经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-5）

不等式选讲

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　戴佳珉　熊曾润

编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）

许书华　唐安华　黄龙如

熊曾润　戴佳珉

北京师范大学出版社

·北 京·

基础教育教材网址 http：// www.100875.com.cn

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮购科电话　010-58808083
传　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志．从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷．

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求　印刷　第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求．

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：890mm×1240mm　1/16
印　　张：3.25
字　　数：83 千字
版　　次：2014 年 5 月第 2 版
印　　次：2019 年 7 月第 25 次印刷
定　　价：3.05 元
ISBN 978-7-303-08186-8

责任编辑：邢自兴　焦继红　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　　　　　责任印制：孙文凯　窦春香

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26 册书组成：必修教材有5 册；选修系列 1 有2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811.

目　　录

第一章 不等关系与基本不等式

我们知道，和等量关系一样，不等量关系也是现实世界中存在着的基本数学关系，在数学研究和数学应用中起着重要作用. 因而，不等式是数学中的一类重要的研究对象和解决问题的重要工具，利用它可以研究一些数学问题，解决很多生活中的实际问题. 这一章我们将在回顾和复习不等式的基本性质以及基本不等式的基础上，了解证明不等式的基本方法，为以后的学习作好准备.

§1 不等式的性质

1.1 实数大小的比较

我们知道，任意两个实数 a，b 总可以比较大小，要么 $a>b$，要么 $a=b$，要么 $a<b$. 因为实数与数轴上的点是一一对应的，所以实数的大小关系可以通过数轴上相应点的位置来确定，例如，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b（如图 1-1 所示）.

图 1-1

若 $a>b$，则点 A 在点 B 的右边；反之，若点 A 在点 B 的右边，则 $a>b$；

若 $a=b$，则 A 与 B 表示同一点；

若 $a<b$，则点 A 在点 B 的左边；反之，若点 A 在点 B 的左边，则 $a<b$.

我们还知道，两个数的不等关系也可以通过运算来表示：

$$\boxed{\begin{aligned} a>b &\Leftrightarrow a-b>0; \\ a<b &\Leftrightarrow a-b<0; \\ a=b &\Leftrightarrow a-b=0. \end{aligned}}$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了.

此外，当 $a>0$，$b>0$ 时，我们还可以用求商的方法来比较两个实数的大小，这就是：

当$a>0,b>0$时，

$\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$;

$\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b$;

$\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b$.

例1　比较$(3x-2)(x+1)$与$(2x+5)(x-1)$的大小.

解　$(3x-2)(x+1)-(2x+5)(x-1)$

$=(3x^2+x-2)-(2x^2+3x-5)$

$=x^2-2x+3$

$=(x-1)^2+2>0$.

所以　$(3x-2)(x+1)>(2x+5)(x-1)$.

例2　已知$a>0,b>0$,试比较$a^b b^a$与$a^a b^b$的大小.

解　因为　$a>0,b>0$,所以　a^b,b^a,a^a,b^b均大于0.

$$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}=a^{a-b}b^{b-a}=a^{a-b}b^{-(a-b)}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

当$a>b>0$时，$\frac{a}{b}>1$,$a-b>0$,故$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,此时$a^b b^a<a^a b^b$;

当$a=b\neq0$时，显然$a^b b^a=a^a b^b$;

当$b>a>0$时，$0<\frac{a}{b}<1$,$a-b<0$,故$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,此时$a^b b^a<a^a b^b$.

综上所述，对于任意$a>0,b>0$,总有$a^b b^a\leqslant a^a b^b$.

练　习

1. 比较$(a+1)(a^2-a+1)$与$(a-1)(a^2+a+1)$的大小.
2. 设$x\neq0$,求证:$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.
3. 比较$(2x+5)(3x-4)$与$(3x-5)(2x+4)$的大小.

1.2　不等式的性质

由我们学过的一些不等式，容易概括出不等式的下列性质：

性质1　如果$a>b$,那么$b<a$;如果$b<a$,那么$a>b$.

性质2　如果$a>b,b>c$,那么$a>c$.

性质3　如果$a>b$,那么$a+c>b+c$.

性质 3 说明，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向.

利用性质 3 可以得到：

如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$.

也就是说，不等式中任何一项改变符号后，可以把它从不等式一边移到另一边.

推论　如果 $a>b, c>d$，那么 $a+c>b+d$.

证明　因为 $a>b$，

所以　$a+c>b+c$.　　①

因为　$c>d$，

所以　$b+c>b+d$.　　②

由①②得　$a+c>b+d$.

性质 4　如果 $a>b, c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b, c<0$，那么 $ac<bc$.

推论 1　如果 $a>b>0, c>d>0$，那么 $ac>bd$.

证明　因为 $a>b, c>0$，由性质 4 可得 $ac>bc$；

同理，因为 $c>d, b>0$，所以有 $bc>bd$.

于是，由性质 2 可知 $ac>bd$.

在推论 1 中，若 $c=a, d=b$，可得

推论 2　如果 $a>b>0$，那么 $a^2>b^2$.

一般地，可以得到

推论 3　如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$（n 为正整数）.

推论 4　如果 $a>b>0$，那么 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$（$n$ 为正整数）.

这三个推论均可证明.

思考交流

如果 $ac>bc$，是否一定能得出 $a>b$？

例 1　已知 $a>b, c<d$，求证 $a-c>b-d$.

证明　因为 $c<d$，两边同乘 -1，得 $-c>-d$.

因为　$a>b$，所以　$a+(-c)>b+(-d)$，即　$a-c>b-d$.

例 2　已知 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{4}$，求 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

解 因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{4}$，

由性质3的推论，得 $\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，

即 $-\frac{\pi}{6}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{4}$，这是 $\alpha+\beta$ 的取值范围.

由性质4可得 $-\frac{\pi}{4}<-\beta<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\alpha+(-\beta)<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，

即 $-\frac{\pi}{12}<\alpha-\beta<\frac{5\pi}{6}$，这是 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

思考交流

1. 如果 $a^2>b^2$，是否一定能得出 $a>b$？为什么？
2. 如果 $a>b$，是否一定能得出 $a^2>b^2$？为什么？

练 习

1. 设 $a>b>0$，求证：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
2. 若 $a>b$，$c<d$，试比较 $2a-3c$ 与 $2b-3d$ 的大小.
3. 如果 $mx-n^3<nx-m^3$，且 $m<n$，求证：$x>-(m^2+mn+n^2)$.

习 题 1—1

A 组

1. 设 $a>b>c>0$，
   (1)把 ab，bc，ca 按从大到小的顺序排成一列；
   (2)把 $\frac{1}{ab}$，$\frac{1}{bc}$，$\frac{1}{ca}$ 按从大到小的顺序排成一列.
2. 若 $a+b<0$，$b>0$，试把 a，$-a$，b，$-b$ 按从小到大的顺序排成一列.
3. 试比较 x^2+4 与 $4x$ 的大小.
4. 甲、乙两家旅行社对家庭旅游实行优惠政策，甲旅行社提出：如果户主买一张全票，那么其余家庭成员都可以享受五五折优惠. 乙旅行社提出：家庭旅游按照集体票计算，一律按七五折优惠. 如果这两家旅行社的原票价相同，那么哪家旅行社的家庭旅游价格更优惠呢？
5. 设 $x\geqslant 1$，求证：$x^3\geqslant x^2-x+1$.
6. 设 $a>b$，$c>d$，$x>0$，求证：$d-ax<c-bx$.

7. 求证：

(1)若 $a>b>0$，则$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$；

(2)若 $a>b>0$，$c>d>0$，则$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

8. 若 $8<x<12$，$2<y<10$，求 $x+y$，$x-y$ 及$\frac{x}{y}$的取值范围.

9. 证明：

(1)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$；

(2)不等式性质 4 的推论 3.

B 组

1. 如果$\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}$，那么，从 $b<d$ 能否推出 $a>c$？并且加以讨论.

2. 利用不等式性质 4 的推论 1 证明：如果 a,b,c,d 都是正数，且 $a>b$，$c<d$，那么$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

3. 设 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$，且 a,b,c 满足 $a+b>c$，求证：

$$a^3+b^3+c^3+3abc>2(a+b)c^2.$$

4. 证明不等式性质 4 的推论 4.

§2　含有绝对值的不等式

2.1　绝对值不等式

设 a 是任意一个实数，在数轴上 $|a|$ 表示实数 a 对应的点与原点 O 的距离，$|x-a|$ 的几何意义是实数 x 对应的点与实数 a 对应的点之间的距离.

因为 $|x+a|=|x-(-a)|$，所以 $|x+a|$ 的几何意义是实数 x 对应的点与实数 $-a$ 对应的点之间的距离.

定理　对任意实数 a 和 b，有

$$\boxed{|a+b|\leqslant|a|+|b|.}$$

下面我们用几何和代数的不同方法证明这个定理.

证法一　在数轴上，$|a+b|$ 表示实数 a 对应的点（记为 A）与实数 $-b$ 对应的点（记为 B）的距离 AB，$|a|$ 表示点 A 与原点 O 的距离 AO，$|b|$ 表示原点 O 与点 B 的距离 OB. 根据“平面上（包括数轴）的任意三点所连成的三条线段中，任何两条线段的长度之和不小于第三条线段的长度”可知

$$AB\leqslant AO+OB,$$

于是，得到

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证法二　因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，

所以　$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$，

即　$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

思考交流

1. 当 a，b 满足什么条件时，上述定理中的不等式等号成立？
2. 在上述定理中，以 $-b$ 代替 b，将得到怎样的结论？
3. 设 a，b 是任意实数，求证：$|a|-|b|\leqslant|a+b|$.

利用上述定理,可以证明许多含有绝对值的不等式.

例 1　求证:对任意实数 a,b,c,有 $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

证明　记 a,b,c 分别对应数轴上的 A,B,C 三点,则 $AB=|a-b|$, $AC=|a-c|$, $CB=|c-b|$,根据"平面上(包括数轴)的任意三点所连成的三条线段中,任何两条线段的长度之和不小于第三条线段的长度"可知

$$AB\leqslant AC+CB,$$

即

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|.$$

根据上面所证明的定理,本题还可以这样证明

$$|a-b|=|(a-c)+(c-b)|\leqslant|a-c|+|c-b|.$$

例 2　若 $|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$,求证:$|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$.

证明　$|(A+B)-(a+b)|=|(A-a)+(B-b)|\leqslant$

$$|A-a|+|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

例 3　设 $a\neq0$,求证:$\frac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

证明　分两种情况:

(1) $|a|\leqslant|b|$,结论显然成立.

(2) 当 $|a|>|b|$ 时

因为 $|a^2-b^2|\geqslant|a^2|-|b^2|$

$$=|a|^2-|b|^2$$

$$=(|a|+|b|)(|a|-|b|)$$

$$\geqslant|a|(|a|-|b|),$$

所以 $\frac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

问题与思考

试讨论例 3 中等号成立的条件.

练　习

1. 求证:$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$.
2. 已知 $|x|<\frac{a}{4}$, $|y|<\frac{a}{6}$,求证:$|2x-3y|<a$.
3. 已知 $|x-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|y-B|<\frac{\varepsilon}{2}$,求证:$|(x-y)-(A-B)|<\varepsilon$.

2.2　绝对值不等式的解法

例 4　解不等式 $|x-3|\leqslant 2$.

解法一　原不等式可化为 $-2\leqslant x-3\leqslant 2$.

即 $\begin{cases} x-3\geqslant -2, & ① \\ x-3\leqslant 2. & ② \end{cases}$

图 1-2

解不等式①，可得解集 $\{x|x\geqslant 1\}$，解不等式②，可得解集 $\{x|x\leqslant 5\}$，如图 1-2 所示.

所以，原不等式的解集是 $\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$.

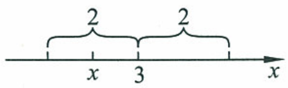


图 1-3

解法二　这个不等式解的几何意义是：在数轴上，到实数 3 对应的点的距离小于或等于 2 的点，如图 1-3 所示. 也可以说，这些点都在以实数 3 对应的点为圆心，2 为半径的圆内或圆上.

所以，这个不等式的解为 $3-2\leqslant x\leqslant 3+2$，即　$1\leqslant x\leqslant 5$，

从而，原不等式的解集是 $\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$.

例 5　解不等式 $|3-2x|\leqslant 5$.

解　原不等式可化为 $-5\leqslant 3-2x\leqslant 5$，

即 $\begin{cases} 3-2x\geqslant -5, & ① \\ 3-2x\leqslant 5. & ② \end{cases}$

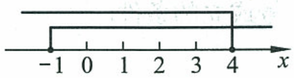


图 1-4

解不等式①，可以得到解集 $\{x|x\leqslant 4\}$，解不等式②，可以得到解集 $\{x|x\geqslant -1\}$，如图 1-4 所示.

所以，原不等式的解集是 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$.

从以上的例子可以看到：解含有绝对值的不等式，关键在于利用绝对值的意义设法去掉绝对值符号，把它转化为一个或几个普通不等式或不等式组. 掌握了这一点，就不难解其他一些较复杂的含有绝对值的不等式.

例 6　解不等式 $|x+1|+|x-2|\geqslant 5$.

解　这个不等式解的几何意义是：数轴上到 -1 对应的点的距离与到 2 对应的点的距离之和不小于 5 的点.

图 1-5

因为 -1 与 2 对应的点之间的距离是 3，$3<5$，从图 1-5 可见，-2对应的点到 -1 与 2 对应的点的距离之和等于 5，3 对应的点到最小 -1与 2 对应的点的距离之和也等于 5. -2 左侧的点以及 3 右侧

的点到 -1 与 2 对应的点的距离之和都大于 5.

所以不等式的解集是 $\{x \mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

思考交流

你能否根据绝对值的意义解例 6.

练　习

解下列不等式：

(1) $4|3x-1|-1\leqslant 0$；　　(2) $2|2x-1|>1$；

(3) $|x-1|+|x-3|\leqslant 4$；　　(4) $|x+10|-|x-2|\geqslant 8$.

习　题　1—2

A　组

1. 求证：

(1) $|a+b|+|a-b|\geqslant 2|a|$；　　(2) $|a+b|-|a-b|\leqslant 2|b|$.

2. (1) 已知 $|x-A|<r$，求证：$|x|<|A|+r$；

(2) 已知 $|x-A|<c$，$|y-A|<c$，求证：$|x-y|<2c$.

3. 已知 $|x-a|<1$，求证：$|(x^2-x)-(a^2-a)|<2(|a|+1)$.

4. 证明不等式：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

5. 解下列不等式：

(1) $|2-3x|<\dfrac{1}{2}$；　　(2) $|4x+3|-11\leqslant 0$；

(3) $|2x+5|\geqslant 7$；　　(4) $2|3x-1|-5\geqslant 0$；

(5) $|x-1|+|x+2|\geqslant 4$.

B　组

1. 解不等式 $|x+19|-|x-98|\leqslant 100$.

2. 求使不等式 $\left|\dfrac{3n}{n+1}-3\right|<\dfrac{1}{100}$ 成立的最小正整数 n.

3. 解不等式 $|2x+1|+|3x-2|\geqslant 5$.

§3 平均值不等式

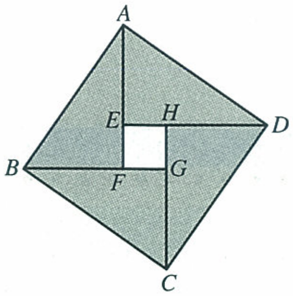


图 1-6

图 1-6 是 2002 年北京国际数学家大会的会徽图,它由 4 个全等的直角三角形拼接而成.

令 $AF=a,BF=b$,则 $AB^2=a^2+b^2$,而 $S_{\text{正方形}ABCD}\geqslant 4S_{\triangle ABF}$,

即 $a^2+b^2\geqslant 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot b$,所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

当 $AF=BF$ 时,正方形 $EFGH$ 缩为一点,$S_{\text{正方形}ABCD}=4S_{\triangle ABF}$.

于是,我们得到如下结论:

定理 1 对任意实数 a,b,有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,(此式当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

这个定理我们也可以通过不等式 $(a-b)^2\geqslant 0$ 得到.

由定理 1 还可以推得:

定理 2 对任意两个正数 a,b,有 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(此式当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

证明 由定理 1 有 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$,

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,

即 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

显然,此式当且仅当 $a=b$ 时取"="号.

我们称 $\frac{a+b}{2}$ 为正数 a 与 b 的算术平均值, $\sqrt{ab}$ 为正数 a 与 b 的几何平均值. 因此,定理 2 又可叙述为:两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

思考交流

试根据图 1-7 给出定理 1 的几何解释.

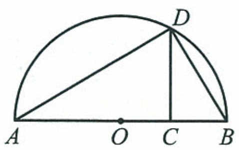


图 1-7

例 1 设 a,b,c 为任意实数,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,此式当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号.

证明 由定理 1 可知，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$$b^2+c^2\geqslant 2bc,$$

$$c^2+a^2\geqslant 2ca.$$

以上三式当且仅当 $a=b=c$ 时同时取“=”号. 将这三个同向不等式的两边分别相加，得

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca),$$

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号.

定理 3 对任意三个正数 a,b,c，有 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号）.

证明 因为对任意两个正数 a,b，如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$；如果 $a<b$，那么 $a^2<b^2$. 这说明 $(a-b)$ 与 (a^2-b^2) 同号，所以有

$$(a-b)(a^2-b^2)\geqslant 0,$$

即 $a^3+b^3-(ab^2+ba^2)\geqslant 0$，

所以 $a^3+b^3\geqslant ab^2+ba^2$，

同理 $b^3+c^3\geqslant bc^2+cb^2$，

$c^3+a^3\geqslant ca^2+ac^2$.

将这三个同向不等式的两边分别相加，可得

$$\begin{aligned}2(a^3+b^3+c^3)&\geqslant a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\\&\geqslant a\cdot 2bc+b\cdot 2ca+c\cdot 2ab\\&=6abc,\end{aligned}$$

所以 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

显然，此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号.

> **问题与思考**
>
> 你可以用其他方法证明这个定理吗？

定理 4 对任意三个正数 a,b,c，有 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号）.

证明 由定理 2 可得 $(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3\geqslant 3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$，

从而 $$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

即 $$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

显然，此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号.

类似于定理 2，我们可以将定理 4 叙述为：三个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

思考交流

当 a,b,c 不全为正数时，不等式 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ 是否一定成立？

例 2　已知 a,b,c 都是正数，求证：

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant 9abc.$$

证明　因为 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，

所以 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

同理 $ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}$，

即 $ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}$.

将这两个不等式的两边分别相乘，即可得

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant 9abc.$$

一般地，对 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\geqslant 2)$，我们把数值 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 分别称为这 n 个正数的**算术平均值**与**几何平均值**，且有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

此式当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取“=”号，即 n 个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

练　习　1

1. 已知 x,y 都是正数，求证：$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$.
2. 已知 $x>0$，求证：$7-x-\frac{9}{x}\leqslant 1$.
3. 已知 a,b,c 都是正数，且 $abc=1$，求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3$.

例 3　(1) 已知 $x>2$，求函数 $y=x+\frac{1}{x-2}$ 的最小值；

(2) 已知 x,y 都是正数且 $xy=3$，求 $2x+y$ 的最小值.

解　(1) 因为 $x>2$，所以 $x-2>0$，

$y=x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2$

$\geqslant 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4.$

当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}$ 即 $x=3$ 时取“=”号.

因此 $x=3$ 时，函数 $y=x+\frac{1}{x-2}$ 取得最小值 4.

(2) 因为 x,y 都是正数，且 $xy=3$，

所以　$2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}=2\sqrt{6}.$

当且仅当 $2x=y$ 即 $2x^2=3$，$x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取“=”号.

因此，当 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$y=\sqrt{6}$ 时，$2x+y$ 的值最小，最小值是 $2\sqrt{6}$.

例 4　已知 $0<x<4.5$，当 x 取什么值时，$x^2(9-2x)$ 的值最大？最大值是多少？

解　由题可知 $x^2(9-2x)=x\cdot x\cdot(9-2x)$.

因为　$0<x<4.5$，所以 x 和 $(9-2x)$ 都是正数，由定理 2 可知

$$\frac{x+x+(9-2x)}{3}\geqslant\sqrt[3]{x\cdot x\cdot(9-2x)},$$

即　$\sqrt[3]{x^2(9-2x)}\leqslant 3$，

所以　$x^2(9-2x)\leqslant 27.$

此式当且仅当 $x=9-2x$（即 $x=3$）时取“=”号.

因此，当 $x=3$ 时，$x^2(9-2x)$ 的值最大，最大值是 27.

例 5　一农户计划围造养鸭场，采用了以下两种围造方案：

(1) 该农户用长为 100 m 的篱笆围成一个矩形养鸭场，问：怎样围法才能使养鸭场的面积最大？最大面积是多少？

(2) 若该农户利用一面院墙围出 6 间面积均为 100 m^2 的养鸭场（如图 1-8 所示），怎样围才能使所用篱笆料的长度最短（精确到0.1 m）.

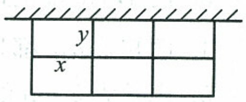


图 1-8

解　(1) 设围成的矩形养鸭场的长和宽分别为 x m 和 y m，其面积为 S m^2，那么 $x+y=100\div 2=50$，$S=xy$. 因为

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

即　$\sqrt{S}\leqslant 25$，所以　$S\leqslant 625.$

此式当且仅当 $x=y$ 时取“=”号，因此，当养鸭场围成正方形时，其面积最大，最大面积是 625 m^2.

(2) 设每间养鸭场的长和宽分别为 x m 和 y m，则

$$S=6xy=600\ (\text{m}^2).$$

设 L 为所用篱笆料的总长度，则

$$L=6x+8y.$$

为此，$L=6x+8y\geqslant 2\sqrt{48xy}=2\sqrt{8S}=80\sqrt{3}(\mathrm{m}^2)$.

当且仅当 $6x=8y$，且 $xy=100$ 时“=”成立.

即 $x=\dfrac{20}{3}\sqrt{3}\approx 11.5(\mathrm{m})$，$y=5\sqrt{3}\approx 8.7(\mathrm{m})$时，有 L 的最小值 $80\sqrt{3}\approx 138.6(\mathrm{m})$.

练 习 2

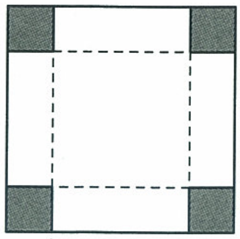
1. 已知 $x>0$，当 x 取什么值时，$4x+\dfrac{1}{x}$ 的值最小？最小值是多少？
2. 已知 $0<x<2$，当 x 取什么值时，函数 $f(x)=\sqrt{x(3-x)}$ 的值最大？最大值是多少？
3. 已知 θ 为锐角，θ 取什么值时，$\tan\theta+\cot\theta$ 的值最小？最小值是多少？
4. 已知 $x>0$，当 x 取什么值时，$2x+\dfrac{1}{x^2}$ 的值最小？最小值是多少？

习 题 1—3

A 组

1. 已知 $x\neq 0$，求证：$2x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.
2. 设 a,b,c,d 都是正数，求证：$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$.
3. 设 a,b,c 都是正数，且 $abc=1$，求证：$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8$.
4. 已知 a,b,c 都是正数，求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.
5. 用长为 50 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园. 问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大？最大值是多少？
6. 求证：在半径为 R 的圆的内接矩形中，面积最大的是正方形，它的面积等于 $2R^2$.
7. 设 $x>0$，求$\dfrac{2x^2+5x+3}{x}$的最小值.
8. 设 $x>0$，求证：$x^2+\dfrac{2}{x}\geqslant 3$.
9. 已知 a,b,c 都是正数，求证：$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 3$.

10. 将边长为 a 的正方形白铁片，在它的四角各剪去一个小正方形（剪去的四个小正方形全等）. 然后弯折成一只无盖的盒子. 问：剪去的小正方形边长为多少时，制成的盒子容积最大？



（第 10 题）

B　组

1. 设 x,y,z 都是正数，且 $xyz=1$，求证：

$$(1+x+y)(1+y+z)(1+z+x)\geqslant 27.$$

2. a,b 都是正数，求证：$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant 8a^3b^3$.

3. 已知 $x>y>0$，且 $xy=1$，求 $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ 的最小值及相应的 x,y 的值.

4. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\log_a(x+1)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上递减，求证：对于任意实数 $x_1>0,x_2>0$，恒有

$$\frac{1}{2}[f(x_1-1)+f(x_2-1)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2-2}{2}\right).$$

§4 不等式的证明

不等式的性质和基本不等式是证明不等式的理论依据. 但是由于不等式的形式多样，因此不等式的证明方法也很多. 下面举例说明几种常用的证明方法.

比较法

我们已经知道 $a>b \Leftrightarrow a-b>0$，$a<b \Leftrightarrow a-b<0$. 因此要证明 $a>b$，只要证明 $a-b>0$ 即可. 这种方法称为**求差比较法**.

例 1 求证：$2x^2+3>x$.

证明 因为 $(2x^2+3)-x=2x^2-x+3=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}\geqslant\frac{23}{8}>0$，

所以 $2x^2+3>x$.

由例 1 可见用求差比较法证明不等式的步骤是：作差，变形，判断符号，下结论.

例 2 已知 $a>0$，$b>0$，求证：$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$.

证明
$$\begin{aligned}(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3)&=(a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)\\&=a^3(a-b)-b^3(a-b)\\&=(a^3-b^3)(a-b)\\&=(a-b)^2(a^2+ab+b^2),\end{aligned}$$

因为 $a>0$，$b>0$，故 $a^2+ab+b^2>0$.

又 $(a-b)^2\geqslant 0$，所以 $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geqslant 0$，

即 $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$，当且仅当 $a=b$ 时取"="。

由于 $a>b>0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$ 且 $a>0$，$b>0$，因此当 $a>0$，$b>0$ 时要证明 $a>b$，只要证明 $\frac{a}{b}>1$ 即可，这种方法称为**求商比较法**.

例 3 已知：$a>b>c>0$，求证：$a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明 因为 $\dfrac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{\frac{2a-b-c}{3}}b^{\frac{2b-a-c}{3}}c^{\frac{2c-a-b}{3}}$

$$=a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}}b^{\frac{b-a}{3}+\frac{b-c}{3}}c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}},$$

且 $a>b>0$,所以 $a-b>0$,$\frac{a}{b}>1$,故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}>1$.

同理可证 $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}>1$,$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}>1$.

所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}>1$,从而 $a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

求差比较法与求商比较法统称为**比较法**.

分析法

例 4　求证:$\sqrt{7}+\sqrt{5}<2\sqrt{6}$.

证明　因为$\sqrt{7}+\sqrt{5}$和 $2\sqrt{6}$都是正数,

要证明　$\sqrt{7}+\sqrt{5}<2\sqrt{6}$,

只需证明　$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2<(2\sqrt{6})^2$成立,

即只需证明　$12+2\sqrt{35}<24$,

即只需证明　$2\sqrt{35}<12$,

即只需证明　$\sqrt{35}<6$,

即只需证明　$35<36$.

因为 $35<36$ 显然成立,所以$\sqrt{7}+\sqrt{5}<2\sqrt{6}$成立.

例 5　已知$|a|<1$,$|b|<1$,求证:$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

证明　要证明$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$,

只需证明　$|a+b|<|1+ab|$,

只需证明　$(a+b)^2<(1+ab)^2$,

即只需证明　$a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$,

即只需证明　$a^2+b^2<1+a^2b^2$,

即只需证明　$1+a^2b^2-a^2-b^2>0$,

即只需证明　$(a^2-1)(b^2-1)>0$,

因为　$|a|<1$,$|b|<1$,故 $a^2<1$,$b^2<1$.

所以　$(a^2-1)(b^2-1)>0$ 成立.

从而　$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$ 成立.

在例 4 的证明过程中,从所要证明的结论入手向已知条件反推直至达到已知条件为止,这种证法称为**分析法**. 即"执果索因"的证明

方法. 它也是证明不等式的一种重要的基本方法.

练　习　1

1. 用比较法证明 $(x-1)(x-3)<(x-2)^2$.
2. 当 $a>b>0$ 时，用比较法证明 $a^a b^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.
3. 用分析法证明 $2\sqrt{2}+\sqrt{5}<\sqrt{7}+\sqrt{6}$.
4. 已知 $a>0$，$b>0$ 且 $a>b$，用分析法证明 $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

综合法

例 6　已知 $a>b$，且 $ax+b^2>bx+a^2$，求证：$x>a+b$.

证明　因为 $ax+b^2>bx+a^2$，

由不等式的性质 3 可得

$$ax-bx>a^2-b^2,$$

即

$$(a-b)x>(a-b)(a+b). \qquad ①$$

依题设条件 $a>b$，所以 $a-b>0$，不等式①的两边同乘正数 $\frac{1}{a-b}$，即可得到 $x>a+b$.

在例 6 的证明过程中，从已知条件出发，利用不等式的性质（或已知证明过的不等式），推出了所要证明的结论，即“由因寻果”的方法. 这种证明不等式的方法称为**综合法**. 它是证明不等式的又一重要的基本方法.

例 7　已知 a，b，c 是不全相等的正数，求证：

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

证明　因为　a，b，c 都是正数，

所以　$b^2+c^2\geqslant 2bc$，

所以　$a(b^2+c^2)\geqslant 2abc$，

同理　$b(c^2+a^2)\geqslant 2abc$，

　　　$c(a^2+b^2)\geqslant 2abc$.

又因为　a，b，c 不全相等，故

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

放缩法

例 8　已知 $n\in \mathbf{N}_+$，求证：$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

证明　因为 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

即 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

从例 8 的证明中可以看到，有时可以通过缩小（或放大）分式的分母（或分子），或通过放大（或缩小）被减式（或减式）来证明不等式，这种证明不等式的方法称为**放缩法**.

例 9　若 $0<a<\dfrac{1}{k}$，$k\geqslant 2$（k 为自然数），且 $a^2<a-b$，求证：$b<\dfrac{1}{k+1}$.

证明　由已知得 $b<a-a^2=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$.

令 $f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 内为增函数.

又 $0<a<\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $f(a)<f\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

从而 $b<-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}<-\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$$=-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}$$

$$=\frac{k-1}{k^2}<\frac{k-1}{k^2-1}=\frac{1}{k+1}.$$

练　习　2

1. 已知 $a>0$，$b>0$，求证：$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$.
2. 已知 $n>0$，求证：$3n+\dfrac{4}{n^2}\geqslant 3\sqrt[3]{9}$.
3. 已知 $a>2$，用放缩法证明不等式：$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.
4. 用放缩法证明 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2(n\in\mathbf{N}_+)$.

例 10　已知 $a>0$，$b>0$，求证：$\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

证明　如图 1-9 所示，在正方形 $ABCD$ 中有两个边长各为 a，b

的矩形 $AHOF$ 和矩形 $ECGO$，显然有 $AC\leqslant AO+OC$. 即

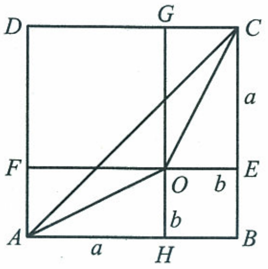


图 1-9

$$\sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2},$$
$$\sqrt{2}(a+b)\leqslant2\sqrt{a^2+b^2},$$
$$\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2},$$

故得 $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当 $a=b$ 时“=”成立.

通过构造几何图形，利用几何图形的性质来证明不等式的方法称为**几何法**.

例 11 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，利用几何法证明不等式 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

证明 如图 1-10 所示，单位圆⊙O 中 $\angle AOB=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. AC 切⊙O 于 A，$BD\perp OA$ 于 D，显然有 $BD=\sin\alpha$，$\overset{\frown}{AB}=\alpha$，$AC=\tan\alpha$.

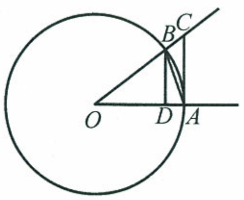


图 1-10

$\triangle AOB$ 的面积 $=\frac{1}{2}OA\cdot BD=\frac{1}{2}\sin\alpha$，

扇形 AOB 面积 $=\frac{1}{2}OA\cdot\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\alpha$，

$\triangle AOC$ 面积 $=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}\tan\alpha$；

因为 $\triangle AOB$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<\triangle AOC$ 面积，

即 $\frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\tan\alpha$，

所以 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

例 12 利用第一节的推论 3，证明推论 4.

推论 3：若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$.

推论 4：若 $a>b>0$，则 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

证明 假设推论 4 的结论不成立，即 $a^{\frac{1}{n}}\leqslant b^{\frac{1}{n}}$. 分两种情况.

(1) $a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$，

等式两边分别 n 次方，有 $a=b$，它与条件 $a>b$ 矛盾.

(2) $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$，

由于 $a^{\frac{1}{n}}>0$，

由推论 3，$(a^{\frac{1}{n}})^n<(b^{\frac{1}{n}})^n$，

即 $a<b$，它也与条件 $a>b$ 矛盾.

从而，我们证明了推论 4.

这种证明方法叫作**反证法**. 反证法是常用的证明方法. 它是通过证明命题结论的否定不能成立，来肯定命题结论一定成立. 其证明的

步骤是:(1)作出否定结论的假设;(2)进行推理,导出矛盾;(3)否定假设,肯定结论.

例 13　已知 $0<a<1$,用反证法证明不等式 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geqslant 9$.

分析　命题结论的否定是:在满足 $0<a<1$ 的实数 a 中,至少存在一个 a,使 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}<9$,要判断原命题正确,只要判断它的反面不正确,从解不等式的角度上看,就是只要判断不等式 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}<9$ 在区间 $(0,1)$ 内无解.

证明　假设在区间 $(0,1)$ 内有一个 a 使 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}<9$,解这个不等式有

$$(1-a)+4a<9a(1-a),$$

所以　$9a^2-6a+1<0$,

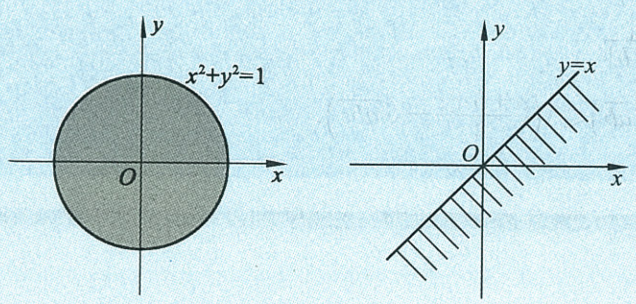
故　$(3a-1)^2<0$,

显然,不存在实数 a 使 $(3a-1)^2<0$ 成立. 即不等式 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}<9$ 在区间 $(0,1)$ 内没有解,也即满足 $0<a<1$ 的任意一个实数 a,都不能使 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}<9$ 成立.

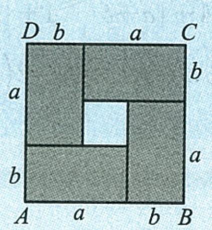
所以　当 $0<a<1$ 时,有 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geqslant 9$ 成立.

练　习　3

1. 已知圆和直线的方程如图所示,请用不等式表示图中阴影部分所示的平面区域.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图所示,设小矩形的长、宽各为 a,b,现把四个同样的矩形拼接成正方形后,分析其中阴影部分矩形面积之和与正方形面积之间的关系,并用不等式表示出来.

3. 已知 $n>0$,用反证法证明:$n+\frac{4}{n^2}\geqslant 3$.

习 题 1—4

A 组

1. 用比较法证明：$a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$.

2. 用比较法证明：$\frac{1}{3}\leqslant\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3$.

3. 若 $ad\neq bc$，求证：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

4. 当 $a>b>c>0$ 时，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

5. 用求商比较法证明：当 $a>2$，$b>2$ 时，$a+b<ab$.

6. 用综合法证明：当 $0<a<1$ 时，$\log_a(a^4+1)<\log_a 2+2$.

7. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，用综合法证明：$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$.

8. 用分析法证明：$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}>\sqrt{5}-2$.

9. 已知 $a,b,m\in\mathbf{R}_+$，且 $a<b$. 求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

10. 已知 $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$，用反证法证明：$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能都大于 $\frac{1}{4}$.

11. 已知 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1$，用放缩法证明：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

12. 用几何法证明：$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

B 组

1. 已知 $a>b>0$，求证：$e^a+e^{-a}>e^b+e^{-b}$.

2. 求证：$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

3. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$.

§5　不等式的应用

不等式的应用十分广泛，不仅可以解决一些数学问题，而且也可以解决其他学科中以及生产生活中的一些问题.

例 1　甲、乙是两位粮食经销商，他们每次都会在同一粮食生产基地以相同的价格购进粮食. 某月，他们共购粮食 3 次，各次的价格不同，甲每次购 10 000 kg 的粮食，乙每次购 10 000 元的粮食，谁的购粮方式更经济？

解　设他们 3 次购粮的单价分别为每千克 a_1, a_2, a_3 元（a_1, a_2, a_3 互不相等）. 由题意甲 3 次购粮平均每千克的粮价为

$$y_1=\frac{10\ 000(a_1+a_2+a_3)}{30\ 000}=\frac{a_1+a_2+a_3}{3},$$

乙 3 次购粮平均每千克的粮价为

$$y_2=\frac{30\ 000}{\frac{10\ 000}{a_1}+\frac{10\ 000}{a_2}+\frac{10\ 000}{a_3}}=\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}.$$

因为　a_1, a_2, a_3 互不相等且均大于 0，由基本不等式有

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}>3\sqrt[3]{\frac{1}{a_1a_2a_3}},$$

所以　$y_2<\dfrac{3}{3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a_1a_2a_3}}}=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

而　$y_1=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}>\sqrt[3]{a_1a_2a_3}>y_2$.

答：乙的购粮方式更经济.

例 2　将半径为 R 的圆形铁片剪去一个扇形，用剩下的部分卷成一个圆锥. 当剪去的扇形中心角 α 的弧度数为多大时，圆锥的体积最大，并求出这个最大体积.

解　设卷成的圆锥底面半径为 r，则圆锥高$=\sqrt{R^2-r^2}$.

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$$

$$=\frac{\pi}{3}\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot(R^2-r^2)}$$

$$=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot(2R^2-2r^2)}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{r^2+r^2+2R^2-2r^2}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

当且仅当 $r^2=2R^2-2r^2$，即 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$ 时取“=”号，这时 $V_{圆锥}$ 最大.

此时，圆锥侧面展开的扇形的中心角 $=\frac{2\pi r}{R}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，所以剪去的扇形中心角 $\alpha=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

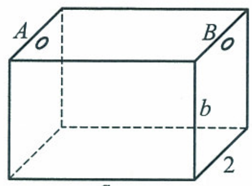
答：当剪去的扇形中心角 $\alpha=2\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，卷成的圆锥体积最大，这个最大体积是 $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$.

习 题 1—5

A 组

1. 某种农产品的产量，第二年比第一年增长的百分率为 P_1，第三年比第二年增长的百分率为 P_2，第四年比第三年增长的百分率为 P_3. 设 P 为年平均增长率，且 $P_1+P_2+P_3$ 为定值，求 P 的最大值.
2. 铁路机车运行 1 小时所需成本由两部分组成，固定部分 m 元，变动部分与运行速度 v 千米/时的平方成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 若机车匀速从甲站驶向乙站，为使成本最低，机车应以怎样的速度运行？
3. 某商店经销某种商品，根据销售情况，年进货量为 5 万件，分若干次等量进货. 设每次进货 x 件，每进一次货需运费 50 元，且在售完该商品时立即进货. 现以年平均 $\frac{x}{2}$ 件商品储存在仓库里，库存费用以每件 20 元计算，欲使一年的运费和库存费之和最省，每次进货量应为多少件？此时运费和库存费为多少元？

4. 如图，为处理含有某种杂质的污水，要制造一个底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱，污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出. 设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米. 已知流出的水中杂质的质量分数与 a,b 的乘积成反比. 现有制箱材料 60 m^2. 问 a,b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小(A,B 孔的面积忽略不计)？



(第 4 题)

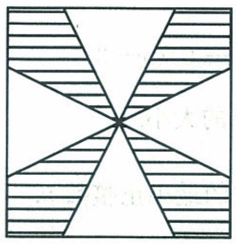


图 1

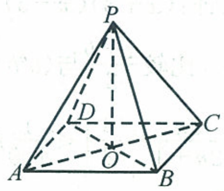


图 2

(第 5 题)

5. 如图 1，一块边长为 1 米的正方形铁皮，将阴影部分剪去，用余下的四个全等的等腰三角形制成一个如图 2 所示的四棱锥形容器，要使这个容器的容积最大，等腰三角形的底边长为多少？

复习题一

A 组

1. 已知 $x<0$，求证：$(x+3)(x-5)>(x+5)(x-3)$.

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}_+$，比较 $\frac{a+b}{2}$ 与 $(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$ 的大小.

3. 求使不等式 $\left|\frac{3n}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{100}$ 成立的最小正整数 n.

4. 解下列不等式：

   (1) $|\sqrt{3x-2}-3|>1$；

   (2) $\left|\frac{1}{x}+1\right|+\left|\frac{1}{x}-2\right|\geqslant 4$.

5. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

6. 已知 $x>y>0$，求证：$x+\frac{1}{(x-y)y}\geqslant 3$.

7. n 个正方形的总面积为常数 A，求它们的边长之和的最大值.

8. 用综合法证明：设 $a>0,b>0$ 且 $a+b=1$，则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

9. 用分析法证明：已知 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq b$，则 $\left|\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{b^2+1}\right|<|a-b|$.

10. 用反证法证明：已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x^3+y^3=2$，则 $x+y\leqslant 2$.

11. 用放缩法证明：若 $\alpha,\beta\in\mathbf{R},c\in\mathbf{R}_+$，则 $(\alpha+\beta)^2\leqslant(1+c)\alpha^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)\beta^2$.

B 组

1. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$，求证：$x^4+y^4+z^4\geqslant(x+y+z)xyz$.

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b=1$，求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$.

3. 设△ABC 的周长为定值，求三角形的内切圆面积的最大值，并说明这时△ABC 是怎样的三角形.

第二章　几个重要的不等式

§1　柯西不等式

1.1　简单形式的柯西不等式

定理 1　对任意实数 a,b,c,d，有

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2, \qquad (\text{I})$$

当向量 (a,b) 与向量 (c,d) 共线时，等号成立.

向量 (a,b) 与向量 (c,d) 共线是指：或者 (a,b) 是零向量，即 $a=b=0$；或者 a,b 不全为零，但存在实数 λ，使得 $c=\lambda a, d=\lambda b$.

证法一　如图 2-1，设 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(c,d)$ 是平面上任意两个向量，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为 θ，那么

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta.$$

此式两边取绝对值，可得

$$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}||\cos\theta|.$$

又　$|\cos\theta|\leqslant 1$，所以

$$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|,$$

即　$|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|$.　　(Ⅱ)

显然，等号成立的条件为：向量 (a,b) 与向量 (c,d) 共线.

将向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的坐标分别代入(Ⅱ)式，得

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ac+bd|,$$

即　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$.

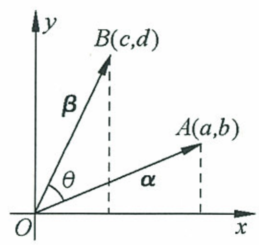


图 2-1

不等式(Ⅰ)称为**柯西不等式**，不等式(Ⅱ)称为**柯西不等式的向量形式**.

证法二　若 $a=b=0$，结论显然成立.

若 a,b 不全为 0，引入参数 t，考察关于 t 的函数

$$\varphi(t)=(at-c)^2+(bt-d)^2.$$

显然，t 取任何实数值都有$\varphi(t)\geqslant 0$. 将上式右边展开，可得

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=(a^2t^2-2act+c^2)+(b^2t^2-2bdt+d^2)\\&=(a^2+b^2)t^2-2(ac+bd)t+(c^2+d^2).\end{aligned}$$

令　$A=a^2+b^2, B=ac+bd, C=c^2+d^2$,

则　$\varphi(t)=At^2-2Bt+C\geqslant 0$.

因为 t 取任何实数值都有$\varphi(t)\geqslant 0$，所以二次方程 $\varphi(t)=0$ 不可能有两个相异的实根，也就是说方程的判别式不能为正值，即有

$$(-2B)^2-4AC\leqslant 0,$$

即　$4(ac+bd)^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant 0$,

所以　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$.

如果上式取"="号，即　$(-2B)^2-4AC=0$，则　$(ad-bc)^2=0$，所以　$ad=bc$.

这时，向量(a,b)与向量(c,d)共线.

证法三　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$

$$\begin{aligned}&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)\\&=a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ad-bc)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$.

显然，此式当且仅当 $ad-bc=0$ 时取"="号.

例 1　已知$|3x+4y|=5$，求证：$x^2+y^2\geqslant 1$.

证明　由柯西不等式可知　$(x^2+y^2)(3^2+4^2)\geqslant(3x+4y)^2$,

所以　$(x^2+y^2)\geqslant\dfrac{(3x+4y)^2}{3^2+4^2}$.

又因为　$|3x+4y|=5$，所以　$\dfrac{(3x+4y)^2}{3^2+4^2}=1$，即 $x^2+y^2\geqslant 1$.

例 2　对例 1 改用柯西不等式的向量形式来证明.

证明　设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,4)$.

由柯西不等式的向量形式知

$$|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|,$$

即　$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}\geqslant|3x+4y|=5$,

所以　$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 1$，即　$x^2+y^2\geqslant 1$.

练 习

1. 已知 $a+b=1$，求证：$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$.

2. 已知 $x+y=1$，求证：$x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}$.

3. 设 $ab\neq0$，求证：$(a^2+b^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geqslant4$.

1.2 一般形式的柯西不等式

柯西不等式(Ⅰ)可以推广到一般情形.

定理 2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组实数，则有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,\quad(\text{Ⅳ})$$

当向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与向量 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 共线时，等号成立.

> 向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与向量 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 共线是指：或者 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是零向量，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$；或者 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零，但存在实数 λ，使得 $b_1=\lambda a_1,b_2=\lambda a_2,\cdots,b_n=\lambda a_n$.

证明 如果 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，结论显然成立.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为 0，引入参数 t，考察关于 t 的函数

$$\varphi(t)=(a_1t-b_1)^2+(a_2t-b_2)^2+\cdots+(a_nt-b_n)^2.$$

显然，t 取任何实数值都有 $\varphi(t)\geqslant0$. 将上式右边展开，得

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=(a_1^2t^2-2a_1b_1t+b_1^2)+(a_2^2t^2-2a_2b_2t+b_2^2)+\cdots+\\&\quad(a_n^2t^2-2a_nb_nt+b_n^2)\\&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)t^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)t+\\&\quad(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),\end{aligned}$$

令 $A=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$，$B=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$，
$C=(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

则 $\varphi(t)=At^2-2Bt+C\geqslant0$.

由 $A\neq0$ 可知，$\varphi(t)$ 是 t 的二次函数. 因为 t 取任何实数值都有 $\varphi(t)\geqslant0$，所以有 $(-2B)^2-4AC\leqslant0$.

即 $[-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)]^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant0$，

故 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$.

如果此式取“=”号，那么二次方程 $\varphi(t)=0$ 有两个相等的实根 t_0，这时有 $(a_1t_0-b_1)^2+(a_2t_0-b_2)^2+\cdots+(a_nt_0-b_n)^2=0$，则 $a_it_0-b_i=0$ 对 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立. 从而，向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与向量 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 共线.

特别地，在定理 2 中令 $n=3$，可得

推论　设 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 是两组实数，则有

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

当向量 (a_1,a_2,a_3) 与向量 (b_1,b_2,b_3) 共线时"="成立.

例 3　已知 $a^2+b^2+c^2=1, x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$$|ax+by+cz|\leqslant 1.$$

证明　由柯西不等式可知，

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2.$$

又因为　$a^2+b^2+c^2=1, x^2+y^2+z^2=1$，

即　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=1$，

所以　$(ax+by+cz)^2\leqslant 1$，即　$|ax+by+cz|\leqslant 1$.

例 4　把一根长为 l 的绳子截成三段，各围成三个正方形. 请问：怎样截法才能使得围成的三个正方形的面积之和 S 为最小？

解　设三段绳子的长分别为 x,y,z，则 $x+y+z=l$.

显然，三个正方形的边长依次为 $\frac{x}{4},\frac{y}{4},\frac{z}{4}$，这三个正方形的面积之和为

$$S=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{1}{16}(x^2+y^2+z^2).$$

由此可知，S 与 $x^2+y^2+z^2$ 同时取最小值，而由柯西不等式（推论）可知　$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(x+y+z)^2$，

即　$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{l^2}{3}.$$

此式当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 时取"="号. 因此，把绳子三等分时，围成的三个正方形的面积之和最小.

练　习

1. 已知 a,b,c 都是正数，求证：$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.
2. 设 a,b,c 都是正数，且 $a+b+c=1$，求证：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$.

习 题 2—1

A 组

1. 设 a,b 为正数，求证：$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

2. 用柯西不等式证明：若 a,b 为正数，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，此式当且仅当 $a=b$ 时取“=”号.

3. 证明：$-\sqrt{2}\leqslant\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$.

4. 已知：$a>0,b>0$. 求证：$\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{a}{b^2}\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

5. 用柯西不等式证明：若 a,b 为正数，且 $a+b=1$，则 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geqslant\dfrac{25}{2}$.

6. 设 a,b,x,y 都是正数，且 $x+y=a+b$，求证：$\dfrac{a^2}{a+x}+\dfrac{b^2}{b+y}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$.

7. 利用柯西不等式证明：对任意正数 a,b,c，有 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号.

8. 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$，利用柯西不等式证明：

   (1) $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$；

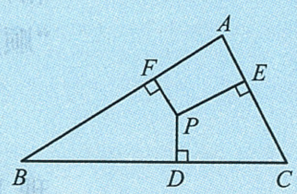
   (2) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\geqslant 9$.

9. 证明：$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$. 其中 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 均为实数.

B 组

1. 求证：若 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(c,d)$ 是平面上两个平行向量，则 $ad=bc$.

2. 设 P 为△ABC 内一点，D,E,F 分别为 P 到 BC,CA,AB 所引垂线的垂足（如图所示），求使 $\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$ 为最小的 P 点.



（第 2 题）

3. 设 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：
$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant 1.$$

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，求证：
$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

§2　排序不等式

定理 1　设 a,b 和 c,d 都是实数，如果 $a\geqslant b,c\geqslant d$，那么

$$ac+bd\geqslant ad+bc,$$

此式当且仅当 $a=b$(或 $c=d$)时取"="号.

证明　因为 $a\geqslant b,c\geqslant d$，所以 $a-b\geqslant 0,c-d\geqslant 0$，从而有

$$(a-b)(c-d)\geqslant 0,$$

即　$ac+bd-ad-bc\geqslant 0$，所以　$ac+bd\geqslant ad+bc$.

显然，此式当且仅当 $a=b$(或 $c=d$)时取"="号.

例 1　已知 $a\geqslant b>0$，c,d 是正整数且 $c\geqslant d$，求证：$a^{c+d}+b^{c+d}\geqslant a^cb^d+a^db^c$.

证明　因为 $a\geqslant b>0$，c,d 是正整数且 $c\geqslant d$，

根据第一章§1.2 不等式的性质 4 的推论 3 有　$a^c\geqslant b^c,a^d\geqslant b^d$.

于是由定理 1 可知　$a^c\cdot a^d+b^c\cdot b^d\geqslant a^c\cdot b^d+b^c\cdot a^d$，

即　$a^{c+d}+b^{c+d}\geqslant a^cb^d+a^db^c$.

例 2　设实数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 满足 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3,b_1\geqslant b_2\geqslant b_3$，

则　$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+a_3b_{j_3}\geqslant a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$，

其中 j_1,j_2,j_3 是 1,2,3 的任一排列方式. 上式当且仅当 $a_1=a_2=a_3$(或 $b_1=b_2=b_3$)时取"="号.

通常称 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 为顺序和，$a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+a_3b_{j_3}$ 为乱序和，$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$ 为逆序和(倒序和). 因此例 2 的结论是："顺序和$\geqslant$乱序和$\geqslant$逆序和".

证明　先证明"顺序和$\geqslant$乱序和".

(1)若乱序和中 $b_{j_1}=b_1$，那么乱序和$=a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2$，根据定理 1 可知

$$a_2b_2+a_3b_3\geqslant a_2b_3+a_3b_2,$$

所以　$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\geqslant a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2$.

(2)若 $b_{j_1}\neq b_1$，则 b_{j_2},b_{j_3} 中必有一个等于 b_1，不妨设 $b_{j_2}=b_1$，则 $b_{j_1}\leqslant b_1$. 乱序和$=a_1b_{j_1}+a_2b_1+a_3b_{j_3}$. 根据定理 1 可知

$$a_1b_1+a_2b_{j_1}\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_1,$$

所以　$a_1b_1+a_2b_{j_1}+a_3b_{j_3}\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_1+a_3b_{j_3}$.　①

此时，如果 $b_{j_1}=b_2$，那么 $b_{j_3}=b_3$，则"顺序和$\geqslant$乱序和"得证.

如果 $b_{j_1}=b_3$，那么 $b_{j_3}=b_2$，①式即为

$$a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2 \geqslant a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2,$$

根据定理 1 可知 $a_2b_2+a_3b_3 \geqslant a_2b_3+a_3b_2$.

所以 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \geqslant a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2 \geqslant a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2$.

综上所述，不论 b_{j_1} 是否等于 b_1，总有“顺序和≥乱序和”.

类似地，可以证明“乱序和≥逆序和”.

显然，当 $a_1=a_2=a_3$（或 $b_1=b_2=b_3$）时，顺序和、乱序和、逆序和彼此相等，否则它们彼此不相等.

定理 2（排序不等式） 设有两个有序实数组

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \text{及} b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n,$$

则 （顺序和） $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant$

（乱序和） $a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n} \geqslant$

（逆序和） $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列方式. 上式当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$（或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$）时取“=”号.

例 3 在△ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边依次为 a, b, c，求证：

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

证明 考察两个数组 a, b, c 和 A, B, C. 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，则有 $A \geqslant B \geqslant C$. 于是，由排序不等式可得

$$aA+bB+cC \geqslant aA+bB+cC,$$
$$aA+bB+cC \geqslant aB+bC+cA,$$
$$aA+bB+cC \geqslant aC+bA+cB.$$

（顺序和≥乱序和）

将以上三式的两边分别相加，得

$$3(aA+bB+cC) \geqslant (a+b+c)(A+B+C)=(a+b+c)\pi,$$

所以 $$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

例 4 设有 10 人各拿一只水桶同时到水龙头前打水，设水龙头注满第 $i(i=1, 2, \cdots, 10)$ 个人的水桶需时 T_i 分钟，假定这些 T_i 各不相同. 问：当只有一个水龙头可用时，应如何安排这 10 个人的次序，使他们的总的等待时间（包括各人自己接水所花的时间）最少？

解 若按某一顺序放水时间依次为 $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$，则总的等待时间为

$$T_1+(T_1+T_2)+\cdots+(T_1+T_2+\cdots+T_{10})$$
$$=10T_1+9T_2+\cdots+2T_9+T_{10}.$$

不妨令 $T_1<T_2<\cdots<T_{10}$，又 $10>9>\cdots>2>1$，由排序原理，得

$$10T_{i_1}+9T_{i_2}+\cdots+T_{i_{10}}>10T_1+9T_2+\cdots+T_{10}\text{（乱序和}\geqslant\text{逆序和）}.$$

所以，安排需时少的人先接水，总的花费时间最少.

练　习

1. 已知，$a>0$，$b>0$，求证：$a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a$.
2. 已知，$a>0$，$b>0$，求证：$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
3. 如果 a，b，c 都是正数，求证：$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.
4. 利用排序不等式证明：若 a，b，c 是正数，则 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

习　题　2—2

A　组

1. 利用排序不等式证明：对任意实数 a，b，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，此式当且仅当 $a=b$ 时取“$=$”号.
2. 在△ABC 中，角 C 为直角，角 A，B 所对的边为 a，b，求证：$aA+bB\geqslant(a+b)\dfrac{\pi}{4}$.
3. 设 $a>0$，$b>0$，证明：$\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{a}{b^2}\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.
4. 已知 x，y，z 都是正数，且 $x+y+z=1$，求证：$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\geqslant 1$.
5. 设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，证明：$\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}\geqslant\dfrac{a^2+b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2}{2a}+\dfrac{c^2+a^2}{2b}$.
6. 设 α，β，γ 都是锐角，证明：$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\gamma}+\dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha}\leqslant\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$.
7. 设 a，b，c 都是正数，求证：$a+b+c\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2}{2a}+\dfrac{c^2+a^2}{2b}$.

B　组

1. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$\frac{a^{12}}{bc}+\frac{b^{12}}{ca}+\frac{c^{12}}{ab}\geqslant a^{10}+b^{10}+c^{10}$.

2. 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3$，$y_1\geqslant y_2\geqslant y_3$，$z_1,z_2,z_3$ 是 y_1,y_2,y_3 的任一排列.
   求证：$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\leqslant(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2+(x_3-z_3)^2$.

3. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的任一排列. 证明：
$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

4. 已知 $\angle AOB=30^\circ$，自点 O 沿 OA 顺次取定五个点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5，沿 OB 也顺次取定五个点 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5，选取某个 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 与某个 $B_j(j=1,2,3,4,5)$ 连接，形成 $\triangle A_iOB_j$，这样一一搭配形成五个三角形，问：OA 上的点与 OB 上的点如何一一搭配，才能使形成的五个三角形的面积总和最大？请证明你的结论.

§3　数学归纳法与贝努利不等式

3.1　数学归纳法

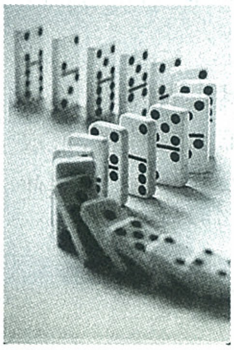


图 2-2

如图 2-2，多米诺骨牌依次倒塌的情境，说明不论骨牌有多少，只要：

(1) 我们能够推倒第一张骨牌；

(2) 任意一张骨牌的倒下都能保证它的下一张骨牌被推倒；

那么所有的多米诺骨牌都能依次倒下.

根据多米诺骨牌依次倒下的这种思想我们可以得到一种重要的数学证明方法——**数学归纳法**.

数学归纳法原理是设有一个关于正整数 n 的命题，若当 n 取第 1 个值 n_0 时该命题成立，又在假设当 n 取第 k 个值时该命题成立后可以推出 n 取第 $k+1$ 个值时该命题成立，则该命题对一切自然数 $n \geqslant n_0$ 都成立.

例 1　用数学归纳法证明：

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1).\ (n \in \mathbf{N}_+)$$

证明　(1)当 $n=1$ 时，左边$=2$，右边$=2$，等式成立.

(2)设 $n=k$ 时等式成立，即

$$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1).$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)\\=&k(k+1)+2(k+1)\\=&(k+1)(k+2)\\=&(k+1)[(k+1)+1],\end{aligned}$$

所以 $n=k+1$ 时等式也成立.

由(1)和(2)可知，等式对于任何正整数 n 都成立.

数学归纳法可以用于证明与正整数有关的命题. 证明需要经过两个步骤：

(1)验证当 n 取第一个值 n_0(如 $n_0=1$ 或 2 等)时命题正确.

(2)假设当 $n=k$ 时($k \in \mathbf{N}_+$，$k \geqslant n_0$)命题正确，证明当 $n=k+1$ 时命题也正确. 在完成了上述两个步骤之后，就可以断定命题对于从 n_0 开

始的所有正整数都正确.

例 2　用数学归纳法证明：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\ (n\in\mathbf{N}_+)$$

证明　(1) 当 $n=1$ 时，等式左边 $=1$，右边 $=\frac{(1+1)(2+1)}{6}=1$，等式显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，

即
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\&=\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},\end{aligned}$$

这就表明当 $n=k+1$ 时，等式成立.

由(1)和(2)可知，等式对一切正整数均成立.

思考交流

数学归纳法的两个步骤在整个证明过程中分别起什么作用？能不能减少其中一个步骤，能举例说明吗？

练　习

用数学归纳法证明：

1. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.
2. $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.
3. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$.

3.2　数学归纳法的应用

例 1　设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}\,(n\in \mathbf{N}_+)$，用数学归纳法证明：$\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

证明　(1)当 $n=1$ 时，$a_1=\sqrt{2}$，$1<\sqrt{2}<2$，不等式显然成立.

(2)假设 $n=k$ 时不等式成立，即$\dfrac{k(k+1)}{2}<a_k<\dfrac{(k+1)^2}{2}$.

当 $n=k+1$ 时，
$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&>\frac{k(k+1)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&>\frac{k(k+1)}{2}+\sqrt{(k+1)^2}\\&=\frac{k(k+1)}{2}+k+1\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&<\frac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&<\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{(k+1)+(k+2)}{2}\\&=\frac{k^2+4k+4}{2}\\&=\frac{(k+2)^2}{2}.\end{aligned}$$

所以$\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}<a_{k+1}<\dfrac{(k+2)^2}{2}$，即 $n=k+1$ 时不等式成立.

由(1)，(2)可知，对于任意正整数 n，不等式都成立.

定理　(贝努利不等式)对任何实数 $x\geqslant -1$ 和任何正整数 n，有
$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.\qquad (\text{Ⅰ})$$

证明　运用数学归纳法.

(1) 当 $n=1$ 时，不等式(Ⅰ)显然成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，不等式(Ⅰ)成立，即有
$$(1+x)^k\geqslant 1+kx.$$

因为　$x\geqslant -1$，所以 $1+x\geqslant 0$. 上式两边同乘$(1+x)$，得

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&\geqslant(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2\\&\geqslant 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

这就表明 $n=k+1$ 时不等式(Ⅰ)也成立.

综合(1)和(2),可知对任何正整数 n 不等式(Ⅰ)都成立.

不等式(Ⅰ)通常称为**贝努利不等式**.

例 2　设 $n\in\mathbf{N}_+$,求证:$2^n>n$.

证明　因为 $2^n=(1+1)^n$,根据贝努利不等式有

$$(1+1)^n\geqslant 1+n\times 1=1+n.$$

上式右边舍去 1,得 $(1+1)^n>n$,所以不等式 $2^n>n$ 成立.

例 3　设 $x\geqslant 0$,$n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>1$ 求证:$x^n-nx\geqslant 1-n$,当且仅当 $x=1$ 时"="成立.

证明　设 $x=1+t$,因为 $x\geqslant 0$,所以 $t\geqslant -1$. 于是有

$$x^n-nx=(1+t)^n-n(1+t).$$

但　$t\geqslant -1$,$n>1$,由贝努利不等式可知 $(1+t)^n\geqslant 1+nt$,所以

$$x^n-nx\geqslant(1+nt)-n(1+t)=1-n.$$

显然,当且仅当 $x=1$ 时"="成立.

练　习

1. 证明:当 $x\geqslant 0$ 时,有 $x\sqrt{x}-\dfrac{3}{2}x\geqslant-\dfrac{1}{2}$.
2. 求证:当自然数 $n\geqslant 5$ 时,有 $2^n>n^2$.

习　题　2—3

A　组

1. 用数学归纳法证明:$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$.
2. 用数学归纳法证明:对大于 1 的整数 n,有 $3^n>n+3$.
3. 用数学归纳法证明:若 n 为大于 1 的整数,则 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$.

B 组

1. 考察如下一列数：

$$\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\cdots,\frac{1}{n(n+1)},\cdots$$

其中前 n 个数的和记作 S_n，计算 S_1，S_2，S_3，S_4 的值，观察这些计算结果存在的规律，推测出计算 S_n 的公式，并用数学归纳法作出证明.

2. 已知 a_1，a_2，…，a_n 是两两互不相同的正整数，求证：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}.$$

复习题二

A　组

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,y)$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，试问：y 取什么值时，$\theta<45°$？y 取什么值时 $\theta>45°$？
2. 设点 $A=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$B=(1,1,\cdots,1)$，且向量 $\overrightarrow{BA}=(2,2,\cdots,2)$，写出点 A 的坐标，计算 $|\overrightarrow{BA}|$.
3. 试证明：对任何正整数 n，都有

   (1) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\geqslant\dfrac{1}{2}$；　　(2) 若 $n>2$，有 $2n^2>(n+1)^2$.
4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，求证：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$.
5. 在 $\triangle ABC$ 中，其各边长为 a,b,c，外接圆半径为 R，求证：

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}+\frac{1}{\sin^2C}\right)\geqslant 36R^2.$$

6. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的任一排列，求证：$\dfrac{a_1^2}{b_1}+\dfrac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{b_n}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$.
7. (利用排序不等式证明)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：

   (1) $\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$；　　(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.
8. 已知 $a,b\in\mathbf{R}_+$ 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，试证：对每一个 $n\in\mathbf{N}$，有 $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.
9. 设 $a_i\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$，求证：$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\dfrac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

B　组

1. 设 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，证明：$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$.
2. 设 a,b,c 为某三角形的三边长，求证：$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.
3. 利用柯西不等式证明平方平均不等式.

   设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}_+$，则 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\dfrac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}{n}}$.

◆ 复习小结建议

一、学习要求

1. 掌握不等式的基本性质和基本不等式.

2. 理解绝对值的几何意义，并能利用绝对值不等式的几何意义证明以下不等式：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

(2) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$；

(3) 会利用绝对值不等式的几何意义求解以下类型的不等式：

$|x|\leqslant c$；

$|ax+b|\geqslant c$；

$|x-c|+|x-b|\geqslant a$.

3. 了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法.

4. 认识柯西不等式的几种不同的形式，理解它们的几何意义，能证明柯西不等式的代数形式和向量形式.

5. 理解用参数配方法讨论柯西不等式一般情况的过程.

6. 了解数学归纳法的原理及其使用范围，会用数学归纳法证明一些简单问题.

7. 理解用数学归纳法证明贝努利不等式的方法，了解当 n 为实数时贝努利不等式也成立.

8. 理解用上述不等式证明一些简单问题的方法，能够利用平均值不等式、柯西不等式求一些特定函数的极值.

二、总结报告

复习本专题的知识，思考以下问题，对本专题内容进行归纳总结，并写出复习总结报告.

1. 在这一专题里我们学习了哪些不等式，它们的物理背景和几何表示是什么？

2. 不等式有哪些基本性质？从几何上如何理解这些性质？

3. 绝对值的几何意义是什么？你能利用绝对值不等式的几何意义证明哪些不等式？试举几例.

4. 归纳总结证明不等式的基本方法.

5. 通过对柯西不等式的学习，搜索数学大师柯西的生平事迹，撰写一篇介绍他的科普小论文.

6. 数学归纳法的基本原理是什么？证明的主要步骤怎样？主要可用以解决哪一类数学问题？

7. 通过本专题的学习，再进一步阅读课本，归纳总结；整理笔记，对比回忆；解答习题，思考交流过程中，总结出本专题的基本知识和基本数学思想方法.

8. 选择自己理解体会最深的知识内容，谈谈对不等式学习的感受、收获和发现，并与同学交流. 同时注意找出自己在本讲学习中尚未弄清楚的问题或者提出有待进一步探讨的新问题.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中 文	英 文
不等式	inequality
平均值不等式	average value inequality
绝对值不等式	absolute inequality
柯西不等式	Cauchy-inequality
贝努利不等式	Bernoulli inequality
数学归纳法	mathematical induction

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介:基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站,内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面.网站在提供教学实例、教学课件的同时,也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　记

本套教材是按照国家教育部于2003年4月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的．我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值，好学好用．

教材的建设是长期、艰苦的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材．我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持，促进基础教育课程改革的深入发展．

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序)：

马芳华、王希平、刘卫锋、张思明、李军洪、洪建明、赵冬歌、赵青、康宇．

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正．

北京师范大学出版社