经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-7）

优选法与试验设计初步

SHUXUE

主　编　严士健　王尚志

副主编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　张饴慈　王春辉

编写人员（按姓氏笔画排序）

王尚志　王春辉　孙奇山

张饴慈　陈孟伟

北京師範大學出版社

·北京·

基础教育教材网址 http：// www.100875.com.cn

营销中心电话　010－58802783
服务中心电话　010－58802795
邮购科电话　010－58808083
传　　真　010－58802838
学科编辑电话　010－58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志．从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷．

按照国家环境标准（HJ2503－2011）《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求．

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：890 mm × 1240 mm　1/16
印　　张：5.25
字　　数：130 千字
版　　次：2007 年 5 月第 2 版
印　　次：2019 年 7 月第 23 次印刷
定　　价：4.45 元
ISBN 978-7-303-08181-3

责任编辑：邢自兴　焦继红　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26 册书组成：必修教材有5 册；选修系列 1 有2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有6 册，选修系列 4 有10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

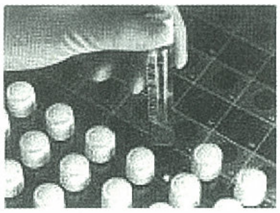
目　录

第一章　正交试验设计

在现实生活中，人们往往通过作试验的办法去解决问题. 作试验前需要设计试验的方案，本章将通过一些实例，给大家介绍一种试验设计的基本方法——正交试验设计.

§1　试验设计

实例分析



实例 1　现要对某一艾滋病易感人群进行检测. 设人群有1 000人，其中共有 10 个感染者. 我们希望通过血样检验的方法，找出这 10 个感染者.

分析　我们可以一个一个地进行检验，在最坏的情况下，需要作 999 次检验.

为了减少化验次数，常采用分组化验的办法. 即把几个人的血样混在一起，先化验一次. 若化验合格，则说明这几个人全部正常；若混合血样不合格，说明这几个人中有病人，再对他们作进一步的化验(逐个化验，或者分成小组化验).

例如，把这 1 000 人平均分成 100 个组，每组 10 人.

考虑病人分布比较分散的情况，假设这 10 个感染者分散在 10 个组中. 对每一组的混合血样进行化验，则至多作 99 次血样检验，就可以把这 10 个组找出来. 对这 10 个组(100 人)逐个检验，至多 90 次就可以把这 10 个病人找到.

这种方法需要检验的次数不超过 189 次.

当然，对于上面的方法，很多地方都可以再改进.

思考交流

对上面提到的疾病检测问题，请尝试设计其他的分组方法，说明如何安排这个试验.

实例 2　在 12 个外表相同的小球中，11 个球的质量都是10 g，另一个要重一些(但仅凭手感无法分辨)，给定一个没有砝码的天平，请设计一个试验方案，把这个重一点的小球挑出来.

方案一　先把两个球放到天平两边的盘中，如果不平衡，则较重一边的小球就是要找的；如果平衡，就把其中一个球(哪个都行)作为标准，用它称量其他球，与它不同的就是我们要找的.

这种方法最多要称量 10 次才能完成任务.

方案二　把 12 个球平均分成 6 组，把每组的 2 个球分放在天平两边，如果不平衡，则较重一边的小球就是要找的.

这种方法最多要称量 6 次.

方案三　把 12 个球平均分成 3 组(每组 4 个)，先把其中两组分别放到天平两边. 如果平衡，则重一点的球一定在剩余一组中；如果不平衡，那么较重一边的 4 个球当中就一定有我们要找的那个球.

可见，只称量一次，就排除了 8 个球. 下面可以按照方案二中的办法，最多再需 2 次就可以完成任务.

这种方法只需要称量 3 次.

从上面的两个例子不难看出，试验是需要设计的，如果试验方案选择得好，试验次数就可以减少. 我们把设计试验方案的学问叫作**试验设计**.

习　题　1—1

1. 某中学高一新生入学体检需测体重，但不巧，体重计出了问题，它只能测 50 kg 以上的质量. 请你设计一个测体重的方案.(规定：体重计至多容许两人同时站立)
2. 有 10 堆木块，每堆 10 块，其中有一堆木块是每个 0.9 kg，其余堆中的木块均为每个 1 kg. 它们的外观近似，仅凭手感不易分辨，请你设计一个方案，找到与众不同的那一堆. 可以使用的称量工具的称重范围在 0.1 kg～100 kg 之间 .
3. 洗衣服一般分为洗涤和漂洗两个阶段. 假设衣服洗涤并拧干以后还残留含有污物的水 0.5 kg，用 20 kg 清水来漂洗. 比较下面三个方法哪一个能洗得更干净一些.

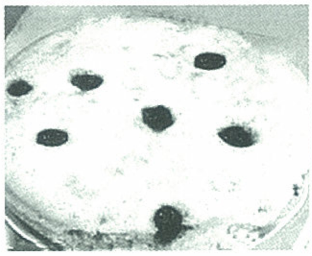
方案一　分两次漂洗，第一次用 15 kg 水，第二次用 5 kg 水；

方案二　分两次漂洗，第一次用 5 kg 水，第二次用 15 kg 水；

方案三　分两次漂洗，每次用 10 kg 水.

注：在漂洗过程中，污物能均匀分布.

4. 一块丝糕，上面有 7 个枣，如图所示. 现在要把它分成 7 块，每块上面都有一个枣. 需要切几刀呢？请设计一个方案.



（第 4 题）

5. 有 27 个外表一致的小球，其中一个略重（但仅凭手感无法分辨），而其余 26 个质量相同. 设计一个试验，把这个重一些的小球挑出来. 可以使用的试验工具是一个没有砝码的天平.

*6. 有 12 个外表一致的小球，其中 11 个的质量都是 10 g，另一个的质量不是 10 g（但仅凭手感无法分辨），现在我们要设计一个试验次数尽量少的方案，把这个与众不同的小球挑出来. 可以使用的试验工具是一个没有砝码的天平.

§2　拉丁方与试验设计

2.1　实例分析

实例 1　通过农业试验比较 3 个小麦品种的优劣，从中选出一个亩产最高的品种. 现在，我们选择了一块长方形的试验地，那么如何确定试验方案呢？

方案一　3 个品种各种一块(如图 1-1 和表 1-1).

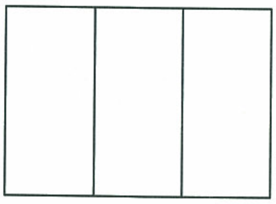


图 1-1

表 1-1

品种 1	品种 2	品种 3

一般来说，我们选择的试验地，条件应该是相同的.

但由于试验地在肥力、日照条件等方面仍会有差异，这些都会影响试验的结果.

显然试验方案一不能满足要求.

方案二　把试验地分成多块.

例如，我们把这个长方形的试验地平均分成 9 块(如图 1-2 和表 1-2).

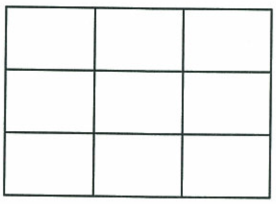


图 1-2

表 1-2

地块(1)	地块(2)	地块(3)
地块(4)	地块(5)	地块(6)
地块(7)	地块(8)	地块(9)

那么如何把这 9 块试验地分给 3 个品种呢？

下面的方案(表 1-3)就是一个可行的选择.

表 1-3

品种 2	品种 1	品种 3
品种 1	品种 3	品种 2
品种 3	品种 2	品种 1

这个设计中，试验地的条件在 3 个品种中都得到了均匀分配.

进一步的观察可以看到，在表 1-3 中，每行、每列都恰好安排品种 1,2,3 各一个.

事实上，这个设计中使用的方法就是数学中的拉丁方.

2.2　拉丁方

首先我们观察两个方阵：

$$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix},\qquad \begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\4&1&2&3\\3&4&1&2\end{matrix}.$$

容易看到，由数字 1，2，3 组成的第一个方阵中，每行每列都恰好含有数字 1，2，3 各一个.

对于第二个方阵，它由数字 1，2，3，4 组成，并且每行每列都恰好含有数字 1，2，3，4 各一个.

容易验证，以下的方阵

$$\begin{matrix}2&3&4&5&1\\1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\5&1&2&3&4\end{matrix}$$

也有类似的特征，即组成这个方阵的数字在方阵的每行每列都恰好有一个.

一般地，我们把这样的方阵称为**拉丁方**.

根据其所含有的不同数字的个数，分别称为 3 阶拉丁方、4 阶拉丁方等.

例　容易看到，一个拉丁方任意交换其 2 行或 2 列，仍是一个拉丁方. 这是拉丁方的最基本的数学性质.

由 3 阶拉丁方

$$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix}$$

出发，经过交换行、列，一共可以得到多少个不同的拉丁方？（注：对于两个拉丁方，只要某一个位置的数字不同，就称为不同的拉丁方）

解　一共有 12 个，它们是：

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix},
$$

(1) (2) (3)

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix},
$$

(4) (5) (6)

$$
\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix},
$$

(7) (8) (9)

$$
\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix},\quad
\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}.
$$

(10) (11) (12)

2.3 拉丁方设计

介绍了拉丁方的基本知识后，我们来说明如何将它用于试验的设计.

如前面所说，要比较 3 个小麦品种，试验地为一长方形，等分成 9 块（如图 1-2）. 把这 9 块试验地分给 3 个品种时（每品种 3 块），要力求做到“均匀”，使得每一品种在条件上尽量相同.

可以使用一个 3 阶拉丁方来实现这个想法. 从所有 3 阶拉丁方中随机挑选一个用于设计. 例如，用例题中标号为(4)的 3 阶拉丁方，其设计如表 1-4 所示.

表 1-4

品种 1	品种 2	品种 3
品种 3	品种 1	品种 2
品种 2	品种 3	品种 1

在这个安排下，每个品种在条件上是基本相同的.

如果是 4 个品种，则要用 4 阶拉丁方. 对更高阶的情况也类似. 这样的试验安排就叫作**拉丁方设计**.

习 题 1—2

1. 指出数阵

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

中数字排列的特点.

2. 观察例题中 12 个 3 阶拉丁方，分析它们的区别与联系. 请你找到一个规律，把它们不重不漏的一一写出来.

3. 我们看前面提到的 3 阶拉丁方：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2, \end{matrix}$$

其第一行按自然顺序，第二行自 2 开始，按自然顺序往下排，但规定 1 紧接着 3. 第三行自 3 开始，按自然顺序往下排(仍是 1 紧接着 3)，这个办法可用于构造任意阶的拉丁方.

例如对 4 阶的情况，用这个方法得拉丁方

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3. \end{matrix}$$

类似地，请写出一个 6 阶的拉丁方.

4. 如果本节提到的农业试验中的小麦品种为 5 种，应如何进行拉丁方设计？

*5. 对于 3 阶拉丁方

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad 和 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1, \end{matrix}$$

相同位置上的两个数组成的数对是：(1,1)，(2,2)，(3,3)，(2,3)，(3,1)，(1,2)，(3,2)，(1,3)，(2,1). 它们包含了数字 1,2,3 组成的所有数对，且每个数对出现的次数相同.

请找出两个具有以上性质的 4 阶拉丁方.

§3 多因素试验设计

3.1 多因素试验

上面谈到的农业试验中，只涉及了一个因素(品种)，称这样的问题为单因素试验设计问题.

在实际中，遇到的问题往往涉及多个因素，如何考虑多因素的试验设计，这是本节所要关注的问题.

实例分析

例如，某种化学产品的产量受反应温度、反应时间和催化剂种类三个条件的影响. 现想通过作试验的办法，确定三个条件的合适取值，使得产量达到最高.

根据经验，三个条件的取值有一定范围. 试验中，分别对每个条件取几个值.

例如，反应温度取 80 ℃，70 ℃两个值；反应时间取 2.5 h，3.5 h；催化剂可选用甲、乙两种.

现在，我们的问题是选什么样的反应温度，多长的反应时间，哪一种催化剂，才能使产量最高.

为叙述方便，这里把条件“反应温度”记为 A，它的两个取值可记为 $A_1=80$ ℃，$A_2=70$ ℃. 类似地，把条件“反应时间”记为 B，其两个取值记为 $B_1=2.5$ h，$B_2=3.5$ h；把条件“催化剂种类”记为 C，其两个取值记作 $C_1=$甲，$C_2=$乙.

抽象概括

试验首先应该明确试验目标(一般称为试验的指标). 例如上面化工试验中试验目标就是化学产品的产量.

上面提到的“反应温度”“反应时间”和“催化剂种类”等影响试验目标的条件称为试验中要考虑的因素(也称因子).

在试验中，每个因素可根据实际情况取几个值. 因素的每个取值称为因素的一个水平. 例如前面提到的因素“反应温度”取了两个水

平:80 ℃,70 ℃.

常用字母 $A,B,C,\cdots$表示因素,给字母加角标 1,2,3 等来表示因素的各个水平. 例如因素“反应温度”(A)的两个水平为:$A_1=80$ ℃,$A_2=70$ ℃.

在这个化工试验中,共有 3 个因素,每个因素都有 2 个水平,把它称为三因素二水平试验,简记为 2^3 型试验.

因素和水平的确定是由专业人员决定的. 数学工作者将协助专业人员寻找较好的试验设计方案.

3.2 常见试验设计方案

方案 1——全面实施方案

方案设计

对于上面的化工试验,我们可以把所有 8 种搭配方案都试验一次. 即

(1) $A_1B_1C_1$, (2) $A_1B_1C_2$, (3) $A_1B_2C_1$, (4) $A_1B_2C_2$,

(5) $A_2B_1C_1$, (6) $A_2B_1C_2$, (7) $A_2B_2C_1$, (8) $A_2B_2C_2$.

这里第一号试验 $A_1B_1C_1$ 具体是指:反应温度 $A_1=80$ ℃,反应时间 $B_1=2.5$ h,催化剂选用 $C_1=$甲. 其他试验类似.

这是一种试验设计方案,我们称之为全面实施方案.

方案分析

这个方案的优点是一定可以找到所有搭配中最优的方案.

不过,它的缺点也是明显的——试验次数过多. 特别是在因素数目较多、水平选取较多的情况下,全面实施方案是无法实现的.

例如,在某个试验中,影响试验指标的因素有 13 个,每个因素都取 3 个水平,如果把所有的情况都试一遍,则要作 $3^{13}=1\ 594\ 323$ 次试验.

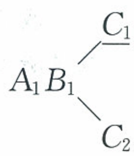
思考交流

如果一个人每天作 10 次试验,1 594 323次试验需要作多少年才能完成?

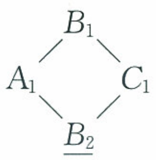
方案 2——逐个因素寻找法

方案设计

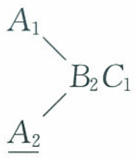
第一步:根据专业人员的以往经验,首先确定一个影响试验目标的主要因素,例如,因素 C. 固定其他两个因素的水平(不妨设为 A_1B_1),选择主要因素的不同水平作试验,即 $A_1B_1C_1$ 和 $A_1B_1C_2$,比较



它们的结果. 假如试验 $A_1B_1C_1$ 的结果比 $A_1B_1C_2$ 的结果好，就可以认为因素 C 的好水平为 C_1.



第二步：在选定因素 C 的好水平 C_1 后，在余下的因素中，再分析哪个因素影响试验目标更大一些，例如，因素 B. 这样可以固定因素 A 的某个水平（如 A_1），对因素 B 进行选择. 比较试验 $A_1B_1C_1$ 和 $A_1B_2C_1$ 的结果. 假如试验 $A_1B_2C_1$ 的结果比 $A_1B_1C_1$ 的结果好，就可以认为因素 B 的好水平为 B_2.



第三步：固定两个因素 B，C 的好水平 B_2，C_1，对因素 A 进行选择. 比较试验 $A_1B_2C_1$ 和 $A_2B_2C_1$ 的结果. 假如试验 $A_2B_2C_1$ 的结果比 $A_1B_2C_1$ 的结果好，就可以认为因素 A 的好水平为 A_2.

这样，我们作 4 次试验，就选定了一个较优的试验组合 $A_2B_2C_1$.

这种试验设计方法称为逐个因素寻找法.

方案分析

这个方案的优点是减少了试验次数. 不过，这种方法的缺点也是显而易见的：以因素 C 为例，在因素 A，B 固定为 A_1B_1 时，水平 C_1 是最好的，但当因素 A，B 的组合变为 A_2B_2 时，因素 C 选取水平 C_1 好，还是选取水平 C_2 好，就不一定了.

思考交流

在某个试验中，如果影响试验指标的因素有 4 个，每个因素都取 2 个水平，用逐个因素寻找法处理这个问题，需要进行多少次试验？

练　习

1. 为提高某种橡胶的质量，取“促进剂总量(A)”“碳黑品种(B)”和“硫磺量(C)”三个因素，每个因素取两个水平（如下表），进行全面试验.

因素＼水平	1	2
促进剂总量(A)	$A_1=1.5$	$A_2=1.0$
碳黑品种(B)	B_1=高耐磨碳黑	B_2=高耐磨碳黑与硬碳黑并用
硫磺量(C)	$C_1=2.5$	$C_2=2.0$

我们要求橡胶产品不容易折断，试验的指标是橡胶产品的弯曲次数（次数越多越好）. 8 个试验及其数据见下表.

试验号＼水平＼因素	A	B	C	弯曲次数/万次
1	1	1	1	1.5
2	1	1	2	2.0
3	1	2	1	2.0
4	1	2	2	1.5
5	2	1	1	2.0
6	2	1	2	3.0
7	2	2	1	2.5
8	2	2	2	2.0

(1) 指出这 8 个试验各是什么.

(2) 最佳的组合是哪一个?

2. 用逐个因素寻找法解决上题.

(1) 找到的最佳组合是什么?(注:①先固定因素 A,B 为 A_1B_2,优选 C,再依次优选 B,A;②试验数据可查上面的数据表.)

(2) 与第 1 题得到的结果一致吗?如果最初始因素 A,B 先固定为 A_1B_1 呢?

对 3.1 中提到的化工试验,我们还可以采取以下方法.

方案 3——综合比较法

方案设计

在所有的 8 个试验中,我们作如下的 4 个试验(如表 1-5).

表 1-5

试验号＼因素	反应温度(A)	反应时间(B)	催化剂种类(C)	试验结果
1	A_1=80 ℃	B_1=2.5 h	C_1=甲	y_1
2	A_2=70 ℃	B_1=2.5 h	C_2=乙	y_2
3	A_1=80 ℃	B_2=3.5 h	C_2=乙	y_3
4	A_2=70 ℃	B_2=3.5 h	C_1=甲	y_4

这里,以 y_1,y_2,y_3,y_4 分别记这 4 个具体试验的试验结果.

我们下面要研究的是每个因素不同水平之间的优劣.

以因素 A 为例.容易看到,对任何两个试验做比较,都无法判断同一因素两个水平的优劣.为了比较水平的优劣,我们采取下面的方法.

把 4 个试验分为两组,第 1 号和第 3 号试验为第一组,第 2 号和第 4 号试验为第二组.

第一组两个试验的结果分别为 y_1,y_3,第二组两个试验的结果分

别为 y_2, y_4.

$A_1B_1C_1$
$A_1B_2C_2$
（第一组）

$A_2B_1C_2$
$A_2B_2C_1$
（第二组）

要比较 A_1 与 A_2 的优劣，可比较 y_1+y_3 与 y_2+y_4 的大小.

这里，在对 y_1+y_3 与 y_2+y_4 进行比较的时候，已经基本剔除掉了因素 B，C 的影响. 因为第一组中 B_1，B_2，C_1，C_2 各出现了一次，在第二组中，B_1，B_2，C_1，C_2 也各出现了一次，二者“条件”相同.

如果试验结果是以越大越好. 则当 $y_1+y_3>y_2+y_4$ 时，就说明 A_1 比 A_2 好；当 $y_1+y_3<y_2+y_4$ 时，就说明 A_2 比 A_1 好.

如果不是采用上面的分析方法，而是仅仅比较某两个试验的结果，则无从知道因素水平的优劣.

这里，我们综合所有试验结果，按照某个因素进行分组，对这一因素加以比较，这种分析的方法叫作综合比较法.

可见，通过综合比较，我们就可以得出 A_1 与 A_2 的优劣. 类似地，可以比较出 B_1 与 B_2 以及 C_1 与 C_2 的优劣.

方案分析

这个方案可以把各因素的好水平集中在一起，得到一个最优的组合，并且方案的试验次数也较少. 但方案中忽略了因素之间的相互影响，在实际应用中要结合具体问题加以分析.

思考交流

在上面给出的试验方案中，如何比较因素 B 的两个水平的优劣？如何比较因素 C 的两个水平的优劣？

3.3 实例分析——微波炉加工爆米花

在爆米花的加工过程中，通常我们用

$$\text{可食用率}=\frac{\text{可食用爆米花的粒数}}{\text{放入微波炉内玉米的总粒数}}$$

作为加工好坏的标准. 可食用率越高越好.

分析理解

一般来说，影响可食用率的因素有三个：

A：加工时间；

B：一次加工的玉米粒数；

C：玉米颗粒大小.

根据实践，这三个因素可以选取的水平如表 1-6 所示.

表 1-6　因素水平表

试验考察的因素	水　平	
加工时间(A)/min	$A_1=3.5$	$A_2=2.5$
粒数(B)/粒	$B_1=300$	$B_2=700$
颗粒大小(C)	$C_1=$颗粒大	$C_2=$颗粒小

这是一个三因素二水平的试验设计问题.

第一步：设计试验方案.

仿照 §3.2 中的方案 3，我们给出如下设计方案：

$$A_1B_1C_1,\ A_2B_1C_2,\ A_1B_2C_2,\ A_2B_2C_1.$$

第二步：作试验.

第三步：填写试验数据.

把试验数据填在表 1-7 右边的一列.

表 1-7　$L_4(2^3)$计算表

因素 试验号	加工时间(A)	粒数(B)	颗粒大小(C)	数据(y) (可食用率)
1	A_1	B_1	C_1	$y_1=60.3\%$
2	A_2	B_1	C_2	$y_2=41.6\%$
3	A_1	B_2	C_2	$y_3=65.0\%$
4	A_2	B_2	C_1	$y_4=77.6\%$

第四步：数据分析.

(1) 对每个因素进行综合比较.

比较因素 A 的两个水平. 把 4 个试验分为两组：

第 1 号和第 3 号试验为第一组，

第 2 号和第 4 号试验为第二组，

第一组两个试验的结果分别为 $y_1=60.3\%$，$y_3=65.0\%$；

第二组两个试验的结果分别为 $y_2=41.6\%$，$y_4=77.6\%$.

$A_1B_1C_1$
$A_1B_2C_2$
(第一组)

$A_2B_1C_2$
$A_2B_2C_1$
(第二组)

要比较 A_1 与 A_2 的优劣，可比较 y_1+y_3 与 y_2+y_4 的大小.

$$\mathrm{I}_A=y_1+y_3=125.3\%;$$

$$\mathrm{II}_A=y_2+y_4=119.2\%.$$

显然，$y_1+y_3>y_2+y_4$，由此可以看出，水平 A_1 比水平 A_2 好.

同样道理，我们可以分析因素 B 的两水平的好坏. 把 4 个试验分为两组：

第 1 号和第 2 号试验为第一组，

第 3 号和第 4 号试验为第二组，

$A_1B_1C_1$
$A_2B_1C_2$

（第一组）

$A_1B_2C_2$
$A_2B_2C_1$

（第二组）

第一组两个试验的结果分别为 $y_1=60.3\%$，$y_2=41.6\%$；

第二组两个试验的结果分别为 $y_3=65.0\%$，$y_4=77.6\%$.

要比较 B_1 与 B_2 的优劣，可比较 y_1+y_2 与 y_3+y_4 的大小.

$$\text{I}_B=y_1+y_2=101.9\%;$$

$$\text{II}_B=y_3+y_4=142.6\%.$$

显然，$y_1+y_2<y_3+y_4$，由此可以看出，水平 B_2 比水平 B_1 好.

对于因素 C 也可进行类似地分析，得到水平 C_1 比水平 C_2 好.

对上面的数据进行整理，得到表 1-8.

表 1-8 $L_4(2^3)$ 计算表

试验号 \ 因素	加工时间（A）	粒数（B）	颗粒大小（C）	数据（y）（可食用率）
1	A_1	B_1	C_1	$y_1=60.3\%$
2	A_2	B_1	C_2	$y_2=41.6\%$
3	A_1	B_2	C_2	$y_3=65.0\%$
4	A_2	B_2	C_1	$y_4=77.6\%$
Ⅰ	$y_1+y_3=$ 125.3%	$y_1+y_2=$ 101.9%	$y_1+y_4=$ 137.9%	总和 244.5%
Ⅱ	$y_2+y_4=$ 119.2%	$y_3+y_4=$ 142.6%	$y_2+y_3=$ 106.6%	
Ⅰ－Ⅱ	$\text{I}_A-\text{II}_A=$ 6.1%	$\text{I}_B-\text{II}_B=$ -40.7%	$\text{I}_C-\text{II}_C=$ 31.3%	

（2）确定最优试验方案.

因素 A，B，C 的最佳水平分别是 $A_1=3.5$ min，$B_2=700$ 粒，$C_1=$ 颗粒大. 即最优的加工条件是：用 700 颗大粒玉米放入微波炉中加工 3.5 min.

需要指出的是，通过这个办法，我们找到的最优组合是全部 8 个试验中最优的. 例如，上述最优加工方案并不在已作过的 4 个试验当中.

习 题 1—3

1. 某试验，考虑的因素记为 A，B，C，每个因素有两个水平.

（1）如果采用全面实施的方法进行试验，共需进行多少次试验？请一一写出来.

（2）用逐个因素寻找法进行这个试验，先固定 B，C 的水平为 B_1C_2，对因素 A 进行优选，再依次对因素 B，C 优选，如果最后得到的最佳组合是 $A_1B_2C_2$，请写出这个试验过程中进行的所有试验.

2. 对本节练习中提到的橡胶试验问题，选择最佳工艺条件.（要求试验次数为 4 次，试验结果查练习中的表格）

3. 某化工厂为提高某种产品的产量，对生产条件进行试验. 拟采用的因素、水平如下表所示.

因素水平表

试验考察的因素	水　平	
A：反应温度/(℃)	$A_1=60$	$A_2=80$
B：反应时间/h	$B_1=2.5$	$B_2=3.5$
C：两种原料配比	$C_1=1.1:1$	$C_2=1.2:1$
D：真空度/Pa	$D_1=0.7$	$D_2=0.8$

共作 8 次试验，结果见下表.

试验结果表

试验号 \ 因素	反应温度/(℃)	反应时间/h	两种原料配比	真空度/Pa	试验结果产量/kg
1	A_1	B_1	C_1	D_1	86
2	A_1	B_1	C_2	D_2	95
3	A_1	B_2	C_1	D_2	91
4	A_1	B_2	C_2	D_1	94
5	A_2	B_1	C_1	D_2	91
6	A_2	B_1	C_2	D_1	96
7	A_2	B_2	C_1	D_1	83
8	A_2	B_2	C_2	D_2	88

在这个试验当中，试验的指标是产量. 根据以上数据，求对提高产量最有利的生产条件.

4. 某厂为提高某种金属材料的硬度，对热处理工艺条件进行试验，确定因素及其水平如下.

因素水平表

因素 \ 水平	1	2
淬火温度(A)/(℃)	$A_1=800$	$A_2=850$
回火温度(B)/(℃)	$B_1=190$	$B_2=160$
冷却方式(C)	$C_1=$油冷	$C_2=$空冷
间隔时间(D)/(min)	$D_1=30$	$D_2=10$

8 个试验及其结果如下.

试验结果表

试验号	A 的水平	B 的水平	C 的水平	D 的水平	试验结果(硬度)
1	A_1	B_1	C_1	D_1	$y_1=12.8$
2	A_1	B_1	C_2	D_2	$y_2=28.2$
3	A_1	B_2	C_1	D_1	$y_3=26.1$
4	A_1	B_2	C_2	D_2	$y_4=35.3$
5	A_2	B_1	C_1	D_2	$y_5=30.5$
6	A_2	B_1	C_2	D_1	$y_6=4.3$
7	A_2	B_2	C_1	D_2	$y_7=33.3$
8	A_2	B_2	C_2	D_1	$y_8=4.0$

试确定最佳工艺条件.(结果数据越大越好)

§4　试验的均衡搭配与正交表

4.1　试验设计的基本原则——均衡搭配

在上一节的实例分析中,我们设计的试验方案 3 具有两个优点:

(1) 需要进行的试验次数比全面实施方案要少;

(2) 所寻找到的是所有可能组合中最优的,而不仅仅是已作试验中最佳的.

从上节的实例分析中,我们看到,方案 3 之所以具备这些优点,是因为我们在试验方案的设计中,对因素和水平进行了均衡搭配.

什么是均衡搭配呢?为什么均衡搭配就好呢?

借助空间直角坐标系,我们再来分析前面的例子.

原点的坐标设为(A_1,B_1,C_1),则在§3.2 中提到的 8 个试验可以看成是一个长方体的 8 个顶点(如图 1-3).

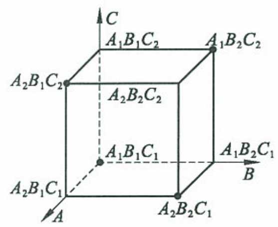


图 1-3

我们所选择的 4 个试验:

$A_1B_1C_1$,$A_2B_1C_2$,$A_1B_2C_2$,$A_2B_2C_1$ 是均匀分布的:在长方体的每一个面有两个,在每一条棱上有一个.

进一步的分析可以看到:

(1) 每个因素的各个水平在 4 次试验中都出现了相同的次数.

例如,在上面例子的 4 个试验 $A_1B_1C_1$,$A_2B_1C_2$,$A_1B_2C_2$,$A_2B_2C_1$ 中,因素 A,B,C 的每个水平各出现两次.

(2) 每两个因素的各种水平的不同搭配,在 4 次试验中都出现了相同的次数.

例如,在上面例子的 4 个试验 $A_1B_1C_1$,$A_2B_1C_2$,$A_1B_2C_2$,$A_2B_2C_1$ 中,两个因素水平的不同搭配:A_1B_1,A_1B_2,A_1C_1,A_1C_2,A_2B_1,A_2B_2,A_2C_1,A_2C_2,B_1C_1,B_1C_2,B_2C_1,B_2C_2 都出现了一次.

我们把具有这两个特点的试验方案称为是**均衡搭配**的,这也正是试验设计要遵循的基本原则.

在试验设计中,为什么要强调这个均衡性原则呢?

举一个通俗的例子.在某地区进行石油储量勘探时,如果不知道油田的位置,在这个地区均匀地打井勘探,会比集中打井勘探更容易发现油田.(图 1-4)

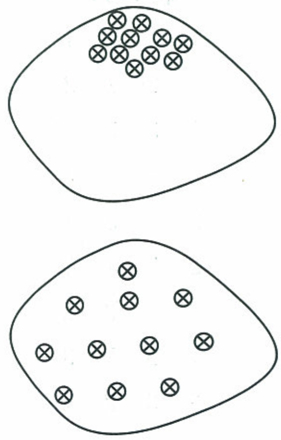


图 1-4

如何在试验设计中实现这个基本原则呢?

数学对于这个问题的解决发挥了重要作用. 我们利用一种事先编就的、名为“正交表”的表格来设计满足上述条件的试验方案.

4.2　正交表及其基本特征

观察数表 1-9，我们不难发现：

(1) 每列出现 1，2 的次数相同，均为两次；

(2) 任意两列中，同行的数字构成的数对：(1，1)，(2，2)，(1，2)，(2，1)包括了数对的所有组合，且每对出现的次数都相同.

以第 1 列和第 3 列为例，构成的数对为(1，1)，(1，2)，(2，2)，(2，1)，每个数对都出现一次.

表 1-9

$L_4(2^3)$

1	1	1
1	2	2
2	1	2
2	2	1

容易看到数表 1-10 也具备这样的特征.

表 1-10

$L_8(2^7)$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2

例如，第 3 列和第 7 列，每列分别有 4 个“1”，4 个“2”. 这两列构成的“数对”为：(1，1)，(1，2)，(2，2)，(2，1)，(2，2)，(2，1)，(1，1)，(1，2). 所有组合都出现了，且每个组合都出现了相同的次数.

一般地，我们把具有这样特征的数表叫作**正交表**.

表 1-11

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

思考交流

表 1-11 是否是一个正交表?

4.3　正交表

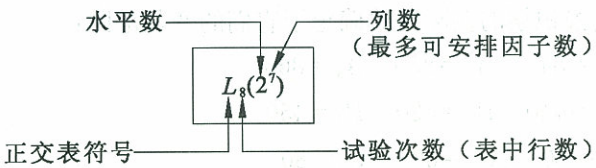
下面，我们来解释一下正交表的符号表示.

以 $L_8(2^7)$为例(见表 1-12).

表 1-12　$L_8(2^7)$表

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

其中“L”是正交表的符号；L 右下方的数字“8”表示表有 8 行，也就是说用它安排的方案要作 8 次试验；括号内的数字“2”表示表内只出现 1，2 两个数字，它们分别表示因素的两个水平．这张表只能用于安排二水平的试验；数字 2 的右上角的数字“7”表示这张表有 7 列，该表用于不超过 7 个因素的试验设计．



说明

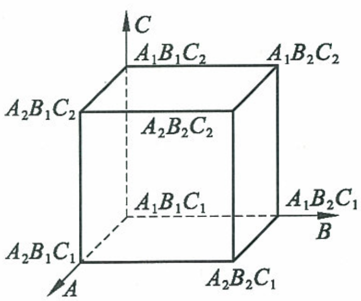
为了使用方便，教科书附录中给出了一些常用正交表：$L_4(2^3)$，$L_8(2^7)$，$L_{16}(2^{15})$，$L_9(3^4)$，$L_{27}(3^{13})$，$L_{16}(4^5)$．

思考交流

说明正交表 $L_9(3^4)$，$L_{16}(4^5)$记号的意义．

习　题　1—4

1. 数字 1，2，3，4，5 组成的不同数对(x,y)共有多少个？请写出来．
2. 在图所示的 8 个试验中，(1) 请选择 4 个试验，要求符合均衡搭配的原则；(2) 有多少种选择的方法？
3. 下面的数表是否为正交表？



（第 2 题）

(1)

1	1
1	1
1	2
1	2
2	1
2	1
2	1
2	1;

(2)

1	1	1
1	2	2
2	1	1
2	2	2
2	1	2
2	2	1
1	1	2
1	2	1;

(3)

1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
2	3	4
1	4	3
4	1	2
3	2	1
3	4	2
4	3	1
1	2	4
2	1	3
4	2	3
3	1	4
2	4	1
1	3	2.

4. 在筛选钢板的热处理工艺条件的试验中，要考虑三个因素：淬火温度、回火温度、回火时间，这是一个三因素三水平的问题. 根据过去积累的实际经验确定了它们的变化范围：

A：淬火温度(℃)　$A_1=840$　$A_2=850$　$A_3=860$

B：回火温度(℃)　$B_1=410$　$B_2=430$　$B_3=450$

C：回火时间(min)　$C_1=40$　$C_2=60$　$C_3=80$

试问：(1) 如果所有的试验都要作，共需多少次试验？

(2) 请从所有试验中挑选适当的试验，要求符合均衡搭配的原则. 把挑选的试验写出来.

5. 某产品的制作需要考虑 4 个因素，记为 A,B,C,D，每个因素有两个水平. 借助正交表从所有试验中挑选适当的试验设计方案.

§5　正交试验设计

5.1　利用正交表确定试验方案

选择正交表进行试验设计时，首先应当明确，试验涉及多少因素，每一个因素有多少水平数. 知道了这些，我们就可以选用适当的正交表了.

实例分析

实例 1　在§3.3中我们提到了爆米花试验. 下面利用正交表来解决这个问题.

分析　试验的因素及其水平如表1-13.

表 1-13　因素水平表

因素 \ 水平	1	2
加工时间(A)/min	$A_1=3.5$	$A_2=2.5$
粒数(B)/粒	$B_1=300$	$B_2=700$
颗粒大小(C)	C_1=颗粒大	C_2=颗粒小

第一步：选择合适的正交表.

首先，考虑因素的水平数. 在这个试验中，因素都取两个水平. 考虑使用二水平正交表. 常用的二水平正交表有 $L_4(2^3)$，$L_8(2^7)$，$L_{16}(2^{15})$等.

再看试验中要考察的因素个数. 这个试验中，共有3个因素，可以安排3个因素的最小正交表是 $L_4(2^3)$(见表1-14).

表 1-14　$L_4(2^3)$表

试验 \ 因素	因素 1	因素 2	因素 3
试验 1	1	1	1
试验 2	1	2	2
试验 3	2	1	2
试验 4	2	2	1

第二步：表头设计，确定试验方案.

把因素 A,B,C 填在 $L_4(2^3)$ 表头的 3 列上，哪个因素在哪一列上都可以.

例如，把 A 填在第 2 列上，B 填在第 1 列上，最后把因素 C 填在第 3 列上，得到如下方案，如表 1-15. 这恰是我们在 § 3.3 中的试验方案.

表 1-15　试验方案表

试验号＼因素	粒数(B)/粒	加工时间(A)/min	颗粒大小(C)
1	$B_1=300$	$A_1=3.5$	C_1＝颗粒大
2	$B_1=300$	$A_2=2.5$	C_2＝颗粒小
3	$B_2=700$	$A_1=3.5$	C_2＝颗粒小
4	$B_2=700$	$A_2=2.5$	C_1＝颗粒大

当然，所得的试验设计方案可能不同于上面所得到的，但也一定是均衡搭配的.

实例 2　以习题 1-4 中出现的一个三水平试验（钢板的热处理工艺条件试验）为例.

分析　试验的因素及其水平如表 1-16.

表 1-16　因素水平表

因　素	水　平		
A：淬火温度/(℃)	$A_1=840$	$A_2=850$	$A_3=860$
B：回火温度/(℃)	$B_1=410$	$B_2=430$	$B_3=450$
C：回火时间/min	$C_1=40$	$C_2=60$	$C_3=80$

第一步：选择合适的正交表.

首先，考虑因素的水平数. 试验中，每个因素取三个水平，所以要选用三水平正交表来安排试验方案.

三水平正交表有 $L_9(3^4)$，$L_{27}(3^{13})$等. 这里要考虑的因素个数为 3 个，故应选用一张至少有 3 列的三水平正交表.

$L_9(3^4)$（表 1-17）就是符合这个要求的最小正交表.

表 1-17　$L_9(3^4)$表

列号 / 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

第二步：表头设计，确定试验方案.

把因素 A,B,C 分别填在 $L_9(3^4)$表头的任意 3 列，例如第 1，3，4 列上，就得到一个试验方案（如表 1-18）.

表 1-18　$L_9(3^4)$表

列号 / 试验号	A		B	C
	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

其中，第 1 号试验条件 $A_1B_1C_1$ 详细写出来就是：淬火温度 840 ℃，回火温度 410 ℃，回火时间 40 min. 其余各试验类似.

我们得到如下的试验方案（如表 1-19）.

表 1-19　试验方案表

试验号	试验条件		
	淬火温度/(℃)	回火温度/(℃)	回火时间/min
1	840	410	40
2	840	430	60
3	840	450	80
4	850	430	80
5	850	450	40
6	850	410	60
7	860	450	60
8	860	410	80
9	860	430	40

根据正交表的特征,用它设计的试验方案符合均衡搭配的要求.

这里需要说明一点,每个因素的几个水平之间的顺序也是可以随便安排的,不一定强求由高到低或由低到高.

事实上,在正交表所确定的试验方案中,如果某一个试验的试验条件太极端,甚至无法实施,往往可以考虑调整因素水平的次序,重新安排,避开这个试验.

抽象概括

在开始试验设计之前,要明确试验的目的和要求,确定要考虑的因素及其水平.

正交试验设计准备阶段的工作分两步:

第一步:选择合适的正交表;

第二步:在正交表表头的列号上填上因素,从而得到试验方案(这个过程称为表头设计).

这是整个试验的第一阶段.下一阶段的工作就是按照表中列出的各项试验条件来进行试验.

练　习

1. 指出下列正交表的含义：

(1) $L_{27}(3^{13})$；

(2) $L_n(t^m)$.

2. 用大白鼠作试验，来了解正氟醚的毒性作用. 观察的指标是细胞色素，试验考察的因素有三个：

试验考察的因素	水平	
A:诱导药物	A_1＝生理盐水	A_2＝戊巴比妥
B:是否使用正氟醚	B_1＝不用正氟醚	B_2＝用正氟醚
C:大白鼠性别	C_1＝雄性大白鼠	C_2＝雌性大白鼠

请恰当选择正交表，并作表头设计.

5.2　实例分析

我们继续对§5.1实例2中的“钢板的热处理工艺条件试验”进行探讨.

在进行完表头设计，确定试验方案后，紧接着的工作就是按照表1-19中显示的各项试验条件来进行试验了.

试验的指标是钢板的强度，数据越大，表示试验结果越好. 正交试验设计的第三步就是把试验数据填入表格(见表1-20).

第三步：填写试验数据.

表1-20　试验方案表

列号 / 试验号	A		B	C	数　据
	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	$y_1=190$
2	1	2	2	2	$y_2=200$
3	1	3	3	3	$y_3=164$
4	2	1	2	3	$y_4=165$
5	2	2	3	1	$y_5=183$
6	2	3	1	2	$y_6=212$
7	3	1	3	2	$y_7=196$
8	3	2	1	3	$y_8=178$
9	3	3	2	1	$y_9=187$

第四步：数据分析.

1. 综合比较

对于因素 A：

出现 A_1 水平的三个试验(第 1,第 2 和第 3 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{I}_A=y_1+y_2+y_3=190+200+164=554$；

出现 A_2 水平的三个试验(第 4,第 5 和第 6 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{II}_A=y_4+y_5+y_6=165+183+212=560$；

出现 A_3 水平的三个试验(第 7,第 8 和第 9 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{III}_A=y_7+y_8+y_9=196+178+187=561$.

容易得到，A_3 水平最好.

对于因素 B：

出现 B_1 水平的三个试验(第 1,第 6 和第 8 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{I}_B=y_1+y_6+y_8=190+212+178=580$；

出现 B_2 水平的三个试验(第 2,第 4 和第 9 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{II}_B=y_2+y_4+y_9=200+165+187=552$；

出现 B_3 水平的三个试验(第 3,第 5 和第 7 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{III}_B=y_3+y_5+y_7=164+183+196=543$.

容易得到，B_1 水平最好.

对于因素 C：

出现 C_1 水平的三个试验(第 1,第 5 和第 9 号)的试验结果数据之和：$\mathrm{I}_C=y_1+y_5+y_9=190+183+187=560$；

其他计算类似.

我们把计算的结果填入表中，得表 1-21.

2. 确定最佳试验方案

从表 1-21 中，不难看出，因素 A,B,C 的好水平分别为 A_3,B_1,C_2，最佳试验方案为 $A_3B_1C_2$，即淬火温度为 860 ℃，回火温度为 410 ℃，回火时间为 60 min，与表中最好试验 $A_2B_1C_2$ 相比，它只是理论上的结果，还应通过试验进行检验.

3. 误差分析

我们来研究一下未填因素的列，即第二列. 按同样的方法，也能算出该列的数据：$\mathrm{I}=551$，$\mathrm{II}=561$，$\mathrm{III}=563$. 下面我们来分析一下这些数据的含义，以及它们给我们提供的信息.

数据 $\mathrm{I}=551$，它是 $A_1B_1C_1$，$A_2B_2C_3$，$A_3B_3C_2$ 试验结果数据的和，在这三个试验中，因素 A,B,C 的各个水平都出现且只出现一次.

表 1-21　试验计算表

试验号 \ 列号	A		B	C	数据
	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	$y_1=190$
2	1	2	2	2	$y_2=200$
3	1	3	3	3	$y_3=164$
4	2	1	2	3	$y_4=165$
5	2	2	3	1	$y_5=183$
6	2	3	1	2	$y_6=212$
7	3	1	3	2	$y_7=196$
8	3	2	1	3	$y_8=178$
9	3	3	2	1	$y_9=187$
Ⅰ	554	551	580	560	$T=1\ 675$
Ⅱ	560	561	552	608	
Ⅲ	561	563	543	507	

同理，数据Ⅱ＝561，它是 $A_1B_2C_2$，$A_2B_3C_1$，$A_3B_1C_3$ 试验结果数据的和，在这三个试验中，因素 A，B，C 的各个水平也是都出现且只出现一次.

数据Ⅲ＝563，它是 $A_1B_3C_3$，$A_2B_1C_2$，$A_3B_2C_1$ 试验结果数据的和，在这三个试验中，因素 A，B，C 的各个水平同样都出现且只出现一次.

故我们认为，在理论上，这三个数值应当非常接近. 它们之间的差别，应该说是由试验的误差造成的. 所以，这三个数值的波动程度可以作为判定我们试验误差大小的一个依据.

我们用“极差”来评定几个数据波动的大小.

一组数据的“极差”就是指：这组数据中，最大数与最小数的差. 显然，“极差”越大，波动越大.

就这个问题来说，误差列所得的这几个数据的极差为：$563-551=12$. 把它看作这个试验的误差.

我们把各列的极差填入表中，得表 1-22.

表 1-22 试验计算表

试验号 \ 列号	A 1	 2	B 3	C 4	数据
1	1	1	1	1	$y_1=190$
2	1	2	2	2	$y_2=200$
3	1	3	3	3	$y_3=164$
4	2	1	2	3	$y_4=165$
5	2	2	3	1	$y_5=183$
6	2	3	1	2	$y_6=212$
7	3	1	3	2	$y_7=196$
8	3	2	1	3	$y_8=178$
9	3	3	2	1	$y_9=187$
Ⅰ	554	551	580	560	$T=1\ 675$
Ⅱ	560	561	552	608	
Ⅲ	561	563	543	507	
极差	7	12	37	101	

4. 主次分析

从现有的试验数据，我们想知道：哪个因素是主要的，哪个因素是相对次要的.

一般说来，如果某因素从一个水平改变为另一个水平时，试验结果数据的变化较大，就说明这个因素对试验结果的影响较大，通常就称这个因素是主要因素. 反之，称这个因素是次要因素.

例如，在上面的例子当中，因素 A 的极差为：$561-554=7$，因素 B 的极差为 37，因素 C 的极差为 101.

把三个极差加以比较，可以发现，因素 C 影响最大，因素 B 次之，因素 A 影响最小.

因素 A 取不同水平引起试验结果数据的变化比误差引起的变化还要小，这说明因素 A 水平的变化对试验结果不会产生大的影响.

由正交表的均衡性知道，表中所作的试验中必有一个是相当好的. 事实上可以看出，理论上最优的试验方案 $A_3B_1C_2$ 与试验中得到的最优方案 $A_2B_1C_2$ 在主要因素 C，B 上是一致的.

5. 水平修订、趋势分析

根据因素的主次关系，我们先选定因素 B，C 的水平为 B_1，C_2. 而因素 A 的水平在目前的三个水平之间怎么选对指标的影响并不大，在实际生产中，取温度较低的 A_1 便于操作，这样最后选出的最优条件便是 $A_1B_1C_2$. 这与刚才选定的结果是不一样的.

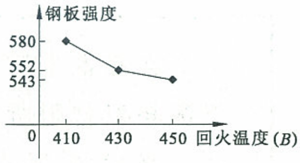


图 1-5

在直角坐标系中，可以用图把因素 B，C 对试验结果的影响反映出来. 如图 1-5 和图 1-6 所示.

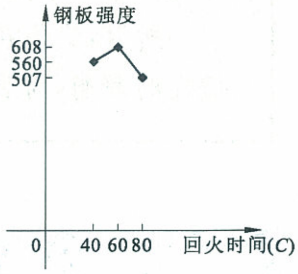


图 1-6

从图中我们可以看出，因素 B，C 变化的趋势对试验结果的影响，如果我们进一步作试验，因素 B 可以选择在小于 410 ℃的范围内，而因素 C 应在 60 min 左右选择新的水平.

思考交流

请总结试验设计的基本步骤.

阅读材料

交互作用

某个因素发挥的作用大小也会受到其他因素(一个或几个)的影响和制约.

下面我们看一个具体例子来说明这一点.

在大小相同、条件一致的四块地上种同一种农作物，第一块地不施肥，第二块地施氮肥 10 kg，第三块地施磷肥8 kg，第四块地施氮肥 10 kg、磷肥 8 kg，最后的产量如下表所示.

施氮肥/kg　产量/kg　施磷肥量/kg	0	10
0	400	450
8	430	500

在这里，10 kg 氮肥对产量所起的作用是：$450-400=50$(kg)；

8 kg 磷肥对产量所起的作用是：$430-400=30$(kg)；

10 kg 氮肥和 8 kg 磷肥对产量的共同作用是：$500-400=100$(kg).

氮肥和磷肥对产量的共同作用比两种化肥的单独作用多出20 kg. 这说明氮肥和磷肥存在着相互促进的作用. 我们把由于这个原因而产生的对试验指标的作用叫作交互作用.

在日常生活中也不乏这样的例子. 比如，两个乒乓球队员各自的单打水平一般，但配合双打则所向披靡.

当然，交互作用也不一定都是好的. 比如两个单打水平高的运动员，组合参加双打比赛成绩未必优秀.

所以，我们在处理多因素试验时，不仅需要分别研究各因素水平的改变对试验指标的影响，而且还需要考察这些因素的交互作用.

习 题 1—5

1. 某化工厂为提高某种产品的产量，对生产条件进行试验. 拟采用的因素、水平如下表所示.

因素水平表

试验考察的因素	水平	
A:反应温度/(℃)	$A_1=60$	$A_2=80$
B:反应时间/h	$B_1=2.5$	$B_2=3.5$
C:两种原料配比	$C_1=1.1:1$	$C_2=1.2:1$
D:真空度/Pa	$D_1=0.7$	$D_2=0.8$

共作 8 次试验，结果见下表.

试验方案表

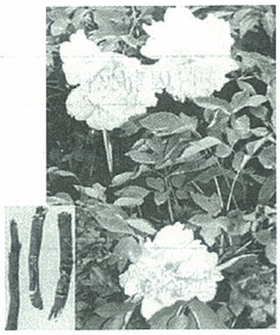
因素 试验号	反应温度/(℃)	反应时间/h	两种原料配比	真空度/Pa	试验结果产量/kg
1	A_1	B_1	C_1	D_1	86
2	A_1	B_1	C_2	D_2	95
3	A_1	B_2	C_1	D_2	91
4	A_1	B_2	C_2	D_1	94
5	A_2	B_1	C_1	D_2	91
6	A_2	B_1	C_2	D_1	96
7	A_2	B_2	C_1	D_1	83
8	A_2	B_2	C_2	D_2	88

在这个试验当中，试验的指标是产量.

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行主次分析，对进一步的试验指出方向.

2. 某工艺需考察 4 个因素 A,B,C,D，每个因素有三个水平. 选用正交表$L_9(3^4)$，将因素 A,B,C,D 顺序地安排在第 1,2,3,4 列上，所得 9 个试验结果依次为：$y_1=45.5$，$y_2=33.0$，$y_3=32.5$，$y_4=36.5$，$y_5=32.0$，$y_6=14.5$，$y_7=40.5$，$y_8=33.0$，$y_9=28.0$. 试分析最优工艺条件及因素影响的主次顺序.



3. 丹皮是牡丹的根皮，丹皮酚是丹皮的有效成分. 丹皮酚在医药、香料、化学领域具有广泛的用途. 国内丹皮酚的提取一般用水蒸气蒸馏法. 根据实验工艺条件，选定加水量、加硫酸钠量和温浸时间作为考察的三个因素，各取三个水平(见下表).

试验以测定丹皮酚的提取率为考察指标(提取率越高越好).

选用 $L_9(3^4)$ 正交表进行试验，每次试验的牡丹皮用量均为 50 g. 收集初蒸馏液量为 250 mL，重蒸馏液量为 100 mL.

因素水平表

水平	因素		
	A	B	C
	加水量/mL	加硫酸钠量/g	温浸时间/h
1	$A_1=750$	$B_1=0$	$C_1=0.5$
2	$A_2=1\ 000$	$B_2=2.5$	$C_2=1$
3	$A_3=1\ 250$	$B_3=5.0$	$C_3=2$

$L_9(3^4)$ 正交试验数据

试验号	A	B	C		丹皮酚含量
1	1	1	1	1	1.750%
2	1	2	2	2	2.377%
3	1	3	3	3	2.418%
4	2	1	2	3	1.882%
5	2	2	3	1	2.284%
6	2	3	1	2	2.077%
7	3	1	3	2	1.959%
8	3	2	1	3	1.986%
9	3	3	2	1	2.240%

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行误差分析、主次分析，针对每个因素画出试验数据图；

(3) 对进一步的试验给出建议.

4. 击实试验是道路工程基层混合料试验中最基本的试验之一，通过击实试验可以确定不同组的强度特性和不同配比混合料的最大干容重和最佳含水量，进而对混合料变形特性、路用性能进行分析.

最大干容重直接影响工程施工质量，控制工程施工进度、工程造价，是基层工程质量的重要影响因素.

影响最大干容重的是石灰、粉煤灰、细料之间的配比. 下面通过正交试验方法分析、确定出上述三因素之间的关系. 参考现有的生产方案，结合具体情况，试验拟定因素和水平如下表.

因素水平表

因素水平	石灰(A)	粉煤灰(B)	细料(C)
1	3.5%	8%	18%
2	5.0%	11%	23%
3	6.5%	15%	28%

将试验因素和水平依次列入正交表 $L_9(3^4)$中即构成试验方案. 见下表.

表头设计

列号	1	2	3	4
因素	A	B	C	空

具体试验方案见下表.

试验方案表

因素水平 / 试验号	石灰(A)	粉煤灰(B)	细料(C)
W_1	1(3.5%)	1(8%)	1(18%)
W_2	1(3.5%)	2(11%)	2(23%)
W_3	1(3.5%)	3(15%)	3(28%)
W_4	2(5.0%)	1(8%)	2(23%)
W_5	2(5.0%)	2(11%)	3(28%)
W_6	2(5.0%)	3(15%)	1(18%)
W_7	3(6.5%)	1(8%)	3(28%)
W_8	3(6.5%)	2(11%)	1(18%)
W_9	3(6.5%)	3(15%)	2(23%)

试验结果见下表(数据越大越好).

试验结果表

代号	混合料配比 (石灰∶粉煤灰∶细料)	最大干容重 /(g/cm³)
W_1	3.5∶8∶18	2.235
W_2	3.5∶11∶23	2.147
W_3	3.5∶15∶28	2.089
W_4	5.0∶8∶23	2.204
W_5	5.0∶11∶28	2.103
W_6	5.0∶15∶18	2.096
W_7	6.5∶8∶28	2.139
W_8	6.5∶11∶18	2.099
W_9	6.5∶15∶23	2.065

(1) 填写试验数据表,确定理论上的最佳试验方案;

(2) 进行误差分析、主次分析,针对每个因素画出试验数据图;

(3) 根据因素主次关系,对进一步的试验给出建议.

5. 考察某个四因素三水平试验，因素 A,B,C,D.

今选用表 $L_{27}(3^{13})$，将 A,B,C,D 依次安排在第 1,2,5,9 列上，所得 27 个试验结果依次为：$y_1=4.6,y_2=8.9,y_3=1.7,y_4=5.9,y_5=1.0,y_6=0.7,y_7=2.4,y_8=2.4,y_9=6.4,y_{10}=1.0,y_{11}=3.1,y_{12}=1.4,y_{13}=0.7,y_{14}=0.8,y_{15}=1.0,y_{16}=1.5,y_{17}=3.8,y_{18}=1.2,y_{19}=0.9,y_{20}=3.7,y_{21}=1.6,y_{22}=1.6,y_{23}=4.5,y_{24}=0.0,y_{25}=4.7,y_{26}=6.0,y_{27}=1.4$.（此题以试验结果的数据大者为好）

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行误差分析、主次分析；

(3) 对进一步的试验给出建议.

复习题一

1. 人参为舒脉宁注射液中的贵重药，人参皂苷提取量直接影响注射液的疗效. 因此为制备舒脉宁注射液而提取人参皂苷，参考有关资料，用正交设计法研究其最佳提取工艺.

   根据人参皂苷的性质，确定用乙醇回流法提取，在自然 pH 条件下，重点考察乙醇用量(A)、乙醇浓度(B)、回流时间(C)、回流次数(D)4 个因素，每个因素有 3 个水平(见下表).

因素水平表

因素 / 水平	乙醇用量 (A)/倍	乙醇浓度 (B)/%	回流时间 (C)/min	回流次数 (D)/次
1	8	75	30	3
2	10	85	40	4
3	12	95	50	5

本研究选择 $L_9(3^4)$表，正交设计及试验结果见下表.

试验方案表

试验号	乙醇用量 (A)/倍	乙醇浓度 (B)/%	回流时间 (C)/min	回流次数 (D)/次	皂苷提取率 /(μg/mL)
1	1	1	1	1	19.72
2	1	2	2	2	10.48
3	1	3	3	3	4.57
4	2	1	2	3	20.43
5	2	2	3	1	15.23
6	2	3	1	2	7.22
7	3	1	3	2	18.20
8	3	2	1	3	15.70
9	3	3	2	1	2.84

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行主次分析；

(3) 对进一步的试验给出建议.

2. 久益烧伤膏是解放军第 91 医院烧伤科与济宁市久益中药研究所联合研制的用于治疗烧伤烫伤的外用药物. 为了保证制剂质量，进行了提取工艺的研究. 重点考察提取温度、保温时间和浸泡时间 3 个因素，每个因素确定 3 个水平(见下表).

因素水平表

水平＼因素	提取温度/(℃)	保温时间/min	浸泡时间/h
1	200	5	0
2	170	10	2
3	150	20	14

选择 $L_9(3^4)$表，正交试验实施方案及提取率见下表.

试验方案表

试验号	提取温度/(℃)	保温时间/min		浸泡时间/h	提取率/(mg/g)
1	1	1	1	1	10.477 6
2	1	2	2	2	17.415 1
3	1	3	3	3	18.002 2
4	2	1	2	3	14.874 9
5	2	2	3	1	15.104 2
6	2	3	1	2	16.336 7
7	3	1	3	2	17.139 5
8	3	2	1	3	13.041 7
9	3	3	2	1	12.394 7

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行误差分析、主次分析；

(3) 对进一步的试验给出建议.

3. 丹参红花注射液是由丹参、红花等中药经提取、精制后制备成的静脉注射剂，具有活血化瘀，通络止痛作用. 为了提高药品的质量，现研究其最佳精制工艺. 重点考察提取液浓缩的程度、含乙醇量、加醇次数和醇溶液 pH 值 4 个因素，每个因素选择 3 个水平(见下表).

因素水平表

水平＼因素	提取液浓缩程度	含乙醇量/(%)	加醇次数/次	醇溶液 pH 值
1	1∶0.5	75	1	5
2	1∶1	80	2	7
3	1∶2	85	2	9

选择 $L_9(3^4)$正交表，具体实施方案及试验数据见下表.

试验方案表

试验号	提取液浓缩程度	含乙醇量	加醇次数	醇溶液 pH 值	综合指标
1	1	1	1	1	27.12
2	1	2	2	2	19.38
3	1	3	3	3	12.36
4	2	1	2	3	0.31
5	2	2	3	1	23.84
6	2	3	1	2	22.44
7	3	1	3	2	14.21
8	3	2	1	3	14.28
9	3	3	2	1	0.14

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行主次分析；

(3) 对进一步的试验给出建议.

4. 在一个四因素二水平试验中，考察因素 A,B,C,D.

选用表 $L_8(2^7)$，将 A,B,C,D 依次安排在第 1，2，4，5 列上，所得 8 个试验结果依次为：$y_1=12.8$，$y_2=28.2$，$y_3=26.1$，$y_4=35.3$，$y_5=30.5$，$y_6=4.3$，$y_7=33.3$，$y_8=4.0$.（在这个试验中，试验结果的数据越大越好）

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行误差分析、主次分析；

(3) 对进一步的试验给出建议.

5. 在一个四因素二水平试验中，考察因素 A,B,C,D.

选用表 $L_{16}(2^{15})$，将 A,B,C,D 依次安排在第 1，2，5，9 列上，所得 16 个试验结果依次为：$y_1=4.6$，$y_2=8.9$，$y_3=1.7$，$y_4=5.9$，$y_5=1.0$，$y_6=0.7$，$y_7=2.4$，$y_8=2.4$，$y_9=6.4$，$y_{10}=1.0$，$y_{11}=3.1$，$y_{12}=1.4$，$y_{13}=0.7$，$y_{14}=0.8$，$y_{15}=1.0$，$y_{16}=1.5$.（在这个试验中，试验结果的数据越小越好）

(1) 填写试验数据表，确定理论上的最佳试验方案；

(2) 进行误差分析、主次分析；

(3) 对进一步的试验给出建议.

第二章　优　选　法

在生产实践和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目的，需要对有关因素的最佳点进行选择.

这些选择最佳点的问题，都称之为选优问题.解决这些选优问题的方法称为优选法.

§1　单因素优选法

1.1　单因素选优问题及其处理方法

问题提出

在某种化工产品的生产中，它的产量随加工温度的变化而变化.生产过程中，通常选用的加工温度在 70 ℃～82 ℃之间，随着温度的升高，产量随之提高.但当温度达到一定程度以后，随着温度的升高，产量反而降低了.那么，怎样找到这个最佳温度呢？

分析理解

明显地，在 70 ℃～82 ℃之间存在一个最合适的温度，使产品的产量达到最大，我们称这个最大值为产量的峰值，使产量达到峰值的加工温度称为温度的最佳值，它是我们要寻求的.我们把区间[70,82](单位:℃)称为**含峰区间**(它含有使产量达到峰值的温度的最佳值).

现在，我们只是知道产量与温度有关系，但无法定量描述.在生产实际中，往往是通过作试验的方法解决这个问题.

显然，仅作一次试验不能说明什么问题.我们考虑先作两次试验，在 70 ℃～82 ℃间取两个点(比如 75 ℃和 80 ℃)，各作一次试验，比较两次试验产量的高低，不妨假设试验结果如图 2-1 所示(x 代表温度，y 代表产量).

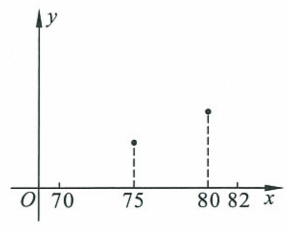
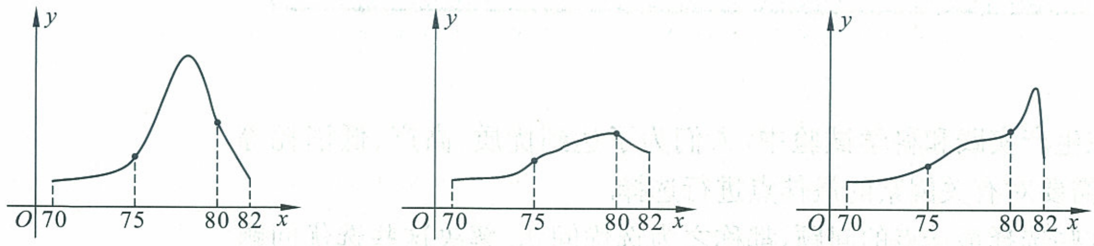


图 2-1

由图可知，在 80 ℃时的产量比在 75 ℃时的产量要高，我们当然不能说加工温度的最佳值就一定是 80 ℃，但使产量达到峰值的最佳温度一定会在区间[75，82]（单位：℃）内，这是为什么呢？

由于我们所考虑的问题只有一个峰值（这个问题中是指最大值），所以只可能是图 2-2 所示的三种情况.



（1）　　（2）　　（3）

图 2-2

可见最佳点不可能在 75 ℃的左边，所以我们继续试验就不必考虑 75 ℃左边的点了，只需在剩余的范围[75，82]（单位：℃）内继续进行选优，即含峰区间缩小了.

在新的含峰区间中继续作这样的试验，就可以不断地把含峰区间缩短，逐渐逼近加工温度的最佳值.

抽象概括

前面提出的问题，具有如下特征：

1. 对结果产生影响的因素只有一个，而且这个因素对结果的影响是不能定量描述的.

实际上，产量与温度的关系可以用一元函数 $y=f(x)$ 刻画，其中 x 为温度，y 为产量，但我们无法得知函数的表达式.

影响试验结果的因素，它的取值限定在一定范围内，这个范围可以用一个闭区间表示. 例如，温度（单位：℃）的取值范围是[70，82].

2. 单峰性.

当因素在闭区间内由小到大变化时，试验结果随着因素取值的增大而增大（或减小），但当因素达到某一值以后，试验结果随着因素取值的增大反而减小（或增大）了. 当然，也可能随因素取值的增大，试验结果始终增大（或减小）.

在这个过程中，“峰值”是唯一存在的，只不过我们不知道“峰值”的位置（如图 2-3）.

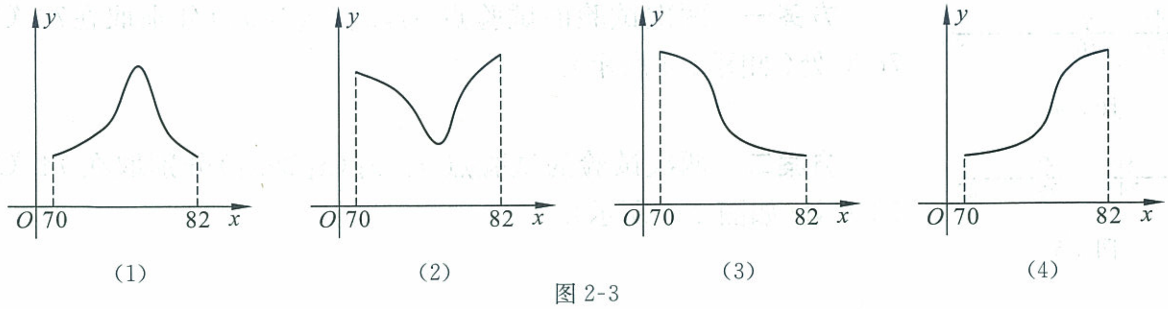


图 2-3

我们把满足上面两个条件的选优问题称为**单因素选优问题**.

3. 用作试验的办法解决单因素选优问题时，先作两次试验，通过对试验结果的比较，去掉不含最佳点的区间，缩小因素的取值范围. 第三次试验的结果与上次保留的试验结果加以比较，再次去掉不含最佳点的区间. 如此继续下去，不断地缩小因素的取值区间，可以不断地接近最佳点.

这就是解决单因素选优问题的基本思想.

练　习

1. 下列问题中，哪些是单因素选优问题，为什么？

(1) 向一定量的 $AlCl_3$ 溶液中滴入 NaOH 溶液，求当加入的 NaOH 溶液达到多少时，溶液中的沉淀最多？

(2) 适量的生长素可以促进植物根系的生长，但过量则会抑制其生长. 对某种植物，研究适宜的生长素用量.

2. 如果先作的两次试验的结果如图 1 或图 2 所示. 在区间[70，82]中，是否两个图都可以去掉不含最佳点的一部分，从而达到缩小因素取值范围的目的呢？

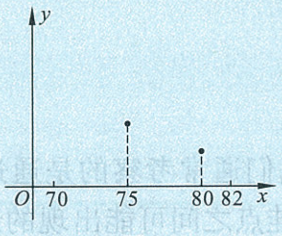


图 1

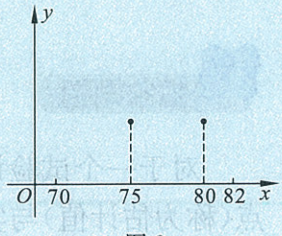


图 2

(第 2 题)

1.2　误差估计

问题提出

在前面提到的单因素选优问题中，如果限定只作两次试验，那么下面提供的两个试验方案中，哪个方案更好呢？

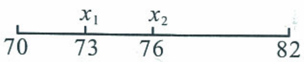


图 2-4

方案一　两次试验的试验点 $x_1, x_2\ (x_2 > x_1)$ 分别取在 73 ℃ 和 76 ℃处(如图 2-4 所示).

图 2-5

方案二　两次试验的试验点 $x_1, x_2\ (x_2 > x_1)$ 分别取在 74 ℃ 和 78 ℃处(如图 2-5 所示).

分析理解

我们通常取最后含峰区间中已作过的试验点为最佳值的估计值.

在方案一中,如果 73 ℃处的试验结果比 76 ℃处好,最佳点应该在 70 ℃～76 ℃之间,$x_1=73$ ℃为试验确定的最佳值的估计值. 最极端的情况,最佳点可能出现在 70 ℃或 76 ℃的位置上,此时,$x_1=73$ ℃与实际最佳点之间可能出现的最大“距离”为 3 ℃.

如果 76 ℃处的试验结果比 73 ℃处好,最佳点应该在 73 ℃～82 ℃之间,最极端的情况,最佳点可能出现在 82 ℃的位置上,此时,试验确定的最佳值的估计值 $x_2=76$ ℃与实际最佳点之间可能出现的最大“距离”为 6 ℃.

在方案二中,无论 x_1, x_2 哪一个点好,去掉的区间长度均为 4. 不妨考虑 x_1 比 x_2 好的情况. 去掉区间[78,82],如图 2-6 所示.

图 2-6

x_1 为剩余区间[70,78]的中点,以它为最佳值的估计值,则它与实际最佳点之间可能出现的最大“距离”为 4 ℃.

可以看到,在第二个方案中,估计值与实际最佳点的“距离”比第一个方案的要小,由此,我们认为方案二比方案一好.

抽象概括

对于一个试验设计,我们通常考察的是通过试验所选择的最佳点(称为估计值)与实际最佳点之间可能出现的最大“距离”,一般地,我们把这个最大“距离”称为这个试验设计的**误差**.

我们进行试验设计的目的就是使误差达到最小.

在上面的例子中,方案一的误差是 6 ℃,方案二的误差是 4 ℃.

练　习

用作试验的办法来解决单因素选优问题,即对因素取若干个值,进行试验,比较试验结果,找到最佳点. 对于只作三次试验的情况,请你提供两个方案,并比较它们的好坏.

习题 2—1

1. 在解决具有单峰性的单因素选优问题时，如果只作一次试验，是否可以从因素取值范围中去掉不含最佳点的一部分？

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，若存在 $x^* \in (0,1)$，使得 $f(x)$ 在 $[0,x^*]$ 上是增加的，在 $[x^*,1]$ 上是减少的，则称 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的单峰函数，x^* 为峰点，包含峰点的区间为含峰区间.

   对任意的 $[0,1]$ 上的单峰函数 $f(x)$，下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

   (Ⅰ)证明：对任意的 $x_1, x_2 \in (0,1)$，$x_1 < x_2$，若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则 $[0,x_2]$ 为含峰区间；若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则 $[x_1,1]$ 为含峰区间；

   *(Ⅱ)对给定的 $r(0<r<0.5)$，证明：存在 $x_1, x_2 \in (0,1)$，$x_1<x_2$，满足 $x_2-x_1 \geqslant 2r$，使得由(Ⅰ)确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$.

3. 如果选优问题是求试验结果达到最小值的最佳点，以图 2-3(2)所示的优选问题为例. 先作两次试验，即在试验范围中选择两个点.

   (1)这两次试验的结果可能有哪些情况？

   (2)对每一种可能的试验结果，是否可以从区间 $[70,82]$ 中去掉不含最佳点的一部分？

4. 在解决具有最大值的单因素选优问题时，如果只允许作三次试验，该怎样安排这三次试验呢？

   我们考虑如下的试验方案：在整个试验范围（设为 $[a,b]$）内平均取 3 个值（即 4 等分点），依次设为 x_1, x_2, x_3，同时作试验，并比较它们的结果.

   (1)假设 x_2 的结果最好，最佳点一定在区间________内. 那么，通过试验最终选定的点（即 x_2）与实际最佳点的最大可能“距离”是________.

   (2)假设 x_3 的结果最好，最佳点一定在区间________内. 通过试验最终选定的点与实际最佳点的最大可能“距离”是________.

   (3)假设 x_1 的结果最好，最佳点一定在区间________内. 通过试验最终选定的点与实际最佳点的最大可能“距离”是________.

§2 分 数 法

在实际中，单因素选优问题常常是限定了试验次数的，对这样的问题，如何设计试验，才能达到最好的效果呢？

解决这个问题的方法是**分数法**，如果限定的试验次数是 n 次，就称为 n 次试验分数法.

2.1 两次试验分数法的试验设计

问题提出

对于§1中提出的单因素选优问题，如果限定试验次数为两次，那么如何进行试验设计，才能使误差达到最小呢？

分析理解

在上一节课，我们给了两个方案，以下我们来证明，当限定试验次数为两次的时候，方案二是使试验误差达到最小的试验设计.

证明 为证明叙述的方便，我们把最初始的含峰区间的长度设为 1.

在方案二中，x_1，x_2 分别取 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，无论 x_1，x_2 哪一个点好，去掉的区间长度均为 $\frac{1}{3}$. 不妨考虑 x_1 比 x_2 好的情况. 去掉区间 $\left[\frac{2}{3},1\right]$，$x_1$ 为剩余区间 $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ 的中点，以它为最佳值的估计值，则它与实际最佳点之间可能出现的最大“距离”即误差 d 为 $\frac{1}{3}$.

对于不是方案二的情况，分两种情形讨论 x_1 点的位置（令 $x_2>x_1$）.

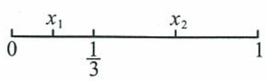


图 2-7

(1) $x_1<\frac{1}{3}$，如图 2-7 所示.

如果 x_2 处的试验结果比 x_1 处好. 此时，应该去掉区间 $[0,x_1]$. 最佳点应该在 $[x_1,1]$ 中，无论 x_2 在什么位置处，试验误差不小于

剩余区间的$\frac{1}{2}$，即试验误差 $d \geqslant \frac{1}{2}(1-x_1) > \frac{1}{3}$.

(2)$x_1 > \frac{1}{3}$，如图 2-8 所示. 如果 x_1 处的试验结果比 x_2 处好. 此时，去掉区间$[x_2, 1]$.

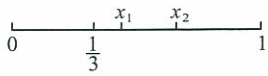


图 2-8

最佳点应该在$[0, x_2]$中，最极端的情况，最佳点可能出现在 0 的位置上，此时，试验的误差为 $d = x_1 - 0 > \frac{1}{3}$.

综合以上两种情况的讨论得到结论：为使试验误差最小，应取 $x_1 = \frac{1}{3}$. 类似上面的推理，我们同样可以得到结论：$x_2 = \frac{2}{3}$.

对于长度不是 1 的情况类似可证.

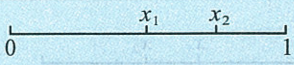
抽象概括

结论 1　对于单因素试验问题，在长度为 a 的试验区间内，如果只作两次试验(即 $n=2$)，那么试验点分别选在$\frac{a}{3}$，$\frac{2a}{3}$处，才能使试验的误差最小，此时误差为区间长度的$\frac{1}{3}\left(d = \frac{1}{3}a\right)$.

这个解决单因素选优问题的方法就是两次试验分数法.

练　习

1. 对于单因素选优问题，限定试验次数为两次. 试验范围记作$[0, 1]$，如图所示. 如果两次试验的试验点 x_1，x_2($x_2 > x_1$)分别取在$\frac{1}{5}$和$\frac{4}{5}$处. 求试验的误差.



(第 1 题)

2. 对于单因素选优问题，试验范围记作$[0, 1]$，限试验次数为两次，两次试验的试验点为 x_1，x_2($x_2 > x_1$).

求证：(1)当 $x_2 > \frac{2}{3}$ 时，试验误差 $d > \frac{1}{3}$；

(2)当 $x_2 < \frac{2}{3}$ 时，试验误差 $d > \frac{1}{3}$.

2.2　三次试验分数法的试验设计

问题提出

对于前面提到的单因素选优问题，如果限定试验次数为三次，那么如何进行试验设计，才能使误差达到最小呢？

分析理解

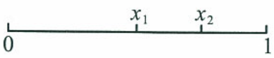


图 2-9

试验范围记作[0,1]，我们先在 x_1，x_2（$x_1<x_2$）两点作两次试验. 如图 2-9 所示.

图 2-10

方案一　前两次试验的试验点 x_1，x_2 分别取在$\frac{1}{4}$和$\frac{3}{4}$处，如图 2-10 所示.

比较两次试验的结果，因为不论哪个点好，去掉区间的长度都是$\frac{1}{4}$. 不妨设 x_1 比 x_2 好，去掉区间[x_2，1].

x_1 为剩余区间的$\frac{1}{3}$处，由结论 1 知，第三次试验的试验点 x_3 取在剩余区间的$\frac{2}{3}$处最好，此时的试验误差为$\frac{1}{4}$.

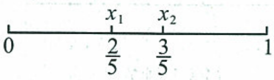


图 2-11

方案二　前两次试验的试验点 x_1，x_2 分别取在$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$处，如图 2-11 所示.

无论去掉哪一段，剩余区间的$\frac{1}{3}\left(或\frac{2}{3}\right)$处的点已作过试验，由结论 1 知，只需在剩余区间的$\frac{2}{3}\left(或\frac{1}{3}\right)$处再作一次试验即可，这时的试验误差为$\frac{1}{5}$.

所以，方案二比方案一好.

下面我们证明，当限定试验次数为三次时，方案二是使试验误差达到最小的试验设计.

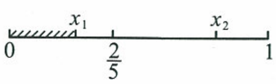


图 2-12

证明　假设 $x_2>x_1$，分两种情形讨论 x_1 点的位置.

1. $x_1<\frac{2}{5}$，如图 2-12 所示.

如果 x_2 处的试验结果比 x_1 处好.

此时，应去掉区间$[0,x_1]$，在剩余的$[x_1,1]$中，无论第三次试验取在哪里，根据结论 1，误差都不小于剩余区间的$\frac{1}{3}$，即误差 $d \geqslant \frac{1}{3}(1-x_1) > \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

2. $x_1 > \frac{2}{5}$，如图 2-13 所示.

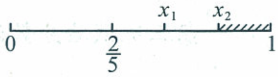


图 2-13

如果 x_1 处的试验结果比 x_2 处好.

此时，应去掉区间$[x_2,1]$，在剩余的$[0,x_2]$中，取第三次试验点 x_3. 再分两种情况进行讨论.

(1)如果 $x_3 < x_1$，我们考虑 x_3 比 x_1 好的情况.

此时，应去掉区间$[x_1,x_2]$，如图 2-14 所示.

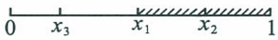


图 2-14

在剩余的$[0,x_1]$中，无论点 x_3 取在何处，误差不小于剩余区间$[0,x_1]$长度的$\frac{1}{2}$：$d \geqslant \frac{1}{2}x_1 > \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

(2)如果 $x_3 > x_1$，考虑 x_1 比 x_3 好的情况. 此时，应去掉区间$[x_3,x_2]$，如图 2-15 所示.

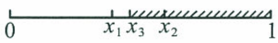


图 2-15

在剩余的$[0,x_3]$中，点 x_1 为最佳近似点. 最坏的情况是最佳点为 0，误差 $d \geqslant x_1 - 0 = x_1 > \frac{2}{5} > \frac{1}{5}$.

可见，无论何种情况，误差都将大于$\frac{1}{5}$. 为使试验误差最小，应取 $x_1 = \frac{2}{5}$. 利用对称性，同样可以得到结论：$x_2 = \frac{3}{5}$.

抽象概括

结论 2　对于单因素选优问题，在长度为 a 的试验区间内，如果只作三次试验(即 $n=3$)，则前两次试验应取在$\frac{2}{5}a$，$\frac{3}{5}a$ 处，无论去掉哪一段，剩余区间中的一个三等分点已作过试验，只需在另一个三等分点再作一次试验即可，这样才能使试验的误差最小. 此时，误差为区间长度的$\frac{1}{5}\left(d = \frac{a}{5}\right)$.

上面的解决单因素选优问题的方法称为三次试验分数法.

思考交流

限定试验次数为四次，仿照上面的方法，证明前两次试验的试验

点应分别取在区间长度的$\frac{3}{8}$和$\frac{5}{8}$处，才能使误差达到最小.

练习

在三次试验分数法的讨论中，仿照$x_1=\frac{2}{5}$的证明，说明要使试验误差最小，第二次试验点应取在区间的$\frac{3}{5}$处.

2.3 n次试验分数法的试验设计

问题提出

对于前面提到的单因素选优问题，如果限定试验次数为n，那么该怎样进行试验设计，才能使误差达到最小呢？

分析理解

记试验范围为[0,1]. 我们先在x_1，x_2（$x_1<x_2$）两点作试验. 比较两次试验的结果，去掉一段无最佳点的区间. 在剩余区间中，再作第三次试验，重复前面的步骤，直至n次试验完成.

将前面的结果填写在表2-1内.

表2-1 试验结果表

试验次数n	前两次试验点x_1，x_2	误　差
$n=1$	$x_1=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$n=2$	$x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$n=3$	$x_1=\frac{2}{5}$，$x_2=\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
$n=4$	$x_1=\frac{3}{8}$，$x_2=\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
…	…	…

可以看出：

1. x_1与x_2关于区间的中点对称.

2. 在剩余区间$[a,b]$中，取与已有的试验点 c 对称的点 c' 作为下一次的试验点. 不难推出：$c'=(a+b)-c$. 这种确定试验点的方法称为“加两头、减中间”来回调试法.

下面，分析前两次试验点 x_1, x_2.

引入一个数列[1]：1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

如果记这个数列的第 n 项为 F_n，不难看出：

$F_1=1, F_2=2, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，其中 $n\geqslant 3$.

结合表 2-1 可以得到：

当 $n=1$ 时，$x_1=\frac{1}{2}=\frac{F_1}{F_2}$，误差 $d=\frac{1}{2}=\frac{1}{F_2}$；

当 $n=2$ 时，$x_1=\frac{1}{3}=\frac{F_1}{F_3}$，$x_2=\frac{2}{3}=\frac{F_2}{F_3}$，误差 $d=\frac{1}{3}=\frac{1}{F_3}$；

当 $n=3$ 时，$x_1=\frac{2}{5}=\frac{F_2}{F_4}$，$x_2=\frac{3}{5}=\frac{F_3}{F_4}$，误差 $d=\frac{1}{5}=\frac{1}{F_4}$；

当 $n=4$ 时，$x_1=\frac{3}{8}=\frac{F_3}{F_5}$，$x_2=\frac{5}{8}=\frac{F_4}{F_5}$，误差 $d=\frac{1}{8}=\frac{1}{F_5}$.

……

归纳得到，当试验次数限定为 n 时，前两次试验的试验点 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$应如下选取：

$$x_1=\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}},\ x_2=\frac{F_n}{F_{n+1}},\ \text{误差}\ d=\frac{1}{F_{n+1}};$$

定理 用分数法解决单因素选优问题时，在长度为 a 的试验区间内，如果限定试验次数为 n 次，则前两次试验的试验点应该选在 $\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}a$ 和 $\frac{F_n}{F_{n+1}}a$ 处，比较优劣后，在剩余区间内用“加两头、减中间”来回调试法，依次再作 $n-2$ 次试验，最后得到试验最佳点，误差是 $d=\frac{1}{F_{n+1}}a$.

任何其他的作 n 次试验的方法，其试验误差 d 都大于 $\frac{1}{F_{n+1}}a$.

[1]这个数列称为斐波那契数列，是在 13 世纪初由意大利数学家斐波那契(Fibonacci)提出来的. 该数列的主要特点是数列中每个数是前两个数之和.

说 明

教科书附录中提供了 n 次分数法的证明过程，有兴趣的同学可以课外学习.

2.4 分数法的应用

在具体应用分数法时，如果问题已明确给定试验次数 n，则按 n 次试验分数法的步骤实施. 如果问题给出的是对误差的要求，例如，要求误差小于 0.01. 由 $d=\frac{1}{F_{n+1}}a<0.01$，解出满足不等式的尽可能小的 n. 按 n 次试验分数法的步骤实施.

例　函数 $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$ 在 $[0,0.89]$ 是单峰函数，有唯一极大值. 试用分数法估计此极大值点（精度为 0.01）. 可以使用计算器及其他信息技术工具.

解　(1)解不等式：误差 $d=\frac{1}{F_{n+1}}\times 0.89\leqslant 0.01$.

解得 $n+1=10, n=9$，即要作 9 次试验.

(2)前两次试验点选在 $\frac{F_9}{F_{10}}=\frac{55}{89}\times 0.89=0.55$ 和它的对称点 $\frac{F_8}{F_{10}}=\frac{34}{89}\times 0.89=0.34$ 处.

第一次试验：$f(0.55)=2.647\,86$；第二次试验：$f(0.34)=3.152\,36$.

(3)比较两次试验的结果，从而可以发现 $f(0.34)>f(0.55)$. 去掉 $[0.55,0.89]$，剩余 $[0,0.55]$；

(4)在剩余的区间中用“加两头，减中间”法确定下一个试验点. 直至作完 9 次试验.

第三次试验点选在　$0+0.55-0.34=0.21$，$f(0.21)=3.227\,02>f(0.34)$，去掉 $[0.34,0.55]$，剩余 $[0,0.34]$；

第四次试验点选在　$0+0.34-0.21=0.13$，$f(0.13)=3.188\,29<f(0.21)$，去掉 $[0,0.13]$，剩余 $[0.13,0.34]$；

第五次试验点选在　$0.13+0.34-0.21=0.26$，$f(0.26)=3.219\,02<f(0.21)$，去掉 $[0.26,0.34]$，剩余 $[0.13,0.26]$；

第六次试验点选在　$0.13+0.26-0.21=0.18$，$f(0.18)=3.219\,79<f(0.21)$，去掉 $[0.13,0.18]$，剩余 $[0.18,0.26]$；

第七次试验点选在　$0.18+0.26-0.21=0.23$，$f(0.23)=3.226\,86<f(0.21)$，去掉 $[0.23,0.26]$，剩余 $[0.18,0.23]$；

第八次试验点选在　$0.18+0.23-0.21=0.20$，$f(0.20)=3.225\,60<f(0.21)$，去掉 $[0.18,0.20]$，剩余 $[0.20,0.23]$；

第九次试验点选在　$0.20+0.23-0.21=0.22$，$f(0.22)=3.227\,45>f(0.21)$，去掉 $[0.20,0.21]$，剩余 $[0.21,0.23]$；

最终得到近似极大值点 0.22. 其误差不会超过 0.01.

需要指出的是，单就这个问题本身而言，它算不上选优问题，因为它取极大值的点是可以用数学的方法求出来的. 而实践中真正的选优问题的最佳点是根本无从知道的，只能通过作试验的办法来解决. 本例是想通过这个问题的解决，熟悉一下分数法解决选优问题的一般步骤.

习　题　2—2

A　组

1. 试验范围为[0,1]，为使试验误差不超过 0.01，那么作多少次试验就可以？试验误差不超过 0.001 呢？

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$.

(1) $f(x)$ 在[0,4]是单峰函数，有唯一极小值. 试用分数法估计此极小值点（精度为 0.01）.

(2) $f(x)$ 在[-4,0]是单峰函数，有唯一极大值. 试用分数法估计此极大值点（精度为 0.01）.

B　组

对于单因素选优问题，试验范围记作[0,1]，限定试验次数为五次. 我们先在 x_1，x_2（$x_1<x_2$）两点作两次试验. 考虑下面的设计方案.

前两次试验取在 $\frac{5}{13}$ 和 $\frac{8}{13}$ 处，如图 1 所示. 去掉无效段后，在剩余区间中，已作过试验的点位于所剩区间的 $\frac{5}{8}$ 或 $\frac{3}{8}$ 处，在这两个位置中没作过试验的那一点作第三次试验，去掉无效段后，在剩余区间中，已作过试验的点位于所剩区间的 $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{2}{5}$ 处. 第四次试验取在剩余区间中没有作过试验的那个 $\frac{2}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$ 点处，第五次试验位于前四次试验结束后所剩区间中没有作过试验的那个三等分点处.

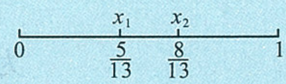


图 1

(1) 这个设计方案的误差是多少？

(2) 证明：如果 $x_1<\frac{5}{13}$，这样的试验设计方案的误差比 $\frac{1}{13}$ 大；

(3) 如果 $x_1>\frac{5}{13}$，我们考虑 x_1 比 x_2 好的情况，此时，应该去掉的区间[x_2,1]，如图 2.

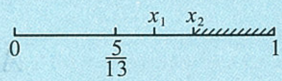


图 2

在剩余的[0,x_2]中，取第三次试验点 x_3.

①如果 $x_3<x_1$，证明：这样的试验设计方案的误差比 $\frac{1}{13}$ 大；

②如果 $x_3>x_1$，证明：这样的试验设计方案的误差比 $\frac{1}{13}$ 大.

§3　0.618 法

问题提出

容易看出，用分数法处理单因素选优问题时，最佳点的估计值与实际最佳点的误差随试验次数的增大而减小. 如果我们不限定试验次数，该如何进行试验设计呢？

3.1　0.618 法

对于单因素选优问题，设试验区间为$[0,1]$，如果限定试验次数为 n 次，则前两次试验的试验点应该选在 $x_2=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 和 $x_1=\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ 处，比较优劣后，在剩余区间内用“加两头、减中间”来回调试法，依次再作 $n-2$ 次试验，最后得到试验最佳点，误差是 $d=\dfrac{1}{F_{n+1}}$.

由于 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$，容易得到 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{F_n}{F_n+F_{n-1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{F_{n-1}}{F_n}}$，

我们来考虑数列 $\left\{\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$，当 n 趋向于无穷大时，如果 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 趋近于 A，那么 $\dfrac{F_{n-1}}{F_n}$ 也趋近于 A.

由 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{F_{n-1}}{F_n}}$ 知，当 n 趋向于无穷大时有 $A=\dfrac{1}{1+A}$，

即 $A^2+A-1=0$. 解得 $A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（负根舍去）.

我们知道 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 正是几何中常提到的黄金分割比. 这表明，当 n 很大时，$x_2=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 无限接近 $A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

在分数法中，显而易见，n 越大，误差越小.

一般地，对于不限定次数的选优问题，我们常采用以下步骤：

第一步，选取试验范围的 0.618 处及其对称点 0.382 处作试验，我们对试验结果作比较，根据试验的结果，去掉不包含最佳点的区间.

第二步，在剩余区间中，采用“加两头、减中间”来回调整法确定下一次试验点. 重复上面的步骤，直至达到事先设定的误差要求.

这种方法我们就称之为 0.618 法(也称黄金分割法).

3.2 0.618 法的应用

例 用 0.618 法解决 §3.1 中提出的问题：已知函数 $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+2x+3$ 在$[0,1]$是单峰函数，有唯一极大值. 试用 0.618 法估计此极大值点(精度为 0.01).

解 (1)首先找出第一个点：$x_1=0+1\times0.618=0.618$，此时，$f(0.618)=2.382$.

(2)再找出第二个点：$x_2=0+1-0.618=0.382$，此时，$f(0.382)=3.090$.

比较这两个点，$f(0.618)<f(0.382)$，故去掉区间$[0.618,1]$.

在剩下的区间$[0,0.618)$中继续寻找.

(3)找出第三个点：$x_3=0+0.618-0.382=0.236$，此时，$f(0.236)=3.226$.

易见 $f(0.236)>f(0.382)$，故去掉区间$[0.382,0.618)$. 在剩下的区间$[0,0.382)$中继续寻找.

(4)找出第四个点：$x_4=0+0.382-0.236=0.146$，此时，$f(0.146)=3.201$.

由于 $f(0.236)>f(0.146)$，故去掉区间$[0,0.146]$. 在剩下的区间$(0.146,0.382)$中继续寻找.

(5)找出第五个点：$x_5=0.146+0.382-0.236=0.292$，此时，$f(0.292)=3.200$.

由于 $f(0.236)>f(0.292)$，故去掉区间$[0.292,0.382)$在剩下的区间$(0.146,0.292)$中继续寻找.

(6)找出第六个点：$x_6=0.146+0.292-0.236=0.202$，此时，$f(0.202)=3.226$，而考虑到$f(0.202)=3.225\,96$，$f(0.236)=3.226\,03$.

由于 $f(0.236)>f(0.202)$，故去掉区间$(0.146,0.202)$. 在剩下的区间$(0.202,0.292)$中继续寻找.

(7)找出第七个点：$x_7=0.202+0.292-0.236=0.258$，此时，$f(0.258)=3.220$.

由于 $f(0.236)>f(0.258)$，故去掉区间 $[0.258, 0.292)$. 在剩下的区间 $(0.202, 0.258)$ 中继续寻找.

(8) 找出第八个点：$x_8=0.202+0.258-0.236=0.224$，此时，$f(0.224)=3.227$.

由于 $f(0.224)>f(0.236)$，故去掉区间 $[0.236, 0.258)$. 在剩下的区间 $(0.202, 0.236)$ 中继续寻找.

(9) 找出第九个点：$x_9=0.202+0.236-0.224=0.214$，此时，$f(0.214)=3.227$，而考虑到 $f(0.214)=3.227\ 31$，$f(0.224)=3.227\ 33$.

由于 $f(0.224)>f(0.214)$，故去掉区间 $(0.202, 0.214]$. 使得函数值达最大的 x 的取值一定在区间 $(0.214, 0.236)$ 中.

(10) 找出第十个点：$x_{10}=0.214+0.236-0.224=0.226$，此时，$f(0.226)=3.227\ 22$.

由于 $f(0.224)>f(0.226)$，故去掉区间 $[0.226, 0.236)$. 我们现在知道，使得函数值达最大的 x 的取值一定在区间 $(0.214, 0.226)$ 中. 而 $0.224-0.214=0.01$，$0.226-0.224=0.002<0.01$. 这样，我们就得到了一个符合题目条件的极大值点的近似值，取 $x=0.224$.

阅读材料

几种有用的选优方法

一、对分法

蒸馒头，这是大家所熟悉的. 究竟放多少碱合适呢？

首先估计一下用碱量的范围，比如是 4～12 份. 第一次在 4～12 份的中点 8 份处作一次试验，如果蒸出来的馒头发酸，说明碱放少了. 第二次就在 8～12 份的中点 10 份处作第二次试验，结果馒头不酸，但发黄，说明碱放多了. 第三次就在 8～10 份的中点 9 份处作试验，如果这次蒸出来的馒头比较合适，用碱量就定为 9 份.

这是我们常见的一种试验方法. 它与前面"优选"试验方法有一点明显的不同，根据一次试验结果就可以决定"取舍". 例如，取"8 份碱酸了"，就可以"舍去 8 以下区域". 取"10 份碱黄了"，就可以"舍去 10 以上的区域".

我们可以看出，这是一个单因素选优问题，它与前面的单因素选优问题有所不同，根据每一次试验结果都可以确定取舍，例如，在试验范围 $[a, b]$ 的点 c 作试验，试验结果表明 c 取"少了"，则舍去小于 c 的区域，试验结果表明 c 取"多了"，则舍去大于 c 的区域. 这样的选优问题，可采取以下步骤：

第一步：首先根据经验确定试验范围 $[a, b]$.

第二步：在$[a,b]$的中点 x_1 处作第一次试验，如果试验结果表明 x_1 取大了，则舍去大于 x_1 的一半.

第三步：在剩余的区间的中点作下一次试验，根据试验结果舍去剩余的区间的一半.

这样继续作下去，就可以很快地找到合乎要求的试验最佳点.

我们将这种方法称为**对分法**.

二、分批试验法

在实践中会遇到这样的问题，即有些试验结果需要较长的试验周期才能得到.如用前面谈的几种方法，虽然可以减少试验次数，但需要时间太长.

对于这类问题，常采用**分批试验法**.

这个方法的要点是每批多作几个试验，同时进行比较.这样一批一批地作下去，直至找到试验最佳点.

如何分批，方法比较多.一般采用均分分批试验法.

例如，每批作四个试验，我们可以先将试验范围$[a,b]$均分为五份，在其四个分点 x_1,x_2,x_3,x_4 处作四个试验.

将四个试验产品同时进行检验考核，如果 x_3 最好，则去掉小于 x_2 和大于 x_4 的部分.然后，在剩余区间继续进行均分分批试验法，直到找出合适的试验最佳点.

三、目标为多峰情况下的选优问题

前面介绍的方法只适用于“单峰”的情况，那么“多峰”的情况怎么办？“多峰”是指在试验范围内，函数有几个极大值(或极小值).处理这样的问题，我们可以用下述两种方法：

1. 先不管它是“单峰”还是“多峰”，就用上面介绍的方法作下去，找到一个峰后，如果达到生产要求，就先开工交付生产，以后再找其他更高的“峰”.

2. 先用均分分批试验法，作一批试验，确定这批试验的“最高峰”，如果达到生产要求，就先开工交付生产，以后再找其他更高的“峰”.

习　题　2—3

1. 用 0.618 法代替分数法，完成习题 2—2 中 A 组第 2 题.
2. 有些金矿用浮选法回收黄金.在浮选工艺中使用的药剂种类较多，有捕收剂、起泡剂、活化剂等.其中起主要作用的药剂是捕收剂(一般为黄药)、起泡剂(多为 2# 油)，下面是对这两个因素进行的选优试验的过程(其他因素固定)，请阅读并填写表格中空白数据.

   (1)先固定起泡剂(2# 油)的用量(每吨矿石 100 g).由以往的实践可以知道捕收剂(黄药)的变化区间为每吨矿石 50～500 g，下面对黄药的用量进行选优试验.

试验结果如下表：

序号	2# 油(g/t)	黄药用量(g/t)	黄金回收率(%)
1	100	328.10	40.04
2	100	________	34.96
3	100	________	44.26
4	100	________	42.49
5	100	________	49.67

由上表结果可知：当黄药用量为 368.60 g/t 时，回收率达到最高.

(2)固定黄药为 368.60 g/t，优选 2# 油的最佳用量. 2# 油的变化区间一般为 0 g/t～200 g/t. 试验结果见下表：

序号	黄药用量(g/t)	2# 油(g/t)	黄金回收率(%)
1	368.60	123.60	46.58
2	368.60	________	39.30
3	368.60	________	53.23
4	368.60	________	49.52

由上表结果可知：当 2# 油用量为 152.80 g/t 时，回收率达到最高.

(3)固定 2# 油为最佳用量 152.80 g/t，再次优选黄药用量(范围仍为50 g～500 g). 见下表：

序号	2# 油(g/t)	黄药用量(g/t)	黄金回收率(%)
1	152.80	328.10	49.74
2	152.80	________	47.74
3	152.80	________	52.90
4	152.80	________	51.75
5	152.80	________	56.76

由上表数据说明，为使得黄金的回收率最高，药剂的最佳用量为：黄药 368.60 g/t，2# 油 152.80 g/t.

§4　双因素选优问题

在实际生产和科学试验当中，影响试验结果的因素往往不止一个.

问题提出

工业生产中，某种产品的产量由“加工温度”和“催化剂含量”两个因素决定. 加工温度介于5 000 ℃～6 000 ℃之间，催化剂含量介于1 000 g～2 000 g之间. 产量随温度、催化剂含量的变化呈单峰变化：即随着温度(催化剂含量)的上升，产量随着加大，但当温度(催化剂含量)达到一定程度以后，随着温度(催化剂含量)的升高，产量反而降低了. 那么，怎样找到这个最合适的温度和催化剂含量呢?

分析理解

为研究方便，用 x 轴表示温度，用 y 轴表示催化剂含量，则 $[5\,000, 6\,000]\times[1\,000, 2\,000]$ 表示平面内的一个区域，如图 2-16 所示.

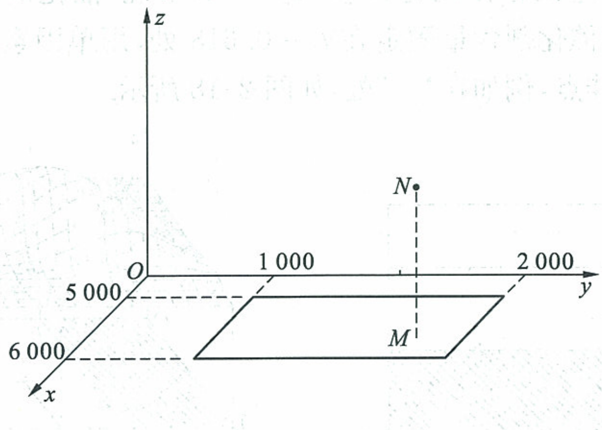


图 2-16

对这个区域内的任何一点 M，选取一个单位长度，过点 M 作与平面 xOy 垂直的线段 MN，长度表示点 M 对应的产量的值，点 N 对应着一个数对 (x_1, y_1, z_1)，它表示：当温度的值选定为 x_1，催化剂的含量为 y_1 时，产品的产量为 z_1. 把所有这些点 N 集合在一起，就形成一张曲面，如图 2-17.

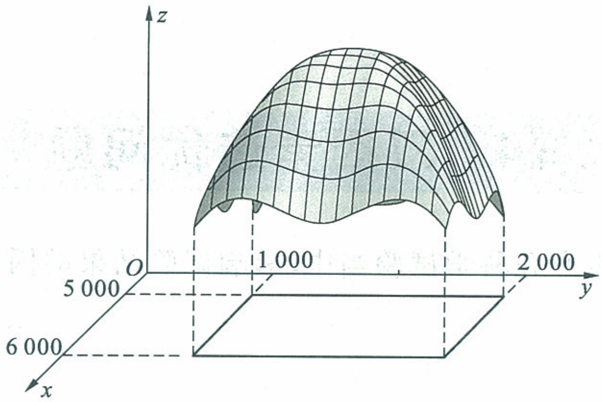


图 2-17

明显地，在区域[5 000，6 000]×[1 000，2 000]内存在一个最合适的点，使产品的产量达到最大(峰值)，区域中使产量达到峰值的点称为最佳点. 这里我们把区域[5 000，6 000]×[1 000，2 000]称为含峰区域.

与处理单因素选优问题一样，我们仍然通过作试验的方法，找到含峰区域中的最佳点.

通过对试验结果的比较，去掉不含最佳点的区域，缩小含峰区域. 如此继续下去，逐渐逼近最佳点，直到满足预先设定的精度要求.

那么如何缩小含峰区域呢? 我们往往先固定一个因素，寻找另一个的最佳值.

仍用 x 轴表示温度，用 y 轴表示催化剂含量. 为叙述方便，把温度、催化剂含量的范围均记作[0，1]，一般来说，催化剂含量较难调整，那就先把催化剂含量固定在 $t_1=0.618$ 处，用单因素方法找出温度的试验最佳点，例如在“$*$”处，如图 2-18 所示.

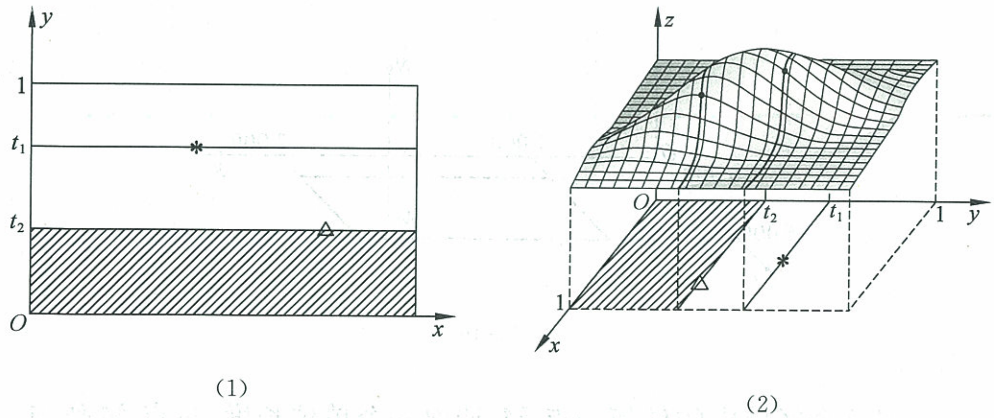


图 2-18

再将催化剂含量固定在 $t_2=0.382$ 处，用单因素方法找出温度的试验最佳点，例如在“△”处. 比较“$*$”与“△”，如果“$*$”比“△”好，则去掉“△”所在线段以下的区域，如图 2-18 所示.

然后，在催化剂含量剩余区间$[t_2,1]$中，用0.618法找出催化剂含量的第三个点$t_3=0.764$. 将催化剂含量固定在t_3点上，用单因素优选法选出温度的试验最佳点，例如“□”处. 比较“□”与“*”，如果仍然是“*”好，则去掉点t_3所在线段以上的区域，如图2-19所示.

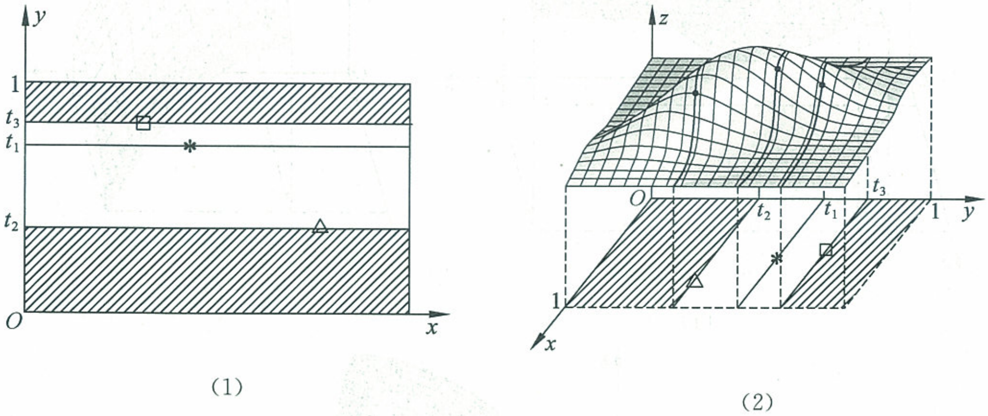


图2-19

如此继续作下去，直至找到满意的结果为止.

这个方法的特点是，每次优选都在相互平行的线段上进行，我们把这种方法叫作**平行线法**.

抽象概括

1. 在选优问题中，如果因素有两个，我们称之为双因素选优问题. 试验目标是两个因素的函数，即二元函数，可以记作$z=f(x,y)$，当然，这个函数的表达式也是不知道的.

2. 与单因素选优问题相仿，在取值范围（一个矩形）里，目标随因素的改变呈单峰变化. 这个峰可以是最高，也可以是最低. 极值可能会出现在取值范围内的任何一点上，如图2-20所示.

思考交流

举出日常生活中一些双因素选优问题的例子.

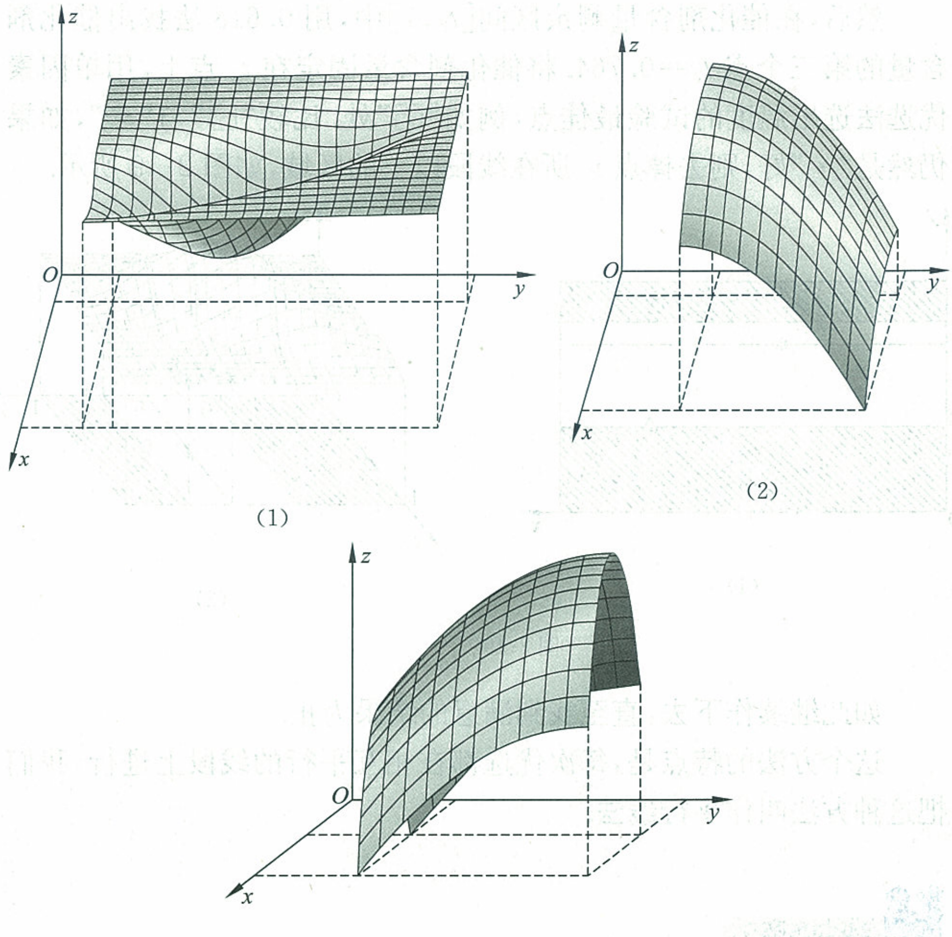


图 2-20

阅读材料

纵横对折法

以上面提到的问题为例，设产量 $z=f(x,y)$. 温度(x)的范围为$[5\,000,6\,000]$;催化剂含量(y)的范围为$[1\,000,2\,000]$.

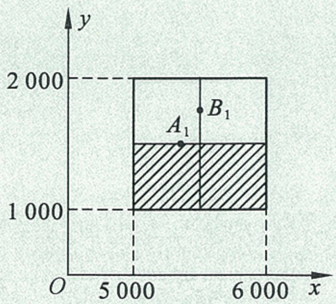


图 2-21

先固定温度在试验范围的中点 N(即 5 500)处，对催化剂含量进行单因素选优，即对 N 点所在的直线进行选优，选好试验最佳点 B_1. 然后固定催化剂含量在中点 Q(即 1 500)处，对温度进行单因素选优，即对 Q 点所在的直线进行选优，得到试验最佳点 A_1.

如果 B_1 比 A_1 好，则去掉 A_1 所在直线的下半区域，即$5\,000\leqslant x\leqslant 6\,000$, $1\,000\leqslant y\leqslant 1\,500$ 部分(如图 2-21 中所示的斜线部分).

这个过程中，好点会不会被丢掉呢？不会.

如果在丢掉的区域内有一个点(设为 P)优于点 B_1，即 P 点对应的产量高于 B_1 点对应的产量. 连接 PB_1，设交 NA_1 于 M，如图 2-22 所示.

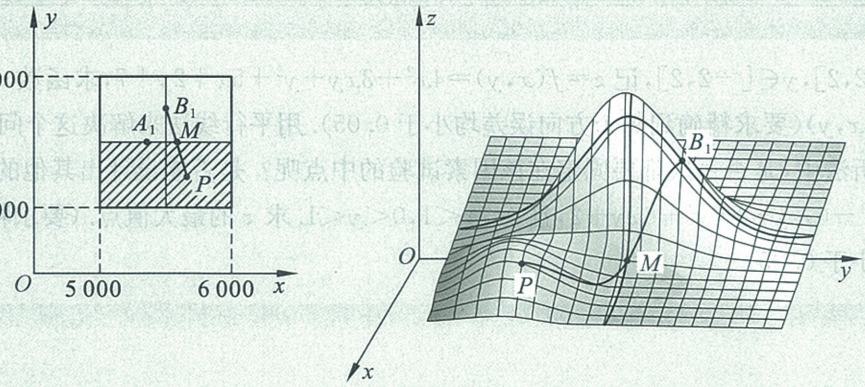


图 2-22

根据前面的分析，因为 B_1 比 A_1 好，所以 B_1 比 M 好. 所以在 P 与 B_1 之间，函数 $z=f(x,y)$ 的图像出现了下凹的部分，这与这个问题所具有的单峰性是矛盾的.

所以，上面所说的缩小试验范围的过程中，最好点是不会被丢掉的.

用同样的方法，在剩余区域继续试验. 取催化剂含量的新区间[1 500，2 000]的中点 1 750，用单因素法优选温度，如试验最佳点为 A_2，而且 A_2 比 B_1 好，则去掉 B_1 所在直线的右半区域，即去掉平面 $5\ 500 \leqslant x \leqslant 6\ 000$，$1\ 500 \leqslant y \leqslant 2\ 000$ 部分，如图 2-23 所示.

如此继续下去，直至找到满意的结果为止.

这个方法的要点是先固定第一个因素于试验范围的中点，用单因素方法优选第二个因素；然后，固定第二个因素于试验范围的中点，再优选第一个因素.

然后将两个结果进行比较，沿着“坏”点所在的线，丢去不包括好点所在的区域，这样继续下去，不断地将试验范围缩小，找到试验最佳点.

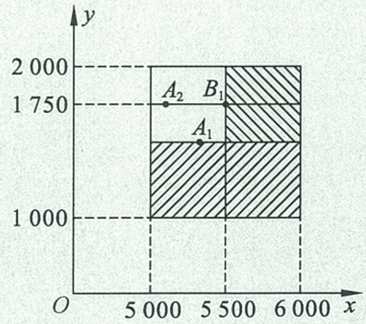


图 2-23

这个方法称为“纵横对折法”.

上面的方法是先固定因素Ⅰ，优选因素Ⅱ；然后再固定因素Ⅱ，优选因素Ⅰ，进行来回的优选试验.

但是在实践中，往往会碰到这样的情况：其中的一个因素不易改变. 在这种情况下，就不便于应用上述方法. 这时，宜用前面提到的平行线法.

习 题 2—4

1. 设 $x\in[-2,2]$，$y\in[-2,2]$，记 $z=f(x,y)=4x^2+3xy+y^2+5x+2y+7$，求函数 $z=f(x,y)$ 的最小值点 (x,y)（要求精确到每个方向误差均小于 0.05）．用平行线法来解决这个问题．
2. 在纵横对折法中，是否每次都要固定在该因素试验的中点呢？是否能设计出其他的方法？
3. 设 $z=-x^3-6x^2y-3xy^2+6xy+2$，且 $0<x<1$，$0<y<1$．求 z 的最大值点．（要求精确到每个方向误差均小于 0.05）

复习题二

1. 在下面叙述中的空白处填上适当的数据.

在某种合金钢的冶炼过程中,需添加某种化学元素以增加强度,加入范围是1 000 g～2 000 g,求最佳加入量.

具体操作如下:

第一步,先在试验范围长度的0.618处作第一个试验,则第一个试验点x_1=________ g;

第二步,第二个试验点用"加两头、减中间"的办法计算.x_2=________ g;

第三步,比较在x_1,x_2两点上所作试验的效果,现在假设第x_1点比较好,就去掉[1 000,1 382]那一段范围,留下________.第三个试验点x_3=________ g.

可以看出每次留下的试验范围是上一次长度的________倍,随着试验范围越来越小,试验点趋于最优点,直到达到所需精度即可.

2. 在下面叙述中的空白处填上适当的数据.

阿托品是一种抗胆碱药.为了提高产量,降低成本,利用优选法选择合适的酯化工艺条件:

根据分析,主要因素为温度和时间,定出其试验范围:

温度:55 ℃～75 ℃

时间:30 min～210 min

(1)参照生产条件,先固定温度为55℃,用单因素法优选时间,得最优时间为150 min,其收率为41.6%;

(2)固定时间为________ min,用单因素法优选温度,得最优温度为67 ℃,其收率为51.5%;

(3)固定温度为________,用单因素法优选时间,得最优时间为80 min,其收率为56.9%;

(4)再固定时间为________,又对温度进行优选,结果还是67 ℃.此时试验结束,可以认为最优条件为:温度:________;时间:________.

3. 物理学中有一种共振现象.即若在某以固定频率作单摆运动的标准摆旁放置另一摆,在稳定时,与标准摆频率相同的摆有最大振幅,而且振幅随着频率的变化是单峰的.所以可以借此来测定某个标准摆的频率区间,我们可以通过调频仪器调整用来测量的摆的频率来进行试验.精度假定为0.01 Hz,且事先我们知道频率一个大致的范围:0.599 Hz～0.745 Hz.(受条件限制,我们无法直接去作试验,具体试验结果请查下表.)

频率(F)/Hz	振幅(A)	频率(F)/Hz	振幅(A)	频率(F)/Hz	振幅(A)
0.745	17	0.690	54	0.656	77
0.734	19	0.683	69	0.651	63
0.727	21	0.678	86	0.645	55
0.720	24	0.676	92	0.640	48
0.714	28	0.673	105	0.635	43

续表

频率(F)/Hz	振幅(A)	频率(F)/Hz	振幅(A)	频率(F)/Hz	振幅(A)
0.708	32	0.671	108	0.630	37
0.705	34	0.670	111	0.625	32
0.702	37	0.668	109	0.622	29
0.696	44	0.667	108	0.610	23
0.693	48	0.662	97	0.599	19

试求标准摆的频率.

课题学习

选题、试验并完成试验报告

通过前面的学习，我们学会了一些试验设计的方法.

作为一门应用科学，我们更关注它在实际中的应用. 希望同学们积极投身到实践中去，发现问题、解决问题，并学会撰写较高质量的试验报告.

一、问题的选择

生活中大量的问题可以通过作试验的办法加以解决. 如何发现问题是最重要的环节之一. 下面，我们介绍几个实际生活中的例子.

例 1　许多家庭都使用电饭锅煮饭. 在这里，我们总要考虑这样一个问题：对于一定量的米，煮饭时加入多少水合适. 水加少了，饭很可能夹生；水加多了，就只能吃稀饭了. 那么，到底应该加多少水呢？

例 2　人们在夜晚出行的时候，都是靠路灯来照明. 不过，并不是每条路上的路灯布局都合理. 有的因距离太大而不能达到照明标准，有的因距离太小而造成能源的浪费. 针对不同道路，路灯的间隔为多少才合理呢？

在物理课、化学课、生物课中遇到的许多问题，都可以用我们这里学过的试验设计的方法去解决.

只要用心观察，总能找到你感兴趣的问题. 当然，最好能够把自己的选题与老师和同学进行交流，选择一个适合自己完成的问题.

二、选择试验设计方案

确定了问题之后，就要选择解决问题的方法，也就是选择适合解决这个问题的试验设计方案.

在这个专题里，我们学习了两类试验设计的方法：一类是“正交试验设计法”，另一类是“优选法”. 我们要根据问题的特点选择试验设计的方法.

三、试验设计

1. 根据前面学过的“正交试验设计法”或“优选法”的一般步骤，写出试验方案，确定具体的试验步骤；

2. 作试验，收集数据；

3. 制表；

4. 对试验结果进行分析.

四、试验报告

（试验报告参考样式）

试验报告：________

参加人员：____________指导教师：________

日期：　年　月　日

（一）问题提出

（二）确定试验设计方案

（三）试验设计

（四）试验步骤

（五）试验数据收集

（六）试验结果分析

（七）结论

（八）备注

五、交流评价

请同学参与试验成果的报告、交流，进行相互评价.

参考选题

这里提供几个选题，供同学们参考，希望同学们在自己的生活实践中去寻找更好的选题.

1. 某商家销售某种商品，希望与某两种库存的商品搭配出售. 可供选择的方案有搭配商品 A，B 或者 C，且搭配数量不超过 3 件. 商家希望通过搭配销售达到每日利润的最大值.

2. 植物进行光合作用的强度（吸收光谱比率）主要与两个因素有关，一个是照射光的强度（强度大将抑制气孔开放），一个是照射光的波长. 试验中能提供波长分别为 425 nm，450 nm，475 nm 和 500 nm 的光源以及强度分别为 2 000 lx，3 000 lx，4 000 lx 和 5 000 lx 的光源，我们调节光源以求得到最大的光合作用强度.

（或者再加一个因素：CO_2 的浓度）

3. 研究学生背单词的最佳方法.

首先定义了一个可以从试验中得到的数据——背单词的效率.

初步估计影响背单词效率的因素有三个：背单词的时间、一次背单词的量和背单词的方式，可供选择的方案见下面：

（1）背单词的时间可选择早 8:00～10:00 或者下午 14:00～16:00；

（2）背单词的量可以选择每次 30，40，50 或者 60 个；

（3）背单词的方式可以选择为不做笔记（只看书背）、做部分笔记、做全部笔记或者是在书上注释.

4. 我们从市场上买来的水产品有一些可能是被福尔马林浸泡过的，而福尔马林是公认的致癌物，食用前（当然，如果经证实确实是被福尔马林浸泡过的，就不要食用了），必须用清水多次浸泡，但我们的时间可能有限（比如早上买来，中午食用），还要节约用水（即用水量一定），我们该采取怎样的浸泡策略呢？

5. 适量的生长素可以促进植物的生长，但过量则会抑制其生长. 对某种植物，研究适宜的生长素用量.

阅读材料

华罗庚与优选法

华罗庚(1910—1985)，江苏省金坛人，世界著名数学家.少年时因家境贫困而辍学，在家帮助父亲照顾店铺.

华罗庚

他利用业余时间潜心演算数学题，发表的论文《苏家驹之代数五次方程式解法不能成立之理由》引起清华大学数学系主任熊庆来教授的高度重视.1932 年被破格提拔为清华大学讲师(时年 22 岁).后来又被派到英国剑桥大学留学，获得博士学位.1946 年 10 月，他应爱因斯坦的邀请，赴美国普林斯顿高级研究所从事研究工作，翌年春，受聘为美国伊利诺伊大学终身教授.1950 年 1 月，华罗庚冲破重重阻挠，携家人回归祖国.

华罗庚是国际上享有盛誉的数学家，他的研究领域涉及多元复变函数、数论、代数及应用数学等，在每一个领域都取得了杰出的成绩，有许多以他的名字命名的定理、引理、不等式、算子与算法，并培养出王元、陈景润等一批优秀的学生.他被选为美国科学院国外院士，第三世界科学院院士，联邦德国巴伐利亚科学院院士.

华罗庚不仅在纯数学领域做出巨大贡献，同时以极大的热情关注祖国的社会主义建设事业，致力于数学为国民经济服务.在生命的后 20 年里，他几乎把全部精力投身于推广应用数学方法的工作，而“双法”——优选法、统筹法的推广应用便是其中心内容.

他把数学方法创造性地运用到国民经济领域，选择了以改进工艺为主的“优选法”和以改善组织管理为目的的“统筹法”，并加以普及.

他撰写的以这两种方法为内容的小册子，深入浅出，普通工人也能读懂.他还身体力行，率领推广“双法”小分队到全国 20 多个省、市开展讲学、指导工作.

华罗庚在各地作优选法、统筹法的报告时，总有成千上万的群众参加.他的报告通俗易懂，在讲述优选法中的黄金分割法时，他采用如下的方法进行讲解.

(先预备一张狭长纸条)

1. 请大家记好一个数字 0.618；

2. 举例说，进行某项工艺时，温度的最佳点可能在1 000 ℃～2 000 ℃之间.当然，我们可以隔 1 ℃作一个试验，作完一千个试验点之后，我们一定可以找到最佳温度.但要作一千次试验.

3.(取出纸条)假定这是有刻度的纸条，刻了1 000 ℃到2 000 ℃，第一个试点在总长度的 0.618 处作，总长度是1 000，乘以 0.618 是 618，也就是说第一试点在 1 618 ℃作，作出结果并记录.

4. 把纸条对折，在第一试点的对面，即第二试点1 382 ℃处作第二个试验. 比较第一试点与第二试点的结果，在较差试点处将纸条撕下不要.

5. 对剩下的纸条，重复 4 的处理方法，直到找出最好点.

用这样的方法，普通工人一听就能懂，懂了就能用.

优选法在实际生产中显示了巨大的威力，取得增产、降耗、优质的效果.

许多单位在基本不增加投资、人力、物力、财力的情况下，应用“双法”选择合理的设计参数、工艺参数，统筹安排，提高了经营管理水平，取得了显著的经济效果.

例如，江苏省在 1980 年取得成果 5 000 多项，半年时间实际增加产值 9 500 多万元，节约 2 800 多万元，节电 2 038 万度，节煤约 85 000 吨，节油 9 000 多吨. 四川省推广“双法”，5 个月增产节约价值 2 亿多元.

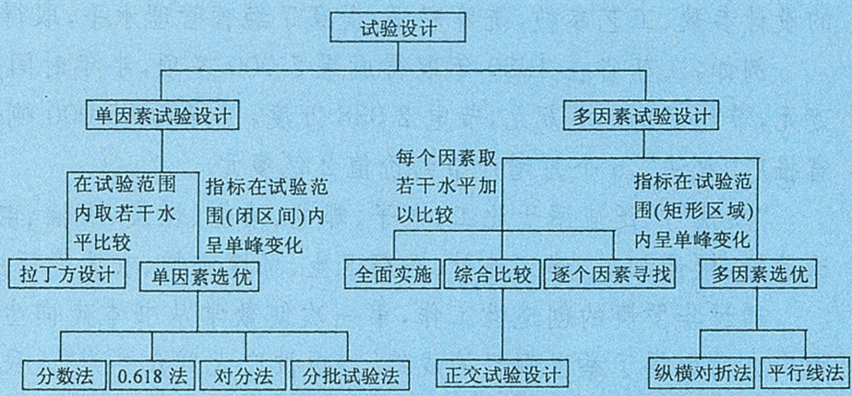
“双法”广泛应用于化工、电子、邮电、冶金、煤炭、石油、电力、轻工、机械制造、交通运输、粮油加工、建工建材、医药卫生、环境保护、农业等行业.

通过华罗庚的创造性工作，第一次使数学从书本走向生产实践，在应用数学的推广方面取得了举世瞩目的成绩. 他也被广大群众誉为“人民的数学家”.

华罗庚把一生都献给了数学事业，他的精神永远激励着后人去攀登科学高峰.

◆ 复习小结建议

一、主要内容及知识框架



二、理解、掌握、思考下列问题

1. 正交试验设计的基本步骤,并画出框图.
2. 拉丁方试验设计的基本步骤.
3. 结合上述试验设计的具体步骤,体会、理解、思考正交(拉丁方)试验设计所反映的基本数学思想.
4. 用分数法、0.618 法进行试验设计的基本步骤.
5. 用纵横对折法、平行线法进行试验设计的基本步骤.
6. 结合试验设计的基本步骤,体会、理解、思考分数法(0.618法、纵横对折法、平行线法)所反映的基本数学思想.
7. 对于单因素选优问题,分数法、0.618 法等不同优选法的差异.

三、撰写读书报告

报告应包括三个方面的内容:

1. 知识的总结.对本专题的整体结构和内容的理解,对试验设计方法及其意义的认识.
2. 拓展.通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考,对某些内容、某些结果和应用进行拓展.
3. 对本专题的感受、体会、看法.

附录 1

常用正交表及交互作用表

(1) $L_4(2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

(2) $L_8(2^7)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

(3) $L_{16}(2^{15})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

(4) $L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

(5) $L_{27}(3^{13})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2

(6) $L_{16}(4^5)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

附录 2

n 次分数法的证明

对于 $n=1,2,3$ 的情况，我们前面已证明过了.

为了证明这个命题对一切正整数都成立，我们想说明这个命题的正确性在正整数内是可以传递的，即："在 $n=1$ 命题成立的前提下，如果命题对 $n\leqslant k(k\in\mathbf{N}^*)$ 的一切正整数 n 都成立，我们能推出 $n=k+1$ 时，命题也成立. 那么，命题对一切正整数 n 都成立."

事实上，命题的正确性从 $n=1$ 传递到 $n=2$，进而传递到 $n=3$，…对一切正整数 n 都成立.

证明　$n=1$ 时，命题显然成立.

假设当 $n\leqslant k$ 时，命题成立. 即前两次试验点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ 分别取为 $x_1=\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}a$，$x_2=\frac{F_n}{F_{n+1}}a$，比较优劣后，在剩余区间内用"加两头、减中间"来回调试法再作 $n-2$ 次试验，试验误差达到最小，$d=\frac{1}{F_{n+1}}a$.

现在我们证明，当 $n=k+1$ 时，命题成立.

前两次试验点为 $x_1=\frac{F_k}{F_{k+2}}a$，$x_2=\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a$，比较优劣后，在剩余区间内用"加两头、减中间"来回调试法再作 $k-1$ 次试验. 这样，我们只需证明以下两个结论：

1. 试验误差 $d=\frac{1}{F_{k+2}}a$；
2. 这样的设计使误差达到最小.

对于第一个问题，无论 x_1 优于 x_2 还是 x_2 优于 x_1. 剩余区间的长度均为 $\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a$.

在剩余区间中，已作过试验的点位于所剩区间的 $\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$ 或 $\frac{F_k}{F_{k+1}}$ 处. 例如，剩余区间为 $\left[0,\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a\right]$.（剩余区间为 $\left[\frac{F_k}{F_{k+2}}a,a\right]$ 时，证明类似）点 $x_1=\frac{F_k}{F_{k+2}}a$ 在该区间的 $\frac{F_k}{F_{k+2}}a\div\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a=\frac{F_k}{F_{k+1}}$ 处. 即符合命题 $n=k$ 时的情况.

余下的 $k-1$ 次试验在剩余区间 $\left[0,\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a\right]$ 内用"加两头、减中间"来回调试法来作. 根据 $n\leqslant k$ 的假设可知，误差为剩余区间长度 $\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a$ 的 $\frac{1}{F_{k+1}}$，即 $d=\frac{1}{F_{k+1}}\times\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a=\frac{1}{F_{k+2}}a$.

对于第二个问题，我们说明如果不这样设计，误差将大于 $\frac{1}{F_{n+2}}a$. 分两种情况加以证明.

第一种情形：$x_1<\frac{F_k}{F_{k+2}}a$，如图 1 所示.

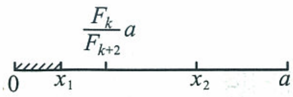


图 1

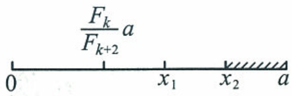


图 2

如果 x_2 比 x_1 好，应该去掉区间 $[0,x_1]$，在剩余区间 $[x_1,a]$ 中，无论余下的 $k-1$ 次试验取在哪里，根据 $n\leqslant k$ 的假设，误差都不小于剩余区间长度的 $\frac{1}{F_{k+1}}$，即误差

$$d\geqslant\frac{1}{F_{k+1}}(a-x_1)>\frac{1}{F_{k+1}}\left(a-\frac{F_k}{F_{k+2}}a\right)=\frac{1}{F_{k+2}}a.$$

第二种情形：$x_1>\frac{F_k}{F_{k+2}}a$，如图 2 所示.

考虑 x_1 比 x_2 好的情况.

去掉区间 $[x_2,a]$，在剩余区间 $[0,x_2]$ 中，取第三个试验点 x_3，再分两种情况.

(1)如果 $x_3<x_1$，考虑 x_3 比 x_1 好的情况，此时，应该去掉区间 $[x_1,x_2]$，如图 3 所示.

图 3

图 4

在剩余的 $[0,x_1]$ 中，无论余下的 $k-2$ 次试验取在哪里，根据 $n\leqslant k$ 的假设，误差都不小于剩余区间 $[0,x_1]$ 的 $\frac{1}{F_k}$，即误差 $d\geqslant\frac{1}{F_k}x_1>\frac{1}{F_k}\times\frac{F_k}{F_{k+2}}a=\frac{1}{F_{k+2}}a.$

(2)如果 $x_3>x_1$，考虑 x_1 比 x_3 好的情况，如图 4 所示.

此时，应该去掉区间 $[x_3,x_2]$，在剩余的 $[0,x_3]$ 中，无论余下的 $k-2$ 次试验取在哪里，根据 $n\leqslant k$ 的假设，误差都不小于剩余区间 $[0,x_3]$ 的 $\frac{1}{F_k}$，即误差 $d\geqslant\frac{1}{F_k}x_3>\frac{1}{F_k}x_1>\frac{1}{F_{k+2}}a.$

可见，无论何种情况，误差都将大于 $\frac{1}{F_{k+2}}a$. 我们确定 $x_1=\frac{F_k}{F_{k+2}}a$. 同理，可以知道 $x_2=\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}a$.

这样，我们就证明了 $n=k+1$ 时，命题也成立.

附录 3

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
交互作用	interaction
拉丁方	latin square
试验设计	experimental design
水平	level
因素	factor
正交表	orthogonal layout
正交试验设计	orthogonal experimental design

附录 4

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介:基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站,内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面.网站在提供教学实例、教学课件的同时,也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　记

本套教材是按照国家教育部于 2003 年 4 月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的. 我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性,突出了数学的思想性和应用性,尊重学生的认知特点,创造多层次的学习活动,为不同的学生提供不同的发展平台,注意发挥数学的人文教育价值. 好学好用.

教材的建设是长期、艰苦的任务,每一位教师在教学实践中要自主地开发资源,创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作,对教材的逐步完善提供有力的支持,促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序):

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序):

马芳华、王子卓、刘燕、李娜、邵远、彭红、童加、蔡秀梅.

由于时间仓促,教材中的错误在所难免,恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社