义务教育教科书

数学

教师教学用书

八年级下册

湖南教育出版社

总　体　说　明

湘教版《义务教育教科书·数学》（七~九年级）是依据教育部制订的《义务教育数学课程标准(2011 年版)》(以下简称《课标》)，在原实验教科书的基础上修订而成的，全套书分为 6 册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，知识体系中的重要概念和数学思想按照学生的认知规律螺旋式上升，重视知识之间的联系与综合，体现“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”以及“综合与实践”之间的实质性关联，形成一个有机的整体.

一、教材的主要特点

1. 重视培养学生科学理性的思维方式.

本教材按照“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的数学思维方式编写，通过设立“观察”“探究”“动脑筋”“做一做”“议一议”等栏目，加强抽象、分析的环节，同时辅以设问的方式，让学生在“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的活动过程中生动活泼地学习数学，受到数学思维方式全过程的熏陶.

2. “数与代数”部分强调建立数学模型和渗透算法，并且把握数学的实质，准确阐述初中数学的基本概念.

教材高度重视建立数学模型并渗透算法，采取螺旋上升的方式将模型思想贯穿于整个初中代数部分，同时，为了浅显易懂地渗透算法，我们常采用形象、生动的卡通流程图给出一般的解法步骤.

3. “图形与几何”部分用变换的观点来研究图形的性质.

考虑到初中阶段是学生处在形象思维逐步向抽象思维转变的过渡阶段，一开始学生很难接受严格的演绎证明，而通过图形变换来研究图形的性质，在此基础上再进一步证明这些性质，这对学生来讲直观、形象，又易于理解和接受. 教材尝试将几何的直观性和思维的严谨性有机地结合起来，用变换的观点来研究图形的位置关系和度量关系.

4. “统计与概率”部分强调数据分析观念的培养和“随机性”的渗透.

教材通过设计有效的统计活动，使学生经历完整的统计过程，包括收集数据、整理数据、描述数据、分析数据，同时注重在数据分析的过程中渗透随机思想，使学生在这样的统计过程中，不断积累统计活动经验，发展数据分析观念并加深对统计思想与方法的理解.

5. “综合与实践”更具可操作性，“数学与文化”力求通俗易懂.

“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动. 教材每册设置 1 个“综合与实践”，强调问题情境与学生所学的知识以及生活经验相结合，鼓励学生独立思考、合作交流，自主设计解决问题的方案和步骤，经历发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的全过程，感悟数学与生活实际、数学与其他学科、数学各部分内容之间的联系，加深对所学数学内容的理解. 同时，通过该活动，帮助学生积累数学活动经验，培养学生应用意识和创新意识.

“数学与文化”栏目中的内容主要是介绍数学学科知识背景、数学在自然与社会中的应用、数学发展史的有关材料等，目的是帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，激发学生学习数学的兴趣，感受数学家治学的严谨性，欣赏数学的美.

二、使用说明

关于本套教材栏目设置的说明：

1. 正文设置“观察”“探究”“动脑筋”“做一做”“议一议”等栏目，加强抽象、分析的环节，同时辅以设问的方式，让学生在“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的活动过程中生动活泼地学习数学，受到数学思维方式全过程的熏陶.

2. 正文针对易错点、归纳的结论或启发学生思考的问题，增设小贴士.

3. 每章安排“小结与复习”栏目，包括“回顾”“本章知识结构”“注意”三个环节. 其中“回顾”环节以提问的方式引导学生全面回顾、梳理本章所学知识；“本章知识结构”以结构图的形式，呈现本章知识间的内在联系，从整体上把握全章知识全貌；“注意”环节突出本章容易忽视的关键点，同时提示本章隐含出现的一些重要的数学思想和方法.

4. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类，每一课时安排一个“练习”，供课内使用；每一大节安排一个“习题”，习题分 A、B 组，与课时对应，便于学生课外巩固提高；每一章安排一个“复习题”，供复习全章时使用，并按 A、B、C 组分类，其中 C 组不做要求，供学有余力的学生选择完成.

5. 每册教材安排一个“综合与实践”，视本册内容灵活安排在最恰当的知识点之后.

6. 每册分别安排两个“数学与文化”和“IT 教室”栏目，供学有余力或有兴趣的学生自行阅读或操作.

关于教师教学用书栏目的说明：

本套教师教学用书与《义务教育教科书·数学》（七~九年级）相对应，供教师教学参考使用. 全套书分为 6 册，每册书按章编排，具体栏目设置如下：

（一）概述

1. “课程内容”将《课标》关于本章内容的要求进行罗列，便于教师掌握本章的基本要求.

2. “课时建议”分别列出本章各节内容教学所需的课时数.

3. “教材说明”介绍本章的线索和设计思路，本章各小节之间的内在逻辑性和关联.

4. “评价建议”结合本章内容，提出了在本章学习中评价学生发展的建议.

（二）教学建议

1. 按节描述本节知识在“知识技能”“数学思考”“问题解决”“情感态度”等方面的目标.

2. 按节描述本节的教学重点和难点.

3. 按节阐述教材编写意图与教学参考建议，便于教师更好地理解、使用教材.

4. “补充例题”为教师在上课时补充课内例题的需要.

5. “资源拓展”提供与本节内容相关的学科背景介绍、数学史料等.

6. 按节提供教材练习、习题、复习题的参考答案.

（三）本章相关链接

提供本章相应的拓展资料，供教师教学时参考.

在本书的最后附有与本册教材配套的教学资源光盘，光盘内容包括两部分，第一部分是主编对本册教材特点的解读，第二部分是教学课件示例，供教师设计课件时参考.

目　录

目　录

第 1 章　直角三角形

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 了解直角三角形的概念，探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形的两个锐角互余，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 掌握有两个角互余的三角形是直角三角形.

2. 探索勾股定理及其逆定理，并能运用它们解决一些简单的实际问题.

3. 探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理.

4. 探索并证明角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等；反之，角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

二、课时建议

1.1　直角三角形的性质和判定（Ⅰ）	2 课时
1.2　直角三角形的性质和判定（Ⅱ）	3 课时
1.3　直角三角形全等的判定	1 课时
1.4　角平分线的性质	2 课时
小结与复习	2 课时

三、教材说明

直角三角形是一类特殊的三角形，它除了具有一般三角形的性质外，还具有许多重要的性质. 本章将对直角三角形展开专题式研究，系统学习直角三角形的性质和判定.

本章学习的重点是：直角三角形的性质和判定、直角三角形全等的判定、角平分线的性质，本章的难点是勾股定理及其逆定理.

根据知识间内在的逻辑性，本章的教学内容分为 4 节，顺序安排如下：

直角三角形的性质和判定（Ⅰ）—直角三角形的性质和判定（Ⅱ）—直角三角形全等的判定—角平分线的性质

在教学本章的过程中，需注意以下几点：

1. 紧密联系所学知识，清晰地展现本章的逻辑主线

本章学习的主线即直角三角形的性质、判定以及应用，而所有这些知识的阐述均建立在八上“三角形”所介绍的三角形的性质、命题与证明、三角形全等的判定等知识的基础之上. 教材编写时充分体现新、旧知识之间的紧密联系，以简单说理的形式通过多种栏目的呈现，简单清晰地展现本章新知识与前面所学内容的联系，使学生的学习形成正迁移，同时进一步丰富对三角形的认识.

2. 许多重要性质的编排按照数学思维方式来编写

本章涉及的性质（含判定）多，对于一些重要结论，教材均按照“观察抽象—归纳猜想—演绎推理—得到法则”这一数学思维方式来展现. 例如第 1 节探索“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这一性质，第 2 节探索勾股定理，第 4 节探索角平分线的性质均体现了这一思路.

数学的思维方式是一种科学的思维方式，它让人们观察客观现象，从中抓住主要特征，抽象出概念或者建立模型，运用直觉判断或归纳、类比、联想、推理等进行探索，猜测可能有的规律. 然后进行深入分析、逻辑推理和计算，揭示事物的内在规律，从而把纷繁复杂的客观现象整理得井然有序.在义务教育阶段，我们在教材中不断渗透这种科学严谨的数学思维方式，不是要学生去发现一些重大定理而取得数学上的突破，更在于使学生从中受到数学思维方式的熏陶，领会数学的思维方式和蕴含在其中的数学思想和方法，这将使其终身受益.

3. 把握好“命题与证明”的教学要求，突出重点

正如八上的教师教学用书在“三角形”一章已阐述：“命题与证明”所涉及的概念多，教材编写者充分考虑到学生对于概念的认知是一个长期的过程，对于一些重要的术语及话语体系（如互逆命题、互逆定理等）还将在后续各册反复呈现、渗透、强调，其目的就是要结合实例来帮助学生逐步加深对演绎推理这套话语体系的理解，帮助学生不断积累经验. 本着这一原则，本章在正文的呈现上仍保持这一风格. 建议教师在教学中注意不断渗透、提示一些术语，以加深学生对几何话语体系的理解和掌握.

4. 注重数学文化以及应用意识的培养和渗透

本章蕴含着丰富的数学史背景材料，如章前图（北京世界数学家大会会徽）、勾股定理的介绍等，教师要充分利用这一难得的载体鼓励学生自行阅读及交流，让学生感受勾股定理的丰富文化内涵，激发学生的学习兴趣. 特别应通过向学生介绍我国古代在勾股定理研究方面的成就，激发学生热爱祖国，热爱祖国悠久的文化，培养其民族自豪感. 同时，教材在例习题的设置上也注意渗透现实生活中大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题. 在教学中，应当注重引导学生经历“从生活到数学”的建模过程，运用数学的知识、方法、思想去分析和解决实际问题，发展学生的应用意识.

四、评价建议

1. 恰当评价学生的基础知识和基本技能

本章内容基本属于“双基”范畴，因此除了传统纸笔测验考核学生是否对重要的性质和判定定理理解和灵活运用外，还要采取多样的考核形式，如创造对话、交流、讨论的机会，考察学生对知识的掌握程度，对算理的理解，对所学知识的归纳概括能力，以形成系统的知识体系等. 同时，在实施笔试测验时，要认真落实课程标准提出的要求，超出范围的关于直角三角形的性质和判定可做了解，但不纳入考核范围.

2.关注对学生学习过程的评价

（1）在教学中，应重点关注学生经历数学知识的形成过程，例如勾股定理及其逆定理的探索和运用，角平分线的性质定理及其逆定理的探索等. 要关注学生参与学习活动的程度、数学思考的发展水平，鼓励学生联系已学的知识作出思考判断，对于学生从不同角度来思考问题，应给予充分重视和鼓励.

（2）本章的定理多，教师在引导学生探索并理解数学本质的同时，要关注学生思维能力的提升，可以要求学生自我设计“学习小结”，用合适的形式归纳学到的知识和方法，学习中的收获、遇到的问题等等，教师可通过学习小结对学生的学习情况进行评价，也可以组织学生将自己的小结在班级展示交流，通过这种形式总结自己的进步，反思自己的不足以及需要改进的地方，汲取他人值得借鉴的经验.

第1章

直角三角形

直角三角形是一类特殊的三角形，它有一些特殊的性质. 例如：直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2+b^2=c^2$，这就是著名的勾股定理. 远早于古希腊数学家，中国古代数学家就已得到“勾三股四弦五”的结论，我国魏晋时期的数学家赵爽还用上图中的“弦图”，进一步阐释了《周髀算经》中对勾股定理的证明.

直角三角形还有哪些特殊的性质呢？怎样判定一个三角形是直角三角形呢？勾股定理在实际生活中有哪些应用呢？本章将学习这些新知识.

1

Ⅱ. 教学建议

章前图从2002年在北京召开的世界数学家大会的宣传画来引入本章主要内容.

章前引文介绍了勾股定理，它是用代数式的形式来刻画直角三角形的特征，形式简练而意义深远，被誉为对人类发展起重大影响的十个公式之一. 而中国古代的数学家在这一研究领域成果丰富，世界数学家大会的会徽就反映了这一点. 在教学中可引导学生观察章前图，并阅读章前语，使学生获得有关直角三角形的感性认识，这对于增强学生的民族自豪感，激发其学习兴趣是有积极意义的.

教学目标

1. 了解直角三角形的概念，探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形的两个锐角互余；直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

2. 掌握有两个角互余的三角形是直角三角形.

教学重点、难点

教学重点：直角三角形的性质定理（直角三角形的两个锐角互余，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

会判定一个三角形是直角三角形.

教学难点：性质定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的探索推导过程.

本章 1.1 节与 1.2 节均介绍直角三角形的性质和判定. 其中 1.1 节介绍了《课标》要求的几条性质定理和判定定理，而 1.2 节重点阐述勾股定理及其逆定理.

“说一说”和“议一议”栏目，内容简单，推理步骤少，可让学生自行探究. 可以考虑让学生自己写出已知、求证，并加以证明，进一步巩固“命题与证明”所涉及的综合法证明格式. 这两个栏目中的命题实际上是互逆命题，也可在此基础上点破这一点，以加深学生对几何话语体系的理解和掌握.

1.1 直角三角形的性质和判定（Ⅰ）

在前面，我们已经学习了三角形边与边，边与角，角与角之间的一些性质，直角三角形作为一种特殊的三角形，除了具有一般三角形的性质外，它还具有哪些特殊性质呢?

说一说

如图 1–1，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，两锐角的和等于多少呢?

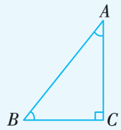


图 1–1

在 Rt△ABC 中，因为∠C=90°，由三角形内角和定理，可得：∠A+∠B=90°.

由此得到：

直角三角形的两个锐角互余.

议一议

有两个锐角互余的三角形是直角三角形吗?

如图 1–2，在△ABC 中，∠A+∠B=90°，那么△ABC 是直角三角形吗?

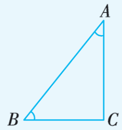


图 1–2

在△ABC 中，因为∠A+∠B+∠C=180°，又∠A+∠B=90°，所以∠C=90°. 于是△ABC 是直角三角形.

2 数学 八年级下册

由此得到：

有两个角互余的三角形是直角三角形.

探究

如图 1–3，画一个 Rt$\triangle ABC$，并作出斜边 AB 上的中线 CD，比较线段 CD 与线段 AB 之间的数量关系，你能得出什么结论？

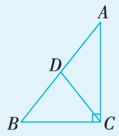


图 1–3

线段 CD 比线段 AB 短.

我测量后发现 $CD=\frac{1}{2}AB$.

是否对于任意一个 Rt$\triangle ABC$，都有 $CD=\frac{1}{2}AB$ 成立呢？

如图 1–4，过点 D 作 $DE\perp AC$，交 AC 于点 E；作 $DF\perp BC$，交 BC 于点 F.

$\because\ \angle ACB=\angle AED=\angle DFB=90°$，

$\therefore\ DE/\!/BC$，$DF/\!/AC$.

$\therefore\ \angle A=\angle FDB$，$\angle ADE=\angle B$.

又 D 为 AB 的中点，即 $AD=DB$，

$\therefore\ \triangle AED\cong\triangle DFB$（ASA）.

$\therefore\ AE=DF$，$DE=BF$.

还可证 $\triangle CDE\cong\triangle DCF$，从而 $DE=CF$，$CE=DF$.

$\therefore\ AE=CE$，$BF=CF$.

故 DE，DF 分别垂直平分边 AC，BC.

$\therefore\ AD=CD=BD$（为什么？）.

$\therefore\ CD=\frac{1}{2}AB$.

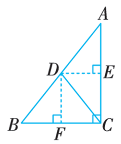


图 1–4

由此得到：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

“探究”栏目探索一条非常重要的结论，其探索过程有两点要注意：

一是在课文的呈现方式上突出直观操作（合情推理）和证明（演绎推理）相结合. 这一做法既是一种科学的数学思维方式的培养，同时还有利于实现增强学生发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力的课标要求. 按照这一培养思路，教师应让学生自主画直角三角形、斜边的中线，并测量比较两条线段的长度，获得猜想，这是科学探究非常重要的一步.

二是在证明方式上运用了两次全等证明. 限于学生目前已掌握的知识，此处用全等证明是一条较适宜的思路，另一种间接证明法——“同一法”，由于以往很少接触，对学生来说有一定难度，教师可以展示证明过程，让学生体会证明的方法，但不要求学生掌握.

资源拓展

“同一法”属于间接证明法的一种. 用“同一法”证明的一般步骤是：（1）不从已知条件入手，先作出一个符合结论特征的图形；（2）证明所作的图形符合已知条件；（3）根据唯一性原则，推证出所作图形与已知图形为同一图形. 教材“探究”栏目用“同一法”证明过程如下：

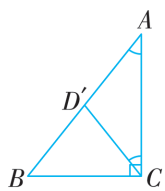
如图 1–3，如果中线 $CD=\frac{1}{2}AB$，则有 $\angle DCA=\angle A$. 由此受到启发，在下图的 Rt$\triangle ABC$ 中，过直角顶点 C 作射线 CD' 交 AB 于 D'，使 $\angle D'CA=\angle A$，则 $CD'=AD'$.

又 $\because\ \angle A+\angle B=90°$，$\angle D'CA+\angle D'CB=90°$，

$\therefore\ \angle B=\angle D'CB$. $\therefore\ CD'=BD'$. 故得 $CD'=AD'=BD'=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore$ 点 D' 是斜边 AB 上的中点，即 CD' 是斜边 AB 的中线.

从而 CD 与 CD' 重合，且 $CD=\frac{1}{2}AB$.



例 1 如图 1–5，已知 CD 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中线，且 $CD=\frac{1}{2}AB$.

求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

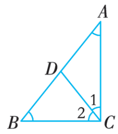


图 1–5

证明 $\because\ CD=\frac{1}{2}AB=AD=BD$,

$\therefore\ \angle 1=\angle A,\ \angle 2=\angle B.$

$\because\ \angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ,\ \angle ACB=\angle 1+\angle 2,$

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle 1+\angle 2=180^\circ.$

$\therefore\ 2(\angle A+\angle B)=180^\circ.$

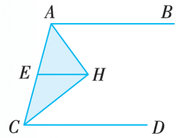
$\therefore\ \angle A+\angle B=90^\circ.$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

练习

1. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，斜边上的中线 $CD=2.5$ cm，则斜边 AB 的长是多少？

2. 如图，$AB/\!/CD$，$\angle CAB$ 和 $\angle ACD$ 的平分线相交于 H 点，E 为 AC 的中点，$EH=2$. 那么 $\triangle AHC$ 是直角三角形吗？为什么？若是，求出 AC 的长.



（第 2 题图）

动脑筋

如图 1–6，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，如果 $\angle A=30^\circ$，那么直角边 BC 与斜边 AB 有什么关系呢？

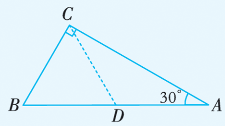


图 1–6

如图 1–6，取线段 AB 的中点 D，连接 CD.

$\because$ CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore\ CD=\frac{1}{2}AB=BD.$

$\because\ \angle BCA=90^\circ$，且 $\angle A=30^\circ$，

4 数学 八年级下册

例 1 所呈现的命题实质上是“探究”栏目性质定理的逆命题，这一点不必向学生提及（《课标》不作为判定定理），但学生通过例 1，将进一步熟悉和掌握证明的格式和方法，做到言必有据.

练习

1. $AB=5$ cm.

2. $\because AB/\!/CD$,

$\therefore \angle CAB+\angle ACD=180^\circ.$

又 $\angle CAH=\frac{1}{2}\angle CAB$,

$\angle ACH=\frac{1}{2}\angle ACD$,

$\therefore \angle CAH+\angle ACH=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle ACD)=90^\circ.$

$\therefore \triangle AHC$ 是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHC$ 中，EH 为斜边 AC 上的中线，

$\therefore EH=\frac{1}{2}AC$,

又 $EH=2$,

$\therefore AC=2EH=4.$

第 2 课时重点介绍两个互逆命题. 对于这两个命题的设置，既是考虑到与直角三角形有密切的联系，而且结论有一定的代表性（尽管《课标》对结论不作要求，不要求作为证明的依据）.

“动脑筋”栏目讨论在直角三角形中，一个 30°角所对的直角边与斜边的关系. 教师可适当引导证明思路，如添加辅助线等，证明过程由学生自己完成，教师再总结结论.

∴ $\angle B=60°$.

∴ $\triangle CBD$ 为等边三角形，

∴ $BC=BD=\frac{1}{2}AB$.

于是，我们得到：**在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.**

例 2 如图 1-7，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90°$，若 $BC=\frac{1}{2}AB$，那么 $\angle A=30°$吗？

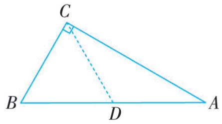


图 1-7

解 如图 1-7，取线段 AB 的中点 D，连接 CD.

∵ CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB=BD$.

∵ $BC=\frac{1}{2}AB$，

∴ $BC=BD=CD$，即 $\triangle BDC$ 为等边三角形.

∴ $\angle B=60°$.

∵ $\angle A+\angle B=90°$，

∴ $\angle A=30°$.

由例 2，你能得出什么结论？

例 3 如图 1-8，在 A 岛周围 20 海里[①]水域内有暗礁，一轮船由西向东航行到 O 处时，测得 A 岛在北偏东 60°的方向，且与轮船相距 $30\sqrt{3}$ 海里. 若该船继续保持由西向东的航向，那么有触礁的危险吗？

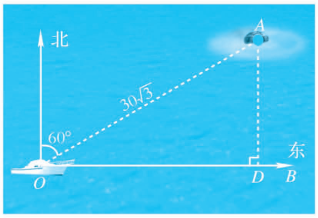


图 1-8

① 1 海里 = 1 852 m.

例 2 可延续上一个“动脑筋”栏目的思路，由教师引导学生自己完成解答过程，最后总结得出结论：在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°.

例 3 是一个有实际背景的航行问题，而要解决这一问题，首先应引导学生建立几何模型，画出几何图形，从而用数学方法解决实际问题.

教师可以提示学生用其他方法来比较“$\frac{1}{2}\times30\sqrt{3}=15\sqrt{3}$”与“20”的大小关系.

分析 取轮船航向所在的直线为 OB. 过点 A 作 $AD \perp OB$，垂足为 D. AD 长为 A 岛到轮船航道的最短距离，若 AD 大于 20 海里，则轮船由西向东航行就不会有触礁的危险.

解 在图 1-8 中，过点 A 作 $AD \perp OB$，垂足为 D，连接 AO.

在 Rt$\triangle AOD$ 中，$AO=30\sqrt{3}$ 海里，$\angle AOD=30°$，

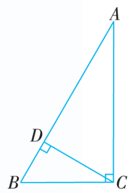
于是
$$\begin{aligned} AD &= \frac{1}{2}AO \\ &= \frac{1}{2}\times 30\sqrt{3} \\ &\approx 25.98(\text{海里}). \end{aligned}$$

由于 AD 长大于 20 海里，所以轮船由西向东航行不会触礁.

练习

1. 如图是某商店营业大厅电梯示意图. 电梯 AB 的倾斜角为 30°，大厅两层之间的高度 BC 为 6 m. 你能算出电梯 AB 的长度吗？

(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ACB=90°$，CD 垂直于 AB，垂足为点 D，$\angle A=30°$. 求证：$AB=4BD$.

练习

1. $AB=12$ m.

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because \angle A=30°$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB$.

又 $\angle A+\angle B=90°$，

$\therefore \angle B=60°$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，

$\because \angle B+\angle BCD=90°$，

$\therefore \angle BCD=90°-\angle B=30°$.

故 $BD=\frac{1}{2}BC$.

又 $BC=\frac{1}{2}AB$，

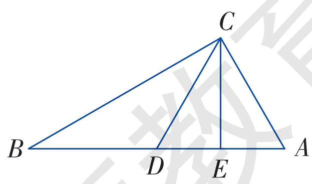
则 $BD=\frac{1}{4}AB$，

即 $AB=4BD$.

补充例题

如图，在$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=2AC$，CD，CE分别是其中线和高.

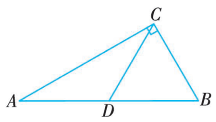
求证：$\angle ACE=\angle ECD=\angle DCB$.



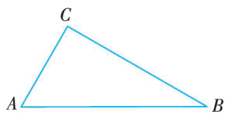
习题 1.1

A 组

1. 如图，CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的中线，$\angle ACB=90°$，$\angle CDA=120°$，求 $\angle B$ 的度数.



（第 1 题图）



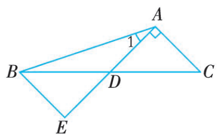
（第 2 题图）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{3}\angle C$，$AB=8$ cm.

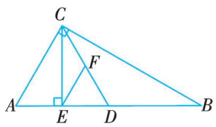
(1) 求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形；

(2) 求 AB 边上的中线长.

3. 如图，线段 AE 与 BC 相交于点 D，$BD=CD$，$AD=ED$，$CA\perp AE$，$\angle 1=30°$，且 $AB=3$ cm. 那么线段 BE 多长呢？



（第 3 题图）



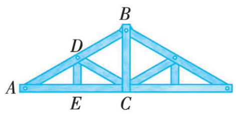
（第 4 题图）

4. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，$AB=2$，CD 是斜边上的中线，CE 是高，F 是 CD 的中点.

(1) 求 CD 的长；

(2) 证明：$\triangle EDF$ 为等边三角形.

5. 如图是某建筑物的屋顶架，其中 $AB=8$ m，D 是 AB 的中点，BC，DE 都垂直于 AC. 如果 $\angle ABC=60°$，那么 BC，DE，CD 各是多少米？



（第 5 题图）

习题1.1

A组

1. $\because$ CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=AD.$

$\because \angle CDA=120°$，

$\therefore \angle A=\angle ACD=30°.$

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B=90°$，

$\therefore \angle B=60°.$

2. (1) $\because \angle B=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{3}\angle C$，

$\therefore \angle A=2\angle B$，$\angle C=3\angle B.$

$\because \angle A+\angle B+\angle C=2\angle B+\angle B+3\angle B=6\angle B=180°$，

$\therefore \angle B=30°$，$\angle A=60°$，$\angle C=90°.$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

(2) AB 边上的中线长为 4 cm.

3. $\because AD=ED$，

$\angle ADC=\angle EDB$，

$CD=BD$，

$\therefore \triangle CAD\cong\triangle BED$（SAS）.

$\therefore \angle BED=\angle CAD=90°.$

在 Rt$\triangle AEB$ 中，$\angle 1=30°$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$ cm.

4. (1) $CD=1.$

(2) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because CD=\frac{1}{2}AB=AD$，$\angle A=60°$，

$\therefore \triangle ACD$ 为等边三角形.

$\therefore \angle FDE=60°.$

在 Rt$\triangle CED$ 中，

$\because EF=\frac{1}{2}CD=DF$，

$\therefore \triangle EDF$ 为等边三角形.

5. $BC=4$ m，

$DE=2$ m，

$CD=4$ m.

B组

6. ∵ $\angle A+\angle ABC=90°$,

∴ $\angle 1=\frac{1}{3}\angle ABC$,

∴ $\angle A+3\angle 1=90°$.

∵ ED是线段AB的垂直平分线,

∴ $EA=EB$,

∴ $\angle A=\angle ABE=2\angle 1$.

∴ $2\angle 1+3\angle 1=5\angle 1=90°$.

∴ $\angle 1=18°$,

$\angle A=2\angle 1=36°$.

7. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,

∵ $\angle B=30°$,

∴ $AC=\frac{1}{2}AB=7$ cm.

∵ $CB \parallel ED$,

∴ $\angle CFA=45°$.

∴ $\triangle ACF$ 为等腰直角三角形.

∴ 阴影部分$\triangle ACF$ 的面积为

$S=\frac{1}{2}AC\cdot CF=\frac{1}{2}\times 7\times 7=24.5(\text{cm}^2)$.

8. 如下图, 在$\triangle ABD$ 中,

∵ $\angle ADC=\angle B+\angle BAD$,

∴ $\angle BAD=15°$.

∴ $\angle BAD=\angle B$,

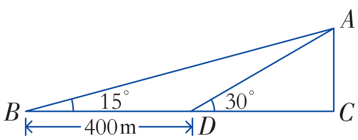
$AD=BD=400$ m.

在 Rt$\triangle ADC$ 中,

∵ $\angle ADC=30°$,

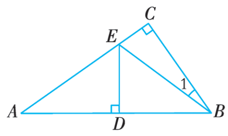
∴ $AC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 400=200$ (m).

故电视塔塔尖离地面的高度为 200+1.6=201.6 (m).

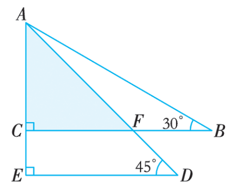


B 组

6. 如图, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, ED 是线段 AB 的垂直平分线, 已知 $\angle 1=\frac{1}{3}\angle ABC$, 求$\angle A$ 的度数.



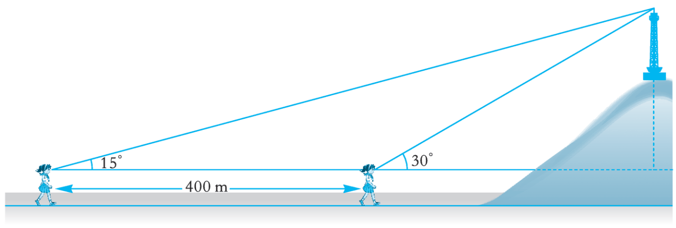
(第 6 题图)



(第 7 题图)

7. 将一副三角尺如图所示叠放在一起, 若 $AB=14$ cm, 求阴影部分$\triangle ACF$ 的面积.

8. 如图, 小芳在山下发现正前方山上有个电视塔, 测得塔尖的仰角[①]为15°. 小芳朝正前方笔直行走 400 m, 此时测得塔尖的仰角为 30°. 若小芳的眼睛离地面 1.6 m, 你能算出这个电视塔塔尖离地面的高度吗?



(第 8 题图)

① 在视线与水平线所成的角中, 视线在水平线上方的角叫作仰角.

8 数学 八年级下册

1.2 直角三角形的性质和判定（Ⅱ）

做一做

如图 1–9，在方格纸上（设小方格边长为单位 1）画一个顶点都在格点上的直角三角形，使其两直角边分别为 3，4，量出这个直角三角形斜边的长度.

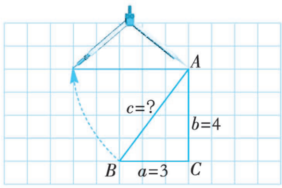


图 1–9

我量得 c 为 5.

议一议

在方格纸上，以图 1–9 中的 Rt△ABC 的三边为边长分别向外作正方形，得到三个大小不同的正方形，如图 1–10，那么这三个正方形的面积 S_1，S_2，S_3 之间有什么关系呢？

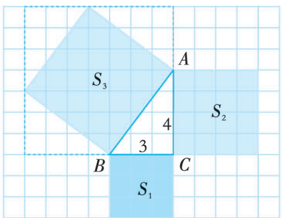


图 1–10

由图 1–10 可知，$S_1=3^2$，$S_2=4^2$，为了求 S_3，我可以先算出红色区域内大正方形的面积，再减去 4 个小三角形的面积，得 $S_3=5^2$.

$\because\ 3^2+4^2=5^2$，

$\therefore\ S_1+S_2=S_3$.

在图 1–10 中，$S_1+S_2=S_3$，即 $BC^2+AC^2=AB^2$，那么是否对所有的直角三角形，都有两直角边的平方和等于斜边的平方呢？

教学目标

1. 探索勾股定理及其逆定理.

2. 能用勾股定理的逆定理判定一个三角形为直角三角形.

3. 能运用勾股定理及其逆定理解决一些简单的实际问题.

教学重点、难点

教学重点：勾股定理及其逆定理.

教学难点：勾股定理的探索与推理论证.

本节首先让学生探索发现直角三角形三边之间的关系：两直角边的平方和等于斜边的平方. 然后证明上述关系成立，最后让学生运用勾股定理解决问题.

让学生直接发现直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方，有一定的难度. 因此，教材设置“做一做”栏目，让学生在方格纸上作一个直角边分别为 3，4 的直角三角形，然后测量其斜边长. 接着，以Rt△ABC的三条边分别向外作正方形，让学生发现以直角三角形两直角边为边长的正方形的面积和与以斜边为边长的正方形的面积之间的关系. 最后总结：上述关系对于特例是成立的，是否对所有的直角三角形均成立呢？由上述思路可以看出，教材采取从特殊到一般的思路来展开研究.

有了前两个栏目的铺垫，“探究”栏目展开对一般形式勾股定理的证明.

证明勾股定理的方法很多，这里用面积法进行证明. 教师可借助课件将图形剪拼的过程进行展示，给学生一个初步的印象. 在此基础上，教材证明了拼接而成的图形是正方形. 最后用图形面积来进行推理，得到结论.

教材证明过程不要求学生掌握，重在通过探索过程（包括证明环节），使学生知道勾股定理的成立.

探究

如图 1-11，任作一个 Rt$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，那么 $a^2+b^2=c^2$ 是否成立呢?

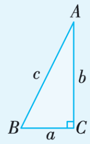


图 1-11

我们来进行研究.

步骤 1　先剪出 4 个如图 1-11 所示的直角三角形，由于每个直角三角形的两直角边长为 a，b（其中 $b>a$），于是它们全等（SAS），从而它们的斜边长相等. 设斜边长为 c.

图 1-12

步骤 2　再剪出 1 个边长为 c 的正方形，如图 1-12 所示.

步骤 3　把步骤 1 和步骤 2 中剪出来的图形拼成如图 1-13 的图形.

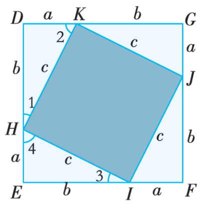


图 1-13

由于 $\triangle DHK \cong \triangle EIH$，

$\therefore$　$\angle 2=\angle 4$.

又 $\because$　$\angle 1+\angle 2=90°$，

$\therefore$　$\angle 1+\angle 4=90°$.

又 $\angle KHI=90°$，

$\therefore$　$\angle 1+\angle KHI+\angle 4=180°$，即 D，H，E 在一条直线上.

同理 E，I，F 在一条直线上；F，J，G 在一条直线上；G，K，D 在一条直线上.

因此拼成的图形是正方形 $DEFG$，它的边长为 $(a+b)$，它的面积为 $(a+b)^2$.

又正方形 $DEFG$ 的面积为 $c^2+4\cdot\dfrac{1}{2}ab$，

$\therefore$　$(a+b)^2=c^2+4\cdot\dfrac{1}{2}ab$.

即　$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$，

$\therefore$　$a^2+b^2=c^2$.

10　数学　八年级下册

资源拓展

勾股定理的证明

本教材对勾股定理的证明方法起源于毕达哥拉斯，这里还介绍两种证明法：

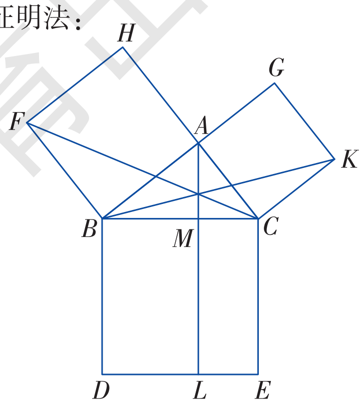
欧几里得《原本》证明.

如右图所示，分别以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AB，AC 及斜边 BC 向外作正方形 $ABFH$，$AGKC$ 和 $BCED$，连结 FC，BK，作 $AL\perp DE$.

欧几里得通过 $\triangle BCF$ 及 $\triangle BCK$ 为媒介，证明了正方形 $ABFH$ 与矩形 $BDLM$，正方形 $ACKG$ 与矩形 $MLEC$ 面积相等，于是推得

$$AB^2+AC^2=BC^2.$$

由于欧几里得这个证明方法的闻名使他所用的图形也非常著名，因为它的外形看起来很像风车，所以人们常常称这个图形为“风车”图.



由此得到直角三角形的**性质定理**：

> 直角三角形两直角边 a，b 的平方和，等于斜边 c 的平方.
> $$a^2+b^2=c^2$$

其实我国早在三千多年前就已经知道直角三角形的上述性质，由于古人称直角三角形的直角边中较短的一边为勾，较长的一边为股，斜边为弦（如图 1-14），因此这一性质被称为**勾股定理**.

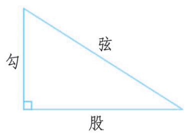


图 1-14

勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理. 建议本节课教学时，适当补充勾股定理的相关史实，激发学生对中华文化的热爱，对数学的热爱.

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系. 在直角三角形中，若已知直角三角形任意两条边长，我们可以根据勾股定理，求出第三边的长.

例 1 如图 1-15，在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC=13$ cm，$BC=10$ cm，$AD\perp BC$ 于点 D. 你能算出 BC 边上的高 AD 的长吗？

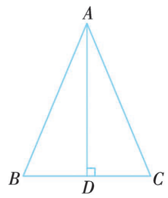


图 1-15

解 在△ABC 中，

∵ $AB=AC=13$，$BC=10$，$AD\perp BC$，

∴ $BD=\dfrac{1}{2}BC=5$.

在 Rt△ADB 中，

由勾股定理得，$AD^2+BD^2=AB^2$，

∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{18\times 8}=12$.

故 AD 的长为 12 cm.

例 1 是勾股定理的简单应用，教师可根据学情适当补充例题.

练习

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

(1) 已知 $a=25$，$b=15$，求 c；

(2) 已知 $a=5$，$c=9$，求 b；

(3) 已知 $b=5$，$c=15$，求 a.

练习

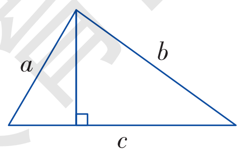
(1) $c=5\sqrt{34}$；

(2) $b=2\sqrt{14}$；

(3) $a=10\sqrt{2}$.

爱因斯坦对勾股定理的证明.

假设直角三角形三条边为 a，b，c，过直角顶点作斜边 c 的垂线段（如下图）.



假设原三角形面积为 E，根据相对论，有

$$E=mc^2.$$

同理，内部分割出来的两个小三角形的面积分别是

$$E(a)=ma^2,\ E(b)=mb^2.$$

因为内部两个小三角形拼成原三角形，所以

$$E=E(a)+E(b).$$

也就是

$$mc^2=ma^2+mb^2.$$

两边约掉 m，就得到了勾股定理

$$c^2=a^2+b^2.$$

爱因斯坦的这个证明发表以后，震惊了国际数学界，大家发现原来相对论有这么大的威力.

第 2 节课是勾股定理的应用. “动脑筋”栏目设计一个新颖的实际问题. 要解决这个问题，首先应引导学生建立几何模型，画出几何图形，从而把这个问题转化为数学问题，再运用所学的数学知识来解决问题. 在教学中，教师应该把教学的重点放在“建立数学模型，画出几何图形”上，只要模型建好了，问题就迎刃而解了.

关于几何问题的数学建模，教材还将反复渗透，教学中，教师应充分利用这些素材，引导学生经历“从生活到数学”的建模过程，运用数学的知识、方法、思想来分析和解决实际问题的应用过程，发展学生的应用意识.

例 2 是一道源自《九章算术》的经典问题，但和“动脑筋”栏目中的问题不同的地方是需利用列方程来求解. 这类问题的处理，一方面要建立几何模型，画出一个直角三角形，另一方面要恰当地设未知数，利用勾股定理列出方程，最终求解方程得到符合实际问题的解.

动脑筋

如图 1-16，电工师傅把 4 m 长的梯子 AC 靠在墙上，使梯脚 C 离墙脚 B 的距离为 1.5 m，准备在墙上安装电灯. 当他爬上梯子后，发现高度不够，于是将梯脚往墙脚移近 0.5 m，即移动到 C' 处. 那么，梯子顶端是否往上移动 0.5 m 呢?

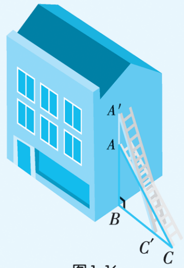


图 1-16

由图 1-16 抽象出示意图 1-17. 在 Rt△ABC 中，计算出 AB；再在 Rt△$A'BC'$ 中，计算出 $A'B$，则可得出梯子往上移动的距离为（$A'B-AB$）m.

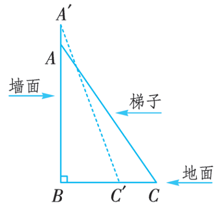


图 1-17

在 Rt△ABC 中，$AC=4$ m，$BC=1.5$ m，

由勾股定理得，$AB=\sqrt{4^2-1.5^2}$

$=\sqrt{13.75}\approx 3.71$（m）.

在 Rt△$A'BC'$ 中，$A'C'=4$ m，$BC'=1$ m，

故 $A'B=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}\approx 3.87$（m），

因此 $A'A=3.87-3.71=0.16$（m）.

即梯子顶端 A 点大约向上移动了 0.16 m，而不是向上移动 0.5 m.

例 2（“引葭赴岸”问题）“今有方池一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐. 问水深，葭长各几何?”①意思是：有一个边长为 10 尺的正方形池塘，一棵芦苇生长在池的中央，其出水部分为 1 尺. 如果将芦苇沿与水池边垂直的方向拉向岸边，它的顶端恰好碰到池边的水面. 问水深与芦苇长各为多少?

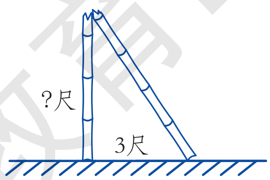

宋刻《九章算术》书影

① 该问题源自《九章算术》.

12 数学 八年级下册

补充例题

一根竹子高 1 丈，折断后竹子顶端落在离竹子底端 3 尺处，折断处离地面的高度是多少？（源自《九章算术》，1 丈=10 尺）



分析 根据题意，先画出水池截面示意图，如图1–18. 设AB为芦苇，BC为芦苇出水部分，即1尺，将芦苇拉向岸边，其顶部B点恰好碰到岸边B'.

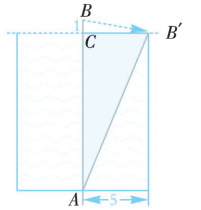


图1–18

解 如图1–18，设水池深为x尺，

则$AC=x$尺，$AB=AB'=(x+1)$尺.

因为正方形池塘边长为10尺，所以$B'C=5$尺.

在Rt$\triangle ACB'$中，根据勾股定理，得

$$x^2+5^2=(x+1)^2,$$

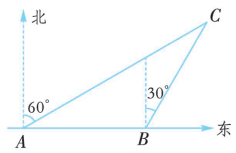
解得 $x=12$.

则芦苇长为13尺.

答：水池的深度为12尺，芦苇长为13尺.

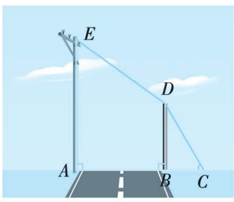
练习

1. 如图，一艘渔船以30海里/h的速度由西向东追赶鱼群. 在A处测得小岛C在船的北偏东60°方向；40 min后，渔船行至B处，此时测得小岛C在船的北偏东30°方向. 已知以小岛C为中心，周围10海里以内有暗礁，问这艘渔船继续向东追赶鱼群是否有触礁的危险?



(第1题图)

2. 如图，AE是位于公路边的电线杆，高为12 m，为了使电线CDE不影响汽车的正常行驶，电力部门在公路的另一边竖立了一根高为6 m的水泥撑杆BD，用于撑起电线. 已知两根杆子之间的距离为8 m，电线CD与水平线AC的夹角为60°. 求电线CDE的总长L（A，B，C三点在同一直线上，电线杆、水泥杆的粗细忽略不计）.

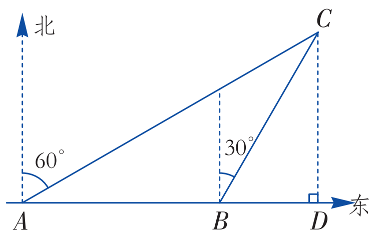


(第2题图)

例2所列方程尽管是一个一元二次方程，但经过移项消未知数，得到一个一元一次方程，教师可适当说明.

练习

1. 如图，作$CD\perp AB$于点D.



由题意可知$\angle BCD=30°$，$\angle CAB=\angle ACB=30°$.

$\therefore AB=BC=\dfrac{2}{3}\times30=20$(海里).

在Rt$\triangle CBD$中，$\angle BCD=30°$，

$\therefore BD=\dfrac{1}{2}BC=10$（海里).

$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{20^2-10^2}$

$=10\sqrt{3}$（海里).

$\because 10\sqrt{3}>10$,

$\therefore$渔船没有触礁的危险.

2. 电线CDE的总长L为$(10+4\sqrt{3})$ m.

几何中有许多互逆命题，互逆定理，它们从正反两个方面揭示了图形的特征和性质. 把勾股定理的题设和结论交换，可以得到它的逆命题. 本节课重点证明这个逆命题是真命题（即直角三角形的判定定理）. 学生通过对这一节的学习，将从另一个角度来认识直角三角形的特征.

在“探究”栏目的教学中，教师应力求展示为什么要再作一个 Rt$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 进行对照，这应是本课的难点所在. 由于直接证一个三角形有一个直角很困难，但是我们学过全等三角形，如果要证的这个三角形与某个直角三角形全等，那么结论显而易见.

在作 Rt$\triangle A'B'C'$时，要根据已学过的三角形的作法，取两边及其夹角作直角三角形.

通过对勾股定理及其逆定理的学习，教师可适当归纳“命题”知识，使学生进一步加深对性质和判定之间关系的认识.

我们已经知道勾股定理：“直角三角形两直角边 a，b 的平方和，等于斜边 c 的平方.”那么，这个定理的逆命题成立吗？

探究

如图 1-19，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，且 $a^2+b^2=c^2$，那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形吗？

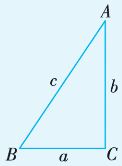


图 1-19

如果我们能构造一个直角三角形，然后证明 $\triangle ABC$ 与所构造的直角三角形全等，即可得 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

如图 1-20，作 Rt$\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$A'C'=b$.

在 Rt$\triangle A'B'C'$中，根据勾股定理得，$A'B'^2=a^2+b^2$，

$\because$ $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore$ $A'B'^2=c^2$.

$\therefore$ $A'B'=c$.

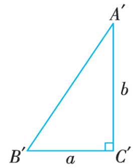


图 1-20

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$中，

$\because$ $BC=B'C'=a$，

$AC=A'C'=b$，

$AB=A'B'=c$，

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\angle C=\angle C'=90°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

先构造满足某些条件的图形，然后根据所求证的图形与所构造图形之间的关系，完成证明，这也是常用的问题解决策略.

由此得到直角三角形的判定定理：

如果三角形的三条边长 a，b，c 满足关系：$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

上述定理被称为勾股定理的逆定理.

勾股定理的逆定理所给出的是判定一个三角形是直角三角形的方法，这与前面学过的一些判定方法不同，它是从代数运算的角度来判别. 从这个意义上讲，古代数学家发现这个事实具备何等的数学理解能力，特别是其中体现出来的“数形统一”的思想方法，更具有科学创新的重大意义.

例 3 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

(1) $a=6$，$b=8$，$c=10$；

(2) $a=12$，$b=15$，$c=20$.

分析 根据勾股定理的逆定理，判断一个三角形是不是直角三角形，只要看两条较短边长的平方和是否等于最长边的平方.

解 (1) $\because\ 6^2+8^2=100$，$10^2=100$，

$\therefore\ 6^2+8^2=10^2$.

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

(2) $\because\ 12^2+15^2=369$，$20^2=400$，

$\therefore\ 12^2+15^2\neq 20^2$.

$\therefore$ 这个三角形不是直角三角形.

满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数称为勾股数.

例 4 如图 1-21，在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=10$，$BD=6$，$AD=8$，$AC=17$. 求 DC 的长.

解 在$\triangle ABD$ 中，$AB=10$，$BD=6$，$AD=8$，

$\because\ 6^2+8^2=10^2$，

即 $AD^2+BD^2=AB^2$，

$\therefore\ \triangle ADB$ 为直角三角形.

$\therefore\ \angle ADB=90°$.

$\therefore\ \angle ADC=180°-\angle ADB=90°$.

在 Rt$\triangle ADC$ 中，

$DC^2=AC^2-AD^2$，

$\therefore\ DC=\sqrt{17^2-8^2}=15$.

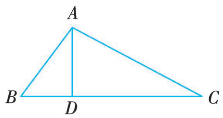


图 1-21

解答例 4 的关键是要将$\triangle ABC$ 分解成 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ADC$，然后在两个直角三角形中，根据假设条件，分别运用勾股定理和其逆定理进行解答.

资源拓展

“普林顿 322”泥版

底格里斯河与幼发拉底河所灌溉的美索不达米亚平原，是人类文明的发祥地之一. 两河流域的居民用尖芦管在湿泥版上刻写楔形文字，然后将泥版晒干或烘干，这样制成的泥版文书比纸草书易于保存. 迄今已有约 50 万块泥版文书出土，而这其中有大约 300 块是与数学有关的，其中包括一些数表，比如乘法表、倒数表、平方表和立方表等. 最精彩的一块数学泥版叫“普林顿 322”，它因曾被一个叫普林顿的人收藏而得名，现存美国哥伦比亚大学图书馆.

在相当长的时间内，“普林顿 322”被认为是一张商业账目表而未被重视，直到 1945 年，诺依格包尔首先揭示了“普林顿 322”泥版与勾股数有关而引起人们对它的极大兴趣.

练习

1. （1）$\because 8^2+15^2=17^2$，

即$a^2+b^2=c^2$.

故由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

（2）$\because 10^2+24^2\neq 25^2$，

故由a，b，c组成的三角形不是直角三角形.

（3）$\because 4^2+5^2=(\sqrt{41})^2$，

故由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

2. 略.

习题1.2

A组

1. （1）15；

（2）26.

2. （1）$\because 5^2+7^2\neq 8^2$，

$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形不是直角三角形.

（2）$\because 5^2+12^2=13^2$，

$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

（3）$\because 20^2+21^2=29^2$，

$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

（4）$\because (3n)^2+(4n)^2=(5n)^2$，

$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

3. $AB=4$.

4. （1）中线长为3，面积为$3\sqrt{3}$；

（2）边长为2.

练习

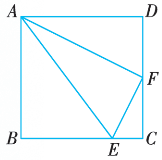
1. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

（1）$a=8$，$b=15$，$c=17$；　　（2）$a=10$，$b=24$，$c=25$；

（3）$a=4$，$b=5$，$c=\sqrt{41}$.

2. 如图，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，F 为 CD 的中点，E 是 BC 上一点，且 $EC=\frac{1}{4}BC$.

求证：$\triangle AEF$ 是直角三角形.



（第 2 题图）

习题 1.2

A 组

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.

（1）若 $a=8$，$c=17$，那么 $b=$__________；

（2）若 $a=10$，$b=24$，那么 $c=$__________.

2. 判断由线段 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

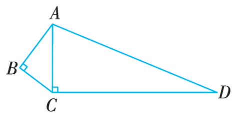
（1）$a=5$，$b=7$，$c=8$；

（2）$a=5$，$b=12$，$c=13$；

（3）$a=20$，$b=21$，$c=29$；

（4）$a=3n$，$b=4n$，$c=5n$（n 为正整数）.

3. 如图，$\angle B=\angle ACD=90°$，$BC=3$，$AD=13$，$CD=12$，求 AB 的长.



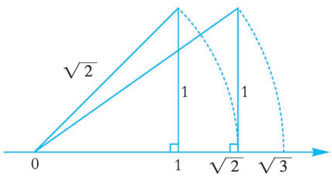
（第 3 题图）

4. （1）等边三角形的边长为 $2\sqrt{3}$，求它的中线长，并求出其面积.

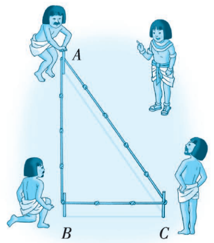
（2）等边三角形的一条角平分线长为 $\sqrt{3}$，求这个三角形的边长.

16 数学 八年级下册

5. 如图，由勾股定理，两条直角边长都为 1 的直角三角形，其斜边长为 $\sqrt{2}$；直角边分别为 $\sqrt{2}$，1 的直角三角形，其斜边长为 $\sqrt{3}$；依此类推，在数轴上作出表示数 $\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$ 的点.



(第 5 题图)



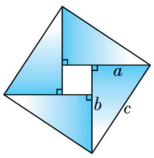
(第 6 题图)

6. 相传，古埃及人用 13 个等距的结把一根绳子分成等长的 12 段，并把它摆成 $\triangle ABC$ 的形状，如图所示. 工人们按这种造形在金字塔等建筑的拐角作出直角，试问这种“张绳法”能否得到一个直角三角形呢？请同学们动手试一试，并说说理由.

B 组

7. 我国魏晋时期的数学家赵爽在为天文学著作《周髀算经》作注解时，用 4 个全等的直角三角形拼成如下图所示的正方形，并用它证明了勾股定理，这个图被称为“弦图”. 它体现了中国古代的数学成就，是我国古代数学的骄傲. 正因为此，这个图案被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽.

请你利用“弦图”证明勾股定理.



弦图

(第 7 题图)

5. 作图略.

6. 可以得到一个直角三角形. 理由如下：

由图可知 $AB=4$，$BC=3$，$AC=5$，

$\because 3^2+4^2=5^2$，

故有 $AB^2+BC^2=AC^2$，

即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

B组

7. $c^2=4\cdot\frac{1}{2}ab+(b-a)^2$

$=a^2+b^2$.

8. 可得 $S_1+S_2=S_3$.

如果向外作半圆，则有

$$S_1=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{4}\pi a^2,$$

同理 $S_2=\dfrac{1}{4}\pi b^2$,

$$S_3=\frac{1}{4}\pi c^2,$$

$$\therefore \frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{4}\pi b^2=\frac{1}{4}\pi c^2,$$

即 $S_1+S_2=S_3$.

如果向外作等边三角形，则有

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,\quad S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

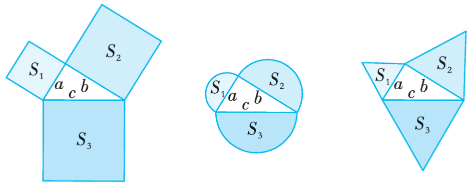
$$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

而 $a^2+b^2=c^2$,

即得 $S_1+S_2=S_3$.

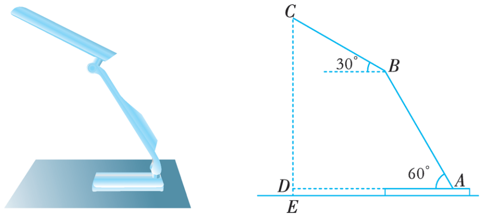
9. 灯罩顶端 C 到桌面的距离为51.6 cm.

8. 我们已经知道，以直角三角形 a，b，c 为边，向外分别作正方形，那么 $S_1+S_2=S_3$. 如图，如果以直角三角形三条边为直径向外作半圆，是否也存在 $S_1+S_2=S_3$？如果以三条边向外作等边三角形呢？



（第 8 题图）

9. 如图为放置在水平桌面上的台灯的示意图，灯臂 AB 长为 40 cm，灯罩 BC 长为 30 cm，底座厚度为 2 cm，灯臂与底座构成的 $\angle BAD=60°$. 使用时发现，光线效果最佳时灯罩 BC 与水平线所成的角为 30°，求此时灯罩顶端 C 到桌面的高度（结果精确到 0.1 cm）.



（第 9 题图）

1.3 直角三角形全等的判定

在前面的学习中，我们用 SAS，ASA，AAS 和 SSS 来判定两个三角形全等. 对于两个直角三角形，除了可以运用一般三角形全等的判定方法外，是否还有其他的判定方法呢？

探究

如图 1-22，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，那么 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$全等吗？

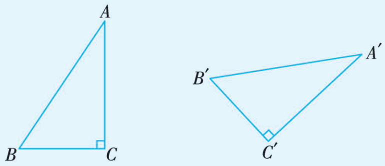


图 1-22

用前面学过的方法无法判断这两个三角形是否全等.

它们是全等的. 由勾股定理，直角三角形的两边确定，那么第三边也就确定. 我们能找到判定这两个三角形全等的条件.

在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，

$\because$ $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

根据勾股定理，$BC^2=AB^2-AC^2$，

$B'C'^2=A'B'^2-A'C'^2$，

$\therefore$ $BC=B'C'$.

$\therefore$ Rt$\triangle ABC\cong$Rt$\triangle A'B'C'$.

由此得到直角三角形全等的判定定理：

教学目标

探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理.

教学重点、难点

教学重点：运用“斜边、直角边”定理证明两个直角三角形全等.

教学难点：“斜边、直角边”定理的探索推导过程.

对于直角三角形这种特殊的三角形，除满足八年级上册所介绍的判定三角形全等的 4 种方法外，由于它的特殊性，所以还有特殊的更简便的判定方法，这就是本节介绍的“斜边、直角边”定理.

在“探究”栏目的教学中，教师应想方设法激发学生的兴趣，就提出的问题展开讨论，甚至可运用学生正、反双方的辩证，这样有利于培养学生的参与意识与竞争意识.

教材的探究过程有两个关键点：一是运用了前面所学的勾股定理；二是将直角三角形全等的判定条件化归到 SSS. 事实上，可以让学生尝试用学过的其他判定方法来证明结论. 这能进一步巩固其找判定三角形全等条件的能力.

H，L分别是斜边(hypotenuse)，直角边（leg）的英文首字母大写.

设计例 1 的目的，是使学生能运用“斜边、直角边”定理判定两个直角三角形全等.

例 2 的设计有以下两方面的设想：

一是介绍已知一直角边和斜边作直角三角形的方法（即尺规作图要求）；二是这个作图题实际是“斜边、直角边”定理的运用，从而促使学生加深对 HL 定理的理解.

练习

1.（1）不对；

（2）对，可根据 SAS 证明这两个三角形全等.

2. 在Rt$\triangle DAB$和Rt$\triangle BCD$中，

$\because AD=BC$，

$DB=BD$，

$\therefore$ Rt$\triangle DAB\cong$Rt$\triangle BCD$（HL）.

斜边、直角边定理　斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

例 1　如图 1-23，BD，CE 分别是$\triangle ABC$ 的高，且 $BE=CD$.

求证：Rt$\triangle BEC\cong$Rt$\triangle CDB$.

证明　$\because$ BD，CE 是$\triangle ABC$ 的高，

$\therefore$ $\angle BEC=\angle CDB=90°$.

在 Rt$\triangle BEC$ 和 Rt$\triangle CDB$ 中，

$\because$ $BC=CB$，

$BE=CD$，

$\therefore$ Rt$\triangle BEC\cong$Rt$\triangle CDB$（HL）.

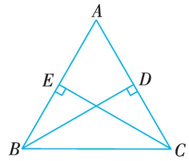


图 1-23

例 2　已知一直角边和斜边，求作直角三角形.

已知：线段 a，c（$c>a$），如图 1-24.

求作：Rt$\triangle ABC$，使$AB=c$，$BC=a$.

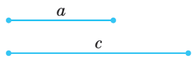


图 1-24

作法　（1）作$\angle MCN=90°$.

（2）在 CN 上截取 CB，使 $CB=a$.

（3）以点 B 为圆心，以 c 为半径画弧，交 CM 于点 A，连接 AB.

则$\triangle ABC$ 为所求作的直角三角形，如图 1-25.

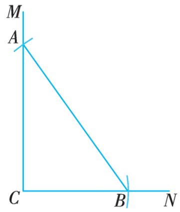


图 1-25

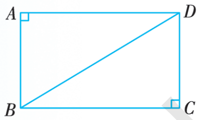
练习

1. 下面说法是否正确？为什么？

（1）两个锐角对应相等的两个直角三角形全等；

（2）两条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

2. 如图，$\angle DAB$ 和$\angle BCD$ 都是直角，$AD=BC$. 判断$\triangle ABD$ 和$\triangle CDB$ 是否全等，并说明理由.

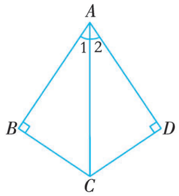


（第 2 题图）

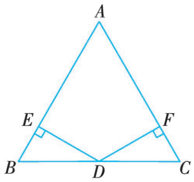
习题 1.3

A 组

1. 如图，$AB=AD$，$CB\perp AB$ 于点 B，$CD\perp AD$ 于点 D. 求证：$\angle 1=\angle 2$.



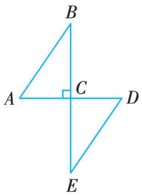
(第 1 题图)



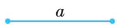
(第 2 题图)

2. 如图，D 为 BC 的中点，$DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，且 $DE=DF$. 试问：AB 与 AC 有什么关系？

3. 如图，点 C 为 AD 的中点，过点 C 的线段 $BE\perp AD$，且 $AB=DE$. 求证：$AB\parallel ED$.



(第 3 题图)



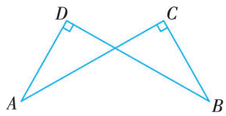
(第 4 题图)

4. 如图，已知线段 a，求作直角三角形，使一直角边为 a，斜边为 $2a$.

B 组

5. 求证：有两条高相等的三角形是等腰三角形.

6. 如图，$BD\perp AD$ 于点 D，$AC\perp BC$ 于点 C，且 $AC=BD$. 求证：$AD=BC$.



(第 6 题图)

习题1.3

A组

1. 在Rt△ABC和Rt△ADC中，

$\because AB=AD$，

$AC=AC$，

$\therefore$ Rt△$ABC\cong$Rt△ADC（HL）.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

2. 在Rt△DEB 和 Rt△DFC 中，$DE=DF$，

又 D 为 BC 中点，$\therefore DB=DC$.

$\therefore$ Rt△$DEB\cong$Rt△DFC（HL）.

$\therefore \angle B=\angle C$.

故 $AB=AC$（等角对等边）.

3. $\because C$ 为 AD 的中点，

$\therefore AC=DC$.

$\because BE\perp AD$，

$\therefore$ △ACB 和 △DCB 都是直角三角形.

又 $AB=DE$，

$\therefore$ Rt△$ACB\cong$Rt△DCB（HL）.

$\therefore \angle A=\angle D$.

$\therefore AB\parallel ED$（内错角相等，两直线平行）.

4. 作图略.

B组

5. 已知：在△ABC 中，$BD\perp AC$ 于 D，$CE\perp AB$ 于 E，且 $BD=CE$.

求证：△ABC 是等腰三角形.

证明：$\because BD\perp AC$ 于 D，$CE\perp AB$ 于 E，

$\therefore$△CEB 和△BDC 都是直角三角形.

$\because BD=CE$，

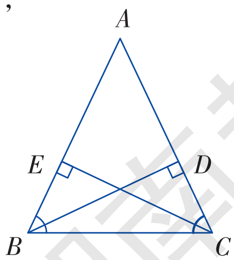
$BC=CB$，

$\therefore$ Rt△$CEB\cong$Rt△BDC（HL）.

$\therefore \angle EBC=\angle DCB$，即 $\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore AB=AC$（等角对等边）.

$\therefore$ △ABC 是等腰三角形.



（第 5 题图）

6. 连接AB.

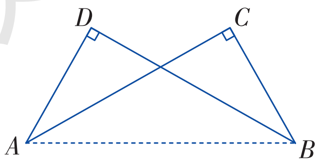
$\because BD\perp AD$，$AC\perp BC$，

$\therefore \angle D=\angle C=90°$.

又 $AC=BD$，AB 为公共边，

$\therefore$ Rt△$ADB\cong$Rt△BCA（HL）.

$\therefore AD=BC$.



（第 6 题图）

教学目标

1. 探索并证明角平分线的性质定理：

角平分线上的点到角两边的距离相等；

角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

2. 能灵活运用角平分线的性质定理解决一些简单的几何推理问题.

教学重点、难点

教学重点：角平分线性质定理及其应用.

教学难点：性质定理的探索推理论证.

1.4 角平分线的性质

角平分线是以一个角的顶点为端点的一条射线，它把这个角分成两个相等的角.

探究

如图 1-26，在$\angle AOB$的平分线OC上任取一点P，作$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为点D，E，试问PD与PE相等吗？

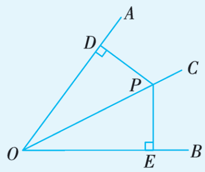


图 1-26

将$\angle AOB$沿OC对折，我发现PD与PE重合，即PD与PE相等.

你能证明吗？

我们来证明这个结论.

$\because$ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90°$.

在$\triangle PDO$和$\triangle PEO$中，

$\because$ $\angle PDO=\angle PEO$，

$\angle DOP=\angle EOP$，

$OP=OP$，

$\therefore$ $\triangle PDO\cong\triangle PEO$.

$\therefore$ $PD=PE$.

由此得到角平分线的性质定理：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

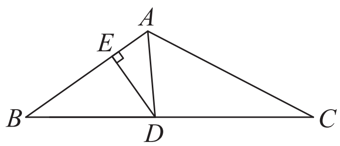
22 数学 八年级下册

教材首先描述性地给出角平分线的概念，使学生认识角平分线的基本特征.

在“探究”栏目中，首先用对折的方法获得“角平分线上的点到角两边的距离相等”的猜想，然后用演绎推理方法对猜想进行论证. 合情推理和演绎推理相结合的方式在这里再次体现. 探索活动是进行合情推理的过程，不仅有助于理清思路、发现结论，而且有助于发展学生的创新意识和创新精神，教师要重视合情推理的教育价值. 探索发现的结论必须通过演绎推理才能证明其正确性，证明的过程有助于发展学生的逻辑思维能力. 数学教学中，注重“探索发现”和“演绎证明”的有机结合，有利于实现“增强学生发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力”的课程总目标.

补充例题

如图，AD是$\triangle ABC$中$\angle BAC$的平分线，$DE\perp AB$于点E，$S_{\triangle ABC}=9$，$DE=2$，$AB=4$，求AC的长.



动脑筋

角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上吗?

如图 1–27，点 P 在 $\angle AOB$ 的内部，作 $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为点 D，E. 若 $PD=PE$，那么点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上吗?

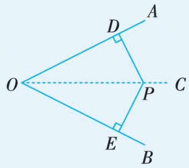


图 1–27

对于“动脑筋”栏目中提出的问题，也可以引导学生先作出射线 OC，然后沿 OC 进行对折，由此学生可得出“$\angle AOC=\angle BOC$”的猜想，然后引导学生用演绎推理的方法进行论证.

如图 1–27，过点 O，P 作射线 OC.

$\because$ $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore$ $\angle PDO=\angle PEO=90°$.

在 $Rt\triangle PDO$ 和 $Rt\triangle PEO$ 中，

$\because$ $OP=OP$，

$PD=PE$，

$\therefore$ $Rt\triangle PDO\cong Rt\triangle PEO$.

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOC$.

$\therefore$ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，即点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上.

由此得到角平分线的性质定理的逆定理：

角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

本章我们学习了不少互逆定理，教师应适当归纳，从分析命题的题设、结论入手，加深学生对“命题”相关术语的理解和认识.

例 1 如图 1–28，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$\angle 1=\angle 2$.

(1) 求证：点 B 在 $\angle ADC$ 的平分线上；

(2) 求证：BD 平分 $\angle ABC$.

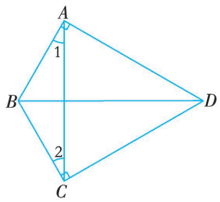


图 1–28

证明 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $BA=BC$.

又 $BA\perp AD$，$BC\perp CD$，

$\therefore$ 点 B 在 $\angle ADC$ 的平分线上.

第 1 章 直角三角形 23

资源拓展

角平分线与点的轨迹

本节学习了角平分线的两个性质定理，即“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”和“角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上”，由此得出：“角的平分线是到这个角的两边距离相等的点的轨迹”.

轨迹命题的证明和一般的证明不同. 要证明一个轨迹命题，必须从两方面证明：

(1) 图形上的任何一点都具有某种条件（纯粹性）.

(2) 具有某种性质的点都在这个图形上（完备性）.

到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线，在本节中已从纯粹性和完备性进行了证明. 如教材证明“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”，即角平分线上没有不合条件的点（纯粹性），反过来，教材证明了“到角的两边距离相等的点在角的平分线上”，也就是没有遗漏（完备性）.

练习

1. 作图略. 作$\angle AOB$的平分线，角平分线与直线MN的交点P，即为所求的点.

2. $\because AD$为$\angle BAC$的平分线，$DE\perp AB$于E，$DF\perp AC$于F，

$\therefore DE=DF$.

又 $BD=CD$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BED\cong \mathrm{Rt}\triangle CFD$.

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore AB=AC$（等角对等边）.

第 2 节课是角平分线的性质定理及其逆定理的应用.

“动脑筋”栏目中是一个开放性问题，解决问题之前可组织学生讨论、交流各自的想法，只要方向和思路明确，证明的过程并不难.

（2）在 $\mathrm{Rt}\triangle BAD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$\because$ $BA=BC$，$BD=BD$，

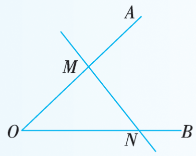
$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle BAD\cong \mathrm{Rt}\triangle BCD$.

$\therefore$ $\angle ABD=\angle CBD$.

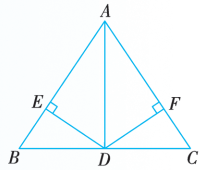
$\therefore$ BD 平分 $\angle ABC$.

练习

1. 如图，在直线 MN 上求作一点 P，使点 P 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，$DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，$BD=CD$. 求证：$AB=AC$.

动脑筋

如图 1-29，已知 $EF\perp CD$，$EF\perp AB$，$MN\perp AC$，M 是 EF 的中点. 需添加一个什么条件，就可使 CM，AM 分别为 $\angle ACD$ 和 $\angle CAB$ 的平分线呢？

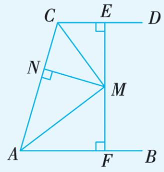


图 1-29

可以添加条件 $MN=ME$（或$MN=MF$）.

$\because$ $ME\perp CD$，$MN\perp CA$，

$\therefore$ M 在 $\angle ACD$ 的平分线上，即 CM 是 $\angle ACD$ 的平分线.

同理可得 AM 是 $\angle CAB$ 的平分线.

例 2 如图 1-30，在 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DAC$ 的平分线上任取一点 P，作 $PE\perp DB$，$PF\perp AC$，垂足分别为点 E，F. 试探索 $BE+PF$ 与 PB 的大小关系.

解 $\because$ AP 是 $\angle DAC$ 的平分线，

又 $PE\perp DB$，$PF\perp AC$，

$\therefore$ $PE=PF$.

在 $\triangle EBP$ 中，$BE+PE>PB$，

$\therefore$ $BE+PF>PB$.

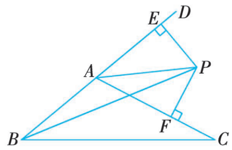


图 1-30

动脑筋

如图 1-31，你能在 $\triangle ABC$ 中找到一点 P，使其到三边的距离相等吗？

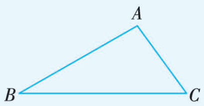


图 1-31

因为角平分线上的点到角的两边的距离相等，所以只要作 $\triangle ABC$ 任意两角（例如 $\angle A$ 与 $\angle B$）的平分线，其交点 P 即为所求作的点. 点 P 也在 $\angle C$ 的平分线上，如图 1-32.

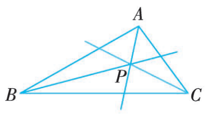
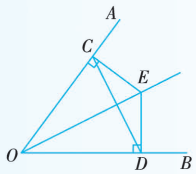


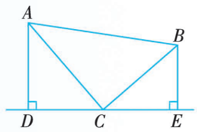
图 1-32

练习

1. 如图，E 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，$EC\perp OA$ 于点 C，$ED\perp OB$ 于点 D，求证：(1) $\angle ECD=\angle EDC$；(2) $OC=OD$.



(第 1 题图)

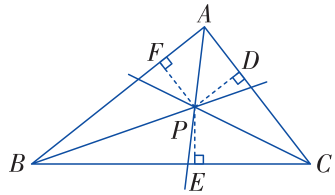


(第 2 题图)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp DE$，$BE\perp DE$，AC，BC 分别平分 $\angle BAD$，$\angle ABE$，点 C 在线段 DE 上. 求证：$AB=AD+BE$.

例 2 是一个比较经典的问题，对学生的要求较高. 解决这个问题的关键是要利用角平分线的性质将 PF 换成 PE. 然后将问题中的线段放到同一个三角形中进行比较. 同类型的问题教师可适当补充.

“动脑筋”栏目中是一个有一定思维含量的问题，这也是为将来介绍三角形的内心作一个铺垫.



如上图，在 $\triangle ABC$ 中，BP 是 $\angle B$ 的平分线，故 $PE=PF$，又 CP 是 $\angle C$ 的平分线，故 $PD=PE$，从而得 $PD=PE=PF$.

这个问题实际上说明了三角形三条角平分线交于一点.

练习

1. (1) $\because OE$ 是 $\angle AOB$ 的平分线，$EC\perp OA$，$ED\perp OB$，

$\therefore EC=ED$.

$\therefore$ $\angle ECD=\angle EDC$（等角对等边）.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ECO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle EDO$ 中，$\because EC=ED$，OE 为公共边，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ECO\cong \mathrm{Rt}\triangle EDO$ (HL).

$\therefore OC=OD$.

2. 过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F.

又 AC 是 $\angle BAD$ 的平分线，$CD\perp AD$，

$\therefore CF=CD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CFA$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDA$ 中，

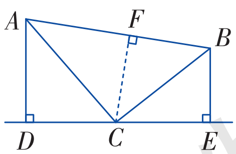
$\because CF=CD$，AC 为公共边，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CFA\cong \mathrm{Rt}\triangle CDA$ (HL).

$\therefore AF=AD$.

同理可得 $FB=BE$.

$\therefore AB=AF+FB=AD+BE$.



(第 2 题图)

习题1.4

A组

1. 作图略.

2. $\because DC=\dfrac{1}{2}AD$,

$\therefore AC=AD+DC=3DC=8$ m.

$\therefore DC=\dfrac{8}{3}$ m.

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore D$ 到 AB 的距离等于 DC,

即为 $\dfrac{8}{3}$ m.

3. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$.

又 $BA=BC$,

BD为公共边,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$ (SAS).

$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

又 $PM\perp AD$, $PN\perp CD$,

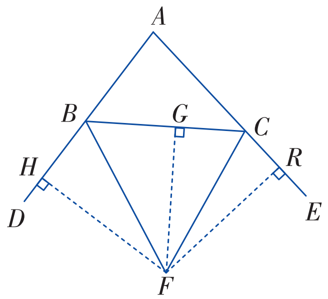
$\therefore PM=PN$.

B组

4. 作图略. 作 $\angle AOB$ 的平分线 OD, 再作线段 MN 的垂直平分线 EF, 则 OD 与 EF 的交点 P, 即为所求作的点.

5. 过点 F 作 $FH\perp AD$ 于 H, $FG\perp BC$ 于 G, $FR\perp AE$ 于 R, 则可得 $FH=FG=FR$.

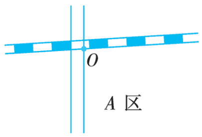
$\therefore$ 点 F 在 $\angle A$ 的平分线上.



习题 1.4

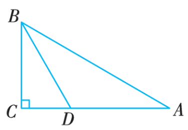
A 组

1. 如图，一个工厂在 A 区，它到公路、铁路的距离相等，并且离公路和铁路的交叉处 O 点为 500 m，在图上标出它的位置（比例尺为1∶20 000）.

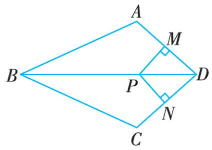


（第 1 题图）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$ m，$DC=\dfrac{1}{2}AD$，BD 平分 $\angle ABC$，求 D 到 AB 的距离.



（第 2 题图）

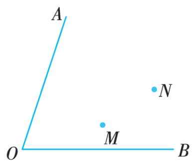


（第 3 题图）

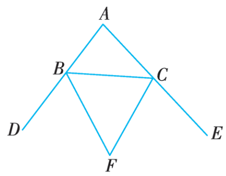
3. 如图，已知 BD 平分 $\angle ABC$，$BA=BC$，点 P 在 BD 上，作 $PM\perp AD$，$PN\perp CD$，垂足分别为点 M，N. 求证：$PM=PN$.

B 组

4. 如图，求作一点 P，使 $PM=PN$，并且使点 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA，OB 的距离相等.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线 BF，CF 相交于点 F，试问点 F 在 $\angle A$ 的平分线上吗？（提示：过 F 点分别向 BD，BC，CE 作垂线）

小结与复习

回顾

1. 直角三角形的两个锐角有什么关系？
2. 直角三角形斜边上的中线与斜边有什么关系？
3. 请用自己的语言叙述勾股定理及其逆定理.
4. 判断两个直角三角形全等的方法有哪些？
5. 角平分线有哪些性质？

本章知识结构

- 直角三角形
  - 性质
    - 直角三角形两个锐角互余
    - 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
    - 勾股定理
  - 判定
    - 有一个角是直角的三角形是直角三角形
    - 有两个角互余的三角形是直角三角形
    - 勾股定理的逆定理
  - 全等判定方法
    - SAS　ASA　AAS　SSS
    - HL
  - 角平分线
    - 角的平分线上的点到角的两边的距离相等
    - 角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上

注意

1. “斜边、直角边定理”是判定两个直角三角形全等所独有的，在运用该判定定理时，要注意全等的前提条件是两个直角三角形.

2. 要注意本章中的互逆命题，如直角三角形的性质和判定定理，勾股定理及其逆定理，角平分线的性质定理及其逆定理等，它们都是互为逆命题.

3. 勾股定理及其逆定理都体现了数形结合的思想. 勾股定理体现了由形到数，而勾股定理的逆定理是用代数方法来研究几何问题，体现了由数到形.

本章是八上“三角形”一章的延续，由于涉及的概念多、性质多、判定方法多，复习课时，要加强通过问题的形式回顾本章所学的主要知识，提高学生的归纳、概括能力.

同时，教师要帮助学生在头脑中建立起知识结构图（包括三角形知识和本章知识）. 对命题、定理的梳理也可作适当归纳.

“注意”栏目的设置，旨在突出本章学习中学生易出错或易忽视的问题，以及本章重要结论和重要数学思考，在教学中应给予强调.

本章还涉及抽象、合情推理和演绎推理、数学建模、数形结合和转化等数学思想与方法，在教学中应结合实例给予提示和渗透.

复习题1

A组

1. $\angle BDC=40°$.

2. $DE=2$.

3. （1）x=4.9 cm；

（2）x=1.1 cm.

4. （1）$\because 15^2+8^2=17^2$，

$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

（2）$\because \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\neq 1^2$，

$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形不是直角三角形.

（3）$\because 1.5^2+2^2=2.5^2$，

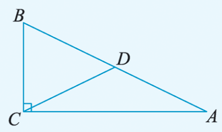
$\therefore$ 由a，b，c组成的三角形是直角三角形.

5. 相距 36.1 km.

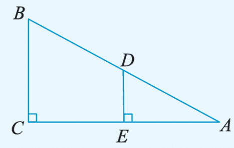
复习题 1

A 组

1. 如图，在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的中线，若$\angle A=20°$，求$\angle BDC$ 的度数.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，D 为 AB 的中点，$DE\perp AC$ 于点 E，$\angle A=30°$，$AB=8$，求 DE 的长.

3. 用计算器求图中的 x（结果精确到 0.1 m）.

（第 3 题图）

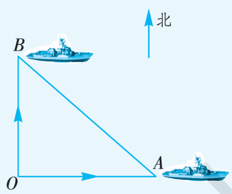
4. 判断由 a，b，c 组成的三角形是不是直角三角形.

（1）$a=15$，$b=8$，$c=17$；

（2）$a=\frac{1}{2}$，$b=1$，$c=\frac{3}{4}$；

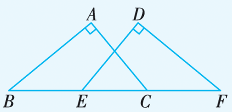
（3）$a=1.5$，$b=2$，$c=2.5$.

5. 已知 A，B 两艘船同时从港口 O 出发，船 A 以 15 km/h 的速度向东航行；船 B 以 10 km/h 的速度向北航行. 它们离开港口 2 h 后，相距多远？

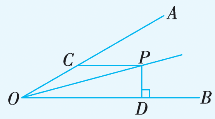


（第 5 题图）

6. 如图，点 B，E，C，F 在同一直线上，$\angle A=\angle D=90°$，$BE=FC$，$AB=DF$. 求证：$\angle ACB=\angle DEF$.



（第 6 题图）

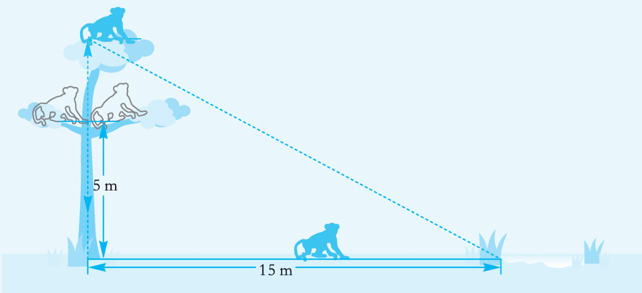


（第 7 题图）

7. 如图，已知 $\angle AOB=30°$，P 是 $\angle AOB$ 平分线上一点，$CP /\!/ OB$，交 OA 于点 C，$PD\perp OB$，垂足为点 D，且 $PC=4$，求 PD 的长.

B 组

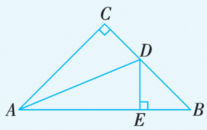
8. 如图，在一棵树的 5 m 高处有两只猴子，其中一只猴子爬下来走向离树 15 m 处的池塘，而另一只爬到树顶后直扑池塘（假设其下落的轨迹为直线）. 如果两只猴子经过的路程相等，那么这棵树有多高呢？



（第 8 题图）

9. 已知直角三角形两直角边的和为 $\sqrt{6}$，斜边长为 2，求这个直角三角形的面积.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线且交 BC 于点 D，$DE\perp AB$，垂足为点 E，若 $AB=12$ cm，求 $\triangle DEB$ 的周长.



（第 10 题图）

6. $\because \angle A=\angle D=90°$，

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 是直角三角形.

$\because BE=FC$，

$\therefore BE+EC=FC+EC$.

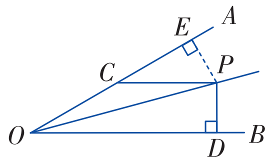
即 $BC=FE$.

又 $AB=DF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong \mathrm{Rt}\triangle DFE$ (HL).

$\therefore \angle ACB=\angle DEF$（全等三角形对应角相等）.

7. 过点 P 作 $PE\perp OA$ 于点 E，



$\because CP /\!/ OB$，$\angle AOB=30°$，

$\therefore \angle ACP=\angle AOB=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEC$ 中，

$\because \angle ACP=30°$，

$\therefore PE=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}\times 4=2$.

$\because$ 点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，又 $PD\perp OB$ 于点 D，

$\therefore PD=PE=2$.

B组

8. 设另一只猴子在树上爬了 x m，由题意，得

$$(5+x)^2+15^2=(20-x)^2,$$

$\therefore x=3$.

$\therefore$ 这棵树有 8 m 高.

9. 设两直角边分别为 x，y，则 $\begin{cases} x+y=\sqrt{6}, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

$\therefore (x+y)^2=6$，即 $x^2+2xy+y^2=6$.

$\therefore 2xy=6-(x^2+y^2)=6-4=2$.

$\therefore xy=1$.

这个直角三角形的面积 $S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}$.

10. $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$ 于 E，$DC\perp AC$ 于 C，

$\therefore DE=CD$.

易证 $AE=AC=BC$.

$\therefore BD+DE+EB$

$=BD+CD+EB$

$=BC+EB$

$=AE+EB$

$=AB$

$=12$ cm.

C组

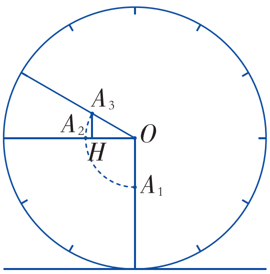
11. ∵ $\angle ABC=\angle BAC=15°$，

∴ $BC=AC=2$ km，

在 Rt△BCD 中，$CD=1$ km，$BD=\sqrt{3}$ km，

∴ 主峰高度为（$1+\sqrt{3}$）km.

12.



如图，由已知条件可知 $OA_1=OA_2=OA_3=6$ cm，

作 $A_3H\perp OA_2$ 于 H，

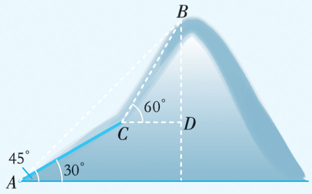
则 $\angle A_3OH=30°$，$OA_3=6$，

∴ $A_3H=\frac{1}{2}OA_3=\frac{1}{2}\times6=3.$

∴ 此时点 A 到桌面的距离为 19 cm.

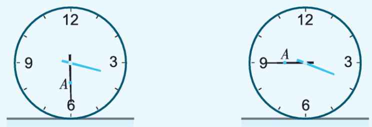
C 组

11. 如图，小明和小强攀登一无名山峰，他俩在山脚 A 处测得主峰 B 的仰角为 45°，然后从山脚沿一段倾角为 30°的斜坡走了 2 km 到达山腰 C，此时测得主峰 B 的仰角为 60°. 于是小明对小强说：“我知道主峰多高了.” 你能根据他们的数据算出主峰的高度吗？



（第 11 题图）

12. 图（a）表示一个时钟的钟面垂直固定于水平桌面上，其中分针上有一点 A，当钟面显示 3 点 30 分时，分针垂直于桌面，A 点距桌面的高度为10 cm. 如图（b），若此钟面显示 3 点 45 分时，A 点距桌面的高度为 16 cm. 则当钟面显示 3 点 50 分时，A 点距桌面的高度为多少？



（a）　（b）

（第 12 题图）

30 数学 八年级下册

数学与文化

几何学的基石——勾股定理

在图形的研究中，直角三角形是最为基础的，也正因为此，在许多古代文明的历史文献中都对勾股定理有所研究.

在中国，公元前2世纪成书的《周髀算经》就明确记载了：勾广三，股修四，径隅五. 还给出了勾股定理的一般形式. 三国时代（公元3世纪初）的赵爽注《周髀算经》时，创制了“弦图”，并利用它给出了勾股定理的证明. 设两个直角边长为 a 和 b，斜边长为 c，那么三个边长之间的关系为：$a^2+b^2=c^2$.（如图1）

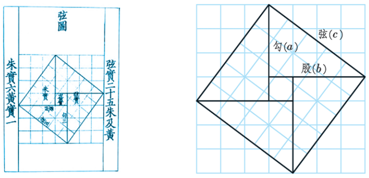
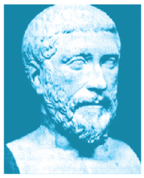


图1　赵爽用弦图来证明勾股定理



毕达哥拉斯

在西方数学史中，勾股定理被称为毕达哥拉斯定理. 毕达哥拉斯（Pythagoras，约前572—约前497），古希腊著名的哲学家、数学家. 他强调“万物皆数”，试图用数来解释一切事物. 相传毕达哥拉斯在参加一次聚会时，对脚下那些排列规则的正方形地砖产生了兴趣，他发现若以一块地砖的对角线为边画一个正方形，那么这个正方形的面积恰好等于2块地砖的面积和. 毕达哥拉斯最先发现勾股定理对于等腰直角三角形是成立的. 他于是受到启发，并进一步给出了一般的证明.

勾股定理被称为对人类社会发展有重大影响的、最伟大的十个科学发现之一. 它以数形统一的形式备受人类推崇，教师可引导学生在阅读“数学与文化”的基础上，通过阅读相关书籍来了解勾股定理产生的背景、发展史以及广泛应用，使其感受数学文化的熏陶，激发其学习数学的兴趣.

说到勾股定理就不能不谈到勾股数，我们把像 3，4，5 这样一组满足 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解称为勾股数. 历史上著名的美索不达米亚文明所刻写的泥版中（如图 2），其中有一块就记录了 15 组勾股数. 即使是在今天，能够计算出 15 组勾股数也不是一件容易的事情，而这项工作是在公元前 1900—前 1600 年的古巴比伦时代完成的，这不得不让人惊叹.

图 2 “普林顿 322”泥版

关于勾股数，历史上还有一个著名的数学猜想与此密切相关，这就是费马大定理. 出生于 17 世纪的法国数学家费马（Fermat）在阅读古希腊数学家丢番图的著作《算术》时发现：勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 中，a，b，c 这 3 个数有可能同时都是整数. 但是，费马猜想，平方的情况是特殊的，对于一般的等式 $a^n+b^n=c^n$，当自然数 $n\geqslant 3$ 时，不存在满足 $abc\neq 0$ 的整数解. 费马将这个问题写在书页边，同时写道：“我已经找到了这个定理的绝妙的证明方法，但是，这里的空白处太窄了，写不下.”问题是简洁的，但人们一直未找到费马所说的“绝妙证明”. 历经 3 个世纪，经过几代数学家的努力，这个问题于 1995 年被英国数学家怀尔斯（Wiles）所攻克.

勾股定理作为几何学中一条最基本的定理，以其数形统一的思想方法推动着数学的发展，而且在现实生活中也有着广泛的应用. 勾股定理——这一颗几何学中光彩夺目的明珠，被誉为“几何学的基石”.

Ⅲ. 本章相关链接

勾股定理的证明

几何学的产生，源于人们对土地面积测量的需要. 翻开任何一本关于数学史的通俗读物，差不多都记载着这样的故事：在古埃及，尼罗河每年定期泛滥，洪水带来了尼罗河肥沃的淤积泥土，这为人们在干旱的沙漠地区种植农作物提供了很好的条件. 随之也带来了一个问题，因为洪水在带来肥沃土壤的同时，也抹掉了田地之间的界限标志. 洪水消退后，人们要重新画出田地的界限，这就必须丈量和计算田地的面积. 年复一年，这就积累了最基本的几何知识.

这样看来，从一开始，几何学就和面积结下了不解之缘. 英文中的“几何”——“geometry”，这个单词的字头“geo-”，便含有土地的意思.

利用面积关系证明几何定理，最早的例子是勾股定理的证明. 勾股定理是几何学中的一颗璀璨明珠，被称为几何学的基石，历史悠久，证法繁多. 千百年来对它的探讨从未停止过，人们不断提出新的证法，其中有著名的数学家，也有业余的数学爱好者；既有普通的老百姓，也有尊贵的政要权贵，甚至有国家总统.

图 1 和图 2 都是勾股定理的经典证明. 图 1 取自赵爽（三国时代人，生活于公元 3 世纪）注《周髀算经》（1213 年宋版），此证法一般被称为赵爽弦图证法；图 2 取自徐光启、利玛窦合译的《几何原本》，该证法一般被称为欧几里得证法.

2002 年 8 月 20—28 日，世界数学家大会在北京召开. 大会所使用的会标就是赵爽弦图.

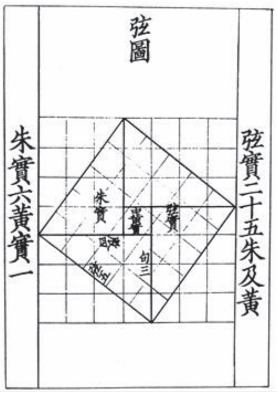


图 1

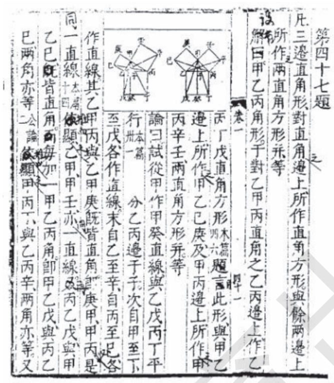


图 2

古代数学，不管是东方还是西方，都擅长用几何图形来说明问题. 这可看作是无字证明（without words proof）的源头. 很大程度上，是由于当时代数研究很不系统，缺乏能够方便使用的符号工具. 图 3 和图 4 是将多幅小图片连在一起，生动再现了面积转化的过程，构成勾股定理的动画证明，十分直观. 如果利用现代信息技术，譬如用超级画板作成动画形式，或以 gif 格式的动态图片展示，则更有趣了.

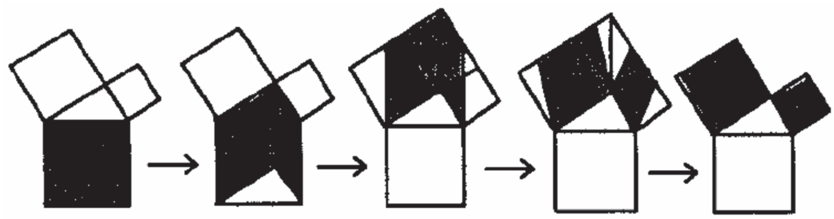


图 3

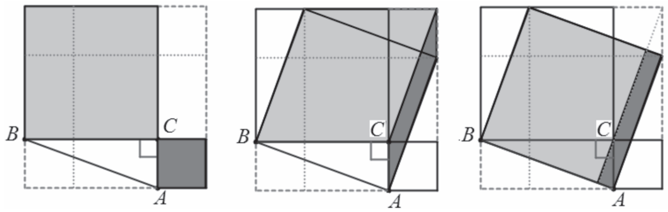


图 4

图 5~图 8 都是勾股定理经典的分割证明. 这些证明无须文字说明，一看即明.

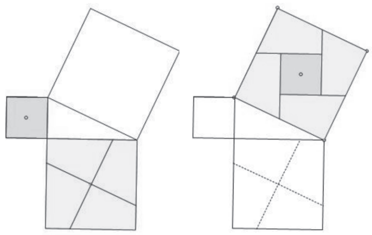


图 5

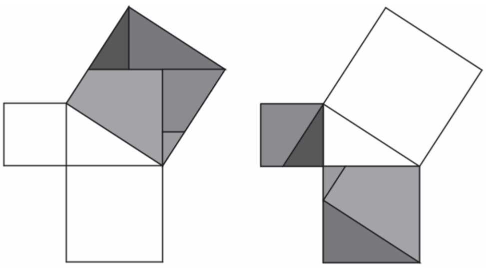


图 6

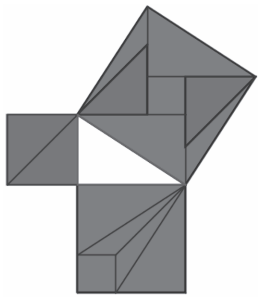


图 7

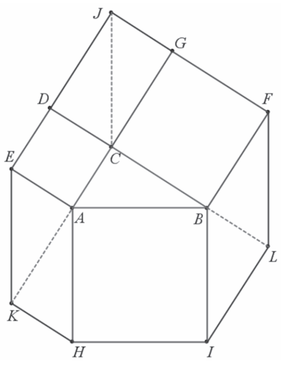


图 8

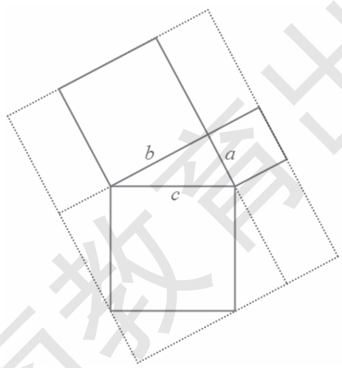


图 9

图 9 是在图 8 基础上作了改变，可根据面积关系列方程 $(a+2b)(2a+b)=a^2+b^2+c^2+3ab+4\cdot\frac{1}{2}ab$，化简得 $a^2+b^2=c^2$.

在西方，勾股定理又被称为毕达哥拉斯定理. 相传，古希腊数学家毕达哥拉斯是在观察地板图案时发现了勾股定理. 由于地板图案都是一样大小的正方形，所以毕达哥拉斯最先发现的是勾股定理对于等腰直角三角形成立（图 10）.

十分巧合的是，我国古代也有类似的图形（图 11）. 不过这个图形不是从地板图案而来，而是将一个正方形纸板分成 7 份，然后重新进行组合. 这算是益智游戏七巧板的一个应用吧.

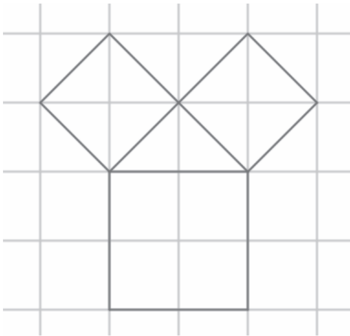


图 10

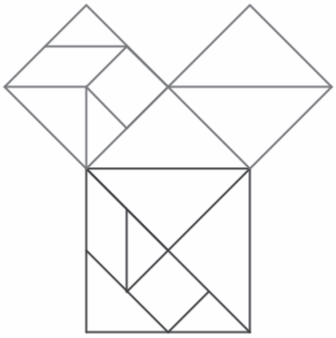


图 11

设计一种地板图案如图 12 所示，您能从中发现勾股定理么？您若一眼就能看出该图蕴含了勾股定理的三种证法，那就恭喜您有不错的几何直觉！

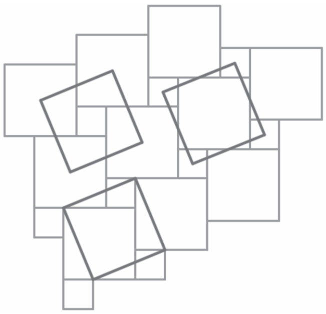


图 12

勾股定理证明很多，但多数来之不易， 可谓是古今中外数学爱好者集体智慧的结晶. 很多的巧证，都是冥思苦想而成. 下面介绍一种通过两个全等的直角三角形拼摆，批量生成勾股定理证明的方法.

我们从最简单的图 13 开始，每次平移一点点，得到新的证法！

如图 13，由 $S_{\triangle ECB}+S_{\triangle ACD}=S_{BEAD}$ 得 $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2$，即 $a^2+b^2=c^2$.

(提示：延长 AB 交 DE 于 K，则 $S_{BEAD}=S_{\triangle EAD}-S_{\triangle EBD}=\frac{1}{2}ED\cdot(AK-BK)=\frac{1}{2}ED\cdot AB=\frac{1}{2}c^2$)

如图 14，由 $S_{\triangle CDB}+S_{\triangle CAD}=S_{CADB}$ 得 $a^2+b^2=c^2$.

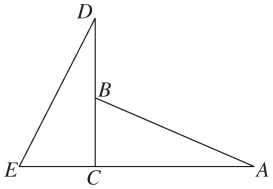


图 13

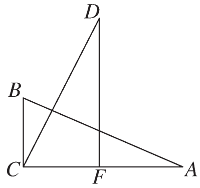


图 14

如图 15，由 $S_{\triangle EFB}+S_{FADB}=S_{EADB}$ 得 $a^2+b^2=c^2$.

如图 16，由 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ABD}=S_{ADBE}$ 得 $a^2+b^2=c^2$.

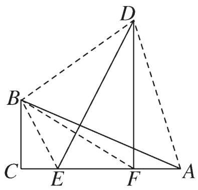


图 15

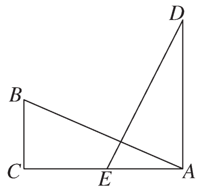


图 16

图 17 就是通常所说的总统证法，可看作是赵爽弦图证法的取半.

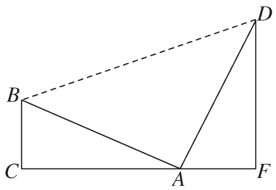


图 17

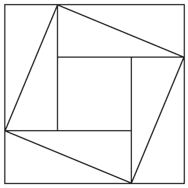


图 18

图 18 是赵爽弦图，此图其实包含了勾股定理的两种证法. 把图 18 中外部的正方形去掉得到图 19. 对于图 19，常规的证明是 $AB^2=4\cdot\frac{1}{2}AF\cdot BF+(AF-BF)^2$，化简得 $AB^2=AF^2+BF^2$. 从另一个角度来看，因为 $S_{\triangle CDG}+S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$，所以 $\frac{1}{2}CH\cdot DG+\frac{1}{2}AG\cdot BF=\frac{1}{2}AB^2$，即 $AB^2=AF^2+BF^2$. 这一证明的好处就是无须用到平方和公式，小学生都能接受.

对于图 19，我们还可以这样分析：$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle BDG}+S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle FDG}+S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle ABG}$，即 $\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}AF\cdot DG+\frac{1}{2}AG\cdot BF$，即 $AB^2=AF^2+BF^2$.

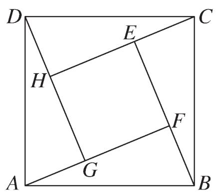


图 19

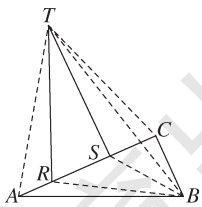


图 20

将图 19 中的 Rt$\triangle AGD$ 平移一点，得到图 20，由 $S_{\triangle TAC}+S_{\triangle BRS}=S_{\triangle TAS}+S_{\triangle TSC}+S_{\triangle BRS}=S_{TARB}$ 得 $a^2+b^2=c^2$.

就是这样两个直角三角形的拼摆，稍作平移就能得到这么多勾股定理的证法，不得不让人惊叹. 这说明，证明勾股定理并不需要花心思构造太复杂的图形.

直角三角形的三边符合勾股定理，这本是一个天然的性质，却需要另外一个自我才能证明. 就好像有人寄东西给你，当你去邮局取时，自己却不能证明自己的身份，此时身份证就成了你的另一个自我.

第 2 章　四边形

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 了解多边形的定义，多边形的顶点、边、内角、外角、对角线等概念；探索并掌握多边形内角和与外角和公式.

2. 理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系；了解四边形的不稳定性.

3. 探索并证明平行四边形的性质定理：平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分，探索并证明平行四边形的判定定理：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；对角线互相平分的四边形是平行四边形.

4. 探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理：矩形的四个角都是直角，对角线相等；菱形的四条边相等，对角线互相垂直；以及它们的判定定理：三个角是直角的四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形；四边相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形，正方形具有矩形和菱形的一切性质.

5. 探索并证明三角形的中位线定理.

6. 了解中心对称、中心对称图形的概念，探索它的基本性质：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

7. 认识并欣赏自然界和现实生活中的中心对称图形.

8. 探索矩形、菱形的轴对称性质；探索线段、平行四边形的中心对称性质.

二、课时建议

2.1　多边形	2 课时
2.2　平行四边形	4 课时
2.3　中心对称和中心对称图形	2 课时
2.4　三角形的中位线	2 课时
2.5　矩形	2 课时
2.6　菱形	2 课时
2.7　正方形	1 课时
小结与复习	2 课时

三、教材说明

四边形是常见的一类几何图形，也是第三学段“图形与几何”的主要研究对象. 本章是在小学已接触过一些四边形，七、八年级已学过平行线、三角形等有关知识的基础上，对四边形作进一步较系统的学习和研究.

本章从生活实例出发，介绍多边形的概念及相关性质，接着较系统地介绍特殊四边形的性质和判定，其中还将介绍中心对称变换，以及从中心对称和轴对称两方面来认识特殊四边形的性质，从而完成对四边形的较为完整的认识.

本章学习的重点是：特殊四边形的性质和判定、中心对称和中心对称图形、三角形的中位线. 本章的难点是特殊四边形的性质和判定.

根据知识间内在的逻辑性，本章的教学内容分为7节，顺序安排如下：

多边形 — 平行四边形 — 中心对称和中心对称图形 — 三角形的中位线 — 矩形 — 菱形 — 正方形

在教学本章的过程中，需注意以下几点：

1. 要重视概念教学，突出概念之间的区别与联系，体会分类思想

本章的概念比较多，而本章的难点也在于理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系（注：这种关系是特殊与一般的关系，图形越来越特殊，它的性质就越来越多，判定它需要的条件也越来越多），因此概念教学尤为关键.首先要讲清楚每个概念，其次要弄清这些概念之间的关系. 教材注意通过图示的方法来展示本章主要概念之间的关系，教学中要重视这些图示的使用，使学生真正理解概念的内涵和外延，掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的共性、特征及其从属关系，从而明晰它们的性质和判定方法. 建议每学完一个知识点后，教师适时地引导学生对所学内容进行梳理、归纳，鼓励学生自己画出思维导图，以帮助学生理解这些概念.

同时，在理解特殊四边形与平行四边形之间的区别与联系时，这本身蕴含着一般与特殊的思想，这是引导学生感悟分类思想的好素材. 通过分类可以帮助学生更好地掌握概念，同时也学习了一些分类的方法.

2.重视图形性质的探索，突出直观操作（合情推理）和证明（演绎推理）的有机结合

本章研究的图形比较多，涉及的性质和判定方法也多，教学时，要注意突出图形性质的探索过程，重视直观操作和证明的有机结合. 例如，教材通过度量、实验操作、图形变换等来探索图形的性质，获得一些猜想，然后对发现的性质进行证明. 这一做法既是一种科学的数学思维方式的培养，同时还有利于实现增强学生发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力的课标要求.

特别值得一提的是：本套教材几何部分的编写特点强调用变换的观点来研究图形的位置关系和度量关系. 例如2.2.2节通过平移，并利用平移的性质探索出平行四边形的判定定理1. 又如2.3节，通过将图形旋转180°，抽象出中心对称和中心对称图形的概念；又通过将平行四边形绕其对角线的交点旋转180°，所得的像与自身重合，从而得出平行四边形是中心对称图形. 2.4节中关于三角形的中位线定理也是通过旋转变换探索出来的. 还比如利用轴对称说明矩形、菱形是轴对称图形等等. 在探索图形的性质和判定方法时，合理地运用图形变换来说理，对于培养学生的几何直观和思维的严谨是有好处的，在教学中应给予重视.

3. 要重视推理论证的教学

本章的教学处于学生初步掌握了推理论证方法的基础上进一步巩固和提高的阶段，教材编写者充分考虑到学生的推理论证能力的培养是一个长期的过程，一方面对于一些重要的术语及话语体系（如互逆命题、互逆定理等）还将在本章各知识点予以呈现、强调；另一方面强调学生掌握规范的证明格式，并能够对一些文字叙述的证明题自己写出已知、求证，再进行证明，以提高其推理论证能力，发展学生的思维能力和水平.

随着学生对四边形知识的认识不断深入，在解决实际问题的过程中，思路、途径、方法也逐渐增多，在学完本章知识后，要有意识地培养学生直接用所学的知识来解决问题，完成推理论证，而不必再通过添加辅助线转化为平行线或三角形来解决，这也是推理论证能力提高的表现.

4. 重视信息技术的应用

本章许多图形性质的探索借助度量、实验操作、图形变换来探究，在这一过程中，应充分重视利用信息技术来辅助教学. 许多软件具有测量的功能，可以很方便地让图形动起来，这将有利于学生在

图形运动变化的过程中去发现其中变与不变的关系，从而为推理论证找到思路，丰富探索图形性质的多种方法.

四、评价建议

1. 恰当评价学生的基础知识和基本技能

本章内容基本属于“双基”范畴，因此除了传统纸笔测验考核学生是否对重要的性质和判定定理理解和灵活运用外，还要采取多样的考核形式，如创造交流、讨论的机会，考察学生对知识的掌握程度，对演绎推理的理解，对所学知识的归纳概括能力，以形成系统的知识体系等.

在实施笔试测验时，题型难度不要超过教材的水平，应尽可能使所有的学生能主动参与. 值得指出的是：在实施笔试测验时，要认真落实课程标准提出的要求，超出范围的定理不作为证明命题的依据，不列入考察范围.

2.关注对学生学习过程的评价

（1）在教学中，应重点关注学生经历数学知识的形成过程，例如四边形性质定理和判定定理的得出渗透了“观察——抽象——探索——分析和论证”这一思维过程，要关注学生在这一探索过程中所表现出的思维水平和闪光点，关注学生参与活动过程的积极性和对数学基本思想的领悟，鼓励学生联系已学的知识作出思考判断，对于学生从不同角度来思考问题，应给予充分重视和鼓励.

（2）本章的概念多、定理多，教师在引导学生探索并理解数学本质的同时，要关注学生思维能力的提升，可以要求学生自我设计“学习小结”，用合适的形式归纳学到的知识和方法，学习中的收获、遇到的问题等等，教师可通过学习小结对学生的学习情况进行评价，也可以组织学生将自己的小结在班级展示交流，通过这种形式总结自己的进步，反思自己的不足以及需要改进的地方，汲取他人值得借鉴的经验.

第2章

四边形

在现实生活中，我们经常可以见到四边形的身影，它们把世界装扮得如此多姿多彩，使人赏心悦目.

在小学，我们已经接触了一些四边形，例如长方形、正方形、平行四边形等. 平行四边形、菱形、矩形、正方形还有哪些进一步的性质？如何判定一个四边形是平行四边形、菱形、矩形还是正方形？它们相互之间有哪些关系？本章将学习这些知识.

Ⅱ. 教学建议

本章章前图呈现了光伏发电机组、平整的土地、建筑等照片，从图中可以发现有各种形状的四边形，使学生感受四边形在现实生活中的广泛应用，从而激发学生学习的兴趣和积极性.

教学目标

1. 了解多边形的定义，多边形的顶点、边、内角、外角、对角线等概念，以及四边形的不稳定性.

2. 探索并掌握多边形内角和与外角和定理.

3. 会运用内角和与外角和定理进行计算.

教学重点、难点

教学重点：多边形内角和与外角和定理及其应用.

教学难点：多边形内角和与外角和定理的探索推理过程.

2.1 多边形

观察

你能从图 2-1 中找出一些由线段首尾相连所组成的图形吗？

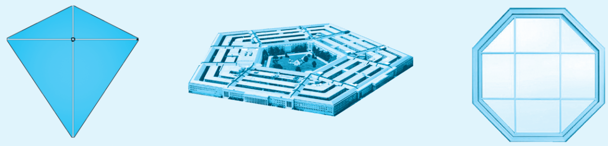


图 2-1

在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫作**多边形**（polygon）[①].

组成多边形的各条线段叫作多边形的**边**.

相邻两条边的公共端点叫作多边形的**顶点**.

连接不相邻的两个顶点的线段叫作多边形的**对角线**.

相邻两边组成的角叫作多边形的**内角**，简称多边形的**角**.

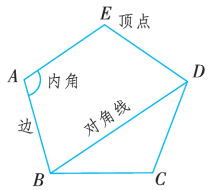


图 2-2

例如在图 2-2 中，AB 是边，E 是顶点，BD 是对角线，$\angle A$ 是内角.

多边形根据边数可以分为三角形，四边形，五边形，……

在平面内，边相等、角也都相等的多边形叫作**正多边形**.

动脑筋

三角形的内角和等于 180°，四边形的内角和是多少度呢？

如图 2-3，四边形 $ABCD$ 的一条对角线 AC 把它分成两个三角形，因此四边形的内角和等于这两个三角形的内角和，即 $180°\times 2=360°$.

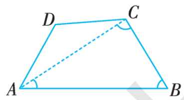


图 2-3

① 本书今后所介绍的多边形都是指凸多边形，即多边形总在任何一条边所在直线的同一旁.

本节主要介绍多边形的有关概念，以及多边形的内角和与外角和公式.

本节概念教学，要以三角形为基础，可以仿照三角形建立多边形的有关概念，如多边形的边、顶点、内角、外角、内角和等都可同三角形类比，让学生理解这些概念.

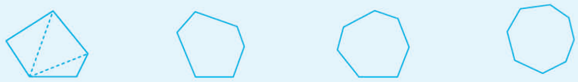
值得注意的是，由于三角形的三个顶点确定一个平面，所以三个顶点总是共面的，即三角形肯定是平面图形. 但边数大于3的多边形，它的几个顶点有不共面的情况，限于初中几何主要研究平面图形，所以在多边形的定义中加上“在平面内”这个条件.

对角线是一个新概念，它的重要意义在于它的应用. 本节我们利用它将多边形分成几个三角形，从而把多边形的问题转化为三角形的问题来解决.

正多边形的定义中提到“边相等”与“角也相等”，这是正多边形的两个特征，也是与正三角形定义本质的差异：边数大于或等于4的多边形不具有稳定性，由各边相等不能推出各个角相等，所以必须定义正多边形两个特征. 而三角形具有稳定性，由三边相等可以推出三个角相等，所以只需定义“各边相等的三角形叫作正三角形”.

探究

在下列各个多边形中，任取一个顶点，通过该顶点画出所有对角线，并完成下表.



图形	边数	可分成三角形的个数	多边形的内角和
五边形	5	3	$(5-2)\times 180°$
六边形	6		
七边形	7		
八边形	8		
…	…	…	…
n 边形	n		

如图 2-4，n 边形共有 n 个顶点 A_1，A_2，A_3，…，A_n. 与顶点 A_1 不相邻的顶点有 $(n-3)$ 个，因此从顶点 A_1 出发有（$n-3$）条对角线，n 边形被分成了（$n-2$）个三角形. n 边形的内角和等于这（$n-2$）个三角形的内角和，即（$n-2$）·180°. 由此得出：

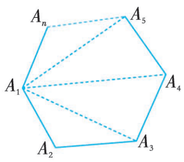


图 2-4

n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.

动脑筋

你还可以用其他方法探究 n 边形的内角和公式吗？

“探究”栏目的列表有几个要求：连对角线、列式，观察列式特征并抽象出 n边形的内角和公式. 接着教材以说理的形式给予证明. 整个过程渗透了合情推理与演绎推理，教学时要渗透这一过程.

多边形的内角和公式与三角形的内角和定理之间有着密切的联系：通过将多边形转化为若干个三角形，再由三角形内角和定理，可以推导出多边形内角和公式.

待讲解完多种方法探究 n 边形的内角和公式后，教师可适当归纳总结.

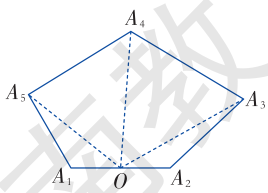
资源拓展

推导 n 边形内角和公式的方法有好几种，无论哪一种方法都是先将多边形分割成一些三角形，然后把多边形的内角和转化成多个三角形的内角和. 教材是用了两种方法求多边形内角和. 一是在 n 边形的顶点任取一点，连接各个顶点的线段，把 n 边形分割成（n–2）个三角形，从而得出 n 边形的内角和为（n–2)×180°. 第二种方法是在 n 边形内任取一点 O，连接 O 与各个顶点的线段，把 n 边形分成 n 个三角形，从而得出 n 边形的内角和.

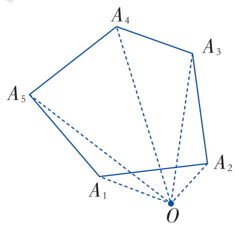
如果在 n 边形的一边上任取一点 O，如图甲，将 n 边形分成若干个三角形，如何求出 n 边形的内角和呢？

如果在 n 边形外任取一点 O，如图乙，如何求出 n 边形的内角和？

请尝试完成这两种求解方法.



甲



乙

如图 2-5，在 n 边形内任取一点 O，与多边形各顶点连接，把 n 边形分成 n 个三角形，用 n 个三角形的内角和 $n\cdot180°$减去中心的周角 360°，得 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°$.

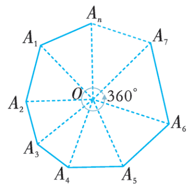


图 2-5

补充例题

如果一个四边形的一组对角互补，那么另一组对角有什么关系？

例 1 (1) 十边形的内角和是多少度？

(2) 一个多边形的内角和等于 1 980°，它是几边形？

解 (1) 十边形的内角和是

$$(10-2)\times180°=1\ 440°.$$

(2) 设这个多边形的边数为 n，则

$$(n-2)\times180°=1\ 980°,$$

解得 $n=13$.

所以这是一个十三边形.

练习

1. (1) 150°；

 (2) 十二边形.

2. 十二边形.

练习

1. (1) 正十二边形每一个内角是多少度？

(2) 一个多边形的内角和等于 1 800°，它是几边形？

2. 过多边形某个顶点的所有对角线，将这个多边形分成 10 个三角形，那么这个多边形是几边形？

第2节课认识多边形的外角、外角和的概念，重点探究多边形的外角和定理.

多边形的内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫作这个多边形的一个**外角**（exterior angle）. 如图 2-6，$\angle EDF$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角.

在多边形的每个顶点处取一个外角，它们的和叫作这个多边形的**外角和**.

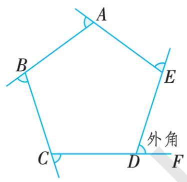


图 2-6

动脑筋

我们已经知道三角形的外角和为 360°，那么四边形的外角和为多少度呢？

如图 2-7，在四边形 $ABCD$ 的每一个顶点处取一个外角，如∠1，∠2，∠3，∠4.

∵ $\angle 1+\angle DAB=180°$，$\angle 2+\angle ABC=180°$，

$\angle 3+\angle BCD=180°$，$\angle 4+\angle ADC=180°$，

又 $\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle ADC=360°$，

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=4\times 180°-360°=360°$.

∴ 四边形的外角和为360°.

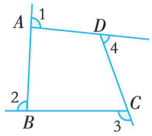


图 2-7

探究

三角形的外角和是 360°，四边形的外角和是 360°，n 边形（n 为不小于 3 的任意整数）的外角和都是 360°吗？n 边形的外角和与边数有关系吗？

类似于求四边形外角和的思路，在 n 边形的每一个顶点处取一个外角，其中每一个外角与它相邻的内角之和为 180°. 因此，这 n 个外角与跟它相邻的内角之和加起来是 $n\cdot 180°$，将这个总和减去 n 边形的内角和 $(n-2)\cdot 180°$所得的差即为 n 边形的外角和.

$$n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°$$
$$=[n-(n-2)]\cdot 180°$$
$$=2\times 180°=360°.$$

n 边形的外角和与边数没有关系.

由此得出：

任意多边形的外角和等于 360°.

例 2 一个多边形的内角和等于它外角和的 5 倍，它是几边形？

解 设多边形的边数为 n，则它的内角和为$(n-2)\cdot 180°$.

由题意得

$$(n-2)\cdot 180°=360°\times 5,$$

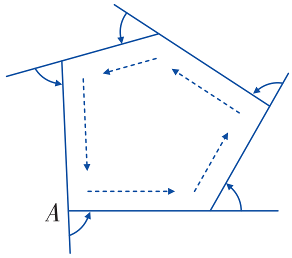
解得 $n=12$.

因此这个多边形是十二边形.

教材设置“动脑筋”和“探究”栏目，采用从特殊到一般的方式，通过推理得出多边形的外角和定理. 整个推理过程中蕴含了化归、类比、归纳的思想方法，教学时应结合推理的思路和方法，让学生加以体会.

需要总结的是：n 边形的外角和与边数没有关系.

我们也可以像以下这样理解为什么多边形的外角和等于360°.



如图，从多边形的一个顶点 A 出发，沿多边形的各边走过各顶点，再回到点A，然后转向出发时方向. 在行程中所转的各个角的和，就是多边形的外角和，由于走了一周，所转的各个角的和等于一个周角，所以多边形的外角和等于360°.

补充例题

1. 已知多边形的每一个内角都等于144°，求这个多边形的内角和.

2. 一个多边形的内角和与外角和相等，它是几边形？

“观察”栏目首先强调三角形具有稳定性，相应地当边数增加时，比如四边形还具有稳定性吗？教师应让学生动手操作自制模具，感性地体会四边形的不稳定性. 与此同时，教师可让学生观察生活中的实例，加深对四边形不稳定性的理解.

需向学生指出：

多边形的不稳定性不一定是其不足，在实际生活中，有时我们还要利用它的这一性质.

练习

1. 这个多边形是八边形，每个内角是135°.

2. x=60.

3. 略.

观察

三角形具有稳定性，那么四边形呢？用 4 根木条钉成如图 2-8 的木框，随意扭转四边形的边，它的形状会发生变化吗？

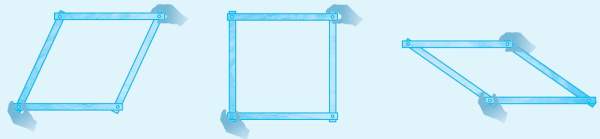


图 2-8

我们发现，四边形的边长不变，但它的形状改变了，这说明四边形具有不稳定性.

(a)　　(b)　　(c)

图 2-9

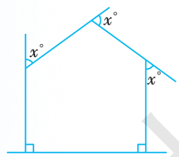
在实际生活中，我们经常利用四边形的不稳定性，例如图 2-9（a）中的电动伸缩门、图 2-9（b）中的升降器. 有时又要克服四边形的不稳定性，例如在图 2-9（c）中的栅栏两横梁之间加钉斜木条，构成三角形，这是为了利用三角形的稳定性.

练习

1. 一个多边形的每一个外角都等于 45°，这个多边形是几边形？它的每一个内角是多少度？

2. 如图，求图中 x 的值.

3. 请举出日常生活中利用四边形不稳定性的一些例子.



(第 2 题图)

习题 2.1

A 组

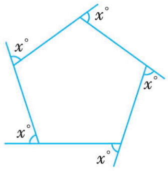
1. (1) 一个多边形的内角和等于 1 440°，它是几边形？

(2) 一个多边形的每一个内角都等于 108°，它是几边形？

2. (1) 一个多边形的每一个外角都等于 36°，它是几边形？

(2) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形？

3. 如图，求图中 x 的值.



(第 3 题图)

4. 如果一个多边形的每一个外角都等于与它相邻的内角，那么这个多边形的每一个外角是多少度？它是几边形？

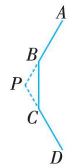
B 组

5. 在四边形的 4 个内角中，最多能有几个钝角，最多能有几个锐角？

6. (1) 如果两个多边形的边数相差 1，那么这两个多边形的内角和相差多少？

(2) 如果两个多边形的边数相差 1，那么这两个多边形的外角和有什么关系？

7. 如图为一个正 n 边形的一部分，AB 和 DC 延长后相交于点 P. 若 $\angle BPC=120°$，求 n.



(第 7 题图)

习题2.1

A组

1. (1) 十边形；

(2) 五边形.

2. (1) 十边形；

(2) 六边形.

3. $x=72$.

4. 每一个外角都是90°，是四边形.

B组

5. 最多能有3个钝角.

最多能有3个锐角.

6. (1) $(n-2)\cdot 180°-(n-3)\cdot 180°=180°$，即相差180°.

(2) 因为任意多边形的外角和为360°，所以这两个多边形外角和相等.

7. $n=12$.

教学目标

1. 理解平行四边形的概念.

2. 探索并证明平行四边形的性质定理：平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分.

3. 能运用平行四边形的性质解答有关几何问题.

教学重点、难点

教学重点：平行四边形的性质及其应用.

教学难点：平行四边形性质的探索与证明.

2.2节的主要内容是平行四边形的概念、性质和判定. 这一节是全章的重点，学好本节可以为学习后续四边形的内容打下坚实的基础.

2.2节用到的基础知识是平行线的性质和判定、三角形的全等等知识内容，课堂上教师可引导学生结合相关内容适当回顾.

第1课时首先从“做一做”入手，找图片中的平行四边形，然后给出平行四边形的定义以及记法. 实际上，平行四边形的定义既是平行四边形的一个判定方法，又是它的一个性质.

2.2 平行四边形

2.2.1 平行四边形的性质

做一做

在小学，我们已经认识了平行四边形. 在图 2-10 中找出平行四边形，并把它们勾画出来.

图 2-10

两组对边分别平行的四边形叫作**平行四边形**（parallelogram）.

四边形 $\xrightarrow{\text{两组对边分别平行}}$ 平行四边形

如图 2-11，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

平行四边形 $ABCD$ 记作“$\square ABCD$”.

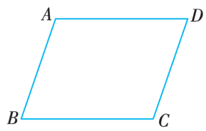


图 2-11

探究

每位同学根据定义画一个平行四边形，测量平行四边形（或者图 2-12 中的$\square ABCD$）四条边的长度、四个角的大小，由此你能做出什么猜测？

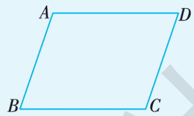


图 2-12

通过观察和测量，我发现平行四边形对边相等，对角相等.

你能证明吗？

下面我们来证明这个结论.

如图 2-13，连接 AC.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$ $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$（平行四边形的两组对边分别平行）.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

又 $AC = CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $AB = CD$，$BC = DA$，$\angle B = \angle D$.

又 $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$，

$\therefore$ $\angle BAD = \angle DCB$.

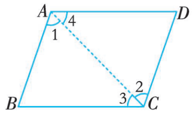


图 2-13

由此得到平行四边形的性质定理：

平行四边形的对边相等，平行四边形的对角相等.

例 1 如图 2-14，四边形 $ABCD$ 和 $BCEF$ 均为平行四边形，$AD = 2$ cm，$\angle A = 65°$，$\angle E = 33°$，求 EF 和 $\angle BGC$.

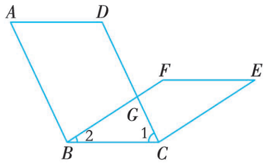


图 2-14

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AD = BC = 2$ cm，$\angle 1 = \angle A = 65°$.

$\because$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形，

$\therefore$ $EF = BC = 2$ cm，$\angle 2 = \angle E = 33°$.

$\therefore$ 在 $\triangle BGC$ 中，$\angle BGC = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 82°$.

例 2 如图 2-15，直线 l_1 与 l_2 平行，AB，CD 是 l_1 与 l_2 之间的任意两条平行线段. 试问：AB 与 CD 是否相等？为什么？

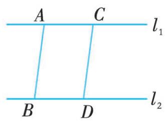


图 2-15

“探究”栏目注重探索和证明的有机结合. 首先要求学生根据定义画平行四边形，通过测量对边、对角大小，获得猜想，随后证明这个猜想. 这样的呈现方式体现了数学思维方式的全过程（观察、实验、探究→抽象→获得猜想→证明猜想→得到结论）.

证明过程中运用了平行四边形的定义. 作对角线是解决四边形问题常作的辅助线，通过作对角线，可以把未知的问题转化为已知的三角形问题.

例 1、例 2 是平行四边形性质定理的应用. 例 2 还可以得到“夹在两条平行线间的平行线段相等”的结论.

练习

1. $\angle A=142^\circ$，$\angle B=38^\circ$，
$\angle BCD=142^\circ$，$\angle D=38^\circ$.

2.（1）$\angle A=112^\circ$，$\angle C=112^\circ$，$\angle D=68^\circ$.

（2）$\square ABCD$的周长为10 cm.

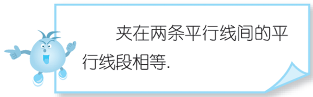
第2课时的重点是探究得出平行四边形一条重要的性质定理. 探究过程仍然注重探索与证明的有机结合，在“探究”中，可引导学生先测量有关线段，通过同学间的讨论获得猜想，然后再证明这个猜想.

探索过程也可采取剪下一个平行四边形纸片，将平行四边形绕对角线交点O旋转 180°，观察旋转后的结果来获得猜想，无论是哪种探索过程，都是落实课标提出的要求：“用合情推理获得猜想，发现结论；用演绎推理验证猜想、证明结论”，这一点必须引起教师的重视.

解 $\because$ $l_1 /\!/ l_2$，$AB /\!/ CD$，

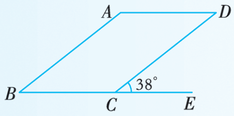
$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是平行四边形.

$\therefore$ $AB=CD$.

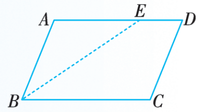


练习

1. 如图，$\square ABCD$ 的一个外角为 38°，求$\angle A$，$\angle B$，$\angle BCD$，$\angle D$ 的度数.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，在$\square ABCD$ 中，$\angle ABC=68^\circ$，BE 平分$\angle ABC$，交 AD 于点 E. $AB=2$ cm，$ED=1$ cm.

(1) 求$\angle A$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数；

(2) 求$\square ABCD$ 的周长.

探究

如图 2-16，已知$\square ABCD$ 两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，比较 OA，OC，OB，OD 的长度，有哪些线段相等？你能做出什么猜测？

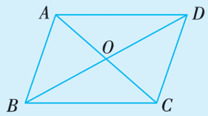
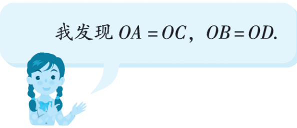
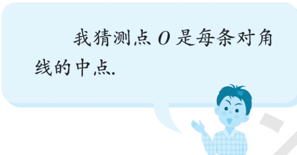


图 2-16





这个猜测正确吗？下面我们来进行证明.

如图 2–17，

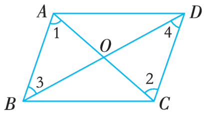


图 2–17

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel DC$，$AB = DC$，

∴ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

∴ $\triangle OAB \cong \triangle OCD$.

∴ $OA = OC$，$OB = OD$.

由此得到平行四边形的性质定理：

平行四边形的对角线互相平分.

例 3 如图 2–18，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC = 6$，$BD = 10$，$CD = 4.8$. 试求$\triangle COD$ 的周长.

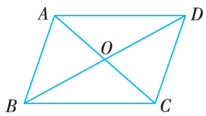


图 2–18

解 ∵ AC，BD 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线，

∴ $OC = \frac{1}{2}AC = 3$，$OD = \frac{1}{2}BD = 5$.

又 ∵ $CD = 4.8$，

∴ $\triangle COD$ 的周长为 $3 + 5 + 4.8 = 12.8$.

例 4 如图 2–19，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 O 的直线 MN 分别交 AD，BC 于点 M，N.

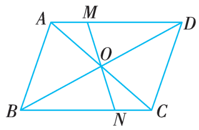


图 2–19

求证：点 O 是线段 MN 的中点.

证明 ∵ AC，BD 为▱$ABCD$ 的对角线，且相交于点 O，

∴ $OA = OC$.

∵ $AD \parallel BC$，

∴ $\angle MAO = \angle NCO$.

又 $\angle AOM = \angle CON$，

∴ $\triangle AOM \cong \triangle CON$.

∴ $OM = ON$.

∴ 点 O 是线段 MN 的中点.

例3、例4是平行四边形性质定理的应用，促使学生加深对“平行四边形的对角线互相平分”这一性质的理解.

学习完2.2.1节后，教师应帮助学生归纳总结平行四边形的性质，可按照边、角、对角线分类进行总结，提高学生归纳总结的能力.

补充例题

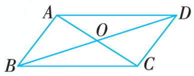
如上面教材图2–19，在▱$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，过点O的直线MN分别交AD，BC于点M，N，若AB=4，BC=5，OM=1.5，求四边形$MNCD$的周长.

练习

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$BC=10$ cm，$AC=8$ cm，$BD=14$ cm.

（1）求△AOD 的周长；

（2）△ABC 与△BCD 的周长哪个长？长多少？



(第 1 题图)

2. 平行四边形一条对角线的两个端点到另一条对角线的距离相等吗？为什么？

2.2.2 平行四边形的判定

动脑筋

从平移把直线变成与它平行的直线受到启发，你能不能从一条线段 AB 出发，画出一个平行四边形呢？

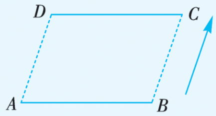


图 2-20

如图 2-20，把线段 AB 平移到某一位置，得到线段 DC，则可知 AB // DC，且 $AB=DC$. 由于点 A，B 的对应点分别是点 D，C，连接 AD，BC，由平移的性质：两组对应点的连线平行且相等，即 AD // BC. 由平行四边形的定义可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

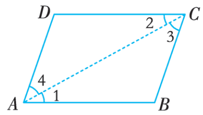


图 2-21

实际上，上述问题抽象出来就是：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形吗？如图 2-21，已知 AB // DC，且 $AB=DC$，如果连接 AC，也可证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，请你完成这个证明过程.

由此得到平行四边形的判定定理 1：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

练习

1.（1）△AOD的周长为21cm.

（2）△BCD的周长比△ABC的周长要长，长6 cm.

2. 相等.（提示：利用全等三角形对应边相等可得）

教学目标

1. 探索并证明平行四边形的判定定理：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

2. 会运用平行四边形的判定定理判定一个四边形是否为平行四边形.

除定义外，平行四边形有三个主要的判定定理，掌握这些判定方法是本小节的主体内容.

对于平行四边形的判定定理1，教材是运用图形的平移性质来推导的. 在教学中，应引导学生回顾平移的性质. 接下来，教材将“动脑筋”栏目中的问题抽象出命题形式，可要求学生写出已知、求证，并利用平行四边形的定义自己完成证明.

对于平行四边形的判定定理1，也可以这样证明：

如教材图2–21，连接AC.

∵ AB//DC，∴ ∠1=∠2.

又∵ $AB=DC$，$AC=CA$，

∴ △ABC≌△CDA (SAS).

∴ ∠3=∠4.

∴ BC//AD.

∴ 四边形$ABCD$是平行四边形.

例 5 如图 2-22，点 E，F 在▱$ABCD$ 的边 BC，AD 上，$BE=\frac{1}{3}BC$，$FD=\frac{1}{3}AD$，连接 BF，DE.

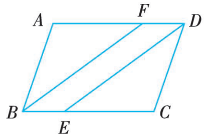


图 2-22

求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AD \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BC$.

∵ $BE=\frac{1}{3}BC$，$FD=\frac{1}{3}AD$，

∴ $BE=FD$.

又∵ $BE \mathbin{/\!/} FD$，

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

“$\underline{/\!/}$”读作“平行且等于”.

动脑筋

如图 2-23，用两支同样长的铅笔和两支同样长的钢笔能摆成一个平行四边形的形状吗？

把上述问题抽象出来就是：两组对边分别相等的四边形是平行四边形吗？

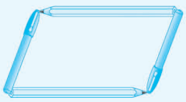


图 2-23

下面我们来证明这个结论.

如图 2-24，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，$AD=BC$，连接 AC.

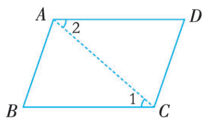


图 2-24

∵ $AB=CD$，$BC=DA$，$AC=CA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $\angle 1=\angle 2$.

则 $AD \mathbin{/\!/} BC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

由此得到平行四边形的判定定理 2：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

例5是一道综合运用平行四边形的性质与判定定理的例题，其目的是培养学生对平行四边形的性质定理与判定定理的综合运用能力.

在“动脑筋”栏目中，先应引导学生用合情推理获得这个四边形是平行四边形的猜想，然后用演绎推理的方法进行证明.

从证明过程可以看出，平行线和全等三角形的有关知识，仍是平行四边形的判定定理证明的基础.

例 6 如图 2-25，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明 $\because$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$，

$\therefore$ $AB = CD$，$BC = DA$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

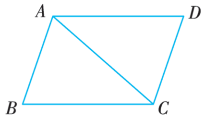
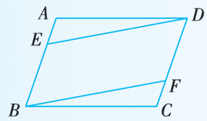


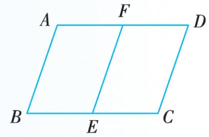
图 2-25

练习

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AE = CF$. 求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = BC$，$AB = DC$，E，F 分别是边 BC，AD 上的中点. 找出图中所有的平行四边形，并说明理由.

练习

1. $\because$ 在▱$ABCD$中，$AB \parallel DC$，

$\therefore BE \parallel FD$.

$\because AB = CD$，

又 $AE = CF$，

$\therefore BE = DF$.

$\therefore$ 四边形$EBFD$是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

2. ▱$ABCD$，▱$ABEF$，▱$ECDF$. 证明略.

动脑筋

观察图 2-26，从“平行四边形对角线互相平分”这一性质受到启发，你能画出一个平行四边形吗？

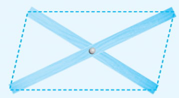


图 2-26

过点 O 画两条线段 AC，BD，使得 $OA = OC$，$OB = OD$.

连接 AB，BC，CD，DA，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，如图 2-27.

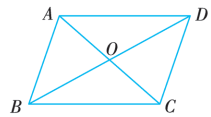


图 2-27

你能说出这样画出的四边形 $ABCD$ 一定是平行四边形的道理吗？

“动脑筋”栏目仍然是注重探索和证明的有机结合. 先从性质出发作一个四边形，然后证明这个四边形是平行四边形.

如图 2-27，在四边形 $ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$，

又　$\angle AOB=\angle COD$，

$\therefore$　$\triangle AOB \cong \triangle COD$.

$\therefore$　$AB=CD$，$\angle ABO=\angle CDO$.

从而　$AB \parallel CD$.

$\therefore$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由此得到平行四边形的判定定理 3：

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例 7 如图 2-28，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在 BD 上，且 $OE=OF$.

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

证明　$\because$　四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$　$OA=OC$.

又 $\because$　$OE=OF$，

$\therefore$　四边形 $AECF$ 是平行四边形.

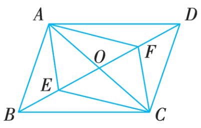


图 2-28

例7是判定定理3的应用. 这类问题有一定的典型性，教师可适当补充该类型例题.

例 8 如图 2-29，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明　$\because$　$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$，

$\therefore$　$\angle A+\angle B=\dfrac{360°}{2}=180°$.

$\therefore$　$AD \parallel BC$，

同理，$AB \parallel DC$.

$\therefore$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

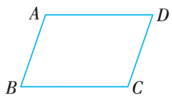


图 2-29

由例 8 可以得到，两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

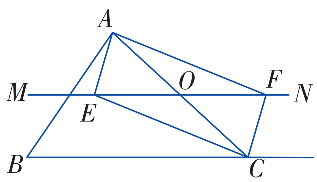
例8的证明需用到平行四边形的定义，它的结论实际上也是一条平行四边形的判定方法.

补充例题（开放探究型问题）

如图，$\triangle ABC$中，点O是AC边上的一个动点，过点O作直线$MN \parallel BC$交$\angle ACB$的平分线于点E，交$\angle ACB$的外角平分线于点F.

（1）请说明$EO=FO$.

（2）当点O在AC上运动到何处时，四边形$AECF$是平行四边形？并说明理由.（提示：运动到AC的中点.）



1. 不一定是平行四边形.

2. 不一定是平行四边形.例如等腰梯形就是满足所述条件的多边形，但不是平行四边形.

学完“议一议”栏目后，教师应引导学生梳理学过的平行四边形的判定方法.

平行四边形的概念、性质、判定都是非常重要的基础知识，都是本章的重点内容，要让学生熟练掌握这些基础知识.

关于平行四边形的应用包括三个方面：一是直接运用平行四边形的性质去解决一些求角的度数、线段的长度，证明角相等或互补，证明线段相等或倍分等；二是判定一个四边形是平行四边形，从而判定直线平行等；三是先判定一个四边形是平行四边形，然后再利用其性质去解决某些问题.

同时，还应向学生强调：应直接运用平行四边形的性质和判定定理去解决问题，凡是可以直接运用平行四边形知识证明的问题，不要再回到用三角形全等证明.

议一议

1. 两组邻边分别相等的四边形一定是平行四边形吗？如果是，请说明理由；如果不是，请举出反例.

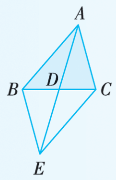
2. 一组对边相等，另一组对边平行的四边形一定是平行四边形吗？如果是，请说明理由；如果不是，请举出反例.

对于第 1 题，我能想到这个图形.

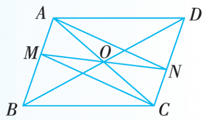
对于第 2 题，我能想到这个图形.

练习

1. 如图，把$\triangle ABC$的中线AD延长至E，使得$DE=AD$，连接EB，EC.
求证：四边形$ABEC$是平行四边形.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，▱$ABCD$的对角线相交于点O，直线MN经过点O，分别与AB，CD交于点M，N，连接AN，CM.
求证：四边形$AMCN$是平行四边形.

练习

1. $\because AE$与BC互相平分且为四边形$ABEC$的对角线，

$\therefore$ 四边形$ABEC$是平行四边形.

2. 在$\triangle AMO$和$\triangle CNO$中，

$\because AO=CO$，

$\angle AOM=\angle CON$（对顶角），

$\angle MAO=\angle NCO$，

$\therefore \triangle AMO \cong \triangle CNO$(ASA).

$\therefore MO=NO$.

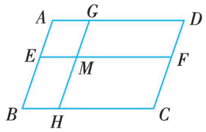
即AC与MN互相平分，且是四边形$AMCN$的对角线，

$\therefore$ 四边形$AMCN$是平行四边形.

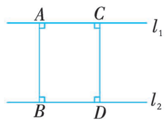
习题 2.2

A 组

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$EF\parallel AD$，在 AD 边上取一点 G，过点 G 作直线 $GH\parallel AB$，分别与 EF，BC 相交于点 M，H. 问图中有多少个平行四边形？试找出所有与$\angle A$ 相等的角.



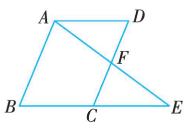
(第 1 题图)



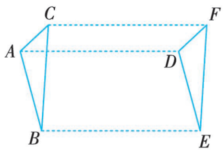
(第 2 题图)

2. 如图，$l_1\parallel l_2$，AB，CD 都是 l_1 与 l_2 的公垂线段. 你能讲出“两平行线的所有公垂线段都相等”的道理吗？

3. 如图，C 为 BE 的中点，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，AE 与 CD 相交于点 F. 求证：$AF=EF$.



(第 3 题图)



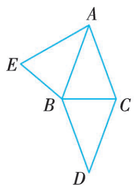
(第 4 题图)

4. 如图，向右平移 3 个单位，$\triangle ABC$ 的像是$\triangle DEF$，连接 AD，BE，CF. 找出图中所有的平行四边形，并说明理由.

5. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰三角形（其中 $AB>BC$），把它沿底边 BC 翻折，得到$\triangle DBC$.

（1）四边形 $ABDC$ 是平行四边形吗？为什么？

（2）如果把图中的等腰三角形 ABC 沿一条腰 AB 翻折，得到$\triangle AEB$，四边形 $AEBC$ 是平行四边形吗？



(第 5 题图)

习题2.2

A组

1. 有9个平行四边形.

与 $\angle A$ 相等的角有 $\angle C$，$\angle EMG$，$\angle BHG$，$\angle EFD$，$\angle BEM$，$\angle MGD$，$\angle HMF$.

2. $\because l_1\parallel l_2$，

$\therefore AC\parallel BD$.

又 $AB\perp l_2$，$CD\perp l_2$，

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$为平行四边形.

$\therefore AB=CD$.

3. 在▱$ABCD$中，

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle D=\angle DCE$，$\angle DAF=\angle CEF$.

又 $AD=BC=CE$，

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ECF$.

$\therefore AF=EF$.

4. 四边形 $ABED$，$ADFC$，$BEFC$都为平行四边形.

证明：在四边形$ABED$中，

$\because AB=ED$，$AD=BE$，

$\therefore$ 四边形$ABED$为平行四边形.

同理可证四边形$ADFC$，$BEFC$为平行四边形.

5.（1）四边形$ABDC$是平行四边形.

$\because AC=AB=BD=DC$，

$\therefore$ 四边形$ABDC$是平行四边形.

（2）不是.

6. 连接BD，交AC于点O.

$\because AE=CF$，

$\therefore OE=OF$.

又 $OB=OD$，

又 BD，EF是四边形$EBFD$的对角线，

$\therefore$ 四边形$EBFD$为平行四边形.

B组

7. $\square ABCD$的面积为24，可以证明图中红色部分与白色部分的面积相等，故红色部分的面积为12.

8. (1) 四边形$ADEF$，$BEFD$，$CFDE$为平行四边形.

$\because \begin{cases} DE /\!/ AC, \\ EF /\!/ BA, \end{cases} \therefore \begin{cases} DE /\!/ AF, \\ EF /\!/ DA. \end{cases}$

$\therefore$ 四边形$ADEF$是平行四边形.

同理可证，四边形$BEFD$，$CFDE$为平行四边形.

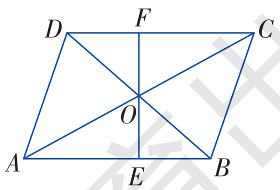
(2) $\angle DEF=\angle A$，$\angle EFD=\angle B$，$\angle FDE=\angle C$. 理由略（提示：利用平行四边形对角相等可得）.

(3) 由(1)可知：$AD=EF=BD$，$BE=DF=EC$，$AF=DE=FC$.

$\therefore D$，E，F分别是AB，BC，CA的中点.

9. 如图所示，在$\square ABCD$中，AC与BD相交于点O，EF过点O且与AB和CD都垂直，则OE，OF分别是点O到AB与CD的距离.

可以通过证明$\triangle AEO \cong \triangle CFO$，从而得$OE=OF$.



（第 9 题图）

10. $\because AE \perp BD$于点E，$CF \perp BD$于点F，

$\therefore AE /\!/ FC$.

在$Rt\triangle AEB$和$Rt\triangle CFD$中，

$\because AB=CD$，$\angle ABE=\angle CDF$，

$\therefore Rt\triangle AEB \cong Rt\triangle CFD$（AAS）

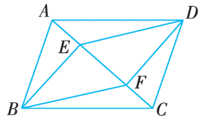
$\therefore AE=CF$.

$\because AE /\!/ FC$，$AE=CF$，

$\therefore$ 四边形$AECF$为平行四边形.

6. 如图，已知E，F是$\square ABCD$对角线AC上的两点，并且$AE=CF$.

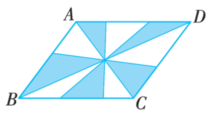
求证：四边形$EBFD$是平行四边形.



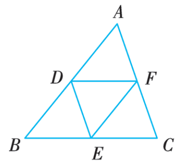
（第 6 题图）

B 组

7. 如图，在$\square ABCD$中，AC，BD为对角线，$BC=6$，BC边上的高为4，求图中红色部分的面积.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E，F分别是边AB，BC，CA上的点，且$DE /\!/ AC$，$FE /\!/ AB$，$DF /\!/ BC$.

(1) 找出图中所有的平行四边形，并说明理由；

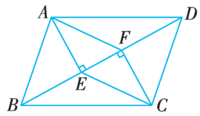
(2) $\triangle DEF$的三个角分别与$\triangle ABC$的哪个角相等？为什么？

(3) 说明D，E，F分别是AB，BC，CA的中点.

9. 证明：平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等.

10. 如图，在$\square ABCD$中，$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为点E，F.

求证：四边形$AECF$是平行四边形.



（第 10 题图）

2.3 中心对称和中心对称图形

如图 2-30，在平面内，将△OAB 绕点 O 旋转180°，所得到的像是△OCD. 从这个例子我们引出下述概念：

在平面内，把一个图形上的每一个点 P 对应到它在绕点 O 旋转 180°下的像 P'，这个变换称为关于点 O **中心对称**（central symmetry）.

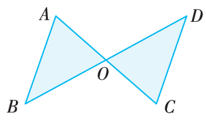


图 2-30

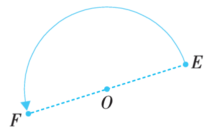


图 2-31

如图 2-31，在平面内，把点 E 绕点 O 旋转180°，得到点 F，此时称点 E 和点 F 关于点 O 对称，也称点 E 和点 F 是一对对应点. 由于点 E，O，F 在一条直线上，且 $OE=OF$，因此点 O 是线段 EF 的中点. 反之，如果点 O 是线段 EF 的中点，那么点 E 和点 F 关于点 O 对称.

在平面内，如果一个图形 G 绕点 O 旋转 180°，得到的像与另一个图形 G' 重合，那么称这两个图形关于点 O 中心对称，点 O 叫作**对称中心**. 此时，图形 G 上每一个点 E 与它在图形 G' 上的对应点 F 关于点 O 对称，从而点 O 是线段 EF 的中点.

由此得到下述性质：

> 成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

例 如图 2-32，已知△ABC 和点 O，求作一个△$A'B'C'$，使它与△ABC 关于点 O 成中心对称.

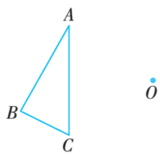


图 2-32

作法 （1）连接 AO 并延长 AO 到 A'，使 $OA'=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对应点 A'.

（2）用同样的方法作出点 B 和 C 关于点 O 的对应点

教学目标

1. 了解中心对称、中心对称图形.

2. 探索它的基本性质：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

3. 能识别一个平面图形是否为中心对称图形.

教学重点、难点

教学重点：中心对称与中心对称图形的性质.

教学难点：中心对称图形基本性质的探究.

教材首先介绍旋转变换下一种特殊的变换——中心对称. 需要说明的是，中心对称的概念仅作了解，学生不必记忆并深刻理解.

接着教材介绍了两点关于点 O 对称及对应点的概念，这将为介绍两个图形关于点 O 成中心对称打下铺垫（因为图形是由点组成）. 同时，还介绍了两点关于点 O 对称的有关性质.

最后，教材介绍了两个图形关于点 O 成中心对称的概念及其性质. 这是本节课的核心.

教师应结合教材文字，画图解释成中心对称的两个图形的性质. 例如，在图形 G 上任取一点 E，它在绕点 O 旋转180°下得到点 F，显然点 E 和点 F 是一对对应点，这两点的连线经过对称中心 O，且 $OE=OF$. 由于在图形 G 上取的是任一点，可知成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

例题是画出与已知图形关于已知点成中心对称的图形. 一般地，只需画出这个图形的各个顶点关于已知点的对称点，再顺次连接各点即可，画法的依据是成中心对称的两个图形的性质.

练习

1. (1) √；

(2) ×.

2. 画图略.

3. 连接对应点A与A'，B与B'，则连线的交点O，即为对称中心.

B'和C'.

(3) 连接$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$.

则$\triangle A'B'C'$即为所求作的三角形，如图 2-33.

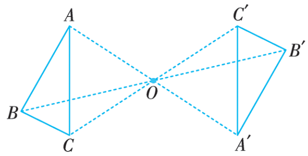


图 2-33

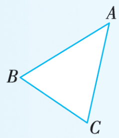
练习

1. 判断（对的画"√"，错的画"×"）：

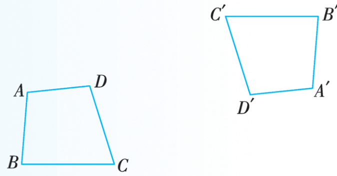
(1) 线段AB的中点O是点A与点B的对称中心. ( )

(2) 等边三角形ABC的三条中线的交点是点A与点B的对称中心. ( )

2. 画出$\triangle ABC$关于点A成中心对称的图形.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 如图，四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$关于某点中心对称，找出它们的对称中心.

观察

如图 2-34，将线段AB绕它的中点O旋转 180°，你有什么发现?

图 2-34

我发现线段AB绕它的中点O旋转 180°后，与它自身重合.

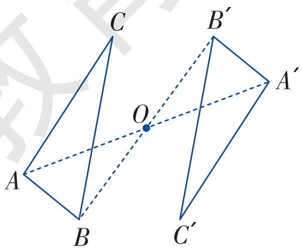
第2节课介绍中心对称图形.

教材首先从"观察"栏目入手，探索一条线段绕其中点O旋转180°，结果发现旋转后的像与自身重合，由此引出中心对称图形的概念. 在这里要强调中心对称与中心对称图形的区分：中心对称是一种旋转变换，而中心对称图形是指一个图形的性质.

补充例题

如图所示，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$，且$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，试问这两个三角形是否成中心对称? 若是，请画出对称中心.

(提示：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 由四边形$ABA'B'$是平行四边形，可得$AO=A'O$，$BO=B'O$.同理，可得$CO=C'O$.)



像这样，如果一个图形绕一个点 O 旋转 180°，所得到的像与原来的图形互相重合，那么这个图形叫作**中心对称图形**（central symmetry figure），这个点 O 叫作它的**对称中心**.

由上可得：线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心.

做一做

如图 2-35，▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，则 $OA=OC$，$OB=OD$. 把▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，则：

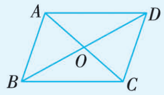


图 2-35

（1）点 A 的像是______；（2）点 B 的像是______；

（3）边 AB 的像是______；（4）点 C 的像是______；

（5）边 BC 的像是______；（6）点 D 的像是______；

（7）边 CD 的像是______；（8）边 DA 的像是______.

从上述结果看出，▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，它的像与自身重合，因此

平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

动脑筋

你能利用平行四边形是中心对称图形，将其绕对称中心旋转 180°，来理解平行四边形的性质吗？

说一说

图 2-36 是一行英文字母，其中哪些字母可看作是中心对称图形？

Z X C V B N M

图 2-36

做一做

（1）点C；（2）点D；

（3）边CD；（4）点A；

（5）边DA；（6）点B；

（7）边AB；（8）边BC.

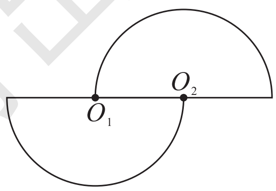
“做一做”栏目应鼓励学生动手操作，通过探索来找点或线段的像，可以发现▱$ABCD$绕点O旋转180°后，顶点A，B，C，D的像分别是顶点C，D，A，B；边AB，BC，CD，DA的像分别是边 CD，DA，AB，BC，因此▱$ABCD$的像与自身重合，由中心对称图形的定义可知▱$ABCD$是中心对称图形，对角线的交点O是它的对称中心.

有了这个基础，我们可以直观地看出平行四边形对边相等、对角相等、对角线互相平分.

字母Z、X、N可看作是中心对称图形.

补充例题

如图，O_1、O_2分别是两个半圆的圆心，这个图形是中心对称图形吗？如果不是，请说明理由；如果是，请指出对称中心.



资源拓展

在平面几何里，平移、轴对称（又称轴反射）、旋转（包括中心对称）这些几何变换属于点到点的变换 .

将一个平面内的点变换成这个平面内的点的变换就是点到点的变换. 变换前的点叫作这个变换的原像，变换后的点叫作这个变换的像，并且每一个原像只对应唯一的像，每一个像只有唯一的原像 .

练习

1. 略.

2. (1)、(2)是中心对称图形，图(1)中的各条线段的公共交点、图(2)的圆心分别是它们的对称中心．(3)不是中心对称图形.

习题2.3

A组

1. 略.

2. 正三角形不是中心对称图形，正六边形、正八边形是中心对称图形，找中心略.

B组

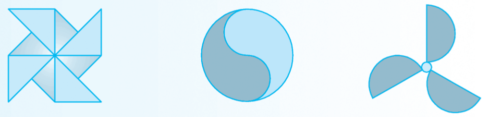
3. A

4. 点D所转过的路径长为2π cm，即6.28 cm.

练习

1. 试举出生活中一些中心对称图形的例子.

2. 下列图形中，哪些是中心对称图形？如果是，找出它们的对称中心.

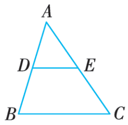


(第 2 题图)

习题 2.3

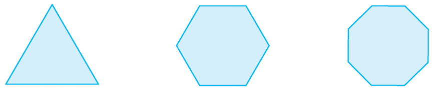
A 组

1. 如图，已知$\triangle ABC$，点D，E为AB，AC的中点，试以顶点E为对称中心，作一个与$\triangle ADE$成中心对称的图形.



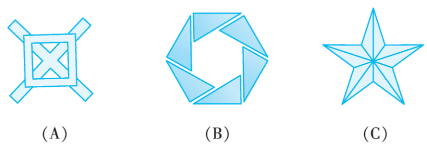
(第 1 题图)

2. 如图是正三角形、正六边形、正八边形，它们是中心对称图形吗？如果是，找出它们的对称中心.

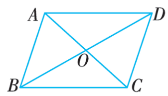

(第 2 题图)

B 组

3. 下列图形中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的有（　）



(第 3 题图)



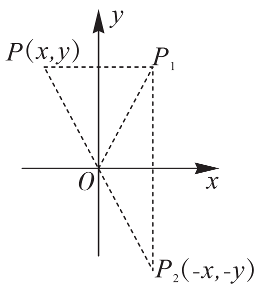
(第 4 题图)

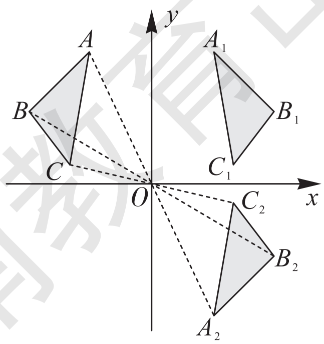
4. 如图，$\square ABCD$的对角线$BD=4$ cm，将$\square ABCD$绕其对称中心旋转180°，求点D所转过的路径长.

资源拓展

轴对称与中心对称的关系

向两条垂直相交（交点为O）的对称轴作两次轴对称变换相当于关于点O的中心对称.





事实上，在平面几何里，平移、旋转、中心对称都可以由轴对称完成.

2.4 三角形的中位线

连接三角形两边中点的线段叫作三角形的**中位线**.

如图 2-37，D，E，F 分别为 $\triangle ABC$ 三边中点，所以，DF，DE，EF 分别是三角形的三条中位线.

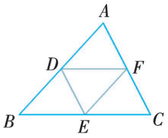


图 2-37

探究

如图 2-38，EF 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线.

$EF \parallel BC$ 吗？量一量 EF 与 BC 的长各是多少？你能猜测出 EF 和 BC 具有怎样的位置关系和数量关系吗？为什么？

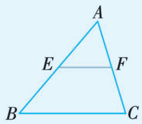
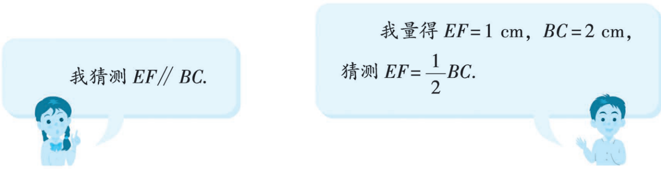


图 2-38



这些猜测正确吗？我们来进行证明.

如图 2-39，将 $\triangle AEF$ 绕点 F 旋转 180°，设点 E 的像为点 G，易知点 A 的像是点 C，点 F 的像还是点 F，且 E，F，G 在一条直线上.

由于旋转不改变图形的形状和大小，所以有

$CG=AE=BE$，$GF=EF$，$\angle G=\angle AEF$.

则 $EA \parallel CG$，即 $BE \parallel CG$.

$\therefore$ 四边形 $BCGE$ 是平行四边形.

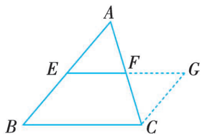


图 2-39

教学目标

1. 了解三角形中位线的概念.

2. 探索并证明三角形的中位线定理.

3. 会运用三角形的中位线定理进行简单的推理与计算.

教学重点、难点

教学重点：三角形的中位线定理及其应用.

教学难点：三角形的中位线定理的探索与证明.

本章重点学习三角形的中位线定理，这是三角形一个重要的性质定理. 教材首先介绍三角形的中位线定义，注意提醒与三角形中线的区分.

“探究”栏目注重探索与证明的有机结合，鼓励学生在探索的基础上获得猜想，然后对猜想进行证明.

在证明过程中，课本利用旋转变换，将 $\triangle AEF$ 绕点 F 旋转 180°，得到 ▱$BCGE$，再利用平行四边形的性质进行推导，得到三角形的中位线定理.（当然，传统的将中位线延长一倍的方法也能达到同样的证明效果.）

三角形的中位线定理有一个特点：在同一题设下，有两个结论，一个结论是表明位置关系的，另一个结论是表明数量关系的.

∴　$EG \perp\!\!\!\!= BC$.

又∵　$EF=FG$，

∴　$EF=\frac{1}{2}EG=\frac{1}{2}BC$.

从而　$EF \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC$.

由此得到三角形的**中位线定理**：

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

在例题的教学中，要启发学生作辅助线，例题的解答中是连接AC，教师还可以提问：连接BD可以吗？

例　如图 2–40，顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点 E，F，G，H，得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗？为什么？

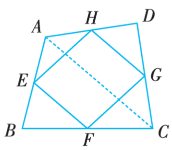


图 2–40

解　连接 AC.

∵　EF 是△ABC 的一条中位线，

∴　$EF \parallel AC$，且 $EF=\frac{1}{2}AC$.

又∵　HG 是△DAC 的一条中位线，

∴　$HG \parallel AC$，且 $HG=\frac{1}{2}AC$.

∴　$EF \parallel HG$，且 $EF=HG$.

∴　四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

练习

1. △DEF的周长为5.2 cm.

2. (1)四边形$ADEF$是平行四边形.

∵ $DE=\frac{1}{2}AC=AF$,

$EF=\frac{1}{2}AB=AD$,

∴四边形$ADEF$为平行四边形.

(2) 是.

∵ $DE+EF+FA+AD=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AB=AB+AC$.

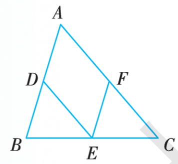
练习

1. 已知△ABC 各边的长度分别为 3 cm，3.4 cm，4 cm，求连接各边中点所构成的△DEF 的周长.

2. 如图，△ABC 的边 AB，BC，CA 上的中点分别是 D，E，F.

(1) 四边形 $ADEF$ 是平行四边形吗？为什么？

(2) 四边形 $ADEF$ 的周长等于 $AB+AC$ 吗？为什么？

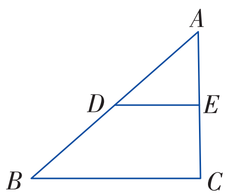


(第 2 题图)

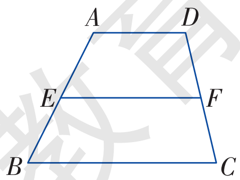
补充例题

1. 已知三角形三条中位线的比为 3∶5∶6，三角形的周长是 112 cm，求三条中位线的长.

2. 如图，在△ABC中，DE是△ABC的中位线，△ABC的面积是8，求四边形$DBCE$的面积.



（第 2 题图）



（第 3 题图）

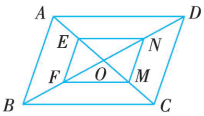
3. 如图，在梯形 $ABCD$中，$AD \parallel BC$，点E，F分别是AB，CD的中点，我们把线段EF称为梯形$ABCD$的中位线，通过观察、测量，猜想EF和AD，BC有怎样的位置关系和数量关系，并证明你的结论.

习题 2.4

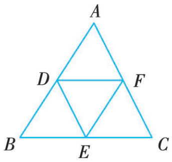
A 组

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F，M，N 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点.

求证：四边形 $EFMN$ 是平行四边形.



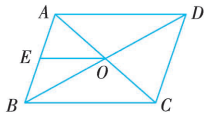
(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，点 D，E，F 分别为△ABC 三边的中点，若△DEF 的周长为 10，求△ABC 的周长.

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 是 AB 的中点，OE=3 cm，求 AD 的长.



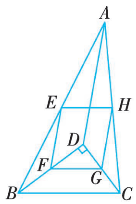
(第 3 题图)

B 组

4. 三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分吗？为什么？

5. 证明：过三角形一边中点与另一边平行的直线必平分第三边.

6. 如图，D 是△ABC 内一点，$BD\perp CD$，AD=6，BD=4，CD=3，点 E，F，G，H 分别是 AB，BD，CD，AC 的中点，求四边形 $EFGH$ 的周长.



(第 6 题图)

习题2.4

A组

1. ∵$EF=\frac{1}{2}AB$，$MN=\frac{1}{2}CD$，$AB=CD$，

∴ $EF=MN$.

同理$FM=EN$.

∴ 四边形$EFMN$是平行四边形.

2. △ABC的周长为20.

3. 在△ABD中，E，O分别是边AB，BD的中点.

∴ $OE=\frac{1}{2}AD$，即$AD=2OE$.

又 OE=3 cm，

∴ AD=6 cm.

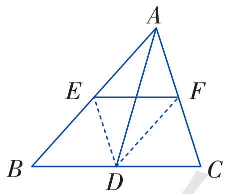
B组

4. 如图，EF是△ABC的中位线，AD是BC边上的中线.

连接ED和DF，则$DF=AE$，$DE=AF$.

∴ 四边形$AEDF$是平行四边形.

∴ AD与EF互相平分.



(第 4 题图)

5. 已知：如图，在△ABC中，D是AB的中点，$DE\parallel BC$交AC于点E. 求证：$AE=EC$.

证明：作$EF\parallel AB$交BC于点F，连DF，作$AH\parallel BF$，交FE的延长线于点H.

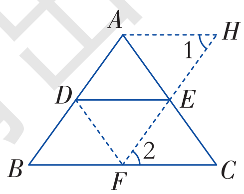
则易得四边形$ADEH$，$DBFE$为平行四边形.

∴ $AD=EH$，$DB=EF$.

又 ∵ $AD=DB$，∴ $EH=EF$.

而∠1=∠2，∠AEH=∠CEF，

∴△AEH≌△CEF. ∴ $AE=EC$.



(第 5 题图)

6. 在Rt△BDC中，∵ BD=4，CD=3，由勾股定理得BC=5. ∴ $FG=\frac{1}{2}BC=2.5$.

在△ADC中，H，G分别是AC，DC的中点，∴ $GH=\frac{1}{2}AD=3$.

同理可得：$EF=\frac{1}{2}AD=3$，$EH=\frac{1}{2}BC=2.5$. ∴四边形$EFGH$的周长为11.

教学目标

1. 理解矩形的概念，以及矩形与平行四边形的关系.

2. 探索并证明矩形的性质定理：矩形的四个角都是直角；矩形对角线相等.

3. 会用矩形的性质定理进行推理和计算.

4. 理解矩形是中心对称图形，对角线交点是它的对称中心；矩形是轴对称图形，过每组对边的中点的直线都是矩形的对称轴.

教学重点、难点

教学重点：矩形的性质定理及其应用.

教学难点：探索并证明性质定理“矩形的对角线相等”以及“矩形是轴对称图形，过每一组对边中点的直线都是矩形的对称轴”.

2.5节的主要内容是矩形的概念、性质和判定，其中性质还包括知道矩形的中心对称性质以及探索矩形的轴对称性质.

2.5 矩 形

2.5.1 矩形的性质

观察

在小学，我们初步认识了长方形，观察图 2-41 中的长方形，它是什么平行四边形吗？它有什么特点呢？

图 2-41

我发现这些长方形的对边平行且相等，因此，它们是平行四边形.

我发现这些四边形的四个角都是直角.

在一个平行四边形中，只要有一个角是直角，那么其他三个角都是直角.

有一个角是直角的平行四边形叫作**矩形**（rectangle），也称为长方形.

平行四边形 $\xrightarrow{\text{有一个角是直角}}$ 矩形

可以知道：

矩形的四个角都是直角，对边相等，对角线互相平分.

“观察”栏目呈现的两张图片是学生熟悉的，教师应引导学生观察这类实物图片，讨论长方形的特征. 在此基础上，教材给出了矩形的定义. 由定义可知矩形是特殊的平行四边形，它的特殊之处是有一个角是直角.

值得指出的是，教材呈现了矩形的部分简单性质（黑体字），建议教师组织学生对这些性质的得出作简单的说理.

由于矩形是平行四边形，因此

矩形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

动脑筋

如图 2-42，四边形 $ABCD$ 为矩形，那么对角线 AC 与 DB 相等吗？

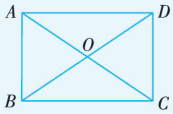


图 2-42

如图 2-42，四边形 $ABCD$ 是矩形，于是有

$AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB=90°$，$BC=CB$.

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore$ $AC=DB$.

由此得到矩形的性质：

矩形的对角线相等.

例 1 如图 2-43，矩形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$AC=4$ cm，$\angle AOB=60°$. 求 BC 的长.

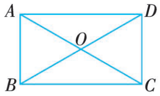


图 2-43

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore$ $OA=OB=\frac{1}{2}AC=2$ cm.

又 $\angle AOB=60°$，

$\therefore$ $\triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore$ $AB=OA=2$ cm.

$\because$ $\angle ABC=90°$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ (cm).

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可由矩形的性质得出，参见本节课“练习”第2题.

例1是矩形的性质应用，教学中可适当补充例题.

“做一做”栏目对应《课标》的要求：探索矩形的轴对称性质，这是本节课的难点.

矩形是轴对称图形很直观，但真正证明其是轴对称图形是有一定难度的.建议教师可让学生先用矩形纸片进行折叠，由此推断其对称轴. 然后阅读课文，进一步理解为什么矩形是轴对称图形的道理.

练习

1. 矩形的长为 $\sqrt{3}$ cm，宽是1 cm.

2. $\because BD$，AC是矩形$ABCD$的对角线，

$\therefore BD=AC.$

$\therefore BO=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}AC.$

做一做

画出一个矩形 $ABCD$（如图 2-44），把它剪下来，怎样折叠能使矩形在折痕两旁的部分互相重合？满足这个要求的折叠方法有几种？由此猜测：矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？你的猜测正确吗？

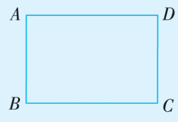


图 2-44

如图 2-45，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，过点 O 作直线 $EF\perp BC$，且分别与边 BC，AD 相交于点 E，F. 由于 $OB=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}AC=OC$，因此△$OBC$ 是等腰三角形，从而直线 EF 是线段 BC 的垂直平分线.

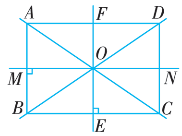


图 2-45

由于 $AD/\!/BC$，因此 $EF\perp AD$. 同理，直线 EF 是线段 AD 的垂直平分线.

因此点 B 和点 C 关于直线 EF 对称，点 A 和点 D 关于直线 EF 对称，从而在关于直线 EF 的轴反射下，矩形 $ABCD$ 的像与它自身重合，因此矩形 $ABCD$ 是轴对称图形，EF 是它的一条对称轴.

类似地，过点 O 作直线 $MN\perp AB$，且分别与边 AB，DC 相交于点 M，N，则点 M，N 分别是边 AB，DC 的中点，直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的一条对称轴.

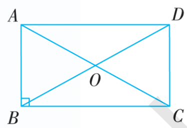
由此得到：

矩形是轴对称图形，过每一组对边中点的直线都是矩形的对称轴.

练习

1. 已知矩形的一条对角线的长度为 2 cm，两条对角线的一个夹角为 60°，求矩形的各边长.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，试利用矩形的性质证明：直角三角形 ABC 斜边 AC 上的中线 BO 等于斜边的一半.



(第 2 题图)

2.5.2 矩形的判定

动脑筋

矩形的四个角是直角，那么，四个角是直角的四边形是矩形吗？三个角是直角呢？两个角是直角呢？

如图 2-46，四边形 $ABCD$ 的四个角都是直角. 由于“同旁内角互补，两直线平行”，因此 $AB // DC$，$AD // BC$，从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以$\square ABCD$ 是矩形. 由此得到四个角是直角的四边形是矩形.

图 2-46

三个角是直角的四边形，容易知道另一个角也是直角，由此得到：

三个角是直角的四边形是矩形.

四边形中只有两个角是直角，我想到了右边的图形：

动脑筋

从“矩形的两条对角线相等且互相平分”这一性质受到启发，你能画出一个对角线长度为 4 cm 的矩形吗？这样的矩形有多少个？

过点 O 画两条线段 AC，BD，使得 $OA=OC=2$ cm，$OB=OD=2$ cm. 连接 AB，BC，CD，DA. 则四边形 $ABCD$ 是矩形，且它的对角线长度为 4 cm，如图 2-47. 这样的矩形有无穷多个.

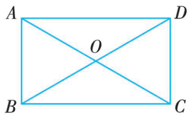


图 2-47

你能说出这样画出的四边形一定是矩形的道理吗？

教学目标

1. 探索并证明矩形的判定定理：

三个角是直角的四边形是矩形.

对角线相等的平行四边形是矩形.

2. 会运用矩形的判定定理判定一个四边形是矩形.

教学重点、难点

教学重点：矩形的判定定理及其应用.

教学难点：判定定理“对角线相等的平行四边形是矩形”的探索与证明.

除了矩形的定义外，矩形的判定方法主要有两条，本节课重点学习矩形的判定方法.

第一个“动脑筋”栏目从“角”的角度，探索矩形的判定方法，得到“四个角是直角的四边形是矩形”，“三个角是直角的四边形是矩形”，而两个角是直角的四边形则可以举出不是矩形的反例. 其探索过程不难，建议教师借此培养学生发现问题和提出问题的能力，同时可鼓励学生根据条件举出不是矩形的反例，从而加深对问题的理解.

第2个“动脑筋”栏目从“对角线”的角度来探索矩形的判定. 首先要求学生根据已知条件及矩形的性质画矩形，这样画出的图形有无数个，接着证明这样画出的四边形是矩形.

对于“对角线相等的平行四边形是矩形”这一判定定理，要强调两个条件：一是平行四边形；二是两条对角线相等. 特别是第一个条件容易被记忆成“四边形”，因此教材安排“议一议”栏目，以帮助学生加深对这条判定定理的理解.

对角线相等的四边形不一定是矩形. 如等腰梯形的两条对角线相等，但它不是矩形.

例2是矩形判定和性质的应用，教师可针对学生情况适当补充对应的例题.

如图 2-47，由画法可知，四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相平分，因此它是平行四边形，又已知其对角线相等，上述问题抽象出来就是：对角线相等的平行四边形是矩形吗？

我们来进行证明.

在▱$ABCD$ 中，由于 $AB=DC$，$AC=DB$，$BC=CB$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

∴ $\angle ABC=\angle DCB$.

又∵ $\angle ABC+\angle DCB=180°$，

∴ $\angle ABC=90°$.

∴ ▱$ABCD$ 是矩形.

由此得到矩形的判定定理：

对角线相等的平行四边形是矩形.

议一议

对角线相等的四边形是矩形吗？

例 2 如图 2-48，在▱$ABCD$ 中，它的两条对角线相交于点 O.

(1) 如果▱$ABCD$ 是矩形，试问：$\triangle OBC$ 是什么样的三角形？

(2) 如果 $\triangle OBC$ 是等腰三角形，其中 $OB=OC$，那么▱$ABCD$ 是矩形吗？

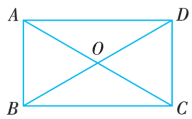


图 2-48

解 (1) ∵ ▱$ABCD$ 是矩形，

∴ AC 与 DB 相等且互相平分.

∴ $OB=\frac{1}{2}DB=\frac{1}{2}AC=OC$.

∴ $\triangle OBC$ 是等腰三角形.

(2) ∵ $\triangle OBC$ 是等腰三角形，其中 $OB=OC$，

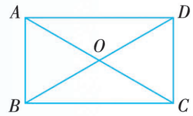
∴ $AC=2OC=2OB=BD$.

∴ ▱$ABCD$ 是矩形.

练习

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

(第 1 题图)



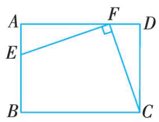
(第 2 题图)

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB=60°$，$AB=2$，$AC=4$，求▱$ABCD$ 的面积.

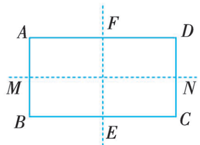
习题 2.5

A 组

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是 AB 上一点，F 是 AD 上一点，$EF\perp FC$，且 $EF=FC$，$DF=4$ cm，求 AE 的长.



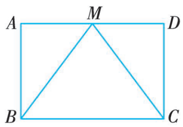
(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图，矩形 $ABCD$ 被它的两条对称轴 MN，FE 分成四个小四边形，它们都是矩形吗？为什么？

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，M 为 AD 的中点，$BM=CM$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



(第 3 题图)

练习

1. ∵四边形$ABCD$的内角和为$360°$，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\dfrac{360°}{4}=90°$.

∴ 四边形$ABCD$是矩形.

2. ∵ $AB=2$，$AO=\dfrac{1}{2}AC=2$，$\angle AOB=60°$，

∴ $\triangle AOB$为等边三角形.

∴ $BO=2$，$BD=2BO=4$.

∴ $AC=BD$.

∴ ▱$ABCD$是矩形.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴ ▱$ABCD$的面积为$4\sqrt{3}$.

习题2.5

A组

1. ∵$EF\perp FC$，

∴ $\angle AFE+\angle DFC=90°$.

又$\angle DCF+\angle DFC=90°$，

∴$\angle DCF=\angle AFE$.

又$\angle A=\angle D=90°$，$EF=FC$，

∴ Rt$\triangle FAE\cong$Rt$\triangle CDF$.

∴ $AE=DF=4$ cm.

2. 它们都是矩形，理由略.

3. ∵ M为AD的中点，∴ $AM=DM$.

又 $AB=DC$，$BM=CM$，

∴ $\triangle MAB\cong\triangle MDC$，∴ $\angle A=\angle D$.

在▱$ABCD$中，$\angle A=\angle BCD$，$\angle D=\angle ABC$，

∴ $\angle A=\angle ABC=\angle BCD=\angle D$.

∵ ▱$ABCD$的内角和为$360°$，

∴ $\angle A=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90°$.

∴ 四边形$ABCD$是矩形.

4. $\because AO=OC$，$BO=OD$，

且 AC，BD 是四边形 $ABCD$ 的两条对角线，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $BO=\dfrac{1}{2}AC$，

$\therefore AC=2BO=BD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

B组

5. 连接 BE，易得 $\mathrm{Rt}\triangle EOB\cong\mathrm{Rt}\triangle EOD$，$\therefore BE=DE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 中，

$AB^2+AE^2=BE^2=DE^2$，

$\therefore 3^2+AE^2=(4-AE)^2$，

$\therefore 9+AE^2=16-8AE+AE^2$，

$\therefore AE=\dfrac{7}{8}$ cm.

6. $\because AD/\!/BC$，

$\therefore \angle DAB+\angle ABC=180°$.

$\because AE$，BE 分别是 $\angle DAB$，$\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore \angle EAB+\angle EBA$

$=\dfrac{1}{2}$（$\angle DAB+\angle ABC$）$=90°$.

$\therefore \angle AEB=90°$，即 $\angle HEF=90°$.

同理可证：$\angle F$，$\angle FGH$，$\angle H$ 均为 $90°$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为矩形.

7. $\because E$，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AB$，$HG=\dfrac{1}{2}CD$.

又 $\because AB=CD$，$\therefore EF=HG$.

同理 $FG=EH$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

又 $FH=OF+OH=\dfrac{1}{2}OB+\dfrac{1}{2}OD=\dfrac{1}{2}BD$，

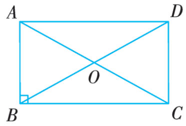
$EG=OE+OG=\dfrac{1}{2}OA+\dfrac{1}{2}OC=\dfrac{1}{2}AC$，

$\because AC=BD$，$\therefore FH=EG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

4. 如图，三角形 ABC 是直角三角形，BO 是它斜边 AC 上的中线，延长 BO 至 D，使 $OD=OB$，连接 AD，DC.

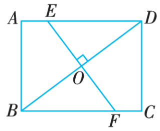
求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



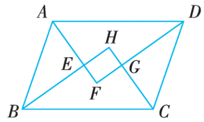
(第 4 题图)

B 组

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$ cm，$AD=4$ cm，过对角线 BD 的中点 O 作 BD 的垂线 EF，分别交 AD，BC 于点 E，F，求 AE 的长.



(第 5 题图)



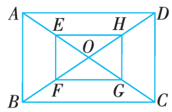
(第 6 题图)

6. 如图，在▱$ABCD$ 中，各内角的平分线分别相交于点 E，F，G，H.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点，连接 EF，FG，GH，HE.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



(第 7 题图)

2.6 菱　形

2.6.1 菱形的性质

观察

观察图 2-49 中的平行四边形，它们有什么特点？

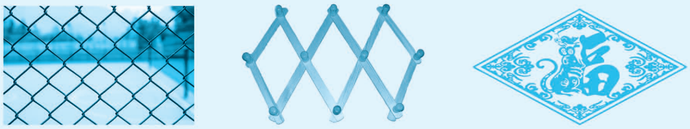
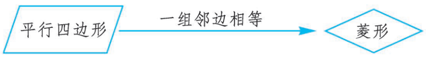


图 2–49

一组邻边相等的平行四边形叫作**菱形**（rhombus）.



可以知道：

菱形的四条边都相等，对角相等，对角线互相平分.

由于菱形是平行四边形，因此

菱形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

教学目标

1. 理解菱形的概念以及菱形与平行四边形的关系.

2. 探索并证明菱形的性质定理：菱形的四条边相等，对角线互相垂直平分，对角相等.

3. 了解菱形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心. 菱形是轴对称图形，两条对角线所在直线是它的对称轴.

4. 能用菱形的性质进行简单的计算和推理.

教学重点、难点

教学重点：菱形的性质定理及其应用.

教学难点：性质定理“菱形的对角线互相垂直”的探索与证明.

2.6节的主要内容是菱形的概念、性质和判定，其中性质还包括知道菱形是中心对称图形以及探索菱形的轴对称性质.

和矩形类似，菱形是另一种特殊的平行四边形，其定义要突出两点：一是强调菱形是平行四边形；二是一组邻边相等.

教材呈现了菱形的部分性质（黑体字），建议教师组织学生对这些性质作简单的说理，以加深对性质的理解.

“动脑筋”栏目性质定理的推理过程，运用了线段垂直平分线的性质，因此先要引导学生回顾线段垂直平分线的性质定理.

动脑筋

如图 2-50，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，DB 相交于点 O. 对角线 $AC \perp DB$ 吗？你的理由是什么？

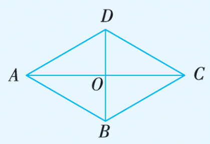


图 2-50

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore$ $DA = DC$.

$\therefore$ 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上.

又点 O 为线段 AC 的中点，

$\therefore$ 直线 DO（即直线 DB）是线段 AC 的垂直平分线，

$\therefore$ $AC \perp DB$.

由此得到菱形的性质：

菱形的对角线互相垂直.

做一做

点A的像是点C，

点C的像是点A，

点D的像是点D，

点B的像是点B，

边AD的像是边CD，

边CD的像是边AD，

边AB的像是边CB，

边CB的像是边AB.

“做一做”利用轴对称（轴反射）变换，说明了为什么菱形是轴对称图形，而两条对角线所在的直线都是它的对称轴. 建议学生先自己动手探索并回答“做一做”栏目中的问题，在阅读说理文字的基础上归纳出结论.

做一做

把图 2-50 中的菱形 $ABCD$ 沿直线 DB 对折（即作关于直线 DB 的轴反射），点 A 的像是_____，点 C 的像是_____，点 D 的像是_____，点 B 的像是_____，边 AD 的像是_____，边 CD 的像是_____，边 AB 的像是_____，边 CB 的像是_____.

从上述结果看出，在关于直线 DB 的轴反射下，菱形 $ABCD$ 的像与它自身重合. 同理，在关于直线 AC 的轴反射下，菱形 $ABCD$ 的像与它自身重合.

由此得到：

菱形是轴对称图形，两条对角线所在直线都是它的对称轴.

66 数学 八年级下册

动脑筋

如图 2-50，你能利用菱形的性质说明菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$ 吗？

$\because$ $S_{菱形ABCD}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC}$，

又 $AC\perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$$\therefore\ S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot DO+\frac{1}{2}AC\cdot BO$$
$$=\frac{1}{2}AC(DO+BO)$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

菱形的面积等于两条对角线长度乘积的一半.

例 1 如图 2-51，菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 的长度分别为 4 cm，3 cm，求菱形 $ABCD$ 的面积和周长.

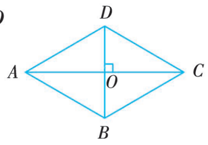


图 2-51

解 菱形 $ABCD$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\times4\times3=6\ (\text{cm}^2).$$

在 Rt$\triangle ABO$ 中，

$$OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4=2\ (\text{cm}),\quad OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times3=1.5\ (\text{cm}),$$

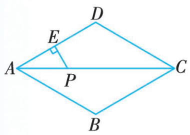
所以，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2^2+1.5^2}=\sqrt{6.25}=2.5$ (cm).

因此，菱形 $ABCD$ 的周长为 $2.5\times4=10$ (cm).

练习

1. 菱形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O. 已知 $AB=5$ cm，$OB=3$ cm，求菱形 $ABCD$ 的两条对角线的长度以及它的面积.

2. 如图，点 P 是菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点，$PE\perp AD$ 于点 E，$PE=4$ cm，求点 P 到 AB 的距离.



（第 2 题图）

根据菱形的对角线的性质，应用三角形的面积公式，可以推导出计算菱形面积的公式. 这一方面巩固对菱形性质的认识，同时加强运算能力. 建议学生根据公式用自己的话进行描述.

练习

1. 两对角线的长分别为6 cm，8 cm，其面积为24 cm^2.

2. $\because$ AC是$\angle DAB$的平分线，

$\therefore$ 点P到AB的距离等于点P到AD的距离，故点P到AB的距离是4 cm.

教学目标

1. 探索并证明菱形的判定定理：

四条边都相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

2. 会运用菱形的判定定理判定一个四边形是否为菱形.

教学重点、难点

教学重点：菱形的判定定理及其应用.

教学难点：菱形判定定理的探索与证明.

2.6.2节介绍菱形的两条判定定理.

“动脑筋”栏目先推导出四边形$ABCD$是平行四边形，然后说明有一组邻边相等，故四边形$ABCD$是菱形.这其中用到了菱形的定义.

2.6.2 菱形的判定

动脑筋

如图 2-52，用 4 支长度相等的铅笔能摆成菱形吗？

把上述问题抽象出来就是：四条边都相等的四边形是菱形吗？

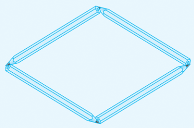


图 2-52

下面我们来证明这个结论.

如图 2-53，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$.

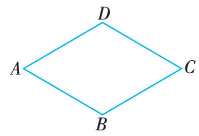


图 2-53

$\because$ $AD=BC$，$AB=DC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $AB=AD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

由此得到菱形的判定定理 1：

四条边都相等的四边形是菱形.

例 2 如图 2-54，在四边形 $ABCD$ 中，线段 BD 垂直平分 AC，且相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$.

求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

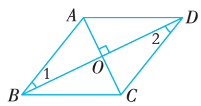


图 2-54

证明 $\because$ 线段 BD 垂直平分 AC，

$\therefore$ $BA=BC$，$DA=DC$，$OA=OC$.

在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle AOB=\angle COD$，$OA=OC$，

$\therefore$ $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

$\therefore$ $AB=CD$.

$\therefore$ $AB=BC=CD=DA$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形（四条边都相等的四边形是菱形）.

动脑筋

菱形的两条对角线互相垂直且平分，从菱形的这一性质受到启发，你能画出一个菱形吗?

过点 O 画两条互相垂直的线段 AC，BD，使得 $OA=OC$，$OB=OD$. 连接 AB，BC，CD，DA. 则四边形 $ABCD$ 是菱形，如图 2-55.

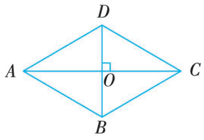


图 2-55

你能说出这样画出的四边形 $ABCD$ 一定是菱形的道理吗?

如图 2-55，由画法可知，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 互相平分，因此它是平行四边形. 又已知其对角线互相垂直，上述问题抽象出来就是：对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗?

我们来进行证明.

在▱$ABCD$ 中，$AC\perp BD$，$OA=OC$，

∴ BD 所在的直线是 AC 的垂直平分线.

∴ $DA=DC$.

∴ ▱$ABCD$ 是菱形.

由此得到菱形的判定定理 2：

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

例 3 如图 2-56，在▱$ABCD$ 中，$AC=6$，$BD=8$，$AD=5$. 求 AB 的长.

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $OA=\dfrac{1}{2}AC=3$，$OD=\dfrac{1}{2}BD=4$.

又∵ $AD=5$，满足 $AD^2=OA^2+OD^2$，

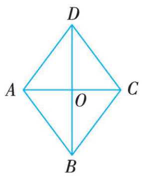


图 2-56

“动脑筋”栏目首先要求学生利用菱形的对角线的性质来画菱形，从画法中抽象出问题：对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗？最后对这个问题进行论证.

证明仍然是用菱形的定义来进行推导的，在演绎推理过程中，要引导学生运用线段垂直平分线的性质，推出平行四边形 $ABCD$ 的邻边相等，这是证明这个判定定理的关键.

∴ $\triangle DAO$ 是直角三角形.

∴ $\angle DOA=90°$，即 $DB\perp AC$.

∴ $\square ABCD$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

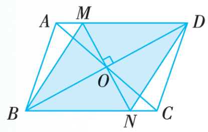
∴ $AB=AD=5$.

练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长度分别为 4 cm，3 cm.

2. 如图，在$\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作 $MN\perp BD$，分别交 AD，BC 于点 M，N.

求证：四边形 $BNDM$ 是菱形.



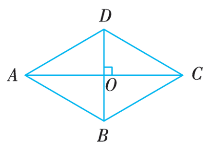
(第 2 题图)

习题 2.6

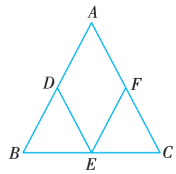
A 组

1. 菱形的对角线的交点到一组邻边的距离相等吗？为什么？

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，边长为 2 cm，$\angle BAD=60°$，求菱形 $ABCD$ 的两条对角线的长度以及它的面积.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D，E，F 分别是 AB，BC，AC 边的中点.

（1）求证：四边形 $ADEF$ 是菱形；

（2）若 $AB=12$ cm，求菱形 $ADEF$ 的周长.

70 数学 八年级下册

练习

1. 略.

2. 在Rt$\triangle BON$和Rt$\triangle DOM$中，

$\because BO=DO$，

$\angle DBN=\angle BDM$，

$\therefore$ Rt$\triangle BON\cong$Rt$\triangle DOM$.

$\therefore OM=ON$.

$\because BD$，NM是四边形$BNDM$的两条对角线且互相平分，

$\therefore$四边形$BNDM$是平行四边形.

又$MN\perp BD$，

$\therefore$四边形$BNDM$是菱形.

习题2.6

A组

1. 相等 . 证明略.

菱形对角线的交点到四边的距离都相等.

2. 两对角线长分别为2 cm和$2\sqrt{3}$ cm，面积为$2\sqrt{3}$ cm².

3. （1）$\because DE=\frac{1}{2}AC=AF$，

$EF=\frac{1}{2}AB=AD$，

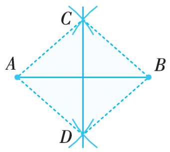
又$\because AB=AC$，

$\therefore DE=AF=EF=AD$.

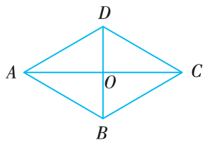
$\therefore$ 四边形$ADEF$是菱形.

(2)菱形$ADEF$的周长为 24 cm.

4. 小明在作线段 AB 的垂直平分线时，是这样操作的：如图，分别以点 A，B 为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$ 的定长 a 为半径画弧，两弧相交于 C，D，则直线 CD 即为所求. 根据他的作图方法可知四边形 $ADBC$ 一定是菱形吗？试说明理由.



(第 4 题图)



(第 5 题图)

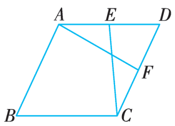
5. 如图，▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$OA=3$，$OB=2$，$AB=\sqrt{13}$.

(1) $\triangle AOB$ 是直角三角形吗？为什么？

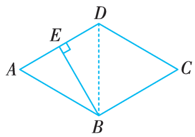
(2) ▱$ABCD$ 是菱形吗？为什么？

B 组

6. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E，F 是边 AD，CD 的中点，$AF=3$ cm，求 CE 的长.



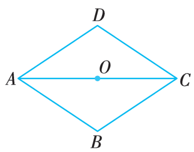
(第 6 题图)



(第 7 题图)

7. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，作 $BE\perp AD$，垂足为点 E. 求证：$AE=DE$.

8. 如图，把等腰三角形 ABC 绕它的底边 AC 上的中点 O 旋转 180°，得到三角形 CDA，试问：四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？



(第 8 题图)

4. 是菱形. 理由略.

5. (1) $\triangle AOB$是直角三角形.

$\because 3^2+2^2=(\sqrt{13})^2$,

即$OA^2+OB^2=AB^2$.

故$\triangle AOB$是直角三角形.

(2) ▱$ABCD$是菱形. 因为两条对角线互相垂直.

B组

6. 在$\triangle AFD$和$\triangle CED$中，

$\because AD=CD$,

$DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}CD=DF$,

$\angle D$是公共角，

$\therefore \triangle AFD\cong\triangle CED$.

$\therefore CE=AF=3$ cm.

7. 由已知条件易知$\triangle ABD$为等边三角形，又$BE\perp AD$于点E，

$\therefore AE=DE$.

8. 是菱形.

$\because \triangle ABC$为等腰三角形，

$\therefore AB=BC$.

$\because \triangle CDA$为等腰三角形，

$\therefore CD=AD$.

而$\triangle CDA$是$\triangle ABC$的像，

$\therefore AB=BC=CD=DA$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$是菱形.

教学目标

1. 理解正方形的概念，以及正方形与平行四边形、矩形、菱形的关系.

2. 探索并证明正方形的性质定理.会判定一个四边形是正方形.

3. 了解正方形既是轴对称图形又是中心对称图形，并探索正方形的中心对称性质.

教学重点、难点

教学重点：正方形的性质.

教学难点：正方形与平行四边形、矩形、菱形的关系.

“观察”栏目通过观察瓷砖形状，抽象出正方形的特性，并指明正方形既是矩形又是菱形. 接着给出正方形的定义. 而正方形的定义是学好本节的关键，教学时，要结合图2-58，具体说明正方形与平行四边形、矩形、菱形之间的关系. 这种“关系”是特殊与一般的关系，即图形越来越特殊，它的性质就越来越多，判定它需要的条件也越来越多. 这部分知识像链条一样环环紧扣，这条“知识链”不仅蕴涵着“一般和特殊”的思想，而且也是引导学生感悟“分类”思想的好素材，因此，对于这条“知识链”教师在教学中应予以重视.

最后，建议教师指导学生对正方形的性质进行简单的说理.

2.7 正方形

观察

装修房子铺地面的瓷砖（如图 2-57）大多是正方形的形状，它是什么样的四边形呢？它与平行四边形、矩形、菱形有什么关系？

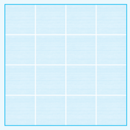
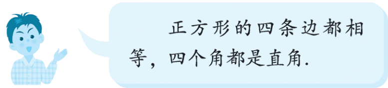
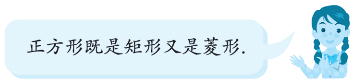


图 2-57





我们把有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫作**正方形**（square）.

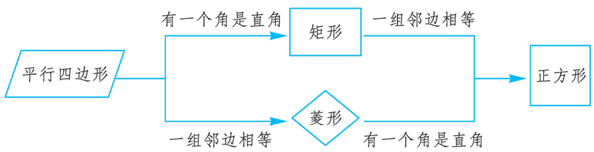


图 2-58

可以知道：

> 正方形的四条边都相等，四个角都是直角.
> 正方形的对角线相等，且互相垂直平分.

由于正方形既是矩形，又是菱形，因此

> 正方形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.
> 正方形是轴对称图形，两条对角线所在直线，以及过每一组对边中点的直线都是它的对称轴.

例 1 如图 2–59，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 上任意一点，过点 D 作 $DF \perp DE$ 交 BC 的延长线于点 F.

求证：$DE = DF$.

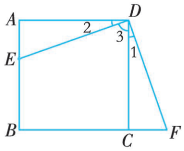


图 2–59

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ $AD = CD$，$\angle A = \angle DCF = 90°$.

$\because$ $DF \perp DE$，

$\therefore$ $\angle EDF = 90°$，即 $\angle 1 + \angle 3 = 90°$，

又 $\because$ $\angle 2 + \angle 3 = 90°$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

$\therefore$ $\triangle AED \cong \triangle CFD$ (ASA).

$\therefore$ $DE = DF$.

说一说

观察示意图 2–58，说一说如何判断一个四边形是正方形？

可以先判定四边形是矩形，再判定这个矩形有一组邻边相等.

也可以先判定四边形是菱形，再判定这个菱形有一个角是直角.

例 2 如图 2–60，已知点 A'，B'，C'，D'分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA' = BB' = CC' = DD'$.

求证：四边形 $A'B'C'D'$是正方形.

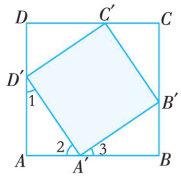


图 2–60

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$.

又 $\because$ $AA' = BB' = CC' = DD'$，

$\therefore$ $D'A = A'B = B'C = C'D$.

又 $\because$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$，

$\therefore$ $\triangle AA'D' \cong \triangle BB'A' \cong \triangle CC'B' \cong \triangle DD'C'$.

$\therefore$ $A'D' = B'A' = C'B' = D'C'$.

$\therefore$ 四边形 $A'B'C'D'$是菱形.

教材没有直接给出正方形的判定方法，而是设置“说一说”栏目，从两个角度来引导学生思考. 正方形的判定方法是对前面所学的判定方法的综合，建议教师对本章所学的判定方法做一个小结，归纳思路，帮助学生澄清一些模糊的概念.

例2是一道综合题，它既要用菱形的判定方法，又要用正方形的定义，其目的是培养学生的综合运用能力.

资源拓展

我们学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形，比较一下，哪一种图形性质最多呢？无疑是正方形. 所以称之为完美的正方形.

正方形有相等的角、相等的边、相等且互相垂直平分的对角线，它既是轴对称图形，又是中心对称图形，这些性质使正方形获得人们的喜爱和广泛的应用. 比如，用正方形的水磨石或地板砖铺室内地面，不仅使人感到美观大方，而且施工简单易行.

在人们的生活中，还发现了正方形许多奇妙的性质，例如，正方形的面积比与它等周长的任何矩形的面积都大（这一点以后可用函数性质来证明），于是人们用这一性质指导实践活动. 比如，要用砖墙或篱笆围一块面积一定的矩形地块时，都尽可能围成正方形，这样可以节省材料.

你不妨做一个实验，画一个周长为20 cm的矩形，使它的一边长为：(1)3 cm，(2)5 cm，(3)6 cm，算一算哪个矩形的面积最大.

又 ∵ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 2+\angle 3=90°$.

∴ $\angle D'A'B'=90°$.

∴ 四边形 $A'B'C'D'$是正方形.

练习

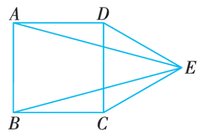
1. 已知正方形的一条对角线长为 4 cm，求它的边长和面积.

2. 如果一个矩形的两条对角线互相垂直，那么这个矩形一定是正方形吗？为什么？

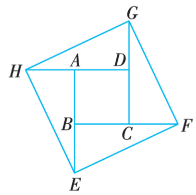
习题 2.7

A 组

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧作等边$\triangle DCE$，求$\angle AEB$ 的度数.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

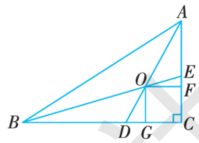
2. 如图，将正方形 $ABCD$ 的各边 AB，BC，CD，DA 顺次延长至 E，F，G，H，且使$BE=CF=DG=AH$.

求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

B 组

3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，两锐角的平分线 AD，BE 相交于点 O，$OF\perp AC$ 于点 F，$OG\perp BC$ 于点 G.

求证：四边形 $OGCF$ 是正方形.



(第 3 题图)

练习

1. 边长为$\sqrt{8}$ cm，面积为 8 cm^2.

2. 是正方形，理由略.

习题2.7

A组

1. 易知$\triangle DAE$为等腰三角形，$\angle ADE=150°$.

∴ $\angle DEA=\angle DAE=15°$.

同理$\angle CEB=15°$.

∵ $\triangle CED$是等边三角形，

∴ $\angle DEC=60°$.

∴ $\angle AEB=60°-15°-15°=30°$.

2. 在Rt$\triangle EAH$和Rt$\triangle FBE$中，

∵ $BF=AE$，$BE=AH$，

∴ Rt$\triangle EAH\cong$Rt$\triangle FBE$.

∴ $HE=EF$.

同理可证：$EF=FG=GH$.

由此得四边形$EFGH$是菱形.

∵ $\angle AEH+\angle AHE=90°$，

又$\angle AHE=\angle BEF$，

∴ $\angle AEH+\angle BEF=90°$.

即$\angle HEF=90°$.

∴ 四边形$EFGH$为正方形.

B组

3. ∵ $OF\perp AC$于F，$OG\perp BC$于G，

∴ $\angle OGC=\angle C=\angle CFO=90°$.

∴ 四边形$OGCF$是矩形.

过点O作$OH\perp AB$于H.

∵ $\angle BAC$，$\angle ABC$的平分线AD，BE相交于点O，

∴ $OF=OH=OG$.

∴ 四边形$OGCF$是正方形.

IT 教室

用计算机验证成中心对称的两个图形的性质

1. 打开“几何画板”，选择工具栏中的【多边形工具】，作任意的一个四边形 $ABCD$. 选择工具栏中的【点工具】，在四边形 $ABCD$ 外作一点 O.

2. 点击点 O，选择菜单【变换】中的【标记中心】，使点 O 为旋转中心.

3. 选中四边形 $ABCD$ 和点 O，选择菜单【变换】中的【旋转】，在弹出的对话框中输入 180，点击【旋转】按钮，得到四边形 $A'B'C'D'$，如图 1 所示.

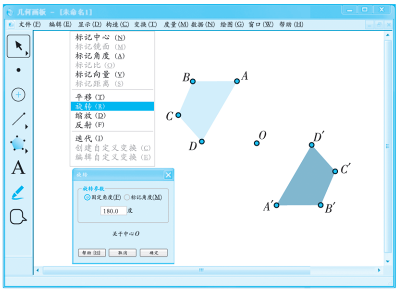


图 1

4. 分别连接 AA'，BB'，CC'和 DD'，如图 2，这些线段交于一点吗？交于哪一点？

5. 任意拖动点 A 改变四边形 $ABCD$ 的形状，四边形 $A'B'C'D'$ 的形状也相应发生变化了吗？AA'，BB'，CC'和 DD'这 4 条线段仍相交于一点吗？

6. 分别测量 AO 和 $A'O$ 的长度，它们的长度有什么关系？BO 和 $B'O$，CO 和 $C'O$，DO 和 $D'O$ 呢？

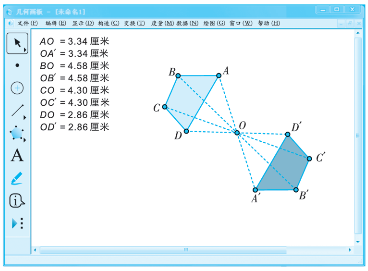


图 2

本章学习了一种图形变换——中心对称. 对此，我们要尽可能借助信息技术，来探索成中心对称的两个图形的性质，应鼓励学生独立尝试，加深对所学知识的理解.

本章是初中几何体系中重要的一章，由于涉及的概念多、性质多、判定方法多，复习课时，要通过问题的形式回顾本章所学的主要知识，提高学生的归纳、概括能力.

教师要帮助学生在头脑中建立起本章的知识结构图，特别是理解平行四边形、矩形、菱形、正方形之间的逻辑关联图是非常关键的. 同时，要从命题、定理的角度进一步梳理特殊四边形的性质和判定，使全章的内容形成一个完整的体系.

“注意”栏目的设置，旨在突出本章学习中学生容易忽视或容易出错的问题，在教学中应给予强调.

本章还涉及合情推理与演绎推理、分类、转化等数学思想与方法，在复习中应结合实例给予提示与渗透.

小结与复习

回顾

1. n 边形内角和公式是什么？这个公式是如何推导出来的？

2. n 边形外角和是多少？

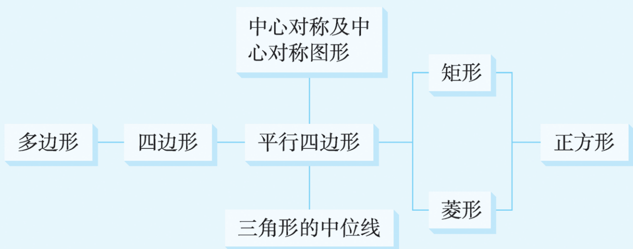
3. 平行四边形有哪些性质？怎样判定一个四边形为平行四边形？

4. 什么样的图形叫作成中心对称？什么样的图形叫作中心对称图形？它们二者有何区别与联系？

5. 三角形中位线定理是什么？

6. 矩形、菱形、正方形各具有哪些性质，如何判定一个四边形为矩形、菱形、正方形呢？

本章知识结构



注意

1. 平行四边形的性质与判定是本章的重点，注意从边、角、对角线等方面来分析平行四边形的特征. 矩形、菱形、正方形均为特殊的平行四边形，图形越特殊，它的性质就越多，注意体会一般与特殊的关系.

2. 成中心对称是对两个图形说的，它表示两个图形之间的对称关系，中心对称图形是对一个图形说的，它表示某个图形的特征.

3. 对特殊的四边形，还要注意从对称性的角度把握其特征，并领会它们的内在联系与区别.

4. 注意体会本章中的互逆命题，如平行四边形、矩形、菱形的性质和判定定理等.

复习题 2

A 组

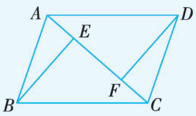
1. (1) 是否存在一个多边形，它的每个内角都等于相邻外角的 4 倍?

(2) 是否存在一个多边形，它的每个外角都等于相邻内角的 4 倍?

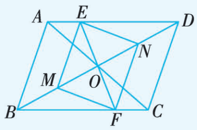
2. 填写下表，在空格中用“√”表示图形具有的性质.

性质 图形	对边相等	对边平行	四边相等	对角线相等	对角线互相垂直	对角线互相平分	对角相等
平行四边形							
矩　形							
菱　形							
正方形							

3. 如图，点 E，F 是▱$ABCD$ 对角线 AC 上的点，$CE=AF$，线段 BE 与 DF 有怎样的关系?



(第 3 题图)

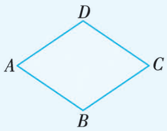


(第 4 题图)

4. 如图，▱$ABCD$ 的对角线相交于点 O，EF 经过点 O，分别与边 AD，BC 相交于点 E，F，点 M，N 分别是线段 OB，OD 的中点.

求证：四边形 $EMFN$ 是平行四边形.

5. 作出菱形 $ABCD$ 关于 C 点成中心对称的图形.



(第 5 题图)

复习题2

A组

1. (1) 存在，是十边形.

(2) 不存在.

2.

性质 图形	对边相等	对边平行	四边相等	对角线相等	对角线互相垂直	对角线互相平分	对角相等
平行四边形	√	√				√	√
矩　形	√	√		√		√	√
菱　形	√	√	√		√	√	√
正方形	√	√	√	√	√	√	√

3. $BE \parallel DF$ 且 $BE=DF$. 证明略.

4. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$\because AO=CO$，$\angle EAO=\angle FCO$，$\angle AOE=\angle COF$，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore OE=OF$.

又 $OM=\dfrac{1}{2}OB$，$ON=\dfrac{1}{2}OD$，

$\because OB=OD$，$\therefore OM=ON$.

$\because MN$，EF 是四边形 $EMFN$ 的对角线，

$\therefore$ 四边形 $EMFN$ 是平行四边形.

5. 作图略.

6. C

7. ∵ E，P分别是△ACD的边AD，AC的中点，∴ $PE=\frac{1}{2}CD$.

同理$PF=\frac{1}{2}AB$.

又 $AB=CD$，

∴ $PE=PF$.

∴ $\angle PFE=\angle PEF=18°$.

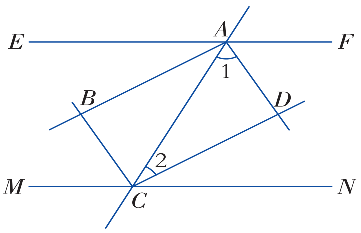
∴ $\angle EPF=180°-2\times18°$

$=180°-36°=144°$.

8. $(2+2\sqrt{3})$cm.

（提示：利用等边三角形和勾股定理可求得.）

9. 是矩形.



∵ $EF/\!/MN$，

∴$\angle FAC+\angle NCA=180°$.

又$\angle 1=\frac{1}{2}\angle FAC$，

$\angle 2=\frac{1}{2}\angle NCA$，

∴$\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle FAC+\angle NCA)=90°$.

∴ $\angle D=90°$.

同理可得$\angle B=90°$.

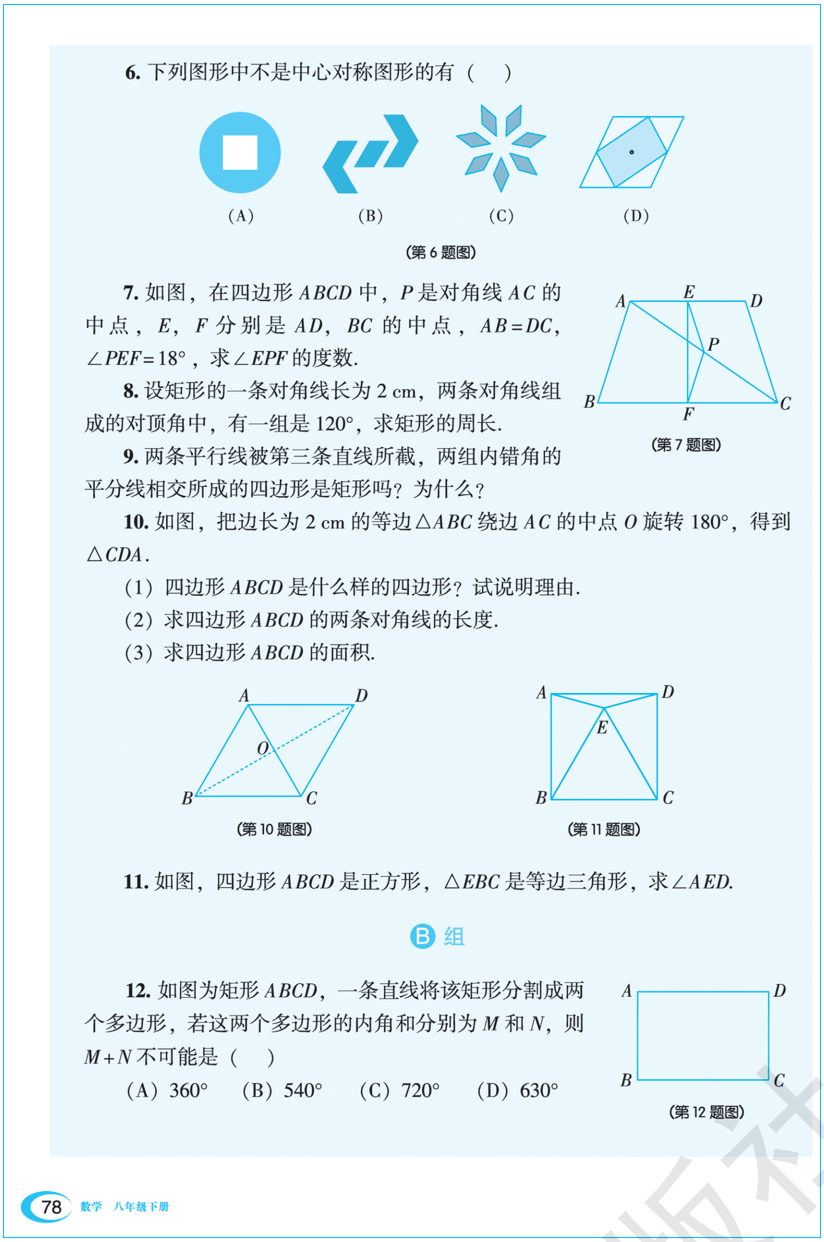
又 $\angle BAD=\angle 1+\angle BAC=\frac{1}{2}\angle FAC+\frac{1}{2}\angle CAE=\frac{1}{2}\times180°=90°$.

∴ 四边形$ABCD$是矩形.

10.（1）是菱形，因为$AB=BC=CD=DA$.

（2）对角线$AC=2$ cm，$BD=2\sqrt{3}$ cm.

（3）$2\sqrt{3}$ cm².



6. 下列图形中不是中心对称图形的有（　）

（A）　（B）　（C）　（D）

（第 6 题图）

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 AC 的中点，E，F 分别是 AD，BC 的中点，$AB=DC$，$\angle PEF=18°$，求$\angle EPF$ 的度数.

（第 7 题图）

8. 设矩形的一条对角线长为 2 cm，两条对角线组成的对顶角中，有一组是 120°，求矩形的周长.

9. 两条平行线被第三条直线所截，两组内错角的平分线相交所成的四边形是矩形吗？为什么？

10. 如图，把边长为 2 cm 的等边△ABC 绕边 AC 的中点 O 旋转 180°，得到△CDA.

（1）四边形 $ABCD$ 是什么样的四边形？试说明理由.

（2）求四边形 $ABCD$ 的两条对角线的长度.

（3）求四边形 $ABCD$ 的面积.

（第 10 题图）　（第 11 题图）

11. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，△EBC 是等边三角形，求$\angle AED$.

B 组

12. 如图为矩形 $ABCD$，一条直线将该矩形分割成两个多边形，若这两个多边形的内角和分别为 M 和 N，则 $M+N$ 不可能是（　）

（A）360°　（B）540°　（C）720°　（D）630°

（第 12 题图）

78 数学 八年级下册

11. ∵四边形$ABCD$是正方形，

∴ $AB=BC$，$\angle ABC=90°$.

∵△EBC是等边三角形，

∴ $EB=BC=EC$，$\angle EBC=\angle BEC=60°$.

∴ $EB=AB$，$\angle ABE=90°-60°=30°$.

∴$\angle BAE=\angle BEA=75$.

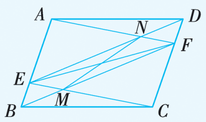
同理$\angle CED=75°$.

∴$\angle AED=360°-75°-75°-60°=150°$.

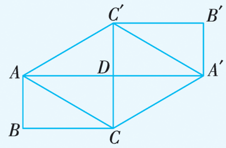
B组

12. D

13. 如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，CD 上的一点，且 $BE=DF$. BF 与 CE 相交于点 M，DE 与 AF 相交于点 N. EF 与 MN 互相平分吗？为什么？



(第 13 题图)

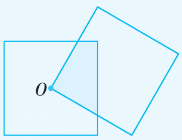


(第 14 题图)

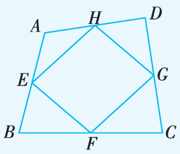
14. 如图，矩形 $ABCD$ 和矩形 $A'B'C'D$ 关于点 D 成中心对称.

求证：四边形 $ACA'C'$ 是菱形.

15. 如图，两个边长为 2 的正方形重叠在一起，O 是其中一个正方形的中心，求阴影部分的面积.



(第 15 题图)

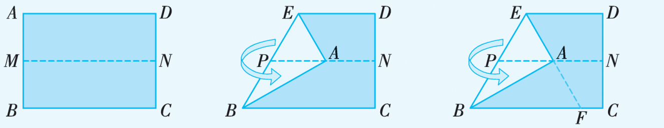


(第 16 题图)

16. 如图，已知 E，F，G，H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点，则四边形 $EFGH$ 是什么四边形？若把条件中的四边形 $ABCD$ 依次改为矩形、菱形、正方形，其他条件不变，则所得的四边形 $EFGH$ 是什么四边形？试说明理由.

C 组

17. 准备一张 A4 的纸按下图操作：



(1) 把矩形 $ABCD$ 对折，得折痕 MN.　(2) 把 A 折向 MN，得 Rt△AEB.　(3) 沿线段 EA 折叠，得到另一条折痕 EF，展开后可得等边三角形 EBF.

你能说出按上述步骤可以折出一个等边三角形的道理吗？

第 2 章　四边形　79

C组

17. 在Rt△AEB中，P是BE的中点，AP是斜边BE上的中线，

$\therefore AP=BP=\dfrac{1}{2}BE$，即$BE=2AP$.

在△EBF中，A是EF的中点，$\therefore AP=\dfrac{1}{2}BF$，即$BF=2AP$.

$\therefore BE=BF$.

$\therefore \angle BEF=\angle BFE=\angle FED$.

而$2\angle BEF+\angle FED=180^\circ$（平角），

$\therefore 3\angle BEF=180^\circ$.

即$\angle BEF=60^\circ$.

$\therefore$ △EBF是等边三角形.

13. 互相平分.

$\because BE=DF$，$BE/\!/FD$，

$\therefore$ 四边形$BFDE$是平行四边形.

$\therefore BF/\!/ED$.

$\because AE=CF$，$AE/\!/FC$，

$\therefore$ 四边形$AECF$是平行四边形.

$\therefore AF/\!/EC$.

$\therefore$ 四边形$MFNE$是平行四边形.

故EF与MN互相平分.

14. $\because AA'$，CC'是四边形$ACA'C'$的对角线，

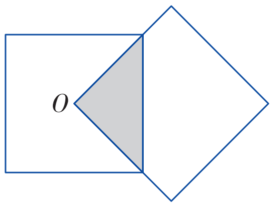
又$AD=DA'$，$CD=DC'$，

$\therefore$ 四边形$ACA'C'$是平行四边形.

又$AA'\perp CC'$，

$\therefore$ 四边形$ACA'C'$是菱形.

15. 阴影部分面积为1.



提示：将两正方形重叠如上图所示的特殊位置，可知阴影部分的面积为1，将其中一个正方形绕点O旋转，便可得到“第15题图”. 此时，阴影部分的面积与上面图中特殊位置的阴影部分的面积是相等的，可用旋转有关性质以及三角形全等来证明.

16. 四边形$EFGH$是平行四边形.

如果四边形$ABCD$是矩形，则四边形$EFGH$是菱形.

如果四边形$ABCD$是菱形，则四边形$EFGH$是矩形.

如果四边形$ABCD$是正方形，则四边形$EFGH$是正方形.

教学目标

1. 通过探索平面图形的镶嵌，使学生了解平面图形镶嵌的概念，并使学生知道任意一个三角形、四边形或正六边形可以镶嵌平面图形.

2. 能运用这几种图形进行简单的平面图形镶嵌设计.

教学建议

1. 本课题的教学可按照“选题（问题引领）—开题（探寻路径）—做题（实践操作）—结题（交流评价）”这样四个环节进行“微科研”活动，使得学生在“微科研”中提升问题意识、应用意识，培养其创新精神.

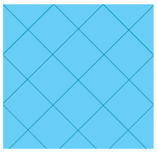
2. 要关注学生经历“综合与实践”的活动过程，关注学生的表现，往往过程比结果更重要. 同时，要反思活动过程，将研究过程和结果形成报告或小论文，并进行交流，这能进一步促使学生获得数学活动的经验.

3. 对综合与实践活动，教师要给每一个学生进行评价.

综合与实践

平面图形的镶嵌

观察一些地板的图案（如图 1），我们发现它们是由正方形或者矩形的地砖铺成的.



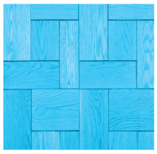


图 1

像用地砖铺地一样，用形状、大小完全相同的一种或几种平面图形进行拼接，彼此之间不留空隙、不重叠地铺成一片，这就是平面图形的镶嵌. 那么什么样的平面图形能够进行镶嵌呢?

操作步骤

1. 成立研究小组，确定研究目标.

2. 确定研究步骤.

(1) 了解教室、自己家里的房间、人行道或商场等地面是用什么形状的地砖铺成的，各条边长是多少，每个拼接点处有几个角.

(2) 对搜集的情况进行分类，用纸板剪出相应的图形进行拼摆，用文字记录操作结果.

(3) 分析拼摆成功的方案，这与拼接点处的角的大小有什么关系吗?

(4) 撰写研究报告，向全班同学展示研究成果.

以小组为单位，在老师的组织、指导下，依照上述步骤，完成探索研究活动，并思考下列问题.

做一做

1. 用纸板分别剪一些形状及大小完全相同的等边三角形、正方形、正五边形、正六边形，用其中的一种正多边形拼一拼，看能否镶嵌成平面图案，并与同伴交流.

2. 用纸板任意剪一些形状、大小完全相同的三角形、四边形（如图 2），用其中的一种纸板做试验拼一拼，看能否镶嵌成平面图案，并与同伴交流.

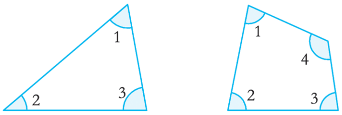


图 2

想一想

1. 观察图 3，全等的正六边形能够进行镶嵌，正六边形的每个内角是多少度？在一个顶点处的三个正六边形，分别有一个内角，它们彼此相邻，这三个内角的和是多少度？

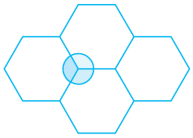


图 3

2. 事实上，在拼接某种多边形时，如果能在每个拼接点处恰好拼成周角，即 360°，那么这个多边形可以进行镶嵌. 想一想，全等的正五边形能进行镶嵌吗？

拓 展

1. 用剪好的正多边形中的两种纸板做试验拼一拼，看哪两种正多边形纸板能组合镶嵌成平面图案，并把结果列成表格形式.

2. 搜集并参考一些镶嵌图案，运用三角形、四边形或正六边形进行简单的镶嵌设计. 将设计过程中最精彩之处写进总结报告，与同学分享.

Ⅲ. 本章相关链接

黄金矩形

美丽的黄金矩形在古希腊时代被认为是地球上最具有调和性、最和谐的图形. 所谓的黄金矩形，是指矩形的宽∶长≈0.618.

黄金矩形有一种特别的性质，在这种矩形中分出一个以宽为边长的正方形后，余下的矩形仍然是一个黄金矩形图（如图 1）.由于它具有这一特性，因此每次余下的矩形都与原矩形相似，也就是说黄金矩形具有图形自相似性的特质.

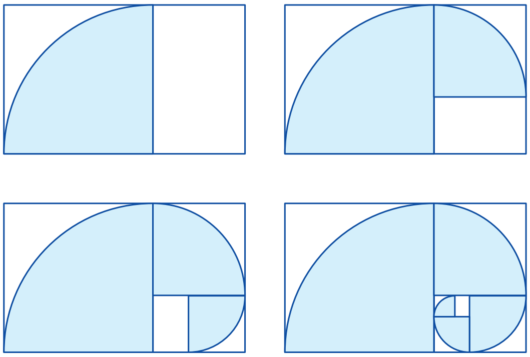


图 1

德国心理学家费西纳和伍得特在一连串的心理测验中都得到，人们在选择图片、卡片、包裹及其他矩形事物时，经常不自觉地倾向选择具有黄金矩形比例的那一个.

因为古希腊人很早就觉得黄金矩形给人一种和谐的美感，所以古希腊的很多建筑都以黄金矩形来设计，像著名的雅典巴台农神庙就是一个有名的例子（图 2）.

图 2

下面我们来构造一个黄金矩形.

第一步：在一张矩形纸片的一端，利用图 3 的方法折出一个正方形，然后将纸片展平.

第二步：如图 4，把这个正方形折成两个相等的矩形，然后将纸片展平.

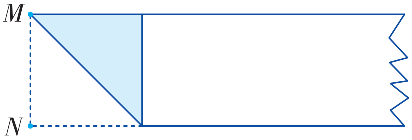


图 3

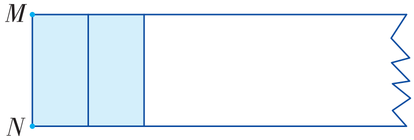


图 4

第三步：折出内侧矩形的对角线 AB，并将它折到图 5 所示的 AD 处.

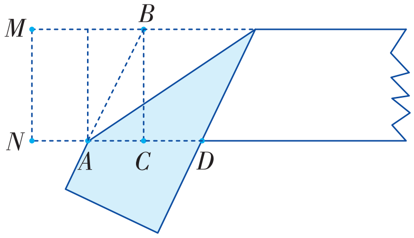


图 5

第四步：如图 6，展平纸片，按照所得的 D 点折出 DE，矩形 $BCDE$ 就是黄金矩形. 你能证明为什么矩形 $BCDE$ 是黄金矩形吗？

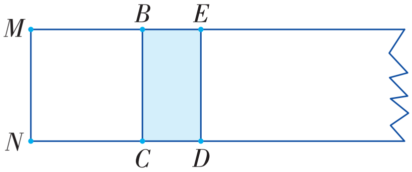


图 6

完美正方形

美不在某一特殊部分的闪烁，而在所有部分总起来看，彼此之间有一种恰到好处的协调和适中.

——笛卡儿

20 世纪初，数学家莫伦提出：能否把一个正方形分解成有限多个各不相同的正方形？这就是“完美正方形”问题. 换一种说法是：用规格（尺寸）完全不同的小正方形去填满大正方形问题.

这个问题看上去很容易，实际上，直到 20 世纪 30 年代，还没有一个人能够拼出一个完美正方形. 1926 年，苏联数学家鲁金对“完美正方形”的存在提出了怀疑，这引起当时正在英国剑桥大学读书的四名大学生塔特、斯通、布鲁克斯和史密斯的兴趣，他们讨论了很久也没有得到任何结果. 从此以后，在很长的时间内，他们谁也不再公开提这个问题. 多年后，布鲁克斯邀请他的三名朋友到家中做客，抛出了他的潜心研究成果，并试图让所有人都大吃一惊. 而令人惊叹的是他的朋友们对多年前的问题也一直在锲而不舍地进行研究，并且每个人都取得了一定的成绩. 其中塔特想得更远，他并不满足于找到一个完美正方形，他想的是要找到一个系统的办法来求出完美正方形与划分所得正方形的边长之间的关系. 经过多次的理论交流，他们发现可以将寻求完美正方形这个问题与电路网络理论联系起来，并借助图论的方法来解决. 1939 年，他们构造出 28 阶、边长为 1015 的完美正方形.

数学家研究的脚步并没有因为找到完美正方形而停止，1948 年，威尔科克斯构造出 24 阶完美正方形. 1967 年，威尔逊构造出 25 阶和 26 阶完美正方形. 后来数学家们又提出一个新的问题：最少需要多少个大小不等的正方形才能组成完美正方形呢？

电子计算机的发展，给这一研究带来了生气. 1978 年，荷兰数学家杜依维斯廷借助计算机技术，成功构造出了一个 21 阶的完美正方形，这些小正方形的边长分别为 2，4，6，7，8，9，11，15，16，17，18，19，24，25，27，29，33，35，37，42，50，组成的完美正方形边长为 112，如图 7：

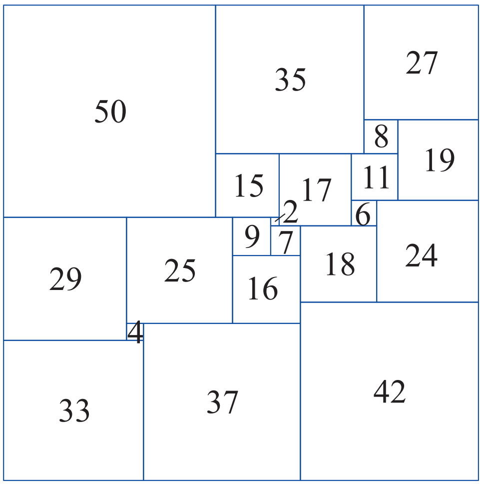


图 7

同时他还证明了：小于 21 阶的完美正方形不存在.

完美正方形的故事是图论发展史上的一段有趣的插曲，几十年来，图论已经发展成为一门内容丰富、应用广泛的数学分支. 与此同时，涌现出许多著名的图论学家. 当年从事完美正方形问题研究的四名大学生也成为组合数学与图论的专家. 特别是塔特，他终于放弃了他的化学研究生涯而专门研究起图论来，并成为世界上最著名的图论学者.