它由一些平行线段组成，你能找出其中的一些平行线段吗？请你用画平行线的方法设计一件“艺术品”.

(第 3 题图)

4.1.2 相交直线所成的角

如图 4–7，剪刀的两个交叉腿构成四个角，将其简单地表示为图 4–8. 在图 4–8 中，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 有共同的顶点 O，且其中一个角的两边分别是另一个角两边的反向延长线，这样的两个角叫做**对顶角**（opposite angles）.

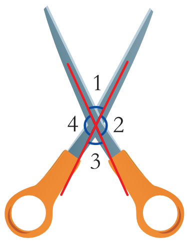


图 4–7

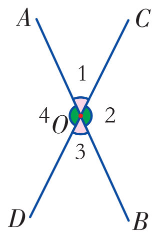
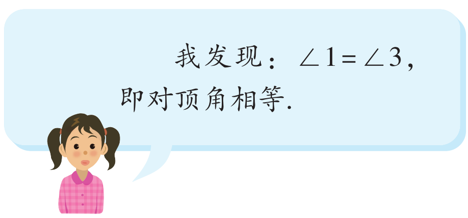


图 4–8

做一做

如图 4–8，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 有什么关系？量一量或用其他方法比较它们的大小.



从图 4–8 可以看到，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 3$ 与 $\angle 2$ 也互补，即 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 都是 $\angle 2$ 的补角，由“同角或等角的补角相等”，可以得出 $\angle 1=\angle 3$. 类似地，$\angle 2=\angle 4$.

由此我们可以得到对顶角的性质：

对顶角相等.

观察

设直线 AB，CD 都与第三条直线 MN 相交（有时也说直线 AB 和 CD 被第三条直线 MN 所截），可以构成 8 个角，如图 4–9 所示.

1. 图中的 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 的位置有什么关系？
2. $\angle 3$ 与 $\angle 5$，$\angle 3$ 与 $\angle 6$ 的位置有什么关系呢？

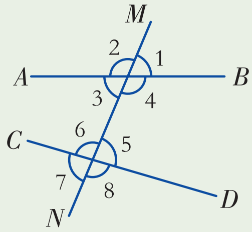


图 4–9

$\angle 1$ 与 $\angle 5$ 分别在直线 AB，CD 的同一方（上方），并且都在直线 MN 的同侧（右侧）.

我们把具有 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 这种位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles）.

$\angle 3$ 和 $\angle 5$ 都在直线 AB，CD 之间，并且分别在直线 MN 两侧（$\angle 3$ 在直线 MN 左侧，$\angle 5$ 在直线 MN 右侧）.

我们把具有 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 这种位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）.

$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 都在直线 AB，CD 之间，但它们在直线 MN 的同一旁（左侧）.

我们把具有 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 这种位置关系的一对角叫做**同旁内角**（interior angles on the same side）.

你还能从图 4–9 中找出其他的同位角、内错角和同旁内角吗？

例 1 如图 4–10，直线 EF 与 AB，CD 相交，构成 8 个角. 指出图中所有的对顶角、同位角、内错角和同旁内角.

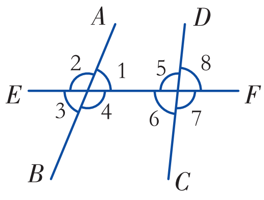


图 4–10

解 对顶角有∠1 和∠3，∠2 和∠4，∠5 和∠7，∠6 和∠8；

同位角有∠2 和∠5，∠1 和∠8，∠3 和∠6，∠4 和∠7；

内错角有∠1 和∠6，∠4 和∠5；

同旁内角有∠1 和∠5，∠4 和∠6.

例 2 如图 4–11，直线 AB，CD 被直线 MN 所截，同位角∠1 与∠2 相等，那么内错角∠2 与∠3 相等吗？

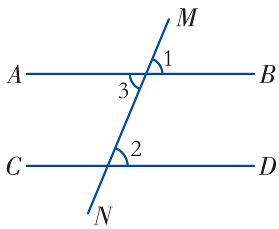


图 4–11

解 因为∠1 = ∠3 （对顶角相等），

∠1 = ∠2 （已知），

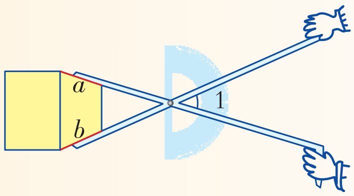
所以∠2 = ∠3 （等量代换）.

由上可知：两条直线被第三条直线所截，如果有一对同位角相等，则内错角相等.

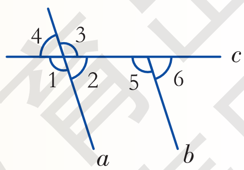
练习

1. 请举出生活中对顶角的例子.

2. 如图，工人师傅用对顶角量角器量工件 a，b 边所夹的角，其中∠1 的度数可以从仪器上读出. 试说明∠1 就是所求的角的理由.



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，直线 a，b 被直线 c 所截，找出图中所有的对顶角、同位角、内错角和同旁内角. 若∠1 = ∠5 = 108°，求其他角的度数.

习题 4.1

A 组

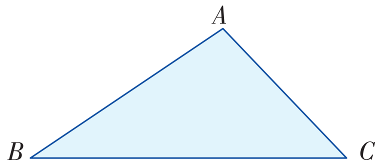
1. 填空：

（1）在同一平面内的两条直线若相交，则有______个公共点；若平行，则有______个公共点；

（2）在同一平面内，如果直线 a 与 b 相交，且直线 a 与 c 平行，则这三条直线中所有交点的个数为______个.

2. 在同一平面内的两条射线 AB 和 CD，如果它们不相交，能否说这两条射线平行？请画图说明.

3. 如图，用三角尺和直尺，过点 C 画 $CD//AB$.



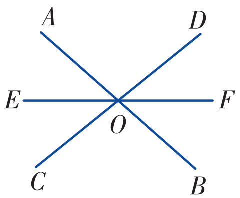
（第 3 题图）

4. 如图，三条直线 AB，CD，EF 相交于点 O，填空：

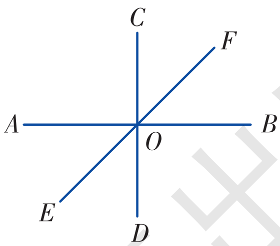
（1）$\angle DOB$ 的对顶角是________________；

（2）$\angle DOF$ 的对顶角是________________；

（3）$\angle DOA$ 的对顶角是________________.



（第 4 题图）

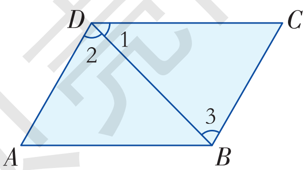


（第 5 题图）

5. 如图，三条直线 AB，CD，EF 相交于点 O，已知 $\angle BOC=90°$，OF 是 $\angle BOC$ 的平分线，求 $\angle AOE$，$\angle EOB$ 的度数.

6. 如图，指出下列各对角是什么角，它们分别是由哪两条直线被哪一条直线所截得到的.

（1）$\angle 2$ 与 $\angle 3$；　　（2）$\angle 1$ 与 $\angle 3$.



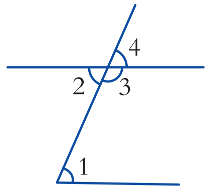
（第 6 题图）

7. 如图，在括号中填写理由：

已知∠1＝∠2，

因为∠2＝∠4（　　　　　　　　　　），

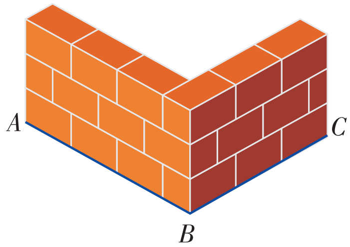
所以∠1＝∠4（　　　　　　　　　　）.



（第 7 题图）

B 组

8. 如图，工人师傅要测出一座建筑物两面墙的夹角∠ABC 的大小，但不能进入建筑物内部测量，你有什么办法吗？



（第 8 题图）

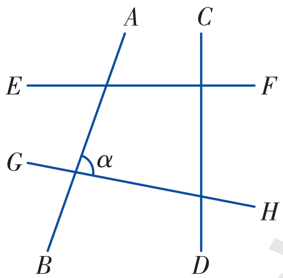
9. 两条直线被第三条直线所截，如果有一对内错角相等（或同旁内角互补），你能得出同位角相等的结论吗？

10. 如图，在图中分别找出一个角与∠α 配对，使两个角成为：

(1) 同位角；　　　(2) 内错角；

(3) 同旁内角.

并指出它们分别是由哪两条直线被哪一条直线所截得到的.



（第 10 题图）

4.2 平　移

观察

图 4–12 是正在运行的电梯，图 4–13 是射击训练移动靶.

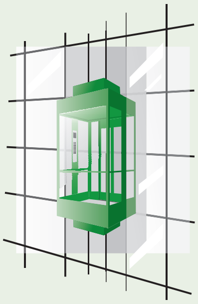


图 4–12

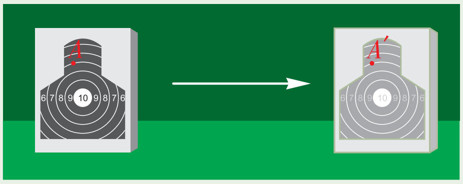
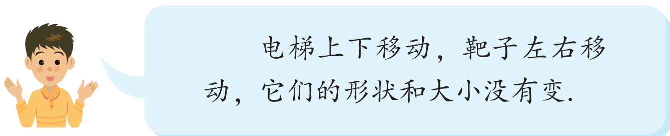


图 4–13

请你观察上图并思考下列问题：

（1）图 4–12 中的电梯和图 4–13 中的靶子是怎样运动的？

（2）电梯和靶子在运动的过程中，它们的形状和大小发生变化了吗？



像上面两个实例那样，把图形上所有的点都按同一方向移动相同的距离，图形的这种变换叫做**平移**（translation）.

在图 4–13 中，点 A 平移到了点 A'，称 A'是 A 的**对应点**.

原来的图形叫做**原像**（inverse image），在新位置的图形叫做该图形在平移下的**像**（image）.

实践经验告诉我们：

平移不改变图形的形状和大小.

平移不改变直线的方向.

如图 4–14，我们可以得出：

直线在平移下的像是与它平行的直线.

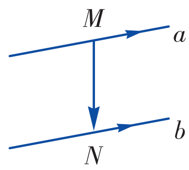


图 4–14

从平移的概念可知，平移具有下述性质：

一个图形和它经过平移所得的图形中，两组对应点的连线平行(或在同一条直线上)且相等.

说一说

如图 4–15，把三角形 ABC 向右平移得到三角形 $A'B'C'$.

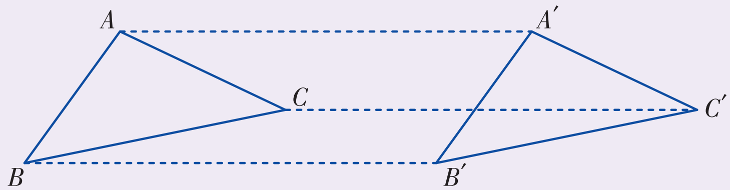


图 4–15

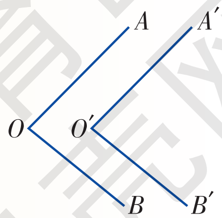
(1) 连接它们的对应点 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C'，并量出线段 AA'，BB'，CC'的长度，线段 AA'，BB'，CC'的长度有什么关系?

(2) AA'，BB'，CC'平行吗?

练习

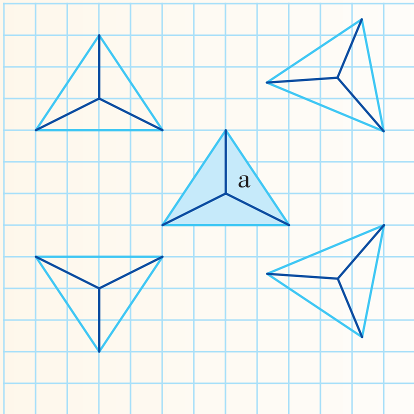
1. 请举出生活中应用“平移”的例子.

2. 如图，$\angle A'O'B'$是由 $\angle AOB$ 平移得到的，说一说，$\angle A'O'B'$与 $\angle AOB$ 的大小有什么关系? 两个角的边有什么关系?



(第 2 题图)

3. 如图，哪个图形可以经平移后得到图形 a？请在图中用箭头标明平移的方向，并描述这个变换过程.



（第 3 题图）

观察

欣赏下面美丽的图案（图 4–16、图 4–17），说出它们分别是由哪个基础图形通过平移而得到的，在图中把基础图形圈出来.

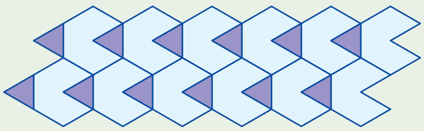


图 4–16

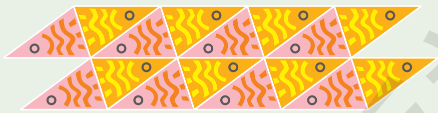


图 4–17

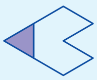
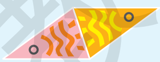
图 4–16 是由  通过平移而得到的.

图 4–17 是由  通过平移而得到的.

做一做

在如图 4–18 所示的方格纸（1 格长为 1 个单位长度）中：

（1）将正方形 $ABCD$ 向右平移 4 个单位，画出平移后的正方形 $A'B'C'D'$；

（2）将正方形 $ABCD$ 平移，使其顶点 B 平移到点 B''，画出平移后的正方形 $A''B''C''D''$.

上述平移后形成一个什么汉字？

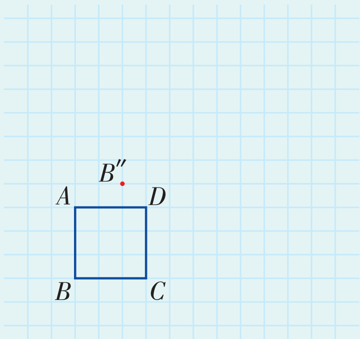


图 4–18

平移的关键是把握平移的方向和平移的距离.

做一做

许多美丽的图案都是用平移的方法绘制而成的，如图 4–19，观察它们的变化规律，你能用平移的方法拼成若干个图案吗？

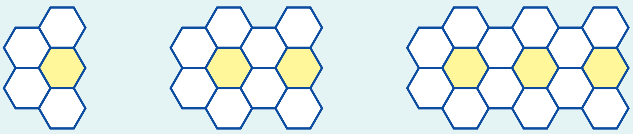
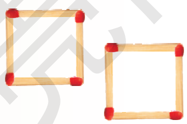


图 4–19

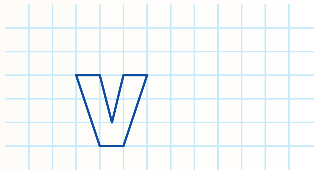
练习

1. 如图，小红用 8 根火柴棒在桌面上摆了两个正方形，它们的边分别平行，你能通过平移的方法，使得少用一根火柴仍能摆出两个正方形吗？



（第 1 题图）

2. 在如图所示的方格纸（1 格长为 1 个单位长度）中，将图中的图形向右平移 3 个单位，所得的图形与原图形合起来是一个什么英文字母?



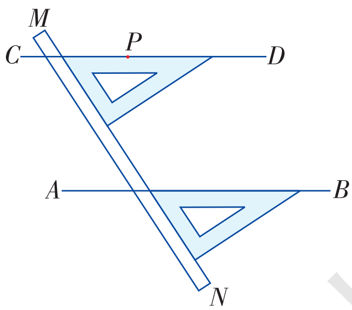
（第 2 题图）

习题 4.2

A 组

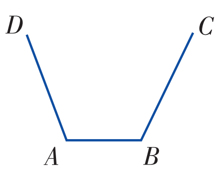
1. 填空：

我们已经学过用三角尺和直尺画平行线的方法. 如图，因为直线 AB 沿____________的方向______ 到 CD，且 CD 经过点 P，由于直线在平移下的像是与它____________，所以 AB____CD.

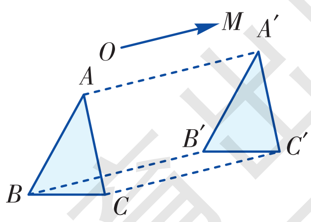


（第 1 题图）

2. 如图，用第 1 题的方法，过图中的点 A 画 $AE/\!/BC$.



（第 2 题图）



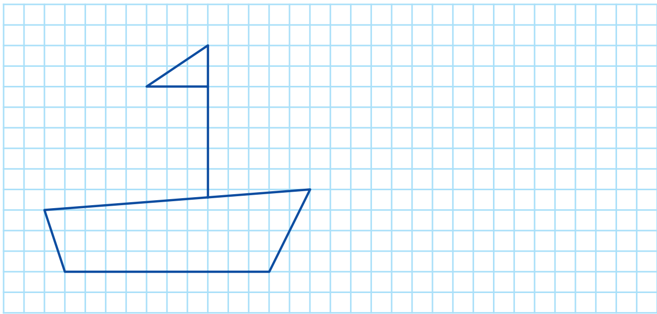
（第 3 题图）

3. 如图，将三角形 ABC 沿 OM 方向平移一定的距离得到三角形 $A'B'C'$，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）$AA'/\!/BB'$　　（B）$AA'=BB'$

（C）$BC=B'C'$　　（D）$\angle ACB=\angle A'B'C'$

4. 在如图所示的方格纸（1 格长为 1 个单位长度）中，将小船向右平移 14 个单位，画出原图形平移后的像.

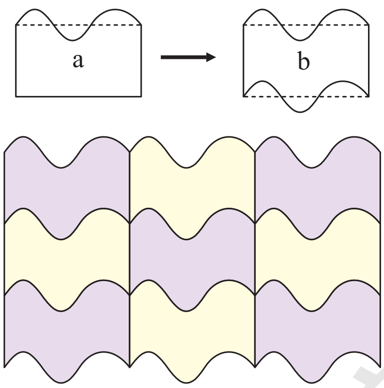


（第 4 题图）

B 组

5. 如果用 8 根火柴棒摆两个正方形，两个正方形的边不分别平行，你还能用平移的方法，使得少用一根火柴棒摆出两个正方形吗?

6. 如图，在长方形 a 的一边设计一条曲线，并将这条曲线平移到长方形的对边，得到图形 b，然后将图形 b 平移，可得到美丽的图案.



（第 6 题图）

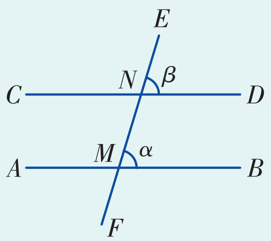
（1）请指出上图中的基础图形和平移方向；

（2）请你自己设计一个基础图形，并用平移的方法设计出一种花边图案.

4.3 平行线的性质

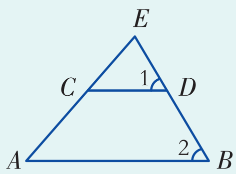
做一做

在图 4–20 和图 4–21 中，$AB/\!/CD$，用量角器量下面两个图形中标出的角，然后填空：



$\angle\alpha$________$\angle\beta$

图 4–20

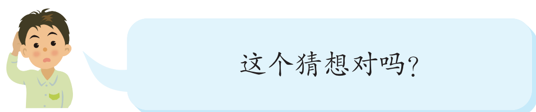


$\angle 1$________$\angle 2$

图 4–21

根据这些操作，你能猜想出什么结论？

我们猜想：如果两条平行直线被第三条直线所截，那么同位角相等.



如图 4–22，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，交于 M，N 两点，$AB/\!/CD$.

作一个平移，移动方向为点 M 到点 N 的方向，移动距离等于线段 MN 的长度. 则点 M 的像是点 N，射线 ME 的像是射线 NE.

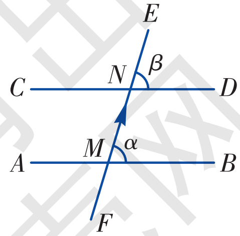


图 4–22

直线 AB 的像是经过点 N 且与它平行的直线，又已知 $CD/\!/AB$，且 CD 经过点 N，因此，直线 AB 的像是直线 CD. 从而射线 MB 的像是射线 ND，于是 $\angle\alpha$ 的像是 $\angle\beta$. 所以 $\angle\alpha=\angle\beta$.

于是，我们得出：

平行线的性质 1　两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等.

探究

两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等吗？同旁内角互补吗？

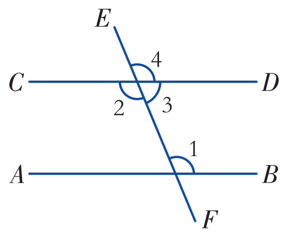


图 4-23

如图 4-23，平行直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是内错角，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是同旁内角.

因为 $AB /\!/ CD$，

所以 $\angle 1 = \angle 4$（两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等）.

又因为 $\angle 2 = \angle 4$（对顶角相等），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（等量代换）.

由此，我们可以得到：

平行线的性质 2　两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

如图 4-23，因为 $AB /\!/ CD$，

所以 $\angle 1 = \angle 4$（两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等）.

又因为 $\angle 3 + \angle 4 = 180°$，

所以 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$（等量代换）.

由此，我们可以得到：

平行线的性质 3　两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补.

上述三个性质，通常可简单地说成：

两直线平行，同位角相等.

两直线平行，内错角相等.

两直线平行，同旁内角互补.

例 1 如图 4-24，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$AB /\!/ CD$，$\angle 1 = 100°$，试求 $\angle 3$ 的度数.

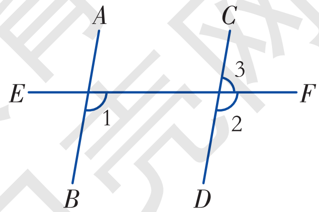


图 4-24

解　因为 $AB /\!/ CD$，

所以 $\angle 1 = \angle 2 = 100°$（两直线平行，同位角相等）.

又因为 $\angle 2 + \angle 3 = 180°$，

所以 $\angle 3 = 180° - \angle 2 = 180° - 100° = 80°$.

做一做

在例 1 中，你能分别用平行线的性质 2 和性质 3 求出 $\angle 3$ 的度数吗？

例 2 如图 4–25，$AD \parallel BC$，$\angle B = \angle D$，试问 $\angle A$ 与 $\angle C$ 相等吗？为什么？

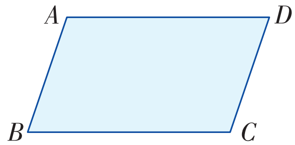


图 4–25

解 因为 $AD \parallel BC$，

所以 $\angle A + \angle B = 180°$，

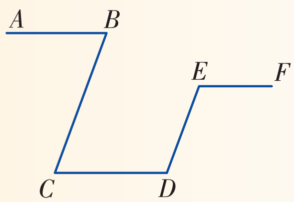
$\angle D + \angle C = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

又因为 $\angle B = \angle D$（已知），

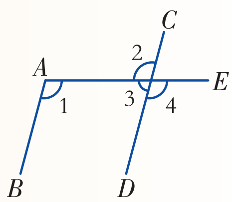
所以 $\angle A = \angle C$.

练习

1. 如图，$AB \parallel CD$，$CD \parallel EF$，$BC \parallel ED$，$\angle B = 70°$，求 $\angle C$，$\angle D$ 和 $\angle E$ 的度数.



（第 1 题图）

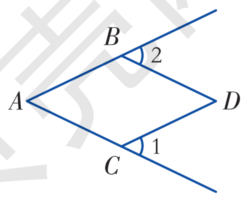


（第 2 题图）

2. 如图，直线 AB，CD 被直线 AE 所截，$AB \parallel CD$，$\angle 1 = 105°$. 求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

习题 4.3

A 组



（第 1 题图）

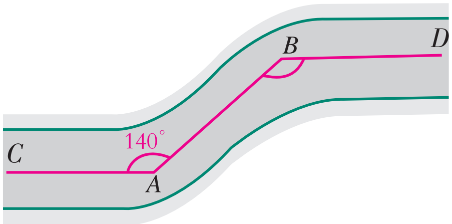
1. 填空：如图，（1）因为 $AB \parallel CD$，

所以 $\angle 1 =$ ______，理由是 ________________；

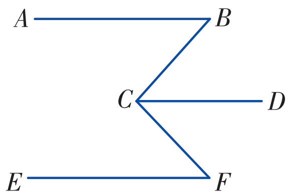
（2）因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle D =$ ______________，

理由是 ____________________.

2. 如图，一条公路两次转弯后又回到与原来相同的方向，如果第一次转弯时 $\angle A=140°$，那么 $\angle B$ 是多少度？



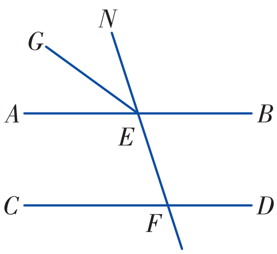
（第 2 题图）



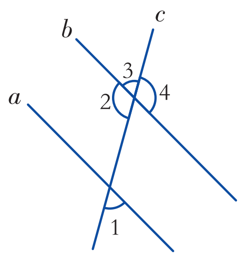
（第 3 题图）

3. 如图，若 $AB/\!/CD/\!/EF$，$\angle B=45°$，$\angle F=40°$，求 $\angle BCF$ 的度数.

4. 如图，$AB/\!/CD$，EG 平分 $\angle AEN$. 若 $\angle EFD=108°$，试求 $\angle GEN$ 的度数.



（第 4 题图）

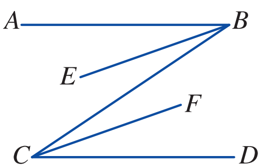


（第 5 题图）

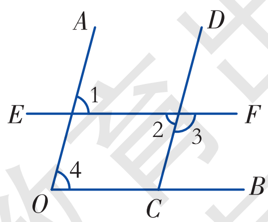
5. 如图，直线 a，b 被直线 c 所截，$a/\!/b$，$\angle 1=60°$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

B 组

6. 如图，$AB/\!/CD$，$EB/\!/CF$，试问 $\angle ABE$ 与 $\angle DCF$ 有什么关系？试说明理由.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 如图，$EF/\!/OB$，$AO/\!/DC$.

(1) $\angle 4$ 与 $\angle 2$ 相等吗？为什么？

(2) $\angle 4$ 与 $\angle 3$ 有什么关系？为什么？

4.4 平行线的判定

探究

如图 4–26，将木条 a，c 固定在桌面上，使 c 与 a 的夹角 β 为 120°，木条 b 首先与木条 c 重合，然后将木条 b 绕点 A 按顺时针方向分别旋转 60°，120°，150°，则 c 与 b 的夹角 α 等于多少度时，$a/\!/b$？

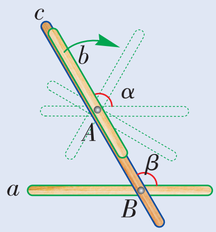


图 4–26

我发现，当 $\angle\alpha=\angle\beta=120°$ 时，直线 a 与直线 b 平行.

可以说明这个结论是正确的.

如图 4–27，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，交于 M，N 两点，同位角 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 相等.

过点 N 作直线 $PQ/\!/AB$，则 $\angle ENQ=\angle\alpha$. 由于 $\angle\alpha=\angle\beta$，因此 $\angle ENQ=\angle\beta$，从而射线 NQ 与射线 ND 重合，于是直线 PQ 与直线 CD 重合. 因此 $CD/\!/AB$.

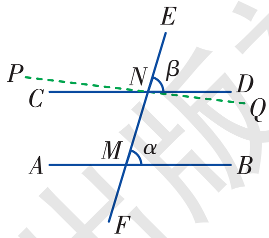


图 4–27

于是，我们有以下**基本事实**（平行线的判定方法 1）：

> **两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.**

通常可以简单地说成：**同位角相等，两直线平行.**

说一说

在 4.1 节中，我们学习了一种画平行线的方法(如图 4-28)，你能说明这种画法的理由吗?

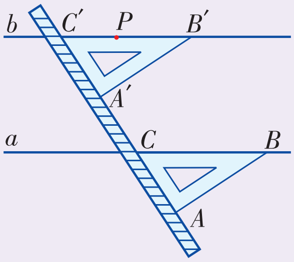


图 4-28

例 1 如图 4-29，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1+\angle 2=180°$，AB 与 CD 平行吗？为什么？

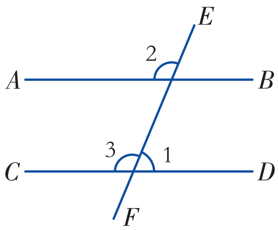


图 4-29

解 因为 $\angle 1+\angle 2=180°$，而 $\angle 3$ 是 $\angle 1$ 的补角，

即 $\angle 1+\angle 3=180°$，

所以 $\angle 2=\angle 3$.

所以 $AB/\!/CD$（同位角相等，两直线平行）.

例 2 如图 4-30，直线 a，b 被直线 c，d 所截，$\angle 1=\angle 2$，说明为什么 $\angle 4=\angle 5$.

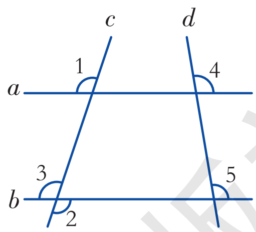


图 4-30

解 因为 $\angle 1=\angle 2$（已知），

$\angle 2=\angle 3$（对顶角相等），

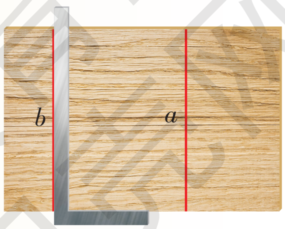
所以 $\angle 1=\angle 3$（等量代换）.

所以 $a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.

因此 $\angle 4=\angle 5$（两直线平行，同位角相等）.

练习

1. 如图，木工用角尺的一边紧靠木料边缘，另一边画两条直线 a，b. 这两条直线平行吗？为什么？



(第 1 题图)

2. 我们已经知道“平行于同一条直线的两条直线平行”，你可以用判定两直线平行的基本事实来说明它的道理吗?

如图，三条直线 a，b，c 与直线 l 分别交于点 A，B，C. 如果 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，那么 $a /\!/ c$.

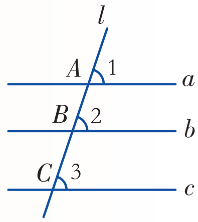
请你在下面的括号中填上理由：

因为 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，

所以 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，

因此 $\angle 1=\angle 3$.

从而 $a /\!/ c$（　　　　　　　　　　　　）.



（第 2 题图）

探究

两条直线被第三条直线所截，由同位角相等可以判定两条直线平行，那么内错角相等可以判定两条直线平行吗？同旁内角互补呢？

如图 4-31，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是内错角.

已知 $\angle 2=\angle 3$，

又因为 $\angle 3=\angle 1$（对顶角相等），

所以 $\angle 1=\angle 2$.

所以 $AB /\!/ CD$（同位角相等，两直线平行）.

由此，我们得到判定两条直线平行的另一种方法：

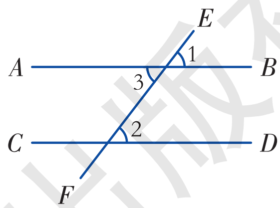


图 4-31

平行线的判定方法 2　两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

通常可以简单地说成：**内错角相等，两直线平行.**

如图 4-32，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同旁内角.

已知 $\angle 1+\angle 2=180°$，

又因为 $\angle 2+\angle 3=180°$，

所以 $\angle 3=\angle 1$.

所以 $AB /\!/ CD$（同位角相等，两直线平行）.

由此，我们可得到判定两条直线平行的第三种方法：

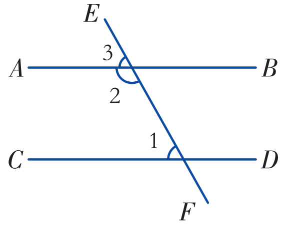


图 4-32

平行线的判定方法 3　两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

通常可以简单地说成：**同旁内角互补，两直线平行.**

例 3 如图 4-33，$AB /\!/ DC$，$\angle BAD=\angle BCD$. 那么 $AD /\!/ BC$ 吗?

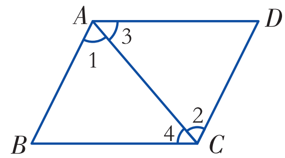


图 4-33

解　因为 $AB /\!/ DC$，

所以 $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

又因为 $\angle BAD=\angle BCD$，

所以 $\angle BAD-\angle 1=\angle BCD-\angle 2$.

即 $\angle 3=\angle 4$.

所以 $AD /\!/ BC$（内错角相等，两直线平行）.

例 4 如图 4-34，$\angle 1=\angle 2=50°$，$AD /\!/ BC$，那么 $AB /\!/ DC$ 吗?

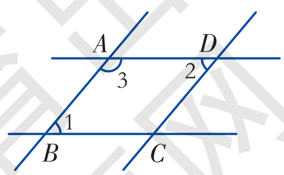


图 4-34

解　因为 $AD /\!/ BC$，

所以 $\angle 1+\angle 3=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

则 $\angle 3=180°-\angle 1=180°-50°=130°$.

所以 $\angle 2+\angle 3=50°+130°=180°$.

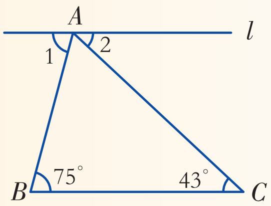
所以 $AB /\!/ DC$（同旁内角互补，两直线平行）.

练习

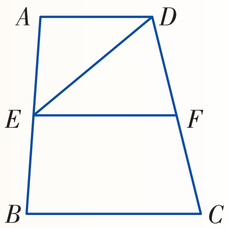
1. 如图，点 A 在直线 l 上，如果 $\angle B=75^\circ$，$\angle C=43^\circ$，则

（1）当 $\angle 1=$ ______时，直线 $l/\!/BC$；

（2）当 $\angle 2=$ ______时，直线 $l/\!/BC$.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，$\angle ADE=\angle DEF$，$\angle EFC+\angle C=180^\circ$，试问 AD 与 BC 平行吗？为什么？

习题 4.4

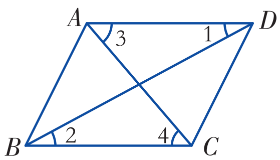
A 组

1. 如图，在下列给出的条件中，可以判定 $AD/\!/BC$ 的有 ________（填写序号）.

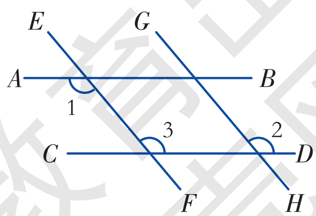
①$\angle 1=\angle 2$　　②$\angle 2=\angle 3$

③$\angle 3=\angle 4$　　④$\angle DAB+\angle ABC=180^\circ$

⑤$\angle DCB+\angle ABC=180^\circ$　　⑥$\angle ADC+\angle DCB=180^\circ$



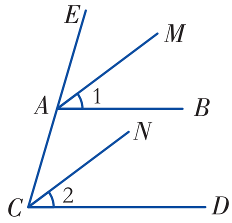
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，$AB/\!/CD$，$\angle 1=\angle 2$，那么直线 EF 与 GH 有什么关系？试说明理由.

3. 如图，$AM /\!/ CN$，$\angle 1=\angle 2$，在下面的括号内填上理由：



（第 3 题图）

因为 $AM /\!/ CN$，

所以 $\angle EAM=\angle ECN$（　　　　　　　　　　　　）.

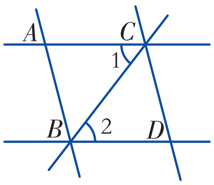
又因为 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle EAM+\angle 1=\angle ECN+\angle 2$.

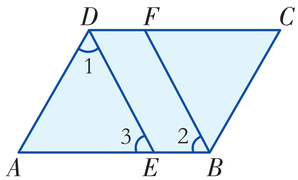
即 $\angle EAB=\angle ECD$.

所以 $AB /\!/ CD$（　　　　　　　　　　　　　　）.

4. 如图，$\angle 1=\angle 2$，CB 平分 $\angle ACD$ 与 $\angle ABD$，试指出图中有哪些直线平行，并说明理由.



（第 4 题图）



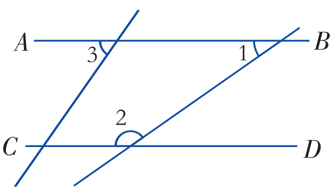
（第 5 题图）

5. 如图，$\angle ADC=\angle ABC$，DE 平分 $\angle ADC$，BF 平分 $\angle ABC$，$\angle 1=\angle 3$，那么 DE 与 FB 平行吗？试说明理由.

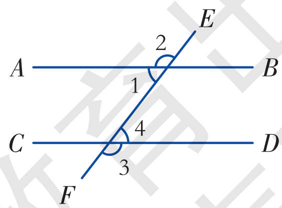
B 组

6. 教室后墙上有一个长方形的“阅读栏”. 为了检验“阅读栏”的边是否与墙的边平行，可以采用哪些方法？

7. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互余，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 的余角互补，那么直线 AB 与 CD 有什么关系？试说明理由.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. 如图.

（1）若 $\angle 1+\angle 3=180^\circ$，能否得出 $AB /\!/ CD$？试说明理由.

（2）若 $\angle 2=\angle 3$，能否得出 $AB /\!/ CD$？试说明理由.

4.5 垂　线

观察

图 4–35

如图 4–35，画框的边框，十字路口两条笔直的街道，屋架的横梁与支撑梁等都相交成多少度的角？

如图 4–36，两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时（易知其余三个角也是直角），这两条直线叫做互相**垂直**（perpendicular），其中一条直线叫做另一条直线的**垂线**（perpendicular line），它们的交点叫做**垂足**（foot of a perpendicular）.

垂直用符号“⊥”表示，如图 4–36，直线 AB 与 CD 互相垂直（O 为垂足），记做“$AB \perp CD$”，读做“AB 垂直于 CD”.

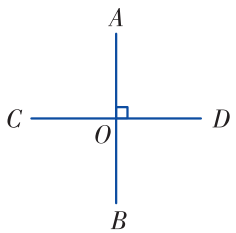


图 4–36

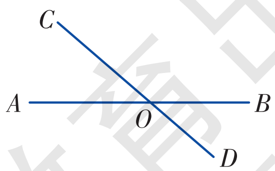


图 4–37

两条直线相交不成直角时，其中一条直线叫做另一条直线的斜线，它们的交点叫做斜足. 如图 4–37，直线 CD 是 AB 的斜线，同样，直线 AB 也是 CD 的斜线，点 O 是斜足.

动脑筋

（1）如图 4–38，在同一平面内，如果直线 $a\perp l$，$b\perp l$，那么 $a/\!/b$ 吗？

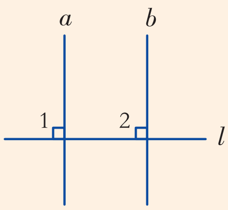


图 4–38

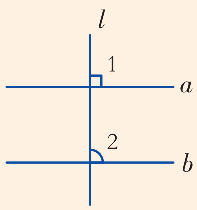


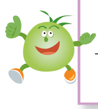
图 4–39

（2）如图 4–39，在同一平面内，如果直线 $a/\!/b$，$l\perp a$，那么 $l\perp b$ 吗？

（1）如图 4–38，因为 $a\perp l$，$b\perp l$，

所以 $\angle 1=\angle 2=90°$，

所以 $a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.



在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行.

（2）如图 4–39，因为 $l\perp a$，

所以 $\angle 1=90°$.

因为 $a/\!/b$，

所以 $\angle 2=\angle 1=90°$（两直线平行，同位角相等），

因此 $l\perp b$.

在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么这条直线垂直于另一条.

例 1 在如图 4–40 的简易屋架中，BD，AE，HF 都垂直于 CG，若 $\angle 1=60°$，求 $\angle 2$ 的度数.

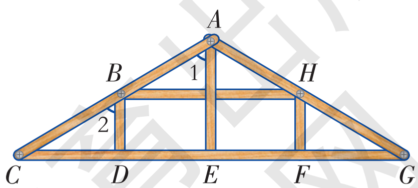


图 4–40

解 因为 BD，AE 都垂直于 CG，

所以 $\angle BDC=\angle AEC=90°$.

所以 $BD/\!/AE$（同位角相等，两直线平行）.

从而 $\angle 2=\angle 1=60°$（两直线平行，同位角相等）.

例 2 如图 4-41，已知 $CD\perp AB$，$\angle 1=\angle 2$，求 $\angle BEF$ 的度数.

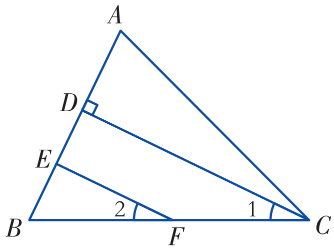


图 4-41

解 因为 $CD\perp AB$，

所以 $\angle BDC=90°$.

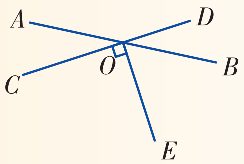
又因为 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $DC/\!/EF$（　　　　　　　　　　）.

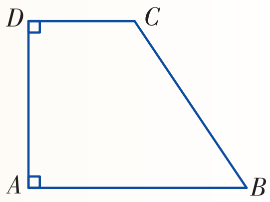
所以 $\angle BEF=\angle BDC=90°$（　　　　　　　　）.

练习

1. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO\perp CD$，$\angle BOE=60°$，求 $\angle AOC$ 的度数.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，$DA\perp AB$，$CD\perp DA$，$\angle B=56°$，求 $\angle C$.

做一做

用三角尺或量角器过一点 P 画已知直线 l 的垂线，如图 4-42.

（1）经过直线 l 上一点 P 画 l 的垂线 a；

（2）经过直线 l 外一点 P 画 l 的垂线 b.

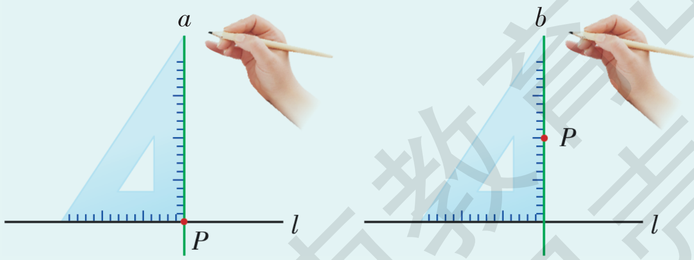


图 4-42

这样的直线分别可以画出几条呢？

假如过点 P 还有一条直线 $c \perp l$，则 $c /\!/ a$（或 $c /\!/ b$），但是 c 与 a（或 b）有公共点 P，这是不可能的.

我们有如下**基本事实**：

在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

如图 4–43，设 PO 垂直于直线 l，O 为垂足，线段 PO 叫做点 P 到直线 l 的**垂线段**（perpendicular segment）. 经过点 P 的其他直线交 l 于 A，B，C，D，…，线段 PA，PB，PC，PD，…都不是垂线段，称为**斜线段**.

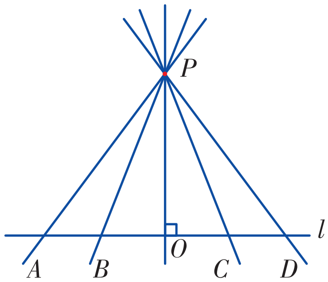
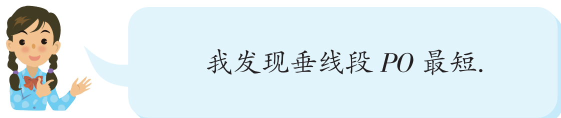
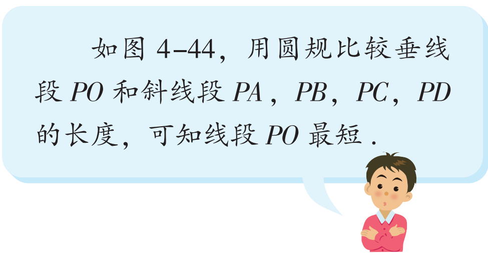


图 4–43

动脑筋

观察图 4–43，PA，PB，PO，PC，PD 哪条线段最短？





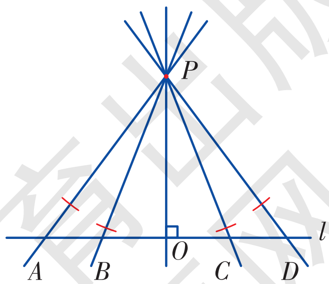


图 4–44

由此得出：

直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.

或者简单地说成：**垂线段最短.**

从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的**距离**. 例如，在图 4–43 中，垂线段 PO 的长度叫做点 P 到直线 l 的距离.

做一做

1. 你能量出图 4–45 中点 P 到直线 AB 的距离吗？

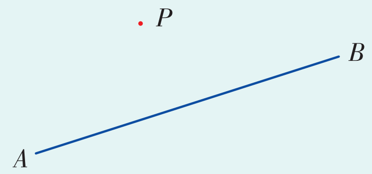


图 4–45

2. 如图 4–46，某单位要在河岸 l 上建一个水泵房引水到 C 处，问建在哪个位置才最节省水管？为什么？

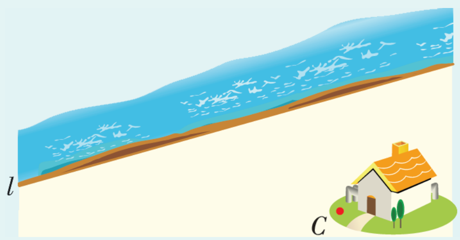


图 4–46

我们可以把点到直线的距离转化为点到点的距离.

例 3 如图 4–47，在三角形 ABC 中，$\angle ABC=90°$，$BD\perp AC$，垂足为 D，$AB=5$，$BC=12$，$AC=13$.

求：（1）点 A 到直线 BC 的距离；

（2）点 B 到直线 AC 的距离.

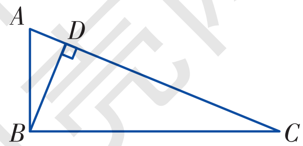


图 4–47

解 （1）因为 $\angle ABC=90°$，

所以 $AB\perp BC$，B 为垂足.

所以线段 AB 即为点 A 到直线 BC 的垂线段.

因为 $AB=5$，

所以点 A 到直线 BC 的距离为 5.

(2) 因为 $BD\perp AC$，垂足为 D，

所以线段 BD 的长度即为点 B 到直线 AC 的距离.

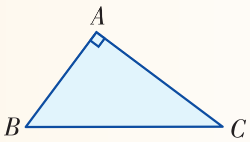
因为 $\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$，

所以 $BD=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}=\dfrac{5\times 12}{13}=\dfrac{60}{13}$.

所以点 B 到直线 AC 的距离为$\dfrac{60}{13}$.

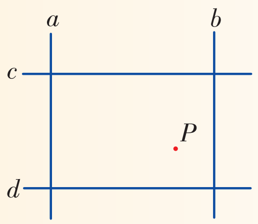
练习

1. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=3$ cm，$AC=4$ cm，$BC=5$ cm，求点 A 到 BC 的距离，点 C 到 AB 的距离.

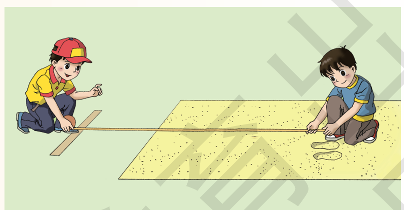


(第 1 题图)

2. 如图（比例尺：1∶5 000），公园里有 4 条纵横交错的人行道，点 P 是一喷泉，量出 P 点到 4 条直线的距离，并求出其实际距离.



(第 2 题图)

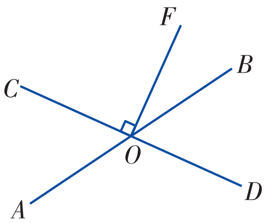

(第 3 题图)

3. 如图，体育课上应该怎样测量同学们的跳远成绩？

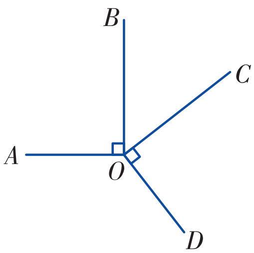
习题 4.5

A 组

1. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，射线 $OF \perp CD$ 于点 O，求 $\angle AOC+\angle BOF$ 的度数.



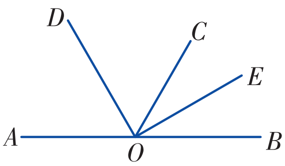
（第 1 题图）



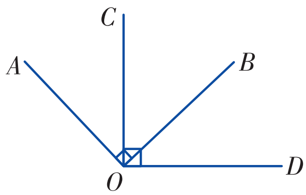
（第 2 题图）

2. 如图，$OC \perp OD$，$OB \perp OA$，求 $\angle AOD+\angle BOC$ 的度数.

3. 如图，AOB 是直线，OD，OE 分别是 $\angle AOC$ 和 $\angle COB$ 的平分线，那么 OD 与 OE 有什么关系？试说明理由.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 看图填空.

如图，因为 $AO \perp OB$，$CO \perp OD$，

故　　$\angle AOB=$__________，$\angle COD=$__________，

所以　$\angle AOB=\angle COD$，

因此　$\angle AOB-\angle BOC=\angle COD-\angle BOC$（　　　　　　　　），

即　　$\angle AOC=$______________.

5. 如图，用三角尺或量角器分别画出点 B，点 C 到直线 AD 的垂线段 BE，CF.

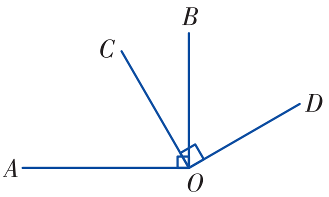
(a)　　　　(b)

（第 5 题图）

Ⓑ 组

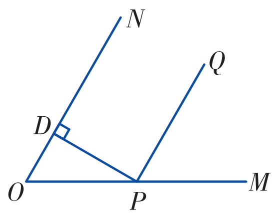
6.（1）如图，$\angle AOC=60°$，$BO\perp OA$，$CO\perp OD$，求$\angle AOD+\angle BOC$的度数.

（2）如果将(1)中“$\angle AOC=60°$”这个条件去掉，其他条件不变，你能求出$\angle AOD+\angle BOC$的度数吗？

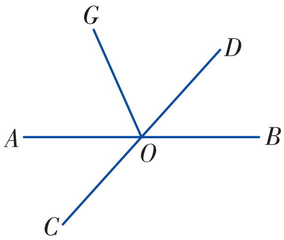


（第 6 题图）

7. 如图，点 P 是$\angle NOM$ 的边 OM 上一点，$PD\perp ON$ 于 D，$\angle OPD=30°$，$PQ/\!/ON$，试求$\angle MPQ$的度数.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OG 是$\angle AOD$的平分线.

（1）在 OG 上取一点 E，过点 E 分别画 AB，CD 的垂线，垂足分别为 M，N.

（2）分别量出点 E 到 AB，CD 的距离，你会发现什么结论？

4.6 两条平行线间的距离

做一做

我们知道数学课本的对边是互相平行的. 请各位同学用刻度尺量一量自己的数学课本，它的宽度是多少？你是怎样量的？

可以把刻度尺放在课本上任何一个位置，但必须保持刻度尺与课本的两边互相垂直，量得的结果是一样的.

与两条平行直线都垂直的直线，叫做这两条平行直线的**公垂线**，这时连接两个垂足的线段（如图 4-48 中 AB，CD）叫做这两条平行直线的**公垂线段**.

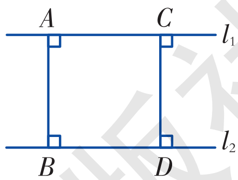


图 4-48

通过上面的操作，启发我们猜想：

两条平行线的所有公垂线段都相等.

可以证明这个猜想是对的.

我们把两条平行线的公垂线段的长度叫做两条**平行线间的距离**（distance between parallel lines).

说一说

如图 4–49，平行线 AB 与 CD 间的距离与 AB 上的点 P 到直线 CD 的距离有什么关系？你能用刻度尺度量出平行线 AB 与 CD 之间的距离吗？

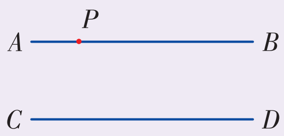


图 4–49

平行线 AB 与 CD 的距离，也就是 AB 上任意一点 P 到直线 CD 的距离.

我们可以把直线与直线的距离转化为点到直线的距离.

例 如图 4–50，设 a，b，c 是三条互相平行的直线. 已知 a 与 b 的距离为 5 cm，b 与 c 的距离为 2 cm，求 a 与 c 的距离.

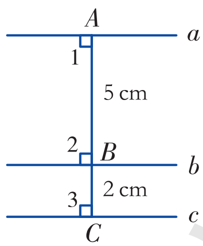


图 4–50

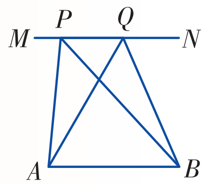
解 在 a 上任取一点 A，过 A 作 $AC \perp c$，分别与 b，c 相交于 B，C 两点. 因为 a，b，c 是三条互相平行的直线，所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 90°$，即 $AB \perp b$，$AC \perp a$. 因此线段 AB，BC，AC 分别表示平行线 a 与 b，b 与 c，a 与 c 的公垂线段. $AC = AB + BC = 5 + 2 = 7$ (cm)，因此 a 与 c 的距离是 7 cm.

练习

1. 利用平移画一条直线和已知直线 l 平行且两条平行线间的距离为 2 cm，这样的直线可以画几条？

（第 1 题图）

2. 如图，$MN/\!/AB$，P，Q 为直线 MN 上的任意两点，三角形 PAB 和三角形 QAB 的面积有什么关系？为什么？

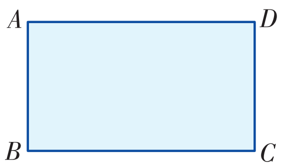


（第 2 题图）

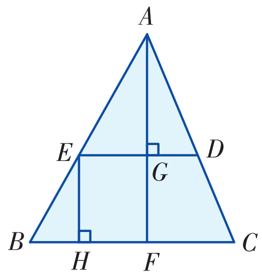
习题 4.6

A 组

1. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，长方形的两组对边 AB 和 DC，AD 和 BC 相等吗？为什么？



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，$ED/\!/BC$，$AF\perp ED$，$EH\perp BC$，且 $AF=5$ cm，$EH=2$ cm，试求点 A 到 ED 的距离.

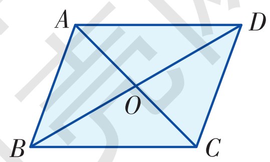
B 组

3. 设 AB，CD，EF 是同一平面内三条互相平行的直线，已知 AB 与 CD 的距离是 6 cm，EF 与 CD 的距离是 3 cm，求 EF 与 AB 的距离.

4. 如图，$AD/\!/BC$，$AB/\!/DC$，AC 与 BD 相交于点 O，试问：

（1）三角形 ABD 与三角形 ABC 的面积相等吗？试说明理由；

（2）三角形 AOD 与三角形 BOC 的面积相等吗？试说明理由.



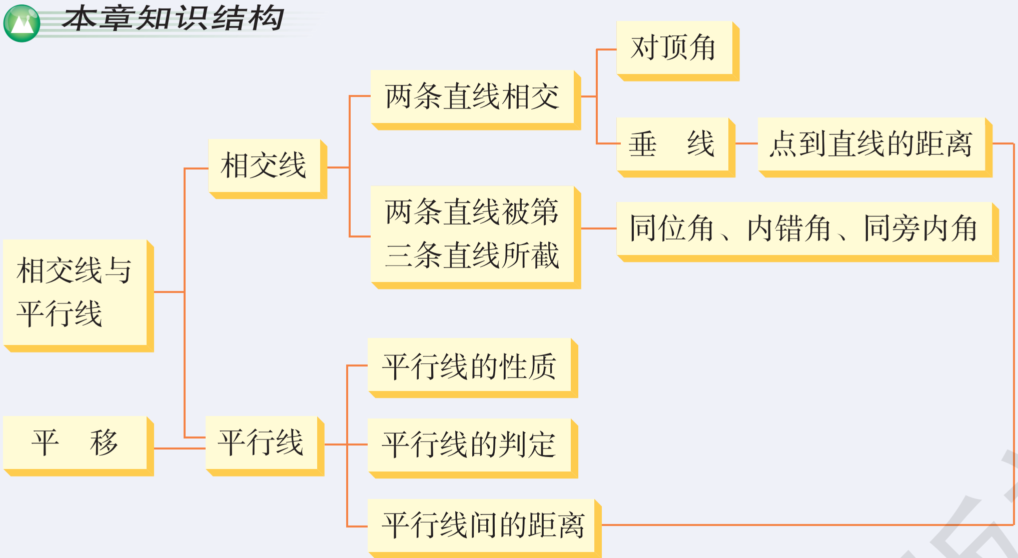
（第 4 题图）

小结与复习

回顾

1. 平面内两条直线的位置关系有哪几种？
2. 请用自己的语言描述本章所学习的角.
3. 图形平移时，对应点的连线有什么关系？
4. 平行线的性质有哪些？
5. 判定两条直线平行有哪些方法？
6. 怎样度量点到直线的距离？怎样度量两条平行线间的距离？

本章知识结构



注意

1. 在同一平面内，没有公共点的两条直线叫做平行线. 在同一平面内，经过一点有且只有一条直线与已知直线垂直. 这两个结论必须注意“在同一平面内”这一条件，在“空间”，这两个结论就不一定能成立.

2. 平移是指图形上所有的点按同一方向移动相同的距离，平移的方向不一定都是水平或竖直的.

3. 注意区分平行线的性质与判定方法.

4. 一般地，两条平行线间的距离可转化为点到直线的距离，进而转化为点到点的距离，这种转化的方法在我们的数学学习中会经常用到.

5. 在运用性质和判定方法说理时要言必有据.

复习题 4

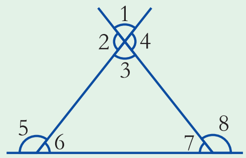
A 组

1. 判断（对的画“√”，错的画“×”）：

（1）在同一平面内，若直线 $a/\!/b$，直线 c 与 a 交于点 O，则直线 $c/\!/b$.（　　）

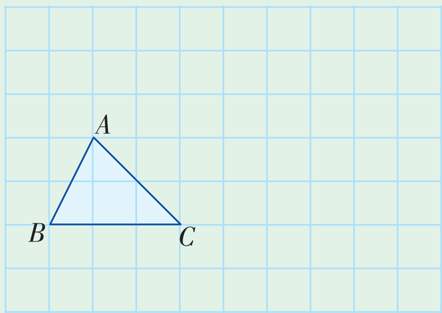
（2）有公共顶点且相等的角是对顶角.（　　）

2. 如图，找出图中所有的对顶角、同位角、内错角和同旁内角.



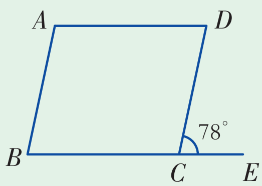
（第 2 题图）

3. 在如图所示的方格纸（1 格长为 1 个单位长度）中，将三角形 ABC 向右平移 4 个单位，再向上平移 3 个单位，画出三角形 ABC 平移后的像.

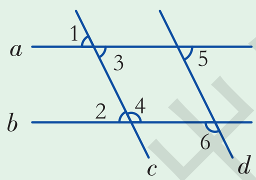


（第 3 题图）

4. 如图，$AD/\!/BE$，$AB/\!/DC$，$\angle DCE=78°$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle D$ 的度数.



（第 4 题图）



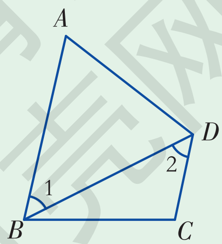
（第 5 题图）

5. 如图，直线 a，b 被直线 c，d 所截.

（1）给出一个什么条件就能使 $a/\!/b$，并说明理由；

（2）给出一个什么条件就能使 $c/\!/d$，并说明理由.

6. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle A=65°$，求 $\angle ADC$ 的度数.



（第 6 题图）

7. 如图，$AB\perp MN$，垂足为 B，$CD\perp MN$，垂足为 D，$\angle1=\angle2$. 在下面括号中填上理由.

因为　$AB\perp MN$，$CD\perp MN$，

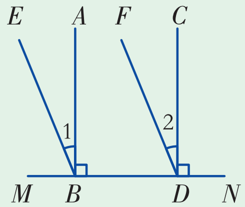
所以　$\angle ABM=\angle CDM=90°$.

又因为　$\angle1=\angle2$（　　　　　　　），

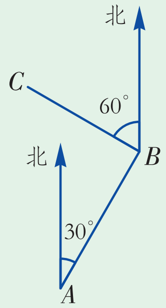
所以　$\angle ABM-\angle1=\angle CDM-\angle2$（　　　　　　　　），

即　$\angle EBM=\angle FDM$.

所以　$EB\parallel FD$（　　　　　　　　　　　　　）.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

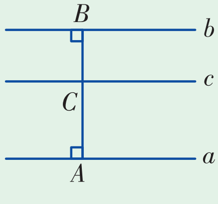
8. 如图，点 B 在点 A 北偏东 30°的方向，点 C 在点 B 北偏西 60°的方向，且 $BC=12$ m. 问点 C 到直线 AB 的距离是多少？

9. 根据下列语句画出图形：

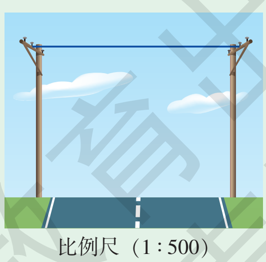
（1）过三角形 ABC 内一点 P，分别作 AB，BC，CA 的平行线；

（2）过点 P 作直线 AB 的垂线 PC，垂足为 C，使得 $PC=1$ cm.

10. 如图，直线 $a\parallel b\parallel c$，$AB\perp a$，$AB\perp b$，a 与 b 的距离是 5 cm，b 与 c 的距离是 2 cm，求 a 与 c 的距离.



（第 10 题图）



（第 11 题图）

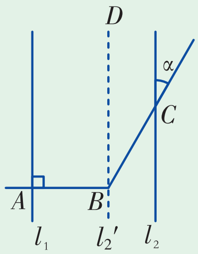
11. 如图，马路两侧有电线杆，请求出图中两根电线杆之间的距离.

B 组

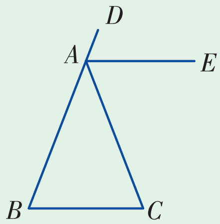
12. 如图，$l_1 /\!/ l_2$，$\angle ABC=120^\circ$，$l_1 \perp AB$.

（1）将直线 l_2 平移至过点 B，得到 l_2'，你能得出什么结论？

（2）求 $\angle\alpha$ 的度数.



（第 12 题图）



（第 13 题图）

13. 如图，$AE /\!/ BC$，AE 平分 $\angle DAC$. 填空并填写理由：

因为　$AE /\!/ BC$，

所以　$\angle B=$______（　　　　　　　　　　　　　），

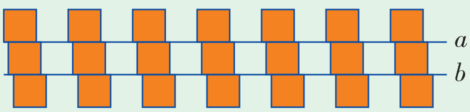
　　　$\angle C=$______（　　　　　　　　　　　　　）.

又因为　AE 平分 $\angle DAC$，

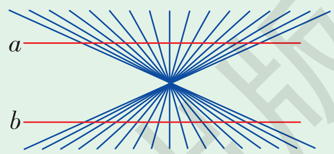
所以　______$=$______（　　　　　　　　　　　　　）.

所以　$\angle B=\angle C$.

14. 如图，你有什么方法可以检查 a，b 两条直线是否平行？



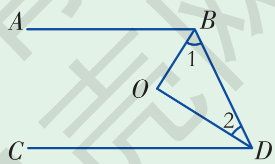
（a）



（b）

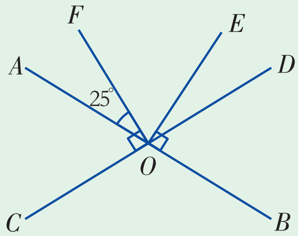
（第 14 题图）

15. 如图，OB，OD 分别平分 $\angle ABD$ 和 $\angle BDC$，$\angle 1+\angle 2=90^\circ$，那么 AB 与 CD 有什么关系？试说明理由.



（第 15 题图）

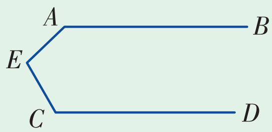
16. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，射线 $OE \perp AB$ 于 O，射线 $OF \perp CD$ 于 O，且 $\angle AOF=25°$. 求 $\angle BOC$ 与 $\angle EOD$ 的度数.



（第 16 题图）

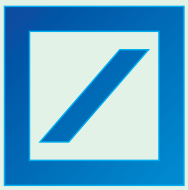
C 组

17. 如图，$AB /\!/ CD$，求 $\angle A+\angle AEC+\angle C$ 的度数.



（第 17 题图）

18. 如图，这是一些标志图案，试说出图中有哪些平行线和垂线. 你能借助平行线和垂线自己设计一些图案吗?



(a)

(b)

（第 18 题图）

第5章
轴对称与旋转

现实生活中的轴对称、旋转现象随处可见，它们给我们一种和谐优美的印象.

什么是图形的轴对称变换和旋转变换？它们分别有哪些特点？

本章将结合实际来学习这些新知识.

5.1 轴对称

5.1.1 轴对称图形

观察

观察图 5-1 中一组生肖剪纸，你能发现它们有什么共同的特征吗？

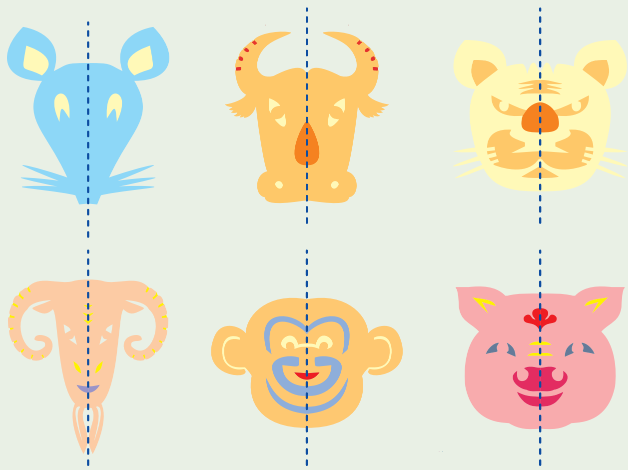


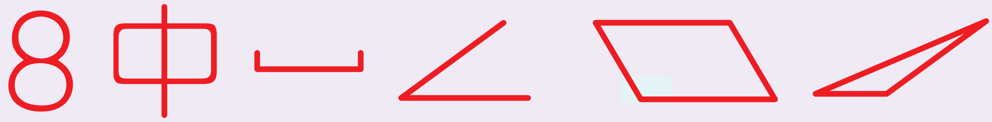
图 5-1

若将图 5-1 中的每个图形沿虚线对折，虚线两侧的部分可以完全重合.

如果一个图形沿着一条直线折叠，直线两侧的部分能够互相重合，那么这个图形叫做**轴对称图形**（symmetric figure with axis），这条直线叫做它的**对称轴**（axis of symmetry）.

说一说

在图 5-2 中，哪些图形是轴对称图形？



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

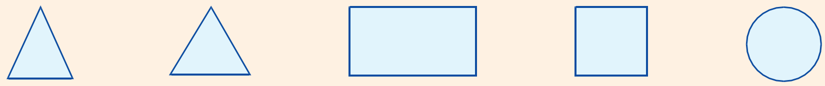
图 5-2

图 5-2 中（1）、(2)、(3)、(4) 都是轴对称图形.

图 5-2 中的（5）、(6) 不是轴对称图形.

动脑筋

下列轴对称图形（图 5-3）各有几条对称轴?



等腰三角形　等边三角形　长方形　正方形　圆

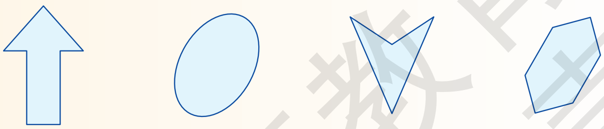
图 5-3

等腰三角形有 1 条对称轴，
等边三角形有 3 条对称轴，
长方形有 2 条对称轴.

正方形有 4 条对称轴，
圆有无数条对称轴.

练习

1. 找出下列各图形的对称轴.



(第 1 题图)

2. 举出生活中一些轴对称图形的实例.

5.1.2 轴对称变换

观察

如图 5–4，用印章在一张纸上盖一个印(a)，趁印迹未干之时，将纸张沿着直线 l 对折，得到印(b)，随后打开，观察图形(a)与图形(b)有怎样的关系.

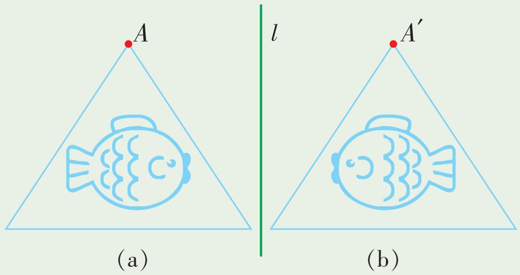


图 5–4

把图形(a)沿着直线 l 翻折并将图形“复印”下来得到图形(b)，就叫做该图形关于直线 l 作了**轴对称变换**（reflection with axis），也叫**轴反射**. 图形(a)叫做原像，图形(b)叫做图形(a)在这个轴反射下的像.

如果一个图形关于某一条直线作轴对称变换后，能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这条直线对称**，也称这两个图形成**轴对称**. 这条直线叫做**对称轴**. 原像与像中能互相重合的两个点，其中一点叫做另一个点关于这条直线的**对应点**.

例如图 5–4 中点 A' 叫做点 A 的对应点.

说一说

图 5–4 中，对称轴 l 两边的图形(a)与(b)的形状和大小发生变化了吗?

轴对称变换具有下述性质：

轴对称变换不改变图形的形状和大小.

图形经过轴对称变换，长度、角度和面积等都不改变.

探究

在图 5–5 中，三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 关于直线 l 成轴对称，点 P 和 P' 是对应点，线段 PP' 交直线 l 于点 D. 那么线段 PP' 与对称轴 l 有什么关系呢?

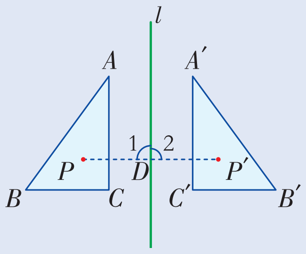


图 5–5

因为三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 关于直线 l 成轴对称，将图 5–5 沿直线 l 折叠，则点 P 与 P' 重合，所以 PD 与 $P'D$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 也互相重合，故有 $PD=P'D$，$\angle 1=\angle 2=90°$，因此，$l\perp PP'$，且平分 PP'，即直线 l 垂直平分线段 PP'.

由此得到下面的性质：

成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分.

从图 5–5 可以看出，如果两个图形的对应点的连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称.

例 1 如图 5–6，已知直线 l 及直线外一点 P，求作点 P'，使它与点 P 关于直线 l 对称.

作法： 1. 过点 P 作 $PQ\perp l$，交 l 于点 O.

2. 在直线 PQ 上，截取 $OP'=OP$.

则点 P' 即为所求作的点.

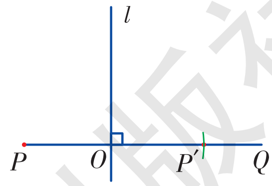


图 5–6

做一做

如图 5–7，已知线段 AB 和直线 l，作出与线段 AB 关于直线 l 对称的图形.

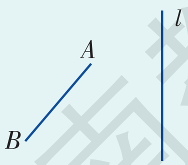


图 5–7

例 2 如图 5-8，已知三角形 ABC 和直线 l，作出与三角形 ABC 关于直线 l 对称的图形.

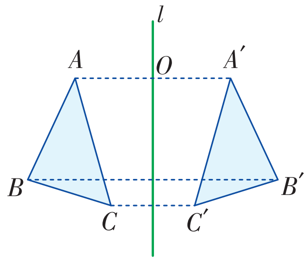


图 5-8

分析 要作三角形 ABC 关于直线 l 的对称图形，只要作出三角形的顶点 A，B，C 关于直线 l 的对应点 A'，B'，C'，连接这些对应点，得到的三角形 $A'B'C'$ 就是三角形 ABC 关于直线 l 对称的图形.

作法： 1. 过点 A 作直线 l 的垂线，垂足为点 O，在垂线上截取 $OA'=OA$，点 A' 就是点 A 关于直线 l 的对应点.

2. 类似地，分别作出点 B，C 关于直线 l 的对应点 B'，C'.

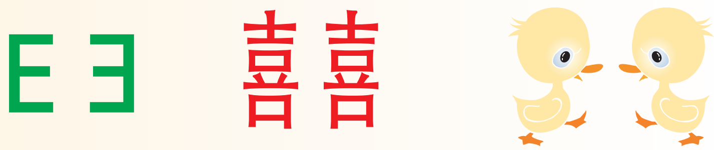
3. 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 得到的三角形 $A'B'C'$ 即为所求.

画好三角形 $A'B'C'$ 后，若将纸沿直线 l 对折，两个三角形会重合吗?

练习

1. 举出生活中一些成轴对称的实例.

2. 下列三个图案分别成轴对称吗？如果是，画出它们的对称轴，并标出一对对应点.

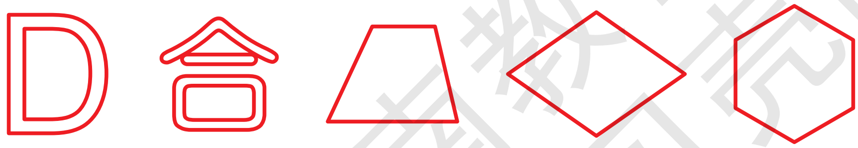


（第 2 题图）

习题 5.1

A 组

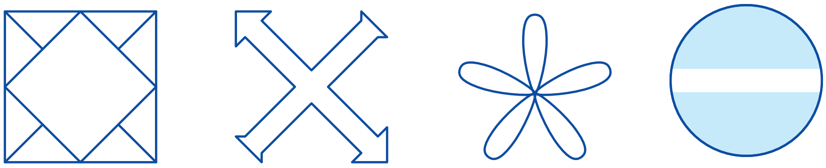
1. 如图，下列哪些图形是轴对称图形？



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

（第 1 题图）

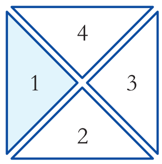
2. 画出下列各个轴对称图形的对称轴.



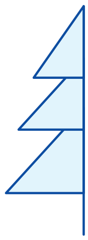
（1）　　　　（2）　　　　（3）　　　　（4）

（第 2 题图）

3. 如图，蓝色的三角形与哪些三角形成轴对称？整个图形是轴对称图形吗？它共有几条对称轴？



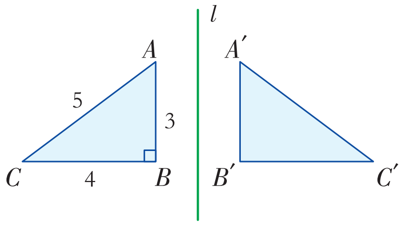
（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图，以树干为对称轴，画出树的另一半.

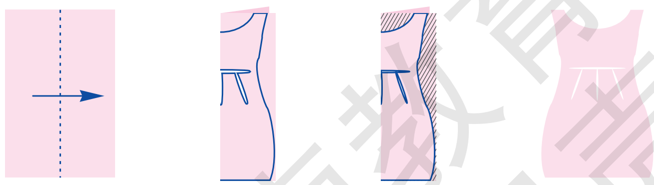
5. 如图，三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 关于直线 l 对称，根据图中的条件，求 $\angle A'B'C'$ 的度数和三角形 $A'B'C'$ 的周长.



（第 5 题图）

B 组

6. 请按下面的方法操作，用轴对称变换设计服装.



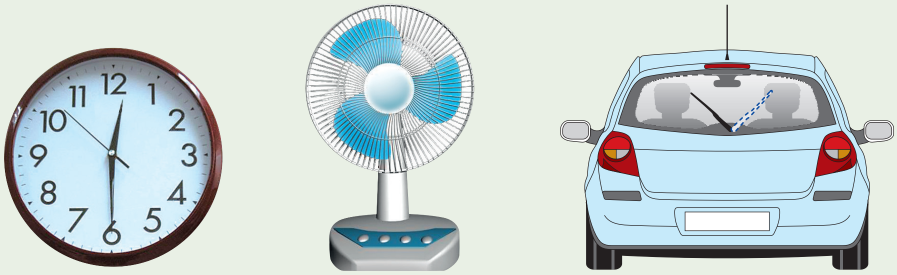
（1）对折　　（2）画线　　（3）裁剪　　（4）展开

（第 6 题图）

5.2 旋　转

观察

如图 5–9，观察钟表的指针，电风扇的叶片，汽车的雨刮器在转动的过程中有什么共同的特征.



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 5–9

钟表的指针绕中间的固定点旋转，电风扇的叶片绕电机的轴旋转，汽车的雨刮器绕支点旋转.

类似于上述三个实例，将一个平面图形 F 上的每一个点，绕这个平面内一定点 O 旋转同一个角 α（即把图形 F 上每一个点与定点的连线绕定点 O 旋转角 α），得到图形 F'，如图 5–10，图形的这种变换叫做**旋转**（rotation）. 这个定点 O 叫**旋转中心**（center of rotation），角 α 叫做**旋转角**（angle of rotation）.（在本书中，旋转角 α 不大于 360°.）

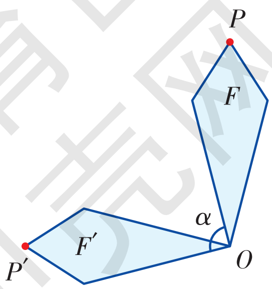


图 5–10

原位置的图形 F 叫做原像，新位置的图形 F' 叫做图形 F 在旋转下的像. 图形 F 上的每一个点 P 与它在旋转下的像点 P' 叫做在旋转下的**对应点**.

探究

如图 5-11，将三角形 ABC 按逆时针方向绕点 O 旋转 60°得到三角形 $A'B'C'$，三角形 ABC 内的点 P 在这个旋转下的像是点P'，则 OA'与 OA 相等吗？$\angle POP'$和$\angle AOA'$相等吗？度数等于多少？

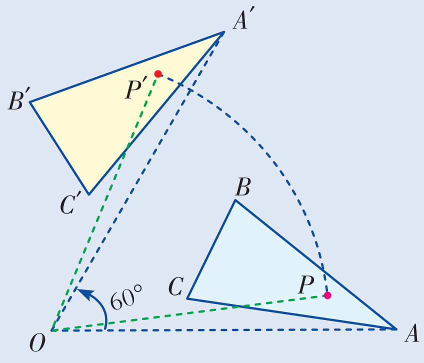


图 5-11

由旋转的概念可得，OA 与 OA'相等.

由旋转的概念可得，$\angle POP'=60°=\angle AOA'$.

一般地，旋转具有下述性质：

一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心的距离相等，两组对应点分别与旋转中心的连线所成的角相等.

说一说

在图 5-11 中，当三角形 ABC 旋转到新的位置，得到三角形 $A'B'C'$，它的形状和大小发生变化了吗？

旋转具有下述性质：

旋转不改变图形的形状和大小.

例 如图 5-12，将三角形 ABC 按逆时针方向旋转 $45°$，得到三角形 $AB'C'$.

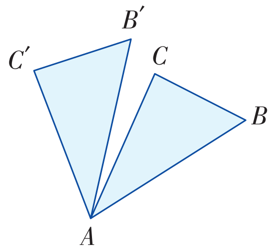


图 5-12

(1) 图中哪一点是旋转中心?

(2) $\angle B'AB$ 和 $\angle C'AC$ 有什么关系? 它们的度数是多少?

(3) AB 与 AB'，AC 与 AC' 有什么关系?

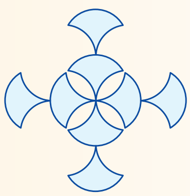
解 (1) 点 A 是旋转中心.

(2) B 与 B'，C 与 C' 是对应点. 因为两组对应点分别与旋转中心的连线所成的角相等，且等于旋转角，所以 $\angle B'AB=\angle C'AC=45°$.

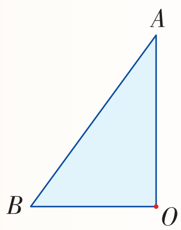
(3) 因为对应点到旋转中心的距离相等，所以 $AB=AB'$，$AC=AC'$.

练习

1. 如图，此图案可看成是由图中的哪个基础图形经过怎样的变换而得到? (用笔把基础图形圈出来.)



(第 1 题图)



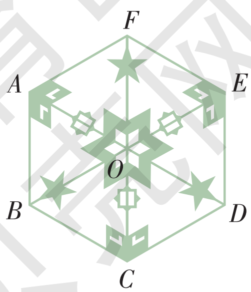
(第 2 题图)

2. 如图，将直角三角形 ABO 绕点 O 顺时针旋转 $90°$，作出旋转后的直角三角形.

习题 5.2

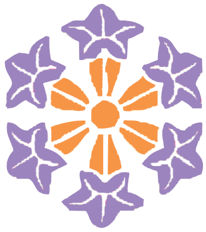
A 组

1. 如图是一幅美丽的图案，想一想：这幅图案是由图中的哪个基础图形经过怎样的变换而得到?

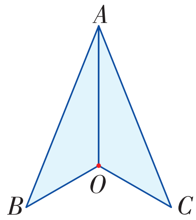


(第 1 题图)

2. 如图，将图形绕其中心旋转多少度后，能与原位置的图形重合？



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，将图形绕点 O 旋转，如果使 OA 顺时针旋转 90°，那么 OB，OC 旋转多少度呢？

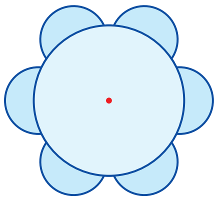
4. 钟表的分针匀速旋转一周需要 60 min.

（1）指出它的旋转中心；

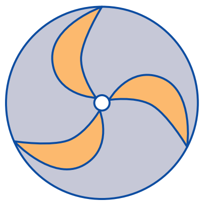
（2）经过 20 min，分针旋转了多少度？

B 组

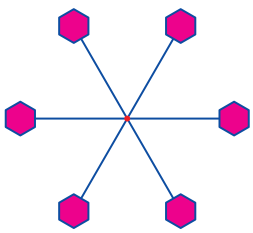
5. 将下列四个图形分别绕其中心旋转一定的度数后都能与原来的图形重合，其中与其他三个图形旋转的度数不同的是（　　）



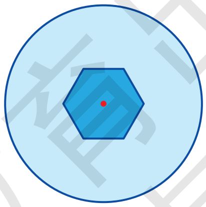
（A）



（B）



（C）



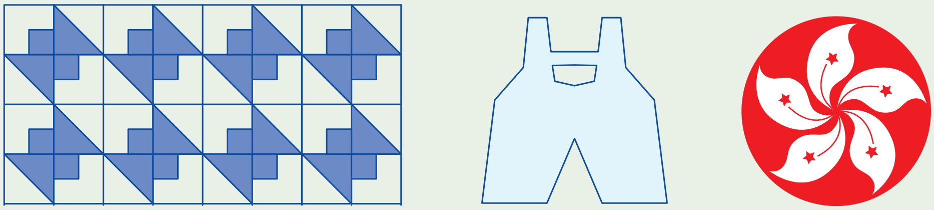
（D）

（第 5 题图）

5.3 图形变换的简单应用

观察

欣赏下列图案（如图 5–13），说出它们分别是由哪个基础图形经过怎样的变换而得到的，在图中把基础图形标出来（或把基础图形画出来）.



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 5–13

图 5–13(1)是由正方形图案  作平移得到的.

图 5–13(2)是由图  作轴对称变换得到的.

图 5–13(3)是中华人民共和国香港特别行政区区徽，可由一个紫荆花瓣  绕中心点 O 按顺时针方向依次旋转 72°，144°，216°，288°而得到. 如图 5–14.

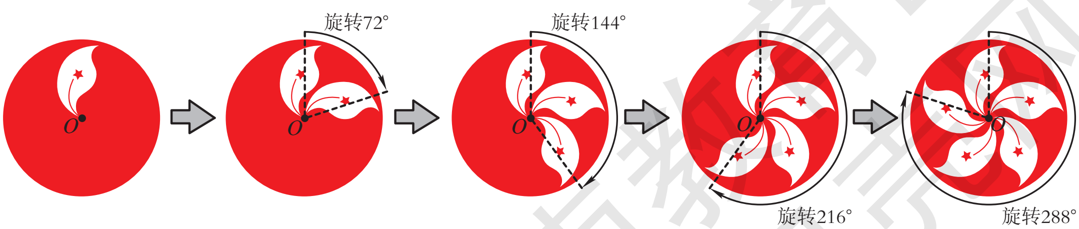


图 5–14

例 以图 5–15 的右边缘所在的直线为轴，将该图形向右作轴对称变换，再绕中心 O 按顺时针方向旋转 180°，所得到的图形是（　　）

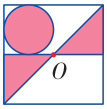
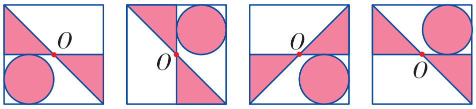
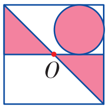
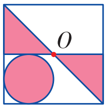


图 5–15



（A）　（B）　（C）　（D）

分析 将图 5–15 以右边缘所在的直线为轴作轴对称变换，得到图 ，再绕中心 O 按顺时针方向旋转 180°，得到图 .

答：选(A).

做一做

图 5–16 是一种正方形的瓷砖.

（1）请用 4 块所给瓷砖拼一个正方形图案（至少设计 3 种不同的图案）；

（2）如果给你 16 块这样的正方形瓷砖，要求设计的图案为轴对称图形，你可以设计出来吗？

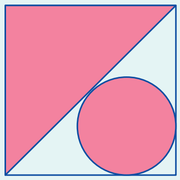
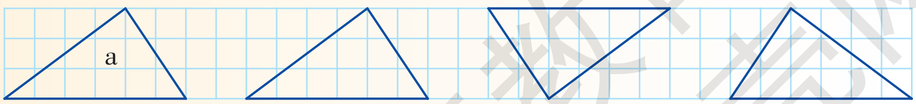


图 5–16

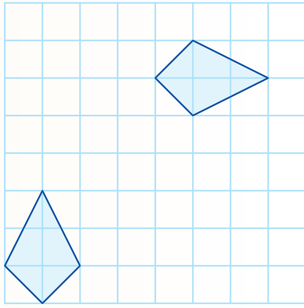
练习

1. 下图右边的 3 个三角形是由图 a 的三角形经过平移、旋转和轴对称变换而得到，分别指出这些图形变换的名称，并指出其对应的边.



(第 1 题图)

2. 如图所示，在方格纸中有两个形状、大小都一样的图形. 请指出如何运用平移、轴对称、旋转这三种变换，将其中一个图形重合到另一个图形上.



（第 2 题图）

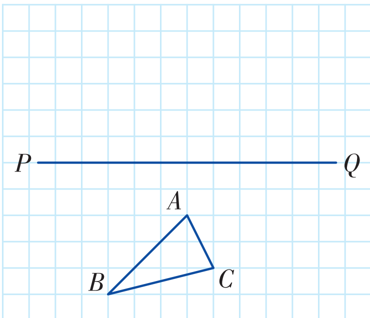
习题 5.3

A 组

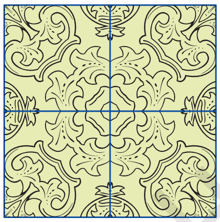
1. 如图，已知三角形 ABC 和直线 PQ.

（1）画出三角形 ABC 关于直线 PQ 成轴对称的三角形；

（2）画出三角形 ABC 绕它的顶点 B 按逆时针方向旋转 90° 后的图形.



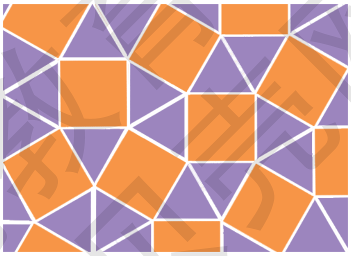
（第 1 题图）



（第 2 题图）

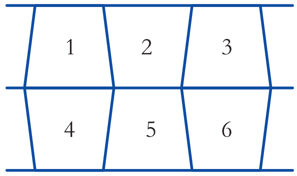
2. 欣赏如图所示的图案，此图可由哪个基础图形经过怎样的变换而得到？

3. 如图是小明用等边三角形和正方形砖拼出的地板图案. 你能用这样的砖拼出不同于该图的图案吗？



（第 3 题图）

Ⓑ 组

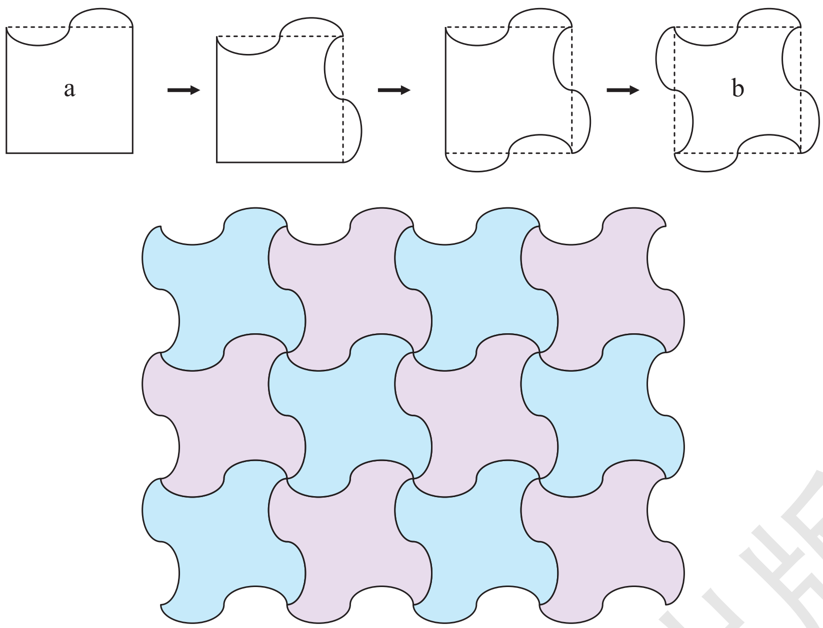


(第 4 题图)

4. 如图，试说明图形 2，3，4，5，6 分别可以看成由图形 1 经过怎样的变换而得到.

5. 某学校计划在一块长方形空地上建一个花坛，现征集设计方案，要求设计的图案由圆和正方形组成（个数不限），并使长方形场地成轴对称图形，请你设计两个方案.

6. 如图，在正方形 a 的一边设计一条曲线，并将这条曲线平移、旋转至各边，得到一个基础图形 b，然后将该图形平移可得到美丽的图案.



(第 6 题图)

请你依照上述方法，设计一个美丽的图案.

IT 教室

用计算机作几何变换图形

使用几何画板可以轻松实现平移、轴对称、旋转等几何变换.

一、平移

1. 打开几何画板，在工具栏中选取【多边形工具】，任作一个三角形 ABC，如图 1.

2. 依次选择 B，C 两点，在【变换】菜单中点击“标记向量”.

3. 选择“三角形”，在【变换】菜单中点击“平移”后得到一个三角形，再点击“平移”后又得到三角形①.

二、轴对称

1. 选择 x 轴，在【变换】菜单中选择“标记镜面”或直接双击 x 轴，标记 x 轴为对称轴.

2. 选择三角形①，在【变换】菜单中点击“反射”后得到三角形②.

三、旋转

1. 任作一个四边形 $ABCD$，选择顶点 A，在【变换】菜单中点击“标记中心”或双击点，标记为旋转中心.

2. 选择四边形 $ABCD$，在【变换】菜单中点击“旋转”，出现“旋转”对话框，点击“旋转”按钮，得到旋转后的四边形①. 连续点击“旋转”按钮二次，可以得到四边形②、③.

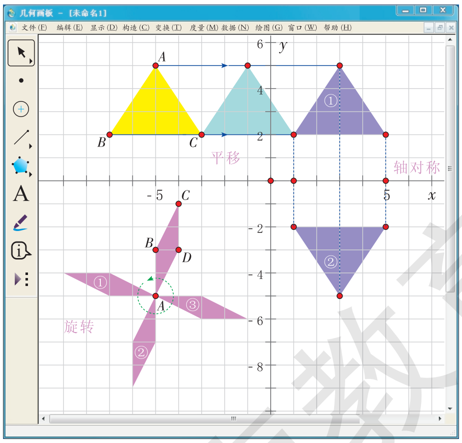


图 1

同学们，你能用几何画板中的“变换”功能，设计出漂亮的图案吗？

小结与复习

回顾

1. 什么样的图形叫轴对称图形？

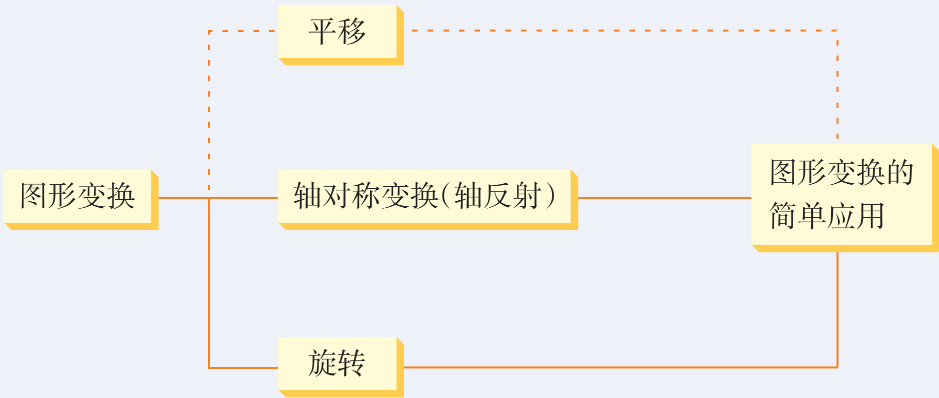
2. 什么样的图形变换叫轴对称变换(轴反射)？

3. 轴对称变换有哪些性质？

4. 什么样的图形变换叫旋转？

5. 旋转有哪些性质？

本章知识结构



注意

1. 轴对称变换(轴反射)可以看做是将图形沿直线(对称轴)翻折 180°.

2. 旋转是将图形上每一个点绕平面内一个定点(旋转中心)旋转同一个角.

3. 轴对称变换、旋转不改变图形的形状和大小.

复习题 5

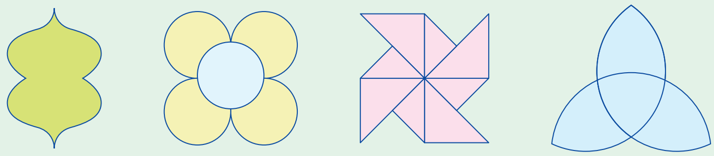
A 组

1. 如图是我国几家银行的标志，其中轴对称图形有（　　）

（A）2 个　　（B）3 个　　（C）4 个　　（D）5 个

（第 1 题图）

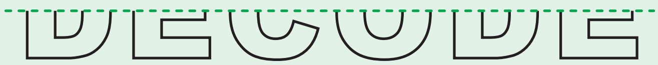
2. 下列图形中有且只有三条对称轴的是（　　）



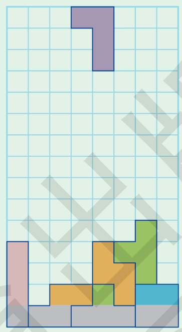
（A）　（B）　（C）　（D）

（第 2 题图）

3. 如图，6 个英文字母的上半部分不见了，试将下图补成关于虚线对称的图形，你最后将得到什么英文？



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 电子游戏“俄罗斯方块”的得分规则是：平移、旋转各种形状的方块，使之排列成完整的一行或多行(方块自动消去)即可. 如果遇到如图所示的情况，操控者要想得分应该 ________________________________.

5. 如图，将三角形 ABC 绕点 O 旋转得到三角形 $A'B'C'$，且 $\angle AOB=30°$ ，$\angle AOB'=20°$，则

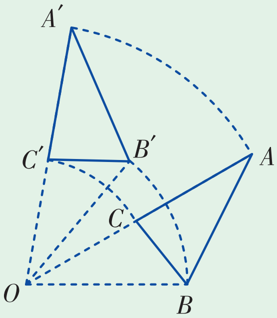
（1）点 B 的对应点是____________________；

（2）线段 OB 的对应线段是________________；

（3）线段 AB 的对应线段是_________________；

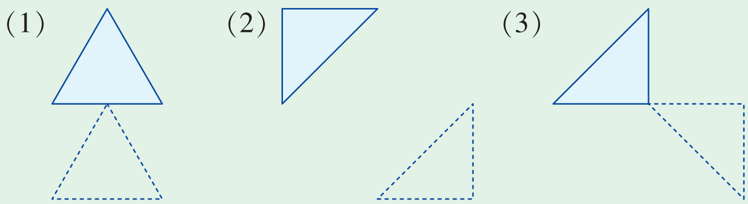
（4）$\angle AOB$ 的对应角是__________________；

（5）三角形 ABC 旋转的角度是_____________.



（第 5 题图）

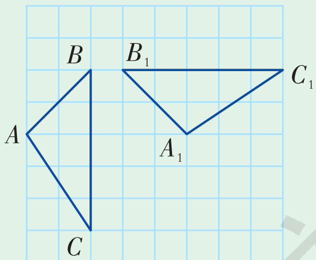
6. 如图，观察每小题中实线三角形是由虚线三角形经过怎样的变换而得到，请将每小题图形变换的名称填在横线上.



__________　　__________　　__________

（第 6 题图）

7. 如图，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以由三角形 ABC 经过怎样的变换而得到？请简要说明变换过程.

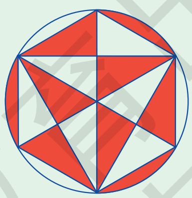


（第 7 题图）

B 组

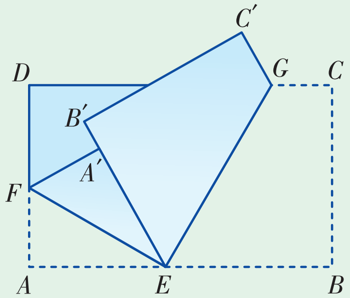
8. 王师傅用边长相同的六边形和三角形地砖铺成如图所示的地面，你能用这样的地砖铺出不同于如图所示的图案吗？

（第 8 题图）


（第 9 题图）

9. 如图，你能作出图中所示的图案吗？图中有互相平行或垂直的线段吗？若已知圆面积为 60 cm^2，则图中红色部分的面积为多少？

10. 将长方形 $ABCD$ 纸片按如图所示的方式折叠，EF，EG 为折痕，试问 $\angle AEF+\angle BEG$ 的度数是多少？



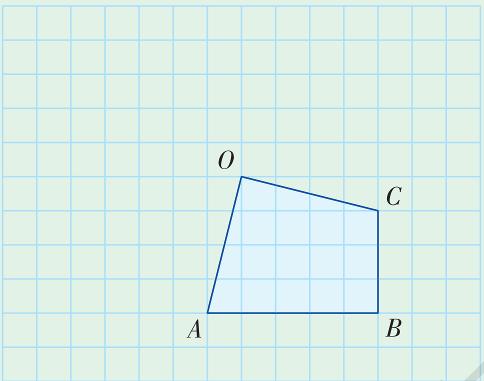
（第 10 题图）

C 组

11. 如图，在网格中有一个四边形，其中 $\angle AOC=90°$，$OA=OC$.

（1）请画出该图形绕点 O 按顺时针方向分别旋转 90°，180°，270°的图形；

（2）若网格中每个小正方形的边长为 a，旋转后点 A 的对应点依次为 A_1，A_2，A_3，求四边形 $AA_1A_2A_3$ 的面积.



（第 11 题图）

建筑学上的几何变换

建筑学是一门重视结构的学问，涉及很多不同的几何形状. 在建筑史上，拱形结构是一种重要的结构，多见于桥梁和拱门(如图 1). 拱形结构具有轴对称性质，并可通过平移及旋转变换而形成别的结构.

拱形结构除了大气美观外，最大的特点是可以将负重分散到拱形的其他部分(如图 2).

图 1

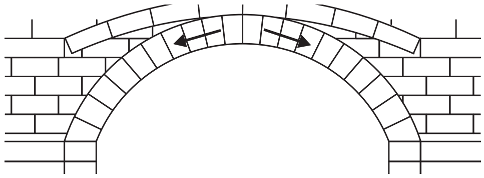


图 2

采用平移的方法，把拱形结构沿左右两方不断复制，便可形成新的反射对称结构，如图 3 的拱桥. 基于对称性质，原本由一道拱梁独自承受的力，变成由邻近拱梁共同承受，从而令结构更为稳固. 中国古代将这种设计运用于桥梁上，既能承重，又能抵抗水流的冲击.

图 3

图 4

同样，采用平移的方法，把拱门结构向后方不断复制，就可得到如图 4 的隧道结构.

此外，如果把半圆形拱绕垂直的拱轴旋转一周，半圆便会形成半球体圆拱顶，这种结构具有旋转对称的性质，看上去美观大方，为不少建筑物所采用，如图 5.

图 5

细心观察四周，我们不难发现数学在生活上的应用相当广泛. 当我们面对一件事物时，可以多思考其中的原理，从而养成思考的习惯. 把这种态度应用在学习上，你便会发现数学能为你提供无穷的乐趣和满足感. 好好享受学习数学的乐趣吧！

综合与实践

长方体包装盒的设计与制作

在超市里，我们经常可以看到形形色色的包装盒．“包装”对商品不仅具有防损、防潮、方便运输的作用，精致的包装还给人以美感，起到推介商品的作用．大多数包装盒在使用后被扔掉了，怎样研制一种浪费较少材料的包装盒呢？

操作步骤

1. 成立探索研究小组，3～4 人为一组，选出组长，分好工.

2. 制定探索研究计划，明确研究目标，确定研究步骤，提出有效措施.

（1）搜集包装盒样品，查找并记录相关资料.

（2）对搜集的包装盒进行分类，探索研究长方体包装盒的结构特征，明确设计与制作长方体包装盒的思路和步骤，用文字记录观察成果.

（3）在笔记本上草拟你的设计方案，与小组同学交流方案的可行性.

3. 设计、制作长方体包装盒.

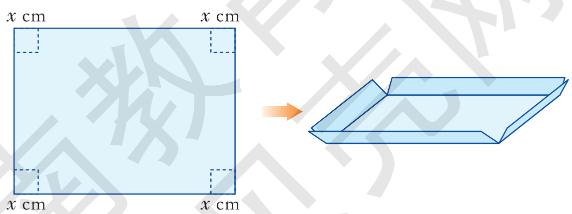
4. 撰写探索研究工作的总结报告.

5. 向同班同学展示你们组所设计的包装盒，并参与全班交流、评比.

以小组为单位，在老师的组织、指导下，依照上述步骤，完成探索研究活动，并独立完成下列问题.

做一做

1. 将一张 A4 纸的四个角，剪去大小相同的正方形，然后折成一个长方体容器．观察这个长方体容器的棱与棱、棱与面、面与面之间，各有哪些位置关系.



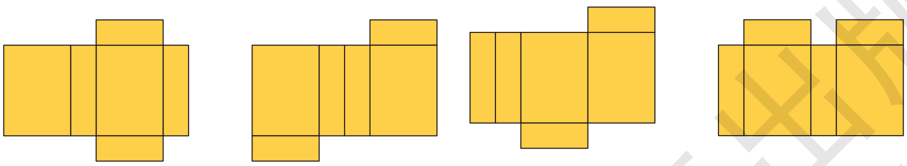
2. 设被切去的正方形的边长为 x cm，则长方体容器的长、宽、高各是多少？用含 x 的代数式表示这个容器的容量，试以不同的 x 值计算这个容器的容量，并把结果列成表格. 通过小组比较，你们所做的长方体容器的最大容量是多少？

3. 用一张长方形纸，设计一个长方体包装盒的盒套，运用平移、轴对称、旋转等变换设计包装盒的外观，将设计过程中最精彩之处写进总结报告，与同学分享.

想一想

1. 把一个长方体包装盒如下图剪开，再平铺成一个平面图形，我们把它叫做这个长方体包装盒的表面展开图.

请判断下列四个图形中，哪一个可看做一个长方体包装盒的表面展开图.



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

2. 将一张长 16 cm、宽 12 cm 的长方形纸板，设计制作一个底面为正方形的长方体包装盒，可以有多种设计制作方案，比一比哪种设计方案可使其容积更大.

第6章

数据的分析

用科学的方法获取一组数据后，需要对数据进行分析．平均数、中位数、众数可以作为一组数据的代表，刻画数据的集中趋势；方差可以用来刻画数据的离散程度，它们在实践中都有着广泛的应用．本章将带领我们认识平均数、中位数、众数和方差，学会如何求出它们的值，并根据结果对实际问题进行解释．

6.1 平均数、中位数、众数

6.1.1 平均数

在小学阶段，我们对平均数有过一些了解，知道平均数是对数据进行分析的一个重要指标.

动脑筋

一个小组 10 名同学的身高（单位：cm）如下表所示：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高	151	156	153	158	154	161	155	157	154	157

（1）计算 10 名同学身高的平均数.

（2）在数轴上标出表示这些同学的身高及其平均数的点.

（3）考察表示平均数的点与其他的点的位置关系，你能得出什么结论?

平均数：$\overline{x} = (151+156+153+158+154+161+155+157+154+157) \div 10$

$= 155.6(\text{cm})$.

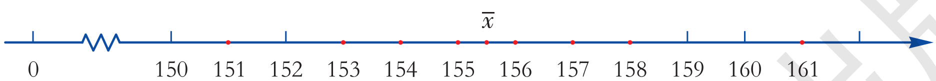
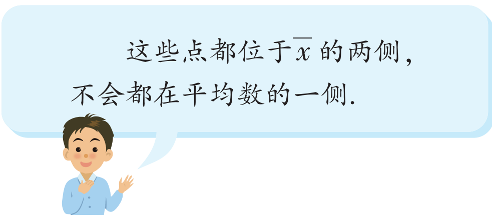
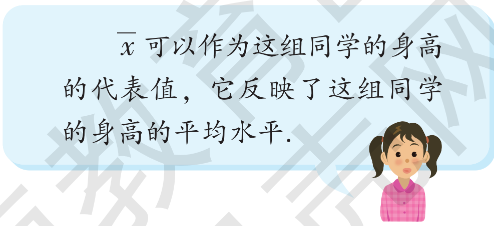


图 6-1





平均数（mean）作为一组数据的一个代表值，它刻画了这组数据的平均水平.

例 1 某农业技术员试种了三个品种的棉花各 10 株. 秋收时他清点了这 30 株棉花的结桃数如下表:

棉花品种	结桃数（个）
甲	84，79，81，84，85，82，83，86，87，81
乙	85，84，89，79，81，91，79，76，82，84
丙	83，85，87，78，80，75，82，83，81，86

哪个品种较好?

分析 平均数可以作为一组数据的代表值，它刻画了这组数据的平均水平. 当我们要比较棉花的品种时，可以计算出这些棉花结桃数的平均数，再通过平均数来进行比较.

解 设甲、乙、丙三个品种的平均结桃数分别为 $\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，$\bar{x}_{丙}$，则

$$\bar{x}_{甲}=\frac{84+79+81+84+85+82+83+86+87+81}{10}=83.2(个),$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{85+84+89+79+81+91+79+76+82+84}{10}=83.0(个),$$

$$\bar{x}_{丙}=\frac{83+85+87+78+80+75+82+83+81+86}{10}=82.0(个).$$

由于甲种棉花的平均结桃数高于其他两个品种的平均结桃数，所以我们可以认为甲种棉花较好.

计算器一般有统计功能，我们可以利用该功能求一组数据的平均数. 不同型号的计算器其操作步骤（按键）可能不同，操作时需参阅计算器的说明书. 通常先按统计键，使计算器进入统计运算模式，然后依次输入数据 x_1，M+，x_2，M+，…，最后按求平均数的功能键，即可得到该组数据的平均数.

动脑筋

在一次全校歌咏比赛中，7 位评委给一个班级的打分分别是：9.00，8.00，9.10，9.10，9.15，9.00，9.58. 怎样评分比较公正?

我们可以计算该班级歌咏比赛的平均分

$$\overline{x}=\frac{9.00+8.00+9.10+9.10+9.15+9.00+9.58}{7}=8.99.$$

但实际上评委的评判受主观因素影响比较大，评分也比较悬殊，为了消除极端数对平均数的影响，一般去掉一个最高分和一个最低分，最后得分取

$$\overline{x'}=\frac{9.00+9.10+9.10+9.15+9.00}{5}=9.07,$$

这个分数才比较合理地反映了这个班级的最后得分.

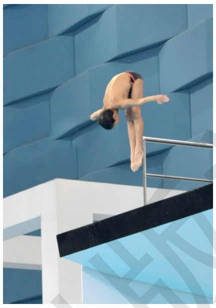
练习

1. 七年级(1)班举行 1 min 跳绳比赛，以小组为单位参赛. 第 1 小组有 8 名同学，他们初赛和复赛时的成绩如下表(单位：次)：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
初赛	90	85	85	78	101	105	97	96
复赛	100	90	86	78	98	100	106	98

(1) 计算这组同学初赛和复赛的平均成绩.

(2) 你认为这组同学的初赛成绩好，还是复赛成绩好?



2. 某跳水队计划招收一批新运动员. 请 6 位评委给选拔赛参加者打分，平均分数超过 8.5 分才能被选上. 刘明在比赛时的成绩为 8.30，8.25，8.45，8.20，8.30，9.60，你认为刘明选得上吗?

3. 小明班上同学的平均身高是 1.4 m，小强班上同学的平均身高是 1.45 m. 小明一定比小强矮吗?

动脑筋

学校举行运动会，入场式中有七年级的一个队列. 已知这个队列共 100 人，排成 10 行，每行 10 人. 其中前两行同学的身高都是 160 cm，接着 3 行同学的身高都是 155 cm，最后 5 行同学的身高都是 150 cm.

怎样求这个队列的平均身高?

100 名同学的身高有 100 个数，把它们加起来再除以 100，就得到平均数.

这组数据中有许多相同的数，相同的数求和可用乘法来计算.

用 $\overline{x}$ 表示平均身高，则

$$\begin{aligned}\overline{x} &= (160\times20+155\times30+150\times50)\div100\\ &=160\times\frac{20}{100}+155\times\frac{30}{100}+150\times\frac{50}{100}\\ &=160\times0.2+155\times0.3+150\times0.5\\ &=153.5(\text{cm}).\end{aligned}$$

在上面的算式中，0.2，0.3，0.5 分别表示 160，155，150 这三个数在数据组中所占的比例，分别称它们为这三个数的**权数**（weight）：

160 的权数是 0.2，

155 的权数是 0.3，

150 的权数是 0.5，

三个权数之和为 $0.2+0.3+0.5=1$.

一般地，权数之和为 1. “权”越大，对平均数的影响就越大.

153.5 是 160，155，150 分别以 0.2，0.3，0.5 为权的**加权平均数**（weighted mean）.

动脑筋

有一组数据如下：

1.60，1.60，1.60，1.64，1.64，1.68，1.68，1.68.

（1）计算这组数据的平均数.

（2）这组数据中1.60，1.64，1.68的权数分别是多少？求出这组数据的加权平均数.

（3）这组数据的平均数和加权平均数有什么关系？

(1) 这组数据的平均数为

$$\frac{1.60+1.60+1.60+1.64+1.64+1.68+1.68+1.68}{8}=1.64.$$

(2) 1.60的权数为$\frac{3}{8}$，1.64 的权数为$\frac{1}{4}$，1.68 的权数为$\frac{3}{8}$.

这组数据的加权平均数为

$$1.60\times\frac{3}{8}+1.64\times\frac{1}{4}+1.68\times\frac{3}{8}$$
$$=0.6+0.41+0.63=1.64.$$

(3) 这组数据的平均数和加权平均数相等，都等于 1.64，意义也恰好完全相同. 但我们不能把求加权平均数看成是求平均数的简便方法，在许多实际问题中，权数及相应的加权平均数都有特殊的含义. 平均数可看做是权数相同的加权平均数.

例 2 某纺织厂订购一批棉花，棉花纤维长短不一，主要有 3 cm，5 cm，6 cm 三种长度. 随意地取出 10 g 棉花并测出三种长度的棉花纤维的含量，得到下面的结果：

纤维长度(cm)	3	5	6
含量(g)	2.5	4	3.5

问：这批棉花纤维的平均长度是多少？

分析 在取出的 10 g 棉花中，长度为 3 cm，5 cm，6 cm 棉花的纤维各占 25%，40%，35%，显然含量多的棉花纤维的长度对平均长度的影响大，所以要用求加权平均数的方法来求出这批棉花纤维的平均长度.

解 这批棉花纤维的平均长度是

$$3\times\frac{2.5}{10}+5\times\frac{4}{10}+6\times\frac{3.5}{10}=4.85\ (\text{cm}).$$

答：这批棉花纤维的平均长度是 4.85 cm.

练习

1. 某棒球运动员近 50 场比赛的得分情况如下表：

得分	0	1	2	3	4
次数	14	26	7	2	1

求该运动员 50 场比赛得分的平均数.

2. 某出版社给一本书的作者发稿费，全书 20 万字，其中正文占总字数的 $\frac{4}{5}$，每千字 50 元；答案部分占总字数的 $\frac{1}{5}$，每千字 30 元. 问全书平均每千字多少元?

6.1.2 中位数

动脑筋

张某管理一家餐馆，下面是该餐馆所有工作人员在 2010 年 10 月的工资情况：

张某：15 000 元；　　会计：1 800 元；

厨师甲：2 500 元；　　厨师乙：2 000 元；

杂工甲：1 000 元；　　杂工乙：1 000 元；

服务员甲：1 500 元；　　服务员乙：1 200 元；

服务员丙：1 000 元.

计算他们的平均工资，这个平均工资能反映该餐馆员工在这个月收入的一般水平吗?

设餐馆全体员工的平均工资为 $\overline{x}$，则（可用计算器计算）

$$\overline{x}=\frac{15\ 000+1\ 800+2\ 500+2\ 000+1\ 000+1\ 000+1\ 500+1\ 200+1\ 000}{9}$$

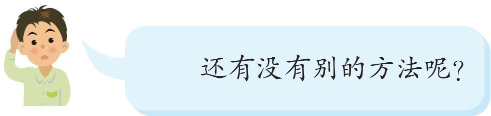
$$=3\ 000（元）.$$

实际上，3 000 元不能代表餐馆员工在这个月收入的一般水平，因为员工中除张某外工资最高的厨师甲的月收入 2 500 元都小于这个平均数.

若不计张某的工资，设 8 名员工的平均工资为 $\overline{x'}$，则（可用计算器计算）

$$\overline{x'}=\frac{1\,800+2\,500+2\,000+1\,000+1\,000+1\,500+1\,200+1\,000}{8}=1\,500(元).$$

不计张某的工资，餐馆员工的月平均工资为 1 500 元，这个数据能代表餐馆员工在这个月收入的一般水平.



我们可以把餐馆中人员的月收入按从小到大的顺序排列：

1 000，1 000，1 000，1 200，1 500，1 800，2 000，2 500，15 000.

位于中间的数据，即第 5 个数据为 1 500，它能比较合理地反映该餐馆员工的月收入水平.

像上述例子那样，把一组数据按从小到大的顺序排列，如果数据的个数是奇数，那么位于中间的数称为这组数据的**中位数**（median）；如果数据的个数是偶数，那么位于中间的两个数的平均数称为这组数据的**中位数**.

例 3 求下列两组数据的中位数：

（1）14，11，13，10，17，16，28；

（2）453，442，450，445，446，457，448，449，451，450.

解 （1）把这组数据从小到大排列：

10，11，13，14，16，17，28.

位于中间的数是 14，因此这组数据的中位数是 14.

（2）把这组数据从小到大排列：

442，445，446，448，449，450，450，451，453，457.

位于中间的两个数是 449 和 450，这两个数的平均数是 449.5，因此这组数据的中位数是 449.5.

中位数把一组数据分成相同数目的两部分，其中一部分都小于或等于中位数，而另一部分都大于或等于中位数. 因此，中位数常用来描述“中间位置”或“中等水平”，但中位数没有利用数据组中所有的信息.

练习

1. 求下列各组数据的中位数：

(1) 100，75，80，73，50，60，70；

(2) 120，100，130，200，80，140，125，180.

2. 求下面各组数据的中位数和平均数：

(1) 17，12，5，9，5，14；

(2) 20，2，2，3，9，1，22，11，28，2，0，8，3，29，8，1，5.

6.1.3 众数

动脑筋

下面是一家鞋店在一段时间内各种尺码的男鞋的销售情况统计表：

鞋的尺码（cm）	23	23.5	24	24.5	25	25.5	26	26.5
销售量（双）	5	6	6	10	17	10	12	7

这家店销售量最多的男鞋是哪种尺码的？店主最关心的问题是什么？

这家店销售量最多的是 25 cm 的鞋，店主最关心的就是销售量，所以店主下次进货时可以多进这个尺码的鞋.

在一组数据中，把出现次数最多的数叫做这组数据的**众数**(mode).

在上面的问题中，25 是鞋的尺码中出现次数最多的数，所以 25 是这组数据的众数.

当一组数据中某数据多次重复出现时，常可以用众数作为这组数据的数值的一个代表值.

一组数据的众数可以不止一个.

例 4 某公司全体职工的月工资如下：

月工资(元)	18 000	12 000	8 000	6 000	4 000	2 500	2 000	1 500	1 200
人 数	1 (总经理)	2 (副总经理)	3	4	10	20	22	12	6

试求出该公司月工资数据中的众数、中位数和平均数.

解 在上述 80 个数据中，2 000 出现了 22 次，出现的次数最多，因此这组数据的众数是 2 000.

把这 80 个数据按从小到大的顺序排列后，可以发现位于中间的数是 2 000，2 500，因此这组数据的中位数是 $\dfrac{2\ 000+2\ 500}{2}=2\ 250$.

这组数据的平均数为

$$\bar{x}=\frac{18\ 000+12\ 000\times2+8\ 000\times3+6\ 000\times4+4\ 000\times10+2\ 500\times20+2\ 000\times22+1\ 500\times12+1\ 200\times6}{80}$$

$$=\frac{249\ 200}{80}=3\ 115.$$

我们把这组数据的众数、中位数、平均数表示在图 6–2 中：

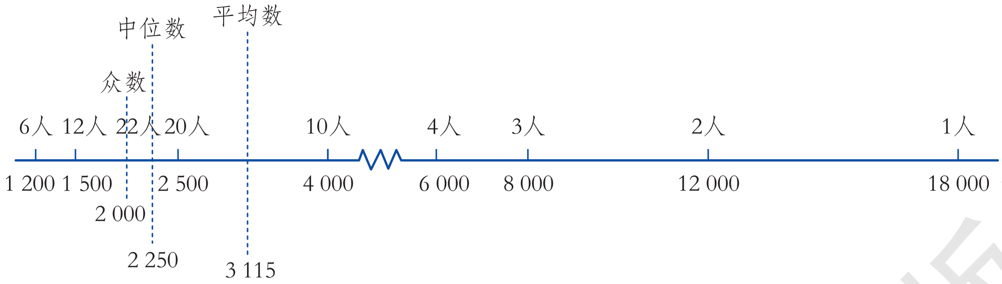


图 6–2

议一议

在例 4 中，你认为用平均数、中位数或众数中的哪一个更能反映该公司的工资水平？

工资的平均数 3 115 偏高，因为大多数员工的工资都达不到这个平均数，用它来作为该公司员工工资的代表值并不合适.

众数是 2 000，中位数是 2 250，它们代表了大多数人的工资水平，不偏高也不偏低，较能反映工资水平的实际情况.

说一说

在例 4 中，对于职工月工资数据的平均数、中位数和众数，你认为该公司总经理、普通员工及应聘者将分别关注哪一个？说说你的理由，并相互交流.

公司总经理最关心的是公司月工资的总额，所以他关注的是平均数.

普通员工关注的是自己的收入在本公司职工群体中的位置，中位数能帮助职工了解自己的工资收入是“中上”还是“中下”水平……

应聘者关注的是该公司月工资的众数，因为应聘者最想知道的是公司发给大多数员工的工资数，这也是一般的应聘者将会拿到的工资.

平均数、中位数和众数都是一组数据的代表，它们从不同侧面反映了数据的集中趋势. 平均数的计算要用到所有的数据，它能够充分利用数据提供的信息，因此在现实生活中应用较广，但它容易受极端值的影响；中位数对极端值不敏感，但没有利用数据中所有的信息；众数只能反映一组数据中出现次数最多的数据，也没有利用数据中所有的信息.

练习

1. 求下面各组数据的众数：

(1) 3，4，4，5，3，5，6，5，6；

(2) 1.0，1.1，1.0，0.9，0.8，0.9，1.1，0.9.

2. 某班 30 人所穿运动服尺码的情况为：穿 75 号码的有 5 人，穿 80 号码的有 6 人，穿 85 号码的有 15 人，穿 90 号码的有 3 人，穿 95 号码的有 1 人. 穿哪一种尺码衣服的人最多？这个数据称为什么数？

习题 6.1

A 组

1. 用两种方法计算下列数据的平均数：

35，35，34，47，47，84，84，84，84，125.

（1）一般方法；（2）加权平均法.

2. 学校举行元旦文艺演出，由参加演出的 10 个班各推选一名同学担任评委，每个节目演出后的得分为各评委所给分的平均数. 下面是各评委对某班演出节目给出的分数：

评委序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
评分	9.20	9.25	9.00	9.10	8.50	9.30	9.20	9.10	8.70	9.90

（1）上述分数的平均分能反映该节目的水平吗？

（2）如果去掉一个最高分和一个最低分，再计算得到的平均分是多少？这一平均分比第(1)小题算出的平均分是否更合理？

3. 下表是小红和小明参加一次演讲比赛的得分情况：

项目 选手	服装	普通话	主题	演讲技巧
小红	85	70	80	85
小明	90	75	75	80

评总分时，按服装占 5%，普通话占 15%，主题占 40%，演讲技巧占 40%考评，你认为小红和小明谁更优秀？

4. 为了解儿童的身体发育情况，某幼儿园对 18 名 3 岁儿童的头围进行了测量，结果（单位：cm）如下：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
头围	49.9	50.1	50.2	50.1	49.9	50.2	49.8	49.7	50.3
编号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
头围	49.8	50.0	50.1	50.2	49.6	49.7	49.8	49.9	50.2

计算他们的平均头围，并指出这组数据的众数和中位数.

B 组

5. 一种什锦糖由价格为12，14.4，13.6，20(单位：元/kg)的 4 个品种的糖果混合而成. 4 种糖果的比例为 $3:3:5:4$，问什锦糖的价格应如何确定？

6. 某地质量检测部门对所在城市所有 40 个桶装水产品进行质量测评，所有产品平均得分为 70 分. 某公司产品得分为 75 分，该公司经理认为本公司产品得分超过平均分 5 分，因此属"中上"水平. 请根据下表各产品得分情况分析，该公司经理的判断有道理吗？

分数	98	95	90	85	80	75	35	31	20
品种数	1	2	4	10	12	1	3	2	5

7. 甲、乙、丙三个电子厂家在广告中都声称，他们的某种电子产品在正常情况下的待机时间都是 12 h，质量检测部门对这三家销售产品的待机时间进行了抽样调查，统计结果（单位：h）如下：

甲厂：8，9，9，9，9，11，13，16，17，19；

乙厂：10，10，12，12，12，13，14，16，18，19；

丙厂：8，8，8，10，11，13，17，19，20，20.

(1) 分别求出以上三组数据的平均数、众数、中位数.

(2) 这三个厂家的推销广告分别利用了上述哪一种数来表示待机时间？

(3) 如果你是顾客，宜选择哪个厂家的产品？为什么？

6.2 方 差

动脑筋

刘亮和李飞参加射击训练的成绩（单位：环）如下：

刘亮：7，8，8，9，7，8，8，9，7，9；

李飞：6，8，7，7，8，9，10，7，9，9.

（1）两人的平均成绩分别是多少？

（2）如何反映这两组数据与其平均数的偏离程度？

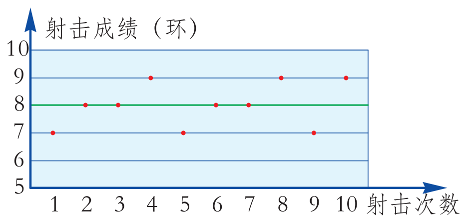
（3）谁的成绩比较稳定？

刘亮成绩的平均数是 $\dfrac{7+8+8+9+7+8+8+9+7+9}{10}=8.0$；

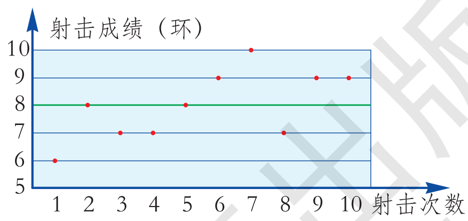
李飞成绩的平均数是 $\dfrac{6+8+7+7+8+9+10+7+9+9}{10}=8.0$.

即两人的平均成绩相同.

为了直观地看出这两组数据与其平均数的偏离程度，我们用图 6–3 来表示数据的分布情况.



刘亮的射击成绩



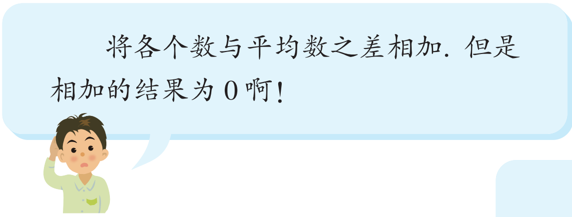
李飞的射击成绩

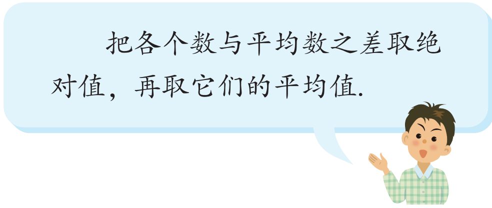
图 6–3

由上面两幅图，可以发现刘亮的射击成绩大多集中在平均成绩 8 环附近，而李飞的射击成绩与其平均成绩的偏差较大.

一组数据中的数与这组数据的平均数的偏离程度是数据的一个重要特征，它反映了一组数据的离散程度或波动大小.

那么如何找到一个特征值来反映一组数据与其平均数的离散程度呢？





为了反映一组数据的离散程度，可以采用很多方法，统计中常采用以下做法：

设一组数据为 x_1，x_2，…，x_n，各数据与平均数 $\overline{x}$ 之差的平方的平均值，叫做这组数据的**方差**（variance），记做 s^2.

即 $$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2].$$

由此我们可以算出刘亮、李飞的射击成绩的方差分别是

$$s^2_{刘亮}=\frac{1}{10}[(7-8)^2+(8-8)^2+\cdots+(9-8)^2]=0.6.$$

$$s^2_{李飞}=\frac{1}{10}[(6-8)^2+(8-8)^2+\cdots+(9-8)^2]=1.4.$$

计算结果表明：$s^2_{李飞}>s^2_{刘亮}$，这说明李飞的射击成绩波动大，而刘亮的射击成绩波动小，因此刘亮的射击成绩稳定.

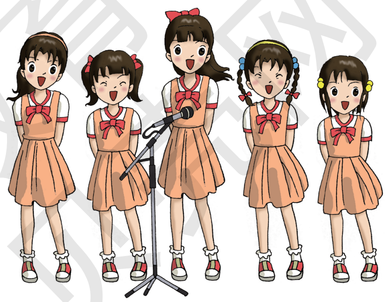
一般地，一组数据的方差越小，说明这组数据离散或波动的程度就越小，这组数据也就越稳定.

例 有两个女声小合唱队，各由 5 名队员组成. 她们的身高(单位：cm)为：

甲队：160，162，159，160，159；

乙队：180，160，150，150，160.

如果单从队员的身高考虑，哪队的演出形象效果好？



解 甲队队员的平均身高是

$$\bar{x}_{甲}=\frac{160+162+159+160+159}{5}=160(\text{cm}).$$

乙队队员的平均身高是

$$\bar{x}_{乙}=\frac{180+160+150+150+160}{5}=160(\text{cm}).$$

甲队队员身高的方差是

$$s^2_{甲}=\frac{1}{5}[(160-160)^2\times2+(162-160)^2+(159-160)^2\times2]$$

$$=\frac{1}{5}[0+4+2]=1.2.$$

乙队队员身高的方差是

$$s^2_{乙}=\frac{1}{5}[(180-160)^2+(160-160)^2\times2+(150-160)^2\times2]$$

$$=\frac{1}{5}[400+0+200]=120.$$

计算的结果表明：乙队队员身高的方差比甲队队员身高的方差大很多，这说明乙队中各队员的身高波动大，而甲队中各队员的身高波动小，所以甲队队员的身高比较整齐，形象效果好.

从例 1 的计算过程可以看到，求方差的运算量很大. 当一组数据所含的数很多时，我们可以借助计算器来求一组数据的方差. 不同型号的计算器其操作步骤可能不同，请先阅读计算器的说明书. 通常先按统计键，使计算器进入统计运算模式，然后依次输入数据，最后按求方差的功能键，即可求出该组数据的方差.

练习

1. 用计算器求下列各组数据的平均数和方差：

(1) 24，24，31，31，47，47，62，84，95，95；

(2) 473，284，935，743，586，654；

(3) 10.1，9.8，9.7，10.2，10.3，9.9，10.0.

2. 李明的班上要派一名选手参加学校田径运动会的 100 m 比赛，李明和张亮都希望自己能参加比赛，他们在训练中 10 次的测试成绩（单位：s）分别是：

李明：14.5，14.9，14.2，15.0，14.7，
14.1，14.4，13.9，15.5，14.8；

张亮：14.8，14.4，15.5，14.1，14.3，
14.6，14.1，14.8，15.1，14.3.

根据两人的成绩，应该派谁去参加比赛？

习题 6.2

A 组

1. 给定一组数据如下：

1，1，4，4，4，7，7.

（1）请你估计一下这组数据的平均数、方差大约是多少；

（2）用计算器计算这组数据的平均数、方差，与你的估计值进行比较，你的估计是否准确？

2. 一个小组有 8 名同学，分别测量同一根绳子的长度，测得的数据（单位：cm）如下：

109.7，110.1，109.9，109.9，110，110.1，110.2，110.1.

（1）如何确定这根绳子的长度的近似值？

（2）如何评价测量结果的准确程度？

3. 某村引进两种水稻良种，在条件（肥力、日照、通风……）不同的 6 块试验田中同时播种并核定亩产，其结果(单位：kg/亩)统计在下面的表中：

编号	1	2	3	4	5	6
甲	550	560	550	525	555	560
乙	545	580	575	525	530	545

问：哪个品种的产量较稳定，适合推广？

B 组

4. 甲、乙两地的月平均气温(单位：℃)如下表所示：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
甲	−8	−6	−2	8	13	18	21	19	14	7	−2	−4
乙	11	13	17	20	23	25	28	27	25	20	17	14

试求甲、乙两地月平均气温的方差，并对两地气温变化情况作出比较.

5. 某公司准备盖大楼，有两块土地可供征用，但两块土地都崎岖不平，需要平整. 现对每块土地确定房基基准高度，然后在两块土地上分别适当地另取 10 点，用水平仪测得各点对基准的相对标高(单位：cm)如下表所示：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	−45	76	47	−26	135	84	−61	−38	76	92
乙	74	120	100	−70	−44	95	63	−50	57	−25

问：哪一块土地比较容易平整？

IT教室

用 Excel 求平均数、中位数、众数和方差

某同学暑假军事训练射击成绩如下：

7.4，8.7，9.6，7.6，9.6，9.3，9.5，9.6，9.4，9.5.

请利用 Excel 求出这组数的平均数、中位数、众数和方差.

我们以求平均数为例示范操作步骤：

1. 打开 Excel，依次在 A1 到 A10 中输入上述 10 个数，如图 1 所示.

B1	A	B
1	7.4	
2	8.7	
3	9.6	
4	7.6	
5	9.6	
6	9.3	
7	9.5	
8	9.6	
9	9.4	
10	9.5	

图 1

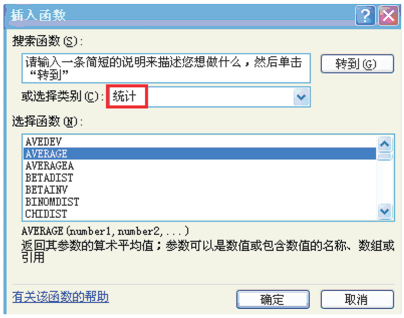


图 2

2. 把光标移至 B1 处，在【插入】菜单里点击【函数】，弹出【插入函数】对话框，在“或选择类别（C）”中选择“统计” 和“选择函数（N）” 中选择“AVERAGE”，如图 2 所示.

3. 点击【确定】按钮，出现图 3，接着在 Number1 中输入“A1: A10”，再点击【确定】按钮，B1 中出现这组数据的平均数.

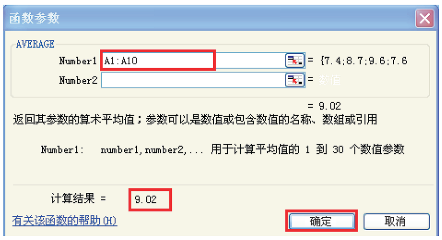


图 3

B4	A	B
1	7.4	9.02
2	8.7	9.45
3	9.6	9.6
4	7.6	0.6436
5	9.6	
6	9.3	
7	9.5	
8	9.6	
9	9.4	
10	9.5	
11		

图 4

4. 同理，把光标依次放在 B2，B3，B4 处，在【插入函数】中分别选择“MEDIAN、MODE、VARP”，按照步骤 3 操作，即可求出这组数据的中位数、众数和方差，最后结果如图 4 所示.

小结与复习

回顾

1. 举例说明平均数、中位数、众数的意义.

2. 举例说明平均数和加权平均数之间有什么联系与区别.

3. 举例说明方差是如何刻画数据的离散程度或波动大小的.

本章知识结构

- 数据的分析（分析数据的特征性质）
  - 数据的一般水平或集中趋势
    - 平均数、加权平均数
    - 中位数
    - 众数
  - 数据的离散程度或波动大小
    - 方差

注意

1. 平均数与加权平均数的意义不同. 当一组数据中不同的数重复出现时，我们用权数的大小来反映重复次数的多少；通常也用权数来反映一组数据中不同成分的比例或重要性. 对于不同的实际问题，权数常有不同的含义.

2. 平均数、中位数、众数都是一组数据的代表，它们从不同侧面反映了数据的一般水平或集中趋势. 值得注意的是：平均数相同的数据组在性质上仍可能有很大的区别，这是因为它们相对于平均数的分布情况不同，即数据组中的数相对于平均数的偏差不同. 方差是一组数据中各数与其平均数之差的平方的平均值，它反映了一组数据在其平均数周围的离散程度.

复习题 6

A 组

1. 计算下列各题，并比较计算结果：

（1）① 求 4，14，24 的平均数；

② 一组数据中有 5 个 4，5 个 14，5 个 24，求这组数据的平均数.

（2）① 求 4，14，14，24，24，24 的平均数；

② 求 4，14，14，24，24，24 以 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$ 为权的加权平均数；

③ 求 4，14，24 以 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ 为权的加权平均数.

2. 一位科学家为了检测杀虫剂对蚯蚓的影响，在一块喷洒了杀虫剂和另一块未做任何处理的土壤中各设了 5 块面积相同的样地，然后，他从每块样地上都取 1 m^3 的泥土，并统计其中所含的蚯蚓数目，实验所获数据如下：

	喷洒过杀虫剂的土地					未经处理的土地				
样地	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
蚯蚓数	730	254	319	428	451	901	620	811	576	704

（1）计算喷洒过杀虫剂的土地中平均每立方米所含的蚯蚓数，对于未经处理的土地，进行相同的计算；

（2）杀虫剂对泥土中蚯蚓的数量有何影响？

3. 在一节体育课上，某班的 17 名女同学的跳远成绩如下表所示：

成绩(m)	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

求出这些女同学跳远成绩的众数、中位数和平均数.

4. 某体育用品店销售 9 种服装，价格(单位:元)分别为：

60，120，60，135，230，197，60，266，186.

（1）求出这组数据的平均数、中位数、众数.

（2）该店宣称他们的服装售价处于低价位，因为 60 元的商品最多，你认为这种说法合理吗？

5. 为了比较甲、乙两种水稻秧苗是否出苗整齐，每种秧苗各取 10 株并量出每株长度（单位：cm）如下表所示：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	12	13	14	15	10	16	15	11	13	11
乙	11	17	16	14	13	19	6	8	10	16

通过计算方差，评价哪个品种出苗更整齐.

B 组

6. 甲、乙两门炮在相同条件下向同一目标各发射 50 发炮弹，炮弹落点的分布情况如下表所示：

落点与目标的距离(m)	40	30	20	10	5	0
甲炮发射炮弹数	0	1	3	2	5	39
乙炮发射炮弹数	1	0	1	1	6	41

分别计算两门炮所发射的炮弹的落点与目标的距离的平均数与方差，并对两门炮的准确性作出评价.

7. 某商场去年的月销售额(单位：万元）如下表所示：

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售额	402	492	495	409	460	420	428	466	465	428	436	455

试通过计算方差，比较上半年(1—6 月)和下半年(7—12 月)这两个时段中，哪个时段的销售额比较稳定.

8. 已知 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5的平均数是 $\bar{x}$，方差是 s^2，a 是任一常数.

（1）求 x_1+a，x_2+a，x_3+a，x_4+a，x_5+a 的平均数与方差；

（2）求 ax_1，ax_2，ax_3，ax_4，ax_5的平均数与方差.

C 组

9. 下表是甲、乙两市全年降水情况(单位：mm)的统计：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
甲市	7	15	20	20	60	140	185	200	60	35	15	11
乙市	23	40	55	140	300	430	310	410	320	120	35	25

请用统计学的方法对这两个城市降水的情况进行分析和比较.

10. 李明、张华、刘明艳、赵倩、朱亮 5 位同学组成一个学习小组，星期天集中到其中一位同学家里一起学习，他们各家之间的距离 (单位：m)如下表所示：

	李	张	刘	赵	朱
李	0				
张	620	0			
刘	780	580	0		
赵	450	480	840	0	
朱	810	680	500	750	0

请帮他们想一想：在哪位同学家里集中学习比较合适？

提示：可以从以下方面来考虑：

(1) 使其余 4 位同学到这位同学家中的距离的总和最小，这样从总体上看走的路最少；

(2) 使其余 4 位同学到这位同学家中的距离的平均数最小，这种考虑的想法与(1)相同；

(3) 使其余 4 位同学到这位同学家中的距离的最大值(即最远的距离)最小，这样，4 位同学走的路程都较少；

(4) 使其余 4 位同学到这位同学家中的最远的距离与最近的距离之差最小， 这样，4 位同学走的路程相差不多，比较“公平”.

还可以有其他的方法，但每种方法考虑的角度可能不一样，各有其特点.

数学词汇汉英对照表

（按词汇所在页码出现的先后排序）

二元一次方程	linear equation with two unknowns	3
二元一次方程组	system of linear equations with two unknowns	3
解方程组	solving a system of equations	3
代入消元法	elimination by substitution	7
加减消元法	elimination by addition and subtraction	10
平方差公式	difference of square formula	42
完全平方公式	complete square formula	45
因　式	factor	55
因式分解	factorization，factoring	55
公因式	common factor	59
平行线	parallel lines	73
对顶角	opposite angles	75
同位角	corresponding angles	76
内错角	alternate interior angles	76
同旁内角	interior angles on the same side	76
平　移	translation	80
原　像	inverse image	80
像	image	80
垂　直	perpendicular	96
垂　线	perpendicular line	96
垂　足	foot of a perpendicular	96
垂线段	perpendicular segment	99
平行线间的距离	distance between parallel lines	104
轴对称图形	symmetric figure with axis	113
对称轴	axis of symmetry	113
轴对称变换	reflection with axis	115
旋　转	rotation	119
旋转中心	center of rotation	119
旋转角	angle of rotation	119
平均数	mean	137
权　数	weight	140
加权平均数	weighted mean	140
中位数	median	143
众　数	mode	144
方　差	variance	150

后　记

本册教科书是依据教育部颁布的《义务教育数学课程标准》（2011年版），在原实验教科书的基础上修订而成的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2012年审查通过.

本书在修订过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧．一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见．在此，对所有为本次修订提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持．对此，我们表示诚挚的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期的任务，我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们．让我们携起手来，共同完成义务教育教科书建设这一光荣的使命！

湖南教育出版社

2012年5月

图书在版编目(CIP)数据

义务教育教科书. 数学. 七年级. 下册 / 严士健，黄楚芳主编.
—2 版. —长沙：湖南教育出版社，2012. 11（2019. 10 重印）
ISBN 978－7－5355－4044－7

Ⅰ. ①义… Ⅱ. ①严… ②黄… Ⅲ. ①中学数学课—初中
—教材 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 254567 号

义务教育教科书
数 学
七年级 下册
责任编辑：甘 哲 胡 旺
美术编辑：熊玉心
湖南教育出版社出版
电子邮箱：hnjycbs@sina.com
客服电话：0731－85486979
湖南出版中心重印
湖南省新华书店发行
湖南天闻新华印务有限公司印装
787×1092 16 开 印张：10.5 字数：185 000
2003 年 11 月第 1 版 2019 年 10 月第 2 版第 8 次印刷
印数：1—580 000 册
ISBN 978－7－5355－4044－7
定价：10.08 元(2020 春)