经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-2）

矩阵与变换

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　张饴慈　檀晋轩
编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）
王尚志　王松浦　张饴慈　檀晋轩

北京师范大学出版社
·北 京·

基础教育教材网址 http://www.100875.com.cn

营销中心电话 010-58802783
服务中心电话 010-58802795
邮购科电话 010-58808083
传 真 010-58802838
学科编辑电话 010-58802811 58802790
电子邮箱 shuxue3@bnupg.com
通信地址 北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

绿色印刷 保护环境 爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志．从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷．

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求 印刷 第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求．

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印 刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：890mm×1240mm 1/16
印 张：7.5
字 数：230千字
版 次：2008年6月第3版
印 次：2019年7月第23次印刷
定 价：6.00元
ISBN 978-7-303-07064-0

责任编辑：岳昌庆 焦继红 装帧设计：王 蕊
责任校对：陈 民 责任印制：孙文凯 窦春香

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界．

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用．

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法．

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值．

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展．要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼．

在高中阶段，学习内容是很有限的．中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要．希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识．数学是提高“自学能力”最好的载体之一．

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题．大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）．问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始．在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的．

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的．不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣．

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题．习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组．

研究性学习是我们特别提倡的．在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

目 录

引言

矩阵是一种工具，可以用它来研究一些基本的图像(向量)变换.在这个专题里，我们将逐渐地了解并熟悉这一工具.为了对矩阵有一个初步的了解，我们先来看下面的例子.

例1 某公司负责从两个矿区向三个城市送煤：

从甲矿区向城市 A,B,C 送煤的量分别是 200 万吨、240 万吨、160 万吨；

从乙矿区向城市 A,B,C 送煤的量分别是 400 万吨、360 万吨、820 万吨.

我们通过下面一个数表来表示以上的数据关系(单位：万吨)：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{城市}A & \text{城市}B & \text{城市}C\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{甲矿区}\\ \text{乙矿区}\end{array} & \begin{bmatrix} 200 & 240 & 160 \\ 400 & 360 & 820 \end{bmatrix}\end{array}$$

通常把这里的二行三列的数阵称为**二行三列矩阵**.

在经济学研究投入、产出、规划等问题时，这样的矩阵是十分有用的.

例2 小王是个气象爱好者，他根据多年收集的资料，发现了当地天气有如下的规律：

晴天的次日是晴天的概率为$\frac{3}{4}$；

晴天的次日是阴天的概率为$\frac{1}{8}$；

晴天的次日是雨天的概率为$\frac{1}{8}$.

同样的，阴天的次日为晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}$；

雨天的次日为晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

我们可以用一张表，把上述数据清晰地表达出来：

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{次 日} \\
 & \begin{array}{ccc}\text{晴} & \text{阴} & \text{雨}\end{array} \\
\text{今日}\begin{array}{c}\text{晴}\\[2ex] \text{阴}\\[2ex] \text{雨}\end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\[1ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\[1ex] \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

从这个表中，可以一目了然地看出明天天气和今天天气的关系，这个三行三列的数阵称为三行三列矩阵，又叫**三阶方阵**. 这个矩阵反映了状态的转移，也叫作状态转移矩阵. 在研究随机现象中，这样的矩阵十分有用.

简单地说，一个矩阵是一个矩形的数表，由 $m\times n$ 个数据组成，排成 m 行 n 列，称为 **m 行 n 列矩阵**，通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$ 等表示. 特别地，n 行 n 列矩阵又叫作 **n 阶方阵**. 例如：

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0.7 \\ 2 & \sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是二行四列矩阵；

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是三行二列矩阵；

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是二行二列矩阵，即二阶方阵.

例 3 给定线性方程组

$$
\begin{cases} x-2y+3z=4, \\ 2x+y-z=-2, \\ -x+4y+2z=7. \end{cases}
$$

决定方程组的关键是方程中未知数的系数和常数项，而未知数既可以用 x，y，z 表示，也可以用其他字母表示. 例如，方程组

$$
\begin{cases} u-2v+3w=4, \\ 2u+v-w=-2, \\ -u+4v+2w=7, \end{cases}
$$

和上面的方程组相比，只有未知数的字母不同，但它们所表示的方程组完全相同.

上面的方程组可表示为

$$
\begin{cases} 1\,x+(-2)\,y+3\,z=4, \\ 2\,x+1\,y+(-1)\,z=-2, \\ (-1)\,x+4\,y+2\,z=7. \end{cases}
$$

抽出方程组中的未知数的系数和常数项，我们就得到下面的一个三行四列矩阵

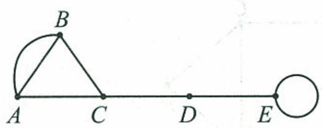
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

称它为该方程组的增广矩阵. 如果不考虑常数项，我们就得到下面的一个三阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

称它为该方程组的系数矩阵. 在研究线性方程组理论中，这两个矩阵发挥着重要的作用.

例 4　考察下图，这是由五个点 A,B,C,D,E 和连接它们的一些线组成的一个图.



连线反映了点与点之间的关系，如点 A 和点 B 之间有 2 条线连接，点 C 和点 D 之间有一条线连接，点 E 有一条自己到自己的线，而点 B 和点 D 之间没有线连接，等等. 为了清晰，我们可用自然数 n 反映两点之间线的条数，若两点无线连接，记为 0，有一条线连接，记为 1，等等. 这样我们可以用以下矩阵清晰反映图中的各种关系：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

这是一个五行五列的矩阵，称为上图的相邻矩阵，它在图论的研究中很有用. 事实上，给定一个图的相邻矩阵，就可以画出相关的图.

说　明

图论是数学的一个重要研究分支，矩阵是研究图论的重要工具之一.

矩阵的应用非常广泛. 介绍矩阵的知识，大多是从代数的角度，作为一种新的运算对象加以讨论. 本专题的目的不是系统地介绍矩阵的知识，我们希望更多地说明矩阵的几何背景，把矩阵作为表示几何变换的工具，通过几何背景，理解矩阵的性质和作用. 我们的讨论仅限于二阶的情况. 对这部分内容有兴趣的同学，可以参阅大学使用的《线性代数》或《高等代数》教科书.

习 题

1. 生产零件时，需要先将材料做成零件的毛坯，然后再精加工. 现生产三种零件，一块原料有四种下样方式：

   第一种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 1 个、3 个、4 个；

   第二种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 4 个、1 个、1 个；

   第三种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 0 个、6 个、2 个；

   第四种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 5 个、0 个、0 个.

   试把上述不同下样方式能得到的毛坯数用一个矩阵表示.

2. 营养配餐中心为学生准备了各种菜肴，每份中能量、脂肪、蛋白质的含量各不相同. 已知：

   “肉末粉条”中所含的上述三种营养成分分别为 649 千卡[1]、30 g，10 g；

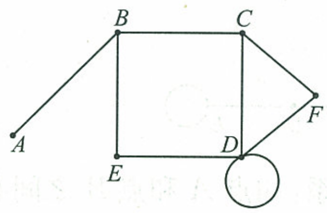
   “炸酱排”中所含的上述三种营养成分分别为 258 千卡、20 g，19 g；

   “韭菜豆芽”中所含的上述三种营养成分分别为 131 千卡、15 g，3 g.

   试把上述结果用矩阵表示.

   ❶ 1 千卡＝4 187 J.

3. 写出下图的相邻矩阵.



（第 3 题）

4. 现已知一个图中含有 A,B,C,D 四个点，请根据如下相邻矩阵画出该图：

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. 写出表示下列方程组的增广矩阵及系数矩阵.

   (1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x-y+z=0, \\ -x+3y-z=7; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=-1, \\ 5x+2y=3. \end{cases}$

6. 下列矩阵为某些线性方程组的增广矩阵，请写出下列矩阵所表示的方程组.

   (1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. 五个人 A,B,C,D,E，现知道 A 和 B,C 都相识，但 C 只和 A,D,E 相识，B 还和 D 相识. 试用一个只含数 0 和 1 的矩阵表示他们之间的相识关系. 其中，用 0 表示两个人之间不相识，用 1 表示两个人之间相识.

8. 从现实生活中找出一个用矩阵表示的问题.

第一章 平面向量与二阶方阵

§1 平面向量及向量的运算

1.1 向量的引入

在现实世界中，我们遇到的量大致有两类.

一类只有大小，没有方向，如长度、面积、质量等，称为**数量**.

另一类既有大小，又有方向，如位移、速度、力等. 例如，民航每天都有从北京飞往上海、广州、西安等地的航班，每次飞行都是民航客机的一次位移，由于飞行的距离和方向各不相同，因此它们是不同的位移(如图 1-1).

我们把既有大小，又有方向的量称为**向量**.

问题与思考

在你所学过的量中，哪些是数量？哪些是向量？

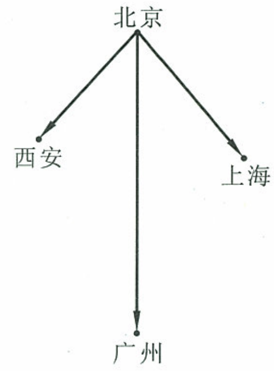


图 1-1 北京部分航班线路示意图

1.2 向量的几何表示——有向线段

数学中，怎样表示向量呢？

我们知道，在物理学中，表示位移最简单的方法，是用一条带箭头的线段，箭头方向表示位移的方向，线段长度表示位移的大小.

一般地，给定线段 AB，若我们把端点 A 作为起点，端点 B 作为终点，则线段 AB 就具有了从起点 A 到终点 B 的方向，这样的线段既有大小，又有方向，称之为**有向线段**(如图 1-2)，记作$\overrightarrow{AB}$.

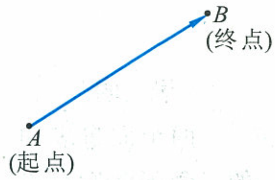
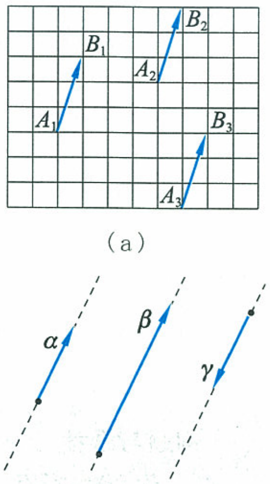


图 1-2

有向线段是向量的几何表示，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小. 书中我们常用黑体小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \cdots$ 或黑体小写英文字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 表示向量；手写时常用 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{a}, \vec{b}, \cdots$ 表示. 当用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，记作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$.

应该注意，数学中的向量与物理中的矢量是有区别的. 在数学中，只考虑向量的大小和方向，而与起点位置无关. 通常又称为**自由向量**.

如果两个向量通过平移能够重合，我们称这两个向量是**相等向量**. 如果表示两个向量的有向线段所在直线平行或重合，则称这两个向量**共线**，也称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线(即平行)，记作 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.



(a)
(b)
图 1-3

如图 1-3，容易看出

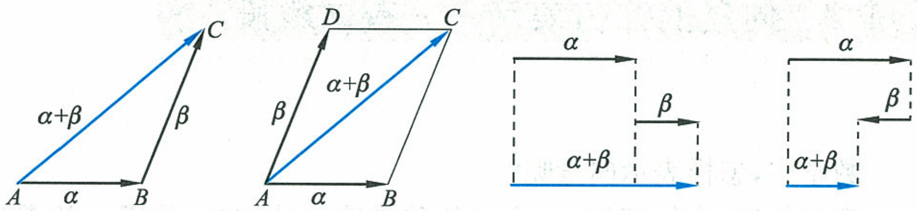
$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3},\ \boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\gamma}.$$

特别地，长度为零的向量，叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 规定**零向量与任意向量共线**.

1.3 向 量 的 和

如果飞机从北京飞往上海，再从上海飞往广州，那么，飞机从北京直接飞往广州的位移，与前面连续两次位移的结果相同. 称后面一次位移为前面两次位移的合位移.

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，如图 1-4(a)，即 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.



(a) (b) (c) (d)
图 1-4

我们还可以通过另一种方法确定两个向量的和. 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 不是共线向量，则由 AB，AD 为一组邻边可以构造一个平行四边形 $ABCD$，向量 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，如图 1-4(b).

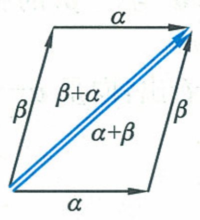
以上两种求两个向量和的方法，分别叫作向量求和的“三角形法则”和“平行四边形法则”. 图 1-4(c)和(d)表示了两个共线向量求和的情形.

说　明

两个向量求和的三角形法则可以推广至有限个向量求和.

思考交流

结合图 1-5 思考向量加法满足什么运算律.



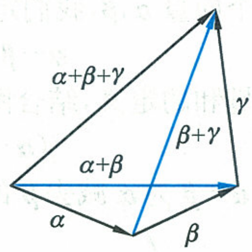


图 1-5

向量的加法满足交换律与结合律，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha};$$

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}).$$

这与我们熟悉的数的加法法则一致.

1.4 数乘向量

对于给定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，我们用 $2\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，而长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度 2 倍的向量；用 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度一半的向量；用 $-\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反，长度相同的向量，如图 1-6.

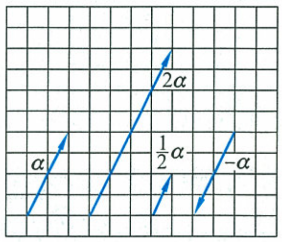


图 1-6

由此，我们可以得到数乘的定义：

一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$（我们简称为**数乘**）仍表示一个向量，它的长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度的 $|\lambda|$ 倍；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

根据此定义，我们可以得到如下结果：

若向量 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 共线，即 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行，即 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 反之，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，且向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 共线，即满足 $\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\alpha}$，则存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

说　明

关于数乘运算满足以下规则（λ，μ 为实数）：

$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$；

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

1.5 两个向量的差

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,我们定义 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $(-\boldsymbol{\beta})$ 的和,即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

根据向量和的定义,结合图 1-7 不难看出:向量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}.$$

我们称 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 减去 $\boldsymbol{\beta}$ 的差.

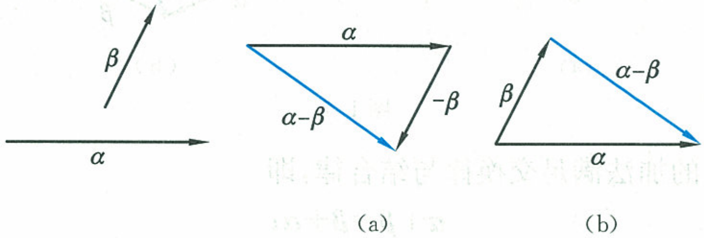
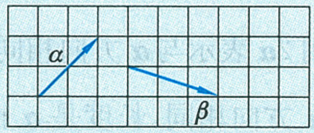


图 1-7

特别地,
$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}.$$
即
$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

练 习

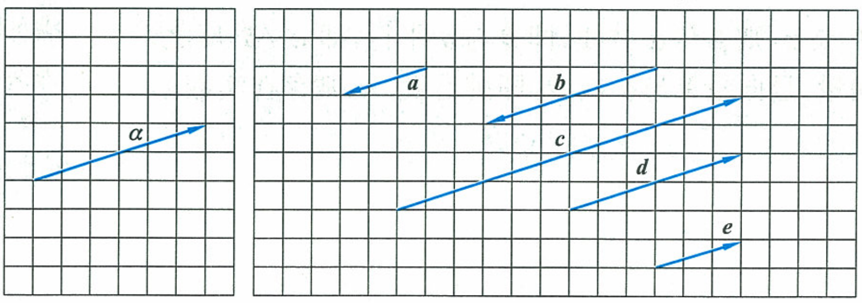
给定向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,如图,分别作出向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, $2\boldsymbol{\alpha}$, $-\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.



习 题 1—1

A 组

1. 仔细观察下列图形,右边的哪一个向量是左边所给向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作如下运算得到的向量:

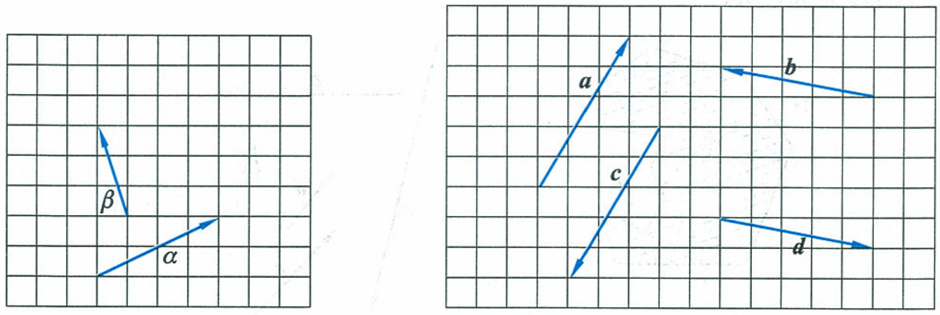


(第 1 题)

(1)$-\boldsymbol{\alpha}$;　　　　(2)$2\boldsymbol{\alpha}$;　　　　(3)$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$.

2. 仔细观察下列图形，右边的哪一个向量是左边所给向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 作如下运算得到的向量：

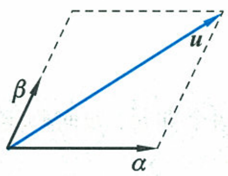
(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;　　　　(2)$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.



(第 2 题)

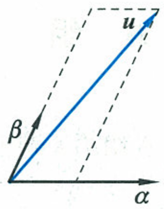
3. 仿照下列(1)(2)(3)的求解方法，给出(4)(5)的解.

(1)



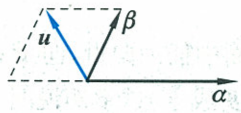
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$;

(2)



$\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}+\frac{5}{2}\boldsymbol{\beta}$;

(3)

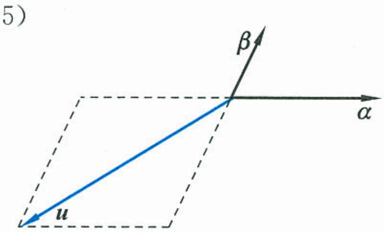


$\boldsymbol{u}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;

(4)

$\boldsymbol{u}=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$;

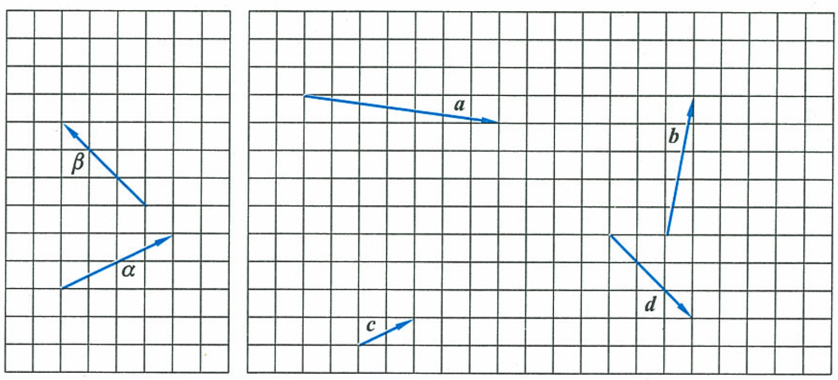
(5)



$\boldsymbol{u}=$____$\boldsymbol{\alpha}+$____$\boldsymbol{\beta}$.

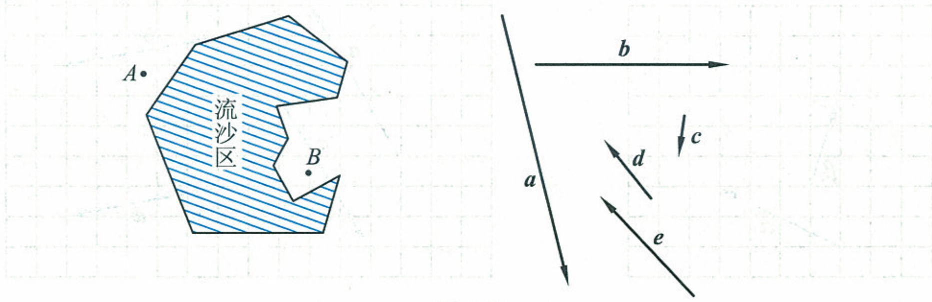
(第 3 题)

4. 如图所示，左图中给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，通过观察和测量，确定适当的实数 s，t，使得右边的向量恰好可以表示成 $s\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$ 的形式.



(第 4 题)

5. 机器人"小贝"靠接受命令移动，命令是按给定的向量进行位移，例如"小贝"接到按 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量位移命令，它将以所在位置为起点，从起点到达终点的向量与给定向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同. 现在，"小贝"必须绕过流沙区从 A 地到 B 地，如下图所示. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ 等 5 个向量是给"小贝"的五个命令，请你排出正确顺序使"小贝"完成任务.



（第 5 题）

B 组

1. 设 $\boldsymbol{u}$ 为平面中任一向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是 A 组第 4 题中给定的两个向量. 如何确定实数 s,t，使 $\boldsymbol{u}=s\,\boldsymbol{\alpha}+t\,\boldsymbol{\beta}$ 成立，试举例说明.
2. 对任意给定的两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，上题中的结论一定成立吗？

§2　向量的坐标表示及直线的向量方程

2.1　平面向量的坐标表示

在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{\alpha}$ 为平面上的任意一个向量. 我们以坐标原点 O 为起点，作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha}$，并作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M. 如图 1-8 所示. 根据向量加法的“三角形法则”不难得出

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}.$$

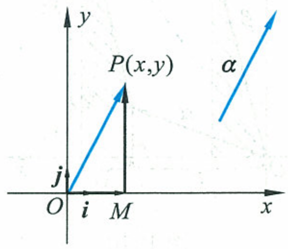


图 1-8

我们分别取与 x 轴，y 轴方向相同，且长度为单位 1 的向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$. $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 是两个特殊的向量，我们把它们称作一组基本向量，又称为**基或基向量**. 显然有

$$\overrightarrow{OM}/\!/\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{MP}/\!/\boldsymbol{j},$$

此时必有且只有一对实数 x,y，使得

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{MP}=y\boldsymbol{j},$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}. \tag{1.1}$$

我们把实数对 (x,y) 叫作向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

上述(1.2)式即为向量的坐标表示. 显然，(x,y) 也是点 P 的坐标. 这样，有序实数对把向量与点紧密地联系在一起.

由此可见，全体有序实数对与坐标平面内的所有向量之间可以建立一一对应关系. 在平面直角坐标系中，点或向量都可以看作有序实数对的直观形象，而有序实数对可以看作点或向量的代数表示.

在我们后面的研究内容中，点 $P(x,y)$ 和向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，虽然具有不同的意义，但有时候，在不引起混淆的情形下，对它们不加区别.

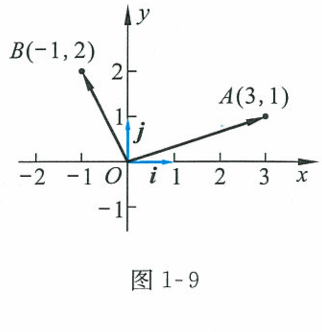


图 1-9

如图 1-9 中，点 $A(3,1)$ 与向量 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 对应，点 $B(-1,2)$ 与向量 $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 对应. 特别地，原点 $O(0,0)$ 与零向量 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 对应. 而 $(1,0)$，$(0,1)$ 分别与向量 $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 对应.

根据(1.1)式，任意向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，总可以用基向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$表示为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

2.2 平面向量运算的坐标表示

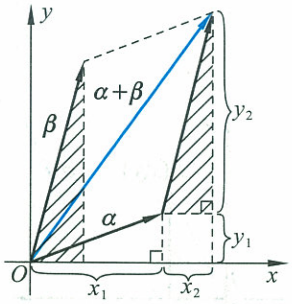


图 1-10

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，由图 1-10，不难发现

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}.$$

同理
$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}.$$

这就是说，向量的和与差的相应坐标分别等于各向量的相应坐标的和与差.

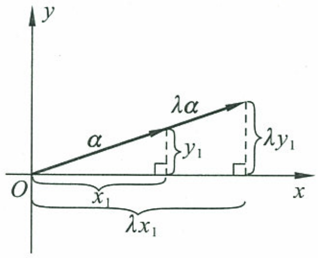


图 1-11

对实数 λ，由图 1-11，可发现 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda y_1\end{pmatrix}$.

这就是说，实数与向量乘积的相应坐标等于该实数与向量的相应坐标的乘积.

例 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，分别计算并在坐标系中画出下列向量，再用向量运算的几何意义进行验证：

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；　(2)$-\boldsymbol{\alpha}$；　(3)$2\boldsymbol{\beta}$.

解 (1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3+(-1)\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$；　(2)$-\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$；

(3)$2\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\times(-1)\\2\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

如图 1-12.

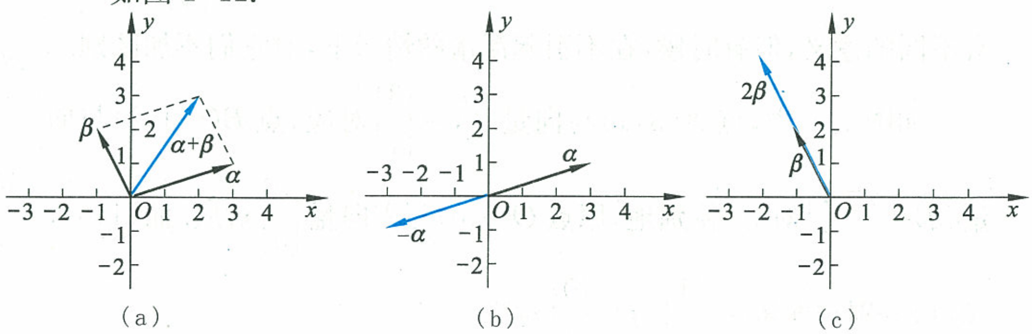


图 1-12

2.3　直线的向量方程

在几何学习中，我们已经知道，一个点和一个方向可以确定一条直线．现在我们可以用向量来表示方向，那么，如何利用向量来表示射线呢？

实例分析

如图 1-13，直线 l 经过点 $A(1,4)$，且平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$（称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为直线 l 的**方向向量**）．

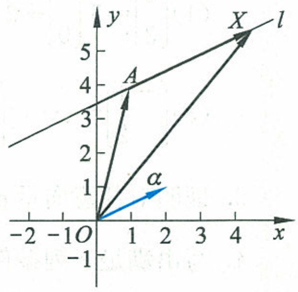


图 1-13

设直线 l 上任意一点 $X(x,y)$，则显然有

$$\overrightarrow{AX}/\!/\boldsymbol{\alpha},$$

因此，总存在一个实数 t，使得

$$\overrightarrow{AX}=t\boldsymbol{\alpha}.$$

又有

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA},$$

则 $$\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=t\boldsymbol{\alpha},$$

即 $$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{\alpha}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

上式中，t 称为参数．显然，随着参数 t 的变化，点 X 的位置在直线 l 上运动．因此，上式可以用来描述直线 l 上动点 X 的轨迹，称为**直线 l 的向量方程**．也可以表示为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

说　明

此式还可以写成直线 l 的参数方程：

$$\begin{cases}x=1+2t,\\y=4+t,\end{cases}(t\in\mathbf{R}).$$

一般地，在平面直角坐标系中，经过点 $M_0(x_0,y_0)$，且平行于非零向量 $\boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ 的直线 l 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OM_0}+t\boldsymbol{v}_0\quad(t\in\mathbf{R}).\qquad(1.4)$$

即 $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

习　题　1—2

A　组

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$，计算并在坐标系中画出下列向量：

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；　(2)$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$；　(3)$2\boldsymbol{\alpha}$；　(4)$\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$；　(5)$2\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$.

2. 画图验证下列事实，并计算核实：

(1)$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$；　(2)$\begin{bmatrix}-3\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=(-3)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$；

(3)$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$；　(4)$\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

3. 证明对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$，总有 $\boldsymbol{\alpha}=p\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，并试着通过画图来说明这一等式的几何意义.

4. 写出满足下列条件的直线的向量方程：

(1)过点 $A(1,-2)$，平行于向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$；

(2)过原点 $O(0,0)$，平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$；

(3)经过 $A(1,-2)$，$B(1,3)$ 两点.

5. 观察图 1-12 中直线 l 上的动点 X，对方程 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$　$(t\in\mathbf{R})$，当 $t=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2,\cdots$ 时，分别计算动点 X 的坐标 (x,y)，并在图中观察动点 X 的运动变化，思考方程中的参数 t 的几何意义.

6. 给定三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$，问：是否存在实数 s,t，使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立？若存在，求出这两个数，数对 (s,t) 是唯一的吗？画图观察，说明这种表示的几何意义. 对任意向量 $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$，是否一定存在实数 s,t 使得 $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立？

B　组

给定向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意向量，是否存在实数 s,t，使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立.

§3　二阶方阵与平面向量的乘法

平面解析几何中经常需要研究点的运动. 如图 1-14，平面图形作了一次关于 x 轴的反射变换，点 A 变成了点 A'.

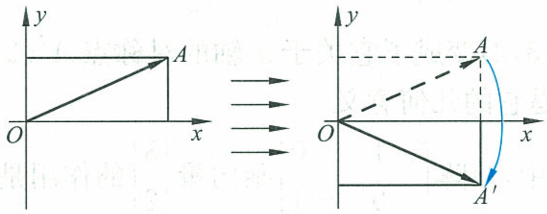


图 1-14

由于平面上的点与向量是一一对应的，因此，平面上点的运动也与向量的运动是一一对应的. 点 A 变成点 A'，向量 $\overrightarrow{OA}$ 变成向量 $\overrightarrow{OA'}$. 那么，我们能不能借助向量来刻画这些点的运动呢？要解决这一问题，矩阵是一个很好的工具.

我们定义二阶方阵与向量的乘法运算：

二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$（左）乘向量 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 的法则是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$（左）乘向量 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 的作用是：

把向量 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 变成了另一个向量 $\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}$.

例 1　计算下列矩阵与向量的乘法：

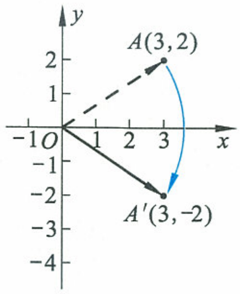
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

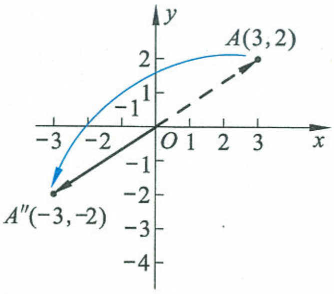
解　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times3+0\times2 \\ 0\times3+(-1)\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$；

$$(2)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\times3+0\times2\\ 0\times3+(-1)\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix};$$

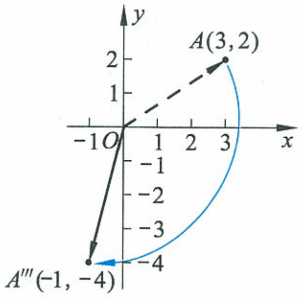
$$(3)\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+(-2)\times2\\ -2\times3+1\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}.$$



(a)



(b)



(c)

图 1-15

在例 1(1)中，矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$乘向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的作用是：向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的横坐标没变，纵坐标变为相反数，即把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$变成了向量$\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$；也就是把平面上点 $A(3,2)$变成了它关于 x 轴的对称点 $A'(3,-2)$，如图 1-15(a)所示. 这是它的几何意义.

在例 1(2)中，矩阵$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$乘向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的作用是：把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的两个坐标都变成相反数，即把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$逆时针旋转了 180° 变成了向量$\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$；也就是把平面上点 $A(3,2)$ 变成了它关于原点的对称点 $A''(-3,-2)$. 如图 1-15(b)所示.

同样的，在例 1(3)中，矩阵$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$乘向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的作用是：把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$变成向量$\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}$；也就是把点 $A(3,2)$变成了点 $A'''(-1,-4)$. 如图 1-15(c)所示.

信息技术建议

这里，利用信息技术可以帮助我们更好地理解矩阵乘向量的几何意义. 具体方法可以参看本节后面的"信息技术应用".

由定义(1.5)式可以看出，矩阵乘向量的结果仍是一个向量. 从几何上说，矩阵乘向量的作用是把一个向量变成另一个向量；把平面上的一个点变成了另一个点.

实践活动

给定向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，利用矩阵与向量的乘法，计算得出下列矩阵把该向量变成什么向量，画图并说明几何意义.

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

根据矩阵与向量的乘法，

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times3+0\times2\\ 0\times3+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix},$$

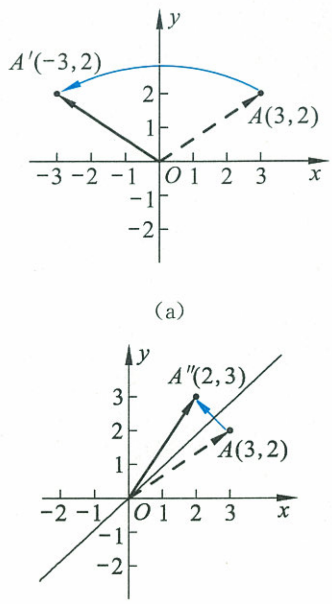
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times3+1\times2\\ 1\times3+0\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+0\times2\\ 0\times3+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times3+0\times2\\ 0\times3+0\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

在矩阵$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的作用下，向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$横坐标变成相反数，纵坐标不变，变成了向量$\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$，此时，点 $A(3,2)$ 变成了关于 y 轴的对称点 $A'(-3,2)$. 如图 1-16(a)所示.

在矩阵$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$的作用下，向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$的横坐标、纵坐标交换了位置，向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$变成了向量$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$，此时点 $A(3,2)$ 变成了关于第一、三象限角平分线的对称点 $A''(2,3)$. 如图 1-16(b)所示.



(a)

(b)

图 1-16

矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$很特殊，它使得向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$没变，也可以说，把向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$变成了它自己.

从代数运算上看，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的作用很类似数“1”在乘法中的作用，我们称它为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{I\alpha}=\boldsymbol{\alpha}.$$

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$也是一个特殊的矩阵，称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，在它的作用下，任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$都变成了零向量$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即

$$\boldsymbol{0\alpha}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

单位矩阵把平面上的任意一点都变成了它自己. 零矩阵把平面上的所有点都变成了原点.

下面我们用矩阵与向量相乘的形式，分析一下线性方程组一种新

的表示形式.

对于二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y=1,\\-x+4y=3.\end{cases}\qquad(1.6)$$

该方程组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix},$$

把未知数对(x,y)写成未知向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$的形式，根据矩阵与向量乘法的定义，有

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-2y\\-x+4y\end{bmatrix}.$$

这样，方程组(1.6)可以由它的系数矩阵与未知向量乘法的形式表示为

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.\qquad(1.7)$$

从几何上看，(1.7)式表示，在矩阵$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}$的作用下，把未知向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$变成了已知向量$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. 这是线性方程组的一种重要的表示形式，我们将在§4.4中运用这一观点讨论方程组求解问题.

例 2　试把下列方程组用矩阵与向量的乘法的形式表示出来.

(1)$\begin{cases}2x-y=-1,\\3x+4y=5;\end{cases}$　(2)$\begin{cases}u-v=3,\\3u+v=1;\end{cases}$　(3)$\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f.\end{cases}$

解　(1) $\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$.

信息技术应用

利用几何画板研究理解矩阵乘向量的几何意义

步骤：

1. 新建画板，并在图表菜单中用定义坐标系建立直角坐标系.

2. 选中坐标轴，用构造菜单中对象上的点，任意构造坐标轴上四个点，并分别标记为 a,b,c,d.

3. 用度量菜单分别测算出 a,b,c,d 四个点的横坐标，并分别标记为 a,b,c,d(如图 1-17 所示)，这样就得到一个矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

4. 用点工具在平面上任画一点，并标记为 P，测算出点 P 的坐标. 并把点 P 的横坐标、纵坐标分别标记为 x,y. 这样就得到向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

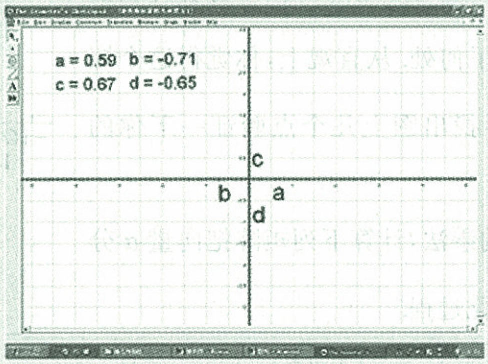


图 1-17

5. 根据矩阵乘向量法则，用度量工具中的计算功能，计算出 $ax+by$ 和 $cx+dy$，并分别标记为 x',y'.

6. 分别顺次选中 x',y'，用图表菜单中绘制点(x',y')，并标记为 P'. 点 P'就是在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下点 P 的像点.

7. 分别构造线段 OP,OP'(如图 1-18 所示).

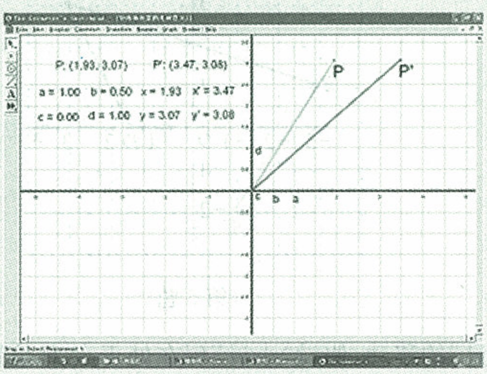


图 1-18

经过以上步骤后，任意拖动 a,b,c,d 四个点，就可以得到所需要的矩阵. 任意拖动点 P，就可以观察像点 P' 与原像点 P(或向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OP'}$)的位置关系.

习 题 1—3

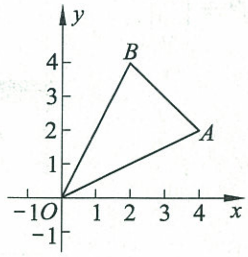
A 组

1. 把下列方程组用矩阵与向量的乘法形式表示：

(1) $\begin{cases}-x+4y=1,\\3x+5y=-1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-3y=4,\\5x+8y=3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}7x=7,\\x-y=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x+y=0,\\x-3y=0.\end{cases}$

2. 如图，$\triangle ABO$ 中顶点坐标分别是 $A(4,2)$，$B(2,4)$，$O(0,0)$. 计算并画图感受矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ 把这三个顶点变到了何处. 从直观上，你觉得这个矩阵把整个三角形变到了何处？试着再找出图上几个点验证一下你的猜想.

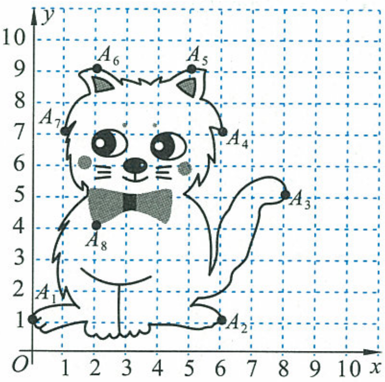


（第 2 题）

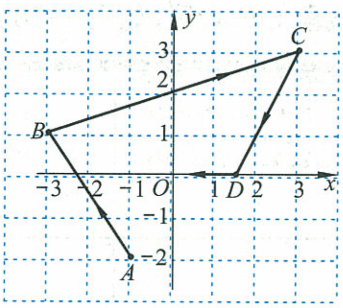
3. 给定向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$，利用矩阵与向量的乘法，计算下列矩阵把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别变成了什么向量，并画图表示这一变化过程.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

4. 矩阵 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 把下图中的点 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 变到了何处？直观上你觉得整个图形（小猫）变到了何处？试再找图上几个点验证一下你的猜想.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 现在我们用矩阵命令来指挥机器人“小贝”的移动. 假设“小贝”现在处于点 P 位置，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，点 P 变成像点 P'，当接到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的命令后，“小贝”将从所在位置 P 点移动到 P' 点. 请排出下列四个矩阵命令的正确顺序，使“小贝”沿图中点 $A\to B\to C\to D\to O$ 顺次移动完成巡视的任务.

(1) $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$； (3) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$.

6. 甲、乙两名同学期中和期末考试成绩可用矩阵 **A** 表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 期中 & 期末 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 87 & 90 \\ 96 & 88 \end{bmatrix} \end{array}$$

在学期末记录总评成绩时，是按期中成绩占$\frac{1}{3}$，期末成绩占$\frac{2}{3}$计算，记$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，试用矩阵 **A** 与向量$\boldsymbol{\alpha}$ 的乘法表示甲、乙两人的总评成绩并计算结果(说明：在成绩单中只出现整数，小数部分按照四舍五入原则近似取值).

B　组

1. 考虑只有晴天和阴天(阴天包含下雨在内)的转移矩阵 **A** 为

明日＼今日	晴	阴
晴	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
阴	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} 晴 \\ 阴 \end{array}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

已知今天是晴天和阴天的概率分别是$\frac{1}{8}$，$\frac{7}{8}$，记$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{7}{8}\end{bmatrix}$，你能否用矩阵 **A** 与向量$\boldsymbol{\alpha}$ 来表示明日天气晴、阴的概率？

2. 注意观察你周围的生活实际情境，有没有可以用矩阵及矩阵与向量乘法表示的事.

复习题一

A 组

1. 如图，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在以正六边形的顶点及中心为起点和终点的所有向量中.

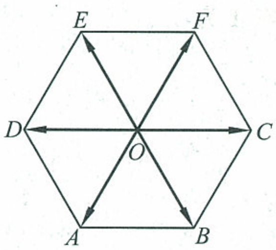
(1)分别写出与图中向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$相等的向量；

(2)分别写出与图中向量$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$共线的向量.

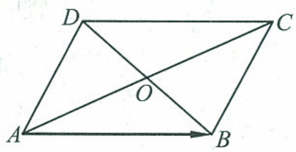
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 分别表示下列位移：

向北 10 km；向南 5 km；向西 10 km；向东 5 km.

试说明：向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{d}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$ 的几何意义.



（第 1 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知 O 为▱$ABCD$ 对角线的交点，在以平行四边形的顶点及对角线交点为起点和终点的向量中，

(1)哪两个向量的和是向量$\overrightarrow{AB}$？

(2)哪两个向量的差是向量$\overrightarrow{AB}$？

4. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}$.

5. 已知点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(-1,-2)$，求▱$ABCD$ 的顶点 D 的坐标.

6. 飞机从 A 地向西北飞行 200 km 到达 B 地，又从 B 地向东飞行 $100\sqrt{2}$ km 到达 C 地，再从 C 地向南偏东 60°飞行 $50\sqrt{2}$ km 到达 D 地，求飞机从 D 地飞回 A 地的位移.

7. 写出满足下列条件的直线的向量方程：

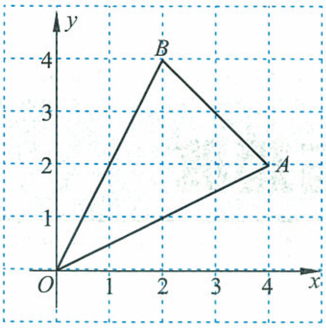
(1)过点 $M(3,-1)$，平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$；

(2)经过 $A(2,0)$，$B(0,-1)$两点.

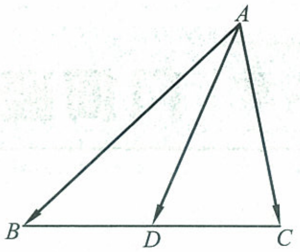
8. 如图，矩阵$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$把图中三角形的顶点 A，B，O 变到了何处？直观上你觉得△ABO 变到了何处？试再找图中几个点验证一下.

9. 如图，D 是△ABC 中 BC 边的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\beta}$，试用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 表示$\overrightarrow{AD}$.

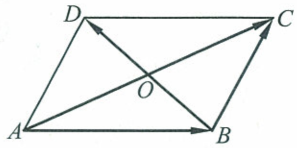
10. 如图，在▱$ABCD$ 中，设对角线向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\beta}$，试用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$.



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

B 组

1. 已知 $A(7,8)$，$B(3,5)$，$C(4,3)$，且 M,N,D 分别是 AB,AC,BC 的中点，MN 与 AD 交于点 F，求$\overrightarrow{DF}$.
2. 若点 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(x,5)$共线，求点 C 的坐标.
3. 求 A 组第 7 题中两直线的交点坐标.
4. 如果矩阵$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$把点 A 变成点 $A'(3,1)$，求点 A 坐标.
5. 假设现有的兔子和狐狸数量分别用 R,F 表示，记作$\begin{bmatrix}R\\ F\end{bmatrix}$，下一年的兔子和狐狸数量分别用 R',F' 表示，记作$\begin{bmatrix}R'\\ F'\end{bmatrix}$. 若兔子和狐狸数量的增长模型如下：

$$\begin{cases}R'=1.1R-0.15F,\\ F'=0.1R+0.85F.\end{cases}$$

记矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1.1 & -0.15\\ 0.1 & 0.85\end{bmatrix}$，

(1)用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示上述兔子和狐狸数量的增长模型；

(2)如果现有 100 只兔子，30 只狐狸，用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示出下一年的兔子与狐狸数量，并计算出结果；

(3)如果今年有 100 只兔子，30 只狐狸，试推测上一年的兔子与狐狸数量.

第二章 几何变换与矩阵

平面图形有很多种运动变化，如平移、旋转、反射、压伸等. 这一章，我们就来研究矩阵与几何变换的关系，研究矩阵变换的基本性质以及它们的几何意义.

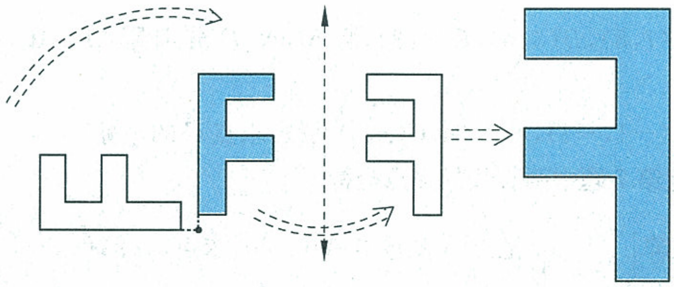


图 2-1

§1 几种特殊的矩阵变换

在第一章中，我们讨论了向量的概念和运算性质. 在平面直角坐标系中引入向量坐标时，我们特别提到了以原点为起点的向量. 指出了以原点为起点的向量与平面上的点之间是一一对应的，而且它们有相同的坐标.

另外，我们还引入了矩阵与向量的乘法，设 $\boldsymbol{M}$ 是一个二阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量，通过矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用，可以得到唯一的向量$\boldsymbol{M\alpha}$. 特别地，当我们取原点为起点的向量$\overrightarrow{OP}$，通过矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用，可以得到一个以原点为起点的新的向量$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}$，并且$\overrightarrow{OP'}$是被矩阵 $\boldsymbol{M}$ 唯一确定的. 我们把这样的对应关系称作**映射**，$\overrightarrow{OP}$称为**原像**，而$\overrightarrow{OP'}$称作**像**. 从几何变换的观点，就相当于矩阵把点 $P(x,y)$ 变成了另一个点 $P'(x',y')$. 这就是说，矩阵就是一个几何变换，它把平面上任一个

点，变成平面上的另一个点. 所以，有时我们也称矩阵为**矩阵变换**.

1.1 反射变换

实例分析

观察图 2-2，字母“F”形状的图案关于 x 轴反射得到一个新图案.

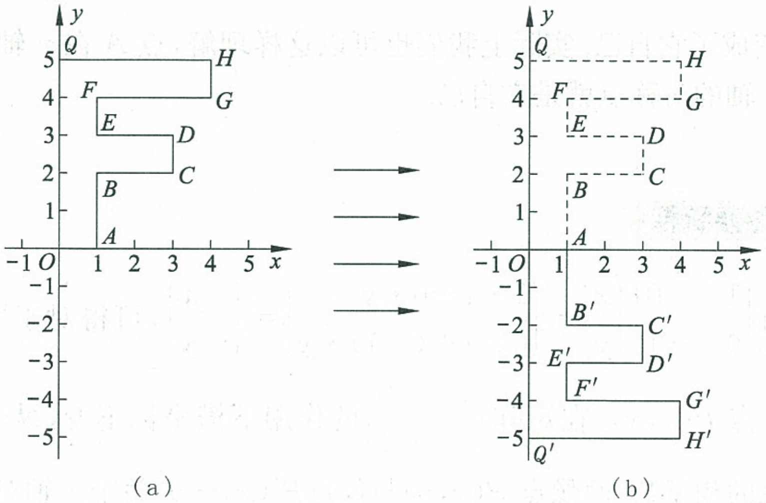


图 2-2

我们已经知道，矩阵乘向量的作用是把平面上的一个点变成平面上的另一个点. 那么，是否存在一个矩阵可以刻画图 2-2 中的变换过程呢？

我们来研究矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$. 先用图 2-2(a)中的点 $C(3,2)$来进行试验.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+0\times2\\0\times3+(-1)\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},$$

由运算结果可知，点 $C(3,2)$在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 的作用下，横坐标没变，纵坐标变为原来的相反数. 原像点 C 与像点 C' 关于 x 轴对称，如图 2-2(b).

同样的，对点 $H(4,5)$，$Q(0,5)$，由

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$$

可知，点 H,Q 在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 的作用下，横坐标也没变，纵坐标变为原来的相反数，也就是说点 H,Q 分别变成了关于 x 轴的对称点 $H'(4,-5),Q'(0,-5)$.

而对点 $A(1,0)$，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times0\\0\times1+(-1)\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

由于点 A 的纵坐标为零，则其相反数仍为零，这样，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 把点 A 变成了它自己. 实际上我们也可以这样理解，点 A 在 x 轴上，它关于 x 轴的对称点就是它自己.

抽象概括

由 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot x+0\cdot y\\0\cdot x+(-1)\cdot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$，可得对于平面上任意一点 $P(x,y)$，在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 的作用下横坐标不变，纵坐标变为原来的相反数，原像点 $P(x,y)$ 与像点 $P'(x,-y)$ 关于 x 轴对称. 整个平面上的点都关于 x 轴作了一次翻转，只有 x 轴上的点没变. 这样，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 可以刻画图 2-2 中的变换过程. 我们说，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 表示了关于 x 轴的**反射变换**.

动手实践

试着研究矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 对图 2-3 中 $\triangle ABC$ 的作用结果. 分析并判断该矩阵表示的是什么变换. 应用信息技术，可以帮助我们更好地理解这一矩阵变换. 具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用一”.

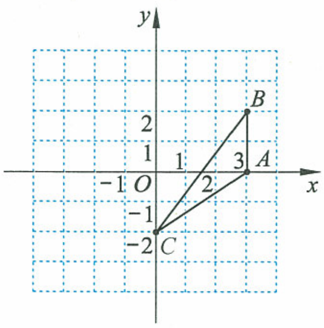


图 2-3

1.2 压伸变换

实例分析

图 2-4 中，正方形图案向 x 轴方向垂直压缩了一半.

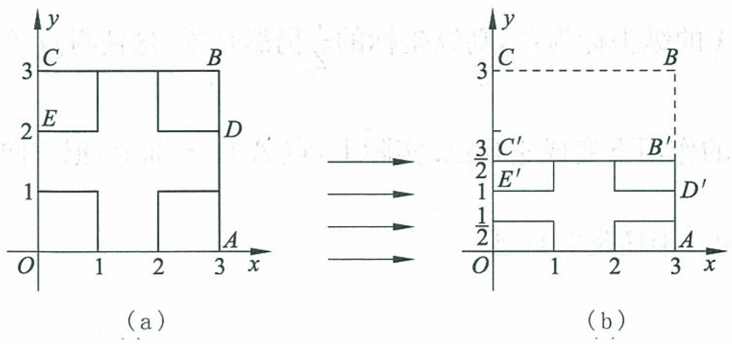


图 2-4

那么，是否存在矩阵可以表示这一压缩变换的过程？

我们来研究矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，先观察它对图 2-4(a)中的点 $D(3,2)$ 的作用，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+0\times2\\ 0\times3+\frac{1}{2}\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}.$$

从以上运算结果不难发现，点 $D(3,2)$ 在矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$的作用下，横坐标没变，纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，即该矩阵把点 D 向 x 轴方向垂直压缩为原来的一半，变成像点 $D'(3,1)$，如图 2-4(b).

同样地，对点 $B(3,3)$，$E(0,2)$，由

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

可知，在该矩阵的作用下，点 $B(3,3)$，$E(0,2)$ 的横坐标没变，纵坐标

均变为原来的$\frac{1}{2}$，即矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$把点 B，E 都向 x 轴方向垂直压缩为原来的一半，变成像点 $B'\left(3,\frac{3}{2}\right)$，$E'(0,1)$.

而对点 $A(3,0)$，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+0\times0\\ 0\times3+\frac{1}{2}\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix},$$

由于点 A 的纵坐标为零，则纵坐标的$\frac{1}{2}$仍然是零，这使得点 A 在矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$的作用下变成它自己. 实际上，点 A 在 x 轴上，把它向 x 轴垂直压缩为一半还是它自己.

抽象概括

对于平面上任意一点 $P(x,y)$，在矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$的作用下，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot x+0\cdot y\\ 0\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{2}y\end{bmatrix},$$

横坐标不变，纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，原像点 $P(x,y)$ 的像为 $P'\left(x,\frac{1}{2}y\right)$. 即矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$把平面上的每一个点 P 都向 x 轴方向垂直压缩为原来的一半，只有 x 轴上的点没变. 我们说，矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$表示了向 x 轴方向的**垂直压缩变换**.

信息技术应用

一、利用几何画板研究矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$表示的变换

步骤：

1. 在新建画板中建立直角坐标系，并在坐标系中任意选取三个点，分别标记为 A，B，C.

2. 依次选中点 A，B，C，构造三角形内部，并构造三角形上的点，标记为 P，测算点 P 坐标(x,y)，如图 2-5 所示，这样就得到向量$\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$.

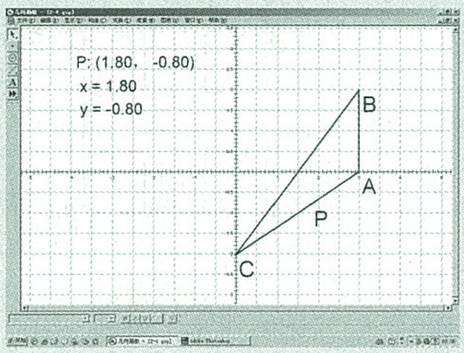


图 2-5

3. 根据矩阵乘向量定义，计算 $0\cdot x+1\cdot y$ 和 $1\cdot x+0\cdot y$，并分别标记为 x'，y'，然后绘制点(x',y')标记为 P'，点 P'就是在矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$作用下点 P 的像点.

4. 顺次选中点 P 和点 P'，在构造菜单中选用轨迹功能，便得到$\triangle ABC$ 在矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$作用下的像，如图 2-6.

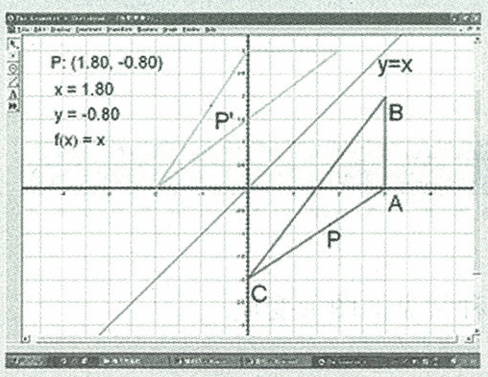


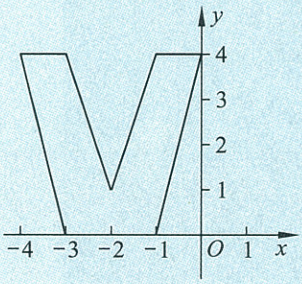
图 2-6

经过以上步骤后，任意拖动点 P(在$\triangle ABC$ 上运动)，就可以观察像点 P'与原像点 P 的位置关系. 任意拖动$\triangle ABC$ 的顶点或边就可以观察不同的三角形在该矩阵作用下的结果.

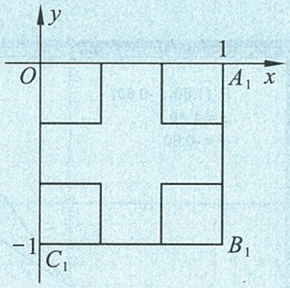
最后，在图表菜单中选中绘制新函数，然后输入 x 后确定，就得到直线 $y=x$. 可以利用变换菜单中反射功能绘制$\triangle ABC$ 关于 $y=x$对称的图形，进一步验证自己的猜想结果.

练习 1

1. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$把图中的“V”字图形变成了什么？计算并画图，并选出若干点进行验证.



（第 1,2 题）



（第 3 题）

2. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$把图中的“V”字图形变成了什么？计算并画图，并选出若干点进行验证.

3. 猜想矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$把图中的正方形 $OA_1B_1C_1$ 变成了什么图形？并选出若干点进行验证.

4. 仿照本节“实例分析”中的研究过程，试着研究矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$表示的是什么变换？

5. 当 $k>0$ 时，你能猜想矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$表示的变换吗？试着用语言描绘出你的猜想.

1.3 旋转变换

旋转也是一种常见的图形变换.

实例分析

图 2-7 中，图形绕着原点 O 逆时针旋转了 90°.

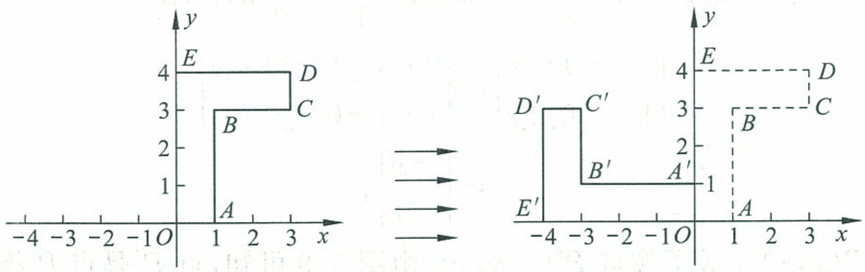
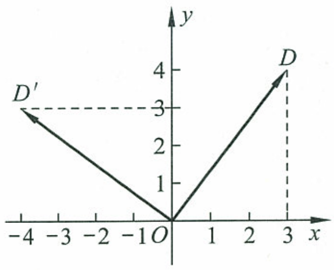


图 2-7

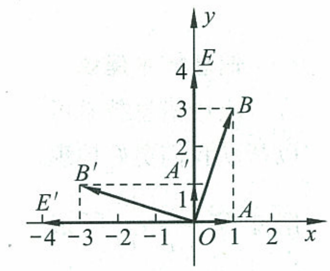
我们来研究矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$，考察它对点 $D(3,4)$ 的作用.

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times3+(-1)\times4\\1\times3+0\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix},$$

在矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 的作用下，点 $D(3,4)$ 变成了像点 $D'(-4,3)$. 其中点 D' 的横坐标是点 D 纵坐标的相反数，点 D' 的纵坐标是点 D 的横坐标. 那么，这两个点，或者说向量 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OD'}$ 在几何上有什么关系呢？由图 2-8(a)不难看出向量 $\overrightarrow{OD'}$ 是把向量 $\overrightarrow{OD}$ 绕着原点逆时针旋转 90° 得到的. 也就是矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 把点 D 绕原点逆时针旋转 90°变成 D'.



(a)



(b)

图 2-8

对于其他点，如 $A(1,0)$，$B(1,3)$，$E(0,4)$. 由

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix}$$

可知，矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 把它们都绕原点逆时针旋转了 90°，分别变成点 $A'(0,1)$，$B'(-3,1)$，$E'(-4,0)$，如图 2-8(b)所示.

抽象概括

对平面上任一点 $P(x,y)$，在矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 的作用下，

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot x+(-1)\cdot y\\ 1\cdot x+0\cdot y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix},$$

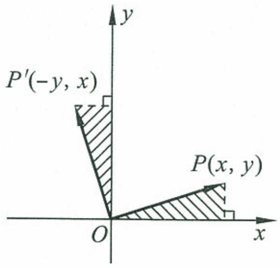


图 2-9

点 $P(x,y)$ 变成了像点 $P'(-y,x)$. 由图 2-9 可知，点 P' 是点 P 绕着原点逆时针旋转 90°得到的，即矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 把平面上每一点都绕着原点逆时针旋转了 90°，只有原点没动. 我们说矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 表示的是(逆时针旋转 90°的)**旋转变换**.

1.4 切 变

试分析以下矩阵的作用

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

> **信息技术建议**
>
> 应用信息技术可以帮助我们更好地理解矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 所表示的几何变换，具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用”.

首先，我们考虑矩阵对图 2-10(a) 中正方形 $ABCO$ 的四个顶点的作用. 并猜想该矩阵把这个正方形变成了什么.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+1\times0\\ 0\times1+1\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+1\times1\\ 0\times1+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times0+1\times1\\ 0\times0+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

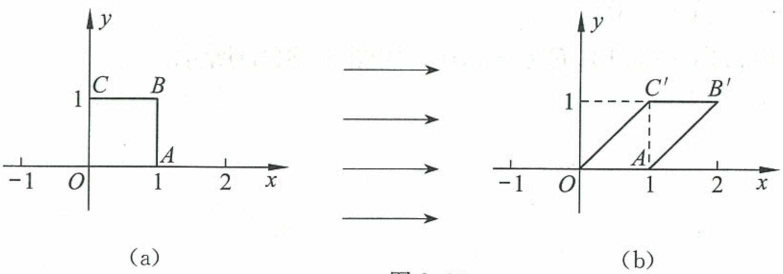


图 2-10

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把图 2-10(a)中正方形 $ABCO$ 的顶点 A,B,C,O 分别变成了点 $A(1,0)$，$B'(2,1)$，$C'(1,1)$，$O(0,0)$．如图 2-10(b)所示，直观上可以看出，正方形 $ABCO$ 变成了平行四边形 $AB'C'O$.

我们称矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 表示的是(沿 x 轴正向的)**切变变换**.

思考交流

给定点 $P(x,y)$，请讨论点 $P(x,y)$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的作用下，像点 P' 的坐标特点，并给出几何解释.

信息技术应用

二、利用几何画板研究矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 表示的变换

步骤：

1. 在新建画板中建立直角坐标系，仿照反射变换“信息技术应用”中的步骤 1，2，构造四边形 $BCDE$ 上任一点 $P(x,y)$，得到向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，如图 2-11 所示.

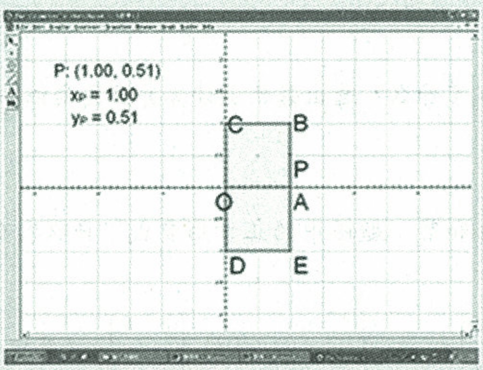


图 2-11

2. 根据矩阵乘向量的定义，计算 $1\cdot x+1\cdot y$ 和 $0\cdot x+1\cdot y$，并分别标记为 x',y'，然后绘制点(x',y')标记为 P'．仿照反射变换“信息技术应用”中步骤 4，构造点 P' 轨迹，便得到四边形 $BCDE$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 作用下的像，如图 2-12 所示.

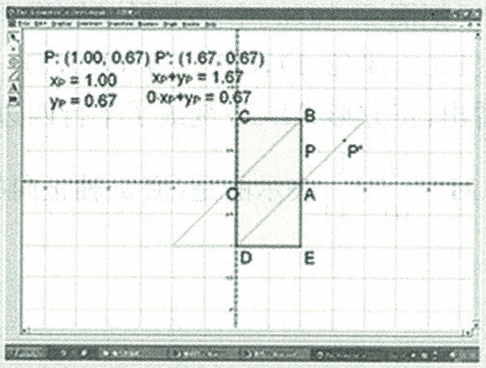
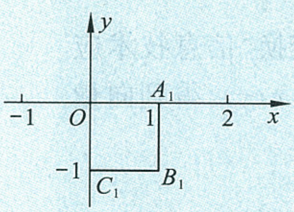


图 2-12

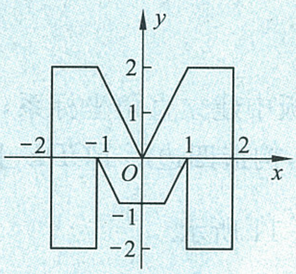
经过以上步骤后，任意拖动点 P(在四边形 $BCDE$ 上运动)，可以观察像点 P' 与原像点 P 的位置关系.

练 习 2

1. 试给出矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 对图中正方形 $A_1B_1C_1O$ 的作用结果. 这和你想像中的结果一样吗?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 猜想下列矩阵把图中的字母"M"分别变成了什么? 选出若干点计算并画图验证一下你的猜想.

(1) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

3. 试研究下列矩阵把图 2-10(a)中的正方形和第 1 题图中的正方形变成了什么? 你能感受到它们所表示的变换吗?

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$;　　(3) $\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$ (其中 k 为任意实数).

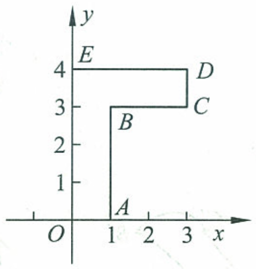
习　题 2—1

A　组

1. 分别给出下列矩阵对图中图形的作用结果.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

你认为它们分别表示什么变换？能证明吗？



(第 1 题)

2. 分别给出下列矩阵对第 1 题图中图形的作用结果.

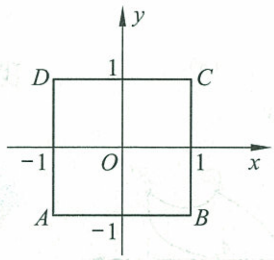
(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

直觉上它们分别表示什么变换？能证明吗？

3. 分别给出下列矩阵对图中正方形的作用结果.

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$(其中 $k>0$).

从几何上说明它们分别表示什么变换，并给出证明.

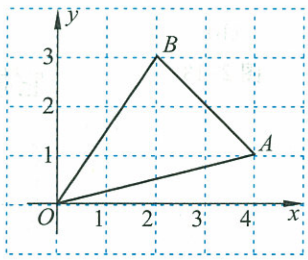


(第 3 题)

4. 分别给出下列矩阵对图中的三角形 OAB 的作用结果.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$　(其中 $k>0$).

从几何上试说明它们分别表示什么变换，并给出证明.



(第 4 题)

B　组

1. 试通过访问、咨询或读书自学等方式了解三角函数及三角变形公式，并完成以下内容：

(1) 利用给定图示，研究矩阵 $M=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 表示什么变换.

(2) 试证明你的结论.

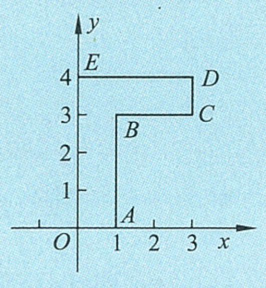
(3) 当 $\theta=30^\circ$ 时，图中的图形变换结果是什么？

当 $\theta=75^\circ$ 时呢？

(4) 你能给出表示逆时针旋转 60° 的矩阵吗？

(5) 你能给出表示顺时针旋转 60° 的矩阵吗？

(6) 表示顺时针旋转 θ 的矩阵结构如何？能证明你的结论吗？



(第 1 题)

2. 试证明以下矩阵分别把直线变成直线.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}；\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§2 矩阵变换的性质

问题提出

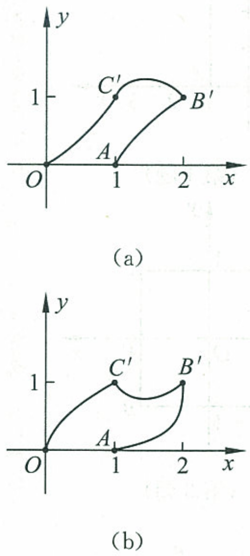


图 2-13

上一节研究矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$表示的变换时，我们只计算了正方形四个顶点 A,B,C,O 的变换结果，并没有讨论其他点. 那么能保证正方形 $ABCO$ 不会变成图 2-13 中的各种样子吗？

也就是说，矩阵变换是不是把直线变成直线. 为了回答这个问题，我们先来研究矩阵变换的性质.

实例分析

我们研究矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，它表示的是关于 x 轴的反射变换，它把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 反射成了向量 $\boldsymbol{M\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M\beta}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$，如图 2-14.

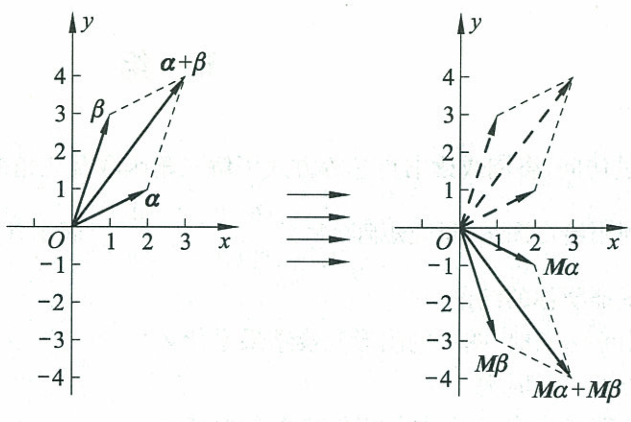


图 2-14

直观上，由于向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别与向量 $\boldsymbol{M\alpha},\boldsymbol{M\beta}$ 关于 x 轴对称，所以，向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与向量 $\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$ 也关于 x 轴对称. 即矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 反射成了向量 $\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$，即 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$. 验证这一点并不困难，因为

$$M(\alpha+\beta)=M\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)=M\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}M\alpha+M\beta&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以　$M(\alpha+\beta)=M\alpha+M\beta$　成立.

类似地,矩阵 $N=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 把向量 α 和 β 沿逆时针方向旋转 90°,也把向量 $\alpha+\beta$ 沿逆时针方向旋转 90°成了向量 $N\alpha+N\beta$. 如图 2-15 所示,即有 $N(\alpha+\beta)=N\alpha+N\beta$. 请同学们自己进行验证.

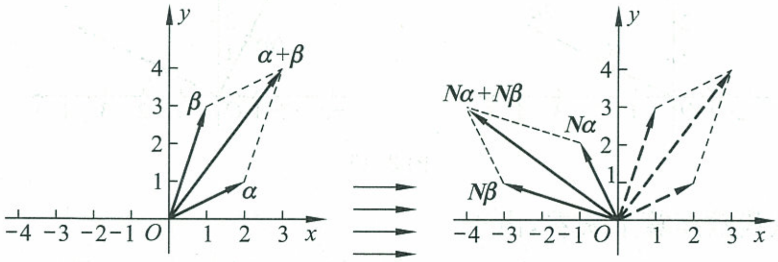


图 2-15

抽象概括

一般地,给定矩阵 M,对任意向量 α 和 β,有

$$M(\alpha+\beta)=M\alpha+M\beta. \tag{2.1}$$

下面我们来证明(2.1)式.

证明　设矩阵 $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,向量 $\alpha=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$,

则　$M(\alpha+\beta)=M\left(\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\right)=M\begin{pmatrix}p_1+q_1\\p_2+q_2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1+q_1\\p_2+q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(p_1+q_1)+b(p_2+q_2)\\c(p_1+q_1)+d(p_2+q_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap_1+aq_1+bp_2+bq_2\\cp_1+cq_1+dp_2+dq_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}M\alpha+M\beta&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ap_1+bp_2\\cp_1+dp_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}aq_1+bq_2\\cq_1+dq_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ap_1+aq_1+bp_2+bq_2\\cp_1+cq_1+dp_2+dq_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此,　$M(\alpha+\beta)=M\alpha+M\beta$　成立.

实例分析

考察矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$，它表示逆时针旋转 90°的变换，那么，不难想像把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 先伸长 2 倍，再逆时针旋转 90°，和把它先逆时针旋转 90°，再伸长 2 倍，结果相同，如图 2-16 所示.

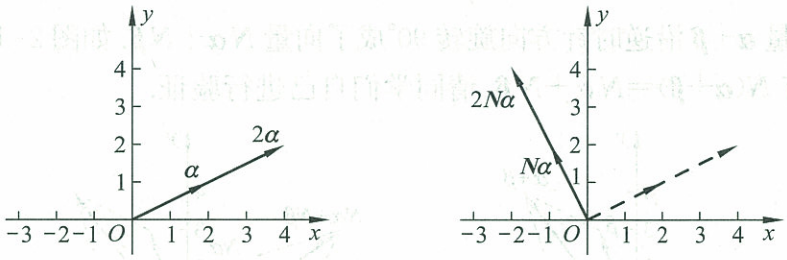


图 2-16

从代数运算上来看，由于

$$\boldsymbol{N}(2\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{N}\left(2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{N}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},$$

$$2(\boldsymbol{N\alpha})=2\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}.$$

所以，$\boldsymbol{N}(2\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{N\alpha})$ 成立.

抽象概括

一般地，给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，及任意实数 λ，有

$$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{M\alpha}). \tag{2.2}$$

综合以上的两个结论，可以得出

给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，以及任意实数 λ 和 μ，总有

$$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M\alpha})+\mu(\boldsymbol{M\beta}). \tag{2.3}$$

这是矩阵变换最重要的性质.

请同学们自己完成对(2.2)式和(2.3)式的证明.

上一章我们已经知道，任意向量 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 总可以写成

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

利用矩阵变换的性质(2.3)式，有

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=x\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

那么，只要确定了基向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，任意向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$在 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 均可以用向量 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 表示.

由于任意向量均可由基向量$\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$表示，因此，在研究较复杂的矩阵变换时，先考虑基向量的变换结果，再考虑一般向量的变换结果，这是用数学解决问题的基本思想之一.

给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，我们知道

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$$

是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第一列，

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第二列，

这样，对任意向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，可以利用基向量间接计算：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\&=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix},\end{aligned}$$

也可以根据矩阵与向量乘法的定义，直接计算：

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix},$$

这两种方式得到的结果是一致的.

练习 1

1. 对矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，在平面直角坐标系中画出下列向量：

   (1) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$；

   (2) $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$，

   并验证

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta};$$
$$\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha});$$
$$\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}.$$

2. 证明矩阵变换的性质(2.2)式及(2.3)式.

3. 通过讨论矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 对基向量 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 的变换结果，并利用基向量间接计算该矩阵把向量 $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ 变成了什么.

现在我们来讨论本节开始时提出的问题，矩阵变换是否把直线变成直线.

实例分析

设直线 l 经过点 $A(2,1)$，且平行于向量 $\boldsymbol{v}_0=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，如图 2-17(a)，它的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\boldsymbol{v}_0\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

其坐标形式为

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，它表示关于 x 轴的反射变换，则由

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把点 $A(2,1)$ 反射成了点 $A'(2,-1)$，把向量 $\boldsymbol{v}_0$ 反射成了向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$，如图 2-17(b). 过点 A' 且平行于向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$ 的直

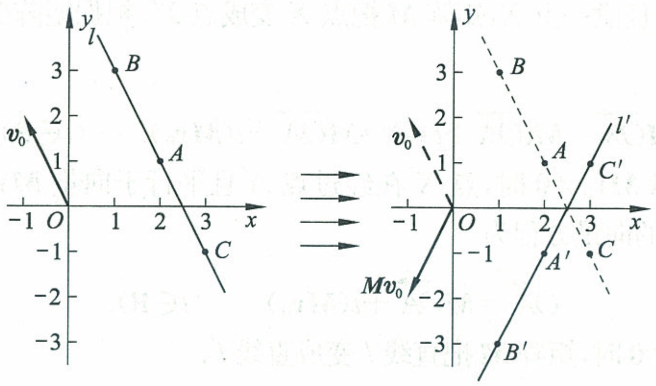


图 2-17

线 l' 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OA'}+t\cdot(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0)\qquad(t\in\mathbf{R}),$$

其坐标形式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

对直线 l，分别取参数 $t=1,-1$ 时得到直线上不同于点 A 的点 $B(1,3)$，$C(3,-1)$，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，它们分别变成了点 $B'(1,-3)$，$C'(3,1)$，而 B'，C' 恰在直线 l' 上，是参数 $t=1,-1$ 时对应的点.

对直线 l 上任一点 $X(x,y)$，由

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},$$

即 $$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OX'}.$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 上任意一点 $X(x,y)$ 都反射成了直线 l' 上的一点 X'. 也就是说，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 反射成了直线 l'.

信息技术建议

应用信息技术可以帮助我们更好地理解矩阵变换把直线变成直线或一个点，具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用一”.

抽象概括

一般地，对平面上任意直线 l，若 l 经过点 A，且平行于向量 $\boldsymbol{v}_0$，那么 l 的向量方程为

$$l:\ \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{v}_0\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，它把点 A 变成点 A'，即把向量 $\overrightarrow{OA}$ 变成向量 $\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{M}$ 把向量 $\boldsymbol{v}_0$ 变成向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$.

对 l 上任意一点 X,矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把点 X 变成点 X'. 根据矩阵变换的性质(2.3)式,有

$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{M}(\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{v}_0)=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}+t(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0)\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

当向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0\neq\mathbf{0}$ 时,点 X' 在经过点 A' 且平行于向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$ 的直线 l' 上,其中,l' 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX'}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}+t(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0)\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

即当 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0\neq\mathbf{0}$ 时,矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 变成直线 l'.

当向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\mathbf{0}$ 时,由 $\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}$ 可知,点 X' 就是点 A'. 即矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把整条直线 l 变成一个点 A'.

简而言之,

矩阵表示的变换,把直线或者变成直线,或者变成一个点.

我们称这样的变换为**线性变换**. 换句话说,矩阵表示的是线性变换.

例 1 直线 l 经过点 $A(1,0)$ 和 $B(1,1)$. 考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 把直线 l 变成什么?

解 依题意,向量 $\overrightarrow{AB}$ 即为直线 l 的方向向量,则 l 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

其中 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

即在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下点 A 变成点 A,点 B 变成点 $B'(2,1)$,且 $\boldsymbol{M}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OB}-\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB'}$,向量 $\overrightarrow{AB}$ 变成向量 $\overrightarrow{AB'}$.

由于 B' 与 A 不重合,$\overrightarrow{AB'}\neq\mathbf{0}$,所以,矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 变成了经过点 A 和 B' 的直线 l'

$$\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB'}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

其中 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,如图 2-18 所示.

应该说,大多数的矩阵变换是把直线变成直线. 但也的确存在一些矩阵,把某些直线变成一个点.

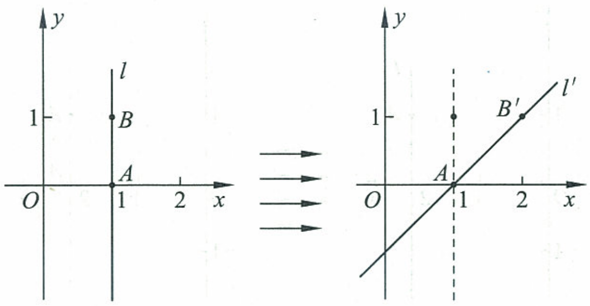


图 2-18

例 2 给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，考察该矩阵把经过点 $A(2,1)$ 垂直于 x 轴的直线 l 变成什么？

解 垂直于 x 轴的直线的方向向量可以用 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 表示，则直线 l 经过点 $A(2,1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，它的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\boldsymbol{j}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

在矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的作用下

$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA'},$$

$$\boldsymbol{Mj}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

这样，矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 把点 A 变成点 $A'(2,0)$，把方向向量 $\boldsymbol{j}$ 变成了零向量，即 $\boldsymbol{Mj}=\boldsymbol{0}$.

这样，对直线 l 上任意点 X，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，$\overrightarrow{OX}$ 变为：

$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}+t(\boldsymbol{Mj})=\overrightarrow{OA'}+t\cdot\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA'},$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把点 X 都变成同一个点 $A'(2,0)$.

即矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 把垂直于 x 轴的直线 l 变成了一个点 A'，如图2-19 所示.

事实上，由

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

可知，在矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的作用下，平面上任意一点 $X(x,y)$ 的横坐标不

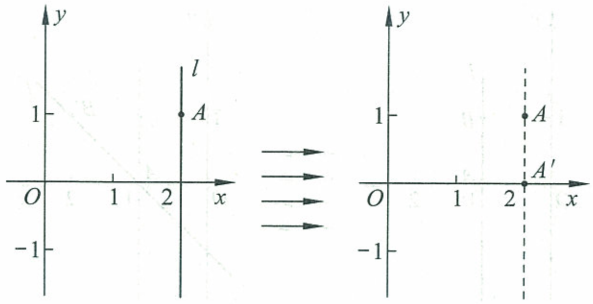


图 2-19

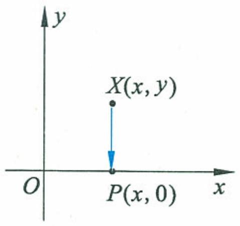


图 2-20

变，纵坐标变成零，即点 X 被该矩阵垂直投影到了 x 轴上，如图 2-20 所示. 它把每一条垂直于 x 轴的直线都变成了一个点，把整个平面变成了一条直线——x 轴. 我们称矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 表示的是**投影变换**.

动手实践

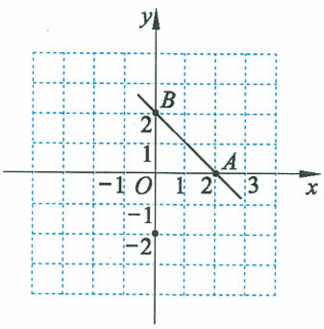


图 2-21

试着研究矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 把图 2-21 中直线 AB 变成什么图形，分析并判断该矩阵表示的是什么变换. 应用信息技术，可以帮助我们更好地理解这一矩阵变换. 具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用二”.

抽象概括

信息技术建议

应用信息技术可以更直观、更方便地演示该矩阵对直线 AB 的作用结果，帮助我们理解该矩阵表示的变换. 具体结果可以参看本节后面的“信息技术应用”.

一般地，对任意矩阵 $\boldsymbol{M}$，只要研究它对直线上的两个点 A 和 B 的变换结果 A'，B'，就可以掌握它对整条直线 AB 的变换结果. 其中，

当 A' 与 B' 不重合时，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 AB 变成直线 $A'B'$；

当 A' 与 B' 重合时，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 AB 变成一个点 A'（即 B'）.

这样，我们就回答本节开始时提出的问题了，正方形 $ABCO$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 表示的作用下，不会出现图 2-13 中的各种样子，只可能把正方形 $ABCO$ 变成平行四边形 $AB'C'O$（见图 2-10）.

信息技术应用

一、利用几何画板理解矩阵变换的性质

步骤：

1. 仿照矩阵乘向量的几何意义的“信息技术应用”中步骤 1～3，得到矩阵=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

2. 绘制点 $A(2,1)$，$V(-1,2)$，构造线段 OV 及过点 A 平行于 OV 的直线 l，如图 2-22 所示.

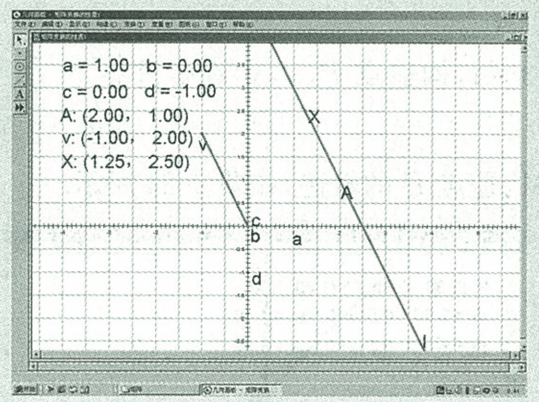


图 2-22

3. 构造直线 l 上任意一点 $X(x,y)$，仿照矩阵乘向量的几何意义的“信息技术应用”中步骤 5～6，构造点 A，V，X 在矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$作用下的像点 A'，V'，X'，并构造点 X' 的轨迹，标记为 l'，如图 2-23 所示.

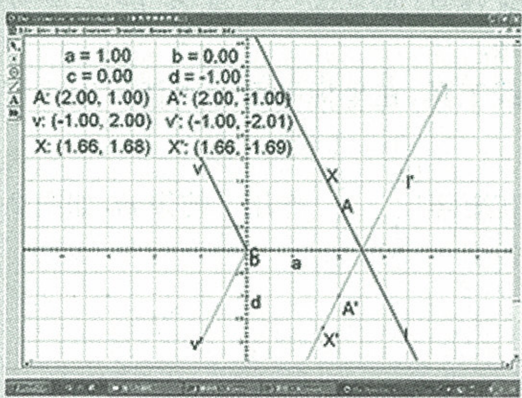


图 2-23

经过以上步骤后，拖动点 X(在直线 l 上运动)可以观察像点 P' 与原像点 P 的位置. 任意拖动 a,b,c,d 四个点，可以得到不同的矩阵，可以观察轨迹 l' 的形状变化.

最后，构造过点 A' 平行于 OV' 的直线 m，观察直线 m 与轨迹 l' 的关系.

二、利用几何画板研究矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 表示的变换

步骤：

1. 在新建画板中建立直角坐标系，并绘制点 $A(2,0)$，$B(0,2)$，然后构造直线 AB.

2. 构造直线 AB 上的点 $P(x,y)$，仿照反射变换的"信息技术应用"中的步骤 3～4，构造点 $P(x,y)$ 在矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 作用下的像点 $P'(x',y')$，并构造点 P' 的轨迹，如图 2-24 所示.

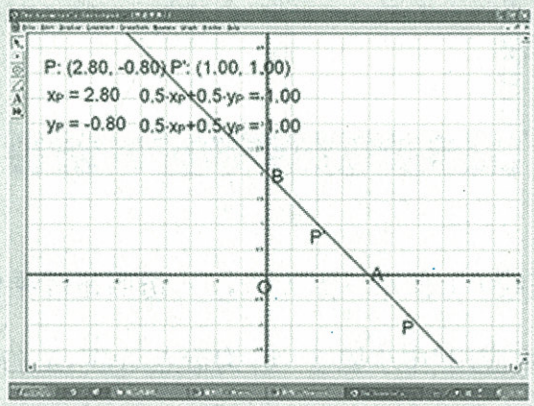


图 2-24

经过上述步骤后，拖动点 P(在直线 AB 上运动)，观察像点 P' 及其坐标并思考.

3. 利用直线工具，在坐标平面上画任一直线 CD，重复步骤 2 构造直线 CD 在矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 作用下的像 m，如图 2-25 所示.

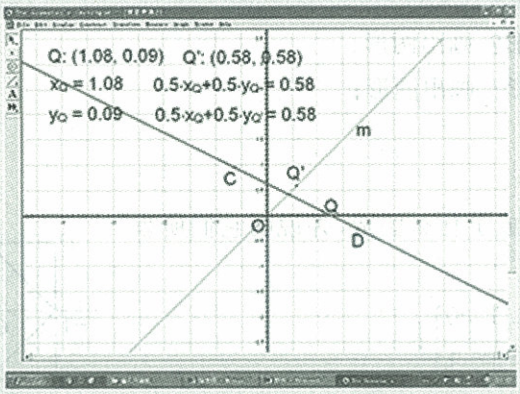


图 2-25

4. 经过上述步骤后，拖动点 Q(在直线 CD 上运动)，观察像点 Q'及其坐标，拖动点 C(或点 D)观察轨迹 m 与直线 CD 的关系.

练　习 2

1. 考察在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 作用下，点 $B(1,1)$，$D(2,3)$的像点的坐标，并说明在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的作用下，直线 BD 的像是什么图形.

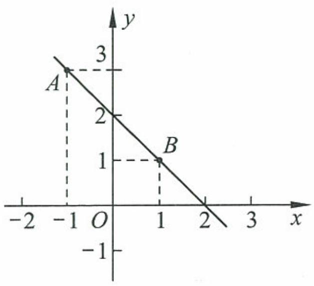
2. 考察矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 把点 $A(2,1)$，$B(1,3)$，$C(2,2)$各变成的像点的坐标，并回答以下问题，画出示意图：

(1) 该矩阵把直线 AB 变成什么图形？

(2) 该矩阵把直线 AC 变成什么图形？

习　题 2—2

A　组



(第 1 题)

1. 你认为下列矩阵把图中的直线变成什么？简述你的理由.

(1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

2. 考察矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 把点 $A(1,2)$，$B(1,3)$，$C(2,1)$变成的像点的坐标，并回答以下问题：

(1) 该矩阵把直线 AB 变成了什么图形？画出图形；

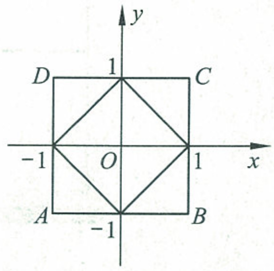
(2) 该矩阵把直线 AC 变成了什么图形？画出图形；

(3) 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 表示的是什么变换？

3. 研究下列矩阵把图中的正方形图案变成了什么图形，并说明它们所表示的变换.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$(其中 k 为任意实数).



(第 3 题)

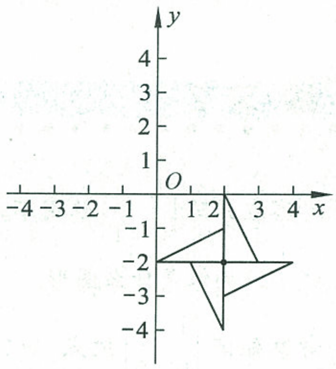
4. 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，及实数 λ 和 μ，证明下列矩阵都满足
$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta})$.

(1) $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5. 图中的美丽风车，每接受一个矩阵命令就作一次图形变换，每完成一次变换就得到一种动画效果，从现在图中位置，按 $A\to B\to C\to D\to E$ 的顺序依次接受了五个矩阵命令，完成了一组连续变换，画出风车每一次变换后的图案.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix};\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$



(第 5 题)

B 组

如果你掌握了有关算法的基本知识，在条件允许的情况下，设计算法程序，在计算机上实现 A 组第 5 题所要求完成的变换过程.

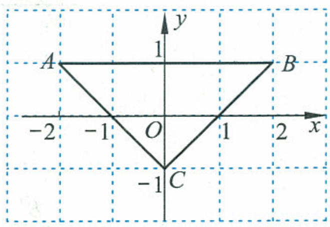
复习题二

A　组

1. 如图，分别给出下列矩阵对△ABC的变换结果.

(1)$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$；　(2)$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$；

(3)$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$；　(4)$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$.



(第1题)

2. 对矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，验证以下等式成立.

(1)$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$；

(2)$\boldsymbol{M}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})$；

(3)对任意实数λ，μ，有$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta})$.

3. 已知经过点$A(0,2)$，平行于向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$的直线$l$. 考察下列矩阵把直线$l$变成什么.

(1)$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$；　(2)$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$；　(3)$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$；　(4)$\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$.

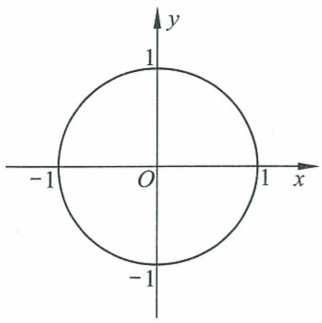
4. 分别讨论下列矩阵对基向量$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$和$\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的变换结果，并利用基向量间接计算这些矩阵分别把向量$\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$变成什么？

(1)$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$；　(2)$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$；　(3)$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$.

5. (1)如图，分别给出下列矩阵对圆O的变换结果.

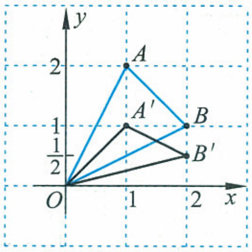
①$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$；　②$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$；　③$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

(2)若圆O方程为$x^2+y^2=1$，分别写出上述矩阵变换后曲线的方程.

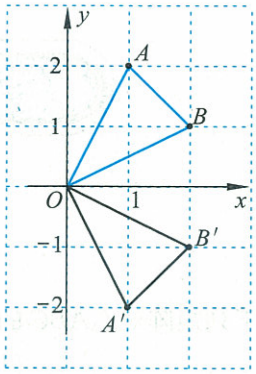


(第5题)

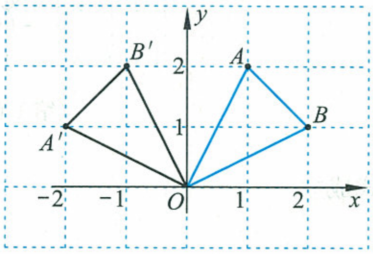
6. 在矩阵变换下，下列各图中的△ABO变成了△$A'B'O$，其中点A的像点为点A'，点B的像点为点B'. 试判断表示下列4个图中几何变换的矩阵分别是什么？



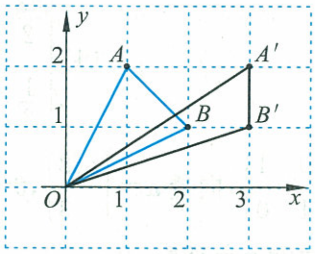
(a)



(b)



(c)

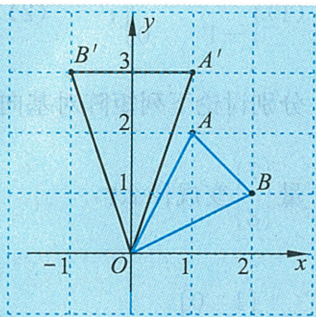


(d)

（第 6 题）

B　组

1. 若有一矩阵把图中$\triangle ABO$变成$\triangle A'B'O$，其中点 A 的像点为点 A'，点 B 的像点为点 B'. 试求该矩阵.
2. 已知在一个矩阵的作用下，点 $A(1,2)$变成了点 $A'(5,11)$，点 $B(3,-1)$变成了点 $B'(1,5)$，点 $C(x,0)$变成了点 $C'(2,y)$. 求实数 x,y 的值.
3. 对任意矩阵 $\boldsymbol{M}$，平面中四点 A,B,C,D 在该矩阵作用下变成A',B',C',D'. 试证明，若 $AB/\!/CD$，则 $A'B'/\!/C'D'$.



（第 1 题）

第三章　变换的合成与矩阵乘法

§1　变换的合成与矩阵乘法

实例分析

矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 分别表示把平面上的点向 x 轴垂直压缩为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的变换. 利用 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$，对平面上的点连续作两次变换，即先压缩为 $\frac{1}{2}$，再压缩为 $\frac{1}{3}$，实际上连续完成这两个变换，变换的效果可以用一个变换来表示，即压缩为 $\frac{1}{6}$ 的变换（如图 3-1 所示），矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ 恰好表示了这一变换.

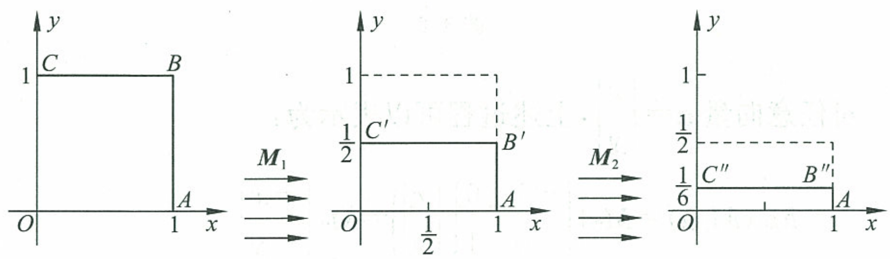


图 3-1

对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，上述过程可以表示为：

$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)$$

$$=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{2}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{2}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{6}y\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{6}y\end{bmatrix}.$$

于是，$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}.$$

类似地，设 $\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 表示关于 y 轴的反射变换，即把平面上的点反射到此点关于 y 轴的对称点，$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 表示关于 x 轴的反射变换，即把平面上的点反射到此点关于 x 轴的对称点. 对平面上的点连续作这两个变换，先关于 y 轴反射，再关于 x 轴反射，实际上连续完成这两个变换的结果可以通过一个变换完成，即绕原点逆时针旋转 180°的变换(参看图 3-2). 矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 恰好表示了这一变换.

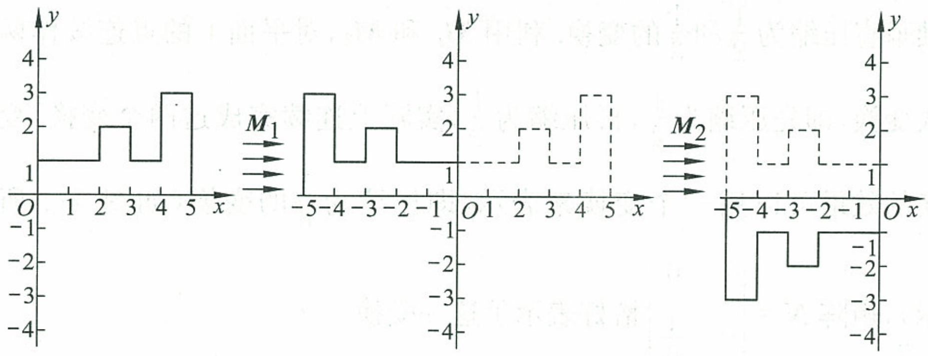


图 3-2

对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，上述过程可以表示为：

$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix},$$

于是，$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}.$$

分析理解

对于任意的两个矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$，是否存在一个矩阵 $\boldsymbol{N}$，使得矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的变换恰好相当于先作矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 的变换，再作矩阵 $\boldsymbol{M}_2$ 的变换呢？即对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha}) \tag{1}$$

成立. 如果这样的矩阵 $\boldsymbol{N}$ 存在，它和矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 又有着怎样的关系呢？

我们知道，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，它可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j},$$

其中 $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 构成一组基向量；

另一方面，我们还知道，任何矩阵 $\boldsymbol{N}$ 都是线性变换，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，任意实数 λ,μ，有

$$\boldsymbol{N}(\lambda\,\boldsymbol{\alpha}+\mu\,\boldsymbol{\beta})=\lambda\,\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\alpha}+\mu\,\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\beta};$$

特别地，　$\boldsymbol{N}(x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j})=x\,\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}.$

这样，我们首先考查上面问题在特殊情况下是否成立，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{i}$ 或 $\boldsymbol{j}$ 时，是否存在 $\boldsymbol{N}$，使得

$$\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{i}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\,\boldsymbol{i}); \tag{2}$$

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\,\boldsymbol{j}). \tag{3}$$

设　$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}u & v\\ s & t\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}x & x'\\ y & y'\end{pmatrix}$.

下面我们来确定 $\boldsymbol{N}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i})&=\boldsymbol{M}_2\left(\boldsymbol{M}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{pmatrix}u & v\\ s & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\begin{pmatrix}u\\s\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\s\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}au+bs\\cu+ds\end{pmatrix},\end{aligned}$$

我们要确定矩阵 $\boldsymbol{N}$，应该满足(2)式，即

$$\boldsymbol{Ni}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i}).$$

$$\boldsymbol{Ni}=\boldsymbol{N}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x'\\y & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

这样，我们可以推出：

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}au+bs\\cu+ds\end{bmatrix},$$

从而
$$\begin{cases}x=au+bs,\\y=cu+ds.\end{cases}$$

同样道理，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})&=\boldsymbol{M}_2\left(\boldsymbol{M}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{bmatrix}u & v\\s & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}v\\t\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\t\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}av+bt\\cv+dt\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Nj}&=\begin{bmatrix}x & x'\\y & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{N}$ 亦应满足(3)式：

$$\boldsymbol{Nj}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j}),$$

所以，
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}av+bt\\cv+dt\end{bmatrix}.$$

从而，
$$\begin{cases}x'=av+bt,\\y'=cv+dt.\end{cases}$$

这样，我们就得到

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}au+bs & av+bt\\cu+ds & cv+dt\end{bmatrix}.$$

并且这样构成的矩阵 $\boldsymbol{N}$，满足(2)(3)式.

最后，我们再来验证一下，对任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，(1)式是成

立的.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})&=\boldsymbol{M}_2[\boldsymbol{M}_1(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})]\\&=\boldsymbol{M}_2[\boldsymbol{M}_1(x\boldsymbol{i})+\boldsymbol{M}_1(y\boldsymbol{j})]\\&=\boldsymbol{M}_2(x\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})\\&=\boldsymbol{M}_2(x\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i})+\boldsymbol{M}_2(y\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})\\&=x\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i})+y\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})\\&=x\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{N}\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{N}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\\&=x\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})$成立.

我们定义矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 的乘法如下：

$$\boldsymbol{M}_2\cdot\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{N},$$

矩阵 $\boldsymbol{N}$ 称为 $\boldsymbol{M}_2$ 和 $\boldsymbol{M}_1$ 的乘积.

给定两个矩阵：$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}au+bs & av+bt\\ cu+ds & cv+dt\end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

例　计算

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}$.

解　(1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times(-1)+2\times4\\ 3\times1+4\times0 & 3\times(-1)+4\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 3 & 13\end{bmatrix};$$

(2) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0\times3+1\times(-2) & 0\times0+1\times(-3)\\ 2\times3+4\times(-2) & 2\times0+4\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -12\end{bmatrix}.$$

显然，两个二阶方阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}$ 仍是一个二阶方阵，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，由(3.1)式定义的乘积满足

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}). \qquad (3.2)$$

从几何意义上看，这表明，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}$ 表示的变换，就是通过先作矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的变换，再作 $\boldsymbol{M}$ 的变换得到的变换.

我们把这样连续实施两个变换，称为**变换的合成**. 则矩阵变换的合成仍是矩阵变换. 根据(3.2)式，我们在以后的书写中可以省略括号，记 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{MN\alpha}$.

我们不难推出，单位矩阵 $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与任意二阶方阵 $\boldsymbol{M}$ 乘积满足

$$\boldsymbol{II}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{IM}=\boldsymbol{MI}=\boldsymbol{M}. \tag{3.3}$$

以上等式利用矩阵乘法(3.1)式均可证明. 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数“1”在数的乘法中的作用.

练习

1. 计算下列矩阵乘法，并说明它们的几何意义：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. 利用矩阵乘法(3.1)式证明(3.3)式.

习题 3—1

A 组

1. 计算下列矩阵乘法，并说明它们的几何意义：

(1) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；　(6) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

2. 计算：

(1) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

3. 利用矩阵乘法定义(3.1)式，证明下列等式并说明其几何意义：

(1) $\begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $(k>0)$；　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. 利用矩阵乘法(3.1)式证明(3.2)式.

5. 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$，利用

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}=p\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

形式，根据矩阵的性质(2.3)式证明(3.2)式.

6. 假设我们收集到苹果和香蕉在两个不同商店的价格，每个男性和女性分别对这两种水果的日需求量，以及两个不同公司中男性与女性人员数量，并用矩阵表示如下：

价格　　　　日需求量　　　　人员数量

$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 苹果 \\ 香蕉 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A店} & \text{B店} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.2 \\ 2.8 & 3.0 \end{bmatrix} \end{array}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ 男 \\ 女 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 苹果 & 香蕉 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$　　$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c} \\ 公司甲 \\ 公司乙 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 男 & 女 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 50 \\ 80 & 120 \end{bmatrix} \end{array}$

利用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，按下列要求求出矩阵乘积：

(1)计算乘积 $\boldsymbol{BA}$，并说明该乘积矩阵表示的是什么量表；

(2)哪两个矩阵的乘积可以表示两个不同公司对两种不同水果的日需求量？并计算出这个量表.

7. 注意观察，在你的生活中，有没有可以用矩阵以及矩阵乘法表示的事？

B　组

完整地叙述得到以下结论的全过程.

从矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} u & v \\ s & t \end{bmatrix}$ 和矩阵 $\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 确定矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix}$，使得先作矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 的变换，再作 $\boldsymbol{M}_2$ 的变换，就相当于是矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的变换.

§2　矩阵乘法的性质

问题引入

在上节中，我们定义了矩阵的乘法，我们知道，每引入一种新运算，都要研究这种新运算的性质，然后，利用这些运算性质研究其他的问题，这是代数学科的基本任务.

以前，我们学习过数与数的加法运算和乘法运算，代数式与代数式的加法和乘法运算，向量与向量的加法运算，我们知道，这些运算都满足结合律和交换律.

那么，由(3.1)式定义的两个矩阵的乘法运算是否也满足结合律和交换律呢?

首先，我们讨论结合律，对于给定的三个矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$，由矩阵乘法的几何意义，我们知道，$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$ 表示了按一定次序实施 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$ 三个变换.

$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 表示先实施 $\boldsymbol{P}$ 变换，再实施先 $\boldsymbol{N}$ 后 $\boldsymbol{M}$ 的合成变换；

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$ 表示先实施先 $\boldsymbol{P}$ 后 $\boldsymbol{N}$ 的合成变换，再实施 $\boldsymbol{M}$ 变换.

即 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$ 表示的变换，都是先实施 $\boldsymbol{P}$ 表示的变换，再实施 $\boldsymbol{N}$ 表示的变换，最后实施 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换，结果是相同的.

按照矩阵乘法的定义，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，我们可以直接验证：

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})\boldsymbol{\alpha}.$$

请同学们把它作为一个练习完成.

从代数上说，矩阵乘法运算满足结合律，即

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP}).$$

根据矩阵乘法不难验证这一等式.

由于有了乘法的结合律，在多个矩阵的乘法中，可将括号省去，即 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 可直接写为 $\boldsymbol{MNP}$.

这样，给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，规定 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{MM}$，$\boldsymbol{M}^3=\boldsymbol{MMM}$，等等.

一般地，

$$\boldsymbol{M}^n=\underbrace{\boldsymbol{MM}\cdots\boldsymbol{M}}_{n\text{个}};$$

显然，$\boldsymbol{M}^n$ 仍是一个二阶方阵，它表示 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的乘积，通常称为 **$\boldsymbol{M}$ 的 n 次幂**. 几何上，$\boldsymbol{M}^n$ 表示连续实施 n 次矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换.

例 计算下列各矩阵乘积，并说明(1)式运算结果的几何意义.

(1) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&s\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}^3$.

解 (1) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0\times1+1\times0&0\times k+1\times1\\1\times1+0\times0&1\times k+0\times1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\1&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\times0+1\times1&0\times1+1\times0\\1\times0+k\times1&1\times1+k\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix};$$

(2) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&s\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0&k\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&s\\1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k&0\\0&s\end{bmatrix};$$

(3) $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&2k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3k\\0&1\end{bmatrix}.$$

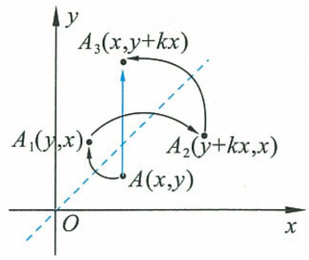


图 3-3

下面，对(1)，我们给出这些变换合成的几何意义，如图 3-3. 从图中很容易看出(不妨设 $k>0$)：

矩阵 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 把点 $A(x,y)$ 以直线 $y=x$ 为对称轴，反射到其对称点 $A_1(y,x)$；

矩阵 $\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$ 把点 $A_1(y,x)$，向 x 轴正向切变到像点 $A_2(y+kx,x)$；

矩阵 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 把点 $A_2(y+kx,x)$ 以直线 $y=x$ 为对称轴，反射到对

称点$A_3(x, y+kx)$.

这样连续三次变换的结果与用矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$直接把$A(x, y)$,向$y$轴正向切变到$A_3(x, y+kx)$是一致的.

简单地说就是:先以直线$y=x$为轴反射,再沿x轴作切变,最后再以直线$y=x$为轴反射回来,与直接沿y轴作切变是一致的.

思考交流

仿照对例题中(1)几何意义的讨论,画图,并讨论(2)(3)的几何意义.

下面我们讨论,两个矩阵的乘法是否满足交换律呢?即给定矩阵$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{N}$,是否有$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$成立呢?

实例分析

考查矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$和$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{M}$表示向$x$轴压缩为一半的变换,矩阵$\boldsymbol{N}$表示逆时针旋转90°的变换.

正方形$ABCO$的顶点分别为$A(1,0)$,$B(1,1)$,$C(0,1)$,$O(0,0)$,如果对正方形实施矩阵$\boldsymbol{MN}$表示的变换,即先实施旋转变换$\boldsymbol{N}$,再实施压缩变换$\boldsymbol{M}$,则变换结果如图3-4所示.

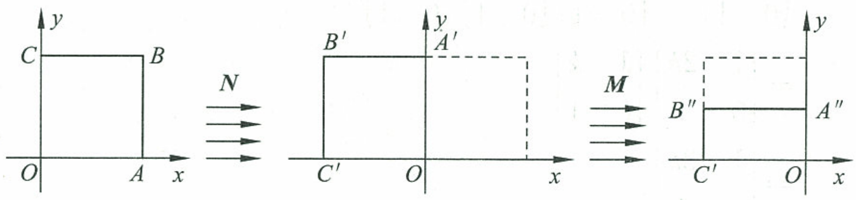


图3-4

但如果对正方形实施矩阵$\boldsymbol{NM}$表示的变换,即先实施压缩变换$\boldsymbol{M}$,再实施旋转变换$\boldsymbol{N}$,则变换结果如图3-5所示.

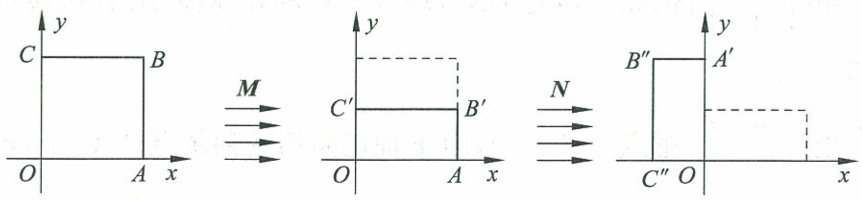


图3-5

由图 3-4 和图 3-5 可知，MN 和 NM 表示的不是同一个变换.

事实上，根据矩阵乘法的定义，

$$MN=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$NM=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}.$$

显然 $$MN\neq NM.$$

信息技术建议

应用信息技术可以更方便地演示矩阵乘法不满足交换律.

具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用”.

抽象概括

从上面的例子，我们可以得到：

矩阵的乘法不满足交换律.

即存在一些矩阵 M,N，不满足 $MN=NM$. 故而，在连续实施一系列矩阵变换时，不能轻易改变实施矩阵变换的顺序. 矩阵乘法运算不同于以前学过的实数的加法、乘法，代数式的加法、乘法，向量的加法，等等. 它是我们见到的第一个不满足交换律的运算.

当然，对一些特殊矩阵 M 和 N，可以有 $MN=NM$，例如，M 和 N 都是旋转矩阵时，乘法可以交换顺序. 还可以举出其他的一些例子. 特别地，单位矩阵 I 和零矩阵 $\mathbf{0}$. 对任何二阶方阵 A，总有

$$IA=AI=A,\ \mathbf{0}A=A\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

矩阵乘法不仅不满足交换律，而且也不满足消去律.

在实数的乘法中，若数 a,b,c，使 $ca=cb$，且 $c\neq0$，则一定有 $a=b$.

这一运算律在矩阵的乘法中却不一定成立，即对矩阵 M,N,P，若 $PM=PN$，且 $P\neq\mathbf{0}$，不一定有 $M=N$.

例如，矩阵 $M=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$N=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 是两个不同的矩阵，对任意点 (x,y)，由

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix},$$

$$N\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix},$$

可知，矩阵 M,N 把点 (x,y) 分别变成点 $(-x,y)$ 和点 $(-x,-y)$.

矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 表示向 x 轴上的投影变换，则

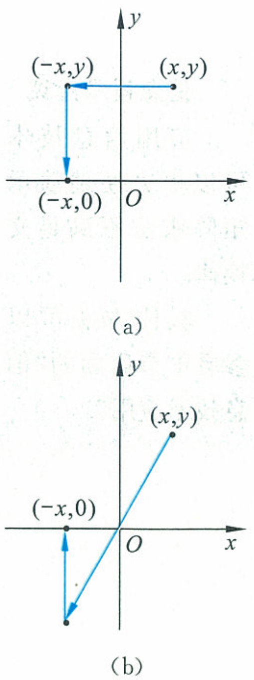


图 3-6

$$(\boldsymbol{PM})\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\0\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{PN})\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{N}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\0\end{bmatrix}.$$

这表明，对任意点 (x,y)，矩阵 $\boldsymbol{PM}$ 和 $\boldsymbol{PN}$ 都把它变成了点 $(-x,0)$. 如图 3-6 所示.

由矩阵乘法，

$$\boldsymbol{PM}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{PN}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

也就是说，对矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$ 有 $\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{PN}$ 且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，但显然，$\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$.

事实上，在数的乘法中，若数 a,b，使 $ab=0$，则 a,b 中至少有一个为零，即有 $a=0$ 或 $b=0$. 但在矩阵乘法中却不然. 若 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{0}$，可能有 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$. 例如，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 把点垂直投影到 x 轴上，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 把点垂直投影到 y 轴上，有

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

即 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{0}$，但显然 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$，这一点与数的乘法不同. 由此亦可说明矩阵乘法中消去律不成立.

信息技术应用

利用几何画板演示矩阵乘法不满足交换律

步骤：

1. 仿照反射变换中“信息技术应用”的步骤 1 在新建画板中构造正方形 $ABCO$ 上一点 $P(x,y)$，如图 3-7 所示.

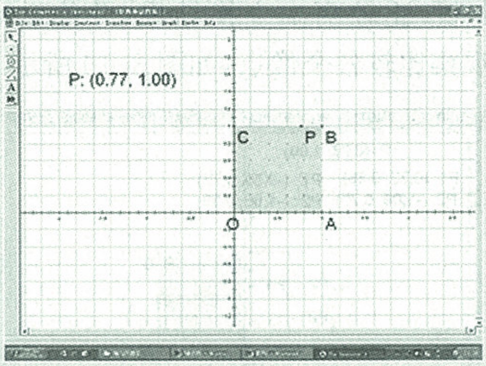


图 3-7

2. 分别构造正方形 $ABCO$ 先被矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 作用，再被矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 作用得到的图形，如图 3-8 所示.

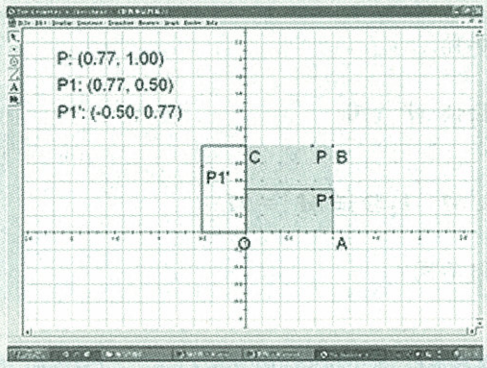


图 3-8

3. 分别构造正方形 $ABCO$ 先被矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 作用，再被矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 作用得到的图形，如图 3-9 所示.

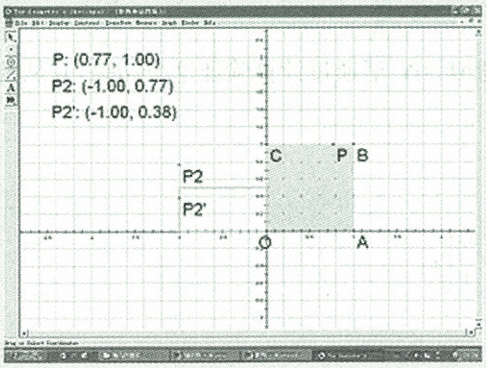


图 3-9

经过以上步骤，比较两次变换结果，并拖动点 P(在正方形 $ABCO$ 上运动)观察比较各个像点，如图 3-10 所示.

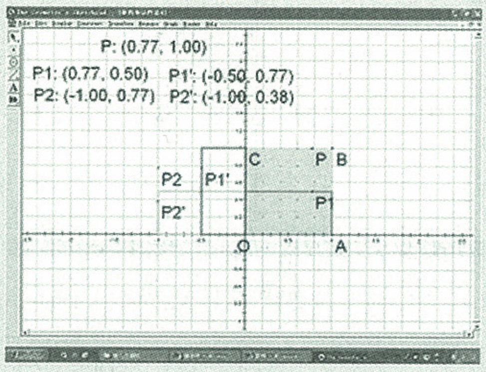


图 3-10

练习 1

计算并验证下列事实，并从几何上给出解释.

(1)给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$，验证 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{0}$.

(2)给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{I}$，验证 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{M}$.

上述情况表明，矩阵乘法与数的乘法有何不同？

习题 3—2

A 组

1. 说明矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 所表示的几何变换，并从几何上说明不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$，再加以计算验证.

2. 下面算式都表明：$\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{PN}$ 且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$. 请通过计算验证这个结果，并从几何上给予解释.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. 下面等式都表明：$\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{NP}$ 且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$. 请通过计算验证这个结果，并从几何上给予解释.

(1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

4. 证明矩阵乘法满足结合律，即对任意矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$，

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP}).$$

5. 验证下列等式，并说明其几何意义.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. 计算下列矩阵的幂：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2$；　(2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^4$；　(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^8$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^n$.

7. 下面等式都表明：$\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{0}$. 请通过计算验证这个结果，并从几何上给予解释.

(1) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

B　组

归纳整理本节内容，并说明矩阵乘法与数的乘法在运算性质上有哪些异同点.

复习题三

A　组

1. 计算下列矩阵乘积：

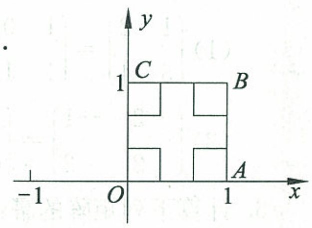
(1) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}^3$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.

(1)利用 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$，$\boldsymbol{M}_3$ 变换的几何意义，说明图中正方形 $ABCO$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下的变换结果；

(2)计算出矩阵 $\boldsymbol{M}$，并验证上述变换结果.



(第 2 题)

3. 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(1)验证 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{N\alpha})$，$(\boldsymbol{NM})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{M\alpha})$；

(2)验证这两个矩阵不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$.

4. 验证下列等式，并从几何上给予解释：

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

(6) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5. 求使下列算式成立的实数 a，b，c，d.

(1) $\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}a&2\\3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&c\\d&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$.

B　组

1. 利用矩阵变换的几何意义，请你构造满足下列条件的矩阵，并给出几何解释：

(1)构造两个矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$，它们不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$；

(2)构造两个不同的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，使等式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 成立；

(3)构造两个不同的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，使等式 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{B}$ 成立；

(4)构造两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均不为零矩阵)，使 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 成立；

(5)构造一个矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0})$，使 $\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 成立；

(6)构造一个矩阵 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{I})$，使 $\boldsymbol{N}^2=\boldsymbol{N}$ 成立.

2. 晴天和阴天的转移矩阵 $\boldsymbol{A}$，及表示今天天气晴、阴的概率 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{ccc} & & \text{今日} \\ & & \begin{array}{cc}\text{晴天} & \text{阴天}\end{array} \\ \text{明日} & \begin{array}{c}\text{晴天}\\[6pt] \text{阴天}\end{array} & \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\[6pt] \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\end{array},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{array}{cc}\begin{array}{c}\text{晴天}\\[6pt] \text{阴天}\end{array} & \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\[6pt] \frac{7}{8}\end{pmatrix}\end{array}.$$

(1)计算矩阵 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$，并分别说明 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$ 的实际意义是什么；

(2)请用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示出明天、后天、再后天的天气概率.

第四章　逆变换与逆矩阵

§1　逆变换与逆矩阵

实例分析

问题 1　我们知道，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 表示按逆时针旋转 90°的变换，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 表示按顺时针旋转 90°的变换.

参看图 4-1，显然，对任何点 P，连续实施这两个变换. P 又回到原来位置.

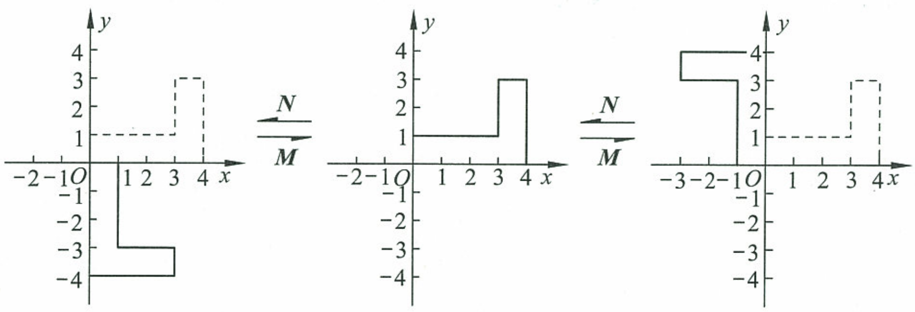


图 4-1

上述过程可以用矩阵乘法表示为

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{NM}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

即以上的两个矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$，满足

$$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I}.$$

问题 2　我们知道，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 表示向 x 轴垂直压缩为 $\frac{1}{2}$ 的变换，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 表示向 x 轴垂直拉伸为 2 倍的变换.

对任何点 P，连续实施这两个变换，P 点又回到原来的位置(参看图 4-2).

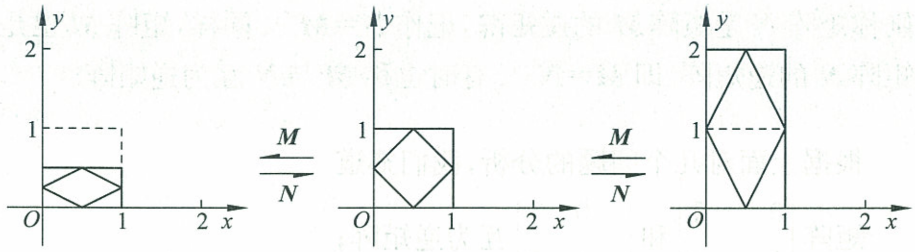


图 4-2

上述过程可以用矩阵乘法表示为

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{NM}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

以上的两个矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I}$.

问题 3　我们知道，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 是关于 x 轴的反射变换，从图 4-3 不难看出，对于任意点 P，连续实施两次 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换，P 点又回到原来的位置.

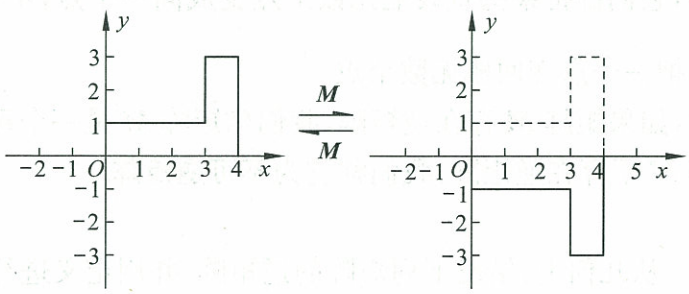


图 4-3

上述过程可以用矩阵乘法表示为

$$\boldsymbol{MM}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

即

$$MM=I.$$

抽象概括

一般地，若两个矩阵 M，N，满足

$$MN=NM=I, \tag{4.1}$$

则称矩阵 N 是矩阵 M 的**逆矩阵**，记作 $N=M^{-1}$. 同样，矩阵 M 也是矩阵 N 的逆矩阵，即 $M=N^{-1}$. 有时也称 M 与 N 互为逆矩阵.

根据上面对几个问题的分析，我们知道

矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 互为逆矩阵；

矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 也互为逆矩阵；

而矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 自己是自己的逆矩阵.

$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 分别表示关于 y 轴和直线 $y=x$ 的反射变换. 不难看出

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 都是自己的逆矩阵. 实际上，所有的反射变换矩阵都是自己的逆矩阵.

但也有一些矩阵不存在逆矩阵，如投影变换矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 等，它们都把某些直线上无数个点变成同一个点，不可能存在一个矩阵把一个点变回成无数个点.

这样，如果矩阵 M 存在逆矩阵，我们称矩阵 M 是一个**可逆矩阵**，如果矩阵 M 不存在逆矩阵，我们称它为**不可逆矩阵**.

例 1　从几何上，给出下列矩阵的逆矩阵，并用定义进行验证.

(1) $\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$；　　(2) $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$.

解　(1) 由于矩阵 $\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$ 表示向 y 轴的垂直压伸变换，它把

平面上每个点 $P(x,y)$ 的横坐标变为原来的 k 倍，纵坐标不变，点 P 变成像点 $P'(kx,y)$. 要把这些点再变回原来的位置 $P(x,y)$，只需纵坐标不变，把横坐标变为原来的 $\frac{1}{k}$ 倍. 矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$ 表示这一变换，这样我们就从几何上给出了矩阵 $\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$ 的逆矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$.

事实上，由
$$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$
和
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$
知，$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$ 的逆矩阵是 $\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k>0)$.

(2)矩阵 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$ 表示沿 x 轴方向的切变，它把平面上每个点 $P(x,y)$ 的横坐标加上了纵坐标的 k 倍，纵坐标不变，点 P 变成像点 $P'(x+ky,y)$. 要把这些点再变回原来的位置 $P(x,y)$，只需保持纵坐标不变，把横坐标加上纵坐标的 $(-k)$ 倍. 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$ 表示这一变换，这样我们就从几何上给出了矩阵 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$ 的逆矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$.

由
$$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 1+0\times k & 1\times(-k)+k\times 1\\ 0\times 1+1\times 0 & 0\times(-k)+1\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I},$$
且
$$\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 1+(-k)\times 0 & 1\times k+(-k)\times 1\\ 0\times 1+1\times 0 & 0\times k+1\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I},$$
所以 $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$ 的逆矩阵是 $\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$.

反射变换、压伸变换、切变等是最基本的几何变换，通常称为**初等变换**. 当 $k\neq 0$ 时，表示这些变换的矩阵 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$等，称为**初等变换矩阵**.

根据前面的一些例题，我们不难发现，初等变换矩阵的逆矩阵仍是初等变换矩阵.

例 2 试证明：可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵唯一.

证明 若矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 都是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵，

则由(4.1)式，有

$$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{I}.$$

在等式 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{MN}$ 的两边左乘矩阵 $\boldsymbol{P}$，有

$$\boldsymbol{PI}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{MN})=(\boldsymbol{PM})\boldsymbol{N}=\boldsymbol{IN},$$

即
$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}.$$

故，可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵唯一.

若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，则矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 也存在逆矩阵，且有 $(\boldsymbol{M}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{M}$.

特别地，单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 而零矩阵 $\boldsymbol{0}$ 是不可逆矩阵.

我们不难证明，在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，平面上不同向量（或点）的像必不同.

而把平面上不同的两个向量（或点）变成相同向量（或点）的矩阵，没有逆矩阵.

请同学们自己完成以上命题的证明.

问题提出

由于两个二阶方阵的乘积仍是一个二阶方阵. 那么，两个可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}$ 是否仍可逆？如果矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 有逆矩阵，它的逆矩阵 $(\boldsymbol{MN})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 有何关系？

分析理解

我们仍然先从几何上分析思考上述问题. 假设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示旋转

变换，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 表示压缩变换，矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 表示先压缩再旋转的变换，那么，其逆变换应该是先旋转回来，即作矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 表示的变换，再拉伸，即作矩阵 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 表示的变换，才能回到原状，参看图 4-4.

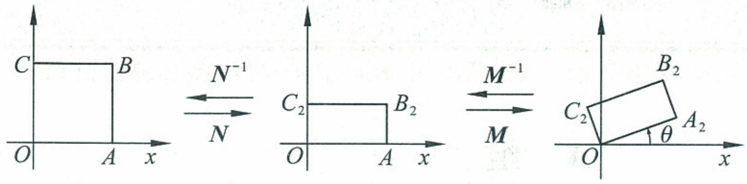


图 4-4

这好比日常生活中，先脱鞋再脱袜子的逆过程是先穿袜子再穿鞋.

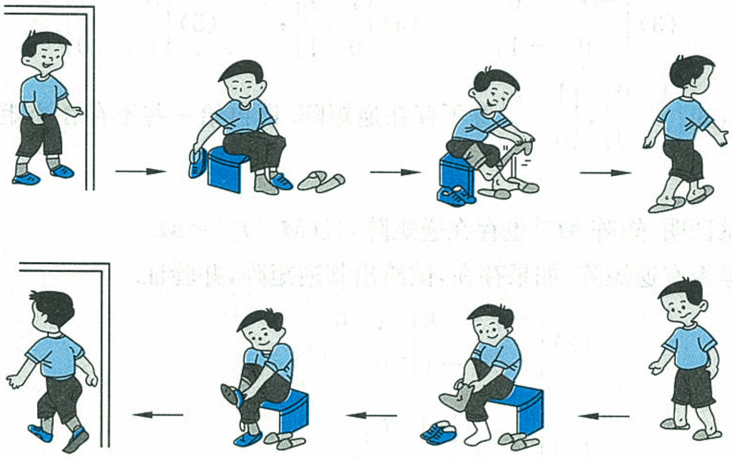


图 4-5

由此猜想，矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 的逆矩阵应该是 $\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}$. 下面我们证明这一猜想.

根据矩阵乘法满足结合律，可知

$$(\boldsymbol{MN})(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NN}^{-1})\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{MIM}^{-1}=\boldsymbol{MM}^{-1}=\boldsymbol{I},$$

$$(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})(\boldsymbol{MN})=\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M})\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{IN}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{I},$$

即满足 $$(\boldsymbol{MN})(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})=(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})(\boldsymbol{MN})=\boldsymbol{I}.$$

由逆矩阵的定义，有

$$(\boldsymbol{MN})^{-1}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}.$$

这一结论可以推广到多个矩阵乘积的情形. 例如，若矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 的逆矩阵分别为 $\boldsymbol{M}^{-1},\boldsymbol{N}^{-1},\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Q}^{-1}$，则乘积 $\boldsymbol{MNPQ}$ 也有逆矩阵，且 $(\boldsymbol{MNPQ})^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}$.

不难想像，若矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 中有一个把某些直线上的所有点变成了一个点，不存在逆矩阵，则乘积 $\boldsymbol{MN}$ 也不存在逆矩阵. 例如，投影变换矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是不可逆矩阵，它与反射矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 仍是投影变换矩阵，不存在逆矩阵.

严格的证明这里略去.

习题 4—1

A 组

1. 从几何上考虑下列矩阵表示的变换是否存在逆变换，如果存在，试给出其逆矩阵，并用定义(4.1)式验证：

(1) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$；　(5) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$.

2. 从几何上体会，投影变换矩阵，如 $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ 等不存在逆矩阵. 请再给一些不存在逆矩阵的矩阵.

3. 若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{M}^{-1}$，试证明，矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 也存在逆矩阵，且 $(\boldsymbol{M}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{M}$.

4. 从几何上考虑下列乘积矩阵是否有逆矩阵. 如果存在，试给出其逆矩阵，并验证.

(1) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$.

B 组

给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$，试证明：

(1)若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是可逆矩阵，则必有 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$；

(2)若 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$，则矩阵 $\boldsymbol{M}$ 必是不可逆矩阵.

并思考这一结论的几何意义.

§2　初等变换与逆矩阵

问题提出

前面,我们已经知道了如何从几何上求初等变换矩阵的逆矩阵.

对一般的矩阵,如何从几何上求出它的逆矩阵呢?

这一节我们将通过对具体实例的分析,体会用几何方法求矩阵的逆矩阵.

实例分析

给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,它把平面上的一点变为另一点.

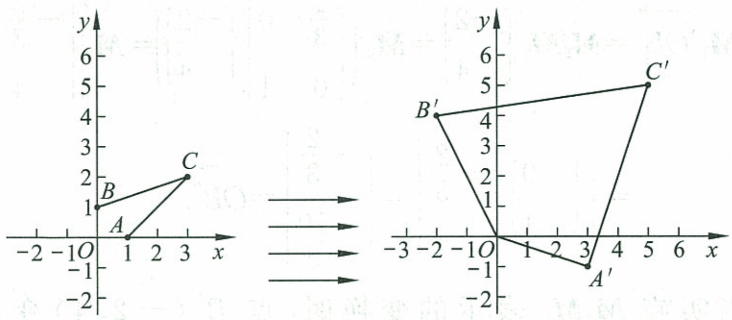


图 4-6

如图 4-6,它把

点 $A(1,0)$ 变成 $A'(3,-1)$;

点 $B(0,1)$ 变成 $B'(-2,4)$;

点 $C(3,2)$ 变成 $C'(5,5)$.

即把四边形 $AOBC$ 变成另一个四边形 $A'OB'C'$.

我们如何从几何上求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵呢?

求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵,从几何上,就是确定一个矩阵变换,它把

点 $A'(3,-1)$ 变回到点 $A(1,0)$;

点 $B'(-2,4)$ 变回到点 $B(0,1)$;

点 $C'(5,5)$ 变回到点 $C(3,2)$.

首先,我们确定一个矩阵变换,使得 $A'(3,-1)$ 变回到 $A(1,0)$.

观察图 4-6 中的点 A' 与 A 的位置及坐标关系,联想初等变换,我们发现,可以通过两步初等变换实现把点 A' 变回到 A.

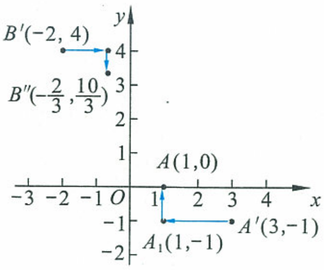


图 4-7

第一步，只需把点 $A'(3,-1)$ 垂直向 y 轴方向压缩为 $\frac{1}{3}$ 即可使 A' 变成 $A_1(1,-1)$；

第二步，实施沿 y 轴正方向的切变即可把点 $A_1(1,-1)$ 变到点 $A(1,0)$. 如图 4-7 所示.

矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 分别表示以上第一步和第二步的变换. 即

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\overrightarrow{OA}.$$

连续实施 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$ 表示的变换即实施矩阵 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 表示的变换，可以把点 A' 变回点 A.

这时，点 B' 也在 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 的作用下，变成了点 B''.

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}=\overrightarrow{OB''}.$$

即当实施 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 表示的变换时，点 $B'(-2,4)$ 变成了点 $B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$，如图 4-7 所示.

接下来，我们要确定一个矩阵变换，使得 $B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$ 变回到 $B(0,1)$，同时，点 $A(1,0)$ 保持不变.

由于点 A 在 x 轴上，因此向 x 轴的垂直压伸变换 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}(k>0)$，沿 x 轴的切变 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$ 均能保证点 A 不变. 因此，我们用这样的初等变换把点 B'' 变回到 B. 可以通过两步完成.

第三步，利用向 x 轴的垂直压缩变换把 $B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$ 的纵坐标变为 1，即实施矩阵 $\boldsymbol{M}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$ 表示的变换，把 B'' 变成 $B_1\left(-\frac{2}{3},1\right)$；

第四步，用沿 x 轴正向的切变 $\boldsymbol{M}_4=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{bmatrix}$ 把点 B_1 变成 $B(0,1)$，如图 4-8 所示.

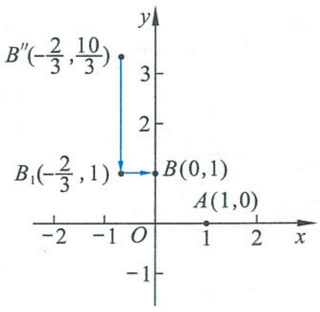


图 4-8

连续实施 $\boldsymbol{M}_3$ 和 $\boldsymbol{M}_4$ 表示的变换，即实施 $\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3$ 表示的变换，由

$$\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\overrightarrow{OB''}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_4\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{3}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_4\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\overrightarrow{OB},$$

$$\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_4\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{3}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\overrightarrow{OA}.$$

可知，$B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$变回到点 $B(0,1)$，与此同时点 $A(1,0)$没变.

这样，我们找到了四个初等变换矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{M}_3,\boldsymbol{M}_4$. 依次连续实施这四个初等变换，把点 $A'(3,-1)$及 $B'(-2,4)$，分别变回了点 $A(1,0)$，$B(0,1)$. 即矩阵 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$，使得

$$\boldsymbol{N}\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\overrightarrow{OA},$$

$$\boldsymbol{N}\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\overrightarrow{OB}.$$

由于 $$\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

而 $$\overrightarrow{OC'}=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3\left(\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+2\left(\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right),$$

故 $$\boldsymbol{N}\overrightarrow{OC'}=\boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3\left(\boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+2\left(\boldsymbol{NM}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\overrightarrow{OC}.$$

也就是，依上述方法构造的矩阵 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 在把点 A'变回点 A，点 B'变回点 B 的同时，也把点 $C'(5,5)$变回到点 $C(3,2)$.

事实上，对任何向量 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，不难验证

当满足 $NM\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$NM\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$时，必有

$$NM\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

思考交流

根据逆矩阵的定义验证，按上述方法构造出的矩阵

$$N=M_4M_3M_2M_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

就是矩阵 $M=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}$的逆矩阵，即

$$M^{-1}=M_4M_3M_2M_1,$$

其中，矩阵 M_1，M_2，M_3，M_4 均为初等变换矩阵. 也就是说，矩阵 $\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}$的逆矩阵由这样四个初等变换矩阵的乘积表示.

上述求矩阵的逆矩阵的方法具有一般性.

抽象概括

一般地，任一可逆矩阵的逆矩阵，总可以由一系列初等变换矩阵$\left(如\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\k & 1\end{pmatrix}等\right)$的乘积表示.

这样，我们就有了一种用初等变换求逆矩阵的方法.

在求给定矩阵 M 的逆矩阵时，我们首先研究基向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$的像 $M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和 $M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，然后确定一组初等变换矩阵，使得连续实施这一组初等变换时，可以把 $M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和 $M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$变回基向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 这样，矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1}就可以表示为这一组初等变换矩阵的乘积.

在前面的实例中，我们已经得出，矩阵 $M=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}$的逆矩阵 M^{-1}有

$$M^{-1}=M_4M_3M_2M_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由逆矩阵的性质可知：

$$M=(M_4M_3M_2M_1)^{-1}=M_1^{-1}M_2^{-1}M_3^{-1}M_4^{-1}.$$

根据上一节例 1，不难得出，初等变换矩阵 M_1, M_2, M_3, M_4 的逆矩阵 $M_1^{-1}, M_2^{-1}, M_3^{-1}, M_4^{-1}$ 仍是初等变换矩阵. 即

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{10}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

即矩阵 $M=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ 可以分解为一系列初等变换矩阵的乘积.

一般地，任一可逆矩阵，一定可以分解为一系列初等变换矩阵的乘积.

从几何上说，任一可逆矩阵表示的变换，总可以分解为一系列初等变换(如反射变换、压伸变换、切变等)的合成.

这就是我们说反射变换、压伸变换、切变等是最基本的几何变换，而表示这些变换的矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$ 是最基本的矩阵的原因.

习 题 4—2

A 组

1. 根据逆矩阵的定义，验证：

(1)矩阵 $N=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $M=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵；

(2)等式 $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{10}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 成立.

2. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵，并用逆矩阵的定义进行验证.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

3. 把第 2 题中的矩阵分别表示为一系列初等变换矩阵的乘积，并根据矩阵乘法进行验证.

4. 根据本节的思想方法，试说明下列矩阵不存在逆矩阵.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

B 组

用语言概括：对任一可逆矩阵，通过怎样的步骤可以将其分解为一系列初等变换矩阵的乘积.

§3　二阶行列式与逆矩阵

问题提出

上一节我们从几何的角度探讨了矩阵是否存在逆矩阵，并给出了从几何上求逆矩阵的方法. 如何从代数的角度思考这些问题呢？

在这一节，我们从代数角度回答：

什么矩阵存在逆矩阵？

如何求逆矩阵？

实例分析

矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 是否存在逆矩阵，若存在，试着求出其逆矩阵.

对矩阵 $\boldsymbol{M}$，如果存在逆矩阵，不妨设矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 是它的逆矩阵，则根据逆矩阵的定义，应满足

$$\boldsymbol{MP}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

那么，实数 a,b,c,d 必须满足方程组

$$\begin{cases}a+2c=1,\\ 3a+4c=0,\\ b+2d=0,\\ 3b+4d=1.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}a+2c=1,\\ 3a+4c=0\end{cases}\text{且}\begin{cases}b+2d=0,\\ 3b+4d=1.\end{cases}$$

容易解出 $$\begin{cases}a=-2,\\ c=\dfrac{3}{2}\end{cases}\text{且}\begin{cases}b=1,\\ d=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

即矩阵 $$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix},$$

此时已有 $\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{I}$ 成立，只需验证 $\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{I}$ 即可.

显然

$$PM=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

即矩阵 $M=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$存在逆矩阵，且其逆矩阵 $M^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

同样的方法可以研究矩阵 N，不妨设矩阵 $A=\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}$是它的逆矩阵，则应满足

$$NA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u & v\\ u & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

那么，实数 u,v 必须满足方程组

$$\begin{cases}u=1,\\ u=0,\\ v=0,\\ v=1.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}u=1,\\ u=0\end{cases}$ 且 $\begin{cases}v=0,\\ v=1.\end{cases}$

显然，此方程组无解，说明矩阵 N 不存在逆矩阵.

抽象概括

对任意矩阵 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，不妨假设它有逆矩阵 $N=\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}$，则由逆矩阵的定义，应满足

$$MN=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}au+bs & av+bt\\ cu+ds & cv+dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

其中，实数 u,v,s,t 必须满足

$$\begin{cases}au+bs=1,\\ cu+ds=0,\\ av+bt=0,\\ cv+dt=1.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}au+bs=1,\\ cu+ds=0\end{cases}$ 且 $\begin{cases}av+bt=0,\\ cv+dt=1.\end{cases}$

我们发现，当 $ad-bc\neq 0$ 时，上面方程组有解

$$\begin{cases} u=\dfrac{d}{ad-bc}, \\ s=\dfrac{-c}{ad-bc} \end{cases} \text{且} \begin{cases} v=\dfrac{-b}{ad-bc}, \\ t=\dfrac{a}{ad-bc}. \end{cases}$$

不难验证，这样构成的矩阵 $\boldsymbol{N}$ 满足

$$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I},$$

即矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵；

当 $ad-bc=0$ 时，上面方程组无解，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 不存在逆矩阵.

为记录方便，我们记

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

并称它为矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的**行列式**.

定理　若矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

若矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$，则矩阵 $\boldsymbol{M}$ 不存在逆矩阵.

证明略.

例　判断矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 是否存在逆矩阵，若存在，利用(4.2)式求出它的逆矩阵，并用逆矩阵的定义(4.1)式验证.

解　矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=1\times 7-2\times 6=-5\neq 0,$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{7}{-5} & \dfrac{-6}{-5} \\ \dfrac{-2}{-5} & \dfrac{1}{-5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{7}{5} & \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{5} \end{bmatrix},$$

并且，$MM^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{7}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$,

$$M^{-1}M=\begin{bmatrix}-\frac{7}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

练　习

求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

习 题 4—3

A　组

1. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{bmatrix}$.

2. 说明下列矩阵不存在逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

3. 矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵. 试证明：

(1)若 $\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{PN}$，则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$；

(2)若 $\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{NP}$，则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$；

(3)若 $\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$.

4. 试证明，满足 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{0}$ 的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 必是不可逆矩阵.

5. 用逆矩阵的定义(4.1)式，验证(4.2)式构成的矩阵是矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

B　组

试证明本节定理.

§4　可逆矩阵与线性方程组

这一节，我们讨论矩阵的另一个问题，给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，对任意给定的向量 $\boldsymbol{\alpha}$，是否存在向量 $\boldsymbol{x}$，使 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$.

实例分析

考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$，我们要研究是否存在一个向量在 $\boldsymbol{M}$ 的作用下变成 $\boldsymbol{\alpha}$.

由于矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示逆时针旋转 90°的变换，如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是由某个向量逆时针旋转 90°变成的，那么，只需将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 顺时针旋转 90°，就变回了原来的位置，如图 4-9 所示. 也就是说逆变换可以帮助我们找到答案.

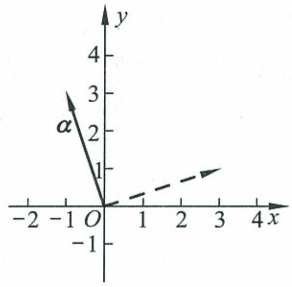


图 4-9

从逆矩阵的角度，由于矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$，假设向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下变成向量点 $\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},$$

现在对向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作逆变换 $\boldsymbol{M}^{-1}$，有

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$

即，向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下变成了向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

抽象概括

定理　给定可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则存在唯一的向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$.

证明留给同学们自己完成.

从映射观点看，可逆矩阵表示的变换，使平面上每一向量（或点）都存在原像，且原像唯一.

如果 $\boldsymbol{M}$ 是不可逆矩阵，上面的结论不成立.

例如：$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，它是一个不可逆矩阵，若取 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，则不存在向量 $\boldsymbol{x}$，使 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$.

而若取 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$，则有无穷多向量 $\boldsymbol{x}$ 使 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$.

实际上，道理很简单，对任何向量 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}.$$

无论 x 取何实数 $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，

而对任意实数 y，总有 $\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}2\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$. 这样的向量 $\begin{bmatrix}2\\y\end{bmatrix}$ 有无穷多个.

这样，我们发现，一个可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换，满足：

(1)任一向量（点）有唯一的像；

(2)不同的向量（点）的像不同；

(3)任一向量（点）都有原像.

我们说，可逆矩阵表示的变换是一一对应的.

如反射、压伸、切变、旋转等变换都是一一对应的.

而 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ 等不可逆矩阵表示的变换都不是一一对应的.

在 §1.3 中，我们给出二元一次方程组

$$\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f.\end{cases}$$

可以用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}.$$

如果令　$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$，则上式可以写成

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}.$$

这样，解方程组的问题就可以用映射的观点理解为：给定矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$，求向量 $\boldsymbol{x}$，使得

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha},$$

即 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，其像为 $\boldsymbol{\alpha}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，则由定理知，存在唯一的解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}.$$

例 利用逆矩阵解二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y=1,\\-x+4y=3.\end{cases}$$

解 已知方程组可以写成

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}$，其行列式

$$\begin{vmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{vmatrix}=3\times4-(-1)\times(-2)=10\neq0,$$

则矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{2}{10}\\\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

这样 $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

即方程组的解为

$$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$$

习 题 4—4

A 组

1. 试证明本节的定理.
2. 利用逆矩阵解二元一次方程组：

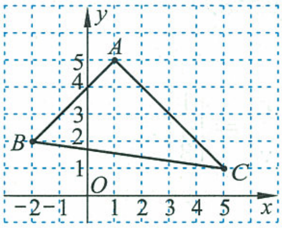
(1) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 3x+4y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x+4y=1, \\ 3x+5y=-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+3y=0, \\ x+5y=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 5x+8y=3. \end{cases}$

3. 在下列矩阵的作用下，试分析，图中的$\triangle ABC$是由什么图形变成的：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.



（第 3 题）

B　组

试从几何上，用矩阵变换来讨论下列方程组的解.

(1) $\begin{cases} x-y=0, \\ -x+y=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=1, \\ -x+y=1. \end{cases}$

复习题四

A 组

1. 判断下列矩阵是否存在逆矩阵，如果存在，求其逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$；　(5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

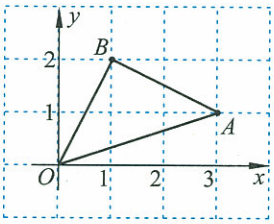
2. 利用逆矩阵解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 2x=3, \\ x-2y=\frac{5}{2}; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y-x=0, \\ 2x+3y=5; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 3x+y=0, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

试求出矩阵 $\boldsymbol{M}$，并回答，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，图中△ABO 是由什么图形变成的.



（第 3 题）

4. 对矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，验证：如果 $\boldsymbol{M\alpha}=\boldsymbol{M\beta}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

5. 对矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，构造两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，使它们满足 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$，但 $\boldsymbol{N\alpha}=\boldsymbol{N\beta}$.

6. 已知 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求出使等式成立的矩阵 $\boldsymbol{M}$.

7. 试把下列矩阵分解为初等变换矩阵$\left(\text{如}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\text{等}\right)$的乘积形式.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

B 组

已知在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，四边形 $ABCD$ 变成了四边形 $A'B'C'D'$. 其中 $A(1,1)$，$B(-1,1)$，$C(-1,-1)$ 及 $A'(3,-3)$，$B'(1,1)$，$D'(-1,-1)$.

(1)求出矩阵 $\boldsymbol{M}$，并判断该矩阵是否为可逆矩阵，若是可逆矩阵，求出其逆矩阵；

(2)确定点 D 及点 C' 的坐标；

(3)把矩阵 $\boldsymbol{M}$ 及其逆矩阵(若 $\boldsymbol{M}$ 可逆)分别表示为初等变换矩阵的乘积.

第五章　矩阵的特征值与特征向量

§1　矩阵变换的特征值与特征向量

实例分析

矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 表示一个压缩变换，它把图 5-1 中的正方形 $ABCO$ 沿 x 轴垂直压缩为原来的一半.

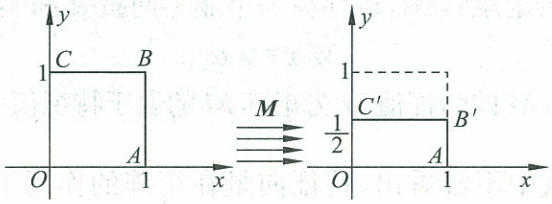


图 5-1

在这个变换过程中我们发现，向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 没有改变，即

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

而向量 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在这个变换下方向也没有改变，只改变了其长度，即

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

即向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 变换下分别与它们的像共线.

反射矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 将图 5-2 中的正方形 $ABCO$ 变成了正方

形 A_1B_1CO.

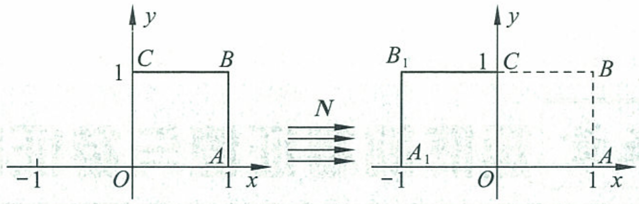


图 5-2

向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$在这个变换下其像方向相反，但仍保持共线，即

$$N\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

而向量$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$在这个变换下没有改变，即

$$N\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

即在矩阵 N 的作用下，$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$具有分别与它们的像共线的特征.

一般地，给定矩阵 M，若存在一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和实数 λ，满足

$$M\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \tag{5.1}$$

则称 λ 为矩阵 M 的**特征值**，$\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 M 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

从(5.1)式中不难看出，特征向量在矩阵的作用下具有某种“不变性”，即特征向量变换后的像与原向量是共线的.

前面我们已经发现，对于矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$是属于特征值 $\lambda=1$的特征向量，向量$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$是属于特征值 $\lambda=\frac{1}{2}$的特征向量. 那么，对于矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$还有没有其他的特征值和特征向量？我们如何确定矩阵的特征值和特征向量呢？

实例分析

如何确定矩阵 $M=\begin{bmatrix}3&6\\5&2\end{bmatrix}$的特征值和特征向量？

假设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，由定义知，它们满足

$$\begin{bmatrix}3&6\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

等价于
$$\begin{bmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3x+6y\\5x+2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

可得
$$\begin{bmatrix}(\lambda-3)x-6y\\-5x+(\lambda-2)y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{bmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.\tag{5.2}$$

由于特征向量是非零向量，我们的问题变成：二元一次方程组(5.2)何时有非零解.

若矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{bmatrix}$ 对应的行列式 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}\neq0$，则矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}$，存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

由于
$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

则
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

有
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

于是，在 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}\neq0$ 时，(5.2)仅有零解，$\boldsymbol{M}$ 无特征向量.

这样，只有 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}=0$，(5.2)才可能有非零解.

由二阶行列式定义知

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\lambda-3&-6\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}\\&=(\lambda-3)(\lambda-2)-(-5)(-6)\\&=\lambda^2-5\lambda-24,\end{aligned}$$

因此，只有 λ 满足

$$\lambda^2-5\lambda-24=0$$

时，λ 才可能是 $\boldsymbol{M}$ 的特征值，解方程 $\lambda^2-5\lambda-24=0$ 得到两个根，

$$\lambda_1=8,\quad \lambda_2=-3.$$

将 $\lambda_1=8$ 代入(5.2)，有

$$\begin{bmatrix}8-3 & -6\\ -5 & 8-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases}5x-6y=0,\\ -5x+6y=0.\end{cases}$$

也即
$$5x=6y.$$

它有无穷多个非零解 $\begin{bmatrix}x\\ \frac{5}{6}x\end{bmatrix}$，其中 $x\neq 0$. 于是，$\lambda_1=8$ 是 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ 的一个特征值，$x\begin{bmatrix}1\\ \frac{5}{6}\end{bmatrix}(x\neq 0)$ 都是属于特征值 $\lambda_1=8$ 的特征向量. 我们任取一个，例如取 $\begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}$ 为属于特征值 $\lambda_1=8$ 的特征向量.

同样的，对于 $\lambda_2=-3$，方程组

$$\begin{bmatrix}-3-3 & -6\\ -5 & -3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

即
$$x+y=0$$

有无穷多个非零解 $\begin{bmatrix}x\\ -x\end{bmatrix}$，其中 $x\neq 0$. 因此，$\lambda_2=-3$ 是 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ 的特征值. 此时 $\begin{bmatrix}x\\ -x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，对每一个 $x\neq 0$ 的值，都是属于 $\lambda_2=-3$ 的特征向量. 可任取一个，例如取 $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 为属于特征值 $\lambda_2=-3$ 的特征向量.

事实上，对矩阵 $\boldsymbol{M}$，若有特征值 λ 及相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{M\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则对任意实数 $t(t\neq 0)$，$t\boldsymbol{\alpha}$ 也必是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应于特征值 λ 的特征向量. 由于它们都是共线的，通常我们只需取一个作为代表.

练　习

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量.

   (1) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

2. 试说明矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 没有实数特征值和特征向量，并给出几何解释. 而矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 有唯一的特征值，并求出此特征值及相应的特征向量.

3. 利用特征向量的定义证明，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，则 $t\boldsymbol{\alpha}$（实数 $t\neq 0$）也必是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

抽象概括

给定矩阵 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，设矩阵 M 存在特征值 λ，及其对应的特征向量 $\alpha=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，由定义可知，它们应满足

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

它等价于
$$\begin{bmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

只有当 $\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=0$ 时，方程组(5.3)才可能有非零解．

因此，矩阵 M 的特征值 λ 必须满足方程

$$0=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-d)-(-b)(-c), \tag{5.4}$$

即
$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0. \tag{5.5}$$

可以证明方程(5.5)的根即为矩阵 M 的特征值．显然一个二阶方阵最多可以有两个特征值．

当我们从方程(5.5)中解出特征值 λ 后，代入方程组(5.3)中，此时，由于 λ 满足(5.4)式，因此方程组(5.3)的两个式子系数成比例．则方程 $(\lambda-a)x-by=0$ 与 $-cx+(\lambda-d)y=0$ 解集相同，只需任取其中之一求解即可．例如，当 $b\neq0$ 时，由 $(\lambda-a)x-by=0$ 可得

$$y=\frac{\lambda-a}{b}x,$$

此方程有无穷多解 $\begin{bmatrix} x \\ \frac{\lambda-a}{b}x \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-a}{b} \end{bmatrix}$，当 $x\neq0$ 时，解 $x\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-a}{b} \end{bmatrix}$ 就是矩阵 M 的属于特征值 λ 的特征向量．

显然，属于同一个特征值 λ 的特征向量 $x\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-a}{b} \end{bmatrix}$ $(x\neq0)$ 均共线，通常我们可以取其中的一个．

> **问题与思考**
>
> 对给定的矩阵，试讨论其特征值的个数情况.

例 1　求矩阵 $M=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量．

解　矩阵 M 的特征值 λ 满足方程

$$0=\begin{vmatrix} \lambda-8 & 5 \\ -6 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+3)-5\times(-6)=\lambda^2-5\lambda+6,$$

解得矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的两个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

设属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，它满足方程组

$$\begin{bmatrix}2-8 & 5\\-6 & 2+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

即 $$5y=6x.$$

这样的向量有无穷多个，可表示为 $x\begin{bmatrix}1\\\frac{6}{5}\end{bmatrix}(x\neq0)$，可取 $\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ 为属于特征值 $\lambda_1=2$ 的一个特征向量.

设属于特征值 $\lambda_2=3$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，它满足方程组

$$\begin{bmatrix}3-8 & 5\\-6 & 3+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

即 $$y=x.$$

这样的向量有无穷多个，可表示为 $x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(x\neq0)$，取 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 为属于特征值 $\lambda_2=3$ 的一个特征向量.

综上所述，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}8 & -5\\6 & -3\end{bmatrix}$ 有两个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$，属于 $\lambda_1=2$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$，属于 $\lambda_2=3$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

矩阵的特征向量是在变换下"基本"不变的量，掌握了矩阵的特征向量，对认识该变换有许多好处.

如例 1 中我们得出，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}8 & -5\\6 & -3\end{bmatrix}$ 的一个特征值 $\lambda_1=2$，及其对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$. 即有

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,$$

这样，连续实施两次矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的变换有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}8 & -5\\6 & -3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}&=\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{M}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda_1(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_1)\\&=\lambda_1(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1\\&=2^2\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\24\end{bmatrix},\end{aligned}$$

而连续实施 n 次矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的变换，则

$$\begin{pmatrix}8 & -5\\6 & -3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1=2^n\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times2^n\\6\times2^n\end{pmatrix},$$

即，我们在研究连续实施矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的变换时，特征向量的变换结果特别简单．

一般地，当矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},$$

则有

$$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}.$$

而如果矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有两个不共线的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，其相应的特征值为 λ_1，λ_2，即

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

那么，当我们研究任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果时，由于总存在实数 s，t，使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$，于是

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}(s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2)=s(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_1)+t(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_2)=s(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1)+t(\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2),$$

即只需先研究特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果，就可以表示一般向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果．

在§2.2 中我们知道，由于

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=x\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

所以，只要知道两个基向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的变换结果，任意向量在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的变换结果均可以用它们表示. 现在看来，若把基向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 改取为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的两个不共线的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$，则上述作法更方便.

当研究对一般向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 连续实施矩阵 $\boldsymbol{M}$ 所表示的变换时，可以先研究特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的变换结果，用它们来表示一般向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的变换结果．如

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{M}^2(s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=s(\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\alpha}_1)+t(\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=s(\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1)+t(\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2),\end{aligned}$$

一般地

$$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}=s(\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1)+t(\lambda_2^n\boldsymbol{\alpha}_2).$$

这样显得特别简单，这正是特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的“不变性”带来的好处.

例 2 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}8 & -5\\6 & -3\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{M}^{100}\boldsymbol{\alpha}$.

解 利用例 1 的结果可知，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分别对应特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$ 的两个特征向量，它们不共线. 则

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

因此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{M}^4(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\alpha}_1+2(\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=\lambda_1^4\boldsymbol{\alpha}_1+2(\lambda_2^4\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=2^4\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+2\times3^4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}242\\258\end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{100}\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{M}^{100}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{M}^{100}\boldsymbol{\alpha}_1+2(\boldsymbol{M}^{100}\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=\lambda_1^{100}\boldsymbol{\alpha}_1+2(\lambda_2^{100}\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=2^{100}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+2\times3^{100}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}5\times2^{100}+2\times3^{100}\\6\times2^{100}+2\times3^{100}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

习 题 5—1

A 组

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(1) $\begin{bmatrix}2 & 5\\6 & 1\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 4\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 6\\-2 & -6\end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$.

2. 从几何变换角度讨论矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 以及合成变换 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 的特征向量，你发现了什么结论？

3. 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 既是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征向量，又是矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的特征向量. 试证明，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 及 $\boldsymbol{NM}$ 的特征向量.

4. 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3&6\\5&2\end{bmatrix}$ 有属于特征值 $\lambda_1=8$ 的特征向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$，及属于特征值 $\lambda_2=-3$ 的特征向量 $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

(1)对向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，利用这一表达式间接计算 $\boldsymbol{M}^3\boldsymbol{\alpha}$ 及 $\boldsymbol{M}^{50}\boldsymbol{\alpha}$；

(2)对向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{M}^5\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{M}^{100}\boldsymbol{\beta}$.

B　组

1. 给定可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$，若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 属于特征值 λ 的特征向量，试证明，当 $\lambda\neq0$ 时，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 的特征向量，并求出其对应的特征值.

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征向量 $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，且它们所对应的特征值分别为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-1$.

(1)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2)求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值及特征向量；

(3)对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

§2 特征向量在生态模型中的简单应用

我们考虑一个简单的关于兔子和狐狸生存的生态模型.

一、问题与建模

1. 问题的提出

当兔子和狐狸处于同一栖息地时,我们忽略其他因素,只考虑兔子数量和狐狸数量的相互影响.

兔子数量的变化主要受两个因素影响,一是由于自然繁殖率高,每年都按一定比率增长;二是由于被狐狸吃,使得数量减少.

狐狸数量的变化主要受两个因素的影响,一是由于自然繁殖率低,每年都按一定比率减少;二是由于食物——兔子充足,使得数量增加.

我们关心,随着时间的变化,兔子和狐狸的数量有着怎样的变化规律?

2. 建立模型

为了简便起见,不妨做如下假设:

①由于自然繁殖,兔子数每年增长 10%,狐狸数每年减少 15%;

②由于狐狸吃兔子,兔子数每年减少狐狸数的 0.15 倍,狐狸数每年增加兔子数的 0.1 倍;

③第 n 年时,兔子数量用 R_n 表示,狐狸数量用 F_n 表示;

④初始时刻(即第 0 年),兔子数量有 $R_0=100$ 只,狐狸数量有 $F_0=30$ 只.

这样,我们得到如下数学模型:

$$\begin{cases} R_n=1.1R_{n-1}-0.15F_{n-1}, \\ F_n=0.1R_{n-1}+0.85F_{n-1}. \end{cases} \quad (n\geqslant 1)$$

我们可以把这个模型表示成矩阵的形式,

令 $\boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix} R_n \\ F_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1.1 & -0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}$,则上述模型可以写成

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}_{n-1}\ (n\geqslant 1).$$

由此可知, $\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}_{n-1}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}_{n-2})=\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\beta}_{n-2}=\cdots=\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\beta}_0$,

即
$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\beta}_0.$$

也就是说，第 n 年兔子和狐狸的数量 $\boldsymbol{\beta}_n=\begin{bmatrix}R_n\\F_n\end{bmatrix}$ 依赖于初始时刻兔子和狐狸的数量 $\boldsymbol{\beta}_0=\begin{bmatrix}R_0\\F_0\end{bmatrix}$ 和变换矩阵 $\boldsymbol{M}$.

二、求解模型

通过上一节的学习，我们知道，可以利用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征向量，特征值来表示和分析我们得到的数学模型.

利用上一节的方法，不难得出，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有两个特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0.95$，分别取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ 为对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 为对应于特征值 $\lambda_2=0.95$ 的特征向量. 显然，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线.

由向量基本定理知，初始向量可表示为两个不共线的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的组合. 设

$$\boldsymbol{\beta}_0=\begin{bmatrix}R_0\\F_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\30\end{bmatrix}=s\,\boldsymbol{\alpha}_1+t\,\boldsymbol{\alpha}_2=s\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}100=3s+t,\\30=2s+t.\end{cases}$$

解得

$$s=70,\ t=-110,$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_0=70\boldsymbol{\alpha}_1-110\boldsymbol{\alpha}_2.$$

由特征向量性质，得

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\beta}_0=\boldsymbol{M}^n(70\boldsymbol{\alpha}_1-110\boldsymbol{\alpha}_2)=70\,\lambda_1{}^n\boldsymbol{\alpha}_1-110\,\lambda_2{}^n\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即

$$\begin{bmatrix}R_n\\F_n\end{bmatrix}=70\times1^n\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}-110\times0.95^n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}210\\140\end{bmatrix}-0.95^n\begin{bmatrix}110\\110\end{bmatrix}.$$

这样就给出了第 n 年兔子和狐狸的数量

$$\begin{cases}R_n=210-110\times0.95^n,\\F_n=140-110\times0.95^n.\end{cases}$$

三、结果的分析和理解

1. 实践尝试

对上述模型，输入一系列自然数 n，我们可以得到经过 n 年后，兔子和狐狸的数量表（表中保留一位小数）.

n 年	兔子数量 R_n	狐狸数量 F_n
0	100	30
1	105.5	35.5
2	110.7	40.7
3	115.7	45.7
…	…	…
10	144.1	74.1
…	…	…
100	209.3	139.3
…	…	…

从上面的数量表中，我们可以直觉地感受到，兔子和狐狸的数量在逐渐增长，但增长的速度开始较快，而随后逐渐缓慢．这里应用信息技术可以更精确、更直观地反映出兔子和狐狸数量随时间变化的规律．具体方法参看本节后面的“信息技术应用”．

2．理论思考

从模型的结果看，由于第 n 年的兔子和狐狸的数量表示为

$$\begin{cases} R_n = 210 - 110 \times 0.95^n, \\ F_n = 140 - 110 \times 0.95^n. \end{cases}$$

当 n 逐渐增大时，0.95^n 逐渐减小，而 -110×0.95^n 逐渐增大，因而 R_n 和 F_n 都逐渐增大．

当 n 越来越大时，0.95^n 越来越趋近于 0，R_n 和 F_n 分别趋向常量 210 和 140．

即随着时间的增加，兔子和狐狸的数量逐渐增加，当时间充分长后，兔子和狐狸的数量达到一个稳定的平衡状态．

有兴趣的同学还可以进一步研究，例如，对于不同的初始向量 $\boldsymbol{\beta}_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ F_0 \end{bmatrix}$，模型的结果是否有变化，在这里不作更多分析．

我们有必要说明，实际问题要复杂得多．但是，在上面的讨论中，解决问题的思想是非常重要的．

信息技术应用

利用图形计算器研究兔子和狐狸数量随时间变化的规律

步骤：

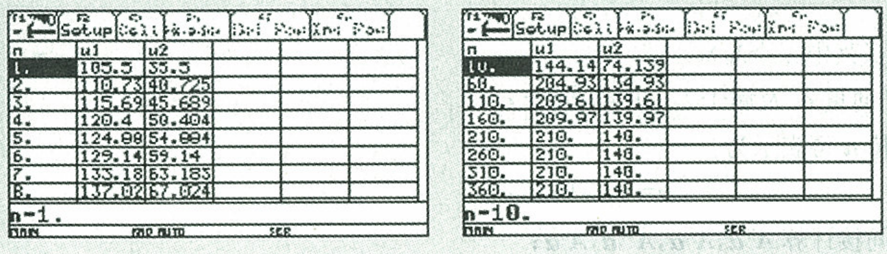
1. 在图形计算器中进入序列模块.

2. 根据模型结果

$$\begin{cases} R_n=210-110\times 0.95^n, \\ F_n=140-110\times 0.95^n, \end{cases}$$

输入上述两个序列.

3. 进入序列的数据表格，可以得到任意时间对应的 R_n 和 F_n 值，如图 5-3 所示.



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

图 5-3

4. 进入序列的绘图模块，可以得到以时间 n 为横坐标，种群数量 R_n 和 F_n 分别为纵坐标的两组图形，如图 5-4 所示.

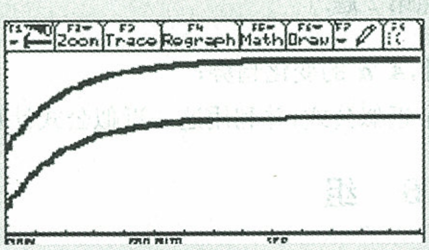


图 5-4

从以上数据表格及图形，容易看出兔子和狐狸的数量在开始的一段时间增长较快，而在一定时间后种群数量都趋于一个常量，达到一种平衡状态.

习 题 5—2

A 组

1. 给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}$.

(1)求出 $\boldsymbol{M}$ 的特征值及特征向量；

(2)利用特征向量间接计算 $\boldsymbol{M}^5\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}$；

(3)讨论当 n 越来越大时,$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的变化趋势；

(4)对任意向量 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$,计算 $\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{X}$；

(5)讨论当 n 越来越大时,$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{X}$ 的变化趋势.

2. 给定矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$.

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_1,λ_2(其中 $\lambda_1>\lambda_2$)；

(2)求 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ_1 的特征向量 $\boldsymbol{e}_1$ 及属于 λ_2 的特征向量 $\boldsymbol{e}_2$；

(3)确定实数 s,t,使向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=s\,\boldsymbol{e}_1+t\,\boldsymbol{e}_2;$$

(4)利用(3)中表达式,间接计算 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}^{20}\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$；

(5)观察并分析(4)中 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的结果,是否发现,随着 n 的不断增大,$\boldsymbol{e}_2$ 对结果的影响越来越小,若忽略 $\boldsymbol{e}_2$ 对结果的影响,则得到一个计算 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的近似公式,写出这一近似公式；

(6)利用(5)中近似公式,计算 $\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}$.

3. 给定矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$,仿照第 2 题.

(1)计算 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$,并分析讨论当 n 越来越大时,$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的变化趋势；

(2)根据第 2 题思想方法,给出 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的一个近似公式,并利用这一近似公式计算 $\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}$.

B 组

若兔子和狐狸的生态模型为：

$$\begin{cases}R_n=1.1R_{n-1}-0.3F_{n-1},\\ F_n=0.2R_{n-1}+0.4F_{n-1}.\end{cases}\quad(n\geqslant1)$$

对初始种群数量 $\boldsymbol{\beta}_0=\begin{bmatrix}R_0\\F_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\50\end{bmatrix}$,讨论第 n 年种群数量 $\boldsymbol{\beta}_n$ 及当 n 越来越大时,种群数量 $\boldsymbol{\beta}_n$ 的变化趋势.

复习题五

A　组

1. 求下列矩阵的特征值及特征向量.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$；　　(3) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

2. 给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(1)证明矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 互为逆矩阵；

(2)证明 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 同时是 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的特征向量；

(3)求出 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的特征值.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=8$ 及对应特征向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，并有特征值 $\lambda_2=2$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. 试确定矩阵 $\boldsymbol{A}$.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 有特征向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(1)求出 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 对应的特征值分别是什么？

(2)对向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，利用这一表达式间接计算 $\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^{10}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^{20}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$；

(3)是否发现，在 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的结果中，随着 n 的增大，特征向量 $\boldsymbol{e}_2$ 对结果的影响越来越小，以致可以被忽略，在这一思想下，给出一个计算 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的近似公式；

(4)利用上一问中的近似公式，计算 $\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}$.

5. 给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$.

(1)求 $\boldsymbol{M}$ 的特征值及对应的特征向量；

(2)确定实数 a，b，使向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=a\,\boldsymbol{e}_1+b\,\boldsymbol{e}_2;$$

(3)利用(2)中表达式间接计算 $\boldsymbol{M}^3\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}$；

(4)对(3)中计算结果分析，当 n 越来越大时，$\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的变化趋势，试着像第 4 题一样给出 $\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的一个近似公式；

(5)利用(4)中近似公式，计算 $\boldsymbol{M}^{50}\boldsymbol{\alpha}$.

B　组

对下列兔子、狐狸模型进行分析.

$$①\begin{cases}R_n=1.3R_{n-1}-0.2F_{n-1},\\ F_n=0.15R_{n-1}+0.9F_{n-1};\end{cases}\quad(n\geqslant1)$$

$$②\begin{cases}R_n=1.1R_{n-1}+0.1F_{n-1},\\ F_n=0.2R_{n-1}+1.1F_{n-1}.\end{cases}\quad(n\geqslant1)$$

(1)分别确定以上模型对应矩阵的特征值；

(2)分别确定以上模型最大特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{e}$，及较小特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{e}'$；

(3)如果初始种群中兔子与狐狸的数量 $\boldsymbol{\beta}_0=\begin{bmatrix}R_0\\F_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\30\end{bmatrix}$，分别把第 n 年种群中兔子与狐狸的数量 $\boldsymbol{\beta}_n=\begin{bmatrix}R_n\\F_n\end{bmatrix}$ 表示为 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{e}'$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{\beta}_n=a\,\boldsymbol{e}+b\,\boldsymbol{e}'$；

(4)利用(3)中表达式分析当 n 越来越大时，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的变化趋势.

阅读材料

矩阵作为数的表格的形式出现得很早，但正式在数学中被系统地研究是在 19 世纪. 尽管矩阵的概念独立于行列式的概念，在历史上，矩阵的理论是在研究行列式中发展起来的，应该特别说明，解线性方程组的问题是发展矩阵和行列式研究的源泉.

一般认为，英国数学家凯莱(Cayley，1821—1895)是矩阵研究的开创者，他的第一篇关于矩阵的重要文章《矩阵论的研究报告》，给出了矩阵乘法的含义，说明了矩阵乘法满足结合律，但不满足交换律，用我们专题中的办法(即用行列式)给出了方阵的逆矩阵，并说明行列式的值为零时，逆矩阵不存在. 不过，他讨论的不仅仅是二阶方阵，而是一般 $m\times n$ 阶矩阵，比如，他说明 $m\times n$ 矩阵只能左乘 $n\times p$ 矩阵，他没有像我们专题那样，用几何图形来说明变换，而是从代数上来考虑的.

矩阵作为一种表现形式，是数学上非常有用的工具，在许多学科中有着广泛的实际应用.

本专题一个自然的推广是三阶方阵，它是 3 维向量或 3 维空间点的变换. 可以证明，它仍然把直线变成直线，即有性质(4.3). 在空间中的变化自然要比平面复杂，但仍可以讨论反射、旋转、压伸、切变等，可以讨论逆矩阵和矩阵的特征值、特征向量，可以用它来分析和求解三元一次方程组. 有兴趣的同学可以自己完成这一拓展的过程.

在实际问题中，人们讨论的问题，其指标可能不止 3 个，如一个病人的诸多化验指标、一个企业考核的各种指标等. 一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 也可以看成是一个向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，这 n 个数组成一个向量，称它为 **n 维向量**. 两个 n 维向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的运算和 3 维向量运算是一致的，所以，我们可以讨论一般 n 阶矩阵与 n 维向量的乘法. 这一推广在现代数学中十分重要. 和 2 维、3 维情形相比，尽管显得十分抽象，技术上也繁难了，但其基本思想都是一致的. 例如，矩阵把“直线”变成“直线”、矩阵的逆矩阵、矩阵的特征向量、特征值等，以及 n 阶矩阵与 n 元一次方程组的关系，等等.

我们也可以把方阵推广为不是方阵的情形. 例如，由

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{bmatrix}$$

知，二行三列矩阵，把 3 维向量$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$变成了 2 维向量$\begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{bmatrix}$.

例如：图论是一个实际应用十分广泛的数学分支，相邻矩阵是图论中的一个基本的概念，它在图论研究中发挥了重要作用. 我们设计了“统筹方法与图论初步”专题，有兴趣的同学可以选学.

在气象学、化学、生物学研究中，都会使用“转移矩阵”的概念，反映连续实验、种群发展的规律和趋势.

在信息安全中，矩阵也被作为一种加密的手段.

在微分方程、线性方程理论、大型科学计算等许多数学分支中，矩阵都是一种十分有力的工具.

◆ 复习小结

一、复习本专题知识，结合自己的课堂笔记、作业和学习体会，对本专题的内容进行归纳小结.

1. 本专题介绍了平面向量的哪些运算？它们的几何和代数表示分别是什么？这些向量运算满足哪些运算法则？

2. 共线向量有什么特征？举例说明，平面上任意向量都可以用两个不共线向量线性表示. 写出直线的向量方程.

3. 本专题介绍了哪几种基本的矩阵变换？分别通过具体实例，从代数和几何两方面进行分析说明.

4. 矩阵变换的重要性质是什么？是如何证明的？从几何上如何理解矩阵变换的性质.

5. 试比较矩阵乘法与数的乘法的运算法则. 举例说明它们有何异同点.

6. 从代数和几何两方面分别说明，什么样的矩阵是可逆矩阵，什么样的矩阵是不可逆矩阵，通过具体的系数矩阵，从几何上分析二元一次方程组的解.

7. 对具体矩阵，分别用初等变换和行列式两种方法求其逆矩阵.

8. 如何求矩阵的特征向量、特征值，并通过实例说明. 利用矩阵的特征向量解决哪些问题时比较方便？

二、通过对本专题的小结，完成一份学习小结报告. 建议包括以下三方面内容：

1. 你对本专题的整体结构和内容的理解；你认为在学习本专题过程中有哪些值得注意的问题；你体会到了哪些数学思想方法.

2. 指出本专题的典型和重要的例题、习题，重要的结果和以前没有见过的数学方法和技巧.

3. 通过查阅资料，独立钻研，访问求教，对矩阵变换的意义、作用提出你的看法. 矩阵变换还有其他的应用吗？

三、在教师组织的交流活动中，尽可能清晰简洁地介绍你做本专题小结报告中的收获、体会和发现. 在与其他同学的交流中分享思考的成果. 同时注意找出自己在本专题学习中尚未弄清楚的问题，提出有待进一步探讨的新问题.

附录 1

部分数学专业名词中英文对照表

中文	英文
矩阵	matrix
向量	vector
变换	transformation
线性变换	linear transformation
矩阵的逆(逆矩阵)	inverse of a matrix
行列式	determinant
特征向量	characteristic vector
特征值	characteristic value

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介:基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站,内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面.网站在提供教学实例、教学课件的同时,也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　记

本套教材是按照国家教育部于 2003 年 4 月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的. 我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值. 好学好用.

教材的建设是长期、艰巨的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有利的支持，促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序)：

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序)：

王汝楫、王松浦、岳昌庆、顿继安、焦继红.

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正.