湖南省教育科学“十三五”规划立项课题——初中数学“自主·深度”教学的实践研究阶段性成果

湘教版初中数学教科书配套使用

初中数学
深度学习

九年级
下册

主　　编　赵雄辉

本册主编　向利平

编　　者　向利平　肖千民　方碧霞

肖月园　何义华

湖南教育出版社

使用说明

本章学习指南 1

简明扼要地从“为何学”“学什么”“怎么学”三个角度，介绍本章知识的来龙去脉、学习的意义、学习的内容及学习方法，目的是让你“学前”对本章知识有所了解，“学中”能回顾总结学法，“学后”梳理本章知识体系。因此，学习新课前可以初读，学习新课时宜常看看，学完新课后可适当回头对照。

2 前置夯实

为每课时学习新课做好准备，一定要在课前完成。“前置诊断”让你自查是不是具备了学习新课的基础，激活你学习新课的经验和方法。如果你不能全部做对，一定要按照“前置巩固”查漏补缺。

深度理解 3

从三个途径让你深度学习本课时内容，建议在课后完成。

追根溯源 为你揭示新知识的产生过程，提炼隐含的思想方法，帮你全面理解数学知识，领会“数学精气神”，因此要慢慢精读，细细思考，不要急于去做题目。

变式训练 着力于知识和方法的灵活运用，要先试着做，再核对答案。要想想题目中变了哪些条件、情境或数据，解题的要领有什么相通之处，学会举一反三，由此实现“解一题得一法而通一串”。

反思迁移 帮你归纳重点知识，总结解题规律和方法，理顺本课时知识的内在联系，实现“少刷题得高分”的目标。要细细读，用心体会。

使用说明

4 效果检测

全方位覆盖本课时内容。做题过程中如果碰到困难，可回头看看“深度理解”。要全部做完再去对答案，并及时纠正错误，补齐学习短板。

5 本章整理提升

“知识框架”助你梳理本章知识，“融会贯通”对重点难点作进一步理解提升，让你学会综合运用不同的知识，或从不同解法中找到最优的方法。

6 达标测试

每章末的“本章达标测试”，全书末的“九年级下册达标测试”，帮你检测每一阶段的学习效果。一定要在规定时间内认真完成，并对照书后答案自己评分，及时纠错总结。

c o n t e n t s 目 录

第1章 二次函数

本章学习指南

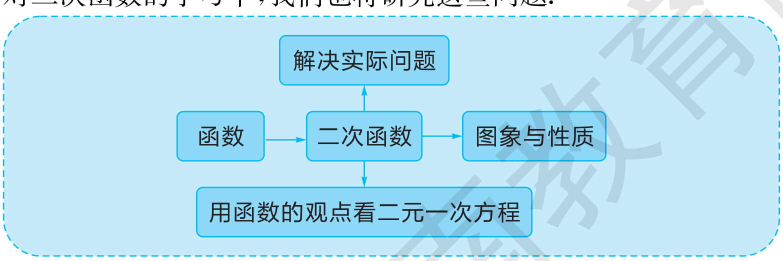
为何学

当周长 a 为定值时，如果矩形的长是 x，宽就是$\frac{a-2x}{2}$，矩形的面积 y 随着它的长 x 变化而变化，即矩形的面积 y 是关于它的长 x 的函数，其函数关系式为 $y=\frac{a-2x}{2}x$，整理得 $y=-x^2+\frac{a}{2}x$(其中 a 为常数)，可以看出，该函数表达式的自变量的最高次数是 2，不是过去学习过的一次函数了.

现实生活及数学中大量存在类似的函数关系，这类函数的表达式都可以化成 $y=ax^2+bx+c$(其中 a,b,c 均为常数，$a\neq0$)的形式，为了便于研究这一类函数，我们把表达式中自变量的最高次数是 2 的函数称为二次函数. 二次函数是一种很常见且十分重要的函数，是以后进一步学习数学、物理、化学的重要基础.

学什么

在一次函数和反比例函数的学习中，我们初步知道研究函数的一些基本思路，讨论一次函数和反比例函数的图象和性质，用一次函数和反比例函数解决一些实际问题，用函数的观点看方程(组). 研究一次函数和反比例函数的性质，我们主要研究函数的自变量和函数值的取值范围、函数值 y 随自变量 x 的变化情况、函数图象的对称性等几个方面. 类似地，对二次函数的学习中，我们也将研究这些问题.



本章学习中我们将认识一种新的曲线——抛物线. 二次函数的图象是抛物线. 水平抛出的物体的运行轨迹、投掷出的铅球的运行轨迹、发射出的炮弹的运行轨迹、某些拱桥的纵截面、悬索桥的拉索等等，都可以近似地看成抛物线，我们都可以借助二次函数来研究这些问题.

二次函数的图象和性质是本章的重点，也是本章的难点.

怎 么 学

1. 回顾一次函数和反比例函数的知识

在一次函数和反比例函数的学习中，我们学习了给定自变量的值求函数值，根据函数值求相应自变量的值，用描点法画函数的图象，根据函数的图象直观地看出函数的性质，根据给定的条件求函数的解析式等相关知识. 这些知识和方法均可以迁移到二次函数的学习之中，是学好二次函数的基础.

2. 用好一次函数和反比例函数学习中积累的经验

研究函数主要研究它的性质，而对于函数的性质，主要研究如下几个方面：函数自变量的取值范围，函数值的变化范围，函数值随自变量的增大(减小)而增大或减小情况，函数图象的对称性，等等. 研究这些性质时我们不仅可以借助代数运算，更要借助图象直观地归纳函数的性质.

根据给定条件求函数的表达式也是函数学习的重要内容. 对于一次函数，因为其表达式 $y=kx+b$ 中有两个常数 k 和 b 需要确定，所以只要有两个条件就可以用待定系数法求得表达式；对于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，因为只有一个常数 k 需要确定，所以只需要一个条件就可以用待定系数法求得表达式. 类似地，我们也可以根据给定的条件，用待定系数法求得二次函数的表达式.

值得一提的是，根据给定的条件，在平面直角坐标系中确定一次函数和反比例函数的大致位置和形状是研究函数问题的重要方法和手段，这些方法和手段也将用在二次函数的学习之中.

总之，一次函数和反比例函数学习中积累的经验在二次函数学习中都非常有用，要善于总结用好这些已有的经验.

3. 注重数与形的结合

数形结合是研究函数问题的最重要的方法. 数学家华罗庚曾说过：“数缺形时少直观，形缺数时难入微”. 借助图象的直观可以很好地发现函数值随自变量变化而变化的规律，但是不通过代数运算就不可以精确地刻画这些变化规律. 因此，二次函数学习中既要重视图象的学习，也不能忽视必要的代数运算，要防止重形轻数的倾向，要特别注重一元二次方程的有关知识在二次函数学习中的运用.

4. 可借助一些计算机软件辅助学习

如果你学有余力，不妨学习一下几何画板软件的使用方法，在计算机上借助这一软件研究二次函数问题，特别是探求一些综合性问题的解法时有其独特的优势.

1.1 二次函数

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 计算$(x+2)(x-3)$的结果是（　　）

A. x^2-6　　B. x^2+6

C. x^2-x-6　　D. x^2+x-6

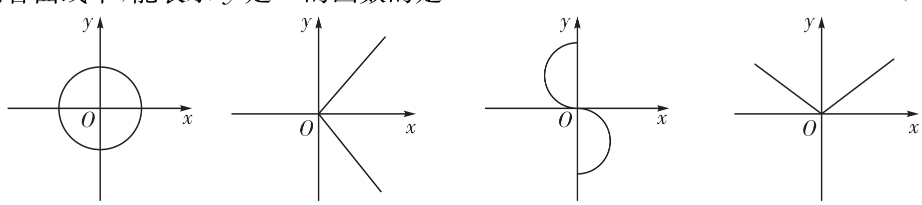
2. 已知下列关系式：(1)$y=\frac{1}{2x}$，(2)$y=x^2$，(3)$|y|=x$，(4)$y+1=x$，(5)$y^2=x+3$. 其中，y不是x的函数有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

3. 下列函数中，是一次函数是（　　）

A. $y=x$　　B. $y=kx$　　C. $y=\frac{1}{x}+1$　　D. $y=x^2-2$

4. 下列各曲线中，能表示y是x的函数的是（　　）



A　　B　　C　　D

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 整式的乘法

(1)单项式与多项式相乘，就是用单项式乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

即$a(b+c)=ab+ac$

(2)多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

即$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

2. 函数及一次函数的定义

(1)一般地，如果在一个变化过程中，有两个变量，例如x和y，对于x的每一个值，y都有唯一的值与之对应，我们就称y是x的函数，x是自变量，y是因变量. 表示函数关系的方法通常有三种：表达式法、列表法、图象法.

(2)若函数的表达式都是用自变量的一次整式表示的，我们称它们为一次函数. 一次函数通常可以表示为$y=kx+b$的形式，其中$k\neq0$，k，b是常数. 特别地，当$b=0$时，一次函数$y=kx$(常数$k\neq0$)就叫正比例函数. 正比例函数是特殊的一次函数.

你可以开始今天的新课学习了！

八年级下学期我们学习过一次函数，知道函数解析式中自变量的最高次数可以不止一次.今天我们就来学习一类新的更高次的函数：二次函数.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 为什么学二次函数？

周长为某一定值的矩形面积与它的一条边的长度有什么关系呢？

例如，不妨设矩形的周长为定值 a，一边长为 x，面积为 y，则 $y=\frac{(a-2x)}{2}\cdot x$，即

$$y=-x^2+\frac{a}{2}x.$$

这一关系中，当 x 变化时，y 随之变化，而且对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值与之对应.因此，y 是关于 x 的函数，其表达式是自变量的二次多项式.生活和数学中，类似的函数关系有很多，为此，我们有必要学习这种新的函数模型——二次函数.

2. 什么是二次函数？

(1)如果函数表达式是自变量的二次多项式，那么这样的函数称为二次函数.

它的一般形式是 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0,a,b,c$ 为常数).

(2)在二次函数定义中要求 $a\neq0$，但 b,c 均可为 0.

若 $b=0$，则 $y=ax^2+c$；

若 $c=0$，则 $y=ax^2+bx$；

若 $b=c=0$，则 $y=ax^2$.

3. 对二次函数定义的理解可以用类似于对一次函数定义的理解的方式

函数的表达式是用自变量的一次整式表示的，称为一次函数；

函数的表达式是用自变量的二次整式表示的，称为二次函数.

说明：按"次数"定义函数是给函数命名的一种方法，用类似的方法，今后还可以定义更高次的函数.

4. 判断某函数是否为二次函数，须将表达式其化简成 $y=ax^2+bx+c$ 的形式.

〖变式训练〗

1. 已知函数：①$y=ax^2$；②$y=3(x-1)^2-2$；③$y=(x+3)^2-2x^2$；④$y=\frac{1}{x^2}+x$.其中，是二次函数的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 如果函数 $y=(k-2)x^{k^2-2k+2}+kx+1$ 是关于 x 的二次函数，那么 k 的值是 (　　)

A. 1 或 2　　B. 0 或 2　　C. 2　　D. 0

3. 已知关于 x 的函数 $y=(m^2-m)x^2+(m-1)x+2-2m$.

(1)若这个函数是二次函数，求 m 的取值范围.

(2)若这个函数是一次函数，求 m 的值.

(3)这个函数可能是正比例函数吗？为什么？

〚反思迁移〛

1. 形如 $y=kx+b(k\neq0)$ 的函数叫作一次函数，一次函数的表达式是关于自变量的一次整式. 类似地，二次函数的表达式是关于自变量的二次整式，二次函数的一般形式是 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

2. 按“次数”定义函数是给函数命名的一种方法，用类似的方法，今后还可以定义更高次的函数.

3. 判断某函数是否为二次函数，须将其表达式化简成 $y=ax^2+bx+c$ 的形式，然后判断表达式中的 a 是否为 0.

三、效果检测

1. 圆面积公式为 $S=\pi r^2$，S 与 r 之间的关系是 (　　)

A. 正比例函数　　B. 一次函数

C. 二次函数　　D. 以上答案都不对

2. 下列函数中，一定为二次函数的是 (　　)

A. $y=x+3$　　B. $y=ax^2+bx+c$

C. $y=t^2-2t+2$　　D. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

3. 对于任意实数 m，下列函数一定是二次函数的是 (　　)

A. $y=(m-1)^2x^2$　　B. $y=(m+1)^2x^2$

C. $y=(m^2+1)x^2$　　D. $y=(m^2-1)x^2$

4. 对于 $y=ax^2+bx+c$，有以下四种说法，其中正确的是 (　　)

A. 当 $b=0$ 时，是二次函数 $y=ax^2+c$　　B. 当 $c=0$ 时，是二次函数 $y=ax^2+bx$

C. 当 $a=0$ 时，是一次函数 $y=bx+c$　　D. 以上说法都不对

5. 设 $y=y_1-y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x^2 成正比例，则 y 与 x 的函数关系是 (　　)

A. 正比例函数　　B. 一次函数

C. 二次函数　　D. 以上均不正确

1.2 二次函数的图象与性质(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 与点 $M(1,2)$关于 y 轴对称的点的坐标为 ( )

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,-2)$

C. $(1,-2)$　　D. $(2,-1)$

2. 关于函数 $y=2x$，下列结论中正确的是 ( )

A. 函数图象经过点$(2,1)$　　B. 函数图象经过第二、四象限

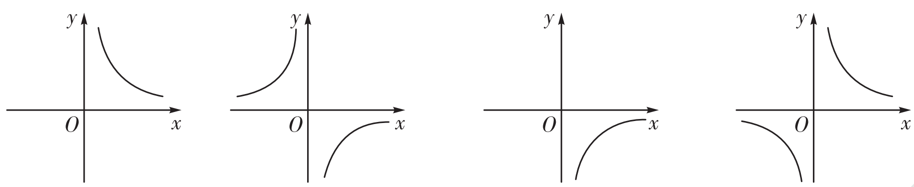
C. y 随 x 的增大而增大　　D. 不论 x 取何值，总有 $y>0$

3. 直线 $y=-\frac{2}{3}x+2$ 不经过 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 在下图中，反比例函数 $y=\frac{2}{x}$的图象大致是 ( )



A　　B　　C　　D

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 描点法是作函数图象的一种最基本方式. 步骤如下：

①明确函数表达式；

②列表：取一些自变量与因变量的对应值；

③描点：根据列表所得自变量与函数值的对应值，将每对对应值为坐标的点描在平面直角坐标系内；

④连线：用平滑的曲线将所描点连起来.

2. 一次函数

(1)一般形式：$y=kx+b(k\neq0)$，当 $b=0$ 时，一次函数就变成了正比例函数.

(2)图象：过$\left(-\frac{b}{k},0\right)$和$(0,b)$两点的一条直线.

(3)性质：

①当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，图象必过第一、三象限；

②当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，图象必过第二、四象限；

③当 $b>0$ 时，图象与 y 轴交于正半轴，必过第一、二象限；

④当 $b<0$ 时，图象与 y 轴交于负半轴，必过第三、四象限；

⑤当 $b=0$ 时，图象与 y 轴交于坐标原点，其图象为正比例函数的图象.

3. 反比例函数

(1)一般形式：$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

(2)图象：反比例函数的图象是双曲线，是不与两坐标轴相交的两条曲线.

(3)性质：

①当 $k>0$ 时，图象位于第一、三象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而减小；

②当 $k<0$ 时，图象位于第二、四象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而增大；

③反比例函数的图象是关于原点对称的中心对称图形.

4. 研究函数图象通常从图象的形状、经过的象限、图象的变化趋势、最值等方面进行研究.

你可以开始今天的新课学习了！

前面我们学过一次函数、反比例函数的图象与性质，那么二次函数的图象可能是什么形状呢？二次函数又有哪些性质呢？通过本节课的学习，我们将逐步来解决这些问题.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 如何画二次函数的图象

学习一次函数和反比例函数时，我们借助描点法画出了它们的图象，得出它们的图象分别是直线和双曲线. 类似地，我们也需要借助描点法来探究二次函数的图象是怎样的曲线.

学习一次函数和反比例函数的图象时，我们发现它们的图象是由其表达式 $y=kx+b$，$y=\frac{k}{x}$中的 k，b 确定的. 类似地，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象是否也是由 a，b，c 确定的呢？为此，我们可从最特殊的形式 $y=ax^2$ 出发，分 $a>0$，$a<0$ 两种情况探究

它的图象是怎样的曲线.

2. 二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象

为了探讨二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象，我们可按"从特殊到一般"的思维方式，先画出诸如 $y=x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 等函数的图象，然后得出一般性的结论：$y=ax^2(a>0)$ 的图象如图 1.2－1－1 所示.

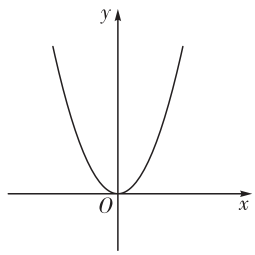


图 1.2－1－1

3. 从"数"与"形"两个角度认识二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象特点

(1)根据图象可以直观地看出，二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象关于 y 轴对称. 从表达式 $y=ax^2(a>0)$ 也可以发现，当自变量 x 取一对互为相反数的数时，函数值 y 相等，可知其图象关于 y 轴对称.

(2)从图象可以看出，在 y 轴的左边部分，图象上的点随自变量的增大而下降，函数值随自变量的增大而减小；在 y 轴的右边部分，图象上的点随自变量的增大而上升，函数值随自变量的增大而增大. 借助表达式 $y=ax^2(a>0)$ 也可以计算得出：当自变量 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当自变量 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

(3)从图象可以看出，图象开口向上，图象上所有点的最低位置为原点(0，0). 借助表达式 $y=ax^2(a>0)$ 也可以发现，不论自变量 x 为何值，函数值均大于或等于 0，即函数的最小值为 0.

〖变式训练〗

1. 已知点$(-1,y_1)$，$(2,y_2)$，$(-3,y_3)$都在函数 $y=x^2$ 的图象上，则 y_1,y_2,y_3 之间的大小关系为 (　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$　　C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

2. 有下列四个二次函数：①$y=x^2$，②$y=2x^2$，③$y=\frac{1}{2}x^2$，④$y=3x^2$. 它们的图象开口从大到小的排列顺序是________________.

3. 已知二次函数 $y=x^2$ 和 $y=2x^2$，有以下说法：① 它们的图象都是开口向上；②它们的图象对称轴都是 y 轴，顶点坐标都是原点(0，0)；③当 $x>0$ 时，它们的函数值 y 都是随着 x 的增大而增大；④它们的图象开口大小是一样的. 其中正确的说法有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

〖反思迁移〗

1. 我们学习了几个重要的知识：

(1)利用描点法画二次函数 $y=ax^2(a>0)$的图象.

(2)二次函数 $y=ax^2(a>0)$的图象是一条关于 y 轴对称的曲线，它的开口向上，对称轴与图象的交点是原点(0,0)；图象在对称轴右边的部分，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大(函数图象从左至右呈上升的趋势)，图象在对称轴左边的部分，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小(函数图象从左至右呈下降的趋势).

2. 本内容的学习中我们用到了两个重要的方法.

(1)我们通过比较横坐标互为相反数的两个点的坐标特点以及位置特点，得出了二次函数 $y=ax^2(a>0)$的图象关于 y 轴对称. 通过观察比较 y 轴右边描出的各点的横坐标变化时相应的纵坐标的变化情况，发现了与之对应的图象的变化情况. 从而把“数”的特征与“形”的特征有效地结合，加深了我们对函数及其图象的认识，这种将“数”的特征与“形”的特征有效结合起来处理数学问题的方法叫做“数形结合法”.

(2)画反比例函数图象时，可以根据反比例函数图象关于原点的对称性画图，简单方便. 类比反比例函数图象的简易画法，结合二次函数 $y=ax^2$ 关于其对称轴对称的性质，我们在画二次函数 $y=ax^2$ 的图象时，只需先通过描点画出该图象的对称轴一侧的部分，再利用对称性，画出图象在对称轴另一侧部分. 这种将遇到的复杂问题转化为简单问题来解决的方法，是数学学习中非常重要的方法.

三、效果检测

1. 对于函数 $y=5x^2$，下列结论正确的是 (　　)

A. y 随 x 的增大而增大　　B. 图象开口向下

C. 图象关于 y 轴对称　　D. 无论 x 取何值，y 的值总是正的

2. 抛物线 $y=3x^2$ 的顶点坐标是 (　　)

A. (3,0)　　B. (0,3)　　C. (0,0)　　D. (1,3)

3. 二次函数 $y=x^2$ 的对称轴是 (　　)

A. 直线 $y=1$　　B. 直线 $x=1$　　C. y 轴　　D. x 轴

4. 抛物线 $y=-x^2$ 的开口方向是 (　　)

A. 向上　　B. 向下　　C. 向左　　D. 向右

5. 关于 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=2x^2$ 的图象，下列说法不正确的是 (　　)

A. 顶点相同　　B. 对称轴相同

C. 开口方向相同　　D. 图象形状相同

1.2 二次函数的图象与性质(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 点(2,-3)关于 x 轴对称的点的坐标为 ( )

A. (-2,-3) B. (2,3)

C. (-2,3) D. (3,2)

2. 关于函数 $y=\frac{1}{2}x^2$,下列说法错误的是 ( )

A. 图象开口向上

B. 图象关于 y 轴对称

C. 函数有最大值为 0

D. 图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而减小

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 如果两个点关于 x 轴对称,则这两个点的横坐标相同,纵坐标互为相反数;如果两个点关于 y 轴对称,则这两个点的横坐标互为相反数,纵坐标相同;如果两个点关于原点对称,则这两个点的横坐标互为相反数,纵坐标互为相反数.

2. 我们一般从函数图象的开口方向、对称性、函数值随自变量的变化情况、最大值与最小值等方面来理解函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象的性质和特征,函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象有如下特征:开口向上;关于 y 轴对称;图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而减小,图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而增大;当 $x=0$ 时,函数取最小值,最小值为 0.

你可以开始今天的新课学习了!

上节课,我们已经研究过形如 $y=ax^2(a>0)$ 的二次函数的图象特征及性质.那么形如 $y=ax^2(a<0)$ 的二次函数的图象又是怎样呢? $y=ax^2(a<0)$ 的图象与 $y=ax^2(a>0)$ 的图象有何区别与联系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 函数 $y=ax^2(a<0)$ 的图象

函数 $y=ax^2(a<0)$ 与函数 $y=ax^2(a>0)$ 的表达式的形式相同，唯一不同的是二次项系数 a 的符号，一个为正一个为负. 所以，当自变量取相同的值时，函数 $y=ax^2(a<0)$ 与 $y=ax^2(a>0)$ 的值互为相反数，可见，函数 $y=ax^2(a<0)$ 与 $y=ax^2(a>0)$ 的图象关于 x 轴对称. 于是，我们可根据前面得出的二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的图象得出 $y=ax^2(a<0)$ 的图象，如图 1.2-2-1.

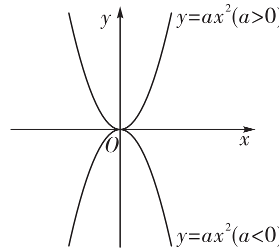


图 1.2-2-1

2. 从"数"与"形"两个角度认识二次函数 $y=ax^2(a<0)$ 图象和性质

(1)根据图象可以直观地看出，二次函数 $y=ax^2(a<0)$ 的图象关于 y 轴对称. 从表达式 $y=ax^2(a<0)$ 也可以发现，当自变量 x 取一对互为相反数的数时，函数值 y 相等，可知其图象关于 y 轴对称.

(2)从图象中可以看出，在 y 轴的左边部分，图象上的点随自变量的增大而上升，函数值随自变量的增大而增大；在 y 轴的右边部分，图象上的点随自变量的增大而下降，函数值随自变量的增大而减小. 借助表达式 $y=ax^2(a<0)$ 也可以计算得出，当自变量 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当自变量 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

(3)从图象中可以看出，图象的开口向下，图象上所有点的最高位置为原点(0,0). 借助表达式 $y=ax^2(a<0)$ 也可以发现，不论自变量 x 为何值，函数值均为非正数，即函数的最大值为 0.

3. 抛物线

函数 $y=ax^2(a<0)$ 的图象的一段与生活中抛掷物体时物体运行的路线类似，因此我们称二次函数 $y=ax^2$ 的图象为抛物线，简称抛物线 $y=ax^2$. 抛物线 $y=ax^2$ 关于 y 轴对称，抛物线与它的对称轴的交点(0,0)叫做抛物线的顶点.

〖变式训练〗

1. 已知点$(-1,y_1)$,$(2,y_2)$,$(-3,y_3)$都在函数 $y=-x^2$ 的图象上，则 (　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

2. 有下列四条抛物线：①$y=-x^2$，②$y=2x^2$，③$y=-\frac{1}{2}x^2$，④$y=3x^2$. 开口从大到小的排列顺序是____________.

3. 关于二次函数 $y=-x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$，有以下说法：① 它们的图象都是开口向下；②它们图象的对称轴都是 y 轴，顶点坐标都是原点(0,0)；③当 $x>0$ 时，它们的函数值 y 都是随着 x 的增大而增大；④它们图象开口的大小是一样的. 其中正确的说法有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

〖反思迁移〗

1. 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图象是一条抛物线.

2. 一般从函数图象的开口方向、对称性、函数值随自变量的变化情况、最大值与最小值等方面来理解函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图象特征及性质. 函数 $y=ax^2(a\neq0)$的图象关于 y 轴对称，a 的符号决定抛物线的开口方向、函数值随自变量的变化情况及最大值与最小值(例如：$a>0$ 时，图象在对称轴左边部分，函数值随自变量的增大而减小，图象在对称轴右边部分，函数值随自变量的增大而增大. 当 $x=0$ 时，函数取最小值，最小值为 0).

三、效果检测

1. 对于函数 $y=-\frac{3}{2}x^2$，下列结论正确的是 (　　)

A. y 随 x 的增大而增大　　B. 图象开口向上

C. 图象关于 y 轴对称　　D. 无论 x 取何值，y 的值总是正数

2. 抛物线 $y=-3x^2$ 的顶点坐标是 (　　)

A. (3,0)　　B. (0,3)　　C. (0,0)　　D. (1,3)

3. 二次函数 $y=-x^2$ 图象的对称轴是 (　　)

A. 直线 $y=1$　　B. 直线 $x=1$　　C. y 轴　　D. x 轴

4. 抛物线 $y=-x^2$ 的开口方向是 (　　)

A. 向上　　B. 向下　　C. 向左　　D. 向右

5. 关于 $y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-2x^2$ 的图象，下列说法不正确的是 (　　)

A. 顶点相同　　B. 对称轴相同

C. 开口方向不相同　　D. 图象形状相同

1.2 二次函数的图象与性质(3)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 点(2,−3)向右平移3个单位长度后的坐标为 ( )

A. (−1,−3) B. (2,0)

C. (−2,−6) D. (5,−3)

2. 平移不改变图形的 ( )

A. 位置 B. 位置和形状

C. 形状和大小 D. 都不正确

3. 将直线 $y=2x+4$ 沿 x 轴向右平移 $a(a>0)$ 个单位长度,所得直线的函数表达式为 ( )

A. $y=2(x-a)+4$ B. $y=2(x+a)+4$

C. $y=2x+a+4$ D. $y=2x-a+4$

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 将点 $P(a,b)$ 向右移 m 个单位长度得到 $P(a+m,b)$,向左移 m 个单位长度得到 $P(a-m,b)$.

2. 函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线,关于 y 轴对称.

当 $a>0$ 时,抛物线开口向上. 图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而减小;图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而增大. 当 $x=0$ 时,函数取最小值,最小值为0.

当 $a<0$ 时,抛物线开口向下. 图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而增大;图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而减小. 当 $x=0$ 时,函数取最大值,最大值为0.

3. 函数图象的平移实际上是函数图象上点的平移. 函数图象向左(或向右)平移 a 个单位长度,则函数图象上的每一个点都向左(或向右)平移 a 个单位长度.

你可以开始今天的新课学习了!

上节课,我们已经研究过形如 $y=ax^2(a\neq0)$ 的二次函数的图象特征及性质,那么形如 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的二次函数图象又有什么特征呢? $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象有何区别与联系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 函数图象的平移

函数图象的平移实际上是函数图象上点的平移.函数图象向左(或向右)平移 a 个单位长度,则函数图象上的每一个点都向左(或向右)平移 a 个单位长度.可见,函数图象的平移不改变图象的形状,只改变它在平面直角坐标系中的位置.

2. 函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象

函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象有什么关系呢?

为了解决这一问题,我们不妨先探究三个具体的二次函数 $y=x^2$,$y=(x-2)^2$,$y=(x+2)^2$ 的图象之间的关系.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$y=(x-2)^2$	…	25	16	9	4	1	0	1	…

从上表中不难发现,当 $x=m$ 时,$y=x^2$ 的函数值为 $y=m^2$.当 $x=m+2$ 时,$y=(x-2)^2$ 的函数值也为 $y=m^2$.也就是说,$y=x^2$ 在 $x=m$ 时的函数值与 $y=(x-2)^2$ 在 $x=m+2$ 时的函数值相等.

可见,$y=(x-2)^2$ 的图象可看作是由 $y=x^2$ 的图象向右平移 2 个单位长度得到的.类似地,$y=(x+2)^2$ 的图象可看作是由 $y=x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度得到的,如图 1.2-3-1.

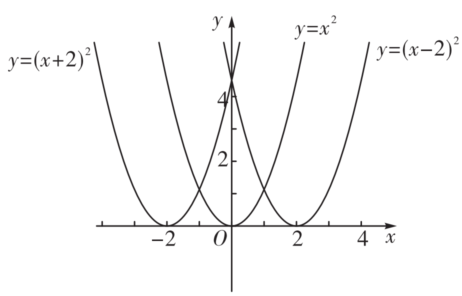


图 1.2-3-1

更一般地,当 $h>0$ 时,$y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象可看作是由 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象向右平移 h 个单位长度得到的;当 $h<0$ 时,$y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象可看作是由 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象向左平移 $|h|$ 个单位长度得到的.

例如,要画出函数 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图象,我们只需先将函数表达式变形为 $y=\frac{1}{2}[x-(-3)]^2$,因此只需先画出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象,再将它向左平移 3 个单位长度即可.

3. a，h 与函数 $y=a(x-h)^2(a\neq 0)$ 图象间的关系

a 决定函数图象的形状. h 只影响函数图象在平面直角坐标系中的位置，不改变图象的形状.

4. 函数 $y=a(x-h)^2(a\neq 0)$ 的性质

从图 1.2－3－2 所示的函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以直观地得出：

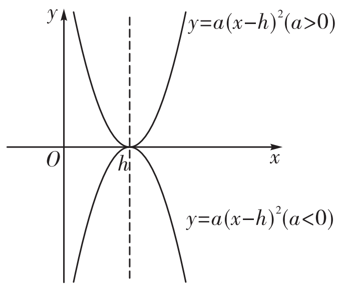


图 1.2－3－2

(1)函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是以直线 $x=h$ 为对称轴，点$(h,0)$为顶点的抛物线.

(2)当 $a>0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的开口向上，图象的最低点为$(h,0)$，当 $x=h$ 时函数取最小值 0；在对称轴 $x=h$ 的左侧，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 上的点随 x 的增大而下降，函数值随 x 的增大而减小，在对称轴 $x=h$ 的右侧，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 上的点随 x 的增大而上升，函数值随 x 的增大而增大.

(3)当 $a<0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的开口向下，图象的最高点为$(h,0)$，当 $x=h$ 时函数取最大值 0；在对称轴 $x=h$ 的左侧，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 上的点随 x 的增大而上升，函数值随 x 的增大而增大，在对称轴 $x=h$ 的右侧，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 上的点随 x 的增大而下降，函数值随 x 的增大而减小.

〖变式训练〗

1. 已知二次函数 $y=3(x+1)^2$ 的图象上有三点 $A(1,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(-2,y_3)$，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系为 (　　)

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_3>y_1>y_2$　　D. $y_3>y_2>y_1$

2. 将二次函数 $y=x^2$ 的图象向右平移 3 个单位长度，得到的新图象的函数表达式是 (　　)

A. $y=x^2+3$　　B. $y=x^2-3$

C. $y=(x+3)^2$　　D. $y=(x-3)^2$

3. 抛物线 $y=3x^2$ 与 $y=3(x+3)^2$ 的不同点是 (　　)

A. 开口方向　　B. 开口大小

C. 形状　　D. 对称轴

4. 当 $x=2$ 时，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 取最大值，且此函数的图象经过点 $(1,-3)$，求此二次函数的表达式，并指出 x 为何值时 y 随 x 的增大而增大.

〖反思迁移〗

1. 函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象可以看作是由 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象向左 $(h<0)$ 或向右 $(h>0)$ 平移 $|h|$ 个单位长度而得到的.

2. 处理函数及其图象性质问题时，通常既研究函数表达式中 y 随自变量 x 的变化情况，又研究函数图象变化情况，应从“数”和“形”两种不同角度来思考.

三、效果检测

1. 抛物线 $y=2(x-3)^2$ 的顶点在 （　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. y 轴上　　D. x 轴上

2. 关于函数 $y=3(x-2)^2$，下列说法正确的是 （　　）

A. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小

B. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而减小

3. 将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象向左平移 2 个单位长度，得到 $y=x^2-2x+1$ 的图象，则 b 和 c 的值分别为 （　　）

A. $b=-6,c=9$　　B. $b=6,c=-9$

C. $b=4,c=-9$　　D. $b=-3,c=6$

1.2 二次函数的图象与性质(4)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 点(2,−3)向上平移3个单位长度后的坐标为　（　　）

A. (−1,−3)　　B. (2,0)

C. (−2,−6)　　D. (5,−3)

2. 将直线 $y=-2x-3$ 向上平移5个单位长度,所得直线的表达式为　（　　）

A. $y=-2(x-5)-3$　　B. $y=-2(x+5)-3$

C. $y=-2x-8$　　D. $y=-2x+2$

3. 关于函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$,下列说法错误的是　（　　）

A. 图象开口向上

B. 图象的对称轴为直线 $x=1$

C. 函数的最小值为0

D. 图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而增大

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 将点 $P(a,b)$ 向上平移 $m(m>0)$ 个单位长度得到 $P(a,b+m)$,向下平移 $m(m>0)$ 个单位长度得到 $P(a,b-m)$.

2. 将直线 $y=kx+b$ 向上平移 $m(m>0)$ 个单位长度,所得直线的表达式为 $y=kx+b+m$;将直线 $y=kx+b$ 向下平移 $m(m>0)$ 个单位长度,所得直线的表达式为 $y=kx+b-m$.

3. 函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线,关于直线 $x=h$ 对称.

当 $a>0$ 时,抛物线开口向上,图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而减小,图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而增大. 当 $x=h$ 时,函数取最小值,最小值为0.

当 $a<0$ 时,抛物线开口向下,图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而增大,图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而减小. 当 $x=h$ 时,函数取最大值,最大值为0.

你可以开始今天的新课学习了!

我们已经研究过形如 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的二次函数图象特征及性质,那么形如 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的二次函数图象又有怎样的特征呢? $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象与 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象有何区别与联系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象

函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 与 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象有什么关系呢?

为了解决这一问题,我们不妨先探究三个具体的二次函数 $y=(x-2)^2$,$y=(x-2)^2+3$,$y=(x-2)^2-3$ 的图象之间的关系.

不难发现,不论自变量 x 取何值,相应的 $y=(x-2)^2+3$ 的函数值总比 $y=(x-2)^2$ 的函数值大 3,$y=(x-2)^2-3$ 的函数值总比 $y=(x-2)^2$ 的函数值小 3. 所以,$y=(x-2)^2+3$ 的图象可看作是由 $y=(x-2)^2$ 的图象向上平移 3 个单位长度得到的. 类似地,$y=(x-2)^2-3$ 的图象可看作是由 $y=(x-2)^2$ 的图象向下平移 3 个单位长度得到的. 如图 1.2-4-1.

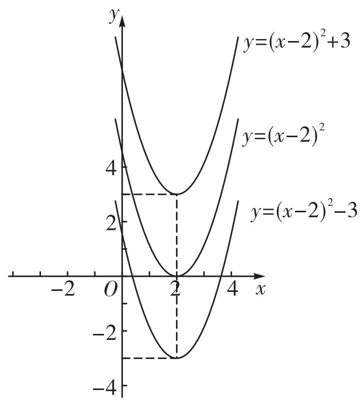


图 1.2-4-1

更一般地,当 $k>0$ 时,$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象可看作是由 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象向上平移 k 个单位长度得到的;当 $k<0$ 时,$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象可看作是由 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象向下平移 $|k|$ 个单位长度得到的.

例如,要画出函数 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-5$ 的图象,可先画出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象,再将该图象向左平移 3 个单位长度,得到 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图象,再向下平移 5 个单位长度便得到 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-5$ 的图象.

2. a,h,k 与函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象的关系

a 决定函数图象的形状. h 和 k 只影响函数图象在平面直角坐标系中的位置,不影响图象的形状.

3. 函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的性质

从图 1.2-4-2 所示的函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可以直观地得出:

(1)函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象是以直线 $x=h$ 为对称轴,点 (h,k) 为顶点的抛物线.

(2)当 $a>0$ 时,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口向上,图象的最低点为 (h,k),当 $x=h$ 时,函数取最小值 k;在对称轴 $x=h$ 的左侧,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 上的点随 x 的增大而下降,函数值随 x 的增大而减小,在对称轴 $x=h$ 的右侧,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 上的点随 x 的增大而上升,函数值随 x 的增大而增大.

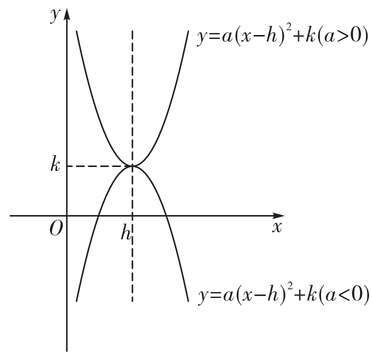


图 1.2-4-2

(3)当 $a<0$ 时,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口向下,图象的最高点为 (h,k),当 $x=h$ 时,函数取最大值 k;在对称轴 $x=h$ 的左侧,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 上的点随 x 的增大而上升,函数值随 x 的增大而增大,在对称轴 $x=h$ 的右侧,抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 上的点随 x 的增大而下降,函数值随 x 的增大而减小.

(4)通过二次函数表达式 $y=a(x-h)^2+k$ 可以快速地看出抛物线的顶点坐标,所以我们将形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函数表达式叫做顶点式.

〖变式训练〗

1. 抛物线 $y=3(x-1)^2+1$ 的顶点坐标是 ( )

A. $(1,1)$ B. $(-1,1)$ C. $(-1,-1)$ D. $(1,-1)$

2. 关于抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$,下列说法中正确的有 ( )

①开口向下; ②对称轴是 $x=2$;

③可由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ 向右平移 2 个单位长度得到; ④当 $x>2$ 时 y 随 x 增大而减小.

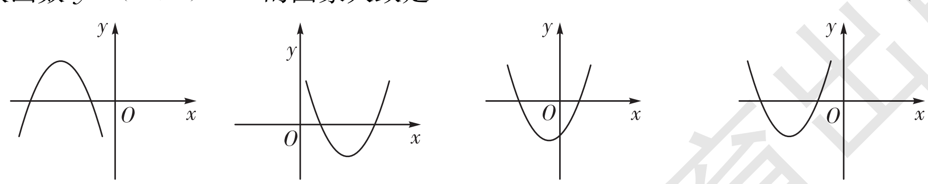
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3. 关于二次函数 $y=-(x+1)^2+2$ 的图象,下列判断正确的是 ( )

A. 图象开口向上 B. 图象的对称轴是直线 $x=1$

C. 图象有最低点 D. 图象的顶点坐标为 $(-1,2)$

4. 二次函数 $y=(x+1)^2-2$ 的图象大致是 ( )



〖反思迁移〗

1. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象是一条抛物线,其表达式中的 a 决定函数图象的形状,h 和 k 只影响函数图象在平面直角坐标系中的位置,不影响图象的形状.

2. 将抛物线 $y=ax^2$ 左右平移可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2$，再进行上下平移可得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$.

3. 借助二次函数的图象可以直观地得出二次函数的性质，如图象的对称性，最大或最小值，y 随 x 的变化而变化的规律.

三、效果检测

1. 函数 $y=2(x+1)^2+3$ 的最小值是 （　　）

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

2. 当函数 $y=(x-1)^2-2$ 的函数值 y 随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围是 （　　）

A. $x>0$　　B. $x<1$　　C. $x>1$　　D. x 为任意实数

3. 关于二次函数 $y=2(x-2)^2-3$ 与 $y=2(x-2)^2+4$，下列说法中正确的有 （　　）

(1)图象的形状相同　　(2)图象的顶点相同

(3)图象的对称轴相同　　(4)当 $x=2$ 时函数都取最小值

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

4. 如图 1.2－4－3，在平面直角坐标系中，有两条位置确定的抛物线，它们的对称轴相同，表达式中的 h,k,m,n 都是常数，则下列关系不正确的是 （　　）

A. $h<0,k>0$

B. $m<0,n>0$

C. $h=m$

D. $k=n$

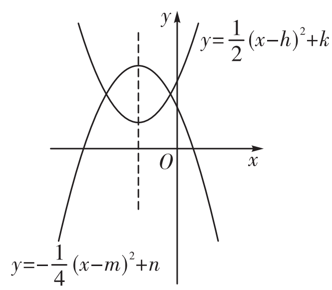


图 1.2－4－3

5. 顶点为(5，1)，形状与函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象相同且开口方向相反的抛物线是 （　　）

A. $y=-\frac{1}{3}(x-5)^2+1$　　B. $y=-\frac{1}{3}x^2-5$

C. $y=-\frac{1}{3}(x-5)^2-1$　　D. $y=\frac{1}{3}(x+5)^2-1$

6. 已知二次函数 $y=3(x+1)^2+3$ 的图象上有三点 $A(1,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(-2,y_3)$，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系为 （　　）

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_3>y_1>y_2$　　D. $y_3>y_2>y_1$

1.2 二次函数的图象与性质(5)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 用配方法解一元二次方程 $x^2-6x-4=0$,配方正确的是 ( )

A. $(x-6)^2=32$ B. $(x-6)^2=40$ C. $(x-3)^2=13$ D. $(x-3)^2=5$

2. 将 $2x^2-8x+10$ 化成 $a(x+h)^2+k$ 的形式,则 h,k 的值分别是 ( )

A. $h=2,k=-2$ B. $h=2,k=2$ C. $h=-2,k=-2$ D. $h=-2,k=2$

3. 关于二次函数 $y=-(x+h)^2+k$ 的图象,下列说法正确的是 ( )

A. 图象开口向上 B. 图象的对称轴是直线 $x=h$

C. 图象有最低点 D. 图象的顶点坐标为 $(-h,k)$

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 解一元二次方程——配方法:将一元二次方程配成 $(x+m)^2=n$ 的形式,再利用直接开平方法求解,这种解一元二次方程的方法叫配方法.

2. 函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线,关于直线 $x=h$ 对称.

当 $a>0$ 时,抛物线开口向上,图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而减小,图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而增大;当 $x=h$ 时,函数取最小值,最小值为 k.

当 $a<0$ 时,抛物线开口向下,图象在对称轴左边部分,函数值随自变量的增大而增大,图象在对称轴右边部分,函数值随自变量的增大而减小;当 $x=h$ 时,函数取最大值,最大值为 k.

你可以开始今天的新课学习了!

我们已经研究过形如 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的二次函数的图象与性质,那么对于二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,我们又怎样研究它的图象与性质呢? $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象有何区别与联系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象

前面我们已学习了二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象,根据图象我们可直观地得出

其性质. 如果仅给出二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c$，怎样快速地画出其图象呢？为此，我们自然会想到，将 $y=ax^2+bx+c$ 变形为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式.

注意到 $y=a(x-h)^2+k$ 中 $(x-h)^2$ 是含有自变量 x 的完全平方式，我们可借助解一元二次方程的配方法，将含自变量 x 的项配成完全平方式.

具体运算过程如下：

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c\\&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.\end{aligned}$$

由此可以得出，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时函数达到最大值 $(a<0)$ 或最小值 $(a>0)$，最大(小)值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例如，通过配方，可将二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ 的表达式变形为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$. 进而可知，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$ 的顶点坐标为 $(2,1)$，对称轴为 $x=2$，当 $x=2$ 时函数取最大值 1.

2. 根据图象确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数的符号

例 如图 1.2-5-1 为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，有下列说法：①$ac<0$；②$b<0$；③$2a+b=0$；④$a+b+c>0$；⑤当 $x>0.5$ 时，y 随 x 的增大而增大. 其中正确的说法有 ( )

A. 5 个　　B. 4 个

C. 3 个　　D. 2 个

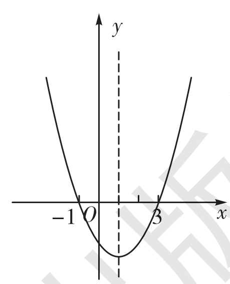


图 1.2-5-1

分析: 由抛物线的开口方向判断 a 的正负，由抛物线与 y 轴的交点判断 c 的正负，然后根据抛物线与 x 轴交点情况及对称轴的位置进行推理，从而判断对错.

解答: ∵抛物线的开口向上，∴$a>0$. ∵$y=ax^2+bx+c$ 的图象与 y 轴的交点 $(0,c)$ 在 y 轴的负半轴上，∴$c<0$. 因此 $ac<0$，故①正确. ∵图象与 x 轴的交点为 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$，∴对称轴为直线 $x=1$，即 $-\frac{b}{2a}=1$，∴$2a=-b$，即 $2a+b=0$. 又 $a>0$，因而 $b<0$(即 a 与 b 异号)，故②和③都正确. 观察图象可知：当 $x=1$ 时，图象的最低点(顶点)的纵坐标 $y=a+b+c<0$，故④错误；当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，故⑤错误. 综上所述，①②③都正确，故选 C.

【变式训练】

1. 抛物线 $y=x^2-2x-1$ 的对称轴是 ( )

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=2$　　D. $x=-2$

2. 函数 $y=-x^2-4x-3$ 的图象的顶点坐标是 ( )

A. $(2,-1)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(2,1)$

3. 关于二次函数 $y=-2x^2-4x+3$ 的性质，下列描述错误的是 ( )

A. 图象开口向下　　B. 图象与 y 轴交于 x 轴下方

C. 图象与 x 轴有两个交点　　D. $x>-1$ 时 y 随 x 的增大而减小

4. 若二次函数 $y=x^2-6x+c$ 的图象过 $A(-1,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(5,y_3)$，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是 ( )

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_1>y_3>y_2$

C. $y_2>y_1>y_3$　　D. $y_3>y_1>y_2$

【反思迁移】

1. 研究二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质时，我们通过配方将其转化为上一节课学过的二次函数的顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 来进行研究，这种转化思想是数学中的一种重要思想.

2. 将 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的过程中，我们用到了配方法，即将含有自变量 x 的项配成完全平方式.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数 a,b,c 的几何意义：a 决定抛物线的开口方向和大小；a,b,c 共同决定图象在平面直角坐标系中的位置.

三、效果检测

1. 将二次函数 $y=x^2+4x+3$ 化成顶点式，变形正确的是 ( )

A. $y=(x-2)^2-1$　　B. $y=(x+1)(x+3)$

C. $y=(x-2)^2+1$　　D. $y=(x+2)^2-1$

2. 二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 y 轴的交点坐标是 ( )

A. $(0,-3)$　　B. $(1,0)$

C. $(1,-4)$　　D. $(3,0)$

3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1.2-5-2 所示，则 ( )

A. $a>0,b<0,c>0,b^2-4ac<0$

B. $a>0,b<0,c<0,b^2-4ac>0$

C. $a<0,b>0,c>0,b^2-4ac<0$

D. $a<0,b>0,c<0,b^2-4ac>0$

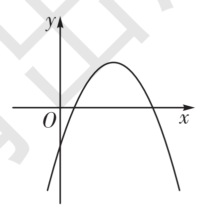


图 1.2-5-2

4. 对于二次函数 $y=x^2-2x+3$，若 y 随 x 的增大而增大，则 x 的取值范围是 ( )

A. $x<-1$　　B. $x>-1$　　C. $x<1$　　D. $x>1$

*1.3 不共线三点确定二次函数的表达式

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过(1,1)，(2，－4)，则 k 与 b 的值为 (　　)

A. $\begin{cases}k=3,\\b=-2\end{cases}$　B. $\begin{cases}k=-3,\\b=4\end{cases}$　C. $\begin{cases}k=-5,\\b=6\end{cases}$　D. $\begin{cases}k=6,\\b=-5\end{cases}$

2. 下列四组数值中，为方程组$\begin{cases}x+2y+z=0,\\2x-y-z=1,\\3x-y-z=2\end{cases}$的解是 (　　)

A. $\begin{cases}x=0,\\y=1,\\z=-2\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=1,\\y=0,\\z=1\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=0,\\y=-1,\\z=0\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\\z=3\end{cases}$

3. 抛物线 $y=a(x+2)^2-5$ 的顶点为 (　　)

A. (－2，－5)　B. (2，－5)

C. (－2,5)　D. (2,5)

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 一般地，一次函数的表达式 $y=kx+b(k\neq0)$ 中含有两个待定系数 k，b，所以用待定系数法求一次函数的表达式时一般需要知道两个条件.

2. 解方程组的基本方法是消元，常用的消元方法有代入消元法和加减消元法.

$$\text{三元一次方程组}\xrightarrow{\text{消元}}\text{二元一次方程组}\xrightarrow{\text{消元}}\text{一元一次方程}$$

你可以开始今天的新课学习了！

我们学习过用待定系数法求一次函数 $y=kx+b$ 的表达式，只要求出 k 和 b 的值，就可以确定一次函数的表达式. 类似地，用待定系数法可以求出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的表达式.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 几个点可以确定一条抛物线的表达式

求一次函数的表达式实质上就是要确定 $y=kx+b$ 中 k,b 的值.已知直线上两个点的坐标可通过解二元一次方程组求得 k,b 的值.

要确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的表达式,需要求出 a,b,c 的值,而确定 a,b,c 的值需要三组 x,y 值,即需要已知抛物线上三个点的坐标.

是否任意给出三个点就可以确定一条抛物线呢?显然,若三点在同一条直线上是不行的,必须得保证给定的三点不在同一条直线上(三点的横坐标两两不等),即不在同一直线上的三点确定一条抛物线.

2. 用待定系数法求二次函数的表达式

(1)根据图象上任意三个点的坐标求二次函数的表达式

不在同一直线上的三点确定一条抛物线,因此,如果已知抛物线上三个点的坐标,我们可以设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,类比求一次函数表达式的待定系数法求出 a,b,c 的值,进而求得二次函数的表达式.

例 1 二次函数的图象过 $A(4,-5)$,$B(0,3)$,$C(-1,0)$三点,求此二次函数的表达式.

解析:因为二次函数的图象过点 $A(4,-5)$,$B(0,3)$,$C(-1,0)$,所以可设该二次函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$,将这三个点的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$,可得关于 a,b,c 的三元一次方程组:$\begin{cases}16a+4b+c=-5,\\ c=3,\\ a-b+c=0,\end{cases}$

解此方程组得$\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\\ c=3.\end{cases}$

所以此二次函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)已知抛物线的顶点求二次函数的表达式

若已知抛物线的顶点坐标,则二次函数表达式(顶点式)$y=a(x-h)^2+k$ 中的 h,k 也随之确定,这时只需要再有一个条件便可用待定系数法求得其中的 a.

例 2 顶点为$(-2,-3)$的抛物线经过点$(1,6)$,求此抛物线的表达式.

解析:因为已知抛物线的顶点,因此可设抛物线的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$.由于抛物线顶点为$(-2,-3)$,所以 $h=-2$,$k=-3$,所以 $y=a(x+2)^2-3$.又因为抛物线过点$(1,6)$,所以 $6=a(1+2)^2-3$,解得 $a=1$,所以此抛物线的表达式为$y=(x+2)^2-3$.

(3)根据抛物线与 x 轴的交点坐标求二次函数的表达式

在学习一次函数时，我们可令其表达式 $y=kx+b$ 中的 y 为 0，通过解方程 $kx+b=0$ 求得其图象与 x 轴的交点. 同样地，我们也可以令二次函数表达式 $y=ax^2+bx+c$ 中的 y 为 0，通过解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 求出抛物线与 x 轴的交点.

学习一元二次方程时已知道，若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1，x_2，则二次多项式 ax^2+bx+c 可变形为 $a(x-x_1)(x-x_2)$. 同样地，若抛物线与 x 轴的交点的横坐标分别为 x_1，x_2，相应地，二次函数的表达式可写成 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，我们将它称为二次函数表达式的交点式.

例如：若二次函数图象与 x 轴的两交点分别为(2，0)，(3，0)，则此二次函数的表达式可表示为 $y=a(x-2)(x-3)$.

如果已知二次函数图象与 x 轴的两个交点，我们可以通过设交点式求得其表达式.

例 3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 $A(-2,0)$，$B(5,0)$ 两点，且过点 $C(0,-4)$，求此二次函数的表达式.

解析：已知二次函数图象与 x 轴的两个交点分别为 $A(-2,0)$，$B(5,0)$，因此可设此二次函数的表达式为 $y=a(x+2)(x-5)$，再将 $C(0,-4)$ 代入 $y=a(x+2)(x-5)$，可得 $a=\frac{2}{5}$，所以此二次函数的表达式为 $y=\frac{2}{5}(x+2)(x-5)$.

〖变式训练〗

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,-2)$，那么这个二次函数的表达式为 ( )

A. $y=x^2+x-2$　　B. $y=x^2+x+2$

C. $y=x^2-x-2$　　D. $y=2x^2-x-2$

2. 如果二次函数 $y=m(x-2)^2+m^2-1$ 的最小值是 0，则 m 的值为 ( )

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 2

3. 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象的最高点是 $(-1,-3)$，则 b，c 的值是 ( )

A. 2，4　　B. 2，-4

C. -2，4　　D. -2，-4

〖反思迁移〗

1. 二次函数的表达式有三种形式：①一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$；②顶点式 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$，其中 h，k 是函数图象顶点 (h,k) 的横、纵坐标；③交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$，其中 x_1，x_2 是函数图象与 x 轴的两个交点的横坐标.

2. 求二次函数的表达式，一般用待定系数法. 如果已知图象上三个点的坐标，可设一般式；如果已知图象的顶点坐标，可设顶点式；如果已知图象与 x 轴的交点坐标，可设交点式.

三、效果检测

1. 若抛物线 $y=2x^2-(m+3)x-m+7$ 的对称轴为 y 轴，则 m 为 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. -3　　D. -2

2. 二次函数 $y=x^2-mx+m+2$ 的图象的顶点在 x 轴上方且到 x 轴的距离为 3，则二次函数表达式为 (　　)

A. $y=x^2-2x+4$　　B. $y=x^2+2x$

C. $y=x^2-2x-1$　　D. $y=x^2+2x-1$

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象向左平移 2 个单位长度得到函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象，则 b 和 c 的值分别为 (　　)

A. $b=-6, c=9$　　B. $b=6, c=-9$

C. $b=4, c=-9$　　D. $b=-3, c=6$

4. 若二次函数的图象经过点$(1,4)$和$(5,0)$，且对称轴为 $x=2$，求此函数的表达式.

1.4 二次函数与一元二次方程的联系

一、前置夯实

〔前置诊断〕检测你的基础,助力新课学习.

1. 当二次函数 $y=x^2-x-2$ 的函数值为 0 时,自变量 x 的值为 ( )

A. $x_1=-2, x_2=1$　　B. $x_1=-2, x_2=-1$

C. $x_1=2, x_2=1$　　D. $x_1=2, x_2=-1$

2. 一元二次方程 $3x^2-6x+2=0$ 的根的情况是 ( )

A. 有两个不相等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 有两个实数根

3. 若一元二次方程 $3x^2+6x-4=0$ 的两根为 x_1, x_2,则下列各式正确的是 ( )

A. $x_1+x_2=2, x_1\cdot x_2=\frac{4}{3}$　　B. $x_1+x_2=-2, x_1\cdot x_2=\frac{4}{3}$

C. $x_1+x_2=-2, x_1\cdot x_2=-\frac{4}{3}$　　D. $x_1+x_2=2, x_1\cdot x_2=-\frac{4}{3}$

4. 一次函数 $y=2x-6$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 ( )

A. $(3,0)$　　B. $(-3,0)$

C. $(0,3)$　　D. $(0,-3)$

〔前置巩固〕如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 最常用的方法是公式法,当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,其求根公式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. $\Delta=b^2-4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式. 当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根;当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根.

3. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1, x_2,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

4. 一次函数与一元一次方程之间的联系

当一次函数的函数值 $y=0$ 时,一次函数 $y=kx+b$ 就转化成了一元一次方程 $kx+b=0$,且一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标即为一元一次方程 $kx+b=0$ 的解.

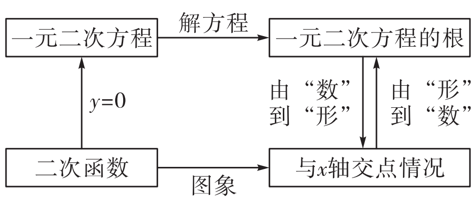
你可以开始今天的新课学习了！

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 y 取一个确定值时，就变成了一个一元二次方程，由此可知一元二次方程与二次函数有着密切的关系．那么二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之间到底有怎样的关系呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系



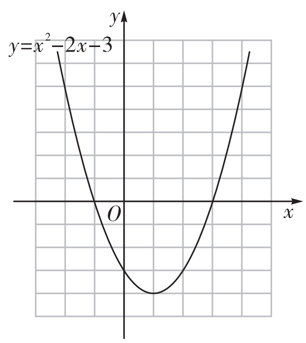


图 1．4－1－1

例如：

(1)从方程角度看，一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的根为 $x_1=-1$，$x_2=3$；

(2)从函数表达式角度看，二次函数 $y=x^2-2x-3$，当函数值 $y=0$ 时，自变量 $x=-1$或 3；

(3)从函数图象看，抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴的交点的横坐标为 -1 和 3(如图 1．4－1－1)．

2．一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可得如下结论．

(1)如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数值是 0，因此 $x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解．

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的位置关系有三种：没有公共点，有一个公共点，有两个公共点．这对应着一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的三种情况：没有实数解，有两个相等的实数解，有两个不等的实数解．

3．由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之间的关系，可拓展得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次不等式之间的关系

例如：抛物线 $y=x^2+2x-3$ 与 x 轴交于 $A(1,0)$，$B(-3,0)$，则不等式 $x^2+2x-3>0$ 的解集为 $x<-3$ 或 $x>1$，不等式 $x^2+2x-3<0$ 的解集为 $-3<x<1$．

〖变式训练〗

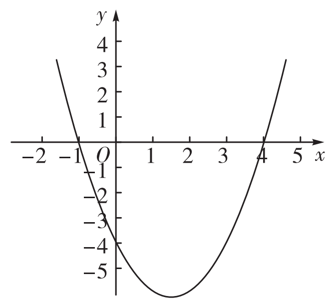


图 1.4－1－2

1. 函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象如图 1.4－1－2 所示，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解是 （　　）

A. 无解

B. $x=1$

C. $x=-4$

D. $x=-1$ 或 $x=4$

2. 下列关于二次函数 $y=ax^2-2ax+1(a>1)$ 的图象与 x 轴交点的判断，正确的是 （　　）

A. 没有交点

B. 只有一个交点，且它位于 y 轴右侧

C. 有两个交点，且它们均位于 y 轴左侧

D. 有两个交点，且它们均位于 y 轴右侧

3. 若二次函数 $y=x^2+bx$ 的图象的对称轴是经过点(2，0)且平行于 y 轴的直线，则关于 x 的方程 $x^2+bx=5$ 的解为 （　　）

A. $x_1=0$，$x_2=4$　　B. $x_1=1$，$x_2=5$

C. $x_1=1$，$x_2=-5$　　D. $x_1=-1$，$x_2=5$

4. 利用函数图象求方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数解(结果保留小数点后一位).

〖反思迁移〗

1. 当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 m 确定时，可以通过解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 求得相应的自变量 x 的值.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的公共点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，一元二次方程的解的个数就是其所对应的抛物线与 x 轴公共点的个数.

三、效果检测

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有交点，则 b^2-4ac ________ 0.

2. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 如图 1.4-1-3 所示，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ （　　）

A. 没有实数解

B. 有两个实数解，且一个解小于 1，一个解大于 2

C. 有两个实数解，且一个解为正，一个解为负

D. 只有一个实数解

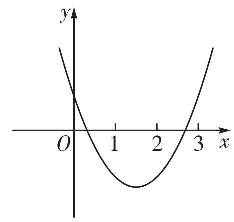


图 1.4-1-3

3. 一次函数 $y=2x+1$ 与二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象交点 （　　）

A. 只有一个　　B. 恰好有两个

C. 可以有一个，也可以有两个　　D. 无交点

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1.4-1-4 所示，那么关于 x 的方程 $ax^2+bx+c-3=0$ 的解的情况是 （　　）

A. 有两个不相等的实数解

B. 有两个异号实数解

C. 有两个相等的实数解

D. 无实数解

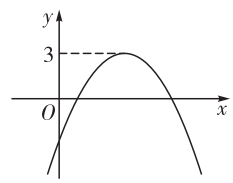


图 1.4-1-4

5. 二次函数 $y=-x^2+4x-3$ 的图象交 x 轴于 A，B 两点，交 y 轴于 C 点，则 $\triangle ABC$ 的面积为 （　　）

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 1

6. 画出函数 $y=x^2-4x-3$ 的图象，根据图象回答下列问题：

(1) 图象与 x 轴交点的坐标大致是什么？

(2) 方程 $x^2-4x-3=0$ 的解的近似值是什么？

(3) 不等式 $x^2-4x-3>0$，$x^2-4x-3<0$ 的解集分别是什么？

1.5 二次函数的应用

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 函数 $y=-x^2-4x-3$ 的最大值是 (　　)

A. -3　　B. 1　　C. -1　　D. 2

2. 如图 1.5-1-1，象棋盘上，若“帅”位于点$(-1,-2)$，“马”位于点$(2,-2)$，则“炮”可能位于点 (　　)

A. $(-3,1)$

B. $(0,0)$

C. $(-1,0)$

D. $(1,-1)$

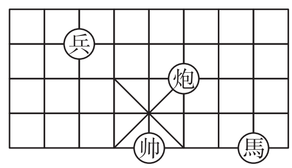


图 1.5-1-1

3. 如图 1.5-1-2，已知四边形 $ABCD$ 是长方形，$AB=3$，$AD=4$，点 A 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$，则点 C 的坐标是 (　　)

A. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$

B. $\left(\frac{3}{2},-3\right)$

C. $\left(3,\frac{3}{2}\right)$

D. $\left(\frac{3}{2},3\right)$

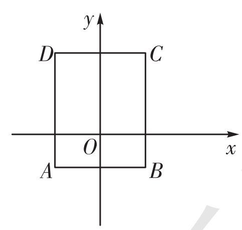


图 1.5-1-2

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可化为 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. 若 $a>0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 取最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$；若 $a<0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 取最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 平面直角坐标系中，已知点 P 的坐标为(a,b)：

(1)当 $a>0,b>0$ 时，点 P 在第一象限；当 $a<0,b>0$ 时，点 P 在第二象限；当 $a<0$，$b<0$ 时，点 P 在第三象限；当 $a>0,b<0$ 时，点 P 在第四象限. 反之，也成立.

(2)点 $P(a,b)$到 x 轴的距离为$|b|$，到 y 轴的距离为$|a|$.

你可以开始今天的新课学习了！

前面几节课，我们已经研究了二次函数的图象及其性质，那么二次函数究竟在实际生活问题中有什么用，如何用二次函数的知识来解释或解决生活中的常见问题呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 建立二次函数模型

（1）识模与解模

例 1 从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h(m)与小球的运动时间 t(s)之间的关系是 $h=30t-5t^2(0\leqslant t\leqslant 6)$，小球运动的时间是多少时，小球最高？小球运动中的最大高度是多少？

解：解决此问题，首先要明白此问题研究的是：小球的高度 h 和小球运动的时间 t 这两个变量之间的关系；

画出函数 $h=30t-5t^2(0\leqslant t\leqslant 6)$的图象，结合图象易知，小球运动中的最大高度对应自变量取顶点横坐标时的函数值，因此当 $t=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{30}{2\times(-5)}=3$ 时，h 取最大值，为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-\dfrac{30^2}{4\times(-5)}=45$，也就是说，小球运动的时间为 3 s 时，小球最高，最大高度是 45 m.

（2）建模与解模

例 2 用总长为 60 m 的篱笆围成矩形场地，矩形面积 S 随矩形一边长 l 的变化而变化，当 l 是多少米时，场地的面积 S 最大？

解：借助例 1 中解决问题的经验，不难解决此问题.

由题意得，$S=\left(\dfrac{60}{2}-l\right)l$，整理后得 $S=-l^2+30l(0<l<30)$. 因此，当 $l=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{30}{2\times(-1)}=15$ 时，S 取最大值，为$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{-30^2}{4\times(-1)}=225$，也就是说，当 $l=15$ m 时，场地的面积 S 最大.

2. 二次函数求最值

由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点是最低(高)点，可得当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 取最小(大)值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

【变式训练】

1. 如图 1.5－1－3，某运动员在 10 m 跳台跳水比赛时身体（看成一点）在空中的运动路线是抛物线 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$（图中标出的数据为已知条件），运动员在空中运动的最大高度离水面（　　）

A. 10 m

B. 10.4 m

C. $\frac{28}{3}$ m

D. $\frac{32}{3}$ m

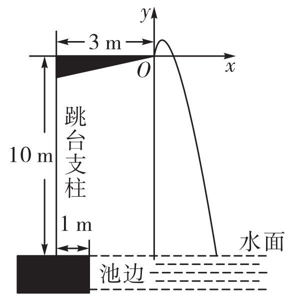


图 1.5－1－3

2. 河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线，建立如图 1.5－1－4 所示的平面直角坐标系，其函数表达式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度 DO 是 4 m 时，水面宽度 AB 为（　　）

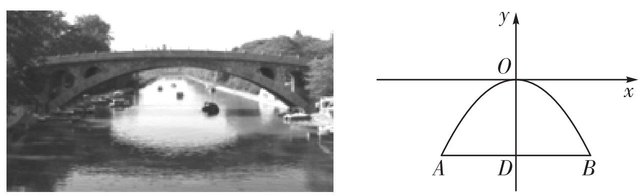


图 1.5－1－4

A. －20 m　　B. 10 m

C. 20 m　　D. －10 m

3. 如图 1.5－1－5，假设篱笆（虚线部分）的长度为 16 m，则所围成的矩形 $ABCD$ 的最大面积是（　　）

图 1.5－1－5

A. 60 m^2

B. 63 m^2

C. 64 m^2

D. 66 m^2

4. 某公司在甲、乙两地同时销售某种品牌的汽车．已知在甲、乙两地的销售利润 y（万元）与销售量 x（辆）之间分别满足：$y_1=-x^2+10x$，$y_2=2x$．若该公司在甲、乙两地共销售 15 辆该品牌的汽车，则能获得的最大利润为（　　）

A. 30 万元　　B. 40 万元

C. 45 万元　　D. 46 万元

5. 飞机着陆后滑行的距离 y(m) 关于滑行时间 t(s) 的函数表达式是 $y=60t-\frac{3}{2}t^2$．在飞机着陆滑行中，最后 4 s 滑行的距离是________ m．

〖反思迁移〗

1. 在利用二次函数解决实际问题时，应重点关注如何将利润、面积等实际问题适当地转化为二次函数的最大(小)值问题进行解决. 一般思路为：先求出函数表达式，再结合实际求二次函数的最大值或最小值.

2. 对于一些几何问题，首先要建立适当的直角坐标系，然后求出相对应的二次函数表达式，再来求二次函数的最大(小)值.

3. 在利用二次函数解决实际问题时，有时需要根据实际问题情境，考虑自变量的取值范围，然后在相应自变量的取值范围内求其最大(小)值.

三、效果检测

1. 某农产品市场经销一种成本为每千克 40 元的水产品. 据市场分析，若按每千克 50 元销售，一个月能售出 500 千克；销售单价每涨 1 元，月销售量就减少 10 千克. 设销售价为每千克 x 元，月销售利润为 y 元，则 y 与 x 的函数关系式为 (　　)

A. $y=(x-40)(500-10x)$　　B. $y=(x-40)(10x-500)$

C. $y=(x-40)[500-10(x-50)]$　　D. $y=(x-40)[500-10(50-x)]$

2. 如图 1.5-1-6 是一座抛物线形桥拱的示意图，在所给出的平面直角坐标系中，当水位在 AB 位置时，水面宽度为 10 m，此时水面到桥拱顶的距离是 4 m，则抛物线的函数关系式为 (　　)

A. $y=\frac{25}{4}x^2$　　B. $y=-\frac{25}{4}x^2$

C. $y=-\frac{4}{25}x^2$　　D. $y=\frac{4}{25}x^2$

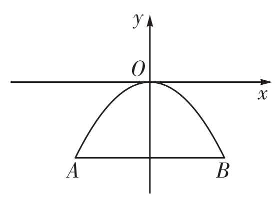


图 1.5-1-6

3. 烟花厂为雁荡山旅游节特别设计制作一种新型礼炮，这种礼炮的升空高度 h(m)与飞行时间 t(s)的关系式是 $h=-\frac{5}{2}t^2+20t+1$，若这种礼炮在点火升空到最高点处引爆，则从点火升空到引爆需要的时间为 (　　)

A. 3 s　　B. 4 s

C. 5 s　　D. 6 s

4. 如图 1.5-1-7，正方形 $ABCD$ 的边长为 5，点 E 是 AB 上一点，点 F 是 AD 延长线上一点，且 $BE=DF$. 四边形 $AEGF$ 是矩形，则矩形 $AEGF$ 的面积 y 与 BE 的长 x 之间的函数关系式为 (　　)

A. $y=5-x$　　B. $y=5-x^2$

C. $y=25-x$　　D. $y=25-x^2$

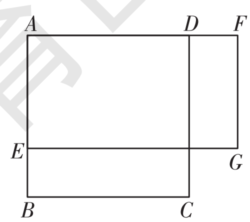


图 1.5-1-7

5. 如图 1.5－1－8，从某建筑物 10 m 高的窗口 A 处用水管向外喷水，喷出的水成抛物线状（抛物线所在平面与墙面垂直）. 如果抛物线的最高点 M 离墙 1 m，离地面 $\frac{40}{3}$ m，则水流落地点 B 离墙的距离 OB 是 （　　）

A. 2 m

B. 3 m

C. 4 m

D. 5 m

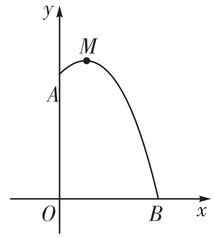


图 1.5－1－8

6. 随着互联网的普及，某手机厂商采用先网络预订，然后根据订单量生产手机的方式销售. 2020 年该厂商将推出一款新手机，根据相关统计数据预测，定价为 2 200 元，日预订量为 20 000 台，若定价每减少 100 元，则日预订量增加 10 000 台. 设定价减少 x 元，预订量为 y 台.

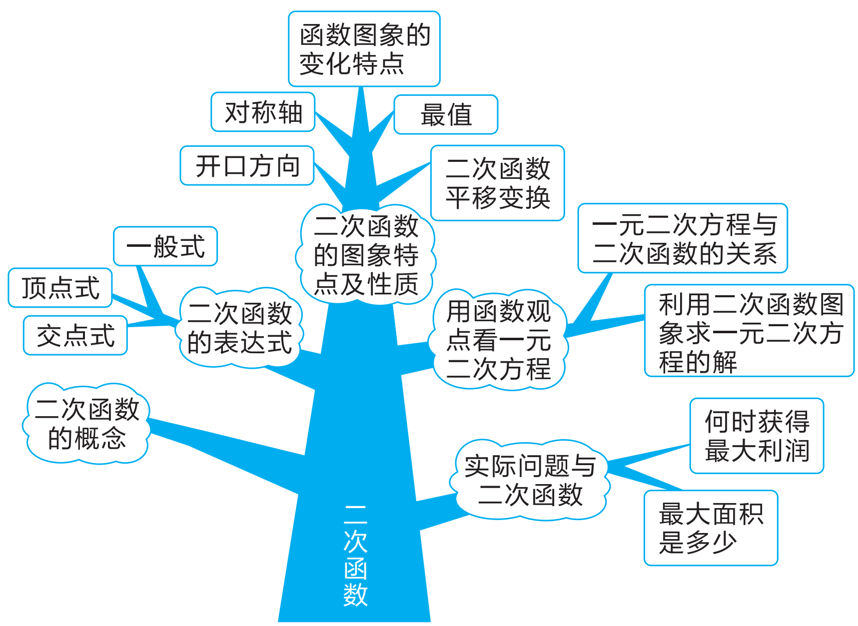
(1)写出 y 与 x 的函数关系式.

(2)若每台手机的成本是 1 200 元，求所获的利润 w(元)与 x(元)的函数关系式，并说明定价为多少时所获利润最大.

(3)若手机加工时，每天最多加工 50 000 台，且每批手机会有 5%的故障率，通过计算说明：每天最多接受的预订量为多少？按最大量接受预订时，每台定价多少元？

本章整理提升

知识框架



融会贯通

一、二次函数表达式的基本形式

一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$；

顶点式：$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$，抛物线的顶点坐标为(h,k)；

交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$，其中$x_1$，$x_2$为抛物线与$x$轴的两个交点的横坐标.

二、二次函数图象的平移

1. 平移步骤

将二次函数的表达式转化为顶点式$y=a(x-h)^2+k$，确定其顶点坐标为(h,k).

2. 平移规律

在原有函数基础上“h 值为正则右移，h 值为负则左移；k 值为正则上移，k 值为负则下移”.

三、二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的比较

从表达式上看，$y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 是两种不同的表达形式，后者通过配方可以变成前者的形式，即 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，其中 $h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

四、二次函数图象与二次函数表达式中各项系数之间的关系

1. 二次项系数 a

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，a 为二次项系数，显然 $a\neq0$.

(1)当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，a 的值越大，开口越小，反之 a 的值越小，开口越大；

(2)当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，a 的值越小，开口越小，反之 a 的值越大，开口越大.

总而言之，a 决定了抛物线的开口大小和方向，a 的正负决定开口方向，$|a|$ 的大小决定开口的大小.

2. 一次项系数 b

在二次项系数 a 确定的前提下，b 决定抛物线的对称轴的位置.

例如，在 $a>0$ 的前提下，当 $b>0$ 时，$-\frac{b}{2a}<0$，则抛物线的对称轴在 y 轴左侧；当 $b=0$ 时，$-\frac{b}{2a}=0$，则抛物线的对称轴是 y 轴；当 $b<0$ 时，$-\frac{b}{2a}>0$，则抛物线的对称轴在 y 轴右侧.

总而言之，在 a 确定的前提下，b 决定抛物线的对称轴的位置.

a，b 符号的快速判定方法(左同右异)：对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在 y 轴左边，则 a，b 同号；对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在 y 轴右边，则 a，b 异号.

3. 常数项 c，决定抛物线与 y 轴交点的位置

(1)当 $c>0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为正；

(2)当 $c=0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在坐标原点，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为 0；

(3)当 $c<0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为负.

综上，只要 a，b，c 都确定，那么这条抛物线就是唯一确定的.

五、二次函数表达式的确定

根据已知条件确定二次函数表达式，通常利用待定系数法. 用待定系数法求二次函数的表达式必须根据题目的特点，选择适当的形式，才能使解题简便. 一般来说有如下几种情况：

1. 已知抛物线上三个点的坐标，一般选用一般式；
2. 已知抛物线顶点或对称轴或最大(小)值，一般选用顶点式；
3. 已知抛物线与 x 轴的两个交点的横坐标，一般选用交点式；

4. 已知抛物线上纵坐标相同的两点，常选用顶点式.

六、三类初等函数（一次函数、反比例函数、二次函数）的综合运用

继一次函数、反比例函数之后，本章认识了二次函数. 三类函数的概念与性质各异（三者在变量间的关系、函数的表达式、函数图象的形状与特征、函数的增减性等诸方面都不同），但其研究方法却是相同相通的，如数形结合法、待定系数法. 高中阶段学习其他函数时也用这种方法进行研究.

在实际中，经常遇到三大函数同时出现的情形，这就需要充分理解三者的关联与区别. 下面是几个具体例子：

例 1 如图 1－1，在平面直角坐标系中，抛物线与 x 轴交于点 $A(-1,0)$ 和点 $B(1,0)$，直线 $y=2x-1$ 与 y 轴交于点 C，与抛物线交于点 C，D.

（1）求抛物线的解析式；

（2）求点 A 到直线 CD 的距离.

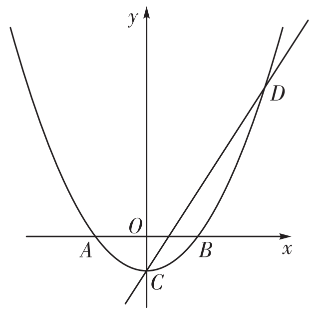


图 1－1

分析：（1）先求得 C 的坐标，然后证得 C 为抛物线的顶点，即可设抛物线的表达式为 $y=ax^2-1$，把 $A(-1,0)$ 代入即可求得；

（2）根据抛物线与直线方程求得点 D 的坐标及直线与 x 轴交点的坐标，然后利用面积法来求点 A 到直线 CD 的距离.

解：（1）$\because$ 直线 $y=2x-1$ 与 y 轴交于点 C，$\therefore C$ 的坐标为 $(0,-1)$.

$\because$ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1,0)$ 和点 $B(1,0)$，$\therefore$ 对称轴为 y 轴，

$\therefore C$ 点就是抛物线的顶点.

设抛物线的表达式为 $y=ax^2-1$，把 $A(-1,0)$ 代入得，$a-1=0$，$\therefore a=1$，$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-1$.

（2）由 $\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=2x-1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

$\therefore D(2,3)$，由勾股定理可计算得出 $CD=2\sqrt{5}$.

如图 1－2，设直线 CD 与 x 轴交于点 E，点 A 到直线 CD 的距离为 h.

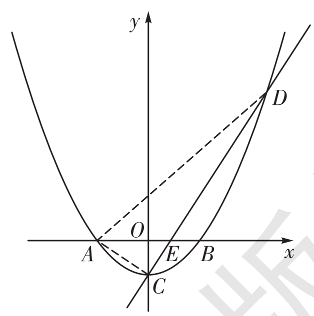


图 1－2

易求 $E\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以 $AE=\frac{3}{2}$.

所以 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times(1+3)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}h$，解得 $h=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

即点 A 到直线 CD 的距离的 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

点评：本题考查了抛物线与 x 轴的交点，待定系数法求函数的表达式以及直线和抛物线的交点的求法. 解答第（2）问时，利用 $\triangle ACD$ 的面积公式来求 h 的值，比较直观，易于理解.

例 2 如图 1－3，经过原点和点 $A(2,0)$的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$交于 $B(3,3)$.

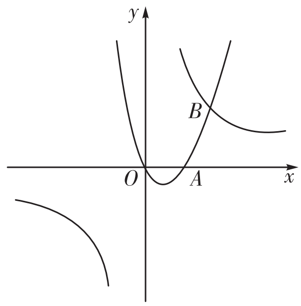


图 1－3

(1)求抛物线和双曲线的表达式；

(2)在 y 轴上找一点 C，使$|CA-CB|$的值最大.

分析：(1)根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过原点、点 $A(2,0)$和点 $B(3,3)$，列出方程组，求出 a，b 和 c 的值，根据双曲线$y=\frac{k}{x}$经过点 $B(3,3)$求出 k 的值；

(2)当点 A，B 和 C 在一条直线上时，$|CA-CB|$的值最大，设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$，根据题意列出 k 和 b 的方程组，求出直线 AB 的表达式，令 $x=0$，求出 y 的值，此时点 C 坐标即可求出.

解：(1)∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过原点，点 $A(2,0)$和点 $B(3,3)$，

$\therefore\begin{cases}4a+2b+c=0,\\9a+3b+c=3,\\c=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=0,\end{cases}$ ∴抛物线的表达式为 $y=x^2-2x$.

∵双曲线 $y=\frac{k}{x}$经过点 $B(3,3)$，∴$k=9$，∴双曲线的表达式为 $y=\frac{9}{x}$.

(2)设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$，

∵$A(2,0)$，$B(3,3)$，$\therefore\begin{cases}2k+b=0,\\3k+b=3,\end{cases}\therefore\begin{cases}k=3,\\b=-6.\end{cases}$

∴直线 AB 的表达式为 $y=3x-6$.

如图 1－4，当 C 在直线 AB 上时，$|BC-CA|=AB$，

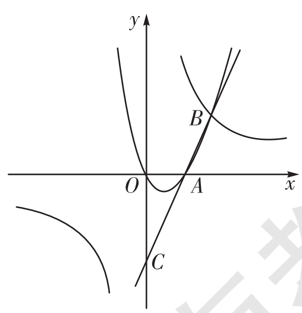


图 1－4

当 C 不在直线 AB 上时，由三角形两边之差小于第三边知，$|BC-CA|<AB$.

故 $|CA-CB|\leqslant AB$.

令 $x=0$，得 $y=-6$，即点 C 的坐标为 $(0,-6)$，此时 $|CA-CB|$ 的值最大.

例 3 某体育用品商店试销一款成本为 50 元的排球，规定：①试销售期三天；②试销期间单价不低于成本价，且获利不得高于 40%. 经试销发现，销售量 y(个)与销售单价 x(元)之间满足如图 1-5 所示的一次函数关系.

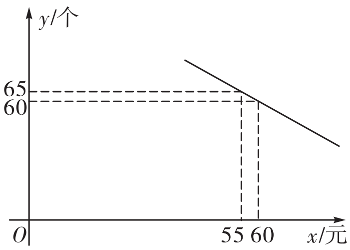


图 1-5

(1)试确定 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)若该体育用品商店试销的这款排球所获得的利润为 Q 元，试写出利润 Q(元)与销售单价 x(元)之间的函数关系式. 当试销单价定为多少元时，该商店可获得最大利润？最大利润是多少元？

(3)试销结束后，导购员月月说："试销期间销售这款排球共获利 3 675 元."你认为她说法对吗？请说明理由.

分析：(1)利用待定系数法根据图中已知点的坐标求出一次函数表达式即可；

(2)根据"利润=(售价-成本)×销售量"列出函数关系式；

(3)令 $Q=3\ 675$，解方程即可作出判断.

解：(1)设 y 与 x 之间的一次函数关系式为 $y=kx+b$，根据题意得

$\begin{cases}55k+b=65,\\60k+b=60,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=120.\end{cases}$

故所求一次函数的表达式为 $y=-x+120$.

(2)利润 Q 与销售单价 x 之间的函数关系式为 $Q=(x-50)(-x+120)=-x^2+170x-6\ 000=-(x-85)^2+1\ 225$.

∵排球的成本为 50 元，规定试销期间单价不低于成本价，且获利不得高于 40%.

∴$50\leqslant x\leqslant 70$，

∴当试销单价定为 70 元时，该商店可获最大利润，最大利润是 1 000 元.

(3)依题意得，$-(x-85)^2+1\ 225==3\ 675$，

得 $(x-85)^2=-2\ 450$，

此方程无解，故导购员月月的说法错误.

点评：本题主要考查二次函数的应用，根据"利润=(售价-成本)×销售量"列出函数关系式，运用二次函数解决实际问题，比较简单.

本章达标测试

（时间 100 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 2 分，共 32 分）

1. 下列函数中，是二次函数的为 （　　）

A. $y=-4x+5$　　B. $y=x(2x-3)$

C. $y=(x+4)^2-x^2$　　D. $y=\frac{1}{x^2}$

2. 关于二次函数 $y=2x^2+4x-1$，下列说法正确的是 （　　）

A. 图象与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$　　B. 图象的对称轴在 y 轴的右侧

C. 当 $x<0$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小　　D. y 的最小值为 -3

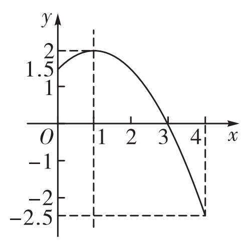
3. 已知二次函数的图象（$0\leqslant x\leqslant 4$）如图所示，关于该函数在所给自变量的取值范围内，下列说法正确的是 （　　）

A. 有最大值 2，有最小值 -2.5

B. 有最大值 2，有最小值 1.5

C. 有最大值 1.5，有最小值 -2.5

D. 有最大值 2，无最小值



第 3 题图

4. 将二次函数 $y=x^2-4x-4$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，正确的是 （　　）

A. $y=(x-2)^2$　　B. $y=(x+2)^2-8$

C. $y=(x+2)^2$　　D. $y=(x-2)^2-8$

5. 已知学校航模组设计制作的火箭的升空高度 h(m)与飞行时间 t(s)满足函数表达式 $h=-t^2+24t+1$. 下列说法中正确的是 （　　）

A. 点火后 9 s 和点火后 13 s 的升空高度相同　　B. 点火后 24 s 火箭落于地面

C. 点火后 10 s 的升空高度为 139 m　　D. 火箭升空的最大高度为 145 m

6. 若抛物线 $y=x^2-bx+9$ 的顶点在 x 轴的负半轴上，则 b 的值为 （　　）

A. ± 3　　B. 6　　C. -6　　D. ± 6

7. 二次函数 $y=3(x-2)^2-5$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 （　　）

A. $(0,2)$　　B. $(0,-5)$　　C. $(0,7)$　　D. $(0,3)$

8. 将抛物线 $y=x^2$ 平移得到抛物线 $y=(x+3)^2$，则这个平移过程正确的是 （　　）

A. 向左平移 3 个单位长度　　B. 向右平移 3 个单位长度

C. 向上平移 3 个单位长度　　D. 向下平移 3 个单位长度

9. 抛物线 $y=(x-1)^2+3$ （　　）

A. 有最大值 1　　B. 有最小值 1　　C. 有最大值 3　　D. 有最小值 3

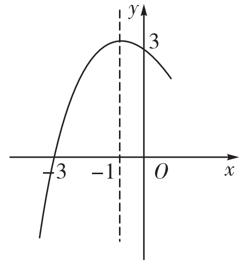
10. 二次函数的部分图象如图所示，对称轴是 $x=-1$，则这个二次函数的表达式为　（　　）

A. $y=-x^2+2x+3$

B. $y=x^2+2x+3$

C. $y=-x^2+2x-3$

D. $y=-x^2-2x+3$



第 10 题图

11. 二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象与 x 轴的交点个数为　（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

12. 某品牌钢笔进价 8 元，按 10 元一支出售时每天能买出 20 支，市场调查发现如果每支每涨价 1 元，每天就少卖出 2 支，为了每天获得最大利润，其售价应定为　（　　）

A. 11 元　　B. 12 元　　C. 13 元　　D. 14 元

13. 若 $A(-4,y_1)$，$B(-3,y_2)$，$C(1,y_3)$为二次函数 $y=x^2-4x+m$ 的图象上的三点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是　（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_2<y_1$　　C. $y_3<y_1<y_2$　　D. $y_1<y_3<y_2$

14. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 y 与自变量 x 的部分对应值如下表所示，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解的范围是　（　　）

x	6.17	6.18	6.19	6.20
y	-0.03	-0.01	0.02	0.04

A. $-0.01<x<0.02$　　B. $6.17<x<6.18$

C. $6.18<x<6.19$　　D. $6.19<x<6.20$

15. 若二次函数 $y=(x-m)^2-1$，当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是　（　　）

A. $m=1$　　B. $m>1$　　C. $m\geqslant 1$　　D. $m\leqslant 1$

16. 对于二次函数 $y=ax^2+4x-1$ 所具有的性质，下列描述正确的是　（　　）

A. 图象与 x 轴的交点坐标是$(-1,0)$　　B. 图象对称轴是直线 $x=-\dfrac{2}{a}$

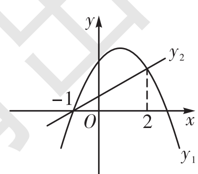
C. 图象经过点$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{16}\right)$　　D. 在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

17. 若 $y=(m+2)x^{m^2-2}+3x-2$ 是二次函数，则 m 的值是__________.

18. 二次函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象的顶点坐标是__________.

19. 如图是二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $y_2=kx+t$ 的图象，当 $y_1\geqslant y_2$ 时，x 的取值范围是__________.



第 19 题图

20. 如果将抛物线 $y=x^2+2x-1$ 向上平移，使它经过点 $A(1,3)$，那么所得新抛物线的表达式是__________.

21. 某快递公司 10 月份投递快递件数是 10 万件，如果该公司第四季度每个月投递快递件数的增长率都为 x，设 12 月份的投递快递件数为 y 万件，那么 y 关于 x 的函数表达式是__________.

22. 当 $x=$__________时，二次函数 $y=x^2-2x+6$ 取最小值__________.

三、解答题(第 23、24 题每小题 10 分,第 25、26 题每小题 15 分,共 50 分)

23. 某景区商店销售一种纪念品,每件的进货价为 40 元. 经市场调研,当该纪念品每件的销售价为 50 元时,每天可销售 200 件;当每件的销售价每增加 1 元,每天的销售量将减少 10 件.

(1)当每件的销售价为 52 元时,该纪念品每天的销售量为__________件;

(2)当每件的销售价 x 为多少元时,销售该纪念品每天获得的利润 y 最大? 并求出最大利润.

24. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过点(1,0),$\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

(1)求该抛物线的函数表达式;

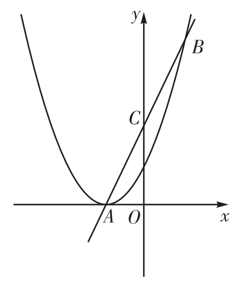
(2)将抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 平移,使其顶点恰好落在原点,请写出一种平移的方法及平移后的函数表达式.

25. 如图，抛物线 $y_1=ax^2+2ax+1$ 与 x 轴有且仅有一个公共点 A，经过点 A 的直线 $y_2=kx+b$ 交该抛物线于点 B，交 y 轴于点 C，且点 C 是线段 AB 的中点.

(1)求 a 的值；

(2)求直线 AB 对应的函数表达式；

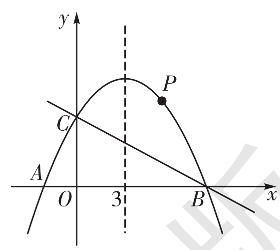
(3)直接写出 $y_1\geqslant y_2$ 时 x 的取值范围.



26. 如图，已知抛物线 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+4$ 的对称轴是直线 $x=3$，且与 x 轴相交于 A，B 两点（B 点在 A 点右侧），与 y 轴交于 C 点.

(1)求抛物线的表达式和 A，B 两点的坐标.

(2)若点 P 是抛物线上 B，C 两点之间的一个动点（不与 B，C 重合），则是否存在一点 P，使△PBC 的面积最大？若存在，请求出△PBC 的最大面积；若不存在，试说明理由.



第 2 章 圆

本章学习指南

为何学

圆是我们生活中最常见的几何形状.太阳、圆月、车轮、摩天轮、下水道井盖无不给我们以圆的形象.翻开人类的历史,几乎所有的古老文明都留下了众多对圆的认识的记录.大约在 6000 年前,美索不达米亚人做出了世界上第一个轮子——圆形木盘,在 4000 多年前,人们将圆形的木盘固定在木架上,这就成了最初的车子.

几何中的圆是人们从现实生活中抽象出来的图形,它是最常见也是最重要的几何图形.2000 多年前,我国的墨子在《墨经》中就给圆下了一个定义:“圆,一中同长也.”意思是说:圆有一个圆心,圆心到圆周的长都相等.公元前 300 年,古希腊数学家欧几里得集前人思想和个人的创造完成了一部几何学的传世之作《几何原本》.在这本书里,欧几里得将人们公认的一些事实列成定义和公理,用这些定义和公理来研究各种几何图形的性质,建立了一套从定义、公理出发,论证命题得到定理的几何学论证方法,形成了一个严密的逻辑体系——几何学.圆作为一种特殊的几何图形,自然也成了几何学不可或缺的研究对象.

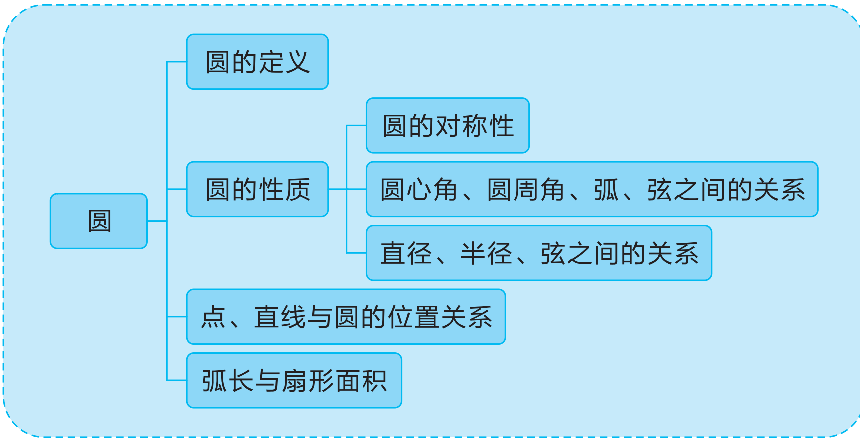
与三角形、四边形等其他几何图形的学习一样,圆的学习对于培养思维能力和理性精神有着非常重要的作用.

学什么

几何是研究图形的形状、大小和位置关系的一门学科.小学阶段,我们从现实世界中的实物抽象出了“圆”这一几何图形,借助实物初步认识了圆,学习了测量圆大小的周长和面积.本章我们将用几何论证的方式进一步认识圆,以及直线与圆的位置关系.

与学习三角形、四边形等几何图形一样,要研究圆的定义、性质和判定,如:什么样的几何图形是圆?圆有哪些性质?怎样判定一个几何图形是不是圆?而研究几何图形的

定义、性质和判定，我们通常又以构成该图形的基本元素和特殊的线、角作为研究对象，对圆的研究也类似. 本章的学习内容如下：



怎么学

1. 回顾已学过的几何知识、方法和经验

平移、轴对称、旋转、全等、相似等知识都是研究几何图形的基础和工具. 从定义、公理出发，通过推理的方式得到定理，是构成几何知识体系的基本方式. 直观感知、操作确定、推理论证是我们认识几何对象，获得几何结论必须经历的过程. 学习过程中要注意借助已有的几何基础知识、方法和经验研究圆的相关知识.

2. 结合图形理解几何概念

概念是思维的起点，是认识几何对象的基础. 本章涉及的概念较多，如弦、弧、圆心角、圆周角、切线、内切圆、外接圆等等，很多概念都有其丰富的内涵. 以圆的切线为例. 首先，它是描述一条直线与圆的位置关系的概念. 其次，可以从三个角度理解它的内涵：一是直线与圆的公共点的个数，二是圆心到直线的距离，三是直线过半径的外端点且垂直于半径. 在学习过程中，要结合具体的图形深刻理解这些概念.

3. 用好画图工具

学习几何离不开画图工具，圆规、三角尺、直尺、量角器等是学习必备的工具. 如果你学有余力，不妨可以学习一下几何画板软件，在计算机上借助这一软件研究圆的相关性质.

2.1 圆的对称性

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.1－1－1,下列线段中是圆 O 的半径的是 ( )

A. OA　　B. OB　　C. OC　　D. AB

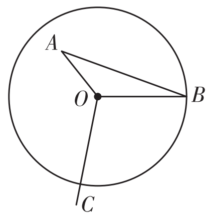


图 2.1－1－1

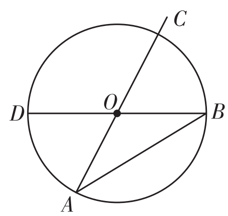


图 2.1－1－2

2. 如图 2.1－1－2,下列线段中是圆 O 的直径的是 ( )

A. AB　　B. AC　　C. OD　　D. BD

3. 下列说法不正确的是( )

A. 半径相等的两个圆大小也相等　　B. 在同一个圆内,直径是半径的 2 倍

C. 在一个圆中有一个圆心,无数条半径　D. 直径是 5 cm 的圆比半径是 3 cm 的圆要大

4. 下列四个图形中,既是轴对称图形,又是中心对称图形的是 ( )

A　　B　　C　　D

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 在圆中,圆心到圆上任意一点的长度都是相等的,这个长度也叫做半径,一个圆有无数条半径;圆的位置由圆心决定,圆的大小由半径决定.

2. 我们将圆形纸片先对折,再展开,再对折,再展开,这两条折痕的交点就是圆心,每条折痕就是圆的直径. 由此可以得到:圆是轴对称图形,它有无数条对称轴,直径是通过圆心并且两端都在圆上的线段.

3. 在同一个圆中,直径是半径的 2 倍.

4. 判断轴对称图形的关键是寻找对称轴,看图形折叠后两部分是否重合;判断中心对称图形的关键是寻找对称中心,看旋转 180°后图形是否与原图形重合.

你可以开始今天的新课学习了！

在小学我们已认识了圆、圆心、半径、直径，并会利用圆规画圆，本节课我们将进一步理解圆的定义，学习圆的有关概念，并理解圆的对称性.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 圆的定义

定义 1：如图 2.1－1－3，在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆. 记作⊙O，读作圆 O. 固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫作半径. 由圆的定义我们可以知道，圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小.

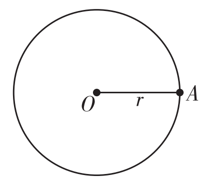


图 2.1－1－3

定义 2：圆是平面内到一定点的距离等于定长的所有点组成的图形.

这里所说的定点是圆心，定长是半径. 圆指的是“圆周”而不是“圆平面”.

2. 点与圆的位置关系

点和圆的位置关系有三种：点在圆内、点在圆上、点在圆外. 如图 2.1－1－4，设⊙O 的半径为 r，点 A 在圆内，则 $OA<r$；点 B 在圆上，则 $OB=r$；点 C 在圆外，则 $OC>r$. 反之也成立.

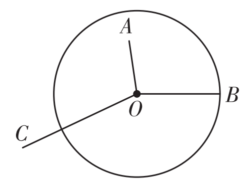


图 2.1－1－4

设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心的距离 $OP=d$，则有：

(1)点 P 在圆内$\Leftrightarrow d<r$；

(2)点 P 在圆上$\Leftrightarrow d=r$；

(3)点 P 在圆外$\Leftrightarrow d>r$.

判断点与圆的位置关系，可以根据圆的半径和点到圆心距离的大小关系来确定，点与圆的位置关系，与点到圆心的距离 d 及圆的半径 r 之间存在着密切的联系. 点和圆的位置关系不仅可以用图形表示，还可以用数量关系表示.

3. 与圆有关的概念

(1)弦是指连接圆上任意两点的线段，如图 2.1－1－5 中的线段 AB，CD. 经过圆心的弦叫做直径，如图中的线段 AB. 由此我们知道，圆中有无数条弦，其中最长的弦是直径；直径是弦，但弦不一定是直径.

(2)弧是指圆上任意两点间的部分，简称弧. 如图 2.1－1－6，以 A，C 为端点的弧记作 $\overset{\frown}{AC}$，读作圆弧 AC 或弧 AC.

圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每条弧都叫做半圆，大于半圆的弧叫做优弧(通常用三个字母表示)，小于半圆的弧叫做劣弧(通常用两个字母表示). 无特殊说明时，弧指的是劣弧.

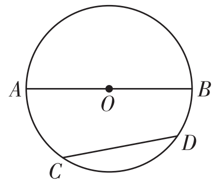


图 2.1－1－5

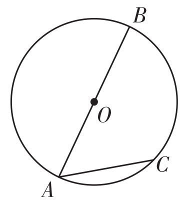


图 2.1－1－6

4. 圆的对称性

圆既是中心对称图形，又是轴对称图形.

在⊙O 中，圆周绕圆心 O 旋转 180°，能与自身重合，因此它是中心对称图形，对称中心是圆心 O. 圆周绕圆心 O 旋转任意一个角度，都能与自身重合.

经过圆心 O 画任意一条直线，并沿此直线将⊙O 对折，直线两旁的部分能够完全重合，所以圆是轴对称图形. 每一条直径所在的直线都是它的对称轴，因为圆有无数条直径，所以圆有无数条对称轴.

〖变式训练〗

1. 如图 2.1－1－7，一枚半径为 r 的硬币沿着直线滚动一圈，圆心经过的距离是　（　　）

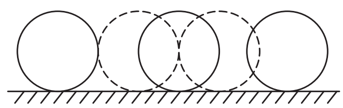


图 2.1－1－7

A. $4\pi r$　　B. $2\pi r$　　C. πr　　D. $2r$

2. 设 $AB=4$ cm，作出满足下列要求的图形.

(1)到点 A 的距离等于 3 cm，且到点 B 的距离等于 2 cm 的所有点组成的图形；

(2)到点 A 的距离小于 3 cm，且到点 B 的距离小于 2 cm 的所有点组成的图形；

(3)到点 A 的距离大于 3 cm，且到点 B 的距离小于 2 cm 的所有点组成的图形.

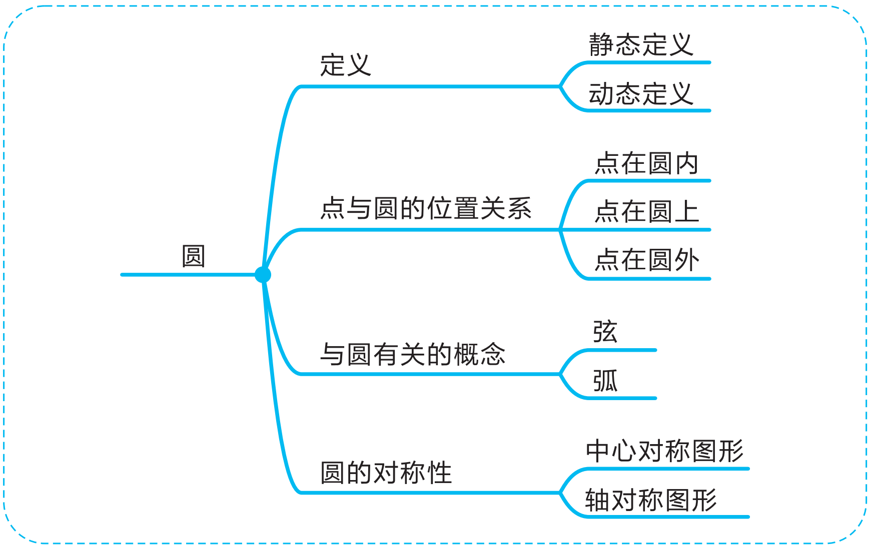
〖反思迁移〗

1. 本节课我们在小学对圆有了初步认识的基础上，进一步理解了圆的两种定义，静态定义——圆是平面内到一定点的距离等于定长的所有点组成的图形；动态定义——在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆.

2. 根据圆的半径 r 和点到圆心距离 d 的大小关系可以判断点与圆的位置关系：点 P 在圆内$\Leftrightarrow d<r$；点 P 在圆上$\Leftrightarrow d=r$；点 P 在圆外$\Leftrightarrow d>r$.

3. 与圆有关的两个重要的概念：弦——连接圆上任意两点的线段叫做弦；弧——圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧.

4. 圆既是中心对称图形，又是轴对称图形.



三、效果检测

1. 生活中处处有数学，下列原理运用错误的是　　　　(　　)

A. 建筑工人砌墙时拉的参照线运用了“两点之间线段最短”的原理

B. 修理损坏的椅子腿时斜钉的木条运用了“三角形稳定性”的原理

C. 测量跳远的成绩运用了“垂线段最短”的原理

D. 将车轮设计为圆形是运用了“圆的旋转对称性”原理

2. 如图 2.1－1－8，点 A 是圆规脚尖的端点，点 B 是铅笔芯尖的端点，已知点 A 与点 B 的距离是 2 cm，若脚尖的端点 A 固定，铅笔芯尖的端点 B 绕点 A 旋转一周，则作出的圆的直径是　　　　(　　)

A. 1 cm　　　　B. 2 cm

C. 4 cm　　　　D. π cm

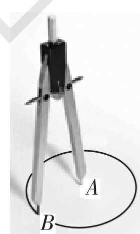


图 2.1－1－8

3. 如图 2.1-1-9，四边形 $PAOB$ 是扇形 OMN 的内接矩形，顶点 P 在 $\overset{\frown}{MN}$ 上，且不与 M，N 重合，当点 P 在 $\overset{\frown}{MN}$ 上移动时，矩形 $PAOB$ 的形状、大小随之变化，则 AB 的长度________（填“变大”“变小”或“不变”）.

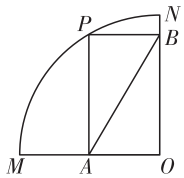


图 2.1-1-9

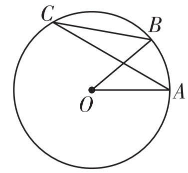


图 2.1-1-10

4. 如图 2.1-1-10，OA，OB 是 $\odot O$ 的半径，C 是 $\odot O$ 上一点，$\angle AOB=40°$，$\angle OBC=50°$，则 $\angle OAC=$________.

5. 如图 2.1-1-11，AB 是圆 O 的直径，D 是圆上的一点，$\angle DOB=75°$，DC 交 BA 的延长线于 E，交圆于 C，且 $CE=AO$，求 $\angle E$ 的度数.

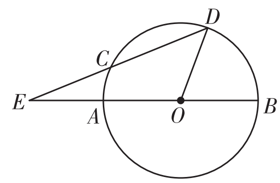


图 2.1-1-11

2.2 圆心角、圆周角(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 如图 2.2－1－1，点 A，B 把⊙O 分成 2∶7 两条弧，则∠AOB 的度数为 （　　）

A. 40°　　B. 60°　　C. 80°　　D. 100°

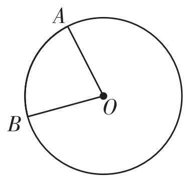


图 2.2－1－1

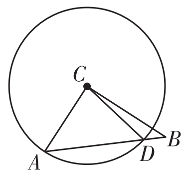


图 2.2－1－2

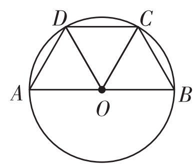


图 2.2－1－3

2. 如图 2.2－1－2，△ABC 中，∠ACB＝90°，以 AC 为半径的⊙C 与 AB 相交于点 D，连接 CD，若∠B＝40°，则∠ACD 的度数为 （　　）

A. 60°　　B. 80°　　C. 90°　　D. 100°

3. 如图 2.2－1－3，C，D 为半圆上的三等分点，则下列说法正确的有 （　　）

①$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}$；　②∠$AOD$＝∠$DOC$＝∠$BOC$；

③$AD=CD=OC$；　④△AOD 沿 OD 翻折与△COD 重合.

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 一个周角是 360°，一段弧占整个圆周的几分之几，那么这段弧所对应的角就占 360°的几分之几；半圆所对的角是平角为，180°.

2. 同一个圆中的半径都相等，所以圆心和圆上两点所构成的三角形是等腰三角形.

3. 圆是轴对称图形.

你可以开始今天的新课学习了！

上节课我们认识了圆、圆中的弦和弧，理解了圆的对称性，本节课开始我们将圆与其他几何图形联系起来，首先探究圆中的角及其性质.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 圆心角的概念

顶点在圆心的角叫做圆心角，如图 2.2－1－4，$\angle AOB$ 是 $\odot O$ 的圆心角. 圆心角是和圆有关的角中的一种，它的特征是顶点在圆心.

通常情况下，圆心角是指小于 180 度的角.

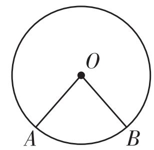


图 2.2－1－4

2. 弧、弦、圆心角之间的关系

(1)由圆的旋转不变性，我们可以知道在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等. 这个定理的题设是“在同圆或等圆中，圆心角相等”，结论是“所对的弧相等，所对的弦相等”.

(2)推论：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧或两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等. 特别注意：同一条弦对应两条弧，其中一条是优弧，一条是劣弧，而在本定理和推论中的“弧”是指同为优弧或劣弧.

(3)正确理解和运用圆心角、弧、弦三者的关系

三者的关系可理解为：在同圆或等圆中，①圆心角相等，②所对的弧相等，③所对的弦相等，若一组量相等，其余两组量都相等. 这源于圆的旋转不变性，即圆绕其圆心旋转任意角度，所得图形与原图形完全重合.

其推理格式如下：如图 2.2－1－5，在 $\odot O$ 中，$OM\perp AB$，$OM'\perp A'B'$，则：

$$\angle AOB=\angle A'OB'\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\\ AB=A'B',\\ OM=OM',\end{cases}$$

$$AB=A'B'\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\angle A'OB',\\ \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\\ OM=OM',\end{cases}$$

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}\Rightarrow\begin{cases}\angle AOB=\angle A'OB',\\ AB=A'B',\\ OM=OM'.\end{cases}$$

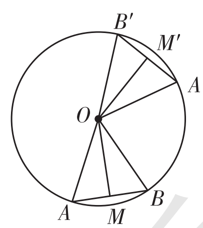


图 2.2－1－5

注意：①要结合图形深刻体会圆心角、弧、弦这三个概念和“所对”一词的含义，否则易错用此关系；②在具体应用上述定理解决问题时，可根据需要择其有关部分，如“在同圆中，等弧所对的圆心角相等”“在等圆中，弧相等得弦相等”等等.

〖变式训练〗

1. 若圆的一条弦把圆分成 4∶5 的两条弧，则弦所对的圆心角等于 （　　）

A. 80°　　B. 100°　　C. 160°　　D. 200°

2. 在半径为 3 cm 的⊙O 中，弦 $AB=3\sqrt{2}$ cm，则弦 AB 所对的圆心角∠AOB 的度数为________.

3. 如图 2.2-1-6，已知 AB 是⊙O 的直径，点 C，D 在⊙O 上，$CE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F，且 $AE=BF$，AC 与 BD 相等吗？为什么？

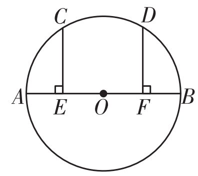


图 2.2-1-6

〖反思迁移〗

1. 本节课我们学习了几个重要的知识：

(1)圆心角的定义：顶点在圆心的角叫做圆心角.

(2)弧、弦、圆心角之间的关系. 在同圆或等圆中：①圆心角相等，②所对的弧相等，③所对的弦相等，如果其中一个成立，那么另外两个结论也成立. 在利用这个关系时，应特别注意：同一条弦对应两条弧，其中一条是优弧，一条是劣弧，而在本定理和推论中的"弧"是指同为优弧或劣弧.

2. 本节课我们还将有关圆心角的内容与以前学的几何知识结合起来解决相关的问题. 后面我们将继续探究圆中的其他角具有的性质，以及与圆心角的关系.

三、效果检测

1. 在⊙O 中，弦 AB 的长恰好等于半径，弦 AB 所对的圆心角为__________.

2. 如图 2.2-1-7，在⊙O 中，已知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则 AC 与 BD 的大小关系是__________.

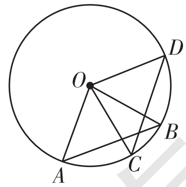


图 2.2-1-7

3. 如图 2.2-1-8,AB 是圆 O 的直径,$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$,$\angle COD=35^\circ$,则$\angle AOE$ 的度数是 (　　)

A. 65°　　B. 70°　　C. 75°　　D. 85°

4. 如图 2.2-1-9,半径为 5 的⊙A 中,弦 BC,ED 所对的圆心角分别是$\angle BAC$,$\angle EAD$,若 $DE=6$,$\angle BAC+\angle EAD=180^\circ$,则弦 BC 的长等于 (　　)

A. 8　　B. 10　　C. 11　　D. 12

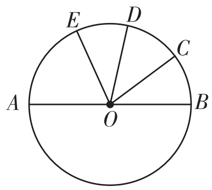


图 2.2-1-8

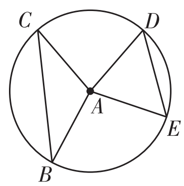


图 2.2-1-9

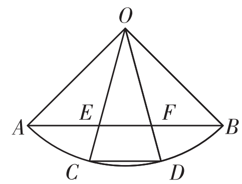


图 2.2-1-10

5. 如图 2.2-1-10,扇形 OAB 的圆心角为 90°,点 C,D 是弧 AB 的三等分点,半径 OC,OD 分别与弦 AB 交于点 E,F,下列说法错误的是 (　　)

A. $AE=EF=FB$　　B. $AC=CD=DB$

C. $EC=FD$　　D. $\angle DFB=75^\circ$

6. 如图 2.2-1-11,在⊙O 中,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$,$CD\perp OA$ 于 D,$CE\perp OB$ 于 E,求证:$AD=BE$.

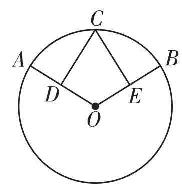


图 2.2-1-11

2.2 圆心角、圆周角(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.2-2-1,A,B,C 是⊙O 上的点,其中是⊙O 的圆心角的是 (　　)

A. $\angle OAB$　　B. $\angle OBC$　　C. $\angle BOC$　　D. $\angle OBA$

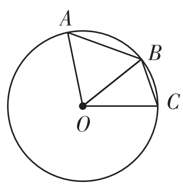


图 2.2-2-1

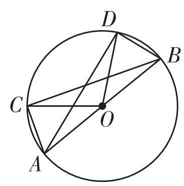


图 2.2-2-2

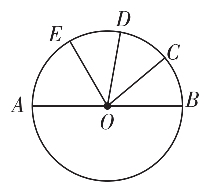


图 2.2-2-3

2. 如图 2.2-2-2,AB 是⊙O 的直径,C,D 是⊙O 上的点,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,有如下几个结论:①$AC=BD$;②$\angle AOC=\angle BOD$;③$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$;④$AD=BC$. 其中正确的结论是 (　　)

A. ①②③　　B. ②④　　C. ①②　　D. ①②④

3. 如图 2.2-2-3,在⊙O 中,AB 是直径,$\angle AOE=60°$,点 C,D 是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点,则$\angle COE$ 的度数为 (　　)

A. $40°$　　B. $60°$　　C. $80°$　　D. $120°$

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 如图 2.2-2-4,$\angle AOB$ 的顶点在圆心,角的两边与圆相交,像这样的角叫做圆心角. $\overset{\frown}{AB}$叫做圆心角$\angle AOB$ 所对的弧,弦 AB 叫做圆心角$\angle AOB$ 所对的弦.

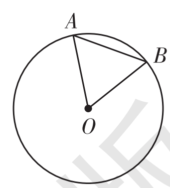


图 2.2-2-4

2. 在同圆或等圆中,如果圆心角相等,那么它们所对的弧相等,所对的弦也相等. 更一般地,在同圆或等圆中,如果两个圆心角,两条弧和两条弦中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们已学过了圆心角及其性质,那么是不是应该有一个圆周角呢? 如果有圆周角,那么圆周角有哪些性质呢? 通过本节课的学习,我们将解决这些问题.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 圆周角的概念

类比前面所学的圆心角的定义，我们可以得到圆周角的概念：顶点在圆上，角的两边与圆相交，这样的角叫做圆周角．如图 2.2－2－5，$\angle A$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，弦 BC 叫做圆周角$\angle A$ 所对的弦，$\overset{\frown}{BC}$叫做圆周角$\angle A$ 所对的弧．

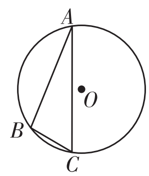


图 2.2－2－5

2. 圆周角定理的发现

我们已经知道，在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆心角相等．那么，在同一个圆中，同弧所对的几个圆周角的大小有什么关系呢？

通过画图，借助量角器或电脑软件几何画板的度量，我们可以发现：同弧所对的圆周角相等．

但是，借助度量得出的结论未必可靠，要得到几何结论必须经过证明．

3. 圆周角定理的证明

(1)我们现在遇到了一个新的问题——“求证：同弧所对的圆周角相等”．我们能否将这个新问题转化为我们已经解决了的问题呢？

为此，我们可以先探究：同弧所对的圆周角和圆心角之间的大小有怎样的关系．如图 2.2－2－6，圆周角$\angle A$ 或$\angle D$ 与圆心角$\angle BOC$ 有何大小关系？

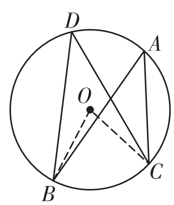


图 2.2－2－6

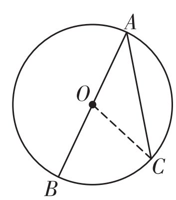


图 2.2－2－7

(2)为了探究“同弧所对的圆周角和圆心角之间的大小关系”，我们可先探究一种特殊的情形，即 AB 是$\odot O$ 的直径时，$\angle A$ 与$\angle BOC$ 的大小关系，如图 2.2－2－7．

$\because AO=CO$，

$\therefore \angle A=\angle C$．

又$\because \angle BOC=\angle A+\angle C$，

$\therefore \angle BOC=2\angle A$，即$\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC$．

(3)是不是根据图 2.2－2－7 这一特殊情形得出的结论就能肯定地得出一般性的结论了呢？为了使结论更可靠，还要考虑哪些情形呢？对于图 2.2－2－8 和图 2.2－2－9，

(2)中的结论还成立吗?

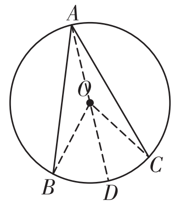


图 2.2－2－8

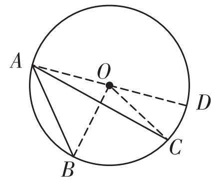


图 2.2－2－9

如图 2.2－2－8,过点 A 作⊙O 的直径 AD,将问题转化为图 2.2－2－7 的情形,可以证明$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

如图 2.2－2－9,同样地,过点 A 作⊙O 的直径 AD,将问题转化为图 2.2－2－7 的情形,也可以证明$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

由此,我们便可以得出圆周角定理:圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

在此基础上,就不难得出:在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等;相等的圆周角所对的弧也相等.

〖变式训练〗

1. 如图 2.2－2－10,CD 是⊙O 的直径,A,B 是⊙O 上的点,若$\angle ABD=65°$,则$\angle ABC$的度数为__________.

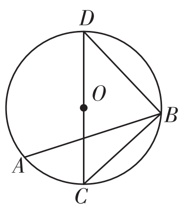


图 2.2－2－10

2. 如图 2.2－2－11,A,B,C 是⊙O 上的点,$\angle ABC$ 的平分线交⊙O 于点 D,若$\angle ABC=120°$,求证:$\triangle ACD$ 是等边三角形.

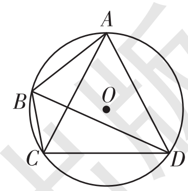


图 2.2－2－11

〖反思迁移〗

1. 本节课我们学习了几个重要的知识：

(1)顶点在圆上，两边与圆相交的角叫圆周角；

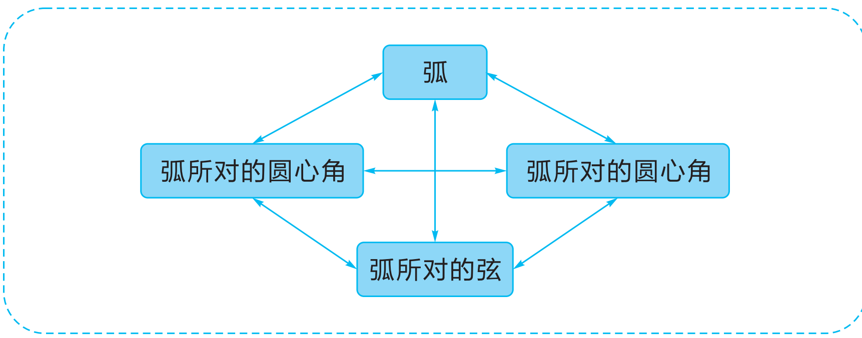
(2)圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半；在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，相等的圆周角所对的弧也相等.

2. 本节课的学习中我们用到了两个重要的方法：

(1)我们通过类比圆心角的定义得出了什么是圆周角，通过类比“等弧所对的圆心角相等”提出了猜想“同弧或等弧所对的圆周角相等”.

(2)为了证明“同弧所对的圆周角相等”，我们将问题转化为探究“同弧所对的圆周角与圆心角的关系”；随后，我们通过如图 2.2-2-7 所示的特殊情形证明了“同弧所对的圆周角的度数等于圆心角度数的一半”，然后我们再次用到了转化：将图 2.2-2-8、图 2.2-2-9 两种更一般的情形转化为图 2.2-2-7 的特殊情形，进而得出了“同弧所对的圆周角等于圆心角的一半”的结论. 将遇到的新问题转化为已经解决的问题，是数学学习中非常重要的方法.

3. 通过“圆周角”和“圆心角”的学习，我们建立了同圆或等圆中的弦、弧、圆心角、圆周角之间的联系，如下图所示.



4. 弧与它所对的圆周角、圆心角的关系，为今后引入角的大小用弧度制表示提供了可能.

三、效果检测

1. 如图 2.2-2-12，AC 是⊙O 的直径，B 是⊙O 上的点，D 是⊙O 外的点，AC 与 BD 相交于点 E. 下列结论正确的是 (   )

A. $\angle ABD$，$\angle DAB$，$\angle ABC$，$\angle AEC$ 是圆周角

B. 圆周角$\angle CAB$ 所对的弦是 BE

C. 圆周角$\angle ADB$ 所对的弧是$\overset{\frown}{AB}$

D. 圆周角$\angle ABC$ 所对的弦是 AC

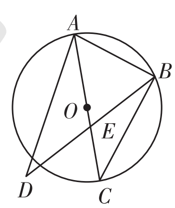


图 2.2-2-12

2. 如图 2.2-2-13，A，B，C，D 是⊙O 上的四个点，下列说法错误的是（　　）

A. $\angle DAC=\angle DBC$　　　　B. $\angle ABD=\angle ACD$

C. $\triangle AED\backsim\triangle BEC$　　　　D. $\triangle ACD\backsim\triangle BCD$

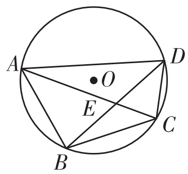


图 2.2-2-13

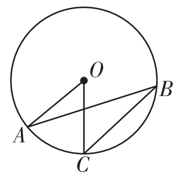


图 2.2-2-14

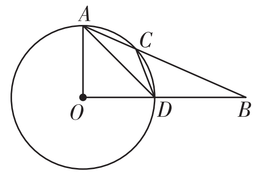


图 2.2-2-15

3. 如图 2.2-2-14，A，C，B 是⊙O 上三点，$AO\parallel BC$，$\angle AOC=40°$，则$\angle OAB$ 的度数为__________.

4. 如图 2.2-2-15，OA 是⊙O 的半径，B 是⊙O 外一点，$AO\perp BO$，AB，OB 分别交⊙O 于点 C，D. 若$\angle ABO=28°$，则$\angle ADC$ 的度数为__________.

5. 如图 2.2-2-16，$\triangle ABC$ 的三个顶点在⊙O 上，$AB=AC$，过点 A 的弦 AE 交 BC 于点 D. 求证：$\triangle ABD\backsim\triangle AEB$.

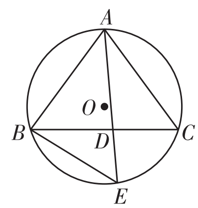


图 2.2-2-16

6. 如图 2.2-2-17，AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，$AB\perp CD$.

(1)P 是优弧$\overset{\frown}{CAD}$上一点(不与 C，D 重合)，求证：$\angle CPD=\angle COB$.

(2)点 P'在劣弧$\overset{\frown}{CD}$上(不与 C，D 重合)时，$\angle CP'D$ 与$\angle COB$ 有什么数量关系？请证明你的结论.

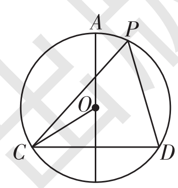


图 2.2-2-17

2.2 圆心角、圆周角(3)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图2.2-3-1,已知AB是$\odot O$的直径,C是$\odot O$上一点,若$\angle AOC=45^\circ$,则$\angle BOC$的度数为 ( )

A. 45°　　B. 90°　　C. 100°　　D. 135°

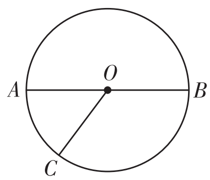


图2.2-3-1

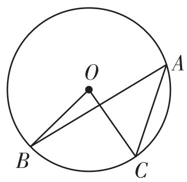


图2.2-3-2

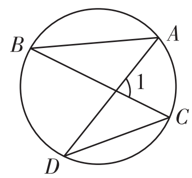


图2.2-3-3

2. 如图2.3-3-2,已知圆心角$\angle BOC=78^\circ$,则圆周角$\angle BAC$的度数是 ( )

A. 156°　　B. 78°　　C. 39°　　D. 12°

3. 如图2.3-3-3,A,B,C,D是圆上的点,$\angle 1=68^\circ$,$\angle A=40^\circ$,则$\angle D$的度数是 ( )

A. 68°　　B. 28°　　C. 40°　　D. 38°

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

圆周角定理:圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半;在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们已学习了圆心角、圆周角及其性质,那么圆中有哪些特殊的圆心角和圆周角呢?不同的圆心角或圆周角之间又有哪些特殊的关系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 圆周角定理的推论

我们已经知道:在圆中,直径是一条特殊的弦,半圆是一条特殊的弧. 直径所对的弧

是半圆，半圆所对的弦是直径. 那么它们所对的圆心角和圆周角又有哪些特殊性性呢？

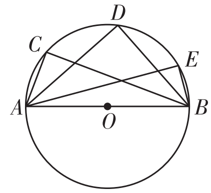


图 2.3-3-4

如图 2.2-3-4，AB 是⊙O 的直径，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$ 都是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角是$\angle AOB$，因为 A，O，B 三点在一条直线上，所以圆心角$\angle AOB$ 是一个平角，即$\angle AOB=180^\circ$. 根据圆周角定理，圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半，所以$\angle C=\angle D=\angle E=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$. 由此可以得到，直径（或半圆）所对的圆周角是直角.

反之，如果一条弧所对的圆周角是 90°，这条弧所对的圆心角为 180°，那么所对的弦就是直径，所对的弧就是半圆. 这一推论是圆的一个重要的性质，为在圆中确定直角和垂直关系创造了条件.

2. 圆内接四边形

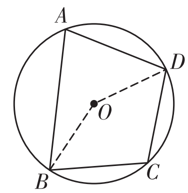


图 2.2-3-5

如图 2.2-3-5，A，B，C，D 是⊙O 上的四点，顺次连接 A，B，C，D 四点，得到四边形 $ABCD$，我们把四边形 $ABCD$ 称为圆内接四边形，⊙O 叫作四边形 $ABCD$ 的外接圆. 那么，圆内接四边形的四个内角之间有什么特殊的关系呢？

如图 2.2-3-5，连接 OB，OD，因为$\angle A$ 所对的弧是$\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所对的弧是$\overset{\frown}{BAD}$，且这两段弧所对的圆心角之和为 360°，所以$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$.

再由四边形的内角和为 360°可知，$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$.

由此我们可以得到圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补.

〖变式训练〗

1. 如图 2.2-3-6，AB 是圆 O 的直径，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，AD，BC 的延长线交于点 E，且 $AD=DC$，$\angle E=50^\circ$，则$\angle A$ 的度数为（　　）

A. 40°　　B. 50°

C. 60°　　D. 70°

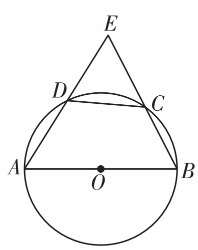


图 2.2-3-6

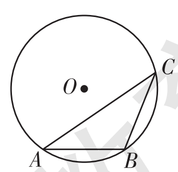


图 2.2-3-7

2. 如图 2.2-3-7，在半径为 5 的⊙O 中，弦 $AB=6$，点 C 是优弧$\overset{\frown}{AB}$上一点（不与 A，B 重合），则 $\cos C$ 的值为__________.

3. 如图 2.2－3－8，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，$\angle DAE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角，且 AD 平分 $\angle CAE$. 求证：$DB=DC$.

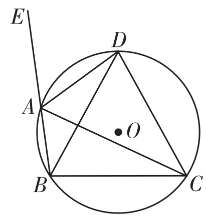


图 2.2－3－8

〖反思迁移〗

1. 本节课我们学习了两个重要的知识：

(1)直径(或半圆)所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径；

(2)圆内接四边形的对角互补.

2. 本节课的学习中用到转化的方法，为了得到圆内接四边形对角的关系，我们将问题转化为探究"这两个对角所对弧上的圆心角的关系"；再利用"同弧所对的圆周角等于圆心角的一半"，进而得出了"圆内接四边形的对角互补"的结论.

3. 圆周角定理的这一条推论是在圆中利用直径找直角，或由直角得到直径的重要方法；圆内接四边形的性质是证明与圆有关的两角相等或互补关系的重要依据.

三、效果检测

1. 平行四边形的四个顶点在同一圆上，则该平行四边形一定是（　　）

A. 正方形　　B. 菱形　　C. 矩形　　D. 等腰梯形

2. 如图 2.2－3－9，AB 是⊙O 的直径，BC 是⊙O 的弦. 若 $\angle OBC=60°$，则 $\angle BAC$ 的度数是（　　）

A. 75°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

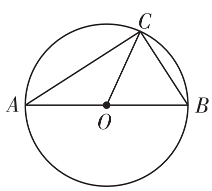


图 2.2－3－9

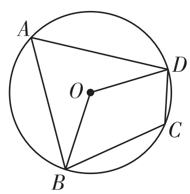


图 2.2－3－10

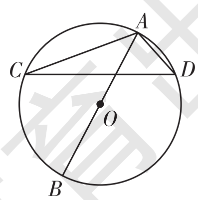


图 2.2－3－11

3. 如图 2.2－3－10，四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，$\angle BCD=120°$，则 $\angle BOD$ 的度数为__________.

4. 如图 2.2－3－11，AB 是⊙O 的直径，$\angle BAD=70°$，则 $\angle ACD$ 的度数是__________.

5. 如图 2.2-3-12，已知 A,B,C,D 是$\odot O$上的四点，延长 DC,AB 相交于点 E，若$BC=BE$. 求证：$\triangle ADE$ 是等腰三角形.

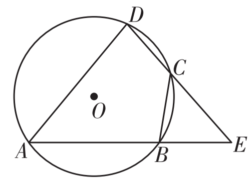


图 2.2-3-12

6. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的直角顶点 C，另一顶点 A 及斜边 AB 的中点 D 都在$\odot O$上，BC 交$\odot O$于点 E.

(1)如图 2.2-3-13(a)，若 $AC=CE$，求$\angle B$ 的度数；

(2)如图 2.2-3-13(b)，若 $AC=6$，$BC=8$，求$\odot O$的半径.

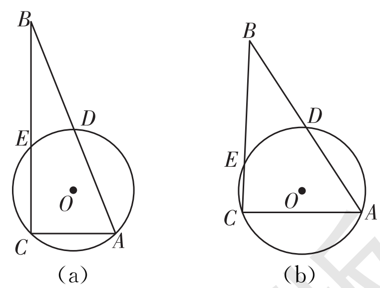


图 2.2-3-13

2.3 垂径定理

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 如图 2.3－1－1，在⊙O 中，若点 C 是弧 AB 的中点，$\angle A=50°$，则$\angle BOC$ 等于（　　）

A. 50°　　B. 45°　　C. 40°　　D. 35°

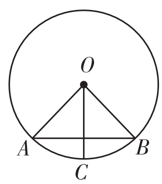


图 2.3－1－1

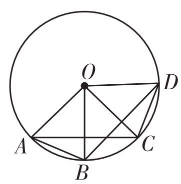


图 2.3－1－2

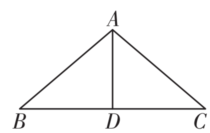


图 2.3－1－3

2. 如图 2.3－1－2，A，B，C，D 均为⊙O 上的点，且 $AB=CD$，则下列说法不正确的是（　　）

A. $\angle AOB=\angle COD$　　B. $\angle AOC=\angle BOD$

C. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$　　D. $OC=CD$

3. 如图 2.3－1－3，在△ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 的中点，$AC=10$，$BC=16$，则 AD 的长度为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 16

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 等腰三角形的性质：等边对等角；等腰三角形底边上的高，底边上的中线和顶角的平分线互相重合.

2. 在同圆或等圆中，两个圆心角，两条弧，两条弦，其中有一组量相等，那么其余两组量也相等.

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，则 $AC^2+BC^2=AB^2$，已知直角三角形的任意两边，根据勾股定理我们都可以求出第三边的长.

你可以开始今天的新课学习了！

由前面的学习我们知道圆是轴对称图形，任意一条直径所在的直线都是它的对称轴，将圆的轴对称性和圆中的弦、弧、圆心角、圆周角结合起来，又会有哪些新的结论呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 垂径定理的发现

如图 2.3－1－4，AB 是$\odot O$ 的一条弦，作直径 CD，使 $CD \perp AB$，垂足为 M. 根据圆的轴对称性，你能找到图中有哪些等量关系？

我们沿着直径 CD 对折，可以得到 $AM=BM$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

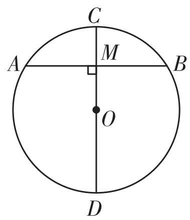


图 2.3－1－4

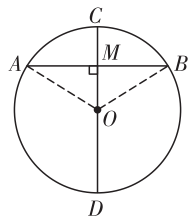


图 2.3－1－5

2. 垂径定理的证明

类比等腰三角形的轴对称性，我们不难证明这个结论：

如图 2.3－1－5，连接 OA，OB，则 $OA=OB$.

$\therefore \triangle OAB$ 是等腰三角形.

$\because OM \perp AB$，$\therefore AM=BM$，$\angle AOM=\angle BOM$.

$\therefore \angle AOD=\angle BOD$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

由此我们可以得到垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

3. 垂径定理的推论的探索

在垂径定理涉及的五个条件①CD 是直径，②$CD \perp AB$，③$AM=BM$，④$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，⑤$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$中，当我们将①②作为条件时，能证明③④⑤是正确的，即垂径定理. 那能不能交换条件和结论呢？由圆的对称性可知，只要具备五个条件中的任何两个，那么其他三个也成立.

对于“平分弦(不是直径)的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧”这一结论，一定要注意“弦不是直径”这一条件. 因为圆的任意两条直径互相平分，但它们不一定是互相垂直的.

垂径定理及其推论揭示了垂直于弦的直径和这条弦及这条弦所对的弧之间的内在关系，其本质是圆的轴对称性的具体化. 垂径定理是证明线段相等、角相等、弧相等、垂直关系以及进行圆的有关计算和作图的重要依据.

例　如图 2.3－1－6，你能找到$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心吗？

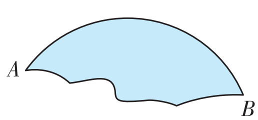


图 2.3－1－6

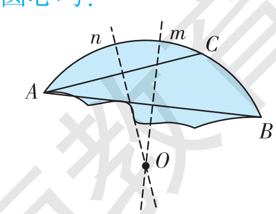


图 2.3－1－7

解:如图 2.3-1-7,作弦 AB,AC 及它们的垂直平分线 m,n,交于点 O,点 O 即为 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心,因为弦 AB 和弦 AC 的垂直平分线都经过圆心,那么两条垂直平分线的交点即为圆心.

〖变式训练〗

1. 如图 2.3-1-8,$\odot O$ 的弦 $AB=8$,M 是 AB 的中点,且 $OM=3$,则 $\odot O$ 的直径等于 (　　)

A. 8　　B. 2　　C. 10　　D. 5

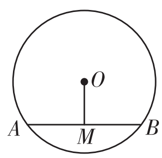


图 2.3-1-8

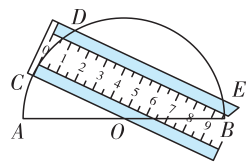


图 2.3-1-9

2. 如图 2.3-1-9,将一把两边都带有刻度的直尺放在半圆形纸片上,使其一边经过圆心 O,另一边所在直线与半圆相交于点 D,E,量出半径 $OC=5$ cm,弦 $DE=8$ cm,则直尺的宽度为__________.

3. 如图 2.3-1-10,圆 O 的直径 $CD=6$ cm,AB 是圆 O 的弦,$AB\perp CD$,垂足为 M,$OM:OD=3:5$,求 AB 的长.

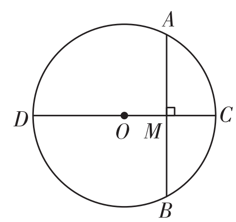


图 2.3-1-10

〖反思迁移〗

1. 本节课我们利用圆的轴对称性得到了垂径定理及其推论,可以综合叙述为,对于一个圆和一条直线来说,如果具备下列五个条件中的任何两个,那么其他三个也成立:①垂直于弦;②过圆心;③平分弦(不是直径);④平分弦所对的优弧;⑤平分弦所对的劣弧. 也可以理解为①②③④⑤“知二推三”.

2. 本节课用到了类比的学习方法,类比等腰三角形的轴对称性,由圆的轴对称性得到了垂径定理,并将垂径定理推广到了更一般的结论,即五个条件知二推三.

3. 垂径定理为我们证明线段相等、角相等、弧相等、垂直关系以及进行圆的有关计算和作图提供了重要依据,并且在计算中经常将垂径定理和勾股定理有机地结合在一起,为后面学习计算扇形的弧长和面积奠定了基础.

三、效果检测

1. 下列说法正确的是 ( )

A. 垂直于弦的直线必经过圆心　　B. 平分弦的直径必平分弦所对的弧

C. 平分弦的直径垂直于弦　　D. 弦的垂直平分线必经过圆心

2. 如图 2.3-1-11，AB 是 $\odot O$ 的弦，$OC \perp AB$ 于点 D，交 $\odot O$ 于点 C，若 $AB=8$，$CD=2$，那么 $\odot O$ 的直径为 ( )

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

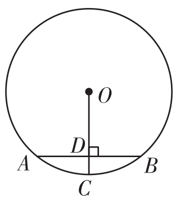


图 2.3-1-11

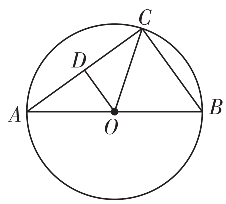


图 2.3-1-12

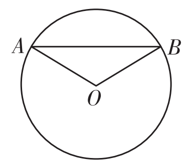


图 2.3-1-13

3. 如图 2.3-1-12，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle BAC=35^\circ$，点 D 是弦 AC 的中点，则 $\angle DOC$ 的度数是________度.

4. 如图 2.3-1-13，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，半径 $OA=20$ cm，$\angle AOB=120^\circ$，则 $\triangle AOB$ 的面积为________cm^2.

5. 一根横截面为圆形的下水管道的直径为 1 m，管内有少量的污水(如图 2.3-1-14)，此时的水面宽 AB 为 0.6 m.

(1)求此时的水深(即阴影部分的弓形高)；

(2)当水位上升到水面宽为 0.8 m 时，求水面上升的高度.

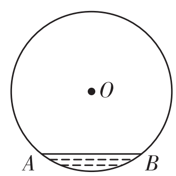


图 2.3-1-14

6. 如图 2.3-1-15，M 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，过点 M 的弦 MN 交 AB 于点 C，设 $\odot O$ 的半径为 4 cm，$MN=4\sqrt{3}$ cm.

(1)求圆心 O 到弦 MN 的距离；

(2)求 $\angle ACM$ 的度数.

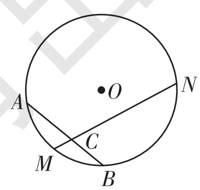


图 2.3-1-15

2.4 过不共线三点作圆

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.4-1-1,在已知的$\triangle ABC$中,按以下步骤作图:

①分别以 B,C 为圆心,以大于$\frac{1}{2}BC$的长为半径作弧,两弧相交于两点 M,N;

②作直线 MN 交 AB 于点 D,交 BC 于点 E,连接 CD.

下列结论中,错误的是 ( )

A. $DB=DC$　　B. $BE=CE$　　C. $BE=BD$　　D. DM 平分$\angle BDC$

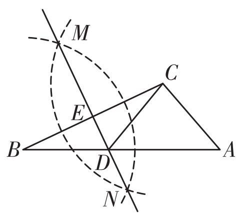


图 2.4-1-1

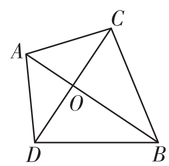


图 2.4-1-2

2. 如图 2.4-1-2,已知 $AC=AD$,$BC=BD$,则 ( )

A. CD 平分$\angle ACB$　　B. CD 垂直平分 AB

C. AB 垂直平分 CD　　D. CD 与 AB 互相垂直平分

3. 到三角形三个顶点的距离相等的点是三角形( )的交点.

A. 三条角平分线　　B. 三边垂直平分线

C. 三条中线　　D. 三条高

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 熟悉线段垂直平分线的尺规作图,并掌握它的定义和性质,线段的垂直平分线是指垂直并平分这条线段,到线段两个端点的距离相等的一条直线.

2. 到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

3. 三角形三边垂直平分线的交点到三角形三个顶点的距离相等.

你可以开始今天的新课学习了!

我们知道圆心和半径可以确定一个圆,平面内几个点可以确定一个圆呢?确定圆的这几个点要满足哪些条件呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 确定圆的条件

(1)我们知道，经过一个点 A 作圆很容易，只要以不与点 A 重合的任意一点为圆心，以该点与点 A 的距离为半径就可以作出如图 2.4-1-3 所示的圆，这样的圆有无数个.

(2)如果要作经过两个点 A，B 的圆，那么就要以与点 A，B 距离相等的点为圆心，即以线段 AB 的垂直平分线上任意一点为圆心，以这点与点 A(或点 B)的距离为半径，就可以作出如图 2.4-1-4 所示的圆，这样的圆也有无数个.

(3)经过三点一定能画出一个圆吗？过不在同一直线上的 A，B，C 三点作圆，就要以到 A，B，C 三点距离相等的点为圆心，即线段 AB，BC，AC 中任意两条线段的垂直平分线的交点为圆心，以这一点到点 A(或点 B 或点 C)的距离为半径作圆，这样的圆只能作一个，如图 2.4-1-5.

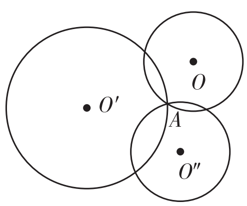


图 2.4-1-3

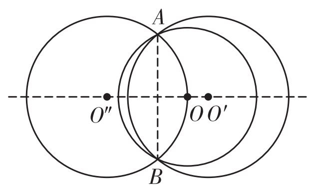


图 2.4-1-4

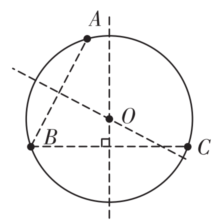


图 2.4-1-5

那么经过同一条直线 l 上的三点能作出一个圆吗？

如图 2.4-1-6，假设过同一直线 l 上的三点 A，B，C 能作出一个圆.

设这个圆的圆心为 P，则点 P 在线段 AB 和线段 BC 的垂直平分线 l_1，l_2 上，即点 P 是 l_1，l_2 的交点，并且 $l_1 \perp l$，$l_2 \perp l$，这与“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”矛盾.

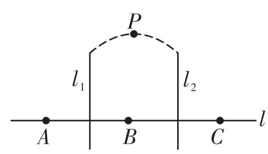


图 2.4-1-6

所以，过同一直线上的三点不能作圆.

因此，不在同一直线上的三点确定一个圆，“确定”一词理解为“有且只有”.

2. 三角形的外接圆

如图 2.4-1-7，经过三角形三个顶点可以且只能作一个圆，我们把经过三角形三个顶点的圆叫作三角形的外接圆. 三角形外接圆的圆心叫作这个三角形的外心. 这个三角形叫作这个圆的内接三角形. 三角形的外心就是三角形三条边的垂直平分线的交点，它到三角形三个顶点的距离相等.

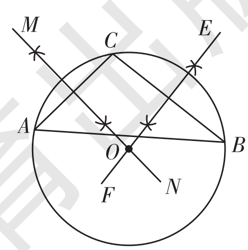


图 2.4-1-7

(1)“接”是说明三角形的顶点在圆上，或者圆经过三角形的三个顶点，“内接”与“外接”是根据三角形与圆的相对位置来确定的，如图 2.4-1-7，$\triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接三角形，$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆.

(2)一个三角形有唯一的外接圆，但一个圆有无数个内接三角形.

(3)如图 2.4－1－8，锐角三角形的外心在三角形内，直角三角形的外心在斜边中点，钝角三角形的外心在三角形外.

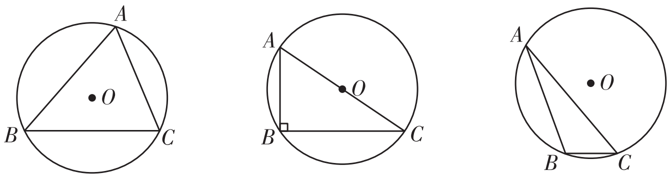


图 2.4－1－8

〖变式训练〗

1. 下列命题中正确的有 （　　）

①过两点可以作无数个圆；

②经过三点一定可以作圆；

③任意一个三角形都有一个外接圆，而且只有一个外接圆；

④任意一个圆有且只有一个内接三角形.

A. 1 个　　　B. 2 个　　　C. 3 个　　　D. 4 个

2. 如图 2.4－1－9，将△ABC 放在由边长为 1 的小正方形组成的网格中，点 A，B，C 均落在格点上，用一个圆面去覆盖△ABC，能够完全覆盖这个三角形的最小圆面半径是________.

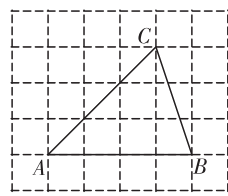


图 2.4－1－9

3. 如图 2.4－1－10，BD，CE 是△ABC 的高，求证：E，B，C，D 四点在同一个圆上.

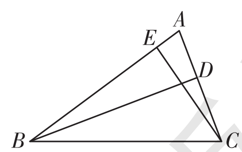


图 2.4－1－10

〖反思迁移〗

1. 本节课我们探究了平面内几个点可以确定一个圆，利用圆上的点到圆心的距离相等这一性质，通过作图我们得出：经过一个点的圆有无数个，平面内异于该点的任意点都可以作为圆心；经过两点的圆也有无数个，圆心一定在连接两点的线段的垂直平分线上；经过同一直线上三点的圆不存在，不在同一条直线上的三点确定一个圆. 在此基础上，我们得到：三角形的三个顶点可以确定一个圆，这个圆叫作三角形的外接圆.

2. “同一直线上的三点不能作圆”，这一命题直接证不好证，我们利用了反证法进行

说明.反证法证明的一般步骤是:(1)假设命题的结论不成立;(2)从假设出发,经过逻辑推理,推出与定义、公理、定理或已知等相矛盾的结论;(3)由矛盾判定假设不正确,从而得出原命题正确.对于有些说理证明题,若用直接证法有困难,可考虑用反证法.

三、效果检测

1. 有下列四边形:①平行四边形;②矩形;③菱形;④正方形.其中四个顶点一定能在同一个圆上的有 ( )

A. ①②③④　　B. ②③④　　C. ②④　　D. ③④

2. 已知$\triangle ABC$的三边长分别为6,8,10,此三角形外接圆的半径为 ( )

A. 10　　B. 6　　C. 4　　D. 5

3. 半径为R的圆内接正三角形的边长为__________.

4. 如图2.4-1-11,直角坐标系中一条圆弧经过网格点A,B,C,其中点B的坐标为(4,4),则该圆弧所在圆的圆心坐标为________.

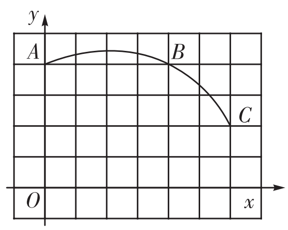


图2.4-1-11

5. 如图2.4-1-12,AD为$\triangle ABC$外接圆的直径,$AD\perp BC$,垂足为点F,$\angle ABC$的平分线交AD于点E,连接BD,CD.

(1)求证:$BD=CD$;

(2)请判断B,E,C三点是否在以D为圆心,以DB为半径的圆上,并说明理由.

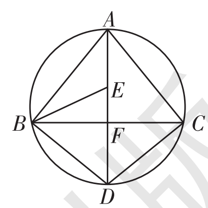


图2.4-1-12

6. 如图2.4-1-13,有一个残缺的圆,已知弧上三点A,B,C.

(1)画出该圆的圆心;

(2)若$\triangle ABC$是等腰三角形,底边$BC=16$ cm,腰$AB=10$ cm,求该圆的半径R.

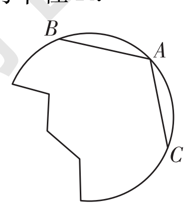


图2.4-1-13

2.5 直线与圆的位置关系(1)

一、前置夯实

〔前置诊断〕检测你的基础,助力新课学习.

1. 已知⊙O的半径为5,若$PO=4$,则点P与⊙O的位置关系是 (　　)

A. 点P在⊙O内　　B. 点P在⊙O上

C. 点P在⊙O外　　D. 无法判断

2. 如图2.5-1-1,点P到直线l的距离是 (　　)

A. 线段PA的长度　　B. 线段PB的长度

C. 线段PC的长度　　D. 线段PD的长度

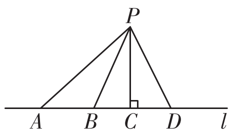


图2.5-1-1

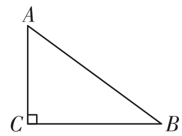


图2.5-1-2

3. 如图2.5-1-2,$BC\perp AC$,$BC=8$,$AC=6$,则点C到线段AB的距离是 (　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 4.8

〔前置巩固〕如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 点与圆的位置关系:已知圆O的半径为r,点P到圆心O的距离是d,①当$d<r$时,点P在⊙O内,②当$d=r$时,点P在⊙O上,③当$d>r$时,点P在⊙O外.

2. 点到直线的距离是指直线外一点到这条直线的垂线段的长度.

3. 如图2.5-1-3,在Rt△ABC中,直角顶点C到斜边AB的距离即为斜边AB上的高CD的长度,求直角三角形斜边上的高的方法很多,其中面积法仍是较为常用的方法,即$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$.

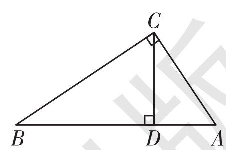


图2.5-1-3

你可以开始今天的新课学习了!

我们知道,点与圆有三种位置关系:点在圆内,点在圆上,点在圆外.这是由点到圆心的距离与半径的大小比较来确定的.那么直线与圆又有哪些位置关系呢?我们又有哪些方法进行判断呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 直线与圆的位置关系

根据直线与圆的公共点的个数，将直线与圆的位置关系描述成三种情形：相交，相切，相离. 为了研究的方便，可以用圆心到直线的距离来定量地刻画直线与圆的位置关系.

设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，$\odot O$ 的半径为 r. 圆心 O 到直线 l 的距离 d 是指从圆心向直线 l 所作的垂线段的长度.

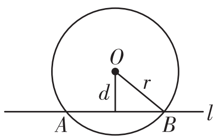


图 2.5－1－4

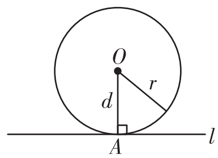


图 2.5－1－5

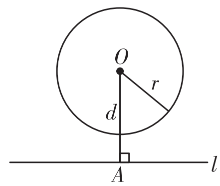


图 2.5－1－6

相交：直线和圆有两个公共点，这时我们说这条直线和圆相交，这条直线叫作圆的割线，两个公共点是直线与圆的交点. 如图 2.5－1－4，直线 l 与$\odot O$有两个公共点 A，B，此时 $d<r$.

相切：直线和圆有一个公共点，这时我们说这条直线和圆相切，这条直线叫作圆的切线，这个点叫做切点. 如图 2.5－1－5，直线 l 与$\odot O$有唯一的公共点 A，此时 $d=r$.

相离：直线和圆没有公共点，这时我们说这条直线和圆相离，此时 $d>r$，如图 2.5－1－6.

由此我们可以得到：

$d<r \Leftrightarrow$ 直线 l 与$\odot O$ 相交，l 是$\odot O$ 的割线；

$d=r \Leftrightarrow$ 直线 l 与$\odot O$ 相切，l 是$\odot O$ 的切线；

$d>r \Leftrightarrow$ 直线 l 与$\odot O$ 相离.

2. 判定直线与圆的位置关系的两种方式

(1)通过直线与圆的公共点个数来判定；

(2)通过圆心到直线的距离与半径的大小关系来判定.

方法 1 是直观的描述，方法 2 是定量地刻画，需通过计算、推理才能得出的结论，证明时往往用方法 2.

例 在直角坐标系中，已知 $A(-8,0)$，$B(0,6)$，点 M 在线段 AB 上.

(1)如图 2.5－1－7，如果点 M 是线段 AB 的中点，且$\odot M$ 的半径为 4，试判断直线 OB 与$\odot M$ 的位置关系，并说明理由；

(2)如图 2.5－1－8，$\odot M$ 与 x 轴、y 轴都相切，切点分别是点 E，F，试求点 M 的坐标.

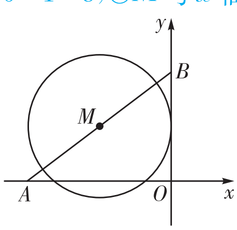


图 2.5－1－7

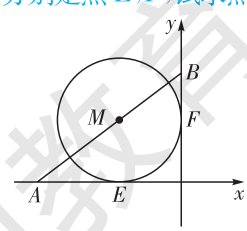


图 2.5－1－8

解:(1)直线 OB 与⊙M 相切.

理由:设线段 OB 的中点为 D,连接 MD,如图 2.5-1-9,

∵点 M 是线段 AB 的中点,∴$MD // AO$,$MD=4$,即点 D 在⊙M 上.

又 $OA \perp OB$,∴$MD \perp OB$.

又∵点 D 在直线 OB 上,,∴直线 OB 与⊙M 相切.

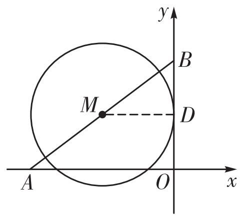


图 2.5-1-9

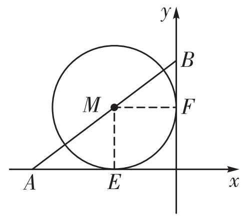


图 2.5-1-10

(2)连接 ME,MF,如图 2.5-1-10.

设直线 AB 的解析式是 $y=kx+b$,

∵$A(-8,0)$,$B(0,6)$,

∴$\begin{cases}0=-8k+b,\\6=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{4},\\b=6,\end{cases}$

即直线 AB 的函数关系式是 $y=\dfrac{3}{4}x+6$.

∵⊙M 与 x 轴、y 轴都相切,

∴点 M 到 x 轴、y 轴的距离都相等,即 $ME=MF$,

于是设 $M(a,-a)(-8<a<0)$.

把 $x=a$,$y=-a$ 代入 $y=\dfrac{3}{4}x+6$,

得 $-a=\dfrac{3}{4}a+6$,得 $a=-\dfrac{24}{7}$,

∴点 M 的坐标为 $\left(-\dfrac{24}{7},\dfrac{24}{7}\right)$.

〖变式训练〗

1. 直线 l 上的一点到圆心的距离等于半径,则直线与圆的位置关系一定是 (　　)

A. 相离　　B. 相切　　C. 相交　　D. 相切或相交

2. 如图 2.5-1-11,△ABC 中,$AB=3$,$AC=4$,$BC=5$,D,E 分别是 AC,AB 的中点,则以 DE 为直径的圆与 BC 的位置关系是__________.

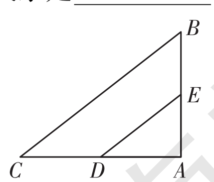


图 2.5-1-11

3. 如图 2.5－1－12，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=10$，$BC=24$，$\odot O$ 的半径为 6，当圆心 O 与 C 重合时，试判断$\odot O$ 与 AB 的位置关系.

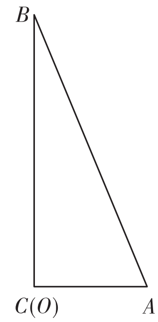
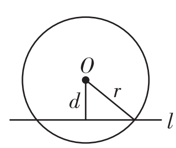
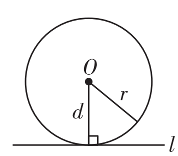
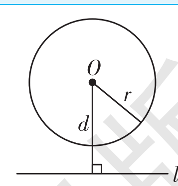


图 2.5－1－12

〖反思迁移〗

直线与圆的三种不同的位置关系，总结如下表：

直线与圆的位置关系	相交	相切	相离
图形			
公共点个数	2 个	1 个	没有
公共点名称	交点	切点	
直线名称	割线	切线	
圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系	$d<r$	$d=r$	$d>r$

在探究这三种位置关系前，我们先观察直线与圆位置关系的变化过程，再通过思考得出“圆心到直线的距离 d 和半径 r 的数量关系”与“直线和圆的位置关系”的对应与等价，最后，实现位置关系与数量关系的结合，这一过程体现了分类和数形结合的思想方法.

三、效果检测

1. 已知⊙O的半径为 4 cm，如果圆心 O 到直线 l 的距离为 3.5 cm，那么直线 l 与⊙O 的位置关系是 ( )

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不确定

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=5$，$BC=12$，⊙C 的半径为$\frac{58}{13}$，则⊙C 与 AB 的位置关系是 ( )

A. 相切　　B. 相交　　C. 相离　　D. 无法确定

3. 已知圆的半径为 3 cm，一条直线上有一点到圆心的距离为 3 cm，则这条直线与圆的位置关系为__________.

4. 如图 2.5-1-13，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=3$，以 D 为圆心的圆，与线段 AB 有公共点，则圆的半径 r 的取值范围是__________.

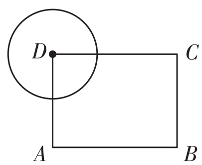


图 2.5-1-13

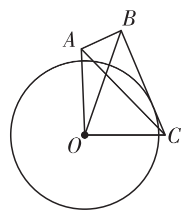


图 2.5-1-14

5. 如图 2.5-1-14，已知⊙O 与 BC 相切，点 C 不是切点，$AO\perp OC$，$\angle OAC=\angle ABO$，且 $AC=BO$，判断直线 AB 与⊙O 的位置关系，并说明理由.

2.5 直线与圆的位置关系(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 已知⊙O 的直径是 10，圆心 O 到直线 l 的距离是 5，则直线 l 和⊙O 的位置关系是 （　　）

A. 相离　　　B. 相交　　　C. 相切　　　D. 外切

2. 设⊙O 的半径为 3，点 O 到直线 l 的距离为 d，若直线 l 与⊙O 只有一个公共点，则 d 应满足的条件是 （　　）

A. $d=3$　　　B. $d\leqslant 3$　　　C. $d<3$　　　D. $d>3$

3. 如图 2.5－2－1，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 为 BC 的中点，则下列结论中错误的是 （　　）

A. $\angle BAD=\angle CAD$

B. $AD\perp BC$

C. $\angle B=\angle C$

D. $\angle BAC=\angle B$

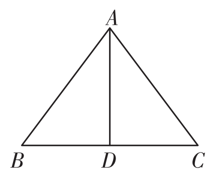


图 2.5－2－1

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 直线与圆的位置关系有三种，可以利用直线与圆的公共点的个数，或圆心到直线的距离与圆的半径的大小关系来判定. 当 $d=r$ 时，直线与圆相切，直线与圆有一个公共点；当 $d<r$ 时，直线与圆相交，直线与圆有两个公共点；当 $d>r$ 时，直线与圆相离，直线与圆没有公共点.

2. 等腰三角形的性质：等腰三角形的两底角相等，简称“等边对等角”；等腰三角形底边上的高、中线及顶角平分线重合，简称“三线合一”.

你可以开始今天的新课学习了！

上节课我们学习了直线和圆的三种位置关系，知道了可以从公共点的个数和圆心到直线的距离与半径作比较两种方法进行判断，那判断直线和圆相切的方法是否仅此两种呢？本节课我们将继续探索切线的判定条件.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 切线的判定方法

直线与圆的三种位置关系中，相切是最特殊的情形，数学中通常将这种特殊情形作为研究对象. 前面我们已经学习了判定直线 l 与⊙O 相切的两种方式：直线 l 和⊙O 只有一个公共点；圆心 O 到直线 l 的距离等于⊙O 的半径. 除这两种方式之外，是否还有更便捷的判定方法呢？

如图 2.5－2－2，画⊙O 及半径 OA，作一条直线 l 过半径 OA 的外端点 A，且垂直于 OA，此时圆心 O 到直线 l 的距离等于⊙O 的半径，所以直线 l 与⊙O 相切.

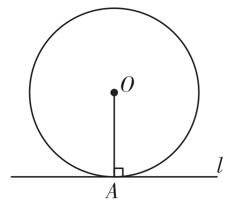


图 2.5－2－2

由此我们可以得到圆的切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线. 利用这一判定定理，我们还能用三角尺过圆上一点画圆的切线.

2. 切线的性质

由切线的定义，我们已经知道切线具有以下两条性质：(1)切线和圆只有一个公共点；(2)圆心到切线的距离等于半径.

那圆的切线还有哪些性质呢？如图 2.5－2－3，直线 CD 是⊙O 的切线，切点为 A，半径 OA 与直线 CD 是不是一定垂直呢？

我们知道圆是轴对称图形，此时直线 CD 与⊙O 只有一个公共点 A，我们将⊙O 沿着 AB 所在直线对折时，直线 CD 在 AB 两边的部分重合，因此 $\angle BAC=\angle BAD=90°$，所以 $OA\perp CD$.

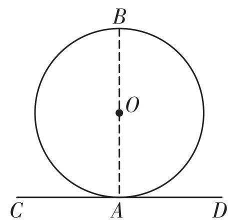


图 2.5－2－3

所以我们得到切线的第三条性质：圆的切线垂直于过切点的半径.

由圆的轴对称性，我们也不难得出：经过圆心垂直于切线的直线必过切点；经过切点垂直于切线的直线必过圆心.

上述性质可归纳为：已知直线满足①过圆心，②过切点，③垂直于切线这三个条件中的任意两个，便可得到第三个结论.

例 如图 2.5－2－4，已知三角形 ABC 的边 AB 是⊙O 的切线，切点为 B. AC 经过圆心 O 并与圆相交于点 D，C，过 C 作直线 $CE\perp AB$，交 AB 的延长线于点 E.

(1)求证：CB 平分 $\angle ACE$；

(2)若 $BE=3$，$CE=4$，求⊙O 的半径.

证明：(1)如图 2.5－2－4，连接 OB.

∵ AB 是⊙O 的切线，∴ $OB\perp AB$.

∵ $CE\perp AB$，∴ $OB /\!/ CE$，∴ $\angle 2=\angle 3$.

又∵ $OB=OC$，∴ $\angle 1=\angle 3$，

∴ $\angle 1=\angle 2$，即 CB 平分 $\angle ACE$.

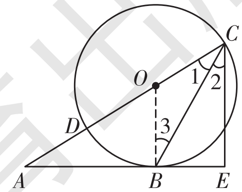


图 2.5－2－4

(2)如图 2.5－2－5，连接 BD.

∵ $CE\perp AB$，∴ $\angle E=90°$，

∴ $BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵ CD 是⊙O 的直径，∴ $\angle DBC=90°$，∴ $\angle DBC=\angle E$.

又$\angle 1=\angle 2$，$\therefore \triangle DBC\backsim\triangle BEC$，$\therefore \dfrac{CD}{BC}=\dfrac{BC}{CE}$，

$\therefore BC^2=CD\cdot CE$，$\therefore CD=\dfrac{5^2}{4}=\dfrac{25}{4}$，

$\therefore OC=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{25}{8}$，

即$\odot O$的半径为$\dfrac{25}{8}$.

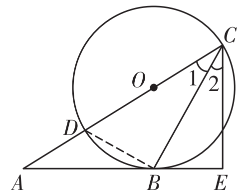


图 2.5-2-5

〖变式训练〗

1. 如图 2.5-2-6，AB是$\odot O$的直径，下列条件中不能判定直线AT是$\odot O$的切线的是（　　）

A. $AB=4$，$AT=3$，$BT=5$　　B. $\angle B=45^\circ$，$AB=AT$

C. $\angle B=55^\circ$，$\angle TAC=55^\circ$　　D. $\angle ATC=\angle B$

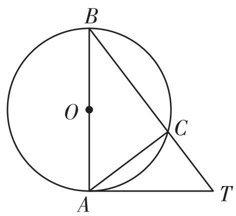


图 2.5-2-6

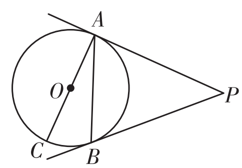


图 2.5-2-7

2. 如图 2.5-2-7，已知PA，PB是$\odot O$的切线，A，B为切点，AC是$\odot O$的直径，$\angle P=40^\circ$，则$\angle BAC$的大小是__________.

3. 如图 2.5-2-8，AB是$\odot O$的直径，点D在AB的延长线上，点C在$\odot O$上，$CA=CD$，$\angle CDA=30^\circ$.

(1)试判断直线CD与$\odot O$的位置关系，并说明理由；

(2)若$\odot O$的半径为 4，求点A到CD所在直线的距离.

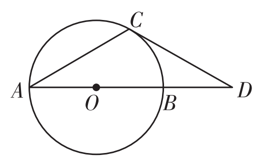


图 2.5-2-8

〖反思迁移〗

圆的切线的判定定理和性质定理可以总结如下：

圆的切线

- 判定：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.
- 性质：①圆的切线垂直于过切点的半径；
  ②经过圆心垂直于切线的直线必过切点；
  ③经过切点垂直于切线的直线必过圆心.

在利用圆的切线的判定和性质解决问题时，常见的辅助线有：①判定切线时“连圆心和直线与圆的公共点”或“过圆心作这条直线的垂线”；②有切线时，常常“遇到切点连圆心得半径”.

圆的切线的判定和性质为圆的计算和证明提供了重要的依据，特别是出现了垂直关系；同时本节课内容也为后面学习切线长定理和三角形的内切圆奠定了基础.

三、效果检测

1. 下列说法不正确的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 与圆只有一个公共点的直线是圆的切线

B. 经过半径的外端，且垂直于这条半径的直线是圆的切线

C. 与圆心的距离等于这个圆的半径的直线是圆的切线

D. 垂直于半径的直线是圆的切线

2. 如图 2.5-2-9，点 P 为⊙O 外一点，PA 为⊙O 的切线，A 为切点，PO 交⊙O 于点 B，$\angle P=30^\circ$，$OB=3$，则线段 BP 的长为　　（　　）

A. 3

B. $3\sqrt{3}$

C. 6

D. 9

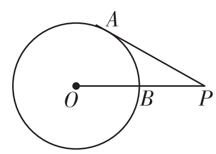


图 2.5-2-9

3. 如图 2.5-2-10，AB 是⊙O 的直径，PA 与⊙O 相切于点 A，线段 PO 与⊙O 相交于点 C，连接 BC，若 $\angle P=36^\circ$，则 $\angle B$ 等于__________.

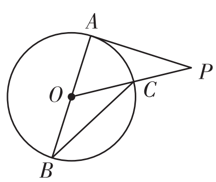


图 2.5-2-10

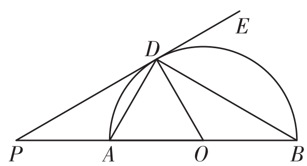


图 2.5-2-11

4. 如图 2.5-2-11，已知 AB 是⊙O 的直径，AD，BD 是半圆的弦，$\angle PDA=\angle PBD$，$\angle BDE=60^\circ$，若 $PD=\sqrt{3}$，则 PA 的长为__________.

5. 如图 2.5-2-12，AB 是⊙O 的直径，AD 与⊙O 相切于点 A，DE 与⊙O 相切于点 E，点 C 为 DE 延长线上一点，且 $CE=CB$. 求证：BC 为⊙O 的切线.

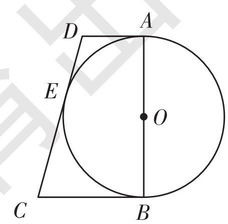


图 2.5-2-12

2.5 直线与圆的位置关系(3)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.5-3-1,在⊙O 中,若点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,$\angle A=45°$,则$\angle BOC=$　　(　　)

A. 40°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 60°

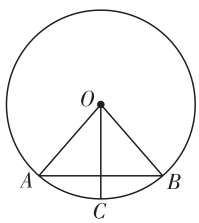


图 2.5-3-1

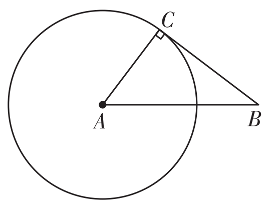


图 2.5-3-2

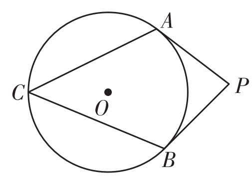


图 2.5-3-3

2. 如图 2.5-3-2,Rt△ABC 中,$AB=10$ cm,$BC=8$ cm,若点 C 在⊙A 上,则⊙A 的半径是　　(　　)

A. 4 cm　　B. 6 cm　　C. 8 cm　　D. 10 cm

3. 如图 2.5-3-3,PA,PB 分别切⊙O 于 A,B 两点,点 C 在优弧$\overset{\frown}{ACB}$上,$\angle P=80°$,则$\angle C$ 的度数为　　(　　)

A. 50°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 在同圆或等圆中,两个圆心角、两条弧、两条弦,其中有一组量相等,那么其余两组量也相等.

2. 切线的判定:经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线;

切线的性质:圆的切线垂直于过切点的半径.

3. 圆周角定理:圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

4. 四边形的内角和为 360°.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们学习了圆的切线的性质和判定,知道过圆上一点只能作出圆的一条切线,那么过圆外一点能作出圆的几条切线呢?这些切线又会有哪些新的性质呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 切线长定理

如图 2.5－3－4，在纸上画出$\odot O$，并画出过点 A 的切线，在其上任取一点 P，连接 PO，沿直线 PO 将纸对折，设圆上与点 A 重合的点为B，因为OB与OA 重叠，OA 是半径，OB 也就是半径. 又因为 OB 是半径，根据对折后的角不变，所以 PB 是$\odot O$ 的另一条切线，根据轴对称性质，我们很容易得到 $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

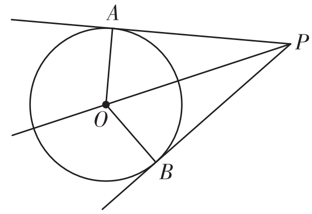


图 2.5－3－4

我们把 PA 或 PB 的长，即经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长.

注意：切线和切线长是两个完全不同的概念，切线是直线，是不能度量的；切线长是一条线段的长，这条线段的两个端点一个是圆外的点，另一个是切点.

2. 切线长定理的证明

由上面的操作我们可以得到：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

从圆外一点 P 向圆引的切线为什么是两条呢？如图 2.5－3－5，由切线的性质可知，$\angle PAO=\angle PBO=90°$，所以点 A，B 在以 OP 为直径的圆上，而以 OP 为直径的圆与$\odot O$ 有且只有两个交点，所以从圆外一点可以引圆的两条切线.

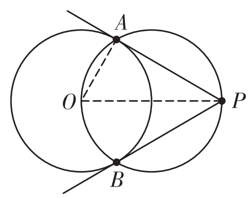


图 2.5－3－5

下面我们给予切线长定理的严格证明：

如图 2.5－3－4，已知 PA，PB 是$\odot O$ 的两条切线，切点为 A，B，求证：$PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

证明：$\because PA$，PB 是$\odot O$ 的两条切线，

$\therefore OA\perp AP$，$OB\perp BP$.

又$\because OA=OB$，$OP=OP$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP$（HL），

$\therefore PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

由此得到切线长定理：过圆外一点所作的圆的两条切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.

例　如图 2.5－3－6，PA，PB 分别与$\odot O$ 相切于点 A，B，PO 的延长线交$\odot O$ 于点 C，连接 BC，OA.

（1）求证：$\angle POA=2\angle PCB$；

（2）若 $OA=3$，$PA=4$，求 $\tan\angle PCB$ 的值.

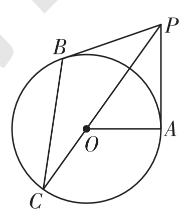


图 2.5－3－6

解：（1）如图 2.5－3－7，连接 OB.

$\because PA, PB$ 分别与$\odot O$相切于点 A, B，

$\therefore PA=PB, \angle OBP=\angle OAP=90^\circ, \angle APO=\angle BPO$，

$\therefore \angle POA=\angle POB$.

$\because \angle POB=2\angle PCB, \therefore \angle POA=2\angle PCB$.

(2)如图 2.5-3-7，过 B 作 $BE\perp PC$ 于 E，

$\because PB=PA=4, OB=OA=3, \therefore PO=5$.

又$\frac{1}{2}PO\cdot BE=\frac{1}{2}OB\cdot PB, \therefore BE=\frac{12}{5}$，

由勾股定理得，$OE=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}$，

$\therefore CE=OC+OE=3+\frac{9}{5}=\frac{24}{5}$，

在 Rt$\triangle OBE$ 中，$\tan\angle PCB=\frac{BE}{CE}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{24}{5}}=\frac{1}{2}$.

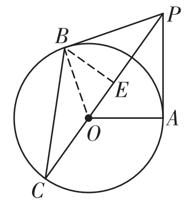


图 2.5-3-7

〖变式训练〗

1. 如图 2.5-3-8，PA, PB 切$\odot O$于点 $A, B, PA=8, CD$ 切$\odot O$于点 E，交 PA, PB 于 C, D 两点，则$\triangle PCD$ 的周长是　　(　　)

A. 8　　　　B. 18

C. 16　　　　D. 14

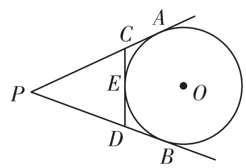


图 2.5-3-8

2. 如图 2.5-3-9，PA, PB, CD 是$\odot O$的切线，切点分别为点 A, B, E，若$\triangle PCD$ 的周长为 18 cm，$\angle APB=60^\circ$，求$\odot O$的半径.

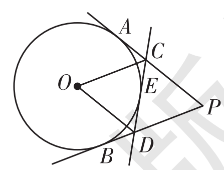


图 2.5-3-9

〖反思迁移〗

本节课我们在切线的性质及判定的基础上学习了切线长的概念：经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长. 切线长的性质与切线的性质联系非常密切，切线的所有性质仍然适合切线长.

同时学习了切线长定理:过圆外一点所作的圆的两条切线长相等,圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.这一定理常与勾股定理和垂径定理等联系起来综合运用,同时这一定理也为下节内容“三角形的内切圆”提供了基础.

三、效果检测

1. 如图 2.5-3-10,从⊙O 外一点 P 引圆的两条切线 PA,PB,切点分别是 A,B,如果 $\angle APB=60^\circ$,线段 $PA=10$,那么弦 AB 的长是 (　　)

A. 10　　B. 12　　C. 5　　D. 10

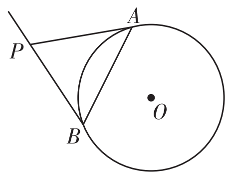


图 2.5-3-10

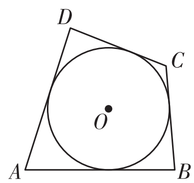


图 2.5-3-11

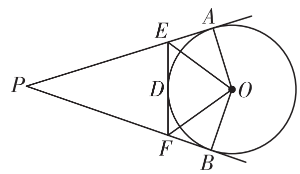


图 2.5-3-12

2. 如图 2.5-3-11,⊙O 内切于四边形 $ABCD$,$AB=10$,$BC=7$,$CD=8$,则 AD 的长度为 (　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

3. 如图 2.5-3-12,已知 PA,PB,EF 分别切⊙O 于 A,B,D,若 $PA=10$ cm,那么△PEF 的周长是_________ cm.若 $\angle P=35^\circ$,那么 $\angle AOB=$_________,$\angle EOF=$_________.

4. 已知 P 为⊙O 外一点,PA,PB 为⊙O 的切线,A,B 为切点,$\angle P=70^\circ$,C 为⊙O 上一个动点,且不与 A,B 重合,则 $\angle BCA=$_________.

5. 如图 2.5-3-13,AB 是⊙O 的直径,AD,DC,BC 是切线,点 A,E,B 为切点.

(1)求证:$OD\perp OC$;

(2)若 $BC=9$,$AD=4$,求 OB 的长.

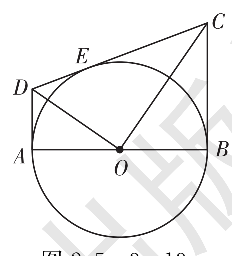


图 2.5-3-13

2.5 直线与圆的位置关系(4)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.5-4-1,OC 是$\angle AOB$ 的平分线,P 为 OC 上一点,$PD\perp OA$,垂足为 D,$PE\perp OB$,垂足为 E. 若 $PD=3$,则 $PE=$ ( )

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. 4　　D. 6

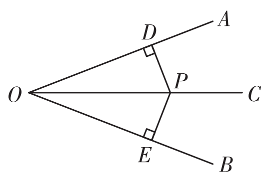


图 2.5-4-1

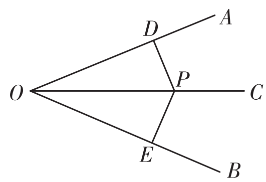


图 2.5-4-2

2. 如图 2.5-4-2,P 为 OC 上一点,$PD\perp OA$,垂足为 D,$PE\perp OB$,垂足为 E. 若 $PD=1$,$PE=1$,$\angle AOB=40^\circ$,则$\angle BOC=$ ( )

A. 10°　　B. 20°　　C. 30°　　D. 40°

3. 已知⊙O 的半径为 5,要让点 A 在⊙O 上,线段 OA 的长应为 ( )

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 如图 2.5-4-3,已知点 A 是⊙O 上一点,直线 BC 经过点 A,要让直线 BC 是⊙O 的切线,$\angle OAB$ 的度数应是 ( )

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

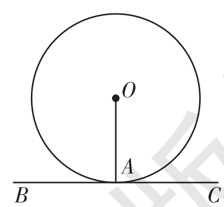


图 2.5-4-3

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 角平分线的性质:角平分线上的点到角两边的距离相等.

2. 角平分线的判定:角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

3. 圆上的点到圆心的距离等于圆的半径,反之,若点到圆心的距离等于圆的半径,则该点在这个圆上.

4. 经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

你可以开始今天的新课学习了！

我们知道，三角形的三条中线交于一点，这个点叫作三角形的重心；三角形的三条高或其延长线交于一点，这个点叫作三角形的垂心. 那么，三角形的三条角平分线是否也交于一点？这个点又有什么性质？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 三角形的内切圆

我们已经探究了三角形的三条中线和三条高或其延长线分别相交于一点，三角形的三条角平分线的是否也相交于一点呢？

如图 2.5-4-4，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$和$\angle CAB$的平分线相交于点O，作$OD\perp BC$，垂足为D，作$OE\perp AB$，垂足为E，作$OF\perp AC$，垂足为F.

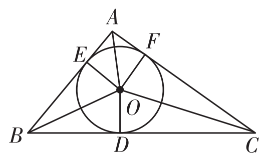


图 2.5-4-4

因为BO是$\angle ABC$的平分线，$OD\perp BC$，$OE\perp AB$，由角平分线的性质可知，$OD=OE$. 同理可知，$OE=OF$，所以$OD=OF$. 又因为$OD\perp AB$，$OF\perp AC$，由角平分线的判定可知，CO为$\angle BCA$的平分线. 所以$\triangle ABC$的三条角平分线交于一点O，且点O到三角形三边的距离相等.

以点O为圆心，OE长为半径画圆. 因为$OD=OE=OF$，所以点D，F都在$\odot O$上. 因为$BC\perp OD$，所以BC是$\odot O$的切线. 同理可知，AC，AB也是$\odot O$的切线. 所以$\odot O$与$\triangle ABC$的三边均相切，$\odot O$叫作$\triangle ABC$的内切圆，圆心O叫作三角形的内心，$\triangle ABC$叫作$\odot O$的外切三角形.

与三角形各边都相切的圆叫作三角形的内切圆，内切圆的圆心叫作三角形的内心，这个三角形叫作圆的外切三角形.

2. 三角形的内心

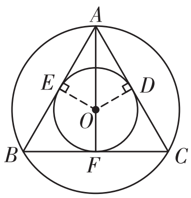
如图 2.5-4-4，设点O是$\triangle ABC$的内心，由于AB，BC，CA都与$\odot O$相切，因此圆心O到AB，BC，CA的距离都等于圆的半径，从而圆心O在$\triangle ABC$的每个内角的平分线上. 由此得出：

(1)三角形的内心是这个三角形的三条角平分线的交点；

(2)三角形的内心到三角形三边的距离相等.

3. 三角形的内切圆和外接圆

我们可以从定义、圆心名称、实质、圆的半径四个方面来比较三角形的内切圆和外接圆，如下表所示.

图示	关系	定义	圆心	实质	半径
	三角形的外接圆	经过三角形各顶点的圆	外心	三角形各边垂直平分线的交点	交点到三角形各顶点的距离
	三角形的内切圆	与三角形各边都相切的圆	内心	三角形角平分线的交点	交点到三角形各边的距离

〖变式训练〗

1. 如图 2.5－4－5，$\triangle ABC$ 的内切圆的三个切点分别为 D,E,F，$\angle A=75^\circ$，$\angle B=45^\circ$，则 $\angle EOF$ 的度数是 (　　)

A. 100°　　B. 110°　　C. 120°　　D. 130°

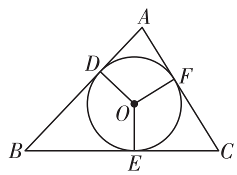


图 2.5－4－5

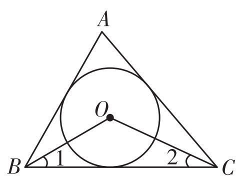


图 2.5－4－6

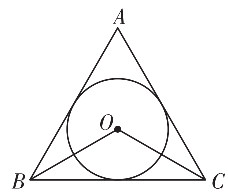


图 2.5－4－7

2. 如图 2.5－4－6，⊙O 是$\triangle ABC$ 的内切圆，$\angle A=70^\circ$，则$\angle BOC$ 的度数是 (　　)

A. 110°　　B. 115°　　C. 120°　　D. 125°

3. 如图 2.5－4－7，等边三角形的内切圆半径为 1，那么三角形的边长为 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

〖反思迁移〗

三角形三条中线的交点叫三角形的重心，三角形三条高所在直线的交点叫三角形的垂心，三角形三条角平分线的交点叫三角形的内心，三角形三边垂直平分线的交点叫三角形的外心.

本节课主要探究三角形内心的定义、位置和性质. 与三角形各边都相切的圆叫作三角形的内切圆，内切圆的圆心叫作三角形的内心；三角形的内心是这个三角形的三条角平分线的交点；三角形的内心到三角形三边的距离相等.

三、效果检测

1. 下列关于三角形的内心和外心的说法中，正确的说法为 (　　)

①三角形的内心是三角形内切圆的圆心；②三角形的内心是三条角平分线的交点；③三角形的外心到三边的距离相等；④三角形的外心是三边中垂线的交点.

A. ①②③④　　B. ①②③

C. ①②④　　D. ②③④

2. 如图 2.5－4－8，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的内切圆，$\angle BOC=120^{\circ}$，则$\angle A$ 的度数是　（　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°

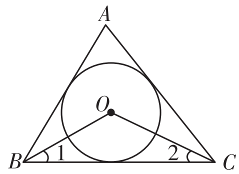


图 2.5－4－8

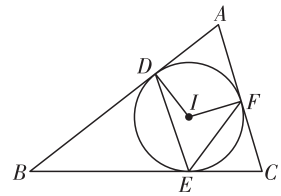


图 2.5－4－9

3. 如图 2.5－4－9，圆 I 是三角形 ABC 的内切圆，D，E，F 为三个切点，若$\angle DEF=52^{\circ}$，则$\angle A$ 的度数为　（　　）

A. 68°　　B. 52°　　C. 76°　　D. 38°

4. 如图 2.5－4－10，在三角形 ABC 中，$BC=14$，$AC=9$，$AB=13$，它的内切圆分别与 BC，AC，AB 切于点 D，E，F，那么 AF，BD，CE 长分别为　（　　）

A. $AF=4$，$BD=9$，$CE=5$　　B. $AF=4$，$BD=5$，$CE=9$

C. $AF=5$，$BD=4$，$CE=9$　　D. $AF=9$，$BD=4$，$CE=5$

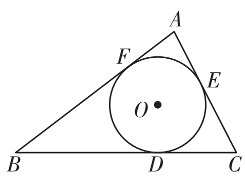


图 2.5－4－10

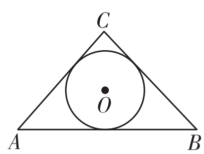


图 2.5－4－11

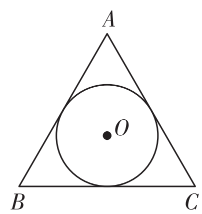


图 2.5－4－12

5. 如图 2.5－4－11，$\odot O$ 是等腰直角三角形 ABC 的内切圆，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=4$，则$\odot O$ 的半径等于__________.

6. 如图 2.5－4－12，已知$\odot O$ 是边长为 2 的等边$\triangle ABC$ 的内切圆，则$\odot O$ 的半径为__________.

2.6 弧长与扇形面积(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 半径为 r 的圆的周长是 ( )

A. πr　　B. $2\pi r$　　C. πr^2　　D. $2\pi r^2$

2. 在圆 O 中,A,B,C,D 是圆上的四点,若$\angle AOB=\angle COD$,则$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$的大小关系是 ( )

A. $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$　　B. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

C. $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{CD}$　　D. 无法确定

3. 如图 2.6－1－1,点 A,B 是圆上的两点,圆心角$\angle AOB=120°$,则$\overset{\frown}{AB}$的长是圆周长的 ( )

A. $\dfrac{1}{2}$

B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{4}$

D. $\dfrac{1}{5}$

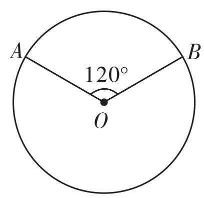


图 2.6－1－1

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 圆的周长计算公式是 $C=2\pi r$,其中 r 是圆的半径.
2. 在同圆或等圆中,如果圆心角相等,那么它们所对的弧也相等.
3. 在同圆或等圆中,两条弧的长度之比与它们所对圆心角的度数之比相等.

你可以开始今天的新课学习了!

圆的周长计算公式是 $C=2\pi r$,其中 r 是圆的半径.弧是圆周上的一部分,我们能否根据圆心角的大小计算弧长呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 弧长的计算

我们已经知道,同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,而一个周角等于 360°,因此,1°的圆心角所对弧长就是圆周长的$\frac{1}{360}$,据此,我们可根据圆心角的度数求得对应的弧长.

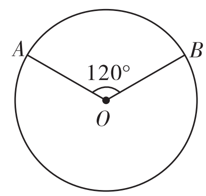


图 2.6-1-2

例如,如图 2.6-1-2,已知⊙O 的半径为 15,点 A,B 是圆上的两点,圆心角$\angle AOB=120°$,求$\overset{\frown}{AB}$的长度.

由于整个圆周的圆心角是 360°,$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角度数是 120°,所以$\overset{\frown}{AB}$所对圆心角是 360°的$\frac{120}{360}$,所以$\overset{\frown}{AB}$的长就是圆周长的$\frac{120}{360}$,即$\overset{\frown}{AB}$的长 $l=\frac{120}{360}\times2\pi\times15=10\pi$.

推广到一般情况,如果⊙O 的半径为 r,圆心角$\angle AOB=n°$,则$\overset{\frown}{AB}$的长 $l=\frac{n}{360}\cdot2\pi r$,即 $l=\frac{n\pi r}{180}$.

2. 弧长计算式的解读

我们已经知道,半径为 r 的圆中 $n°$的圆心角所对的弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$. 这是一个含有三个量的等式,已知其中的任意两个量,可以求出第三个量:

$$l=\frac{n\pi r}{180},n=\frac{180l}{\pi r},r=\frac{180l}{\pi n}.$$

在实际解决问题的过程中,可根据已知条件,选择适当的形式进行推理计算.

〖变式训练〗

1. 圆的半径为 6 cm,圆中一个圆心角为 60°,则这个圆心角所对的弧长为 ( )

A. π cm　　B. 2π cm　　C. 3π cm　　D. 4π cm

2. 一个扇形的圆心角为 30°,它所对的弧长为 3π cm,则这个扇形的半径为 ( )

A. 6 cm　　B. 12 cm　　C. 18 cm　　D. $\sqrt{6}$ cm

3. 一块等边三角形的木板,边长为 1,现将木板沿水平线无滑动翻滚(如图 2.6-1-3),那么 B 点从开始到结束时所走过的路径长度是________.

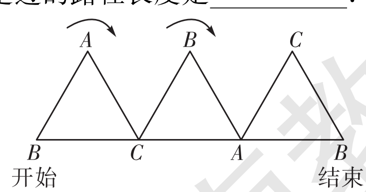


图 2.6-1-3

〖反思迁移〗

1. 本节课的知识点是：半径为 r 的圆中，$n°$的圆心角所对的弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$. 这是一个含有三个量的等式，已知其中的任意两个量，可以求出第三个量：

$$l=\frac{n\pi r}{180},n=\frac{180l}{\pi r},r=\frac{180l}{\pi n}.$$

2. 在推导弧长计算公式的过程中，我们采用的是部分与整体成比例的方法. 在同一个圆中，由于圆心角相等，它们所对的弧也相等，所以两条弧的长度之比与它们所对圆心角的度数之比相等，因此 $1°$的圆心角所对的弧长为圆周长（即 $360°$的圆心角所对的弧长）的$\frac{1}{360}$，$n°$的圆心角所对的弧长为圆周长的$\frac{n}{360}$.

三、效果检测

1. 圆的半径为 9 cm，圆中一个圆心角为 $60°$，则这个圆心角所对的弧长为 （　　）

A. π cm　　B. 2π cm　　C. 3π cm　　D. 4π cm

2. 一个扇形的圆心角为 $45°$，它所对的弧长为 π cm，则这个扇形的半径为 （　　）

A. 2 cm　　B. 4 cm　　C. 8 cm　　D. cm

3. 在半径为 R 的圆中，弧所对的圆心角增加 $1°$，则它的弧长增加 （　　）

A. $\frac{\pi R}{90}$　　B. $\frac{\pi R}{180}$　　C. $\frac{180}{\pi R}$　　D. $\frac{1}{360}$

4. 如图 2.6－1－4，五个半圆中邻近的半圆相切，两只小虫同时出发，以相同的速度从点 A 到点 B，甲虫沿着$\overset{\frown}{ADA_1}$、$\overset{\frown}{A_1EA_2}$、$\overset{\frown}{A_2FA_3}$、$\overset{\frown}{A_3GB}$的路线爬行，乙虫沿着路线$\overset{\frown}{ACB}$爬行，则下列结论正确的是 （　　）

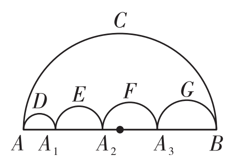


图 2.6－1－4

A. 甲虫先到 B 点　　B. 乙虫先到 B 点

C. 甲乙虫同时到达　　D. 无法确定

5. 如图 2.6－1－5，PA，PB 为$\odot O$ 的两条切线，$\angle P=60°$，$PA=3\sqrt{3}$，求四边形 $PAOB$ 内的弧 AB 的长.

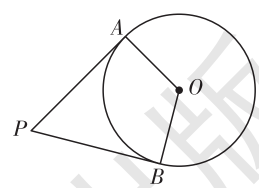


图 2.6－1－5

2.6 弧长与扇形面积(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 半径为 r 的圆的面积是 (　　)

A. πr　　B. $2\pi r$　　C. πr^2　　D. $2\pi r^2$

2. 如图 2.6-2-1,点 A,B 是圆上的两点,圆心角$\angle AOB=60°$,则阴影部分的面积是圆面积的 (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{6}$

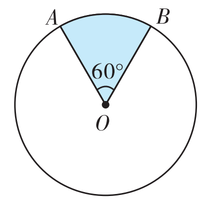


图 2.6-2-1

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 圆的面积计算公式是 $S=\pi r^2$,其中 r 是圆的半径.

2. 在同圆或等圆中,扇形的面积之比,等于弧所对的圆心角的度数之比.

你可以开始今天的新课学习了!

我们知道,弧是圆周上的一部分,根据圆的半径和圆心角的度数可以求弧长.如果以圆心为端点作两条射线,在圆面上截取一部分,会得到什么图形?它的面积又如何计算?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 扇形

圆的一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所围成的图形叫作扇形.

如图 2.6-2-2,阴影部分是一个扇形,记作扇形 OAB.扇形是由两条半径和圆弧围成的图形,通常指小于半圆的部分.

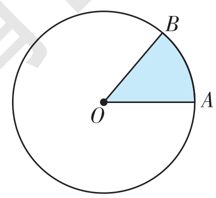


图 2.6-2-2

2. 扇形面积的计算

如图 2.6-2-2,已知扇形 OAB 的半径为 r,圆心角为 $n°$,如何求这个扇形的面积呢?

在上一节中,我们根据弧长与圆周长之比等于弧所对的圆心角度

数与 360°之比来求弧长. 类似地,我们能否根据扇形的圆心角与 360°之比,来求扇形的面积呢? 答案是肯定的.

把圆面(圆连同它内部区域构成的面)看作是圆心角为 360°的扇形,它的面积即圆面积 $S=\pi r^2$,其中 r 是圆的半径. 因为圆绕圆心旋转任意角度,都能与自身重合,所以在同圆或等圆中,圆心角为 1°的两个扇形能够互相重合,所以它们的面积是相等的;在同圆或等圆中,圆心角为 $n°$的两个扇形,其面积也是相等的. 所以扇形面积与圆面积之比等于扇形的圆心角度数与 360°之比. 故圆心角为 1°的扇形面积等于圆面积的$\frac{1}{360}$,即$\frac{1}{360}\cdot\pi r^2$;圆心角为 $n°$的扇形面积等于圆面积的$\frac{n}{360}$,即$\frac{n}{360}\cdot\pi r^2$. 由此得到:

半径为 r 的圆中,圆心角为 $n°$的扇形的面积为 $S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}$.

又因为扇形的弧长 $l=\frac{n\pi r}{180}$,所以 $S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n\pi r}{180}\cdot r=\frac{1}{2}lr$.

由此,计算扇形的面积有两种方法,可以根据扇形的半径和圆心角来计算,也可以根据扇形的弧长和半径来计算,这两者本质上是一样的.

〖变式训练〗

1. 已知扇形的半径为 6 cm,圆心角为 60°,则这个扇形的面积为 ( )

A. 2π cm² B. 5π cm² C. 6π cm² D. 7π cm²

2. 已知扇形的半径为 3,弧长为 2,则这个扇形的面积为 ( )

A. 2 B. 3

C. 6 D. 8

3. 如图 2.6－2－3,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle A=120°$,$BC=2\sqrt{3}$,$\odot A$ 与 BC 相切于点 D,且分别交 AB,AC 于 M,N 两点,则图中阴影部分的面积是__________(保留 π).

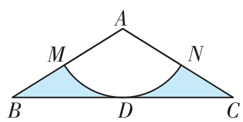


图 2.6－2－3

〖反思迁移〗

1. 本节课我们学到计算扇形面积的两种方法:

(1)已知扇形的半径为 r,圆心角为 $n°$,则扇形的面积为 $S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}$.

(2)已知扇形的半径为 r,弧长为 l,则扇形的面积为 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lr$.

2. 在推导扇形面积计算公式的过程中,我们运用类比思想. 类比弧长之比与它们所对圆心角的度数之比相等,我们得到扇形面积之比也等于圆心角的度数之比. 因此,圆心角为 1°的扇形面积是圆面积(即圆心角为 360°的扇形面积)的$\frac{1}{360}$,圆心角为 $n°$的扇形面积是圆面积的$\frac{n}{360}$,进而得到扇形面积的计算公式.

三、效果检测

1. 已知扇形的半径为 8 cm，圆心角为 90°，则这个扇形的面积为　　(　　)

A. $4\pi\ \mathrm{cm}^2$　　B. $8\pi\ \mathrm{cm}^2$　　C. $12\pi\ \mathrm{cm}^2$　　D. $16\pi\ \mathrm{cm}^2$

2. 已知扇形的半径为 4，弧长为 3，则这个扇形的面积为　　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 8

3. 如图 2.6-2-4，在⊙O 中，$\angle AOB=120°$，弦 AB 的长为 $4\sqrt{3}$ cm，求扇形 OAB 的面积.

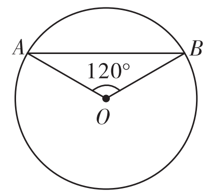


图 2.6-2-4

4. 如图 2.6-2-5 是一条圆弧形弯道，已知 $OA=12$ m，$OC=9$ m，$\overset{\frown}{CD}$的长度为 6π m，求圆弧形弯道的面积.

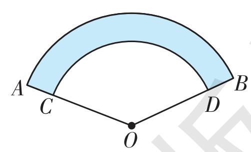


图 2.6-2-5

2.7 正多边形与圆

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 六边形的内角和是 (　　)

A. 540°　　B. 600°　　C. 720°　　D. 900°

2. 如图 2.7－1－1，A,B,C,D 是$\odot O$的四等分点，有下列说法：①四边形 $ABCD$ 的四条边相等；②四边形 $ABCD$ 的四个角相等；③AC 是$\odot O$的直径；④四边形 $ABCD$ 是正方形. 其中正确的个数是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

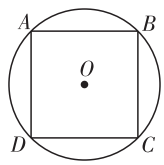


图 2.7－1－1

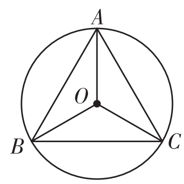


图 2.7－1－2

3. 如图 2.7－1－2，$\odot O$是等边$\triangle ABC$的外接圆，下列说法不正确的是 (　　)

A. A,B,C 是$\odot O$的三等分点　　B. $\triangle AOC$ 是等边三角形

C. $\angle AOC=\angle AOB=\angle BOC$　　D. 点 O 是$\triangle ABC$ 的内心

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 多边形的内角和为$(n-2)\cdot 180^\circ$，其中 n 为多边形的边数.

2. 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等、弦相等；相等的弧所对的弦相等、圆心角相等、圆周角相等.

3. 将圆 n 等分，则每一段弧所对的圆心角度数为$\dfrac{360^\circ}{n}$.

你可以开始今天的新课学习了！

我们知道，圆既是轴对称图形，又是中心对称图形. 我们以前学习过的正三角形、正四边形、正五边形、正六边形等也具有对称性. 那么两者有什么联系吗？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 正多边形

我们把各边相等,各内角也相等的多边形叫作正多边形. 图 2.7-1-3 是常见的正多边形.

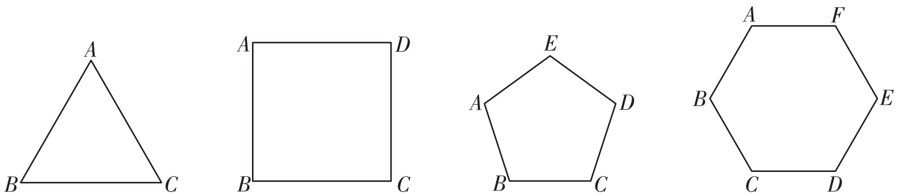


图 2.7-1-3

2. 作正多边形

(1)利用量角器可以作任意正多边形

由于在同圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦也相等,因此,将圆心角 $n(n\geqslant 3)$等分,可以使圆 n 等分,依次连接各等分点,可得到各边相等,各内角也相等的 n 边形,它是正多边形.

将一个圆 $n(n\geqslant 3)$等分,依次连接各等分点所得的多边形叫作这个圆的内接正多边形,这个圆是这个正多边形的外接圆,正多边形的外接圆的圆心叫作正多边形的中心.

(2)利用直尺和圆规,可以作一些特殊的正多边形

例 已知⊙O 的半径为 r,求作⊙O 的内接正六边形.

分析:因为正六边形每条边所对的圆心角为 $60°$,所以正六边形的边长与圆的半径相等. 因此,在半径为 r 的圆上依次截取长度为 r 的弦,就可以将圆六等分.

作法:(1)作⊙O 的任意直径 BE,分别以 B,E 为圆心,以 r 为半径作弧,与⊙O 分别相交于点 A,C 和 F,D.

(2)依次连接 AB,BC,CD,DE,EF,FA,则六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的⊙O 的内接正六边形,如图 2.7-1-4.

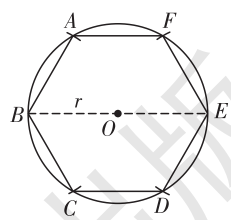


图 2.7-1-4

利用圆的内接正六边形,我们可以得到圆的内接正三角形. 连接正六边形不相邻的三个顶点,例如 A,C,E,可得⊙O 的内接正三角形△ACE.

3. 正多边形的对称性

(1)正多边形都是轴对称图形.

由于每个正多边形都有外接圆,因此利用圆的轴对称性可得到:正多边形都是轴对称图形,正 n 边形的每个顶点与它的中心连线所在的直线都是这个正 n 边形的对称轴. 一个正 n 边形共有 n 条对称轴,每条对称轴都经过正 n 边形的中心. 当 n 为奇数时,正 n

边形的 n 条对称轴都是顶点与中心的连线；当 n 为偶数时，正 n 边形有 $\frac{n}{2}$ 条对称轴是顶点与中心的连线，有 $\frac{n}{2}$ 条对称轴是经过中心且与边垂直的直线.

(2)边数为偶数的正多边形既是轴对称图形，又是中心对称图形.

利用圆绕圆心旋转任意角度，所得图形都与自身重合这一性质，可得出：一个正 n 边形，绕它的中心旋转 $\frac{360°}{n}$，所得图形与这个正 n 边形重合，从而当 n 为偶数时，正 n 边形绕它的中心旋转 $\frac{n}{2}\cdot\frac{360°}{n}=180°$ 所得图形与这个正 n 边形重合. 因此，正 n 边形（n 为偶数）也是中心对称图形，它的对称中心就是这个正 n 边形的中心.

〖变式训练〗

1. 作半径为 2 cm 的圆的内接正三角形，并求这个正三角形的边长.

〖反思迁移〗

1. 全面理解和记忆正多边形的概念：各边相等，各内角也相等的多边形叫作正多边形. 常见的正多边形有正三角形、正四边形（正方形）、正五边形、正六边形等.

2. 享受尺规作正多边形的乐趣.

利用量角器可以作任意正多边形，利用直尺和圆规，可以作一些特殊的正多边形，如正三角形、正四方形、正六边形等. 高斯解决了利用直尺和圆规作正十七边形的难题.

3. 理解正多边形的对称性

正多边形都是轴对称图形. 正 n 边形的每个顶点与它的中心连线所在的直线都是这个正 n 边形的对称轴. 一个正 n 边形共有 n 条对称轴,每条对称轴都通过正 n 边形的中心.

边数为偶数的正多边形既是轴对称图形,又是中心对称图形.

任意一个正多边形的顶点都在同一个圆上,这样将正多边形的性质和圆的性质联系起来,建立起两类不同的平面图形的沟通桥梁.

三、效果检测

1. 同圆的内接正三角形与内接正方形的边长之比为 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

2. 正多边形的一个外角等于 $30°$,则这个多边形的内角和为 ( )

A. $1080°$　　B. $1440°$　　C. $1620°$　　D. $1800°$

3. 圆内接正六边形两平行边间的距离为 1,则它的边长为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 圆内接正多边形一条边所对的圆心角是 $36°$,则这个正多边形的边数是__________.

5. 如图 2.7-1-5,$\odot O$ 的内接正三角形的边长为 4 cm,则阴影部分的面积为__________.

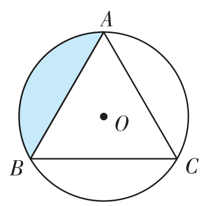
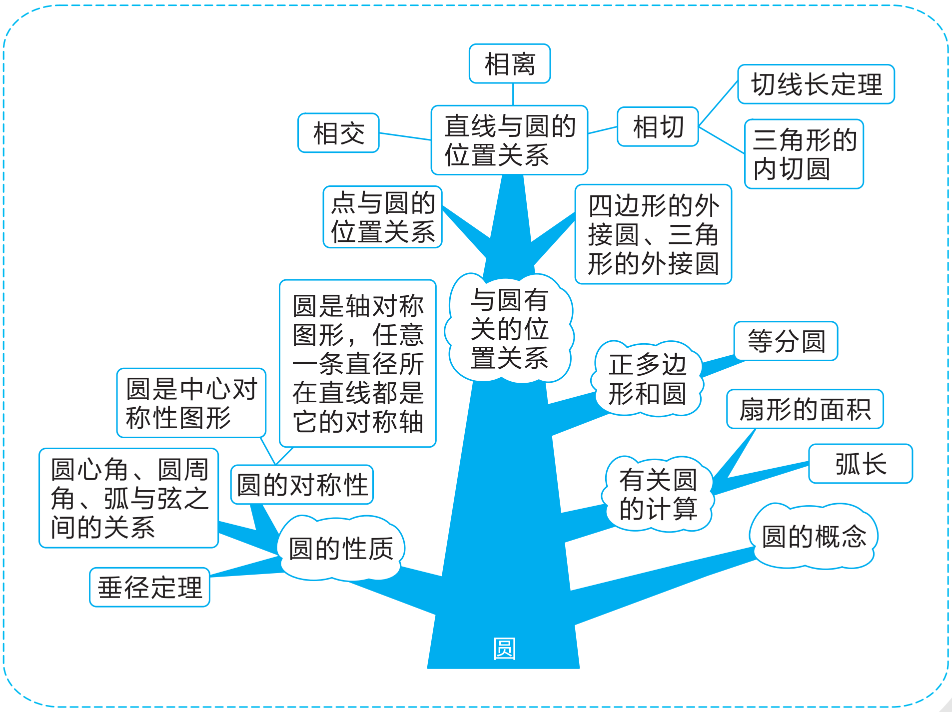


图 2.7-1-5

本章整理提升

知识框架



融会贯通

1. 圆中的分类讨论问题

圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，具有旋转不变性，圆的这些特性决定了关于圆的某些问题会有多解．解答这类问题时需要按照一定的标准，分成若干种情况，逐一加以讨论．

例 1 点 P 是圆 O 所在平面上一定点，点 P 到圆上的最长距离和最短距离分别为 8 和 2，则该圆的半径为________．

分析：根据点和圆的位置关系，这个点 P 与圆有两种位置关系：点在圆内和点在圆外．

解: 过点 P 和圆心 O 作直线,分别与圆 O 相交于 A,B 两点,PA,PB 分别表示圆上各点到点 P 的最长距离和最短距离.

(1)当点 P 在圆内时,如图 2-1 所示,直径 $AB=PA+PB=10$;

(2)当点 P 在圆外时,如图 2-2 所示,直径 $AB=PA-PB=6$.

所以圆 O 的半径为 5 或 3.

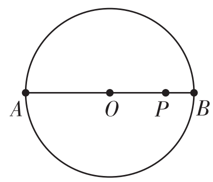


图 2-1

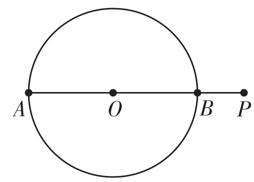


图 2-2

拓展: 本题考查了点与圆的位置关系.已知点的位置可以确定该点到圆心距离与半径的关系,反过来,已知点到圆心距离与半径的关系可以确定该点与圆的位置关系.

〖变式训练〗

1. 已知圆 O 的直径为 10 cm,弦 $AB/\!/CD$,$AB=6$ cm,$CD=8$ cm,求 AB 和 CD 之间的距离.

2. 圆中相切的存在性问题

直线与圆的位置关系问题,一般无法先画出比较准确的图形.

解这类问题,一般也分三步走,第一步先罗列两要素 R 和 d,第二步列方程,第三步解方程并验根.

第一步在罗列两要素 R 和 d 的过程中,确定的要素罗列出来以后,不确定的要素要用含有 x 的式子表示.第二步列方程,就是根据直线与圆相切时 $d=R$ 列方程.

例 2　如图 2-3,已知抛物线 $y=x^2-1$ 与 x 轴相交于 A,B 两点.

(1)有一半径为 r 的⊙P,且圆心 P 在抛物线上运动,当⊙P 与两坐标轴都相切时,求半径 r 的值;

(2)若⊙P 的半径为 1,且圆心 P 在抛物线上运动,当点 P 的纵坐标在什么范围内取值时,⊙P 与 y 轴相离、相交?

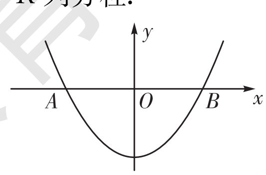


图 2-3

分析:(1)如果⊙P 与两坐标轴都相切,那么圆心 P 到两坐标轴的距离相等.画直线 $y=x$ 和 $y=-x$,四个圆心 P 就都找到了,如图 2-4 和图 2-5.

(2)要判断⊙P 与 y 轴相离、相交,先找到临界位置⊙P 与 y 轴相切,此时 $r=|x|=1$,得 $x=1$ 或$x=-1$.如图 2-6,可以想象,当圆心 P 在 x 轴下方时,⊙P 与 y 轴相交,此时$-1\leqslant y_P<0$;当圆心 P 在 x 轴上方时,⊙P 与 y 轴相离,此时 $y_P>0$.

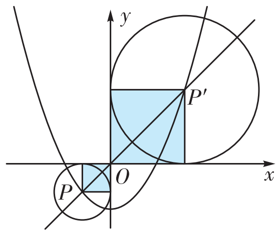


图 2-4

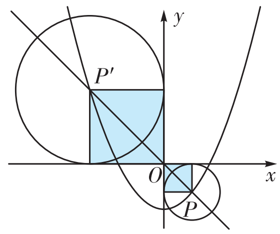


图 2-5

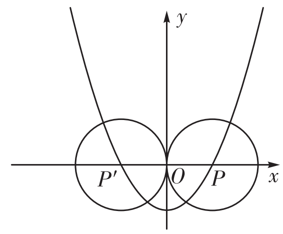


图 2-6

解:(1)设点 P 的坐标为(x,y),则当⊙P 与两坐标轴都相切时,有 $y=\pm x$.

由 $y=x$,得 $x^2-1=x$,即 $x^2-x-1=0$,解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

由 $y=-x$,得 $x^2-1=-x$,即 $x^2+x-1=0$,解得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

∴⊙P 的半径为 $r=|x|=\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{2}$.

(2)设点 P 的坐标为(x,y),∵⊙P 的半径为 1,∴⊙P 与 y 轴相切时$|x|=1$,解得 $x=\pm1$,此时 $y=x^2-1=0$.

即点 P 的坐标为$(-1,0)$或$(1,0)$时⊙P 与 y 轴相切.

又当 $x=0$ 时,$y=-1$,∴当 $y>0$ 时,⊙P 与 y 轴相离,当$-1\leqslant y<0$ 时,⊙P 与 y 轴相交.

〖变式训练〗

2. 如图 2-7,$A(-5,0)$,$B(-3,0)$,$C(0,3)$,四边形 $OADC$ 是矩形.点 P 从点 $Q(4,0)$出发,沿 x 轴向左以每秒 1 个单位长度的速度运动,以 PC 为半径的⊙P 随点 P 的运动而变化,当⊙P 与四边形 $ABCD$ 的边(或边所在的直线)相切时,求运动时间 t 的值.

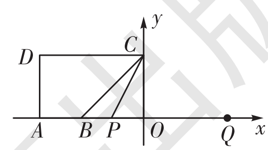


图 2-7

本章达标测试

（时间 100 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列说法错误的是　　（　　）

A. 直径是圆中最长的弦　　B. 长度相等的两条弧是等弧

C. 面积相等的两个圆是等圆　　D. 半径相等的两个半圆是等弧

2. $\odot O$ 的半径为 5 cm，点 A 到圆心 O 的距离 $OA=3$ cm，则点 A 与圆 O 的位置关系为　　（　　）

A. 点 A 在圆上　　B. 点 A 在圆内

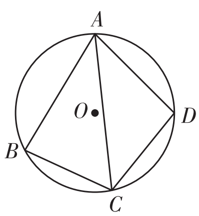
C. 点 A 在圆外　　D. 无法确定

3. 将一个圆分割成三个扇形，它们的圆心角的度数比为 $1:2:3$，则这三个扇形中圆心角度数最大的是　　（　　）

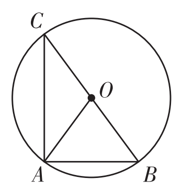
A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 180°

4. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AC 平分$\angle BAD$，则下列结论正确的是　　（　　）

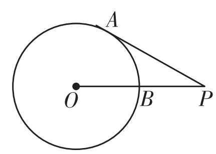
A. $AB=AD$　　B. $BC=CD$　　C. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$　　D. $\angle BCA=\angle DCA$



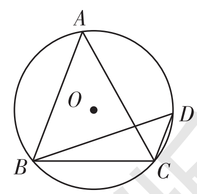
第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图



第 7 题图

5. 如图，BC 是$\odot O$ 的直径，A 是$\odot O$ 上的一点，$\angle OAC=32^\circ$，则$\angle B$ 的度数是　　（　　）

A. 58°　　B. 60°　　C. 64°　　D. 68°

6. 如图，点 P 为$\odot O$ 外一点，PA 为$\odot O$ 的切线，A 为切点，PO 交$\odot O$ 于点 B，$\angle P=30^\circ$，$OB=3$，则线段 BP 的长为　　（　　）

A. 3　　B. $3\sqrt{3}$　　C. 6　　D. 9

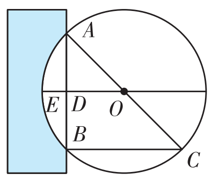
7. 如图，$\triangle ABC$ 是$\odot O$ 的内接三角形，$AB=AC$，$\angle BCA=65^\circ$，作 $CD\parallel AB$，并与$\odot O$ 相交于点 D，连接 BD，则$\angle DBC$ 的大小为　　（　　）

A. 15°　　B. 35°　　C. 25°　　D. 45°

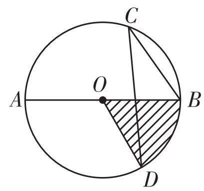
8.《九章算术》是我国古代第一部自成体系的数学专著，代表了东方数学的最高成就. 它的算法体系至今仍在推动着计算机的发展和应用. 书中记载："今有圆材埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？"译为："今有一圆形木材，埋在墙壁中，不知其大小，用锯去锯这木材，锯口深 1 寸（如图，$ED=1$ 寸），锯道长 1 尺（$AB=1$ 尺 $=10$ 寸），问这块圆形木材的直径是多少？"请根据所学知识计算：圆形木材的直径 AC 是 （　　）

A. 13 寸　　B. 20 寸

C. 26 寸　　D. 28 寸



第 8 题图



第 9 题图

9. 如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，$\angle BCD=30°$，$OA=2$，则阴影部分的面积是 （　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. π　　D. 2π

10. 已知 AB，CD 是⊙O 的两条平行弦，$AB=16$，$CD=12$，⊙O 的半径为 10，则弦 AB 与 CD 的距离为 （　　）

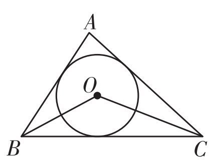
A. 2　　B. 14　　C. 6 或 8　　D. 2 或 14

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

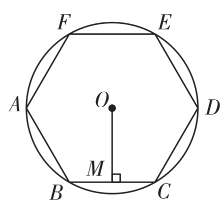
11. 在半径为 3 cm 的⊙O 中，弦 $AB=3$ cm，则弦 AB 所对的圆心角 $\angle AOB$ 的度数为________.

12. 一个扇形的圆心角是 $120°$，它的半径是 3 cm，则扇形的弧长为__________cm.

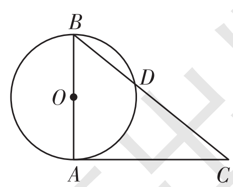
13. 如图，⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，若 $\angle ABC=70°$，$\angle ACB=40°$，则 $\angle BOC=$__________.



第 13 题图



第 14 题图



第 15 题图

14. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，⊙O 的半径为 6，则这个正六边形的边心距 OM 的长为__________.

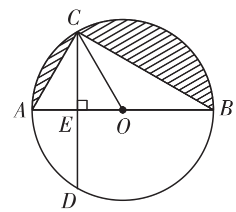
15. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 切⊙O 于点 A，BC 交⊙O 于点 D. 已知⊙O 的半径为 6，$\angle C=40°$. 那么 $\overset{\frown}{AD}$ 的长为__________.

三、解答题(每小题 10 分,共 50 分)

16. 如图,已知 AB 是$\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$,垂足为 E,$\angle AOC=60^{\circ}$,$OC=2$.

(1)求 OE 和 CD 的长;

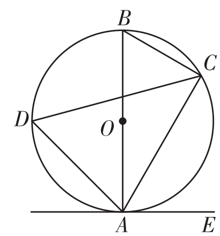
(2)求图中阴影部分的面积.



17. 如图,已知 AB 是$\odot O$ 的直径,点 C,D 在$\odot O$ 上,点 E 在$\odot O$ 外,$\angle EAC=\angle B=60^{\circ}$.

(1)求$\angle ADC$ 的度数;

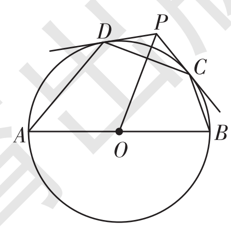
(2)求证:AE 是$\odot O$ 的切线.



18. 如图,AB 是$\odot O$ 的直径,过$\odot O$ 外一点 P 作$\odot O$ 的两条切线 PC,PD,切点分别为 C,D,连接 OP,CD.

(1)求证:$OP\perp CD$;

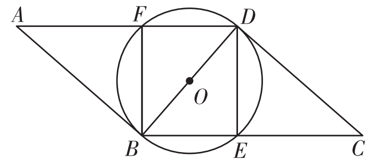
(2)连接 AD,BC,若$\angle DAB=50^{\circ}$,$\angle CBA=70^{\circ}$,$OA=2$,求 OP 的长.



19. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，以对角线 BD 为直径作⊙O，分别与 BC，AD 相交于点 E，F.

(1)求证：四边形 $BEDF$ 为矩形；

(2)若 $BD^2=BE\cdot BC$，试判断直线 CD 与⊙O 的位置关系，并说明理由.



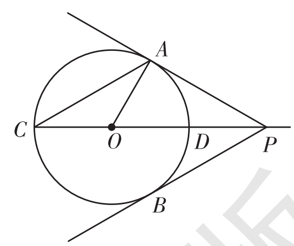
20. 如图，CD 是⊙O 的直径，且 $CD=2$ cm，点 P 为 CD 的延长线上一点，过点 P 作⊙O 的切线 PA，PB，切点分别为点 A，B.

(1)连接 AC，若 $\angle APO=30^\circ$，试证明 $\triangle ACP$ 是等腰三角形；

(2)填空：

①当 $DP=$__________ cm 时，四边形 $AOBD$ 是菱形；

②当 $DP=$__________ cm 时，四边形 $AOBP$ 是正方形.



参考答案

第1章　二次函数

1.1　二次函数

〖前置诊断〗

1. C　$(x+2)(x-3)=x^2-3x+2x-6=x^2-x-6$.
2. B　本题考查对函数概念的理解，判定一种关系是不是函数关系的基本方法：①有两个变量；②一个变量的数值随着另一个变量的变化而发生变化；③对于自变量的每一个确定的值，有且只有一个函数值与之对应，即单对应. 根据函数的定义，$|y|=x$ 中 y 不是 x 的函数，$y^2=x+3$ 中 y 不是 x 的函数，由此可知，(1)(2)(4)是函数关系.
3. A　一般地，形如 $y=kx+b(k\neq0,k、b$ 是常数)的函数，叫做一次函数，据此可判断. A 选项中的 $y=x$ 属于一次函数，故此选项正确；B 选项中的 $y=kx$，缺少 $k\neq0$ 这一条件，故此选项错误；C 选项中的 $y=\frac{1}{x}+1$，函数的表达式不是用自变量的一次整式表示的，故此选项错误；D 选项中的 $y=x^2-2$，自变量 x 的指数不为 1，故此选项错误.
4. D　根据函数的定义：对于自变量 x 的任何值，y 都有唯一的值与之相对应，可知，A，B，C 选项中，存在一个 x 值对应两个 y 值，所以 A，B，C 均不正确.

〖变式训练〗

1. B　根据二次函数定义得 $y=3(x-1)^2-2$，$y=(x+3)^2-2x^2$ 是二次函数.
2. D　依据二次函数的定义可知 $k-2\neq0$，$k^2-2k+2=2$，从而可求得 $k=0$.
3. (1)若函数 $y=(m^2-m)x^2+(m-1)x+2-2m$ 是二次函数，则应满足 $m^2-m\neq0$，解得 $m\neq0$ 且 $m\neq1$；
   (2)若函数 $y=(m^2-m)x^2+(m-1)x+2-2m$ 是一次函数，则应满足 $m^2-m=0$，$m-1\neq0$，解得 $m=0$；
   (3)由(2)可得，当此函数是一次函数时，$m=0$，而此时 $2-2m\neq0$，所以这个函数不可能是正比例函数.

〖效果检测〗

1. C　圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 中，S 和 r 之间的关系是二次函数关系.
2. C　A 选项中的 $y=x+3$ 是一次函数；B 选项中的 $y=ax^2+bx+c$ 缺少条件 $a\neq0$；D 选项中的 $y=x^2+\frac{1}{x}$，不是整式. C 选项中的 $y=t^2-2t+2$ 为二次函数，故此选项正确.
3. C　根据二次函数的定义：二次项系数不为 0，举出特例即可判断. A 选项，当 $m=1$ 时，不是二次函数，故错误；B 选项，当 $m=-1$ 时，二次项系数等于 0，不是二次函数，故错误；C 选项，$m^2+1>0$，一定是二次函数，故正确；D 选项，当 $m=1$ 或 -1 时，二次项系数等于 0，不是二次函数，故错误.
4. D　A 选项，当 $b=0$，$a\neq0$ 时，是二次函数 $y=ax^2+c$，故此选项错误；B 选项，当 $c=0$，$a\neq0$ 时，是二次函数 $y=ax^2+bx$，故此选项错误；C 选项，当 $a=0$，$b\neq0$ 时，是一次函数 $y=bx+c$，故此选项错误.

5. C　由题意可设 $y_1=k_1x, y_2=k_2x^2$，其中 k_1, k_2 都不为 0，则 $y=k_1x-k_2x^2$，所以 y 是关于 x 的二次函数.

1.2　二次函数的图象与性质（1）

〖前置诊断〗

1. A　关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数，易得与点 $M(1,2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-1,2)$.
2. C　根据正比例函数的性质对各选项进行逐一判断即可. 函数图象经过点 $(2,4)$，A 错误；函数图象经过第一、三象限，B 错误；y 随 x 的增大而增大，C 正确；当 $x>0$ 时 $y>0$，当 $x<0$ 时 $y<0$，D 错误.
3. C　$\because k=-\frac{2}{3}<0, b=2>0$，$\therefore$ 直线经过第一、二、四象限.
4. D　$\because k=2>0$，$\therefore$ 反比例函数图象在第一、三象限，且在每个象限内，y 随 x 的增大而减小.

〖变式训练〗

1. A　分别将 $x=-1,2,-3$ 代入 $y=x^2$ 中，得 $y_1=1, y_2=4, y_3=9$，所以 $y_1<y_2<y_3$.
2. 因为对于二次函数 $y=ax^2$，$|a|$ 越大，图象开口越小，所以题设四个二次函数的图象开口从大到小的排列顺序是③①②④.
3. C　根据二次函数 $y=ax^2$ 的图象特征，易得①②③都是正确的.

〖效果检测〗

1. C　$\because$ 二次函数表达式为 $y=5x^2$，$k=5>0$，$\therefore$ 二次函数图象开口向上，当 $x<0$ 时 y 随 x 的增大而减小，当 $x>0$ 时 y 随 x 的增大而增大，图象对称轴为 y 轴，无论 x 取何值，y 的值总是非负数.
2. C　抛物线 $y=3x^2$ 的顶点坐标是 $(0,0)$.
3. C　二次函数 $y=x^2$ 的对称轴是直线 $x=0$，即 y 轴.
4. B　$\because a=-1<0$，$\therefore$ 抛物线的开口向下.
5. D　$y=\frac{1}{2}x^2, y=x^2, y=2x^2$ 的图象，顶点相同，都是原点；对称轴相同，都是 y 轴；开口方向相同，都是向上；由于二次项系数不相同，所以图象形状（开口大小）不同.

1.2　二次函数的图象与性质（2）

〖前置诊断〗

1. B　如果两个点关于 x 轴对称，则这两个点的横坐标相同，纵坐标互为相反数. 因此点 $(2,-3)$ 关于 x 轴对称的点的横坐标仍为 2，纵坐标为 3.
2. C　函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象开口向上，关于 y 轴对称，图象在对称轴左边部分，函数值随自变量的增大而减小，图象在对称轴右边部分，函数值随自变量的增大而增大. 当 $x=0$ 时，函数取最小值，最小值为 0.

〖变式训练〗

1. C　分别将 $x=-1,2,-3$ 代入 $y=-x^2$ 中得 $y_1=-1, y_2=-4, y_3=-9$，所以 $y_3<y_2<y_1$.
2. ③①②④　因为对于抛物线 $y=ax^2$，$|a|$ 越大，它的开口越小，所以抛物线开口从大到小的排列顺序是③①②④.
3. B　二次函数 $y=-x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的二次项系数分别为 -1 和 $-\frac{1}{2}$，均小于 0，所以它们的图象都是开口向下，因此①正确；图象的对称轴都是 y 轴，顶点坐标都是原点 $(0,0)$，因此②正确；当 $x>0$ 时，它们的函数值 y 都是随着 x 的增大而减小，因此③不正确；$|a|$ 相同时图象开口的大小相同，因此④不正确.

〖效果检测〗

1. C　二次函数解析式为 $y=-\frac{3}{2}x^2$，$\because a=-\frac{3}{2}<$

0，∴二次函数图象开口向下，当 $x<0$ 时 y 随 x 的增大而增大，当 $x>0$ 时 y 随 x 的增大而减小，对称轴为 y 轴，无论 x 取何值，y 的值总是非正数.

2. C　抛物线 $y=-3x^2$ 的顶点坐标是(0,0).

3. C　二次函数 $y=-x^2$ 图象的对称轴是直线 $x=0$，即 y 轴.

4. B　∵$a=-1<0$，∴抛物线的开口向下.

5. D　函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-2x^2$ 的图象的顶点相同，都是原点；对称轴相同，都是 y 轴；开口方向不相同，两个向下、一个向上；由于二次项系数不相同，所以图象形状不同.

1.2　二次函数的图象与性质(3)

〖前置诊断〗

1. D　点(2，−3)向右平移 3 个单位长度后横坐标加上 3 后变为 5，纵坐标仍为−3，即坐标变为(5，−3).

2. C　平移不改变图形的形状和大小，只改变图形的位置.

3. A　直线 $y=2x+4$ 与 x 轴的交点为(−2，0)，将直线 $y=2x+4$ 沿 x 轴向右平移 $a(a>0)$ 个单位长度，相当于将该直线上所有点均向右平移 a 个单位长度，平移后的直线与 x 轴的交点为 $(-2+a,0)$，将点 $(-2+a,0)$ 坐标代入 $y=2x+m$，得 $m=-2a+4$，即平移后的直线方程为 $y=2(x-a)+4$.

〖变式训练〗

1. B　分别将 $x=1,2,-2$ 代入 $y=3(x+1)^2$ 中得 $y_1=12$，$y_2=27$，$y_3=3$，所以 $y_3<y_1<y_2$；函数 $y=3(x+1)^2$ 的图象开口向上，图象上离对称轴越近的点的纵坐标越小，离对称轴越远的点的纵坐标越大，其对称轴为 $x=-1$，而 1，2，−2 离−1 的距离分别为 2，3，1，所以 $y_3<y_1<y_2$.

2. D　函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象可以由函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象向左($h<0$)或向右($h>0$)平移 $|h|$ 个单位长度而得到. 由此可得二次函数 $y=x^2$ 的图象向右平移 3 个单位长度，得到的新图象的函数表达式是 $y=(x-3)^2$.

3. D　抛物线 $y=3x^2$ 与 $y=3(x+3)^2$ 中的二次项的系数 a 都等于 3，所以两条抛物线的形状、开口方向、开口大小均相同，但它们的对称轴不同.

4. ∵当 $x=2$ 时函数取最大值，∴$h=2$，函数表达式 $y=a(x-2)^2$. 把(1，−3)代入得 $a(1-2)^2=-3$，∴$a=-3$，∴二次函数表达式为 $y=-3(x-2)^2$，当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而增大.

〖效果检测〗

1. D　∵$y=2(x-3)^2\geqslant0$，当 $x-3=0$，即 $x=3$ 时，y 取最小值 0，∴抛物线的顶点坐标为(3，0)，点(3，0)在 x 轴上.

2. C　∵函数 $y=3(x-2)^2$ 中，$a=3>0$，$h=2$，∴抛物线 $y=3(x-2)^2$ 的开口向上，对称轴为直线 $x=2$. 当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大.

3. A　将 $y=x^2-2x+1$ 配方得 $y=(x-1)^2$，∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象向左平移 2 个单位长度得到 $y=(x-1)^2$ 的图象，∴二次函数 $y=(x-1)^2$ 的图象向右平移 2 个单位长度可得到 $y=ax^2+bx+c$ 的图象. 而二次函数 $y=(x-1)^2$ 的图象向右平移 2 个单位可得函数 $y=(x-3)^2=x^2-6x+9$ 的图象，∴$b=-6$，$c=9$.

1.2　二次函数的图象与性质(4)

〖前置诊断〗

1. B　点 (x,y) 沿着 y 轴向上平移 a 个单位长度，则得到点 $(x,y+a)$.

2. D　将直线 $y=-2x-3$ 向上平移 5 个单位长度，所得直线的表达式为 $y=-2x-3+5$，即 $y=-2x+2$.

3. D　函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象开口向上，关于直线 $x=1$ 对称，图象在对称轴左边部分，函数值随自变量的增大而减小，图象在对称轴右边

部分，函数值随自变量的增大而增大. 当 $x=1$ 时，函数取最小值，最小值为 0.

〖变式训练〗

1. A　∵$y=3(x-1)^2+1$ 是抛物线顶点式，∴抛物线顶点坐标是(1,1).

2. B　①∵$a=-\frac{1}{2}<0$，∴抛物线的开口向下；②对称轴为直线 $x=-2$；③可由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ 向左平移 2 个单位长度得到；④∵$x>-2$ 时，y 随 x 的增大而减小，∴$x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小. 综上所述，结论的正确是①④，共 2 个.

3. D　对于函数 $y=-(x+1)^2+2$，∵$a=-1<0$，∴函数图象开口向下，有最高点，顶点是(−1，2)，对称轴是 $x=-1$.

4. C　在 $y=(x+1)^2-2$ 中由 $a=1>0$ 知抛物线的开口向上，故 A 错误；其对称轴为直线 $x=-1$，在 y 轴的左侧，故 B 错误；由 $y=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$ 知抛物线与 y 轴的交点为(0，−1)，在 y 轴的负半轴，故 D 错误.

〖效果检测〗

1. C　∵$y=2(x+1)^2+3$，∴该函数有最小值，最小值是 3.

2. B　∵函数 $y=(x-1)^2-2$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

3. C　由表达式可知：二次项系数相同，故图象的形状相同，故(1)正确；两图象的顶点分别是(2，−3)，(2，4)，故(2)不正确；两图象的对称轴为 $x=2$，故(3)正确；$x=2$ 时都取最小值，分别是 −3 和 4，故(4)正确.

4. D　根据二次函数表达式及图象确定抛物线的顶点坐标分别为(h,k)，(m,n)，对称轴都是直线 $x=m$(或$x=h$)，即 $h<0$，$k>0$，$m<0$，$n>0$，$m=h$. 因为点(h,k)在点(m,n)的下方，所以 $k=n$不正确.

5. A　∵所求抛物线的形状与函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象相同且开口方向相反，∴$a=-\frac{1}{3}$. ∵抛物线顶点坐标为(5，1)，∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{3}(x-5)^2+1$.

6. B　分别将 $x=1,2,-2$ 代入 $y=3(x+1)^2+3$，得$y_1=15$，$y_2=30$，$y_3=6$，所以 $y_3<y_1<y_2$；或者在函数 $y=3(x+1)^2+3$ 的图象上，离对称轴越近的点的纵坐标越小，离对称轴越远的点的纵坐标越大，其对称轴为直线 $x=-1$，而 1，2，−2 离 −1 的距离分别为 2，3，1，所以 $y_3<y_1<y_2$.

1.2　二次函数的图象与性质（5）

〖前置诊断〗

1. C　由 $x^2-6x-4=0$，得 $x^2-6x+9=13$，$(x-3)^2=13$.

2. D　$2x^2-8x+10=2(x^2-4x+4)-8+10=2(x-2)^2+2$.

3. D　∵$-1<0$，∴函数的开口向下，图象有最高点，∵这个函数的顶点是$(-h,k)$，∴对称轴是直线 $x=-h$.

〖变式训练〗

1. A　根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，可得抛物线 $y=x^2-2x-1$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{-2}{2\times1}=1$.

2. B　将二次函数的一般式化为顶点式后即可直接看出其顶点坐标. ∵$y=-x^2-4x-3=-(x^2+4x+4-4+3)=-(x+2)^2+1$，∴顶点坐标为(−2，1).

3. B　二次函数 $y=-2x^2-4x+3=-2(x+1)^2+5$，∵$a=-2<0$，∴抛物线开口向下，故选项 A 说法正确；当 $x=0$ 时，函数值为 3，即交点为(0，3)，故与 y 轴交于 x 轴上方，选项 B 说法错

误；令 $y=0$，则 $-2x^2-4x+3=0$，$\Delta=(-4)^2-4\times(-2)\times3=40>0$，抛物线与 x 轴有两个交点，故选项 C 说法正确；开口向下，对称轴为 $x=-1$，当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而减小，故选项 D 说法正确.

4. B　由 $y=x^2-6x+c$ 知，抛物线开口向上，且对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=3$. ∵点 $(-1,y_1)$，$(2,y_2)$，$(5,y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2-6x+c$ 的图象上，而三点横坐标离对称轴 $x=3$ 的距离按由远到近依次为 $(-1,y_1)$，$(5,y_3)$，$(2,y_2)$，∴ $y_2<y_3<y_1$.

〖效果检测〗

1. D　$y=x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$.

2. A　由 $x=0$，得 $y=-3$，∴图象与 y 轴的交点坐标是 $(0,-3)$.

3. D　∵抛物线开口向下，∴ $a<0$；∵抛物线的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在 y 轴的右侧，∴ a，b 异号，即 $b>0$；∵抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，∴ $c<0$；∵抛物线与 x 轴有 2 个交点，∴ $\Delta=b^2-4ac>0$.

4. D　∵ $a=1>0$，∴二次函数图象开口向上. 又∵对称轴是直线 $x=-\frac{-2}{2\times1}=1$，∴当 $x>1$ 时，函数图象在对称轴的右边，y 随 x 的增大而增大.

1.3　不共线三点确定二次函数的表达式

〖前置诊断〗

1. C　由于一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 $(1,1)$，$(2,-4)$，用待定系数法即可求出函数的表达式. 把 $(1,1)$，$(2,-4)$ 代入一次函数 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}k+b=1,\\2k+b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-5,\\b=6.\end{cases}$

2. D　记 $\begin{cases}x+2y+z=0 & ①\\2x-y-z=1 & ②\\3x-y-z=2 & ③\end{cases}$

①+②得：$3x+y=1$　④

①+③得：$4x+y=2$　⑤

⑤−④得：$x=1$，

将 $x=1$ 代入④得：$y=-2$，

将 $x=1$，$y=-2$ 代入①得：$z=3$，

∴方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\\z=3.\end{cases}$

3. A　抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点为 (h,k).

〖变式训练〗

1. C　因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,-2)$，而点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$ 都在 x 轴上，所以设此二次函数的表达式为 $y=a(x+1)(x-2)$，把 $C(0,-2)$ 代入上式可求得 $a=1$，所以此二次函数的表达式为 $y=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$.

2. A　因为二次函数 $y=m(x-2)^2+m^2-1$ 的最小值是 0，所以 $m>0$ 且 $m^2-1=0$，解得 $m=1$.

3. D　因为二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象的最高点是 $(-1,-3)$，即此二次函数图象的顶点坐标为 $(-1,-3)$，由顶点式可知二次函数图象的表达式为 $y=-(x+1)^2-3$，即 $y=-x^2-2x-4$，所以 $b=-2$，$c=-4$.

〖效果检测〗

1. C　∵ $y=2x^2-(m+3)x-m+7$ 的图象的对称轴为 y 轴，∴ $-\frac{-(m+3)}{4}=0$，解得 $m=-3$.

2. A　∵二次函数 $y=x^2-mx+m+2=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{4(m+2)-m^2}{4}$ 的图象顶点在 x 轴上方且到 x 轴的距离为 3，∴ $\frac{4(m+2)-m^2}{4}=3$，解得 $m=2$，∴此函数的表达式为 $y=x^2-2x+4$.

3. A　∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象向左平移 2 个单位长度得到 $y=x^2-2x+1$ 的图象，反之，将二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象向右平移

2 个单位长度可以得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，而 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ 的图象向右移 2 个单位长度得到 $y=(x-1-2)^2y=(x-3)^2=x^2-6x+9$ 的图象，∴$b=-6,c=9$.

4. ∵二次函数的图象经过点(1,4)和(5,0)，且对称轴为 $x=2$，根据二次函数图象的对称性易得，此二次函数图象与 x 轴的另外一个交点为 $(-1,0)$，∴可设此函数表达式为 $y=a(x-5)(x+1)$，将(1,4)代入上式得 $4=a(1-5)(1+1)$，解得$a=-\frac{1}{2}$. 故此二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-5)(x+1)$.

1.4　二次函数与一元二次方程的联系

〖前置诊断〗

1. D　∵$a=1,b=-1,c=-2,\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=9$，∴方程 $x^2-x-2=0$ 的解为 $x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=2$ 或 -1.

2. A　先求出 Δ 的值，再判断出其符号即可.
∵$\Delta=(-6)^2-4\times3\times2=12>0$，
∴方程有两个不相等的实数根.

3. C　若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

4. A　一次函数图象与 x 轴交点的纵坐标为 0，横坐标为函数值为 0 时自变量 x 的值，即方程 $2x-6=0$ 的解.

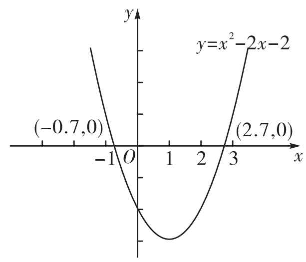
〖变式训练〗

1. D　∵函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标是$(-1,0)$，$(4,0)$，∴关于 x 的方程$x^2+ax+b=0$ 的解是 $x=-1$ 或 $x=4$.

2. D　∵$ax^2-2ax+1=0$ 根的判别式 $\Delta=(-2a)^2-4a=4a(a-1)>0$，∴$ax^2-2ax+1=0$ 有两个解，函数图象与 x 轴有两个交点，$x=\frac{2a\pm\sqrt{4a(a-1)}}{2a}>0$.

3. D　∵对称轴是经过点(2,0)且平行于 y 轴的直线，∴$-\frac{b}{2}=2$，得 $b=-4$. 解方程 $x^2-4x=5$，解得 $x_1=-1,x_2=5$.

4. 画出函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象(如图)，它与 x 轴的公共点的横坐标大约是 -0.7，2.7.



所以方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数解为 $x_1\approx-0.7$，$x_2\approx2.7$，
我们还可以通过不断缩小解所在的范围估计一元二次方程的解.

〖效果检测〗

1. ∵当方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解，∴二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有交点时，$b^2-4ac\geqslant0$.

2. B　由图可知，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个不同的公共点，且两个公共点的横坐标 $0<x_1<1,2<x_2<3$. ∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与x 轴的公共点的横坐标即为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数解，且一个解小于 1，一个解大于 2.

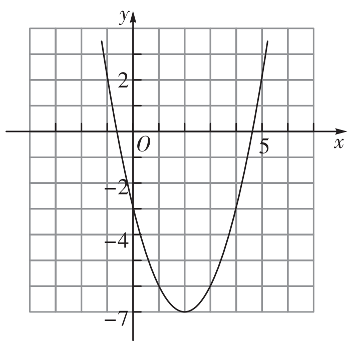
3. B　一次函数 $y=2x+1$ 与二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象交点的横纵坐标即为方程组 $\begin{cases}y=2x+1,\\y=x^2-4x+3\end{cases}$的解，化简得 $x^2-6x+2=0$，$\Delta=28>0$，此方程有两个不相等的解，因此一次函数 $y=2x+1$ 的图象与二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象有两个不同的公共点.

4. C　方程 $ax^2+bx+c-3=0$ 可化为 $ax^2+bx+c=3$，因此 $ax^2+bx+c=3$ 的解就是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=3$ 的公共点的横坐标.

由图可知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=3$ 有且只有一个公共点,所以 $ax^2+bx+c-3=0$ 有两个相等的实数解.

5. C　解方程 $-x^2+4x-3=0$,得 $x=1$ 或 $x=3$,所以 A,B 点的坐标为 $(1,0)$,$(3,0)$. 当 $x=0$ 时,函数值 $y=-3$,所以点 C 的坐标为 $(0,-3)$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(3-1)\times3=3$.

6. 图象如图所示.



(1) $x_1\approx4.65$, $x_2\approx-0.65$,

∴抛物线与 x 轴交点坐标为 $(4.65,0)$, $(-0.65,0)$.

(2) $x_1\approx4.65$, $x_2\approx-0.65$.

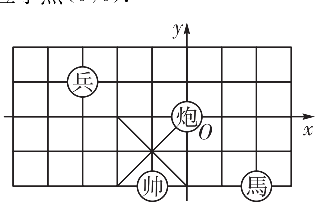
(3) 不等式 $x^2-4x-3>0$ 的解集为 $x<-0.65$ 或 $x>4.65$;不等式 $x^2-4x-3<0$ 的解集为 $-0.65<x<4.65$.

1.5　二次函数的应用

〚前置诊断〛

1. B　∵ $y=-x^2-4x-3=-(x^2+4x+4-4+3)=-(x+2)^2+1$,∴函数 $y=-x^2-4x-3$ 的最大值是 1.(除了用配方法外还可用公式法)

2. B　∵"帅"位于点 $(-1,-2)$,"马"位于点 $(2,-2)$,据此可建立如图所示的平面直角坐标系,∴"炮"位于点 $(0,0)$.



3. D　∵四边形 $ABCD$ 是长方形,∴ $AB=CD=3$, $AD=BC=4$,∴点 C 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}+3,-1+4\right)$,即 $C\left(\frac{3}{2},3\right)$.

〚变式训练〛

1. D　∵ $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x=-\frac{25}{6}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{2}{3}$,∴抛物线的顶点坐标是 $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$,∴运动员在空中运动的最大高度离水面 $10+\frac{2}{3}=\frac{32}{3}$ (m).

2. C　根据题意可得点 B 的纵坐标为 -4,把 $y=-4$ 代入 $y=-\frac{1}{25}x^2$,得 $x=\pm10$,∴ $A(-10,-4)$, $B(10,-4)$,∴ $AB=20$ m.

3. C　设 $BC=x$ m,则 $AB=(16-x)$ m,矩形 $ABCD$ 的面积为 y m²,根据题意得,$y=(16-x)x=-x^2+16x=-(x-8)^2+64$,当 $x=8$ m 时,$y_{max}=6$,则所围成的矩形 $ABCD$ 的最大面积是 64 m².

4. D　设在甲地销售 x 辆,则在乙地销售 $(15-x)$ 辆,根据题意得,$W=y_1+y_2=-x^2+10x+2(15-x)=-x^2+8x+30$,∴最大利润为 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-1)\times30-8^2}{4\times(-1)}=46$(万元).

5. 24　$y=60t-1.5t^2=-1.5(t-20)^2+600$,当 y 取得最大值时,飞机停下来,故飞机着陆后滑行 600 m 才能停下来. 因此滑行时间 t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant20$. 当 $t=16$ 时,$y=576$,所以最后 4 s 滑行的距离是 $600-576=24$ (m).

〚效果检测〛

1. C　∵总利润=每千克利润×销量,∴ y 与 x 的函数关系式为 $y=(x-40)[500-10(x-50)]$.

2. C　由图可知抛物线的顶点在原点,对称轴为 y 轴,∴设抛物线的表达式为 $y=ax^2$,把 $B(5,-4)$ 代入表达式,得 $-4=a\times5^2$,解得

$a=-\frac{4}{25}$,所以抛物线的函数关系式为 $y=-\frac{4}{25}x^2$.

3. B　$h=-\frac{5}{2}t^2+20t+1=-\frac{5}{2}(t-4)^2+41$,∴当 $t=4$ s 时,礼炮到达最高点爆炸.

4. D　由 $BE=x(0\leqslant x<5)$得,$AE=5-x$,$AF=5+x$,∴矩形的面积 $y=AE\cdot AF=(5-x)\cdot(5+x)=25-x^2$.

5. B　由题意可知 $M\left(1,\frac{40}{3}\right)$,$A(0,10)$,设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2+\frac{40}{3}$,所以有 $10=a+\frac{40}{3}$,解得 $a=-\frac{10}{3}$. ∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{10}{3}(x-1)^2+\frac{40}{3}$. 当 $y=0$ 时,$0=-\frac{10}{3}(x-1)^2+\frac{40}{3}$,解得 $x_1=-1$,$x_2=3$. 所以 $OB=3$ m.

6. (1)根据题意,$y=20\ 000+\frac{x}{100}\times 10\ 000=100x+20\ 000$.

(2)根据题意,$w=(2\ 200-1\ 200-x)(100x+20\ 000)=100(-x^2+800x-200\ 000)=-100(x-400)^2+36\ 000\ 000$,

所以当降价 400 元,即定价为 $2\ 200-400=1800$(元)时,所获利润最大.

(2)根据题意,每天最多接受 $50\ 000\times(1-0.05)=47\ 500$(台),由 $47\ 500=100x+20\ 000$,解得 $x=275$. 所以按最大量接受预订时,每台定价 $2\ 200-275=1\ 925$(元).

本章达标测试

一、选择题

1. B　$y=-4x+5$ 为一次函数;$y=x(2x-3)=2x^2-3x$ 为二次函数;$y=(x+4)^2-x^2=8x+16$ 为一次函数;$y=\frac{1}{x^2}$不是二次函数.

2. D　∵$y=2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$,∴当 $x=0$ 时,$y=-1$,故选项 A 错误;函数图象的对称轴是直线 $x=-1$,故选项 B 错误;当 $x<-1$ 时,y 随 x 的增大而减小,故选项 C 错误;当$x=-1$时,y 取得最小值-3,故选项 D 正确.

3. A　由图象可得,当 $x=1$ 时,函数最大值 2,当 $x=4$ 时,函数最小值-2.5.

4. D　$y=x^2-4x-4=x^2-4x+4-8=(x-2)^2-8$.

5. D　当 $t=9$ 时,$h=136$,当 $t=13$ 时,$h=144$,所以点火后 9 s 和点火后 13 s 的升空高度不相同,选项 A 错误;当 $t=24$ 时 $h=1\neq 0$,所以点火后 24 s 火箭离地面的高度为 1 m,选项 B 错误;当 $t=10$ 时 $h=141$,选项 C 错误;由 $h=-t^2+24t+1=-(t-12)^2+145$ 知火箭升空的最大高度为145 m,选项 D 正确.

6. C　∵抛物线 $y=x^2-bx+9$ 的顶点在 x 轴的负半轴上,∴顶点的横坐标小于 0,纵坐标为 0,即 $x=-\frac{-b}{2\times 1}<0$,$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{36-b^2}{4}=0$,解得 $b=-6$.

7. C　∵$y=3(x-2)^2-5$,∴当 $x=0$ 时,$y=7$,即二次函数 $y=3(x-2)^2-5$ 的图象与 y 轴的交点坐标为$(0,7)$.

8. A　抛物线 $y=x^2$ 的顶点坐标为$(0,0)$,抛物线 $y=(x+3)^2$ 的顶点坐标为$(-3,0)$,∵点$(0,0)$向左平移 3 个单位长度可得到$(-3,0)$,∴将抛物线$y=x^2$ 向左平移 3 个单位长度得到抛物线 $y=(x+3)^2$.

9. D　由函数表达式可知,$a=1>0$,抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 有最小值,且当 $x=1$ 时 $y_{\min}=3$.

10. D　由图象知抛物线的对称轴为直线 $x=-1$,过点$(-3,0)$和$(0,3)$. 设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)^2+k$,将$(-3,0)$和$(0,3)$代入,得 $\begin{cases}4a+k=0,\\ a+k=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ k=4,\end{cases}$ 则抛物线表达式为 $y=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$.

11. B　令 $y=0$,则 $x^2-2x+1=0$,其中 $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times1=4-4=0$,所以二次函数图象与$x$ 轴有 1 个交点.

12. D　设利润为 w 元,涨价 x 元,由题意得,每天

的利润 $w=(2+x)(20-2x)=-2x^2+16x+40=-2(x-4)^2+72$，所以当涨价 4 元(即售价为 14 元)时，每天利润最大，最大利润为 72 元.

13. B　∵$y=x^2-4x+m=(x-2)^2-4+m$，∴该函数在 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大. ∵$A(-4,y_1)$，$B(-3,y_2)$，$C(1,y_3)$ 为二次函数 $y=x^2-4x+m$ 的图象上的三点，$-4<-3<1<2$，∴$y_1>y_2>y_3$，即 $y_3<y_2<y_1$.

14. C　由表格中的数据看出 -0.01 和 0.02 更接近于 0，故一个解的范围为 $6.18<x<6.19$.

15. C　二次函数 $y=(x-m)^2-1$ 图象的对称轴为直线 $x=m$. ∵当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，∴$m\geqslant 1$.

16. B　对于二次函数 $y=ax^2+4x-1$，当 $x=-1$ 时，$y=a-5$，$a-5$ 不一定等于 0，故选项 A 错误；图象对称轴是直线 $x=-\dfrac{4}{2a}=-\dfrac{2}{a}$，故选项 B 正确；当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时，$y=\dfrac{1}{16}a$，故选项 C 错误；当 $a>0$ 时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，当 $a<0$ 时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，故选项 D 错误.

二、填空题

17. 2　由题意得 $m^2-2=2$，且 $m+2\neq 0$，解得 $m=2$.

18. $(1,-2)$　∵$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，∴抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$.

19. $-1\leqslant x\leqslant 2$　根据图象可得出，当 $y_1\geqslant y_2$ 时，x 的取值范围是 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

20. $y=x^2+2x$　∵将抛物线 $y=x^2+2x-1$ 向上平移，使它经过点 $A(1,3)$，∴平移后的解析式为 $y=x^2+2x-1+h$，则 $3=1+2-1+h$，解得 $h=1$，故所得新抛物线的表达式是 $y=x^2+2x$.

21. $y=10(x+1)^2$

22. 1　5　∵$y=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$，∴当 $x=1$ 时，二次函数 $y=x^2-2x+6$ 取最小值 5.

三、解答题

23. (1)由题意得，每天的销售量为 $200-10\times(52-50)=200-20=180$(件).

(2)由题意得：$y=(x-40)[200-10(x-50)]=-10x^2+1\ 100x-28\ 000=-10(x-55)^2+2\ 250$，∴每件销售价为 55 元时，获得的利润最大；最大利润为 2 250 元.

24. (1)把 $(1,0)$，$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 代入抛物线表达式得，$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+b+c=0,\\ c=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\ c=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 则抛物线表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$.

(2)抛物线表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+2$，其顶点为 $(-1,2)$. 平移后要落在原点，需将抛物线向右平移 1 个单位长度，向下平移 2 个单位长度，表达式变为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$.

25. (1)∵抛物线 $y_1=ax^2+2ax+1$ 与 x 轴有且仅有一个公共点 A，∴判别式 $\Delta=4a^2-4a=0$，而 $a\neq 0$，∴$a=1$.

(2)抛物线的表达式为 $y_1=x^2+2x+1=(x+1)^2$，∴$A(-1,0)$. 把 $A(-1,0)$ 代入 $y_2=kx+b$ 得 $-k+b=0$，得 $b=k$，∴一次函数表达式为 $y_2=kx+k$，∴当 $x=0$ 时，$y_2=k$，则 $C(0,k)$. ∵点 C 是线段 AB 的中点，∴$B(1,2k)$. 把 $B(1,2k)$ 代入 $y=x^2+2x+1$ 得 $2k=1+2+1$，解得 $k=2$，∴直线 AB 的表达式为 $y=2x+2$.

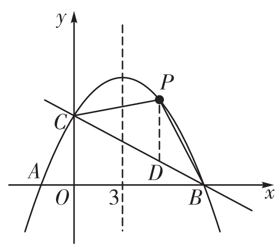
(3) $y_1\geqslant y_2$ 时，$x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$.

26. (1)∵抛物线 $y=ax^2+\dfrac{3}{2}x+4$ 的对称轴是直线 $x=3$，∴$-\dfrac{\frac{3}{2}}{2a}=3$，解得 $a=-\dfrac{1}{4}$，∴抛物线的表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+4$. 当 $y=0$ 时，$-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+4=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=8$，

∴点 A 的坐标为$(-2,0)$，点 B 的坐标为$(8,0)$.

(2)当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4=4$，∴点 C 的坐标为$(0,4)$. 设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，将 $B(8,0)$、$C(0,4)$代入 $y=kx+b$得 $\begin{cases}8k+b=0,\\ b=4,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ b=4,\end{cases}$ ∴直线 BC 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

设点 P 的坐标为$\left(x,-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4\right)$，过点 P 作 $PD\parallel y$ 轴，交直线 BC 于点 D，如图所示，则点 D 的坐标为$\left(x,-\frac{1}{2}x+4\right)$，



∴$PD=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4-\left(-\frac{1}{2}x+4\right)=-\frac{1}{4}x^2+2x$，

∴$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PD\cdot OB=\frac{1}{2}\times 8\times\left(-\frac{1}{4}x^2+2x\right)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$.

∵函数 $y=-(x-4)^2+16$ 的图象开口向下，∴当 $x=4$ 时，$\triangle PBC$ 的面积最大，最大面积是 16.

∵$0<x<8$，故存在点 P，使$\triangle PBC$ 的面积最大，最大面积是 16.

第 2 章　圆

2.1　圆的对称性

〖前置诊断〗

1. B　圆的半径是指圆心到圆上任意一点的线段，只有线段 OB 符合.
2. D　直径是指通过圆心并且两端都在圆上的线段，只有线段 BD 符合.
3. D　直径是 5 cm 的圆半径是 2.5 cm，它比半径是3 cm 的圆要小.
4. A　A 是轴对称图形，也是中心对称图形；B 是轴对称图形，不是中心对称图形；C 不是轴对称图形，也不是中心对称图形；D 不是轴对称图形，是中心对称图形.

〖变式训练〗

1. B　一枚半径为 r 的硬币沿着直线滚动一圈，圆心经过的距离就是圆的周长，所以是 $2\pi r$.
2. (1)如图 1，点 P 和点 Q 为所求；
(2)如图 2，阴影部分为所求(不含边界)；
(3)如图 3，阴影部分为所求(不含边界).

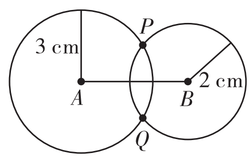


图 1

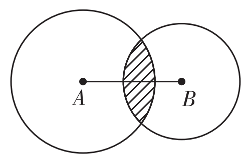


图 2

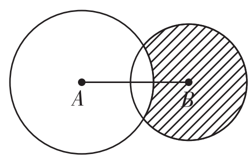
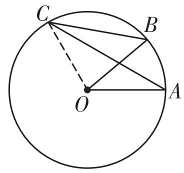


图 3

〖效果检测〗

1. A　A 错误，建筑工人砌墙时拉的参照线运用了“两点确定一条直线”的原理；B 正确，修理损坏的椅子腿时斜钉的木是运用了“三角形稳定性”的原理；C 正确，测量跳远成绩的依据是垂线段最短；D 正确，将车轮设计为圆形运用了“圆的旋转对称性”的原理.
2. C　∵$AB=2$ cm，∴圆的直径是 4 cm.
3. 不变　∵四边形 $PAOB$ 是扇形 OMN 的内接矩形，∴$AB=OP=$半径，当 P 点在$\overset{\frown}{MN}$上移动时，半径一定，所以 AB 的长度不变.
4. 30°　如图，连接 OC.



$\because OC=OB$,

$\therefore \angle OCB=\angle OBC=50^\circ$,

$\therefore \angle BOC=180^\circ-50^\circ\times 2=80^\circ$,

$\therefore \angle AOC=80^\circ+40^\circ=120^\circ$.

$\because OC=OA$,

$\therefore \angle OAC=\angle OCA=30^\circ$.

5. 连接 OC,$CE=AO$,而 $OA=OC$,

$\therefore OC=EC$,$\therefore \angle E=\angle AOC$,

$\therefore \angle OCD=\angle E+\angle AOC=2\angle E$.

$\because OC=OD$,

$\therefore \angle D=\angle OCD=2\angle E$.

$\because \angle BOD=\angle E+\angle D$,

$\therefore \angle E+2\angle E=75^\circ$,$\therefore \angle E=25^\circ$.

2.2 圆心角、圆周角(1)

〖前置诊断〗

1. C $\angle AOB=\dfrac{2}{9}\times 360^\circ=80^\circ$.

2. B $\because \angle ACB=90^\circ$,$\angle B=40^\circ$,$\therefore \angle A=90^\circ-\angle B=50^\circ$. $\because CA=CD$,$\therefore \angle A=\angle CDA=50^\circ$,$\therefore \angle ACD=180^\circ-2\angle A=80^\circ$.

3. A C,D 为半圆上的三等分点,可得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}$,所以$\angle AOD=\angle DOC=\angle BOC=60^\circ$,所以$\triangle AOD$、$\triangle COD$、$\triangle BOC$ 都是等边三角形,因而 $AD=CD=OC$. 根据对称性质,$\triangle AOD$ 沿 OD 翻折与$\triangle COD$ 重合.

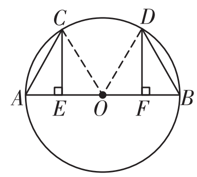
〖变式训练〗

1. C 弦将$\odot O$ 分成 4∶5 两条弧,则弦所对的圆心角为$\dfrac{4}{9}\times 360^\circ=160^\circ$.

2. 90° $\because OA=OB=3$,$AB=3\sqrt{2}$,$\therefore OA^2+OB^2=AB^2$,$\therefore$根据勾股定理的逆定理,$\triangle ABO$ 是直角三角形,且$\angle AOB=90^\circ$.

3. AC 与 BD 相等. 理由如下:

连接 OC,OD,如图.



$\because OA=OB$,$AE=BF$,

$\therefore OE=OF$.

$\because CE\perp AB$,$DF\perp AB$,

$\therefore \angle OEC=\angle OFD=90^\circ$.

在 Rt$\triangle OEC$ 和 Rt$\triangle OFD$ 中,

$\begin{cases} OE=OF, \\ OC=OD, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle OEC\cong$Rt$\triangle OFD$(HL),

$\therefore \angle COE=\angle DOF$,

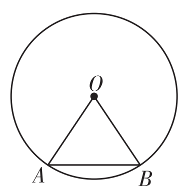
$\therefore AC=BD$.

〖效果检测〗

1. 60° 如图,$\because AB=OA=OB$,

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形,

$\therefore \angle AOB=60^\circ$.



2. $AC=BD$ $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,$\therefore \overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BC}$,

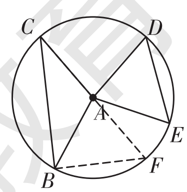
$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,$\therefore AC=BD$.

3. C $\because \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$,$\angle COD=35^\circ$,

$\therefore \angle BOC=\angle EOD=\angle COD=35^\circ$,

$\therefore \angle AOE=180^\circ-35^\circ\times 3=75^\circ$.

4. A 如图,作直径 CF,连接 BF,则$\angle FBC=90^\circ$.



$\because \angle BAC+\angle EAD=180^\circ$,

$\angle BAC+\angle BAF=180°$,

$\therefore \angle DAE=\angle BAF$,

$\therefore DE=BF=6$,

$\therefore BC=\sqrt{CF^2-BF^2}=8$.

5. A　$\because$点 C,D 是弧 AB 的三等分点,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$,

$\therefore AC=CD=DB$,选项 B 说法正确.

$\because \angle AOB=90°, OA=OB$,

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=45°$.

$\because$点 C、D 是弧 AB 的三等分点,

$\therefore \angle AOC=\angle COD=\angle BOD=30°$,

$\therefore \angle OEF=\angle AOE+\angle OAE=30°+45°=75°$.

同理$\angle OFE=75°$,

$\therefore OE=OF$.

$\because OC=OD$,

$\therefore EC=FD$,选项 C 说法正确.

$\because \angle DFB=\angle OFE=75°$,

$\therefore$选项 D 说法正确.

连接 AC,BD.

$\because \angle AOC=30°, OA=OC$,

$\therefore \angle OCA=\angle OAC=75°$.

同理$\angle ODB=\angle OBD=75°$,

$\therefore \angle AEC=\angle ACE, \angle DFB=\angle BDF$,

$\therefore AE=AC, BF=BD$.

$\because EF<CD, AC=CD=DB$,

$\therefore AE=FB>EF$ 即选项 A 说法错误.

6. 分析:连接 OC,先根据$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$得出$\angle AOC=\angle BOC$,再由已知条件根据 AAS 定理得出$\triangle COD\cong\triangle COE$,由此可得出结论.

证明:连接 OC,$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$,

$\therefore \angle AOC=\angle BOC$.

$\because CD\perp OA$ 于 D,$CE\perp OB$ 于 E,

$\therefore \angle CDO=\angle CEO=90°$.

在$\triangle COD$ 与$\triangle COE$ 中,

$$\because \begin{cases}\angle DOC=\angle EOC,\\ \angle CDO=\angle CEO=90°,\\ CO=CO,\end{cases}$$

$\therefore \triangle COD\cong\triangle COE$(AAS),

$\therefore OD=OE$.

$\because AO=BO$,

$\therefore AD=BE$.

2.2　圆心角、圆周角(2)

〖前置诊断〗

1. C　因为$\angle BOC$ 的顶点在圆心,两边与圆相交,所以它是$\odot O$ 的一个圆心角.

2. D　$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore AC=BD, \angle AOC=\angle BOD$,即①②正确;

$\because \angle AOC=\angle BOD$,$\therefore \angle AOD=\angle BOC$,

$\therefore AD=BC$,即④正确.

3. C　$\because \angle AOE=60°$,

$\therefore \angle BOE=120°$.

又$\because C,D$ 是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点,

$\therefore \angle EOD=\angle DOC=\angle COB=40°$,

$\therefore \angle COE=80°$.

〖变式训练〗

1. 25°　由$\angle ABD=65°$,可知$\angle AOD=2\angle ABD=130°$,从而求得$\angle AOC=50°$. 又$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$,所以$\angle ABC=25°$.

2. 分析:要证明$\triangle ACD$ 是等边三角形,有三条路可走. 一是证明三条边相等,即可将问题转化为证明 AC,CD,DA 所对的圆周角或所对的弧相等;二是证明$\triangle ACD$ 的两个内角等于 60°;三是先证明$\triangle ACD$ 是等腰三角形,再证明其中有一个内角等于 60°. 注意到 BD 是$\angle ABC$ 的平分线,可知 $CD=AD$,即$\triangle ACD$ 是等腰三角形,只要再证明有一个内角等于 60°即可.

证明:$\because BD$ 是$\angle ABC$ 的平分线,$\angle ABC=120°$,

$\therefore \angle DBC=\angle ABD=60°$,

$\therefore \angle DAC=\angle DBC=60°, \angle ACD=\angle ABD=60°$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形.

〖效果检测〗

1. D　$\angle AEC$ 的顶点不在圆上,不是圆周角,选项

A 不正确；圆周角$\angle CAB$所对的弦是BC，选项B不正确；$\angle ADB$的顶点不在圆上，不是圆周角，选项C不正确.

2. D　$\triangle ACD$与$\triangle BCD$中，只能找到$\angle DAC=\angle DBC$一个条件，再也找不到两个角相等，所以这两个三角不相似.

3. 20°　$\because \angle AOC=40^\circ$，$\therefore \angle ABC=20^\circ$. 又$\because AO\parallel BC$，$\therefore \angle OAB=\angle ABC=20^\circ$.

4. 28°　$\because \angle ABO=28^\circ$，$\therefore \angle OAC=62^\circ$. 连接$OC$，$\because AO=CO$，$\therefore \angle AOC=180^\circ-2\angle OAC=56^\circ$，$\therefore \angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC=28^\circ$.

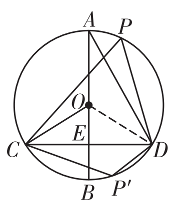
5. 分析：要证两个三角形相似，只要证有两组对应角相等即可. 注意到$\triangle ABD$与$\triangle AEB$有一个公共角$\angle BAE$，只要找到另外一组相等的角即可.

证明：$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABD=\angle C$.

又$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，$\therefore \angle E=\angle C$，$\therefore \angle ABD=\angle E$.

又$\because \angle BAD=\angle EAB$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle AEB$.

6. 分析：(1)连接OD，注意到$\angle COD$与$\angle CPD$分别是同一条弧CD所对的圆心角与圆周角，所以只要证$\angle COB=\angle BOD$即可；(2)在图中劣弧$\overset{\frown}{CD}$上画出点P'，同理可知$\angle CP'D$与$\angle COB$互补.



证明：(1)连接OD，设AB与CD交于点E.

$\because AB\perp CD$，$\therefore \angle OEC=\angle OED=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OEC$和$\mathrm{Rt}\triangle OED$中，$\begin{cases}OE=OE,\\OE=OD,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OEC\cong\mathrm{Rt}\triangle OED(\mathrm{HL})$，

$\therefore \angle COB=\angle DOB=\frac{1}{2}\angle COD$.

又$\because \angle CPD=\frac{1}{2}\angle COD$，

$\therefore \angle CPD=\angle COB$.

(2)如图，$\angle CP'D+\angle COB=180^\circ$.

理由如下：

$\because \angle CPD+\angle CP'D=180^\circ$，$\angle CPD=\angle COB$，

$\therefore \angle CP'D+\angle COB=180^\circ$.

2.2　圆心角、圆周角（3）

〖前置诊断〗

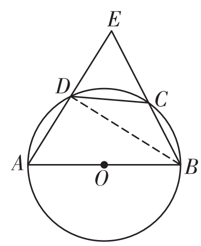
1. D　因为AB是$\odot O$的直径，所以A,O,B三点在一条直线上. 所以$\angle BOC=180^\circ-\angle AOC=135^\circ$.

2. C　$\because$圆心角$\angle BOC$和圆周角$\angle BAC$所对的弧为$\overset{\frown}{BC}$，$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times78^\circ=39^\circ$.

3. B　$\because \angle A+\angle B=\angle 1$，$\therefore \angle B=\angle 1-\angle A=68^\circ-40^\circ=28^\circ$，$\therefore \angle D=\angle B=28^\circ$.

〖变式训练〗

1. B　如图，连接BD.



$\because AB$是圆O的直径，

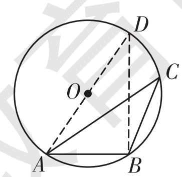
$\therefore \angle ADB=90^\circ$，$\therefore \angle ADB=\angle EDB$.

$\because AD=DC$，$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle EDB$中，$\angle E=90^\circ-\angle EBD$，$\angle A=90^\circ-\angle ABD$，$\therefore \angle A=\angle E=50^\circ$.

2. $\frac{4}{5}$　如图，作直径AD，连接BD.



$\because AD$为直径，$\therefore \angle ABD=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$\because AD=10$，$AB=6$，

$\therefore BD=\sqrt{10^2-6^2}=8$,

$\therefore \cos D=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

$\because \angle C=\angle D$, $\therefore \cos C=\dfrac{4}{5}$.

3. 证明:$\because \angle DAC$ 与 $\angle DBC$ 是同弧所对的圆周角,$\therefore \angle DAC=\angle DBC$. $\because AD$ 平分 $\angle CAE$,$\therefore \angle EAD=\angle DAC$,$\therefore \angle EAD=\angle DBC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,$\therefore \angle DAB+\angle DCB=180^\circ$. 又 $\because \angle EAD+\angle DAB=180^\circ$,则 $\angle EAD=\angle BCD$,$\therefore \angle DBC=\angle DCB$,$\therefore DB=DC$.

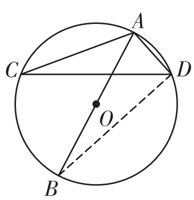
〖效果检测〗

1. C　因为圆内接四边形的对角互补,即该圆的内接平行四边形对角和为 180°,而平行四边形的对角是相等的,所以该平行四边形为矩形.

2. D　$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ACB=90^\circ$. 又 $\because \angle OBC=60^\circ$,$\therefore \angle BAC=90^\circ-\angle ABC=30^\circ$.

3. 120°　$\because$ 四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,$\therefore \angle A=180^\circ-\angle BCD=60^\circ$,由圆周角定理得,$\angle BOD=2\angle A=120^\circ$.

4. 20°　如图,连接 BD. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ADB=90^\circ$. $\because \angle BAD=70^\circ$,$\therefore \angle B=90^\circ-\angle BAD=20^\circ$,$\therefore \angle ACD=\angle B=20^\circ$.



5. $\because A,B,C,D$ 四点共圆,$\therefore \angle A=\angle BCE$.

$\because BC=BE$,$\therefore \angle BCE=\angle E$,

$\therefore \angle A=\angle E$,$\triangle ADE$ 是等腰三角形.

6. (1)如图 1,连接 AE,DC.

$\because \angle ECA=90^\circ$,且 E,C,A 三点都在 $\odot O$ 上,$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的直径.

$\because EC=AC$,$\therefore \angle CEA=45^\circ$.

$\because D$ 是斜边 AB 的中点,

$\therefore BD=DC$,$\therefore \angle B=\angle BCD$.

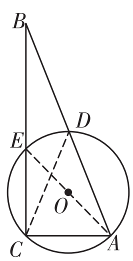


图 1

$\because \angle ADC=\angle AEC=\angle B+\angle BCD=45^\circ$,

$\therefore \angle B=45^\circ\div 2=22.5^\circ$.

(2)如图 2,连接 DE,AE.

由(1)得:AE 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADE=90^\circ$.

$\because \angle EBD=\angle ABC$,$\angle BDE=\angle BCA=90^\circ$,

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BCA$,

$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$.

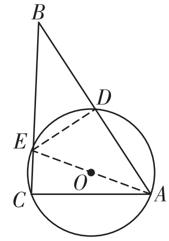


图 2

$\because D$ 是斜边 AB 的中点,$\therefore BD=AD$.

由勾股定理得,$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$,$\therefore BD=AD=\dfrac{1}{2}AB=5$,

$\therefore \dfrac{DE}{6}=\dfrac{5}{8}$,$\therefore DE=\dfrac{15}{4}$,

$\therefore AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{5^2+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2}=\dfrac{25}{4}$,

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{25}{8}$,即 $\odot O$ 的半径为 $\dfrac{25}{8}$.

2.3　垂径定理

〖前置诊断〗

1. C　$\because \angle A=50^\circ$,$OA=OB$,$\therefore \angle OBA=\angle OAB=50^\circ$,$\therefore \angle AOB=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$. $\because$ 点 C 是弧 AB 的中点,$\therefore \angle BOC=\dfrac{1}{2}\angle AOB=40^\circ$.

2. D　$\because AB=CD$,$\therefore \angle AOB=\angle COD$,故 A 说法正确;$\therefore \angle AOB+\angle BOC=\angle COD+\angle BOC$,$\therefore \angle AOC=\angle BOD$,故 B 说法正确;$\because AB=CD$,$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,$\therefore \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}$,即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,故 C 说法正确;$\because \triangle OCD$ 不一定是等边三角形,$\therefore OC$ 不一定等于 CD,故 D 说法错误.

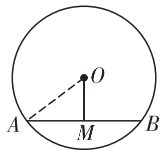
3. A　$\because AB=AC$,D 为 BC 中点,$\therefore AD\perp BC$.

$\because BC=16$,D 为 BC 中点,$\therefore BD=CD=8$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,由勾股定理得:$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

〖变式训练〗

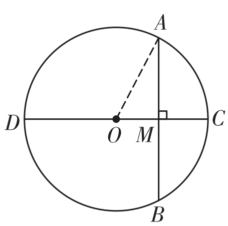
1. C　如图,连接 OA.



∵弦 $AB=8$,M 是 AB 的中点,∴$OM\perp AB$,$AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$. 在 Rt△$OAM$ 中,$OA=\sqrt{OM^2+AM^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,∴⊙$O$ 的直径$=2OA=10$.

2. 3 cm　过点 O 作 $OF\perp DE$,垂足为 F,连接 OE,则 OF 平分 DE,∴$EF=\frac{1}{2}DE=4$ cm,$OE=OC=5$ cm,∴$OF=\sqrt{OE^2-EF^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ cm.

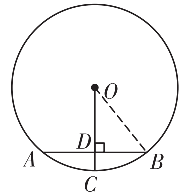
3. 如图,连接 OA. ∵CD 是⊙O 的直径,∴$OA=OD=3$ cm. 又∵$OM:OD=3:5$,∴$OM=\frac{3}{5}\times 3=\frac{9}{5}$(cm). 在 Rt△$AOM$ 中,由勾股定理得,$AM=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{12}{5}$(cm). ∴$AB=2AM=\frac{24}{5}$cm.



〖效果检测〗

1. D　在垂径定理及其推论中,需要满足五个条件中的两个才能推出其他三个成立,A 只有垂直弦的条件,D 满足既垂直又平分两个条件,B 和 C 选项尽管满足了平分弦和直径这两个条件,但平分的弦不能是直径.

2. D　如图,连接 OB,



∵$OC\perp AB$ 于点 D,$AB=8$,

∴$BD=\frac{1}{2}AB=4$.

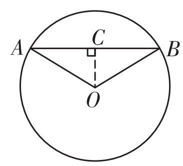
设 $OB=r$,则 $OD=r-2$,在 Rt△BOD 中,$OB^2=OD^2+BD^2$,即 $r^2=(r-2)^2+4^2$,解得 $r=5$,∴⊙O 的直径$=2r=10$.

3. 55　∵AB 是⊙O 的直径,∴$OA=OC$.

∵$\angle A=35°$,∴$\angle ACO=\angle A=35°$.

∵D 为 AC 的中点,∴$OD\perp AC$,∴$\angle DOC=90°-\angle DCO=90°-35°=55°$.

4. $100\sqrt{3}$　如图,过点 O 作 $OC\perp AB$ 于 C.



∴$AC=BC=\frac{1}{2}AB$.

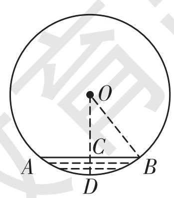
又由 $OA=OB$,$\angle AOB=120°$,得$\angle A=\angle B=30°$.

∴在 Rt△AOC 中,$OC=\frac{1}{2}OA=10$ cm,

$AC=\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$(cm),

∴$AB=2AC=20\sqrt{3}$ cm,∴△AOB 的面积$=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times 20\sqrt{3}\times 10=100\sqrt{3}$(cm²).

5. (1)如图,作半径 $OD\perp AB$ 于 C,连接 OB,由垂径定理得,$BC=\frac{1}{2}AB=0.3$ m,



在 Rt△OBC 中,$OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=0.4$(m),

$CD=0.5-0.4=0.1$(m),

即此时的水深为 0.1 m；

(2)当水位上升到圆心以下时，水面宽 0.8 m，则 $OC'=\sqrt{0.5^2-0.4^2}=0.3$(m)，

水面上升的高度为 $0.4-0.3=0.1$ m；

当水位上升到圆心以上时，水面上升的高度为：$0.4+0.3=0.7$ m，

综上可得，水面上升的高度为 0.1 m 或 0.7 m.

6. (1)连接 OM，∵点 M 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，∴$OM\perp AB$. 过点 O 作 $OD\perp MN$ 于点 D，由垂径定理，得 $MD=\frac{1}{2}MN=2\sqrt{3}$ cm.

在 Rt△ODM 中，$OM=4$ cm，$MD=2\sqrt{3}$ cm，

∴$OD=\sqrt{OM^2-MD^2}=2$ cm，

故圆心 O 到弦 MN 的距离为 2 cm.

(2)$\cos\angle OMD=\frac{MD}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∴$\angle OMD=30°$.

又∵$AB\perp OM$，∴$\angle ACM=90°-\angle OMD=60°$.

2.4 过不共线三点作圆

〖前置诊断〗

1. C 由作图知，BC 的垂直平分线为 MN，∴$DB=DC$，$BE=CE$，∴DM 平分∠BDC. 故错误的是 $BE=BD$.

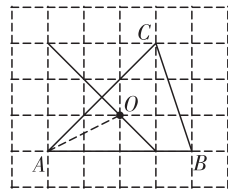
2. C ∵$AC=AD$，∴点 A 在线段 CD 的垂直平分线上. ∵$BC=BD$，∴点 B 在线段 CD 的垂直平分线上，∴AB 是 CD 的垂直平分线.

3. B ∵线段垂直平分线上的点到两端点的距离相等，∴到三角形三个顶点的距离相等的点是三角形三边垂直平分线的交点.

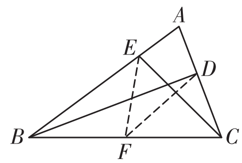
〖变式训练〗

1. B 过两点可以作无数个圆，①正确；经过不在同一直线上的三点可以作圆，②错误；任意一个三角形都有一个外接圆，而且只有一个外接圆，③正确；任意一个圆有无数个内接三角形，④错误. 正确的命题有 2 个.

2. $\sqrt{5}$ 如图所示，点 O 为△ABC 的外心，则 AO 为外接圆半径，利用勾股定理可计算得出：能够完全覆盖这个三角形的最小圆面的半径是$\sqrt{5}$.



3. 如图，取 BC 的中点 F，连接 DF，EF.



∵BD，CE 是△ABC 的高，∴△BCD 和△BCE 都是直角三角形. ∴DF，EF 分别为 Rt△BCD 和Rt△BCE斜边上的中线，∴$DF=EF=BF=CF$. ∴E，B，C，D 四点在以点 F 为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 为半径的圆上.

〖效果检测〗

1. C 平行四边形、菱形的对角不一定互补，四个顶点不一定能够共圆；矩形、正方形的对角互补，四顶点一定共圆.

2. D ∵$6^2+8^2=10^2$，

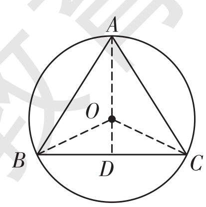
∴△ABC 为直角三角形，斜边长为 10，

∴△ABC 的外接圆的直径为 10，

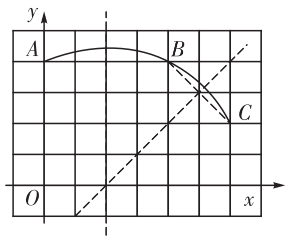
∴此三角形外接圆的半径为 5.

3. $\sqrt{3}R$ 如图所示，$OB=OA=R$. ∵△ABC 是正三角形，正三角形的中心就是外心，且正三角形三线合一，所以 BO 是∠ABC 的平分线，故 $\angle OBD=60°\times\frac{1}{2}=30°$，$BD=R\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

根据垂径定理，$BC=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}R=\sqrt{3}R$.



4. (2,0)　根据垂径定理的推论“弦的垂直平分线必过圆心”，可以作弦 AB 和 BC 的垂直平分线，交点即为圆心. 如图所示，圆心是(2,0).



5. (1) ∵ AD 为直径，$AD\perp BC$，∴由垂径定理得 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，∴根据圆心角、弧、弦之间的关系得 $BD=CD$.

(2) B,E,C 三点在以 D 为圆心，以 DB 为半径的圆上.

理由：如图，由(1)知，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

∴$\angle 1=\angle 2$.

又∵$\angle 2=\angle 3$，∴$\angle 1=\angle 3$.

∵BE 是$\angle ABC$ 的平分线，

又$\angle DBE=\angle 3+\angle 4$，$\angle DEB=\angle 1+\angle 5$.

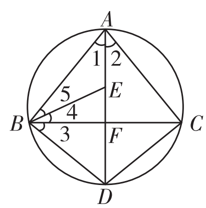
∴$\angle 4=\angle 5$，

∴$\angle DBE=\angle DEB$，∴$DB=DE$.

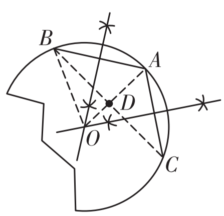
由(1)知，$BD=CD$，

∴$DB=DE=DC$.

∴B,E,C 三点在以 D 为圆心，以 DB 为半径的圆上.



6. (1) 如图，分别作弦 AB 和 AC 的垂直平分线，交点 O 即为所求的圆心.



(2) 连接 BC,AO,OB，AO 交 BC 于点 D.

∵△ABC 为等腰三角形，∴$OA\perp BC$.

∵$BC=16$ cm，∴$BD=8$ cm.

∵$AB=10$ cm，∴$AD=6$ cm.

设该圆的半径为 R，在 Rt△BOD 中，$OD=(R-6)$ cm，∴$R^2=8^2+(R-6)^2$，解得 $R=\frac{25}{3}$(cm)，

∴该圆的半径 R 为 $\frac{25}{3}$ cm.

2.5　直线与圆的位置关系(1)

〖前置诊断〗

1. A　∵⊙O 的半径 $r=5$，且 $PO=4$，∴$OP<r$，∴点 P 与⊙O 的位置关系是点 P 在⊙O 内.

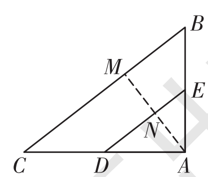
2. C　根据定义，点 P 到直线 l 的距离是线段 PC 的长度.

3. D　设点 C 到线段 AB 的距离是 x. ∵ $BC\perp AC$，由勾股定理得 $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot x=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，即 $\frac{1}{2}\times 10\cdot x=\frac{1}{2}\times 6\times 8$，解得 $x=4.8$，即点 C 到线段 AB 的距离是 4.8.

〖变式训练〗

1. D　若直线上一点到圆心的距离等于圆的半径，则圆心到直线的距离小于或等于圆的半径，此时直线和圆相交或相切.

2. 相交　如图，过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，交 DE 于点 N，

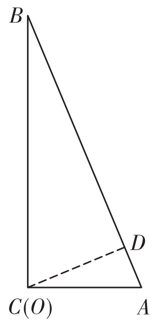


∴$AM\times BC=AC\times AB$，∴$AM=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$.

∵D,E 分别是 AC,AB 的中点，∴$DE\parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC=2.5$，∴$AN=MN=\frac{1}{2}AM$，∴$MN=1.2$. ∵以 DE 为直径的圆半径为 1.25，大于 1.2，∴以 DE 为直径的圆与 BC 的

位置关系是相交.

3. 如图,作 $CD \perp AB$ 于 D,



$\because \angle ACB=90°, AC=10, BC=24$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=26$.

$\because \frac{1}{2}CD \cdot AB=\frac{1}{2}AC \cdot BC$,

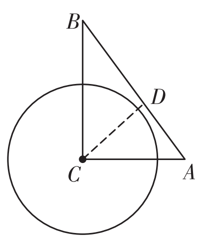
$\therefore CD=\frac{10\times 24}{26}=\frac{120}{13}$.

当圆心 O 与 C 重合时,$\because OD=\frac{120}{13}>6$,即圆心 O 到 AB 的距离大于圆的半径,$\therefore AB$ 与$\odot O$ 相离.

〖效果检测〗

1. A $\because \odot O$ 的半径大于圆心 O 到直线 l 的距离 直线 l 与$\odot O$ 的位置关系是相交.

2. C 如图,过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D.



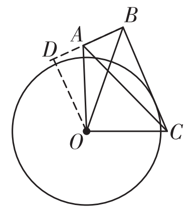
由勾股定理得,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13$,由三角形的面积公式得,$AC\times BC=AB\times CD$,$\therefore 5\times 12=13\times CD$,$\therefore CD=\frac{60}{13}>\frac{58}{13}$,$\therefore \odot C$ 与 AB 的位置关系是相离.

3. 相切或相交

4. $3\leqslant r\leqslant 5$ 在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB=4, AD=3$,则 $BD=\sqrt{3^2+4^4}=5$.

由图可知 $3\leqslant r\leqslant 5$.

5. 如图,延长 BA 至 D,使得 $BD=OA$,连接 OD.



在$\triangle OAC$ 与$\triangle DBO$ 中,

$\begin{cases} AC=BO, \\ \angle OAC=\angle DBO, \\ OA=DB, \end{cases}$

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle DBO$(SAS),

$\therefore OC=OD, \angle ODB=\angle AOC$.

$\because AO \perp OC$, $\therefore \angle ODB=90°$,

$\because \odot O$ 与 BC 相切,点 C 不是切点,

$\therefore OC>$半径,$\therefore OD>$半径,

$\therefore$直线 AB 与$\odot O$ 的位置关系是相离.

2.5 直线与圆的位置关系(2)

〖前置诊断〗

1. C $\because \odot O$ 的直径是 10,$\therefore \odot O$ 的半径 $r=5$. $\because$圆心 O 到直线 l 的距离 $d=5$,$\therefore r=d$,$\therefore$直线 l 和$\odot O$ 的位置关系是相切.

2. A 因为直线 l 与$\odot O$ 只有一个公共点,所以 l 与$\odot O$ 相切,因此 $d=r$,即 $d=3$.

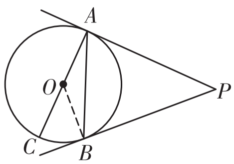
3. D $\because AB=AC$,点 D 为 BC 的中点,由等边对等角与等腰三角形三线合一的性质可得,$\angle BAD=\angle CAD$,$AD\perp BC$,$\angle B=\angle C$. 故 A、B、C 正确,D 错误.

〖变式训练〗

1. D $\because AB=4, AT=3, BT=5$,$\therefore AB^2+AT^2=BT^2$,$\therefore \triangle BAT$ 是直角三角形,且$\angle BAT=90°$,$\therefore$直线 AT 是$\odot O$ 的切线;$\because \angle B=45°$,$AB=AT$,$\therefore \angle T=45°$,$\therefore \angle BAT=90°$,$\therefore$直线 AT 是$\odot O$ 的切线;$\because AB$为直径,$\therefore \angle BCA=90°$,$\because \angle B=55°$,$\therefore \angle BAC=35°$,$\therefore \angle BAT=$

$\angle BAC+\angle TAC=90°$，∴直线 AT 是⊙O 的切线；由 $\angle ATC=\angle B$，无法得出直线 AT 是⊙O 的切线.

2. 20° 如图，连接 OB. ∵PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 为切点，∴$\angle OAP=\angle OBP=90°$. 而 $\angle P=40°$，∴$\angle AOB=180°-\angle P=140°$，又 $OA=OB$，∴$\angle OAB=\angle OBA=\frac{180°-40°}{2}=20°$.



3. (1)∵$CA=CD$，$\angle D=30°$，

∴$\angle A=\angle D=30°$.

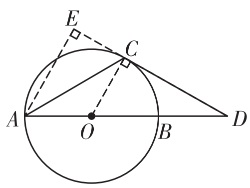
如图，连接 OC，

∵$AO=CO$，∴△AOC 是等腰三角形，

∴$\angle ACO=\angle A=30°$，∴$\angle COD=60°$，

∴$\angle DCO=180°-30°-60°=90°$.

∴CD 是⊙O 的切线，即直线 CD 与⊙O 相切.



(2)如图，过点 A 作 $AE\perp CD$，垂足为 E.

在 Rt△COD 中，∵$\angle D=30°$，

∴$OD=2OC=8$，$AD=AO+OD=4+8=12$.

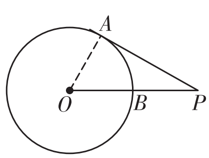
在 Rt△ADE 中，$\angle D=30°$，

∴点 A 到 CD 边的距离 $AE=\frac{AD}{2}=6$.

〖效果检测〗

1. D 垂直于半径的直线可能是圆的切线也有可能是圆的割线，故选项 D 说法不正确.

2. A 如图，连接 OA.



∵PA 为⊙O 的切线，A 为切点，

∴$\angle OAP=90°$.

∵$\angle P=30°$，$OB=OA=3$，

∴$OP=6$，故 $BP=6-3=3$.

3. 27° ∵PA 切⊙O 于点 A，∴$\angle OAP=90°$.

∵$\angle P=36°$，∴$\angle AOP=54°$，∴$\angle B=27°$.

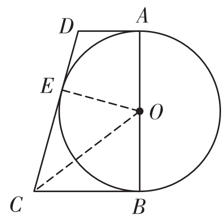
4. 1 ∵AB 为直径，∴$\angle ADB=90°$. ∵$\angle BDE=60°$，∴$\angle PDA=180°-90°-60°=30°$，

∴$\angle PBD=\angle PDA=30°$. ∵$OB=OD$，

∴$\angle ODB=\angle PBD=30°$，∴$\angle ADO=60°$，$\angle ODE=90°$，∴△$ADO$ 为等边三角形，PD 为⊙O 的切线，∴$AD=OA$，$\angle AOD=60°$，∴$\angle P=30°$，∴$PA=AD=AO=DO$. 在 Rt△PDO 中，$PD^2+DO^2=PO^2$，即 $(\sqrt{3})^2+PA^2=(2PA)^2$，

解得 $PA=1$.

5. 如图，连接 OE，OC.



∵DE 与⊙O 相切于点 E，

∴$\angle OEC=90°$.

在△OBC 和△OEC 中，

$$\begin{cases}OB=OE\\CB=CE,\\OC=OC\end{cases}$$

∴△OBC≌△OEC(SSS)，

∴$\angle OBC=\angle OEC=90°$，

∴BC 为⊙O 的切线.

2.5 直线与圆的位置关系(3)

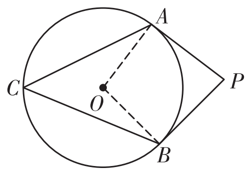
〖前置诊断〗

1. B ∵$\angle A=45°$，$OA=OB$，∴$\angle OBA=\angle OAB=45°$，∴$\angle AOB=180°-45°-45°=90°$. ∵点 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，∴$\angle BOC=\angle AOC=45°$.

2. B ∵$\angle ACB=90°$，∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=$

$\sqrt{10^2-8^2}=6$(cm). ∵点 C 在⊙A 上，∴⊙A 的半径为 6 cm.

3. A　如图，连接 OA，OB.

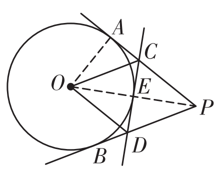


∵PA 是圆 O 的切线. ∴$\angle OAP=90°$，同理 $\angle OBP=90°$，根据四边形内角和定理可得，$\angle AOB=360°-\angle OAP-\angle OBP-\angle P=360°-90°-90°-80°=100°$，∴$\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB=50°$.

〚变式训练〛

1. C　∵PA，PB 切⊙O 于 A，B 两点，CD 切⊙O 于点 E，∴$PB=PA=8$，$CA=CE$，$DB=DE$，∴△PCD 的周长 $=PC+CD+PD=PC+CE+DE+PD=PC+CA+DB+PD=PA+PB=16$.

2. 连接 OA，OP，则 $OA\perp PA$. 根据题意可得，$CA=CE$，$DE=DB$，$PA=PB$. ∵$PC+CE+DE+PD=18$ cm，∴$PC+CA+DB+PD=18$ cm，∴$PA=\frac{1}{2}\times18=9$(cm). ∵PA，PB 是⊙O 的切线，∴$\angle APO=\angle BPO=30°$. 在 Rt△$AOP$ 中，$PO=2AO$，故 $OA^2+9^2=(2AO)^2$，解得 $OA=3\sqrt{3}$(cm)，故⊙O 的半径为 $3\sqrt{3}$ cm.



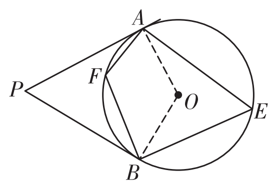
〚效果检测〛

1. A　∵PA，PB 都是⊙O 的切线，∴$PA=PB$. ∵$\angle APB=60°$，∴△PAB 是等边三角形，∴$AB=PA=10$.

2. D　∵⊙O 内切于四边形 $ABCD$，∴$AD+BC=AB+CD$. ∵$AB=10$，$BC=7$，$CD=8$，∴$AD+7=10+8$，解得 $AD=11$.

3. 20　145°　72.5°　∵PA，PB，EF 分别切⊙O 于 A，B，D，∴$PA=PB$，$AE=ED$，$DF=BF$，∴△PEF 的周长是 $PE+PF+EF=PE+EA+PF+BF=PA+PB=2PA=20$ cm. 连接 OE，∵ PA，PB，EF 分别切⊙O 于 A，B，D，∴$\angle PAO=\angle PBO=90°$，$\angle EOA=\angle EOP$，$\angle FOD=\angle FOB$，∴$\angle AOB=360°-90°-90°-35°=145°$，∴$\angle EOF=\frac{1}{2}\angle AOB=72.5°$.

4. 55°或 125°　如图，连接 OA，OB，则 $\angle OAP=\angle OBP=90°$，



∴$\angle BOA=180°-\angle P=110°$，∴$\angle AEB=\angle AOB=55°$. ∵四边形 $AEBF$ 是⊙O 的内接四边形，∴$\angle AFB=180°-\angle AEB=125°$. ①当 C 点在优弧 AB 上运动时，$\angle BCA=\angle AEB=55°$；②当 C 点在劣弧 AB 上运动时，$\angle BCA=\angle AFB=125°$.

5. (1)连接 OE，∵DA，DE 分别是⊙O 的切线，∴$\angle OAD=\angle OED=90°$，$\angle ADO=\angle ODE$，∴$\angle AOD=\angle EOD$.

同理可证：$\angle BOC=\angle EOC$.

∴$\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times180°=90°$，

即 $OC\perp OD$.

(2)∵AD，DC，BC 均为⊙O 的切线，∴$AD=ED$，$BC=CE$，$OE\perp CD$，∴$\angle OED=\angle CEO=90°$. ∵$\angle DOE+\angle COE=90°$，$\angle COE+\angle OCE=90°$，∴$\angle DOE=\angle OCE$，∴△$DEO$∽△$OEC$，∴$\frac{DE}{OE}=\frac{OE}{CE}$，∴$OE^2=ED\cdot EC$，∴$OE^2=AD\cdot BC=36$，∴$OE=6$，∴$OB=OE=6$.

2.5　直线与圆的位置关系（4）

〖前置诊断〗

1. B　角平分线上的点到角的两边的距离相等，$\therefore PE=PD=3$.

2. B　点 P 到$\angle AOB$ 两边的距离相等，$\therefore OC$ 是$\angle AOB$ 的平分线. $\therefore \angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB=20°$.

3. C　圆上的点到圆心的距离等于半径.

4. D　过半径外端点且垂直于半径的直线是圆的切线.

〖变式训练〗

1. C　$\angle C=180°-\angle A-\angle B=60°$.

$\because E,F$ 分别是 BC,AC 与圆 O 相切的切点，

$\therefore \angle OEC=\angle OFC=90°$，

$\therefore \angle EOF=360°-\angle OEC-\angle OFC-\angle C=120°$.

2. D　$\because \odot O$ 是$\triangle ABC$ 的内切圆，

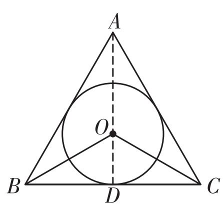
$\therefore BO,CO$ 是角平分线.

$\because \angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=110°$，

$\therefore \angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=55°$，

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=125°$.

3. D　如图，连接 AO 并延长，交 BC 于点 D，则点 D 为$\odot O$ 与 BC 的切点.



法一：$\because O$ 是等边三角形 ABC 的外心，$\therefore OB=2OD=2$，$\therefore BD=\sqrt{BO^2-OD^2}=\sqrt{3}$，$\therefore BC=2\sqrt{3}$.

法二：设等边三角形 ABC 的边长为 a，在直角三角形 ABD 中，

$\because AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

又$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}ra=\frac{3}{2}a$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3}{2}a$，解得 $a=2\sqrt{3}$.

〖效果检测〗

1. C　③错，三角形的外心是三边垂直平分线的交点，它到三角形三个顶点的距离相等.

2. C　$\because \odot O$ 是$\triangle ABC$ 的内切圆，$\therefore BO,CO$ 是角平分线. $\because \angle BOC=120°$，$\therefore \angle 1+\angle 2=180°-120°=60°$，$\therefore \angle ABC+\angle ACB=2(\angle 1+\angle 2)=120°$，$\therefore \angle A=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=60°$.

3. C　$\because \angle I=2\angle DEF=104°$，$\therefore \angle A=360°-\angle ADI-\angle AFI-\angle I=76°$.

4. A　由题意得，$AE=AF,BF=BD,CD=CE$. 设 $AE=AF=x,BF=BD=y,CD=CE=z$，则 $\begin{cases}x+y=13,\\y+z=14,\\z+x=9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=9,\\z=5.\end{cases}$

5. $4-2\sqrt{2}$　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=8$，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=4\sqrt{2}$.

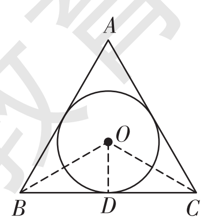
又因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AB\cdot r$，

所以 $2r+2r+2\sqrt{2}r=8$，

解得 $r=4-2\sqrt{2}$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　如图，作 $OD\perp BC$，连接 OB,OC. 由点 O 为等边三角形的内心得：$\angle ABO=\angle CBO=\angle BCO=30°$，所以 $OB=OC$，点 D 为 BC 的中点，即 $BD=1$.

设 $OD=r$，则 $OB=2r$. 根据勾股定理得 $1^2+r^2=(2r)^2$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



2.6　弧长与扇形面积（1）

〖前置诊断〗

1. B　圆的周长计算公式是 $C=2\pi r$，其中 r 是圆的半径.

2. B　在同圆中，相等的弧所对的圆心角相等，相等的圆心角所对的弧相等.

3. B　整个圆周的圆心角是 $360°$，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角度数是 $120°$，$\overset{\frown}{AB}$所对圆心角是 $360°$的$\frac{1}{3}$，所以$\overset{\frown}{AB}$的长也是圆周长的$\frac{1}{3}$.

〖变式训练〗

1. B　利用弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$可求得.

2. C　由弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$知，$r=\frac{180l}{\pi n}$.

3. $\frac{4}{3}\pi$　从开始到结束，点 B 经历了两次旋转，B 点的路径是两段弧. 第一次，点 B 绕点 C 顺时针旋转 120 度. 第二次，点 B 绕点 A 顺时针旋转 120 度，故路径长度是$\frac{120\times\pi\times1}{180}\times2=\frac{4}{3}\pi$.

〖效果检测〗

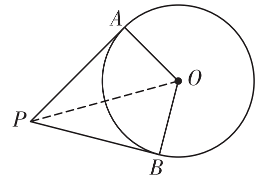
1. C　$l=\frac{n\pi r}{180}=\frac{60\pi\times9}{180}=3\pi(\text{cm})$.

2. B　将圆心角的度数和弧长代入公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$即可求得.

3. B　设原弧长为$\frac{n\pi R}{180}$，圆心角增加 $1°$后的弧长为$\frac{(n+1)\pi R}{180}$，增加的弧长为$\frac{(n+1)\pi R}{180}-\frac{n\pi R}{180}=\frac{\pi R}{180}$.

4. C　乙虫走过的圆弧 ACB 的半径为$\frac{1}{2}AB$，则乙虫走过的半圆 ACB 的长为$\frac{1}{2}AB\cdot\pi$. 设甲虫走过的四个小圆弧的半径分别为 a,b,c,d，则路径总长为 $\pi a+\pi b+\pi c+\pi d=(a+b+c+d)\pi=\frac{1}{2}AB\cdot\pi$.

5. 如图，连接 OP. ∵ PA，PB 为⊙O 的两条切线，$\angle APB=60°$，∴ $\angle OAP=\angle OBP=90°$，$\angle APO=\angle BPO=30°$. ∵ $PA=3\sqrt{3}$，∴ $OA=3$. 又∵ $\angle AOB=360°-90°-90°-60°=120°$，∴ $\overset{\frown}{AB}$的长 $l=\frac{120\pi\times3}{180}=2\pi$.



2.6　弧长与扇形面积（2）

〖前置诊断〗

1. C　圆的面积计算公式是 $S=\pi r^2$，其中 r 是圆的半径.

2. D　整个圆周的圆心角是 $360°$，阴影部分的圆心角度数是 $60°$，阴影部分圆心角度数是 $360°$的$\frac{1}{6}$，所以阴影部分的面积是圆面积的$\frac{1}{6}$.

〖变式训练〗

1. C　$S_{扇形}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{60\pi\times6^2}{360}=6\pi\ \text{cm}^2$.

2. B　$S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times2\times3=3$.

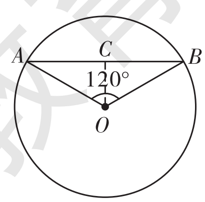
3. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　阴影部分面积等于三角形 ABC 的面积减去扇形 AMN 的面积.

〖效果检测〗

1. D　$S_{扇形}=\frac{90\pi\times8^2}{360}=16\pi(\text{cm}^2)$.

2. C　$S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

3. 如图，过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，则 $AC=BC=2\sqrt{3}$ cm.



$\because \angle AOB=120^\circ, OA=OB, \therefore \angle A=30^\circ$,

$\therefore AO=2CO$.

在直角三角形 ACO 中，$AC^2+OC^2=AO^2$，

$\therefore (2\sqrt{3})^2+OC^2=(2CO)^2$，

$\therefore CO=2$ cm，$AO=4$ cm.

$S_{扇形OAB}=\dfrac{120\pi\times 4^2}{360}=\dfrac{16\pi}{3}(\text{cm}^2)$.

4. 由$\overset{\frown}{CD}$的长度为 6πm，$OC=9$ m，得$\dfrac{n\pi\times 9}{180}=6\pi$，得圆心角$\angle AOB=120^\circ$. 所以阴影部分面积为 $S_{扇形OAB}-S_{扇形OCD}=\dfrac{120\pi\times 12^2}{360}-\dfrac{120\pi\times 9^2}{360}=21\pi(\text{m}^2)$.

2.7　正多边形与圆

〖前置诊断〗

1. C　六边形的内角和为$(6-2)\times 180^\circ=720^\circ$.

2. D　A, B, C, D 是$\odot O$ 的四等分点，则$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$. 所以 $AB=BC=CD=DA$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$. 又 90°圆周角所对的弦是直径，所以 AC 是$\odot O$ 的直径. 故四种说法均正确.

3. B　因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，根据相等的弦所对的弧相等、所对的圆心角相等，可知 A、C 正确. 因为等边三角形同一边上的中线、高、角平分线三线合一，所以点 O 既是外心也是内心，D 正确. $\angle AOC=120^\circ$，所以$\triangle AOC$ 不是等边三角形.

〖变式训练〗

1. 我们可以先作出圆的六等分点，再顺次连接不相邻的三个点，得到的便是圆内接正三角形. 具体作法如下(如图)：

(1)作半径为 2 cm 的$\odot O$；

(2)作出$\odot O$ 的六等分点 A, B, C, D, E, F；

(3)顺次连接不相邻的三点 A, C, E，则$\triangle ACE$ 是半径为 2 cm 的圆的内接正三角形.

如图 2，过点 O 作 $OH\perp EC$，垂足为 H，

则$\angle OCH=30^\circ$，

$\therefore OH=\dfrac{1}{2}OC=1$ cm，

$\therefore CH=\sqrt{OC^2-OH^2}=\sqrt{3}$ cm

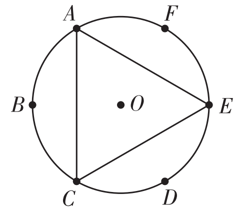


图 1

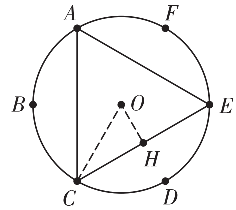


图 2

〖效果检测〗

1. A　设圆的半径为 a，可求得内接正三角形的边长为$\sqrt{3}a$，内接正方形的边长为$\sqrt{2}a$.

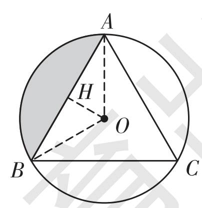
2. D　正多边形的一个外角等于 30°，则它的每一个内角都为 150°. 设它的边数为 n，则$(n-2)\times 180^\circ=n\times 150^\circ$，解得 $n=12$，正十二边形的内角和为 $1\ 800^\circ$.

3. C　正六边形两平行边间的距离为 1，即圆心到一条边的距离为$\dfrac{1}{2}$，据此可求得其边长为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 10　圆内接正 n 边形每一条边所对的圆心角均为$\dfrac{360^\circ}{n}$，所以边数为 10.

5. $\left(\dfrac{16}{9}\pi-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ cm^2　如图，阴影部分面积等于扇形 OAB 的面积减去三角形 AOB 的面积. 连接 AO, BO，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H，

则 $AH=\dfrac{1}{2}AB=2$ cm，$\angle OAH=30^\circ$.



$\therefore AO=2OH$.

在 Rt$\triangle AOH$ 中，$AO^2=OH^2+AH^2$，即$(2OH)^2=OH^2+4$，

解得 $OH=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ cm，

$\therefore AO=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OH=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm^2.

$\because \angle AOB=120°$，

$\therefore S_{扇形OAB}=\dfrac{120\pi\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}{360}=\frac{16}{9}\pi(\text{cm}^2)$，

$\therefore$阴影部分面积为$\left(\frac{16}{9}\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ cm^2.

本章整理提升

〚变式训练〛

1. 分析：题中的弦 AB，CD 都比圆 O 的直径小，所以 AB 和 CD 可能在圆心的同侧，也可能在圆心的异侧.

解：分两种情况考虑.

(1)当两条弦位于圆心 O 一侧时，如图 1 所示，过 O 作 $OE\perp AB$，交 AB 于点 E，交 CD 于点 F，连接 OA，OC.

$\because AB/\!/CD$，

$\therefore OE\perp CD$，

$\therefore E$，F 分别为 AB，CD 的中点，

$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB=3$ cm，

$CF=DF=\frac{1}{2}CD=4$ cm.

在 Rt$\triangle COF$ 中，$OC=5$ cm，$CF=4$ cm，

根据勾股定理得：$OF=3$ cm.

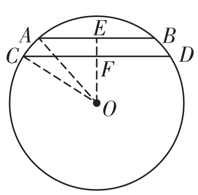
在 Rt$\triangle AOE$ 中，$OA=5$ cm，$AE=3$ cm，

根据勾股定理得：$OE=4$ cm.

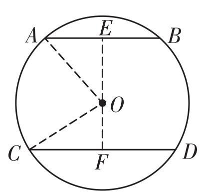
$\therefore EF=OE-OF=4-3=1$(cm)

(2)当两条弦位于圆心 O 两侧时，如图 2 所示，同理可得 $EF=OE+OF=4+3=7$(cm).

综上，弦 AB 与 CD 的距离为 7 cm 或 1 cm.



1



2

反思：此题考查了垂径定理、勾股定理，利用了分类讨论的思想，熟练掌握垂径定理是解本题的关键.

2. 分析：如图 1，动点 P 到切线 BC 的所有垂线段中，哪条等于半径 PC？此时 $P(3,0)$，$t=1$.

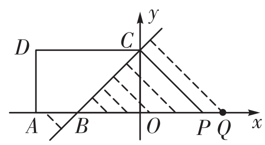


图 1

如图 2，动点 P 到切线 DC 的所有垂线段中，哪条等于半径 PC？此时 $P(0,0)$，$t=4$.

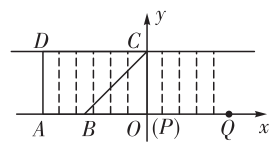


图 2

如图 3，动点 P 到切线 AD 的距离就是 PA，PA 与半径 PC 相等，点 P 在 AC 的垂直平分线上，此时在 Rt$\triangle PCO$ 中，$PC=PA$，$PO=5-PA$，$CO=3$，由勾股定理解得 $AP=3.4$，所以 $QP=5.6$，$t=5.6$.

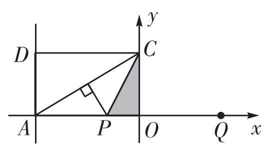


图 3

解：若⊙P 与四边形 $ABCD$ 的边相切时，有以下三种情况：

①当⊙P 与 BC 相切于点 C 时，如图 4，有 $\angle BCP=90°$. 又 $\angle BCO=45°$，从而 $\angle OCP=45°$，得到 $OP=3$，此时 $QP=QO-OP=4-3=1$，$t=1$ s.

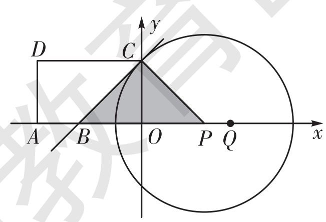


图 4

②当⊙P 与 CD 相切于点 C 时，如图 5，有 $PC\perp CD$，即点 P 与点 O 重合，此时 $QP=QO=4$，$t=4$ s.

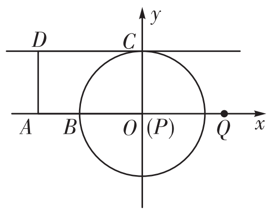


图 5

③当⊙P 与 AD 相切时，如图 6，由题意得 $\angle DAO=90°$，点 A 为切点.

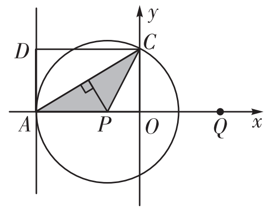


图 6

在 Rt△PCO 中，设 $PA=PC=r$，则 $PO=5-r$，$CO=3$，于是有 $(5-r)^2+3^2=r^2$，解得 $r=3.4$，所以 $QP=QA-PA=9-3.4=5.6$，$t=5.6$ s.

∴运动时间 t 为 1 s 或 4 s 或 5.6 s.

本章达标测试

一、选择题

1. B　直径是圆中最长的弦，所以 A 选项的说法正确；在同圆或等圆中，长度相等的两条弧是等弧，所以 B 选项的说法错误；面积相等的两个圆的半径相等，则它们是等圆，所以 C 选项的说法正确；半径相等的两个半圆是等弧，所以 D 选项的说法正确.

2. B　∵⊙O 的半径为 5 cm，点 A 到圆心 O 的距离为 3 cm，即点 A 到圆心 O 的距离小于圆的半径，∴点 A 在⊙O 内.

3. D　由题意可得，三个圆心角的和为 360°. ∵三个圆心角的度数比为 1∶2∶3，∴最大的圆心角度数为 $360°\times\frac{3}{6}=180°$.

4. B　∵AC 平分 $\angle BAD$，∴$\angle BAC=\angle DAC$，

∴$BC=CD$，故 B 选项正确.

5. A　∵$OA=OC$，∴$\angle C=\angle OAC=32°$. ∵BC 是直径，∴$\angle BAC=90°$，∴$\angle B=90°-32°=58°$.

6. A　连接 OA，∵PA 为⊙O 的切线，A 为切点，∴$\angle OAP=90°$. ∵$\angle P=30°$，$OB=3$，∴$OA=3$，则 $OP=6$，故 $BP=6-3=3$.

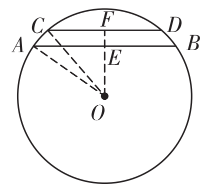
7. A　∵$AB=AC$，$\angle BCA=65°$，∴$\angle CBA=\angle BCA=65°$，$\angle A=50°$. ∵$CD\parallel AB$，∴$\angle ACD=\angle A=50°$. 又∵$\angle ABD=\angle ACD=50°$，∴$\angle DBC=\angle ABC-\angle ABD=15°$.

8. C　设⊙O 的半径为 r. 在 Rt△ADO 中，$AD=5$，$OD=r-1$，$OA=r$，则有 $r^2=5^2+(r-1)^2$，解得 $r=13$，∴⊙O 的直径为 26 寸.

9. B　∵$\angle BCD=30°$，∴$\angle BOD=60°$.

∴阴影部分的面积是 $\frac{60\times\pi\times2^2}{360}=\frac{2\pi}{3}$.

10. D　如图所示，连接 OA，OC. 作直线 $OF\perp AB$ 于 E，交 CD 于 F，$AB\parallel CD$，则 $EF\perp CD$.



∵$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，

∴$AE=\frac{1}{2}AB=8$，$CF=\frac{1}{2}CD=6$，

根据勾股定理，得 $OE=\sqrt{AO^2-AE^2}=6$，$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=8$，所以当 AB 和 CD 在圆心的同侧时，则 $EF=OF-OE=2$，当 AB 和 CD 在圆心的异侧时，则 $EF=OF+OE=14$.

二、填空题

11. 60°　∵$OA=OB=3$ cm，$AB=3$ cm，

∴$OA=OB=AB$，

∴△ABO 是等边三角形，且 $\angle AOB=60°$.

12. 2π　根据题意，扇形的弧长为 $\frac{120\pi\times3}{180}=2\pi$.

13. 125°　∵⊙O 是△ABC 的内切圆，

∴BO 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$，

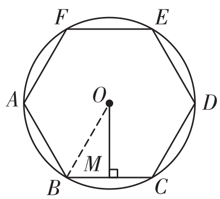
$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=35^\circ$,

$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB=20^\circ$,

$\therefore \angle BOC=180^\circ-\angle OBC-\angle OCB=180^\circ-35^\circ-20^\circ=125^\circ$.

14. $3\sqrt{3}$　如图,连接 OB. ∵六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 内接正六边形,$\therefore \angle BOM=\frac{360^\circ}{6\times 2}=30^\circ$,

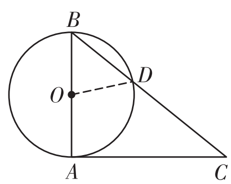
$\therefore OM=OB\cdot\cos\angle BOM=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.



15. $\frac{10}{3}\pi$　如图,连接 OD. $\because \angle B=50^\circ$,

$\therefore \angle AOD=2\angle B=100^\circ$,

$\therefore \overset{\frown}{AD}$的长为$\frac{100\pi\times 6}{180}=\frac{10}{3}\pi$.



三、解答题

16. (1)在$\triangle OCE$中,

$\because \angle CEO=90^\circ, \angle EOC=60^\circ, OC=2$,

$\therefore OE=\frac{1}{2}OC=1$,

$\therefore CE=OC\cdot\sin\angle EOC=\frac{\sqrt{3}}{2}OC=\sqrt{3}$.

$\because OA\perp CD$,

$\therefore CE=DE$,

$\therefore CD=2\sqrt{3}$.

(2)$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot EC=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

$\therefore S_{阴影}=\frac{1}{2}\pi\times 2^2-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$.

17. (1)$\because \angle ABC$与$\angle ADC$都是弧 AC 所对的圆周角,$\therefore \angle ADC=\angle B=60^\circ$.

(2)$\because AB$是$\odot O$的直径,

$\therefore \angle ACB=90^\circ$,

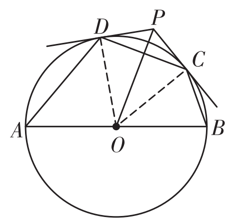
$\therefore \angle BAC=30^\circ$.

$\therefore \angle BAE=\angle BAC+\angle EAC=30^\circ+60^\circ=90^\circ$,即 $BA\perp AE$.

$\therefore AE$是$\odot O$的切线.

18. (1)如图,连接 OC, OD,

$\therefore OC=OD$.



$\because PD, PC$是$\odot O$的切线,

$\therefore PD=PC$,即 P 在 CD 的垂直平分线上.

$\because OD=OC$,

$\therefore OP\perp CD$.

(2)$\because OA=OD=OC=OB=2$,

$\therefore \angle ADO=\angle DAO=50^\circ, \angle BCO=\angle CBO=70^\circ$,

$\therefore \angle AOD=80^\circ, \angle BOC=40^\circ$,

$\therefore \angle COD=60^\circ$,

$\therefore \triangle COD$是等边三角形.

由(1)知,$OP\perp CD$,$\therefore \angle DOP=\angle COP=30^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODP$ 中,$OP=\frac{OD}{\cos 30^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

19. (1)$\because BD$为$\odot O$直径,

$\therefore \angle DEB=\angle DFB=90^\circ$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD/\!/BC$,

$\therefore \angle FBC+\angle DFB=180^\circ$,

$\therefore \angle FBC=\angle DFB=\angle EDA=90^\circ$,

∴四边形 $BEDF$ 为矩形.

(2)直线 CD 与$\odot O$的位置关系是相切,

理由是:$\because BD^2=BE\cdot BC$,

$\therefore \frac{BD}{BE}=\frac{BC}{BD}$.

$\because \angle EBD=\angle DBC$,

$\therefore \triangle BED\backsim\triangle BDC$,

$\therefore \angle BDC=\angle BED=90^\circ$,

即 $BD\perp CD$,$\therefore CD$ 与⊙O 相切.

20. (1)$\because PA$ 是⊙O 的切线,$\therefore OA\perp PA$.

在 Rt$\triangle AOP$ 中,$\angle AOP=90^\circ-\angle APO=90^\circ-30^\circ=60^\circ$,$\therefore \angle ACP=\dfrac{1}{2}\angle AOD=30^\circ$.

$\because \angle APO=30^\circ$,$\therefore \angle ACP=\angle APO$,

$\therefore \triangle ACP$ 是等腰三角形.

(2)①$\because$ 四边形 $AOBD$ 是菱形,$\therefore OA=AD=OD$,$\therefore \angle AOP=60^\circ$,$\angle APO=90^\circ-\angle AOP=30^\circ$,$\therefore OP=2OA$,$DP=OP=1$ cm.

②$\because$ 四边形 $AOBP$ 是正方形,$\therefore \angle AOP=45^\circ$,$\therefore OA=PA=1$ cm,$OP=\sqrt{2}$ cm,$\therefore DP=OP-OD=(\sqrt{2}-1)$cm.

第 3 章　投影与视图

3.1　投影

〖前置诊断〗

1. A

2. (1)A　由于太阳距离地球很远,从太阳射到地面的光线可以看成平行光线.

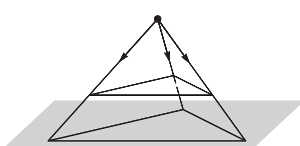
(2)B　由于路灯离地面很近,所以路灯发出的光线可以看作由一个点向四周发出.

3. (1)A　太阳光是平行光线,当物体与地面平行时,太阳光下物体在地面的影子与原来的物体形状、大小都一样.

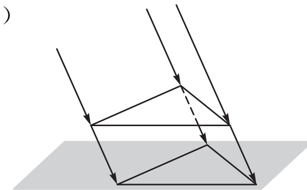
(2)B　路灯的光线可以看作由一个点发出,当物体与地面平行时,路灯下物体在地面的影子形状和原来的物体一样,但比原来的物体大.

〖变式训练〗

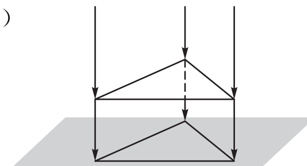
1. (1)



(2)



(3)

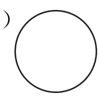


2. 图 1 是中心投影;图 2 是平行投影,但不是正投影;图 3 是平行投影,且是正投影.

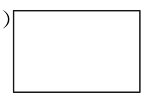
〖效果检测〗

1. 早上太阳光照射物体产生的影子较长,后逐渐变短,到中午最短,到下午又逐渐变长. 故可知第二幅图是下午拍的.

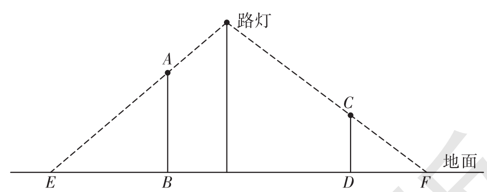
2. (1)



(2)



3. 如图,过路灯顶端与点 A 作射线,交地面于点 E,则线段 BE 是木棍 AB 的影子;过路灯顶端与点 C 作射线,交地面于点 F,则线段 DF 是木棍 CD 的影子.



3.2　直棱柱、圆锥的侧面展开图

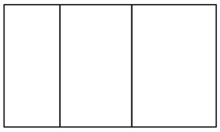
〖前置诊断〗

1. A　2. A

3. D　圆柱的侧面展开后是一个矩形,矩形的长等于圆柱的底面圆周长,宽等于圆柱的高. 所以矩形的长为 $2\pi\times 2=4\pi$ cm,矩形的宽为 6 cm.

〖变式训练〗

1. 侧面展开图为:



$S_{侧}=(2.5+2+1.5)\times 3=18.$

2. 圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长 $2\pi r$，扇形的半径等于圆锥的母线长 l，根据扇形面积公式得到圆锥的侧面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l=\pi rl$，代入数据，$S=\pi\times 5\times 10=50\pi(\mathrm{cm}^2)$.

3. 由侧面展开图可知，正六棱柱的侧棱长为 3，底面是边长为 2 的正六边形，其侧面积 $S_{侧}=2\times 6\times 3=36$.

正六棱柱的底面正六边形可以看作是由 6 个边长为 2 的等边三角形组成，所以该正六边形的面积为$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 60^\circ\times 6=6\sqrt{3}$，即正六棱柱的一个底面面积 $S_{底}=6\sqrt{3}$.

故正六棱柱的表面积 $S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=36+12\sqrt{3}$，体积 $V=S_{底}\cdot h=6\sqrt{3}\times 3=18\sqrt{3}$.

〖效果检测〗

1. 72　直棱柱的上下两个底面是边长为 2 的正方形，侧面展开图是一个边长为 8 的正方形，它的表面积为 $2\times 2+2\times 2+8\times 8=72$.

2. 9　圆锥的底面周长为 $2\pi\times 6=12\pi$，所以圆锥侧面展开图的弧长为 12π.

设圆锥的母线长为 r，则$\frac{240\pi\times r}{180}=12\pi$，解得 $r=9$ cm.

3. 因为底面半径为 r，所以 $AB=2r$. 由 $\angle APB=90^\circ$，$PA=PB$ 可求得母线长 $l=PA=\sqrt{2}r$.

所以圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi r\cdot\sqrt{2}r=\sqrt{2}\pi r^2$，底面积为 πr^2，所以表面积为$\sqrt{2}\pi r^2+\pi r^2$.

3.3　三视图（1）

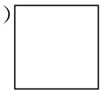
〖前置诊断〗

1. A　当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与该面的形状、大小完全相同. 在第一个正投影中，纸板 $ABCD$ 平行于投影面，所以第一个正投影的像与纸板 $ABCD$ 的形状和大小一样.

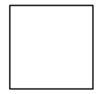
2. A

〖变式训练〗

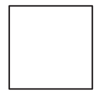
1. (1)



主视图

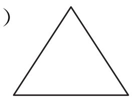


左视图

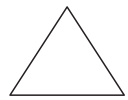


俯视图

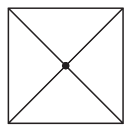
(2)



主视图

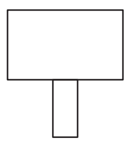


左视图

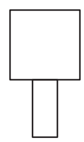


俯视图

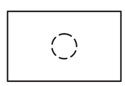
2.



主视图



左视图

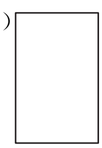


俯视图

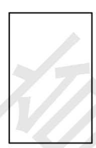
3. D

〖效果检测〗

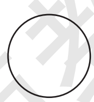
1. (1)



主视图

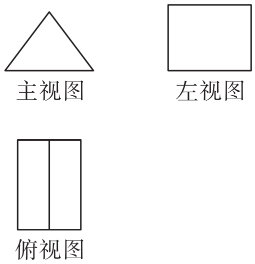


左视图

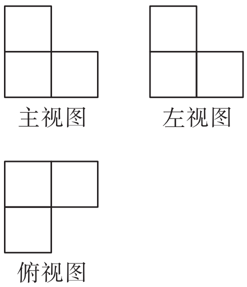


俯视图

(2)



2. 如图所示



3. B　圆柱的主视图是矩形，圆锥的主视图是三角形，球的主视图是圆，正方体的主视图是正方形.

4. C　从左面看，空心圆柱有内壁，但空心圆柱的内壁看不见，要用虚线表示.

3.3　三视图（2）

〖前置诊断〗

1. D　圆柱的主视图是矩形，俯视图是圆；圆锥的主视图是三角形，俯视图是圆（含圆心）；直三棱柱的主视图是矩形，俯视图是三角形；长方体的主视图和俯视图都是矩形.

〖变式训练〗

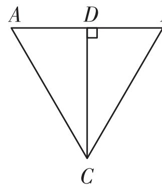
1. B　由俯视图和左视图均为矩形可知，该立体图形是棱柱；由主视图为三角形可知，该立体图形是三棱柱.

2. C　结合三视图可知，该立体图形是两个圆柱叠加.

3. 从俯视图看共有三个正方形，说明下面一层共有三个小正方体，主视图和左视图的上面一层左边只有一个小正方形，说明上面一层只有一个小正方体，所以此几何体共有 4 个小正方体.

4. (1)符合这个零件的几何体是直三棱柱.

(2)如图所示，将三角形的顶点和高标上字母.

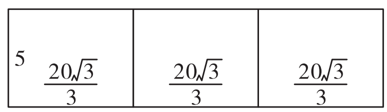


$\because \triangle ABC$ 是正三角形，$CD \perp AB$，$CD=10$，

$\therefore AC=\dfrac{CD}{\sin 60^\circ}=\dfrac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 表面积 $S=5\times\left(\dfrac{20\sqrt{3}}{3}+\dfrac{20\sqrt{3}}{3}+\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right)+2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\times 10=\dfrac{500\sqrt{3}}{3}$.

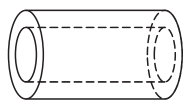
侧面展开图如下：



〖效果检测〗

1. A

2. 这是一个空心圆柱，如图所示.



3. B　由俯视图可知，最下面一层有 4 个棱长为 1 的正方体；结合主视图和左视图可知，第二层有 1 个棱长为 1 的正方体，所以总共有 5 个棱长为 1 的正方体，体积为 5.

4. 根据该密封纸盒的三视图知道它是一个直六棱柱.

$\because$ 其高为 12 cm，底面边长为 5 cm，

$\therefore$ 侧面积为 $6\times5\times12=360(\text{cm}^2)$，

密封纸盒上、下底面的面积和为 $12\times\dfrac{1}{2}\times5\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=75\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，

$\therefore$ 表面积为 $(75\sqrt{3}+360)\ \text{cm}^2$.

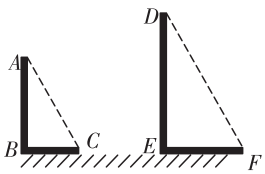
本章整理提升

〖变式训练〗

1. 分析：(1)由于点 A 在地上的影子为点 C，所以光线沿直线 AC 的方向，太阳光是平行光线，射在 DE 上的光线与 AC 平行，由此可画出 DE 在太阳光下的影子 EF.

(2)根据 $AB\parallel DE$，$AC\parallel DF$，可得 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，所以$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$，由此可求 DE 的长.

解：(1)如图所示，EF 即为所求.



(2)由题意可得：$AB\parallel DE$，$AC\parallel DF$，

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，

$\therefore\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$，

$\therefore\dfrac{5}{3}=\dfrac{DE}{6}$，

解得：$DE=10$，

答：DE 的长为 10 m.

2. 分析：已知母线长 l 和底面半径 r，圆锥的表面积$S_{表面}=S_{侧面}+S_{底面}=\pi rl+\pi r^2$.

解：$S_{表面}=\pi rl+\pi l^2=\pi\times5\times10+\pi\times5^2=50\pi+25\pi=75\pi(\text{cm}^2)$.

反思：圆锥的侧面展开图是扇形，扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长，扇形的半径长等于圆锥的母线长.

3. A　结合几何体发现，从主视方向看到上面有一个正方形，下面有三个正方形，故选 A.

反思：解答此题的关键是掌握三视图的画法，知道主视图是由主视方向看到的平面图形，俯视图是从俯视方向看到的图形，侧视图是从侧视方向看到的图形.

4. B　从主视图知，该物体是一个立体图形叠加在另外一个立体图形上面，分别确定两个立体图形即可. 将三视图上下分离开来，容易知道，上面的立体图形是圆柱，下面的立体图形是长方体.

5. 分析：解决这个问题分两步走. 第一步，确定几何体的形状和大小. 俯视图为正六边形，主视图和左视图都是矩形，可得到此几何体为直六棱柱，其底面边长是 2 cm，高是 3 cm.

第二步，计算几何体的侧面积. 直六棱柱的侧面展开图是矩形，矩形的长是六棱柱的底面周长，矩形的宽是六棱柱的高，所以直六棱柱的侧面积等于底面周长乘以高.

解：由三视图可知，几何体为直六棱柱. 直六棱柱的底面边长是 2 cm，高是 3 cm.

所以其底面周长 $C=2\times6=12(\text{cm})$，

所以侧面积 $S_{侧面}=12\times3=36(\text{cm}^2)$.

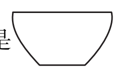
本章达标测试

一、选择题

1. A　主视图是从正面看得到的视图. 从正面看上边是一个三角形，下边是一个矩形.

2. A　正方形木板在地面上的投影可能是平行四边形、矩形、正方形，不可能是梯形.

3. C　小亮从 A 走到路灯正下方的过程中，影子逐渐变短；从路灯正下方走到 B 的过程中，影子逐渐变长. 所以他在地上的影子先变短后变长.

4. C　碗从正面看是，注意两侧是曲线，不是线段.

5. C　由主视图可知，长方体的高为 3；结合主视图和俯视图可知，俯视图中正方形的对角线长为 $2\sqrt{2}$，所以长方体底面正方形的边长为 2，其面积为 4，所以长方体的体积为 12.

6. B　从俯视图可以看出几何体的下面部分为长方体，上面部分为圆柱，且与下面的长方体的宽度相同. 只有 B 满足这两点.

7. A　由俯视图知，底层有 3 个小正方体，结合主视图和左视图知，第二层有 1 个小正方体，总共

有 4 个小正方体.

8. B　A、C、D 选项的左视图都是等腰三角形，B 选项左视图是矩形.

9. C

10. D　该物体是两个长方体叠放在一起形成的.

二、填空题

11. 4　从正面看有 4 个小正方形，平面图形面积是 $4\times1\times1=4$.

12. π 或 4π　圆柱的侧面展开图是矩形，本题未说明矩形的哪条边是圆柱的底面圆展开所得，所以圆柱的底面圆周长为 2π 或 4π，可求得其半径为 1 或 2，底面积为 π 或 4π.

13. $16+12\pi$　由三视图可知，这个几何体是底面半径为 2、高为 4 的半个圆柱，其表面由上下两个半径为 2 的半圆，底面半径为 2，高为 4 的圆柱侧面的一半以及边长为 4 的正方形组成，其面积分别为 2π，2π，8π 和 16，则该几何体的表面积是 $16+12\pi$.

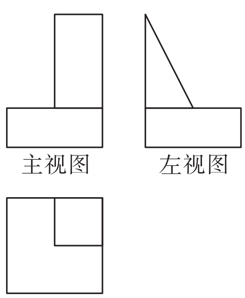
14. 15π　圆锥的高为 4 cm，底面圆的半径为 3 cm，

所以圆锥的母线长为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$(cm)，

所以此圆锥的侧面积是 $\pi\cdot3\cdot5=15\pi(cm^2)$.

三、解答题

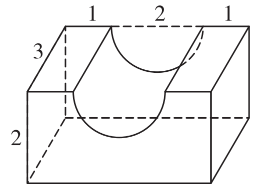
15. 如图所示.



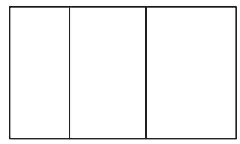
主视图　左视图

俯视图

16. 由三视图可知：该几何体是一个长、宽、高分别为 4、3、2 的长方体在上底面中间挖去一个直径为 2 的半圆柱.



17. 侧面展开图为：



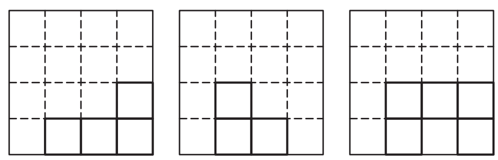
$S_{侧}=(2.5+2+1.5)\times3=18$.

18. (1)根据主视图和左视图为矩形判断出是柱体，根据俯视图是圆可判断出这个几何体是圆柱.

(2)$S_{侧}=2\pi\times1\times3=6\pi$.

19. (1)6　24

(2)如图所示：



主视图　左视图　俯视图

20. (1)圆锥的表面积为 $\pi\cdot2^2+\pi\cdot2\cdot4=12\pi(cm^2)$；

(2)圆锥的侧面积为 $\frac{90\cdot\pi\cdot6^2}{360}=9\pi(cm^2)$；

(3)设圆锥的母线长为 R，

根据题意得 $\pi\cdot3\cdot R=15\pi$，解得 $R=5$，

所以圆锥的高为 $\sqrt{5^2-3^2}=4$.

第 4 章　概率

4.1　随机事件与可能性（1）

〖前置诊断〗

1. C　2035 年北京的天气是不确定的，可能会下雪，也可能不会下雪，现在是无法确定的.

2. D　掷一枚均匀的骰子，只可能出现点数 1，2，3，4，5，6 中的一种，不可能出现点数为 7 的

情况.

3. ①②③　买一张福利彩票,开奖时有可能中奖,也有可能不中奖;抛一枚硬币,着地后有可能正面朝上,也有可能反面朝上;从装有 5 个红球、2 个黄球的盒子中任意取出一个球,有可能是黄球,有可能是红球;掷两枚正方体骰子,出现的点数之和最小是 2.

〖变式训练〗

1. C　掷一枚均匀的硬币,有两种可能的结果——正面朝上或者反面朝上,所以正面朝上或反面朝上是必然事件;同时,掷一枚均匀的硬币不可能同时出现正面朝上和反面朝上,所以 D 选项属于不可能事件,而 A,B 选项都属于随机事件.

2. 必然事件为(3);不可能事件为(5);确定性事件为(3)(5);随机事件为(1)(2)(4)(6).

〖效果检测〗

1. C　经过两点画一条直线,过平面内任意三点画一个圆都是确定的,它们是必然事件;两直线平行,内错角不相等也是确定的,它不可能发生,所以它是不可能事件;后天下雨可能发生,也可能不发生,它是随机事件.

2. C　掷一枚均匀的硬币,出现正面朝上或反面朝上是随机的. 在连续投掷 10 次都出现正面朝上的情况下,第 11 次出现反面朝上也是有可能的,所以它是随机事件.

3. 必然事件为(1)(3)(6);不可能事件为(2);随机事件为(4)(5).

4.1　随机事件与可能性(2)

〖前置诊断〗

1. B　掷一枚硬币,落地后有可能正面朝上,也有可能反面朝上,它是随机事件. 掷一枚正方体骰子,出现的点数只可能是 1,2,3,4,5,6 之中的一种,出现的点数小于 7,它是必然事件. 打开电视机,可能正播放广告,也可能没播放广告,它是随机事件. 从一副扑克牌中任意抽取一张,有可能抽出的是梅花 5,也有可能不是梅花 5,它是随机事件.

2. A　红球的个数比白球多,所以摸到红球的可能性大.

3. C　由于硬币是均匀的,没有理由说明哪个面朝上的可能性更大,所以二者的可能性是一样大的.

〖变式训练〗

1. D　从袋中取出一个红球是随机事件,并不足以判定袋中哪种球多,因为 A,B,C 三种情况都有可能.

2. B　事件“取出 1 红 2 白”和事件“取出 2 红 1 白”都有两种可能,事件“取出 1 红 1 白 1 蓝”有 4 种可能,而事件“1 蓝 2 白”只有 1 种可能,所以其发生的可能性最小.

〖效果检测〗

1. D　购买彩票是否中奖是随机的,每张彩票中奖的可能性大小是相同的,买得越多中奖的可能性就越大.

2. C　掷一枚均匀的骰子,“点数为奇数”有 3 种可能的结果,“点数大于 2”有 4 种可能的结果,“点数小于 3”有 2 种可能的结果,“点数为偶数”有 3 种可能的结果. 因为事物本身的属性,每种可能的结果发生机会均等,故“点数小于 3”发生的可能性最小.

3. $P(3)>P(4)$　八个扇形区域,3 所在的区域有 3 个,4 所在的区域只有 2 个,故 $P(3)>P(4)$.

4. 填表如下:

随机事件	所有可能的情况
和为 7	(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)
和为 9	(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)

这个游戏不公平,因为“和为 7”的情况有 6 种,

而"和为 9"的情况只有 4 种,甲方赢的可能性更大.事件发生的可能性大并不代表事件一定发生,事件发生的可能性小也不代表一定不发生,所以赢的可能性大的一方也不一定会赢.

4.2　概率及其计算(1)

〖前置诊断〗

1. A　掷一枚均匀的硬币,"正面朝上"和"反面朝上"的可能性是一样大的,很自然地用$\frac{1}{2}$表示其可能性的大小.
2. B　由于这些球只有颜色外不同,随机摸出每一个球的可能性是一样大的.同时,很自然地用$\frac{1}{6}$表示摸到任意一个球的可能性大小,故摸到一个黄球的可能性大小为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
3. A　由于转盘被均匀地分成 6 份,其中阴影部分占了 3 份,指针指向阴影部分的可能性大小为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

〖变式训练〗

1. C　大于 2 的有 3、4、5,共 3 个,故所求概率为$\frac{3}{5}$.
2. $\frac{1}{4}$　根据矩形的性质,矩形中由对角线分成的四个三角形均为同底等高的三角形,故其面积相等.易知阴影部分的面积为矩形面积的$\frac{1}{4}$,故飞镖落在阴影区域的概率为$\frac{1}{4}$.

〖效果检测〗

1. B　1 到 9 中偶数有 4 个,取到偶数的概率为$\frac{4}{9}$.
2. A　白色的小正方形有 12 个,能构成轴对称图形的情况有 2 种,
故使图中阴影部分的图形构成一个轴对称图形的概率是$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.
3. $\frac{2}{5}$　根据三角形两边之和大于第三边,两边之和小于第三边知,能钉成三角形相框的有 10 cm,12 cm 长的木棒.故能钉成三角形相框的概率为$\frac{2}{5}$.
4. $\frac{17}{36}$　设正方形的 $ABCD$ 的边长为 a,则 $BF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$,$AN=NM=MC=\frac{\sqrt{2}}{3}a$,∴阴影部分的面积为$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{17}{36}a^2$,故小鸟在花圃上的概率为$\frac{17}{36}$.

4.2　概率及其计算(2)

〖前置诊断〗

1. D　掷两枚均匀的骰子,每一枚出现的点数都是 1,2,3,4,5,6 中的一种,故 P 不可能是 14.
2. C　三个学生都有可能不被选中担任班级数学课代表,共 3 种情况,故共有 3 种不同的选法.
3. B　四个人分成两组的情况有(AB,CD),(AC,BD),(AD,BC),共 3 不同的分法.

〖变式训练〗

1. (1)根据题意列表如下:

	1	2	3	4
1		(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)		(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)		(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	

由以上表格可知:有 12 种可能结果.
(2)在(1)中的 12 种可能结果中,两个数字之积为奇数的只有 2 种,
所以 P(两个数字之积是奇数)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.
2. (1)根据题意列表如下:

	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

由以上表格可知：有 16 种可能结果；

(2)在(1)中的 16 种可能结果中，两个数字之积为奇数的只有 4 种，

所以 P(两个数字之积是奇数)$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

〖效果检测〗

1. $\frac{1}{6}$　$a>0,b\geqslant 0$ 时，直线 $y=ax+b$ 不经过第四象限，列表如下：

	−2	−1	1	2
−2		(−1,−2)	(1,−2)	(2,−2)
−1	(−2,−1)		(1,−1)	(2,−1)
1	(−2,1)	(−1,1)		(2,1)
2	(−2,2)	(−1,2)	(1,2)	

所有等可能的情况有 12 种，其中直线 $y=ax+b$ 不经过第四象限情况数有 2 种，

则 $P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. $\frac{7}{15}$　根据题意列表得：

	1	2	3	4	5
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)
8	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)
9	(1,9)	(2,9)	(3,9)	(4,9)	(5,9)
10	(1,10)	(2,10)	(3,10)	(4,10)	(5,10)
11	(1,11)	(2,11)	(3,11)	(4,11)	(5,11)

所有等可能的结果为 30 种，其中是 3 的倍数的有 14 种，则 $P=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$.

3. 列表得：

第 1 次 / 结果 / 第 2 次	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

∴P(数字之和为奇数)$=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，$P$(数字之和为偶数)$=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，

∴P(数字之和为奇数)$=P$(数字之和为偶数)，

∴这个游戏对双方公平.

4.2　概率及其计算(3)

〖前置诊断〗

1. D　可以通过列举法得到 6 条的路线，也可以利用简单的乘法原理，$2\times 3=6$(条).

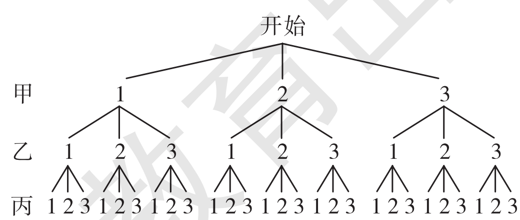
2. D　可以通过列举法得到 12 种不同的取法，但不是使用的列表法；也可以利用简单的乘法原理，$2\times 3\times 2=12$(种).

3. B　甲、乙两名学生到书店购书的情况有(A，A)，(A，B)，(B，B)，(B，A)(前者为甲，后者为乙)，而在不同书店购书的情况有 2 种，所以其概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

〖变式训练〗

1. (1)分别用 1，2，3 表示“石头”、“剪刀”、“布”三种手势.

画树状图得：



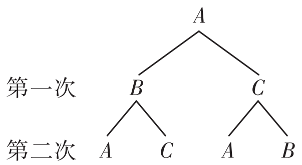
∵共有 27 种等可能的结果，一次比赛中三人不分胜负有 9 种情况，

∴一次比赛中三人不分胜负的概率是$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$.

(2)∵比赛中一人胜，二人负的有 9 种情况，

∴比赛中一人胜，二人负的概率是$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$.

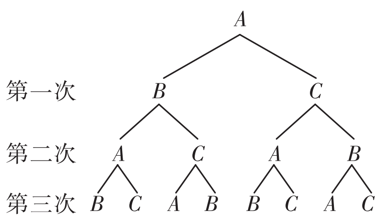
2. (1)画树状图得：



∵共有 4 种等可能的结果，两次传球后，球恰在 B 手中只有 1 种情况，

∴两次传球后，球恰在 B 手中的概率为$\frac{1}{4}$.

(2)画树状图得：



∵共有 8 种等可能的结果，三次传球后，球恰在 A 手中有 2 种情况，球恰在 B 手中有 3 种情况，球恰在 C 手中有 3 种情况，

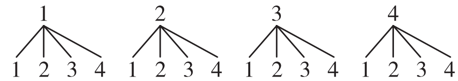
∴三次传球后，球恰在 A 手中的概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，球恰在 B 手中的概率为$\frac{3}{8}$，球恰在 C 手中的概率为$\frac{3}{8}$，

∴球在 B 或 C 手中的可能性更大.

〖效果检测〗

1. D　A 错误，小明还有可能是平；B 错误，小明胜的概率是$\frac{1}{3}$，输的概率也是$\frac{1}{3}$；C 错误，两人出相同手势的概率为$\frac{1}{3}$；D 正确，小明胜的概率和小亮胜的概率一样，都是$\frac{1}{3}$.

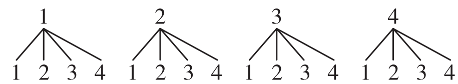
2. C　画树状图得：



共有 16 种等可能的结果，其中两次抽取的卡片上数字之积为偶数的结果数为 12，

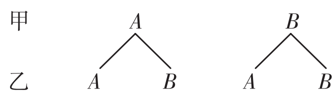
所以两次抽取的卡片上数字之积为偶数的概率为$\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

3. 公平　画树状图得：



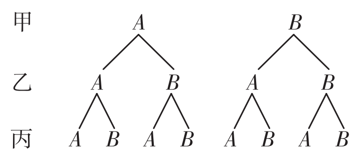
共有 16 种等可能的结果，其中两次数字之和为奇数的结果数为 8，两次数字之和为偶数的结果数为 8，所以小明胜的概率为$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，小亮胜的概率为$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，所以这个游戏公平.

4. (1)画树状图得：



所以甲、乙两人选择同一部电影的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

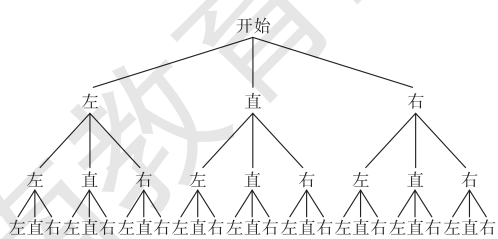
(2)画树状图得：



共有 8 种等可能的结果，其中甲、乙、丙三人选择同一部电影的结果数为 2，

所以甲、乙、丙三人选择同一部电影的概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

5. 列树状图得：



(1)三辆车全部直行的情况有 1 种,所以概率是$\frac{1}{27}$;

(2)两辆车向右转,一辆车向左转的情况有 3 种,所以概率是$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$;

(3)至少有两辆车向左转的情况有 7 种,所以概率是$\frac{7}{27}$.

4.3　用频率估计概率

〖前置诊断〗

1. C　掷硬币 10 次出现正面朝上的频数是 6,所以正面朝上的频率为$\frac{6}{10}=0.6$.

2. B　掷一枚均匀的硬币 100 次,“正面朝上”的次数是 45,则“反面朝上”的次数是 55,故“反面朝上”的频率为 0.55.

3. A　概率是随机事件固有的属性,它不随试验次数的变化而改变.掷一枚均匀的硬币,只有正面朝上、反面朝上两种等可能的结果,因此正面朝上的概率为$\frac{1}{2}$.

〖变式训练〗

1. (1)$a=1\ 900\div 2\ 000=0.95$,$b=2\ 850\div 3\ 000=0.95$.

(2)观察发现:随着大量重复试验,发芽频率逐渐稳定到常数 0.95 附近,所以该麦种的发芽概率约为 0.95.

(3)$100\times 0.95\times 87\%=82.65$(kg).

2. ②③　抛掷一枚均匀的硬币,因为“正面朝上”的概率是 0.5,所以抛掷该硬币 100 次时,大约有 50 次“正面朝上”,①结论错误;一个不透明的袋子里装有 4 个黑球,1 个白球,这些球除了颜色外无其他差别,从中随机摸出一个球,恰好是白球的概率是$\frac{1}{1+4}=0.2$,②结论正确;在同一条件下,随着射击次数的增加,某运动员“射中 9 环以上”的频率总是在 0.85 附近摆动,可以估计该运动员“射中 9 环以上”的概率是 0.85,③结论正确.

〖效果检测〗

1. 0.90　由击中靶心频率在 0.90 上下波动知,该射手击中靶心的概率的估计值是 0.90.

2. 15　设白球有 x 个,∵摸到红色球的频率稳定在 0.25 左右,∴摸到红色球的概率为0.25,∴$\frac{5}{x+5}=\frac{1}{4}$,解得 $x=15$,即白球有 15 个.

3. 1　∵经过大量重复投掷试验,发现小石子落在不规则区域的频率稳定在常数 0.25 附近,∴小石子落在不规则区域的概率为 0.25.∵正方形的边长为 2 m,∴面积为 4 m^2.设不规则部分的面积为 S,则$\frac{S}{4}=0.25$,得 $S=1(m^2)$.

4. (1)当 n 很大时,摸到白球的频率将会接近 0.6.

(2)因为当 n 很大时,摸到白球的频率将会接近 0.6,所以摸到白球的概率是$\frac{3}{5}$,摸到黑球的概率是$\frac{2}{5}$.

(3)因为摸到白球的概率是$\frac{3}{5}$,摸到黑球的概率是$\frac{2}{5}$,所以口袋中白球有 $20\times\frac{3}{5}=12$(个),黑球有 $20\times\frac{2}{5}=8$(个).

本章整理提升

〖变式训练〗

1. B　必然事件就是一定发生的事件,依据定义即能判断出,A 是随机事件,B 是必然事件,C 是不可能事件,D 是不可能事件.

本题主要考查随机事件,解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念.必然事件指在一定条件下一定发生的事件.不可能事件指在一定条件下,一定不发生的事件.随

机事件指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

2. 分析：列表得出所有等可能的情况数，找出两次都摸到红球的情况数，即可求出所求的概率.

解：列表如下.

	红	红	白	黑
红	—	（红，红）	（白，红）	（黑，红）
红	（红，红）	—	（白，红）	（黑，红）
白	（红，白）	（红，白）	—	（黑，白）
黑	（红，黑）	（红，黑）	（白，黑）	—

所有等可能的情况有 12 种，其中两次都摸到红球有 2 种可能，则 P(两次摸到红球)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

点评：此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 列表法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 解题时要注意是放回试验还是不放回试验. 用到的知识点为：概率等于所求情况数与总情况数之比.

3. $\frac{3}{8}$　本题是一个几何概型问题，试验包含的所有事件对应的图形是整个圆，而满足条件的事件对应的是阴影部分，由几何概型概率公式得到 $P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{整个圆的面积}}=\frac{3}{8}$.

4. C　用频率估计概率，得到试验的概率在 0.4 左右，再分别计算出四个选项中的概率，然后进行判断.

掷一个质地均匀的骰子，向上的点数是 6 的概率为$\frac{1}{6}$，A 不符合题意；抛一枚硬币，出现正面的概率为$\frac{1}{2}$，B 不符合题意；不透明的袋子里有 2 个红球和 3 个黄球，除颜色外都相同，从中任取一球是红球的概率是$\frac{2}{5}$，C 符合题意；三张扑克牌，分别是 3，5，5，背面朝上洗匀后，随机抽出一张是 5 的概率为$\frac{2}{3}$，D 不符合题意.

5. B　根据概率公式分别计算出各选项中甲获胜和乙获胜的概率，然后比较两概率的大小判断游戏的公平性.

A. 甲获胜的概率为$\frac{2}{5}$，乙获胜的概率为$\frac{3}{5}$，而$\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$，所以游戏规则对双方不公平，所以 A 选项错误；

B. 甲获胜的概率为$\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$，乙获胜的概率为$\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$，所以游戏规则对双方公平，所以 B 选项正确；

C. 甲获胜的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，乙获胜的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，而$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，所以游戏规则对双方不公平，所以 C 选项错误；

D. 甲获胜的概率为$\frac{4}{10}$，乙获胜的概率为$\frac{6}{10}$，所以游戏规则对双方不公平，所以 D 选项错误.

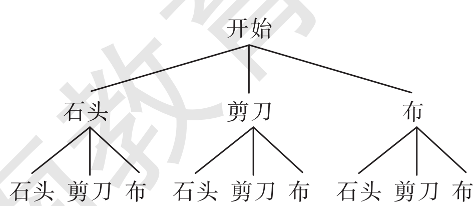
判断游戏公平性需要先计算每个事件的概率，然后比较概率的大小，概率相等就公平，否则就不公平.

本章达标测试

一、选择题

1. A　不可能事件发生的概率为 0，所以 A 选项正确；随机事件发生的概率在 0 与 1 之间，所以 B 选项错误；概率很小的事件不是不可能发生，而是发生的机会较小，所以 C 选项错误；投掷一枚质地均匀的硬币 20 000 次，正面朝上的次数可能为 10 000 次，所以 D 选项错误.

2. B　画树状图得：

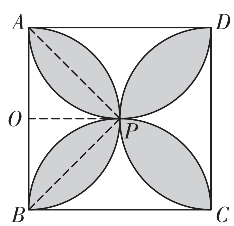


∵共有 9 种等可能的结果，小强获胜的情况数是 3 种，∴小强获胜的概率是$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，故选 B.

3. D　袋中装有大小和质地都相同的 3 个红球和 2 个黄球，从中随机取一个，取到红球的概率为$\frac{3}{5}$，A 不符合题意；掷一枚质地均匀的正方体骰子，向上的点数是偶数的概率为$\frac{1}{2}$，B 不符合题意；先后两次掷一枚质地均匀的硬币，两次都出现反面的概率为$\frac{1}{4}$，C 不符合题意；先后两次掷一枚质地均匀的正方体骰子，向上的点数之和是 7 或超过 9 的概率为$\frac{1}{3}$，D 符合题意.

4. C　任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，可能有 5 次正面向上，A 错误；天气预报说“明天的降水概率为 40%”，表示明天有 40%的可能降雨，B 错误；“篮球队员在罚球线上投篮一次，投中”为随机事件，C 正确；“a 是实数，$|a|\geqslant 0$”是必然事件，D 项错误.

5. A　如图，连接 PA，PB，OP；



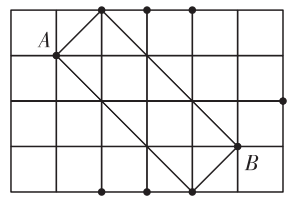
则 $S_{半圆O}=\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，

由题意得，图中阴影部分的面积为 $4(S_{半圆O}-S_{\triangle ABP})=4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2\pi-4$，

∴米粒落在阴影部分的概率为$\frac{2\pi-4}{4}=\frac{\pi-2}{2}$，故选 A.

6. A　由题可得，一共有 90 种情况，其中两个球都是红球的有 20 种情况，因此摸出的两球都是红球的概率是$\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$.

7. B　如图，将 B 球射向桌面的任意一边，使一次反弹后击中 A 球，可以瞄准的点有 2 个，故 B 球一次反弹后击中 A 球的概率是$\frac{2}{7}$.



8. A　根据题意得$\frac{n}{30+n}=0.4$，解得：$n=20$.

二、填空题

9. 4　根据题意得$\frac{2+x}{5+x}=\frac{2}{3}$，解得 $x=4$.

10. $\frac{3}{4}$　根据题意，从 4 根细木棒中任取 3 根，有 2、3、4；3、4、5；2、3、5；2、4、5 共四种取法，而能搭成一个三角形的有 2、3、4；3、4、5；2，4，5 共三种；故其概率为$\frac{3}{4}$.

11. $\frac{2}{7}$　任选一个字母，这个字母为“s”的概率为$\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$.

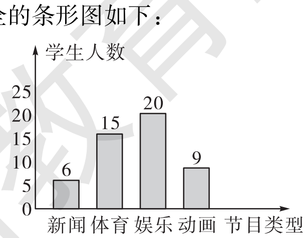
12. 0.9　大量重复试验的情况下，频率的稳定值可以作为概率的估计值，即试验次数越多的频率越接近于概率，∴这种幼树移植成活率的概率约为 0.9.

13. $\frac{1}{13}$　根据题意，$AB^2=AE^2+BE^2=13$，∴$S_{正方形ABCD}=13$. ∵$\triangle ABE\cong\triangle BCF$，∴$AE=BF=3$. ∵$BE=2$，∴$EF=1$，∴$S_{正方形EFGH}=1$，故飞镖扎在小正方形内的概率为$\frac{1}{13}$.

三、解答题

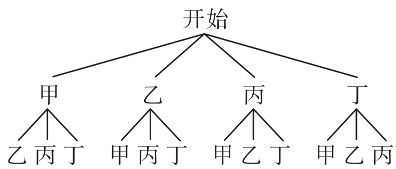
14. (1)20　18　∵被调查的总人数为 $6\div 12\%=50$，∴最喜欢娱乐类节目的有 $50-(6+15+9)=20$，$x\%=\frac{9}{50}\times 100\%=18\%$，即 $x=18$.

(2)补全的条形图如下：



(3)估计该校最喜欢娱乐类节目的学生有 $1\,800\times\frac{20}{50}=720$(人)

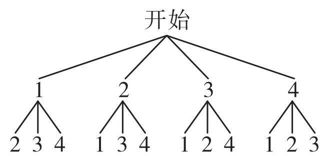
(4)画树状图得:



∵共有 12 种等可能的结果,同时选中甲、乙两同学的情况有 2 种,

∴同时选中甲、乙两同学的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

15. (1)画树状图得:



共有 12 种等可能的结果,分别是(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3).

(2)∵在所有 12 种等可能结果中,在函数 $y=x+1$ 的图象上的有(1,2),(2,3),(3,4)这 3 种结果,

∴点 $M(x,y)$在函数 $y=x+1$ 的图象上的概率为$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

16. 不公平,理由如下:列表得.

	1	2	3
2	1,2	2,2	3,2
3	1,3	2,3	3,3
4	1,4	2,4	3,4

由表可知,共有 9 种等可能的结果,其中数字之和为 3 的倍数的结果有 3 种,数字之和为 4 的倍数的结果有 2 种,则甲获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,乙获胜的概率为$\frac{2}{9}$. ∵$\frac{1}{3}\neq\frac{2}{9}$,∴这个游戏对甲、乙双方不公平.

九年级下册达标测试

一、选择题

1. C **2.** A **3.** B **4.** D **5.** B **6.** C **7.** C **8.** B **9.** B **10.** C

二、填空题

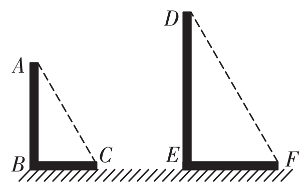
11. $y=\frac{2}{5}x^2-\frac{6}{5}x-4$ **12.** 120° **13.** 0.5

14. $\frac{1}{18}$ **15.** 4 **16.** 小于 50° **17.** $5\sqrt{3}$ 45°

18. 50 **19.** $y=-2x^2+4x$ **20.** ①③④

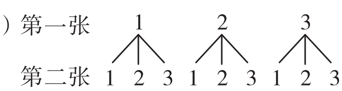
三、解答题

21. (1)如图连接 AC,过 D 点作 AC 的平行线与地面交于点 F,则 EF 为 DE 在阳光下的投影.



(2)由$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$,可求得 $DE=7.5$ m.

22. (1)



所有可能的结果为

1+1=2,1+2=3,1+3=4,

2+1=3,2+2=4,2+3=5,

3+1=4,3+2=5,3+3=6.

(2)共有 9 种结果,每种结果的可能性相同,和为偶数的结果有 5 种,和为奇数的结果有 4 种.

所以 P(小明获胜)$=\frac{5}{9}$,P(小虎获胜)$=\frac{4}{9}$.

这个游戏不公平.

23. (1)∵$\angle 1=\angle C$,$\angle P=\angle C$,

∴$\angle P=\angle 1$,∴$CB\parallel PD$.

(2)∵$\angle P=\angle C$,$\sin P=\frac{3}{5}$,∴$\sin C=\frac{3}{5}$.

∵ $CD\perp AB$,$BC=10$,

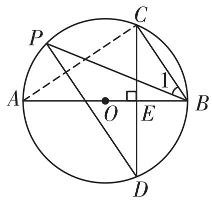
∴在 Rt△BEC 中，$\sin C=\frac{BE}{BC}=\frac{BE}{10}=\frac{3}{5}$，

∴$BE=6$.

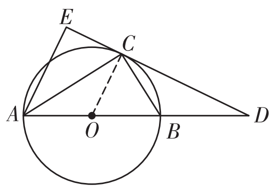
如图，连接 AC，$\angle ACB=90°$，$\triangle ABC\backsim\triangle CBE$，

$\frac{BC}{AB}=\frac{BE}{BC}$，$\frac{10}{AB}=\frac{6}{10}$，得 $AB=\frac{50}{3}$.

即⊙O 的直径为$\frac{50}{3}$，



24. (1)如图，连接 CO，则 $AO=BO=CO$.



∵$\angle EAC=\angle CAO$，∴$\angle ACO=\angle EAC$，

∴ $AE/\!/OC$，

∴$\angle OCD=\angle AED=90°$，

∴ED 是圆 O 的切线.

(2)∵$AE/\!/OC$，∴$\triangle DCO\backsim\triangle DEA$，

∴$\frac{CO}{EA}=\frac{DO}{DA}=\frac{BD+BO}{BD+AB}$，

即$\frac{3}{\frac{24}{5}}=\frac{BD+3}{BD+6}$，解之得 $BD=2$.

由$\angle EAC=\angle CAB$，$\angle E=\angle ACB$

得$\triangle EAC\backsim\triangle CAB$，

∴$\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AB}$，即 $AC^2=AB\cdot AE=\frac{144}{5}$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{36-\frac{144}{5}}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

25. (1)销售量关于销售价格的函数关系式为

$Q=-\frac{1}{2}x+10\ (8<x<20)$，

销售利润关于销售价格的函数关系式为

$y=-\frac{1}{2}x^2+14x-90(8<x<20)$.

(2)交点坐标为(10，0)，(18，0)，价格控制范围是 $10\leqslant x\leqslant 18$.

(3)要使企业尽快脱贫，应使每月利润最大.

∵$y=-\frac{1}{2}x^2+14x-90=-\frac{1}{2}(x-14)^2+8$.

∴当 $x=14$ 时，月利润最大，此时月利润为 8 万元.

设要经过 n 个月脱贫，则 $8n-80-32\geqslant 0$，

解之得 $n\geqslant 14$.

所以企业最快可在 14 个月后脱贫.

26. (1)一元二次方程 $x^2-mx+(m-2)=0$ 的根的判别式为

$\Delta=(-m)^2-4(m-2)=(m-2)^2+4>0$，

∴一元二次方程 $x^2-mx+(m-2)=0$ 有两个不相等的实数根.

∴抛物线与 x 轴有两个交点.

(2)由△ABC 为直角三角形，可知$\angle ACB$ 为直角，从而可证$\triangle AOC\backsim\triangle COB$.

∴$OC^2=AO\cdot BO$，

∴$(m-2)^2=|x_1|\cdot|x_2|$，

即$(m-2)^2=-(m-2)$，

解得：$m=2$ 或 $m=1$.

经检验 $m=2$ 不合题意，舍去.

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-x-1$.

(3)DC 是⊙M 的切线，证明略.