经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

（选修4-1）

几何证明选讲

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　王希平

编写人员（按 姓 氏 笔 画 排 序）

王希平　付　勤　刘族平　李　毅

北京师范大学出版社

·北京·

基础教育教材网址 http://www.100875.com.cn

营销中心电话　010−58802783
服务中心电话　010−58802795
邮购科电话　010−58808083
传真　010−58802838
学科编辑电话　010−58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社（100875）

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志．从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷．

按照国家环境标准（HJ2503−2011）《环境标志产品技术要求　印刷　第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求．

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：890mm×1240mm　1/16
印　张：3.75
字　数：115千字
版　次：2008 年 5 月第 3 版
印　次：2019 年 7 月第 23 次印刷
定　价：3.40元
ISBN 978-7-303-07673-4

责任编辑：王永会　邢自兴　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

目　录

第一章　直线、多边形、圆

在初中数学中，我们已学习过一些几何命题，并初步掌握了运用几何公理、定义、定理证明几何命题的方法. 在本章中，我们将通过直线与圆的位置关系，进一步研究几何证明，并体会关于几何命题的“探索—发现—猜想—证明”的过程，感受研究数学问题的方法.

§1　全等与相似

1.1　图形变化的不变性

几何学主要讨论平面或空间图形的性质，然而这些性质如此众多且各不相同，我们需要采取一些分类原则，使这些繁多的知识变得有条理、有系统.

例如，图 1-1 中，在一块方的软木上画一个圆并画出两条互相垂直的直径，我们将软木从上往下均匀压缩，正方形变成了长方形，圆变成了椭圆，圆中相应直径的夹角不再是直角了，即图形的形状、大小都发生了改变. 但是也有一些性质没有发生变化，如相交的关系没有变，相交线段彼此平分的性质也没有变.

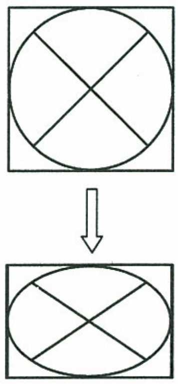


图 1-1

又如，在图 1-2(1) 的 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$，垂足为 D. 将 $\triangle ABD$ 绕着 AD 轴翻转到如图 1-2(2) 所示的位置，$\angle CAB$ 的大小改变了，但是 AB, BD, AD 等线段的长度没有变，AD 与 BD 的垂直关系、AD 与 DC 的垂直关系也没有变.

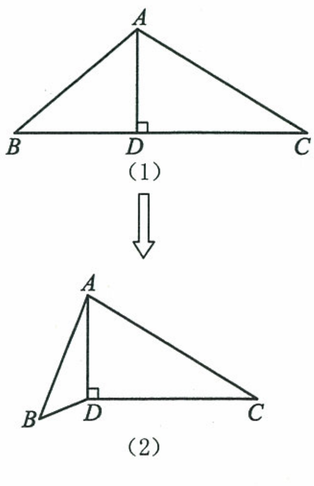


图 1-2

从以上的讨论中我们不难发现，图形在变化过程中，有些性质改变了，有些性质仍然保持不变. 图形经过某种变化后哪些性质发生了改变，哪些性质保持不变，这是几何学研究的基本问题.

问题提出

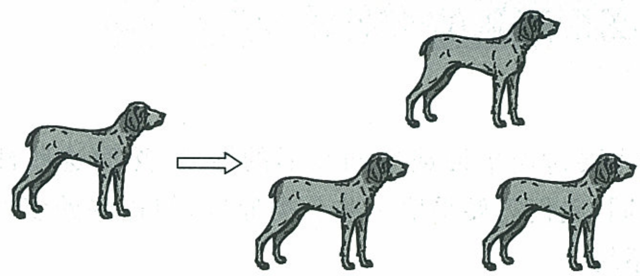
在初中数学中，我们学习过几种常见的图形变化，如平移、旋转、轴对称、相似(包括位似)．想一想，在这些变化过程中，哪些性质发生了变化？哪些性质保持不变？

1.2 平移、旋转、反射

观察图 1-3 和图 1-4：

(1) (2)

图 1-3

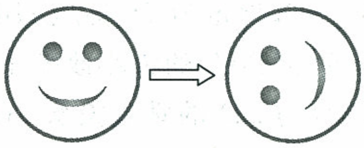


(1) (2)

图 1-4

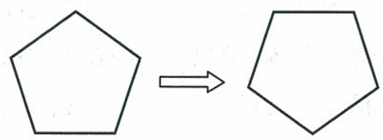
在图 1-3 和图 1-4 中，图(2)可以由图(1)经过平移得到．图形的平移过程称为平移变换．

再观察图 1-5 和图 1-6：



(1) (2)

图 1-5



(1) (2)

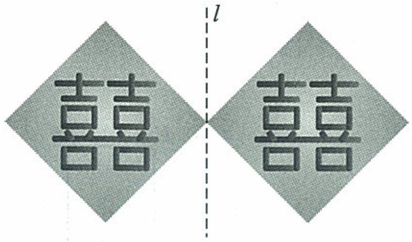
图 1-6

在图 1-5 中，图(2)可以由图(1)旋转 90°得到；在图 1-6 中，图(2)可以由图(1)旋转 180°得到．图形的旋转过程称为旋转变换．

经过平移变换和旋转变换，图形的形状不变，对应线段的长度不

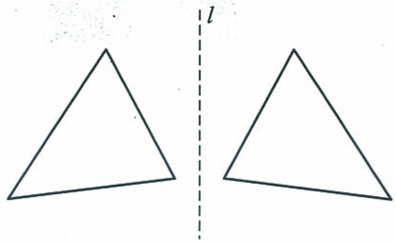
变，对应角的大小不变，但图形的位置可能会发生改变.

观察图 1-7 和图 1-8：



(1)　(2)

图 1-7



(1)　(2)

图 1-8

在图 1-7 中，图(2)可以由图(1)绕直线 l 翻转 180°得到；在图1-8 中，图(2)可以由图(1)绕直线 l 翻转 180°得到.

一个图形 F 绕一条直线 l 翻转 180°得到另外一个图形 F'，则 F 与 F' 关于 l 对称，这种图形的变化过程称为反射变换，直线 l 称为反射轴.

图形经过反射变换，其对应线段的长度不变，对应角的大小不变，但图形的位置发生了改变.

抽象概括

一个图形通过平移变换、旋转变换、反射变换变为另外一个图形，其对应线段的长度不变，对应角的大小不变. 因此，变换前后两个图形是全等的，但图形的位置可能发生改变.

1.3　相似与位似

在图 1-9 中，两个五角星的形状相同，但大小不同，这就是我们学过的相似图形. 其中小五角星可以看成是大五角星按一定比例缩小后的图形；大五角星也可以看成是小五角星按一定比例放大后的图形. 把一个图形按一定比例放大或缩小，这种图形的变化过程称为相似变换.

图 1-9

一个图形通过相似变换变为另外一个图形，其对应角的大小不变，但对应线段的长度和图形的位置发生了改变.

观察图 1-10、图 1-11 和图 1-12：

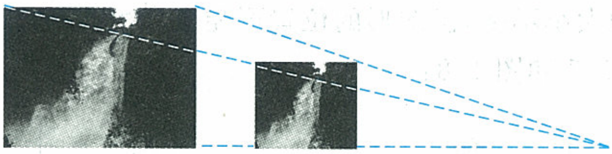


图 1-10

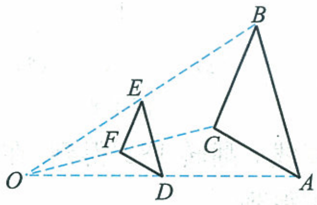


图 1-11

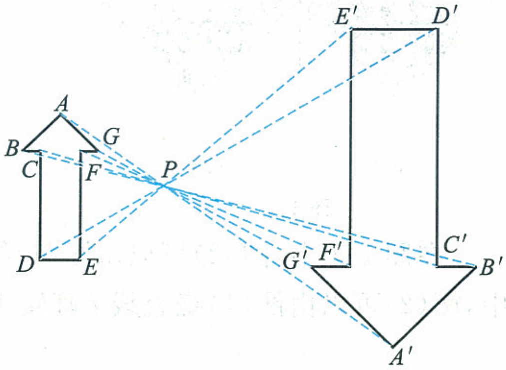


图 1-12

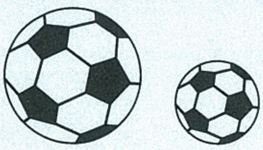
可以发现，这三幅图有一个共同特点，即每一幅图中的两个图形都是位似图形．把一个图形变为它的位似图形，这种图形的变化过程称为位似变换．

一个图形通过位似变换变为另外一个图形，其形状不变，对应角的大小不变，但图形的位置发生了改变．

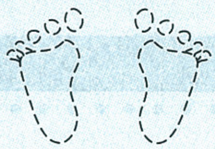
位似变换是一种特殊的相似变换．

练　习

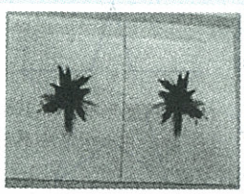
1．观察下列几组图，分析每组图中的右图是由左图经过怎样的变换得到的．



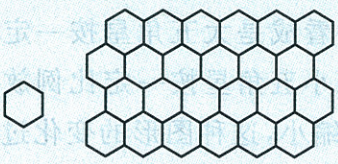
(1)



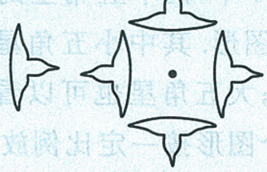
(2)



(3)



(4)



(5)

2．观察生活中的图形，判断哪些图形通过平移可以重合，哪些图形通过旋转可以重合，哪些图形通过反射可以重合，哪些图形是位似的，哪些图形是相似的．

1.4 平行线分线段成比例定理

平行线分线段成比例定理 三条平行线截两条直线，截得的对应线段成比例.

证明 如图 1-13，三条平行线截两条直线有四种情况，其中 l_1，l_2，l_3 表示三条平行线，即 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，a，b 表示被它们所截的直线，A，B，C，D，E，F 为交点.

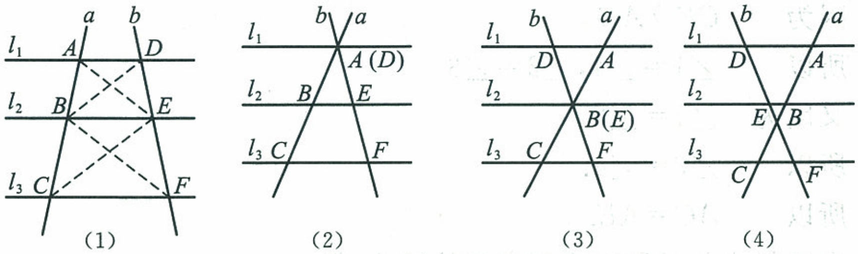


图 1-13

(1) 对于图 1-13(1)，连接 AE，DB，BF，EC，由 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$ 可知，$\triangle ABE$ 与 $\triangle DBE$ 同底等高，$\triangle BCE$ 与 $\triangle BFE$ 同底等高，所以

$$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DBE},\ S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BFE}.$$

又因为 $\triangle ABE$ 的边 AB 上的高与 $\triangle BCE$ 的边 BC 上的高相等，

所以 $\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}}=\dfrac{AB}{BC}$.

同理 $\dfrac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle BFE}}=\dfrac{DE}{EF}$.

所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

(2) 对于图 1-13(2)，把直线 b 向右平移到 b' 的位置(图 1-14)，则 $AE=GM$，$EF=MN$，由(1)可得 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{GM}{MN}$，所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE}{EF}$.

(3) 对于图 1-13(3)(4)，可仿照(2)的做法进行证明.

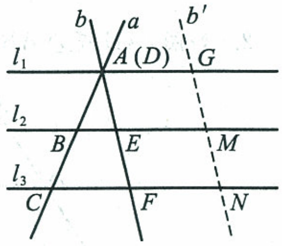


图 1-14

由上面的定理可以得到下面的推论.

推论 平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)，截得的对应线段成比例.

> **问题与思考**
> 这一推论的逆命题成立吗？

利用平行线分线段成比例定理容易证明三角形内角平分线定理.

三角形内角平分线定理 三角形的内角平分线分对边所得的两条线段与这个角的两边对应成比例.

已知：如图 1-15，在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，AD交BC于点D.

求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

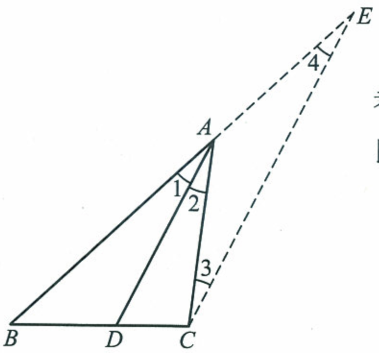


图 1-15

分析 因为BD，DC在同一条直线上，所以要证$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$，可以考虑把折线$BAC$“拉直”．这样可以使问题“转化”为平行线分线段成比例的情况．

证明 过点C作$CE\parallel AD$，交BA的延长线于点E.

因为 $CE\parallel AD$，

所以 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$.

又因为 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle 3=\angle 4$.

所以 $AC=AE$.

由平行线分线段成比例定理的推论，得

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC},$$

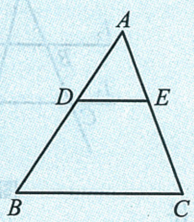
即 $$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

练 习

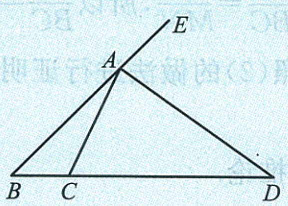
1. 已知：如图，D，E分别是$\triangle ABC$边AB和AC上的点，且$\dfrac{BD}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$.

   求证：$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$.

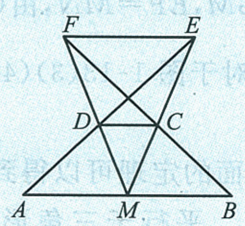
2. 如图，AD是$\triangle ABC$的外角$\angle EAC$的平分线，那么$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$成立吗？



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，$AB\parallel CD$，M是AB的中点，MC的延长线与AD的延长线交于点E，MD的延长线与BC的延长线交于点F．求证：$EF\parallel AB$.

1.5 直角三角形的射影定理

问题提出

如图 1-16，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D，图中有哪些成比例线段？

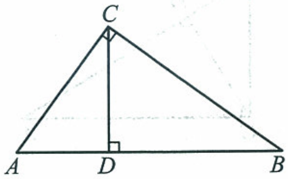


图 1-16

分析理解

根据我们学习的知识，若有平行线截直线或三角形，则可以得到成比例线段. 图 1-16 中没有平行线，但有很多直角，因此可以考虑通过相等的角寻找相似三角形.

直角三角形的射影定理 直角三角形的每一条直角边是它在斜边上的射影与斜边的比例中项[1]，斜边上的高是两条直角边在斜边上射影的比例中项.

[1] 如果 $a:b=b:c$（即 $b^2=ac$），那么 b 称为 a 和 c 的比例中项.

已知：如图 1-16，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的高.

求证：$AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=DB\cdot AB$，$CD^2=AD\cdot DB$.

证明 在$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 中，

因为 $\angle ACB=\angle ADC$，$\angle CAB=\angle DAC$，

所以 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

所以 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AD}$，

即 $AC^2=AD\cdot AB$.

另外两个结论的证明请同学们自己完成.

问题与思考

在图 1-16 中，还有哪些成比例线段？

例 1 如图 1-17，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D，$AC=4$，$BC=3$，求 BD，AD，CD 的长.

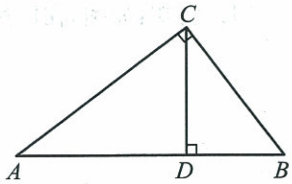


图 1-17

解 根据勾股定理，得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

根据直角三角形的射影定理，得

$$AC^2=AD\cdot AB,BC^2=BD\cdot AB,CD^2=AD\cdot BD.$$

所以 $AD=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{16}{5}$，

$$BD=\frac{BC^2}{AB}=\frac{9}{5},$$

$$CD=\sqrt{AD\cdot BD}=\sqrt{\frac{16}{5}\times\frac{9}{5}}=\frac{12}{5}.$$

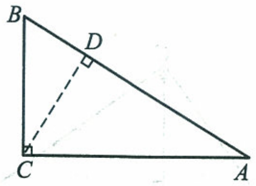


图 1-18

例 2　利用直角三角形的射影定理证明勾股定理.

已知：如图 1-18，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$.

求证：$AC^2+BC^2=AB^2$.

证明　作 $CD\perp AB$，垂足为 D.

根据直角三角形的射影定理，得

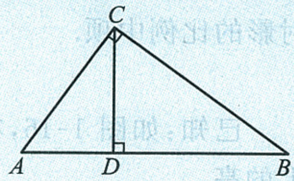
$$AC^2=AD\cdot AB, BC^2=BD\cdot AB.$$

所以　$AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB$

$=(AD+BD)\cdot AB=AB^2$.

练　习

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 Rt△ABC 斜边 AB 上的高.
   (1) 已知 $AD=9$ cm，$DB=4$ cm，求 CD 和 AC 的长；
   (2) 已知 $AB=25$ cm，$BC=15$ cm，求 DB 和 CD 的长.
2. 已知：如图，CD 是 Rt△ACB 斜边 AB 上的高. 求证：
   (1) $\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AD}{DB}$；
   (2) $AC\cdot CD=CB\cdot AD$.

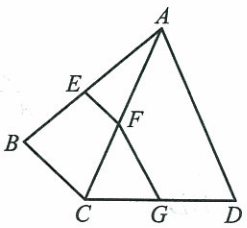


（第 2 题）

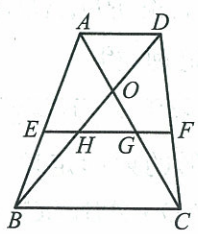
习 题 1—1

A　组

1. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$EF/\!/BC$，$FG/\!/AD$. 求证：$\frac{EF}{BC}+\frac{FG}{AD}=1$.



（第 1 题）



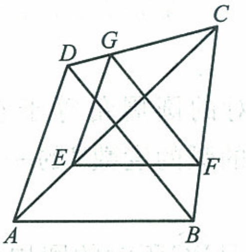
（第 2 题）

2. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC \parallel EF$，对角线 DB 与 AC 交于点 O，与 EF 分别交于点 H，G. 求证：$EH=GF$.

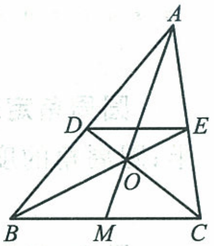
3. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任取一点 E，作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于点 F，作 $EG \parallel AD$ 交 CD 于点 G. 求证：$FG \parallel BD$.

4. 已知：如图，在△ABC 中，D 和 E 分别为 AB 和 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$，BE 与 CD 交于点 O，AO 的延长线与 BC 交于点 M.

求证：$BM=CM$.



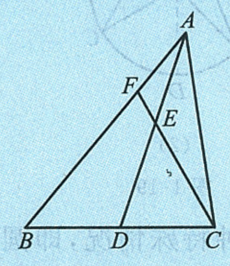
（第 3 题）



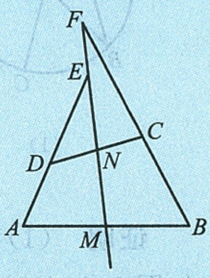
（第 4 题）

B　组

1. 已知：如图，在△ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，F 为 AB 上任意一点，CF 交 AD 于点 E. 求证：$AE \cdot BF=2DE \cdot AF$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，M，N 是四边形 $ABCD$ 中 AB 和 CD 的中点，AD 的延长线、BC 的延长线分别交直线 MN 于点 E，F. 求证：$\frac{ED}{FC}=\frac{EA}{FB}$.

§2 圆与直线

2.1 圆周角定理

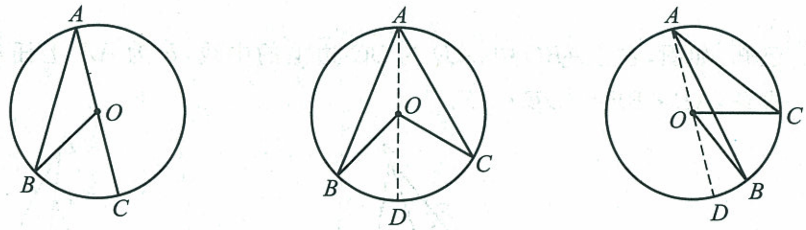
圆周角定理 一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半;圆周角的度数等于它所对的弧的度数❶的一半.

❶1°的圆心角所对的弧称为1°的弧,因此弧的度数等于它所对的圆心角的度数.

❷$\overset{\frown}{BC}{}^\circ$表示$\overset{\frown}{BC}$的度数.

已知:如图 1-19,$\angle BAC$ 是$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角,$\angle BOC$ 是$\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角.

求证:$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}{}^\circ$❷.



(1) (2) (3)

图 1-19

证明 (1)我们先考虑一种特殊情况,即圆周角的一边经过圆心(如图 1-19(1)).

因为 $OA=OB$,

所以 $\angle OAB=\angle OBA$.

又因为 $\angle BOC=\angle OAB+\angle OBA$,

所以 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}{}^\circ$.

(2) 当圆周角的边不经过圆心时,有两种情况(如图 1-19(2)(3)). 如果圆心在$\angle BAC$ 内部(如图 1-19(2)),那么过点 A 作直径 AD,AD 将$\angle BOC$ 分为$\angle BOD$ 和$\angle DOC$ 两个角,将$\angle BAC$ 分为$\angle BAD$ 和$\angle DAC$ 两个角.

回顾与反思

回顾圆周角定理的证明过程,体会"分类"与"转化"在几何证明中的作用.

根据(1),得

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\ \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$$

于是 $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC$

$$=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle DOC)$$

$$=\frac{1}{2}\angle BOC$$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}^{\circ}.$$

对于圆心在$\angle BAC$外部的情形(如图 1-19(3)),请同学们自己写出证明过程.

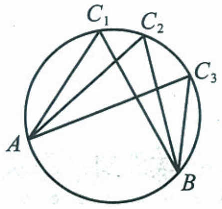


图 1-20

由圆周角定理,可以得到下面两个推论.

推论 1　同弧或等弧所对的圆周角相等;在同圆或等圆中,相等的圆周角所对的弧也相等(如图 1-20).

推论 2　半圆(或直径)所对的圆周角是直角;90°的圆周角所对的弧是半圆(如图 1-21).

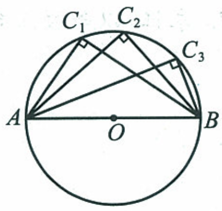


图 1-21

例 1　已知:如图 1-22,AB是$\odot O$的一条弦,$\angle ACB$的平分线交AB于点E,交$\odot O$于点D.

求证:$\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{DC}{CB}$.

分析　由于AC和CE在$\triangle ACE$中,DC和CB在$\triangle DCB$中,因此只需证明$\triangle ACE\backsim\triangle DCB$.这样,就把线段成比例问题"转化"为三角形相似问题.

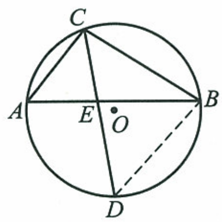


图 1-22

证明　连接BD.在$\triangle ACE$和$\triangle DCB$中,

因为　$\angle EAC$和$\angle BDC$是同弧所对的圆周角,

所以　$\angle EAC=\angle BDC$.

又因为　$\angle ACE=\angle DCB$,

所以　$\triangle ACE\backsim\triangle DCB$.

所以　$\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{DC}{CB}$.

例 2　已知:如图 1-23,在锐角三角形ABC中,$AB=c$,$AC=b$,$BC=a$,$\triangle ABC$的外接圆的半径为R.

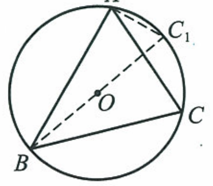


图 1-23

求证:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

证明　过点B作$\triangle ABC$的外接圆的直径BC_1,连接AC_1.

因为　$\triangle ABC_1$是直角三角形,

所以　$\sin C_1=\dfrac{AB}{BC_1}=\dfrac{c}{2R}$,

即　$\dfrac{c}{\sin C_1}=2R$.

因为 $\angle C$ 和 $\angle C_1$ 是同弧所对的圆周角，

所以 $\angle C=\angle C_1$.

所以 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin C_1}=2R$.

同理可证 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$.

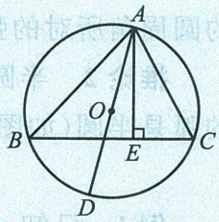
所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

练习

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AE\perp BC$，垂足为 E，AD 是 $\odot O$ 的直径.

   求证：$AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

2. 求证：以等腰三角形的一腰为直径的圆平分底边.



（第 1 题）

2.2 圆的切线的判定和性质

我们知道，直线与圆有相离、相切、相交三种位置关系. 如图 1-24，当直线与圆没有公共点时，称为直线和圆相离；当直线与圆有唯一公共点时，称为直线和圆相切，这样的直线称为圆的切线，唯一的公共点称为切点；当直线与圆有两个公共点时，称为直线和圆相交，这样的直线称为圆的割线.

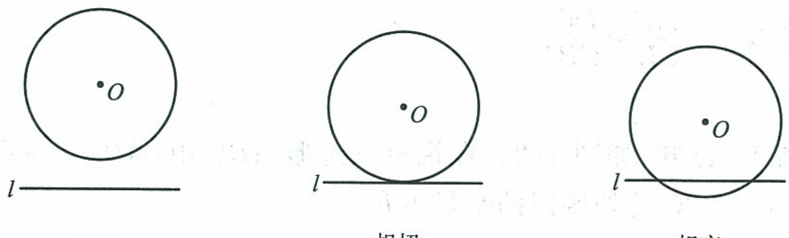


图 1-24

在图 1-25 中，设 $\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离 $OH=d$，可以发现：

(1) 当直线与 $\odot O$ 相离时，$d>r$；反之，当 $d>r$ 时，直线与 $\odot O$ 相离.

(2) 当直线与 $\odot O$ 相切时，$d=r$；反之，当 $d=r$ 时，直线与 $\odot O$

相切.

(3)当直线与⊙O相交时，$d<r$；反之，当$d<r$时，直线与⊙O相交.

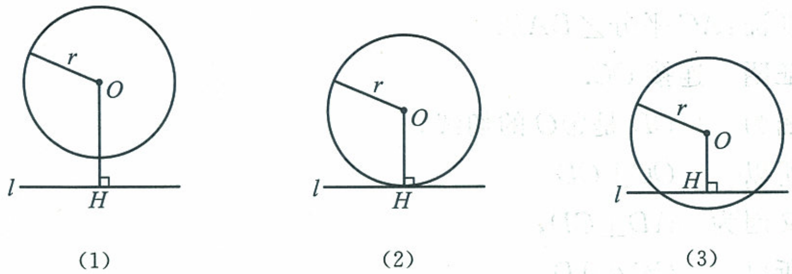


图 1-25

如图 1-26，在⊙O中，经过半径OA的外端点A，作直线$l\perp OA$，则圆心O到直线l的距离等于⊙O的半径r，因此直线与圆相切.

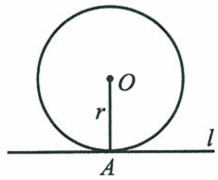


图 1-26

切线的判定定理 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

例 3 已知：如图 1-27，直线AB经过⊙O上的点C，并且$OA=OB$，$CA=CB$. 求证：直线AB是⊙O的切线.

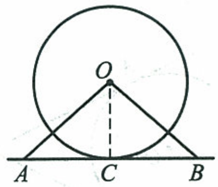


图 1-27

证明 连接OC.

因为 $OA=OB$，$CA=CB$，

所以 OC是等腰三角形OAB底边AB上的中线.

所以 $AB\perp OC$.

由于直线AB经过半径OC的外端C，并且垂直于半径OC，所以AB是⊙O的切线.

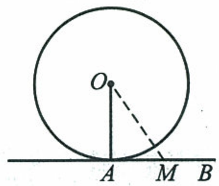


图 1-28

切线的性质定理 圆的切线垂直于经过切点的半径.

已知：如图 1-28，直线AB切⊙O于点A.

求证：$AB\perp OA$.

证明 假设AB与OA不垂直，过点O作$OM\perp AB$，垂足为M.

根据“垂线段最短”的性质，有$OM<OA$. 这就是说圆心到直线AB的距离小于半径，于是AB与⊙O相交. 这与AB是⊙O的切线矛盾. 因此，AB与OA垂直.

这里的证明用的是反证法. 反证法是一种重要的证明方法.

由于过已知点只有一条直线与已知直线垂直，所以经过圆心垂直于切线的直线一定过切点；反过来，过切点垂直于切线的直线也一定经过圆心. 由此得到

推论 1 经过圆心且垂直于切线的直线经过切点.

推论 2　经过切点且垂直于切线的直线经过圆心.

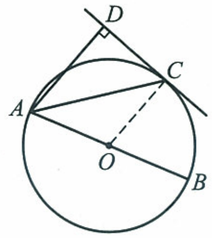


图 1-29

例 4　已知：如图 1-29，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，过点 A 的直线与过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D.

求证：AC 平分$\angle DAB$.

证明　连接 OC.

因为　　CD 是⊙O 的切线，

所以　　$OC\perp CD$.

又因为　$AD\perp CD$，

所以　　$OC/\!/AD$.

所以　　$\angle DAC=\angle ACO$.

又因为　$\angle ACO=\angle CAO$，

所以　　$\angle DAC=\angle CAO$，

即　　　AC 平分$\angle DAB$.

思考交流

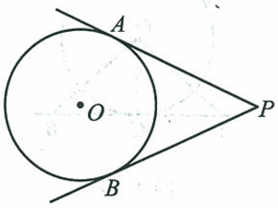


图 1-30

如图 1-30，过⊙O 外一点 P 作⊙O 的两条切线，切点分别为 A 和 B，你认为线段 PA 和 PB 有何大小关系？请证明你的结论.

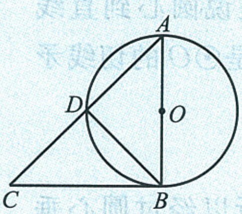
过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段的长，称为这点到圆的切线长.

切线长定理　过圆外一点作圆的两条切线，这两条切线长相等.

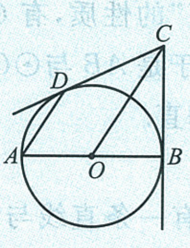
请同学们自己写出证明过程.

练　习

1. 求证：经过直径两端点的切线互相平行.
2. 如图，在⊙O 中，AB 是直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD=DC$，求$\angle ABD$ 的度数.



（第 2 题）



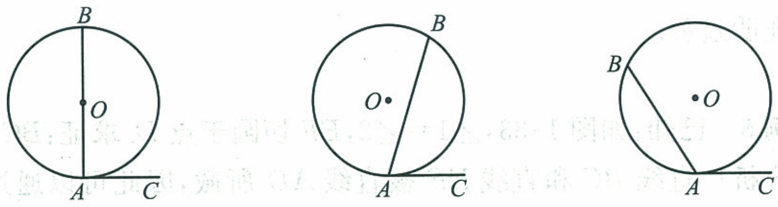
（第 3 题）

3. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，AD 是⊙O 的弦，BC 切⊙O 于点 B，$OC/\!/AD$. 求证：CD 是⊙O 的切线.

2.3 弦切角定理

问题提出

如图 1-31，$\angle BAC$ 的顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切，像这样的角称为弦切角.



(1)　(2)　(3)

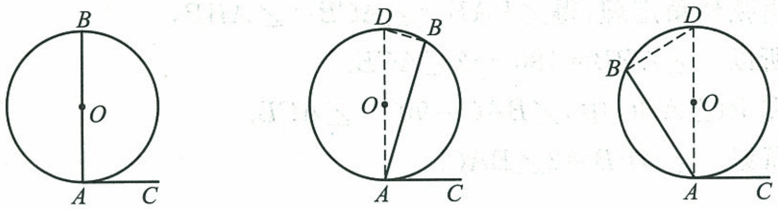
图 1-31

那么，怎样求弦切角的度数呢？

弦切角定理　弦切角等于它所夹弧所对的圆周角；弦切角的度数等于它所夹弧的度数的一半.

已知：如图 1-32，$\angle BAC$ 是弦切角.

求证：$\angle BAC$ 等于它所夹弧所对的圆周角，等于它所夹弧的度数的一半.



(1)　(2)　(3)

图 1-32

证明　(1) 首先，我们考虑一种特殊情况(图 1-32(1))，即圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一边上.

因为　AB 是 $\odot O$ 的直径，

所以　$\overset{\frown}{BA}^{\circ}=180^{\circ}$.

又因为　$AB \perp AC$，

所以　$\angle BAC=90^{\circ}$.

因此 $\angle BAC$ 等于它所夹弧所对的圆周角，等于它所夹弧的度数的一半.

(2) 当圆心 O 不在 $\angle BAC$ 的边上时，有两种情况(如图 1-32(2)(3)). 如果圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部(如图 1-32(2))，那么过点 A 作圆

的直径 AD，连接 BD.

因为 $AD\perp AC$，

所以 $\angle BAC+\angle DAB=90^\circ$.

又因为 $\angle BDA+\angle DAB=90^\circ$，

所以 $\angle BAC=\angle BDA$.

因此 $\angle BAC$ 等于它所夹弧所对的圆周角，等于它所夹弧的度数的一半.

对于圆心 O 在 $\angle BAC$ 内部的情形(图 1-32(3))，请同学们自己写出证明过程.

回顾与反思

在讨论数学问题时应善于抓住反映本质的特殊情况. 回顾弦切角定理的证明过程，体会这一思想.

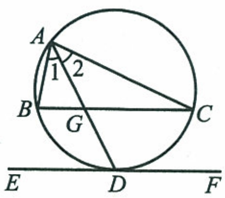


图 1-33

例 5 已知：如图 1-33，$\angle 1=\angle 2$，EF 切圆于点 D. 求证：$BC/\!/EF$.

分析 直线 BC 和直线 EF 被直线 AD 所截，因此可以通过同位角相等、内错角相等或同旁内角互补来证明 $BC/\!/EF$.

证明 由弦切角定理，得 $\angle ADF=\angle ABC+\angle 2$.

又因为 $\angle AGC=\angle ABC+\angle 1$，$\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle ADF=\angle AGC$. 因此 $BC/\!/EF$.

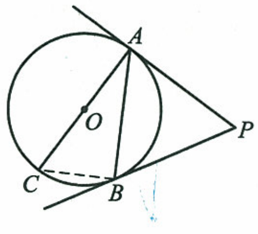


图 1-34

例 6 已知：如图 1-34，PA，PB 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 和 B，AC 是 $\odot O$ 的直径. 求证：$\angle APB=2\angle BAC$.

证明 连接 BC.

在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=180^\circ-\angle PAB-\angle ABP$.

由弦切角定理，得 $\angle PAB=\angle ACB=\angle ABP$，

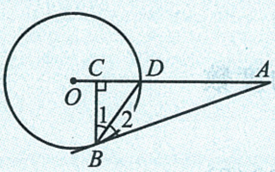
所以 $\angle APB=180^\circ-2\angle ACB$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ-\angle ACB$.

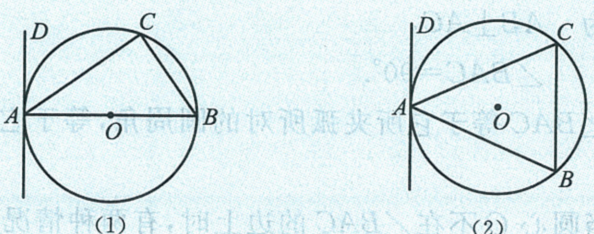
所以 $\angle APB=2\angle BAC$.

练 习

1. 已知：如图，AB 切 $\odot O$ 于点 B，$BC\perp AO$，垂足为 C. 求证：$\angle 1=\angle 2$.
2. 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle CAD=\angle B$.
   (1) AB 经过圆心 O(图(1))，求证：AD 是 $\odot O$ 的切线；
   (2) AB 不经过圆心 O(图(2))，求证：AD 是 $\odot O$ 的切线.



(第 1 题)



(第 2 题)

2.4 切割线定理

切割线定理 过圆外一点作圆的一条切线和一条割线，切线长是割线上从这点到两个交点的线段长的比例中项.

已知：如图 1-35，PT 是$\odot O$ 的切线，T 是切点，PAB 是$\odot O$ 的割线.

求证：$PT^2=PA\cdot PB$.

证明 连接 TA，TB. 由于$\angle PTA$ 是弦切角，因此根据弦切角定理，得$\angle PTA=\angle PBT$.

在$\triangle PTA$ 与$\triangle PBT$ 中，

因为 $\angle PTA=\angle PBT$，$\angle P$ 为公共角，

因此 $\triangle PTA\backsim\triangle PBT$.

所以 $\dfrac{PT}{PA}=\dfrac{PB}{PT}$，即 $PT^2=PA\cdot PB$.

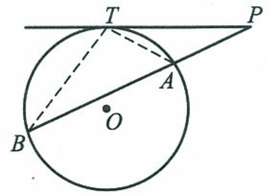


图 1-35

如图 1-36，过圆外一点 P 作圆的两条割线 PAB 和 PCD，你认为 PA，PB，PC，PD 这四条线段的长有什么关系？请证明你的结论.

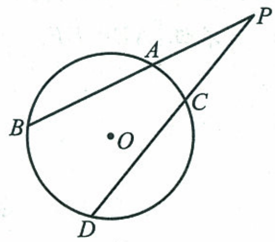


图 1-36

推论 过圆外一点作圆的两条割线，在一条割线上从这点到两个交点的线段长的积，等于另一条割线上对应线段长的积.

如图 1-36，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

例 7 如图 1-37，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，P 是 BA 延长线上的任意一点，PC 切$\odot O_1$ 于点 C，PD 切$\odot O_2$ 于点 D.

求证：$PC=PD$.

证明 在$\odot O_1$ 中，由切割线定理，得 $PC^2=PA\cdot PB$.

在$\odot O_2$ 中，由切割线定理，得 $PD^2=PA\cdot PB$.

因此 $PC=PD$.

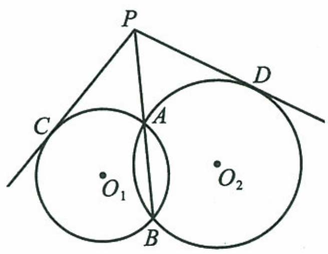


图 1-37

思考交流

已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，PC 切$\odot O_1$ 于点 C，PD 切$\odot O_2$ 于点 D，且 $PC=PD$，画图并讨论点 P 是否一定在公共弦 AB 所在的直线上.

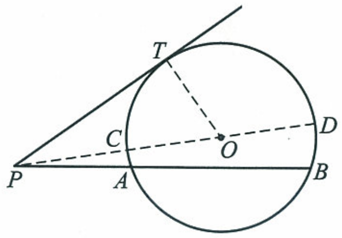


图 1-38

定理 给定⊙O外一点P，若割线PAB交⊙O于A，B两点，点T在⊙O上，且$PT^2=PA\cdot PB$，则PT是⊙O的切线(如图 1-38).

证明 连接PO并延长交⊙O于C，D两点，连接OT.

因为 $PO^2-OT^2=(PO-OT)\cdot(PO+OT)$，

而 $PO-OT=PC$，$PO+OT=PD$，

所以 $PO^2-OT^2=PC\cdot PD$.

由切割线定理的推论，得 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

所以 $PO^2-OT^2=PA\cdot PB$.

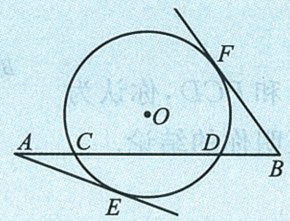
因为 $PT^2=PA\cdot PB$，

所以 $PT^2=PO^2-OT^2$.

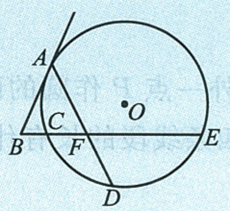
所以 $\angle PTO$是直角，PT是⊙O的切线.

练 习

1. 已知：如图，线段AB和⊙O相交于C，D两点，且$AC=BD$，AE，BF分别切⊙O于点E，F.
求证：$AE=BF$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，弦AD和CE相交于⊙O内一点F，延长EC与过点A的切线相交于点B，已知$AB=BF=FD$，$BC=1$，$CE=8$，求AB及AF的长.

2.5 相交弦定理

相交弦定理 圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.

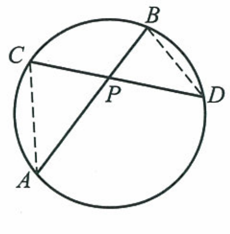


图 1-39

已知：如图 1-39，圆的两条弦AB和CD相交于圆内一点P.

求证：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

证明 连接BD，CA.

在△PCA和△PBD中，

因为 $\angle PCA$和$\angle PBD$是同弧所对的圆周角，

$\angle PAC$和$\angle PDB$是同弧所对的圆周角，

所以 $\angle PCA=\angle PBD$，$\angle PAC=\angle PDB$.

所以　$\triangle PCA \backsim \triangle PBD$.

因此　$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PD}{PB}$,

即　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

例 8　圆内有两条弦相交，其中一条弦被交点分成 12 cm 和 18 cm 两段，另一条弦被分成的两段之比为 3∶8，求另一条弦的长.

解　设另一条弦被分成的两段分别为 $3k$ cm 和 $8k$ cm.

由相交弦定理，得 $3k \cdot 8k = 12 \times 18$.

解得　$k=3$，或 $k=-3$（舍去）.

$3k=9$，$8k=24$，$9+24=33$.

所以另一条弦长为 33 cm.

例 9　已知：如图 1-40，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，AC 切 $\odot O_2$ 于点 A，交 $\odot O_1$ 于点 C，直线 EF 过点 B 交 $\odot O_1$ 于点 E，交 $\odot O_2$ 于点 F，直线 EF 交线段 AC 于点 D. 求证：$AD \cdot DE = CD \cdot DF$.

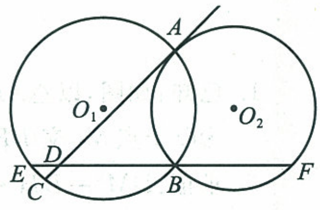


图 1-40

证明　因为 AD 是 $\odot O_2$ 的切线，DBF 是 $\odot O_2$ 的割线，所以

$$AD^2 = DB \cdot DF. \quad ①$$

又因为 AC 和 EB 是 $\odot O_1$ 的两条相交弦，所以

$$AD \cdot CD = DE \cdot DB. \quad ②$$

①÷②，得　$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{DF}{DE}$,

即　$AD \cdot DE = CD \cdot DF$.

思考交流

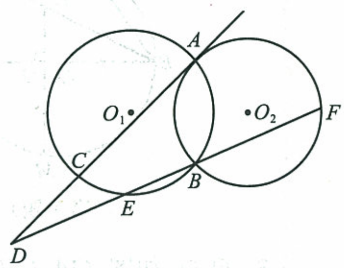
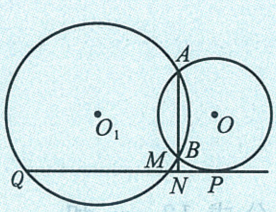


图 1-41

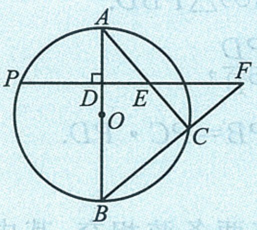
如图 1-41，例 9 中保持 AC 不变，当直线 EF 绕点 B 旋转交线段 AC 的延长线于点 D 时，$AD \cdot DE = CD \cdot DF$ 是否仍然成立？请证明你的结论.

练　习

1. 已知：如图，$\odot O$ 和 $\odot O_1$ 相交于 A，B 两点，PQ 切 $\odot O$ 于点 P，交 $\odot O_1$ 于点 Q 和 M，交 AB 的延长线于点 N.
   求证：$PN^2 = NM \cdot NQ$.
2. 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，P 和 C 为 AB 两侧圆上的两点，过点 P 作 $PD \perp AB$，垂足为 D，交 AC 于点 E，交 BC 的延长线于点 F.
   求证：$DP^2 = DE \cdot DF$.



（第 1 题）



（第 2 题）

习 题 1—2

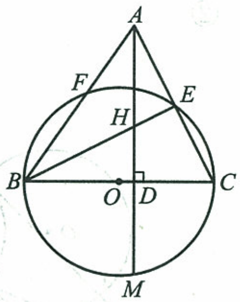
A 组

1. 已知：如图，以$\triangle ABC$的BC边为直径作$\odot O$，分别交AB，AC于点F，E，$AD\perp BC$，垂足为D，交$\odot O$于点M，交BE于点H.

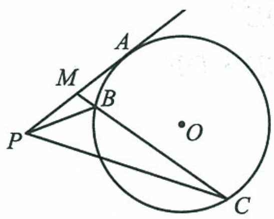
   求证：$DM^2=DH\cdot DA$.

2. 已知：如图，PA切$\odot O$于点A，M为PA的中点，直线MBC交$\odot O$于点B和C.

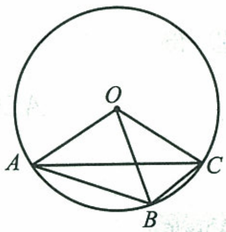
   求证：$\angle MPB=\angle MCP$.



（第 1 题）



（第 2 题）



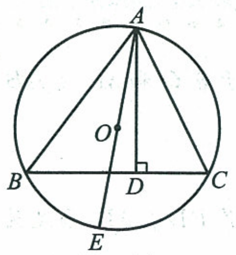
（第 3 题）

3. 已知：如图，OA，OB，OC都是$\odot O$的半径，$\angle AOB=2\angle BOC$.

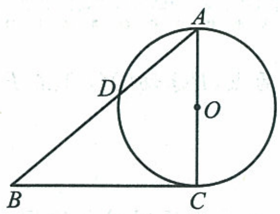
   求证：$\angle ACB=2\angle BAC$.

4. 已知：如图，AD是$\triangle ABC$的高，AE是$\triangle ABC$外接圆的直径.

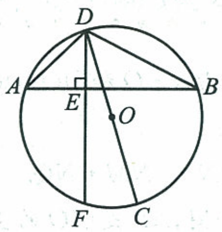
   求证：$AB\cdot AC=AE\cdot AD$.



（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

5. 如图，已知 Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边 AC，BC 的长分别为 3 cm，4 cm，以 AC 为直径作圆与斜边 AB 交于点 D. 求 BD 的长.

6. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的弦，D 是$\odot O$ 上的一点，过点 D 作直径 DC，$DE\perp AB$，垂足为 E，交$\odot O$ 于点 F. 求证：$\angle ADE=\angle BDC$.

B 组

1. 已知：如图，$\odot O$ 的弦 AB 和 CD 相交于点 E，过点 E 作 BC 的平行线交 AD 的延长线于点 P，过点 P 作$\odot O$ 的切线 PF，F 为切点.

   求证：$PE=PF$.

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，以 AB 为直径的$\odot O$ 交 AC 于点 D，过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为 E，连接 EA 交$\odot O$ 于点 F.

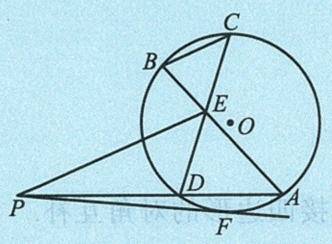
   求证：(1) DE 是$\odot O$ 的切线；

   (2) $BE\cdot CE=EF\cdot EA$.

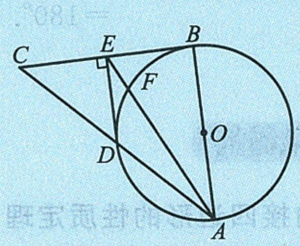
3. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$AB=AC$，BC 交$\odot O$ 于点 D，$DE\perp AC$，垂足为 E，连接 BE 交$\odot O$ 于点 F.

   求证：(1) DE 是$\odot O$ 的切线；

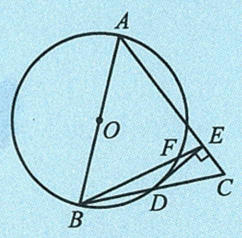
   (2) $AE\cdot EC=EF\cdot BE$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

§3　圆与四边形

3.1　圆内接四边形

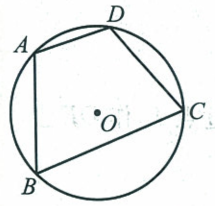


图 1-42

如图 1-42，四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在圆上，像这样的四边形称为圆内接四边形.

下面我们来研究圆内接四边形的性质.

由圆周角定理可知：

$$\begin{aligned}\angle DAB+\angle DCB &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}^{\circ}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}^{\circ}\\ &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}^{\circ}+\overset{\frown}{BAD}^{\circ})\\ &= \frac{1}{2}\times 360^{\circ}\\ &= 180^{\circ}.\end{aligned}$$

抽象概括

圆内接四边形的性质定理　圆内接四边形的对角互补.

进而得到下面的推论：

推论　圆内接四边形的任何一个外角都等于它的内对角.

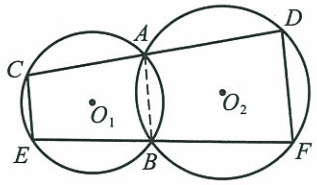


图 1-43

例 1　已知：如图 1-43，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A,B 两点，经过点 A 的直线与 $\odot O_1$ 交于点 C，与 $\odot O_2$ 交于点 D，经过点 B 的直线与 $\odot O_1$ 交于点 E，与 $\odot O_2$ 交于点 F. 求证：$CE /\!/ DF$.

证明　连接 AB.

因为　A,C,E,B 四点都在 $\odot O_1$ 上，

所以　$\angle E+\angle CAB=180^{\circ}$.

因为　A,B,F,D 四点都在 $\odot O_2$ 上，

所以　$\angle CAB=\angle F$.

所以　$\angle E+\angle F=180^{\circ}$.

因此　$CE /\!/ DF$.

问题提出

如果四边形 $ABCD$ 的对角互补，那么 A,B,C,D 四点是否共圆[1]呢？

[1] 四点共圆即四个点在同一圆上.

分析理解

在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle D=180°$.

由于 $\angle B+\angle D=180°$，所以 $\angle B<180°$.

因此 A,B,C 三点不在同一直线上.

过 A,B,C 三点作 $\odot O$.

假设点 D 不在 $\odot O$ 上，则有两种可能：点 D 在 $\odot O$ 内（如图 1-44），或点 D 在 $\odot O$ 外（如图 1-45）.

这里运用了反证法的思想.

(1) 点 D 在 $\odot O$ 内（如图 1-44）.

作对角线 BD 并延长，交 $\odot O$ 于点 D_1，连接 AD_1，CD_1. 此时有

$$\angle ABC+\angle ADC>\angle ABC+\angle AD_1C.$$

因为　A,B,C,D_1 四点共圆，

所以　$\angle ABC+\angle AD_1C=180°$.

所以　$\angle ABC+\angle ADC>\angle ABC+\angle AD_1C=180°$.

这与 $\angle ABC+\angle ADC=180°$ 矛盾，所以点 D 不在 $\odot O$ 内.

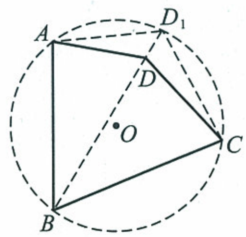


图 1-44

(2) 点 D 在 $\odot O$ 外（如图 1-45）.

作对角线 BD，交 $\odot O$ 于点 D_1，连接 AD_1，CD_1. 此时有

$$\angle ABC+\angle ADC<\angle ABC+\angle AD_1C=180°.$$

这与 $\angle ABC+\angle ADC=180°$ 矛盾，所以点 D 不在 $\odot O$ 外.

因此，假设“点 D 不在 $\odot O$ 上”不成立，点 D 必在 $\odot O$ 上.

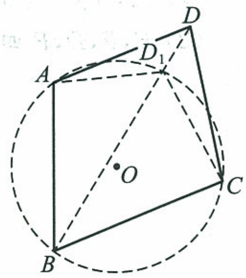


图 1-45

抽象概括

根据上面的分析和推理，可以得到一个四点共圆的判定定理.

定理　如果一个四边形的内对角互补，那么这个四边形四个顶点共圆.

类似地，我们可以得到：

推论　如果四边形的一个外角等于其内对角，那么这个四边形的四个顶点共圆.

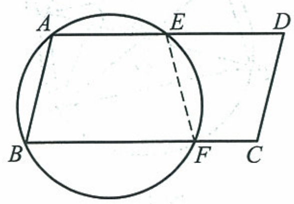


图 1-46

例 2　已知：如图 1-46，在 $\square ABCD$ 中，过点 A 和 B 的圆与 AD，

BC 分别交于点 E,F. 求证：C,D,E,F 四点共圆.

证明　连接 EF.

因为　A,B,F,E 四点共圆，

所以　$\angle DEF=\angle B$，$\angle EFC=\angle A$.

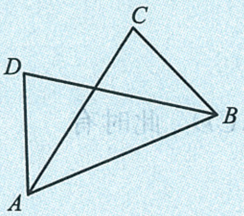
又因为　$\angle B+\angle C=180°$，$\angle A+\angle D=180°$，

所以　$\angle DEF+\angle C=180°$，$\angle EFC+\angle D=180°$.

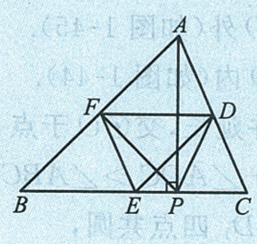
所以　C,D,E,F 四点共圆.

练 习

1. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数之比为 3：5：6，求 $\angle D$ 的度数.
2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，$\angle C=\angle D$.
   求证：A,B,C,D 四点共圆.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，AP 是高. 求证：
   (1) $\angle DPF=\angle BAC$；
   (2) E,F,D,P 四点共圆.

*3.2　托勒密定理

托勒密定理　圆内接四边形的两对边乘积之和等于两条对角线的乘积.

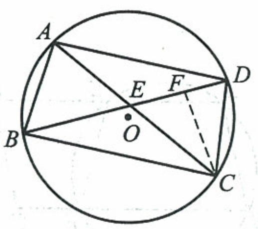


图 1-47

已知：如图 1-47，$ABCD$ 是圆内接四边形，AC，BD 为两条对角线.

求证：$AB\cdot DC+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

分析　在 BD 上找一点 F，使得 $\triangle ABC\backsim\triangle DFC$，于是 $AB\cdot DC=AC\cdot DF$. 而 $AC\cdot BD=AC\cdot(BF+DF)=AC\cdot BF+AC\cdot DF$，因此只需证明 $AD\cdot BC=AC\cdot BF$.

证明　在 BD 上找一点 F，使得 $\angle FCD=\angle BCA$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DFC$中，

因为　$\angle BAC$和$\angle FDC$是同弧所对的圆周角，

所以　$\angle BAC=\angle FDC$.

又因为　$\angle BCA=\angle FCD$，

所以　$\triangle ABC \backsim \triangle DFC$.

于是　$\dfrac{AB}{DF}=\dfrac{AC}{DC}$，

即　$AB\cdot DC=AC\cdot DF$.　①

在$\triangle ACD$和$\triangle BCF$中，

因为　$\angle DAC$和$\angle FBC$是同弧所对的圆周角，

所以　$\angle DAC=\angle FBC$.

又因为　$\angle BCA=\angle FCD$，

所以　$\angle ACD=\angle BCF$.

所以　$\triangle ACD \backsim \triangle BCF$.

于是　$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BF}$，

即　$AD\cdot BC=AC\cdot BF$.　②

①+②，得

$AB\cdot DC+AD\cdot BC=AC\cdot(DF+BF)=AC\cdot BD$.

例 3　已知：如图 1-48，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，P是$\overset{\frown}{BC}$上的一点. 求证：$\dfrac{PA}{PB+PC}=\dfrac{AB}{BC}$.

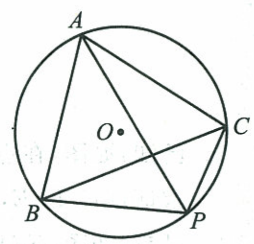


图 1-48

证明　由托勒密定理，得

$PA\cdot BC=AC\cdot PB+AB\cdot PC$.

又因为　$AB=AC$，

所以　$PA\cdot BC=AB\cdot(PB+PC)$.

所以　$\dfrac{PA}{PB+PC}=\dfrac{AB}{BC}$.

例 4　已知：如图 1-49，$\odot O$是等边三角形ABC的外接圆，P是$\overset{\frown}{AB}$上的一点. 求证：$PC=PA+PB$.

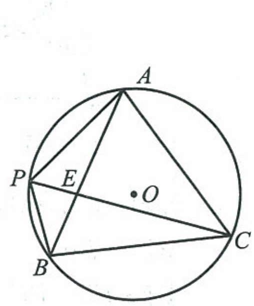


图 1-49

证明　由托勒密定理，得

$AB\cdot PC=BC\cdot PA+AC\cdot PB$.

又因为　$AB=BC=AC$，

所以　$PC=PA+PB$.

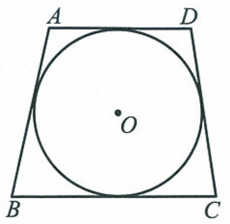


图 1-50

思考交流

如图 1-50，四边形 $ABCD$ 的各边都与⊙O 相切，像这样的四边形称为圆的外切四边形．

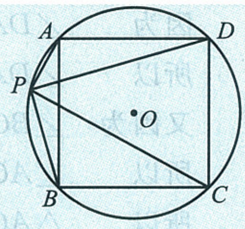
那么，圆外切四边形的四条边之间有怎样的关系呢？

练　习

1．已知：如图，⊙O 是正方形 $ABCD$ 的外接圆，P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点．

求证：$\dfrac{PA+PC}{PB+PD}=\dfrac{PD}{PC}$．

2．圆外切四边形的周长为 48 cm，相邻的三条边的比为 5∶4∶7，求四边形各边的长．



（第 1 题）

习　题　1—3

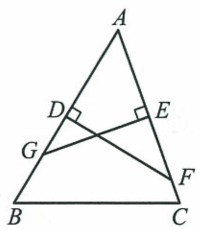
A　组

1．已知：如图，在△ABC 中，$AD=DB$，$DF\perp AB$ 交 AC 于点 F，$AE=EC$，$EG\perp AC$ 交 AB 于点 G．

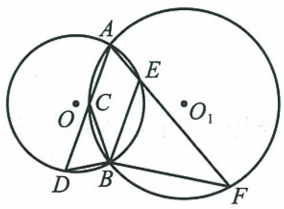
求证：(1) D，E，F，G 四点共圆；　(2) G，B，C，F 四点共圆．

2．已知：如图，⊙O 与⊙O_1 相交于 A，B 两点，直线 ACD 分别交⊙O_1，⊙O 于点 C，D，直线 AEF 交⊙O 于点 E，交⊙O_1 于点 F．

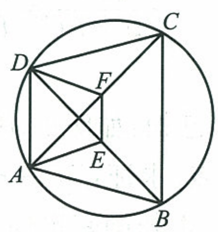
求证：△CDB∽△FEB．



（第 1 题）



（第 2 题）



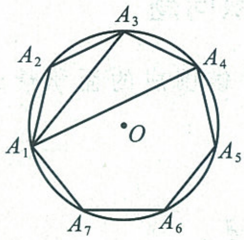
（第 3 题）

3．已知：如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，AB 与 CD 不平行，$AE\parallel CD$ 交 BD 于点 E，$DF\parallel AB$ 交 AC 于点 F．

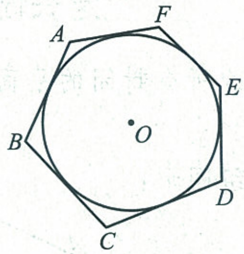
求证：$EF\parallel BC$．

4. 已知：如图，正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 内接于⊙O.

求证：$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

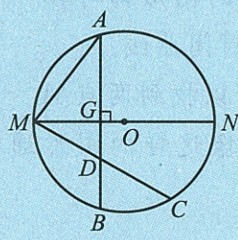
5. 已知：如图，$ABCDEF$ 是⊙O 的外切六边形.

求证：$AB+CD+EF=BC+DE+FA$.

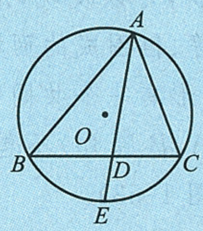
B　组

1. 已知：如图，AB 和 MN 是⊙O 内互相垂直相交于点 G 的两条弦，弦 MC 交 AB 于点 D，且 $AM^2=MD\cdot MC$.

求证：MN 是⊙O 的直径.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，△ABC 内接于⊙O，AE 平分∠BAC，交 BC 于点 D，交⊙O 于点 E.

求证：$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$.

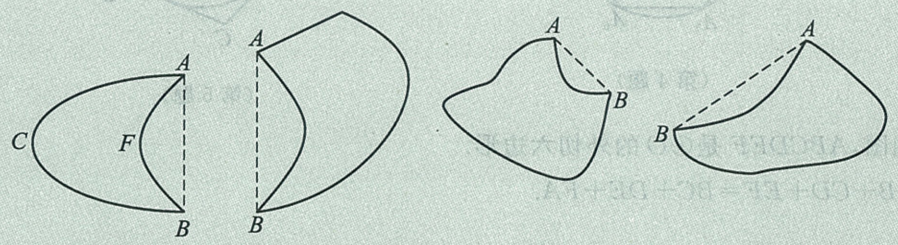
阅读材料

定长闭曲线最大面积问题

在周长相同的所有封闭的平面曲线中，什么时候围成的面积最大呢？

1. 凸性

观察下面一组图形：



(1) (2) (3) (4)

图 1-51

在图 1-51(1)中，以 AB 为对称轴作曲线 AFB 的对称图形 AF_1B(图 1-52)，封闭曲线 AF_1BC 与 $AFBC$ 周长相等，但围成的面积比 $AFBC$ 大.

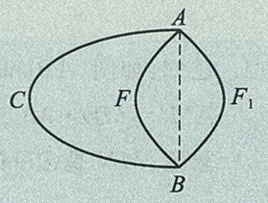
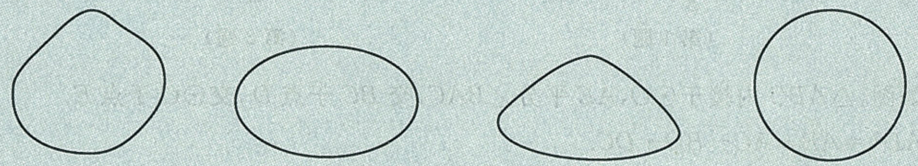


图 1-52

经过上面的分析，可以发现，形如图 1-51 中的图形都可以找到与它们周长相等、但围成的面积比它们大的封闭曲线.

图 1-51 中的图形有一个共同特点：图形中可以找到两点 A 和 B，线段 AB(点 A，B 除外)不包含在图形中，像这样的图形通常称为凹图形；否则，称之为凸图形(图 1-53).



(1) (2) (3) (4)

图 1-53

从图 1-53 中可以看出，对于凸图形来说，图形中任意两点组成的线段都包含在这个图形中.

因此，我们不难得出：

结论 1 在周长相同的所有封闭的平面曲线中，面积最大的图形一定是凸图形.

2. 面积相等

图 1-54(1)是由闭曲线 l 围成的凸图形 F，在 l 上取两点 A，B，它们把封闭曲线分成长度相等的两部分. 连接 AB，线段 AB 把凸图形分为两部分，分别记为 F_1 和 F_2.

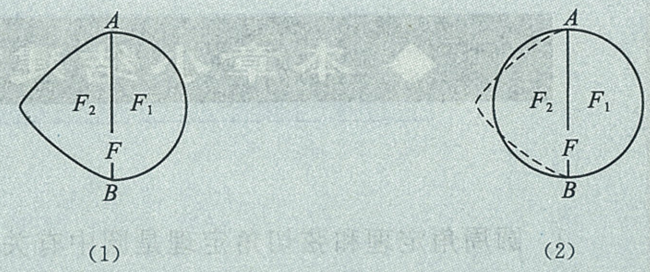


图 1-54

设 F_1 的面积大于 F_2 的面积，把图形 F_1 沿 AB 翻转 $180°$，得到图 1-54(2)，显然图 1-54(2)(实线部分)的周长与图 1-54(1)周长相同，但面积比它大.

因此，我们可以得到：

结论 2 如果给定长度的封闭曲线 l 围成的图形 F 面积最大，那么平分闭曲线 l 的直线一定平分 F 的面积.

3. 圆是面积最大的图形

设封闭曲线 l 围成凸图形，任取一条平分 l 的直线 AB，我们仅考虑 l 一侧的图形(如图 1-55). 在曲线上任取一点 C，图形分为三部分，分别记为 F_1，F_2，F_3，其中 F_3 是由线段 AC，BC 和 AB 组成的三角形. 下面我们考虑，在保持图形 F_1 和 F_2 不变的情况下(曲线 ACB 的长度也就不变)，通过改变图形 F_3 的面积，使曲线 $ACBA$ 围成的面积最大.

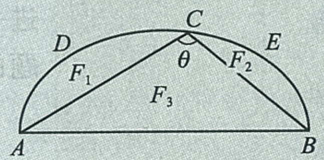


图 1-55

我们知道，$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\theta$.

在保持 AC 和 BC 长度不变的情况下，$\theta=90°$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 的值最大. 也就是说，对于曲线 $ADEB$ 上每一点 C，如果 $\angle ACB$ 不是直角，那么将其调整为直角后，面积就变大了. 于是得到：如果曲线 l 围成的面积最大，那么对于曲线 AB 上每一点 C，$\angle ACB$ 都应该是直角. 换言之，曲线 AB 为半圆时，面积最大.

定理 在周长相等的封闭曲线中，圆的面积最大.

想一想，在面积一定的凸图形中，圆的周长最小吗？

◆ 本章小结建议

1. 圆周角定理和弦切角定理是圆中有关角的重要定理，而切割线定理及其推论、相交弦定理则是圆中有关比例线段的重要定理. 请同学们对这些定理进行分类小结，并分析它们之间的内在联系.

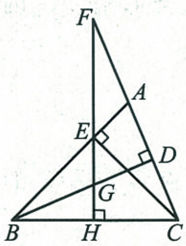
2. 类比、转化、分类等是解决数学问题时常用的方法. 请同学们总结本章证明几何问题的一些基本方法，体会它们的作用.

3. 通过本章的学习，同学们学习了一些几何定理，提高了几何论证能力，建议同学们再通过 1～2 个实例(可以是本章内的实例)，进一步深入体会“探索—发现—猜想—证明”的过程，感受数学问题的研究方法.

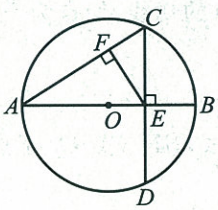
复习题一

A　组

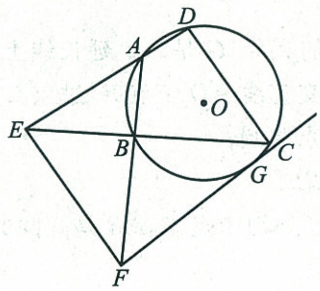
1. 已知：如图，BD 和 CE 是$\triangle ABC$ 的高，$EH\perp BC$，垂足为 H，交 CA 的延长线于点 F，交 BD 于点 G.
   求证：$EH^2=HG\cdot FH$.
2. 已知：如图，$\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 垂直，垂足为 E，$EF\perp AC$，垂足为 F.
   求证：$CF\cdot CA=AE\cdot EB$.
3. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，DA 的延长线与 CB 的延长线交于点 E，AB 的延长线与 EF 交于点 F，$EF/\!/CD$，FG 切$\odot O$ 于点 G.
   求证：$EF=FG$.
4. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，弦 $AG\perp BC$，$BE\perp AC$，垂足分别为 D，E.
   求证：$DH=DG$.



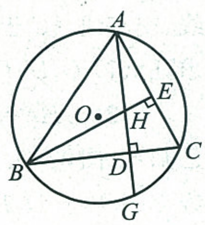
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

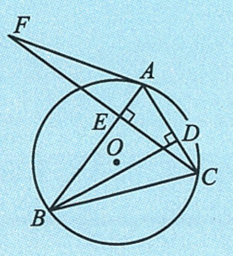


（第 4 题）

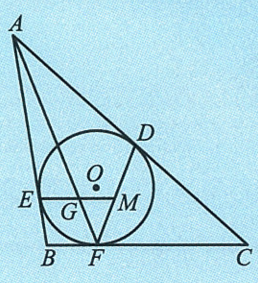
B　组

1. 已知：如图，直线 AF 切$\triangle ABC$ 外接圆 O 于点 A，交$\triangle ABC$ 的高 CE 的延长线于点 F，$BD\perp AC$.
   求证：$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{FE}{EC}$.
2. 已知：如图，$\odot O$ 内切于$\triangle ABC$，D，E，F 为切点，经过点 E 作 BC 的平行线交 AF 于点 G，交 FD 于点 M.
   求证：$EG=GM$.
3. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle D=60°$，$AE\perp BC$，$CF\perp AB$，垂足分别为 E，F.
   求证：$AC=2EF$.

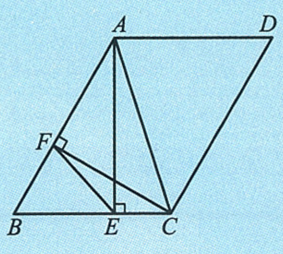
*4. 已知：如图，在锐角三角形 ABC 中，$AD\perp BC$，$CE\perp AB$，垂足分别为 D，E，$AF=AD$，$FG/\!/BC$.
   求证：$FG=CE$.



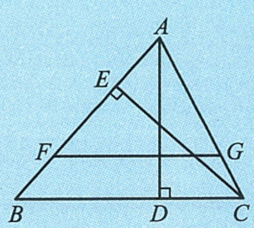
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）



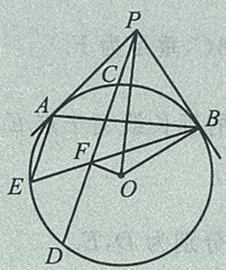
（第 4 题）

C 组

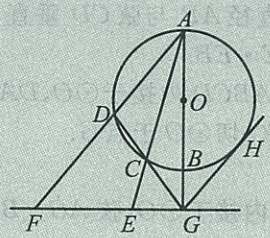
1. 已知：如图，已知 PA 和 PB 是⊙O 的两条切线，PCD 是⊙O 的割线，弦 $AE\parallel PD$，EB 交 CD 于点 F.

求证：(1) P,F,O,B 四点共圆；

(2) $CF=FD$.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，G 是 AB 延长线上的一点，GCD 是⊙O 的割线，过点 G 作 AG 的垂线，交直线 AC 于点 E，交直线 AD 于点 F，过点 G 作⊙O 的切线，切点为 H.

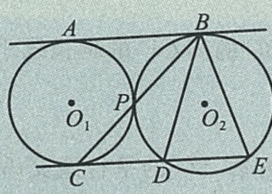
求证：(1) C,D,F,E 四点共圆；

(2) $GH^2=GE\cdot GF$.

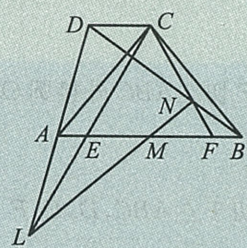
3. 已知：如图，⊙O_1 与⊙O_2 外切于点 P，AB 是两圆的公切线，BP 交⊙O_1 于点 C，过点 C 作⊙O_1 的切线交⊙O_2 于 D,E 两点.

求证：(1) $AB\parallel CE$；

(2) $AB=BD=BE$.



（第3题）



（第4题）

4. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中，$DC\parallel AB$，$AC=CB$，M 是 AB 的中点，L 是 DA 延长线上的一点，CL 交 AB 于点 E，直线 LM 交 BD 于点 N，直线 CN 交 AB 于点 F.

求证：$\angle ACL=\angle BCF$.

第二章　圆锥曲线

观察贝壳的剖面，可以看到它有美丽的曲线．用一个平面去截一个曲面，可以得到各种各样的曲线．如果用一个平面去截圆柱面、圆锥面，所得的曲线是什么形状？它们有什么性质呢？

本章将用平面几何、立体几何的知识去研究圆锥曲线的几何性质．这种方法是数学研究的一种重要方法．

§1　截面欣赏

我们常常要考虑用平面截立体图形，得到一系列截面图形．在工业生产、科学研究及日常生活中，研究截面图形是非常重要的问题．

请看下面的实例：

(1) 小区住房户型图

图 2-1

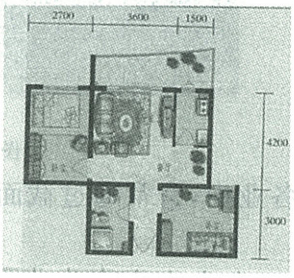


图 2-2

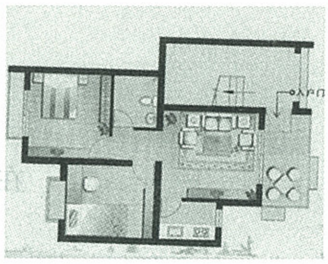


图 2-3

(2) 机翼剖面图

图 2-4

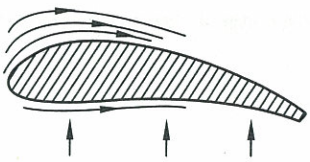


图 2-5

(3) CT 扫描

医学上的 CT 是一种断层扫描技术，它所呈现的大脑图像，也就是用平面截大脑的截面图(如图 2-6).

(4) 植物截面图

图 2-7 为花的剖面图，通过它可以了解花的结构.

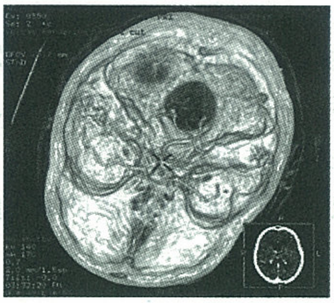


图 2-6

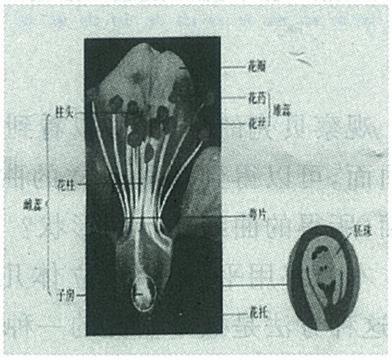


图 2-7

(5) 水库生态截面图

图 2-8 是水库的横断面图，它反映了横断面内各位置水生动植物的分布情况.

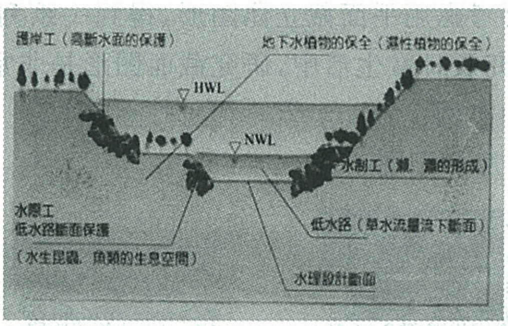


图 2-8

在各行各业中，常常通过截面图来反映研究的对象.

习 题 2—1

试举出生活中所见平面截曲面的例子，可以收集一下这方面的图片.

§2　直线与球、平面与球的位置关系

2.1　直线与球的位置关系

我们已经知道，在平面内直线与圆有相离、相切、相交这些位置关系，并且可以由圆心到直线的距离与半径的大小关系来确定.

类似地，直线与球的位置关系也有以下几种：相离、相切、相交（如图 2-9）. 这些位置关系也可以由球心到直线的距离 OH 与球的半径 R 的大小关系来确定.

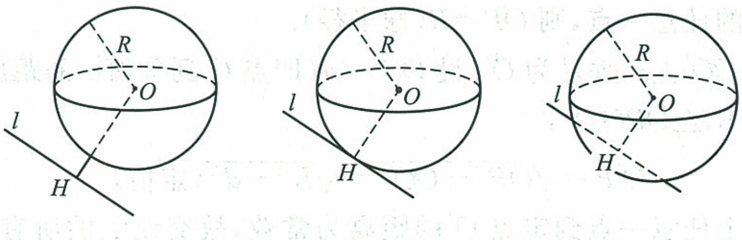


图 2-9

也就是说，

当 $OH>R$ 时，直线与球相离，直线与球没有公共点；

当 $OH=R$ 时，直线与球相切，直线与球只有一个公共点，称这个点为切点；

当 $OH<R$ 时，直线与球相交，直线与球有两个公共点.

在平面内，过圆外一点可以作两条相等的切线. 过球外一点显然可以作无数条球的切线，那么所有的切线长相等吗？所有的切点组成什么图形？

如图 2-10，过圆外一点 P 作⊙O 的切线，切点为 A，⊙O 绕 PO 旋转一周，则切点 A 的轨迹是一个圆.

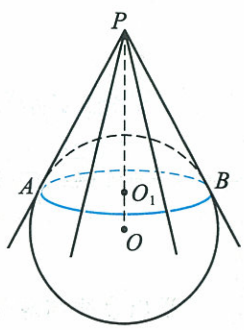
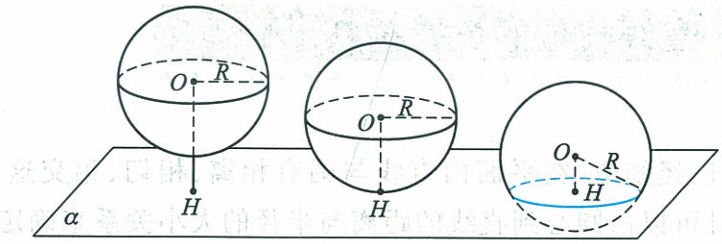


图 2-10

结论　从球外一点作球的切线，它们的切线长相等，所有的切点组成一个圆.

2.2　平面与球的关系

如图 2-11，平面与球的位置关系有以下几种：相离、相切、相交．这些位置关系也可以由球心到平面的距离 OH 与球的半径 R 的大小关系来确定．



相离 $OH>R$　相切 $OH=R$　相交 $OH<R$

图 2-11

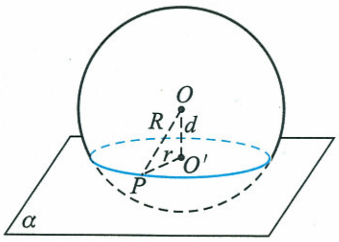


图 2-12

如图 2-12，平面 α 与球 O 相交，显然，交点都在平面 α 内．设 P 为交线上的任意一点，则 $OP=R$（球半径）．

作 $OO'\perp\alpha$，垂足为 O'，设 $OO'=d$（即点 O 到平面 α 的距离）．

在 $\mathrm{Rt}\triangle OPO'$ 中，

$$O'P=\sqrt{OP^2-OO'^2}=\sqrt{R^2-d^2}\text{（定值）},$$

即交线上任意一点到定点 O' 的距离为常数，故交线上的所有点组成一个圆．

结论　一个平面与球面相交，所得的交线是一个圆，且圆心与球心的连线垂直于这一平面．

思考交流

观察图 2-12，从旋转角度看点 P 的轨迹，可以发现什么？

习 题 2—2

举出直线与球位置关系的实例、平面与球位置关系的实例．

§3 柱面与平面的截面

3.1 柱面、旋转面

如图 2-13，圆柱面可以看成是一个矩形 $ABCD$ 以一边 CD 所在的直线为轴，旋转一周后 AB 边所形成的曲面. 如图 2-14，平面上一条曲线 C 绕着一条直线 l 旋转一周后所形成的曲面称为旋转面.

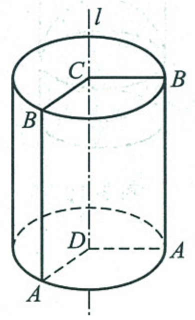


图 2-13

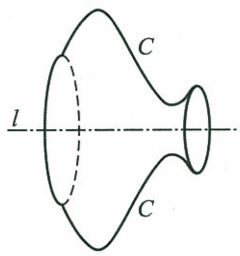


图 2-14

3.2 垂直截面

如图 2-15，设 l 为圆柱的轴，用垂直于 l 的平面 α 截圆柱，所得的交线是圆. 对此，我们给出如下解释.

由于 $l \perp \alpha$（垂足为 O），$l \perp \odot O_1$ 所在的平面，

所以平面 $\alpha // \odot O_1$ 所在的平面.

设 P 为平面 α 与柱面交线上的任意一点，过点 P 作圆柱的母线 AB，则 $AB // l$，

AB 与 l 确定一平面 O_1ABO_2，它与平面 α 的交线为 OP，与 $\odot O_1$ 所在的平面的交线为 O_1A，

因此 $O_1A // OP$.

所以 O_1APO 为平行四边形，所以 $OP = O_1A = r$（常数）.

故点 P 的轨迹为一个圆，即平面 α 与柱面的交线为一个圆.

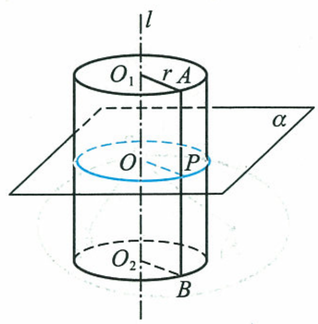


图 2-15

3.3 一般截面

我们知道，用一个平面截一个圆柱面，当截面 β 与圆柱面的轴垂直时，交线为一个圆. 当截面 β 与圆柱面的轴不垂直时（如图 2-17），交线 C 是什么图形呢？

如图 2-16，如果将一个球放入圆柱内，且它的半径与圆柱面的底面半径相等，那么球与圆柱的交线为一个圆.

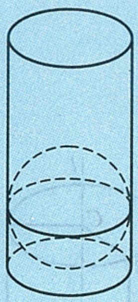


图 2-16

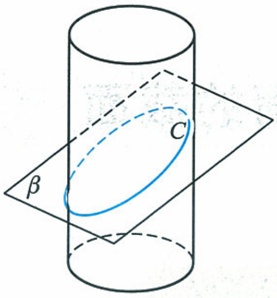


图 2-17

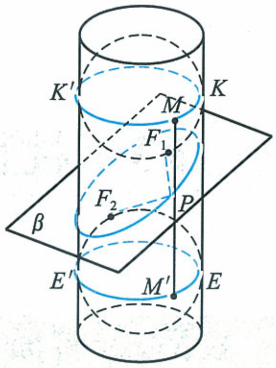


图 2-18

如图 2-18，把两个球放入圆柱内，使它们位于平面 β 的两侧，且每一个球既与圆柱相切，又与平面 β 相切，像这样的球称为“焦球”（又称 Dandelin 球）.

这两个球与圆柱面切于圆 KK' 和圆 EE'，与平面 β 切于点 F_1 和点 F_2.

取 C 上任意一点 P，连接 PF_1，PF_2. 过点 P 的圆柱的母线与圆 KK' 交于点 M，与圆 EE' 交于点 M'.

由于 PF_1 和 PM 是一个球过点 P 的两条切线，所以

$$PF_1=PM.$$

同理　　$$PF_2=PM'.$$

由此可得

$$PF_1+PF_2=PM+PM'=MM'.$$

由圆柱面的对称性可知，MM' 与点 P 的位置无关（实际上就是圆 KK' 和圆 EE' 所在两个平行平面之间的距离），因此曲线 C 上的所有点到点 F_1 和 F_2 的距离之和都相等，即

$$PF_1+PF_2=\text{常数}(MM'>F_1F_2).$$

如图 2-19，若平面内的动点 P 到两定点 F_1，F_2 的距离之和为常数（常数大于两定点间的距离），则称动点 P 的轨迹为椭圆，其中 F_1 和 F_2 称为椭圆的焦点.

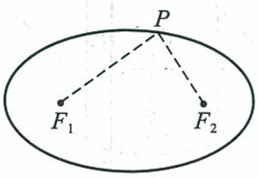


图 2-19

结论　当截面 β 与圆柱面的轴不垂直时，所得交线为椭圆.

思考交流

如果篮筐的内径与篮球的直径相等，那么站在场内将篮球投向篮筐，篮球能否直接入篮？

习 题 2—3

A 组

1. 利用手中的材料动手制作一个圆柱面被截出椭圆的模型.
2. 平面 β 截圆柱面，β 与圆柱面的轴的夹角 θ 变化，所截出的椭圆有什么变化？
3. 平面 β 与圆柱面的轴的夹角 θ 不变，而圆柱面的半径在变化，则所截出的椭圆又有什么特点？
4. $\odot C$ 为半径等于 8 的定圆，点 P 是 $\odot C$ 内一定点，且 $PC=6$，已知动圆 M 与定圆 C 内切且经过定点 P，试研究动圆圆心 M 的轨迹.

B 组

1. 在图 2-18 中，设圆 KK' 所在的平面为 β'，平面 β 与平面 β' 的交线为直线 m. 试证明：椭圆上任意一点 P 到 F_1 和直线 m 的距离之比为一个常数(记为 e)，且 $0<e<1$.
2. 已知 $\odot O$ 和一个平面 α.

   (1) 如果 $\odot O$ 所在的平面与 α 平行，那么 $\odot O$ 在 α 上的平行投影是什么形状？

   (2) 如果 $\odot O$ 所在的平面与 α 不平行，那么 $\odot O$ 在 α 上的平行投影是什么形状？

§4 平面截圆锥面

我们把圆柱面改为圆锥面，再来研究交线 C 的形状与几何性质.

4.1 圆锥面

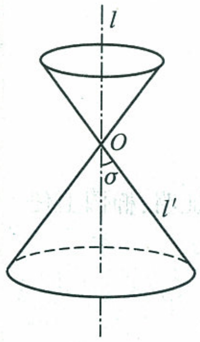


图 2-20

如图 2-20，取直线 l 为轴，直线 l' 与 l 相交于点 O，其夹角为 σ $(0°<\sigma<90°)$，l'绕 l 旋转一周得到一个以 O 为顶点、l'为母线的圆锥面. 这种圆锥面有上下两个，我们通常只研究其中的一个. 若 $\sigma=90°$，则 l'旋转一周得到一个平面.

4.2 垂直截面

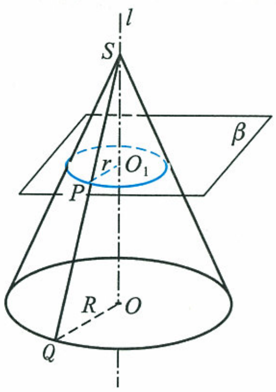


图 2-21

如图 2-21，平面 β 与圆锥面的轴 l 垂直，则交线是什么曲线？设圆锥底面半径为 R，高为 h，顶点 S 到截面 β 的距离为 h_1(R,h,h_1 均为正常数).

因为　$l\perp\beta$　(垂足为 O_1)，

所以　平面 $\beta /\!/ \odot O$ 所在的平面.

设 P 为交线上的任意一点，过点 P 作圆锥的母线 SQ，连接 PO_1，QO，则 PO_1 为平面 SQO 与平面 β 的交线，QO 为平面 SQO 与 $\odot O$ 所在的平面的交线.

所以　$PO_1 /\!/ QO$.

于是　$\dfrac{PO_1}{QO}=\dfrac{SO_1}{SO}$，

即　$\dfrac{PO_1}{R}=\dfrac{h_1}{h}$.

因此　$PO_1=\dfrac{Rh_1}{h}=r$(常数).

所以点 P 到定点 O_1 的距离为常数 r，故交线为一个圆.

结论　当截面 β 与圆锥面的轴 l 垂直时，所得的交线是一个圆.

4.3　一般截面

我们知道，当截面与圆锥面的轴垂直时，所得的交线是一个圆．当截面与圆锥面的轴不垂直时，交线是什么图形呢？

任取一平面 β，它与圆锥面的轴 l 所成的夹角为 θ（β 与 l 平行时，记 $\theta=0°$）．下面我们研究平面 β 与圆锥面交线的情况．

首先考虑 $\theta>\sigma$（σ 为圆锥母线与轴的交角）的情况．

在本章 2.1 中我们知道：从球外一点作球的切线，它们的切线长相等，且所有的切点组成一个圆．于是，若将一个球置于一个圆锥内，并且圆锥的每一条母线都与球相切，则球与圆锥面的交线是一个圆（如图 2-22）．

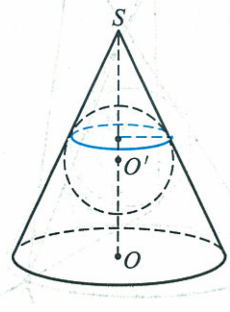


图 2-22

为了研究截面与圆锥面的交线，我们在截面 β 的两侧分别放入两个球，且每一个球既与圆锥面相切，又与平面 β 相切（如图 2-23）．设两个球与圆锥面分别交于圆 KK' 和圆 EE'，同时分别与截面 β 相切于点 F_1 和点 F_2．这样的球称为焦球．

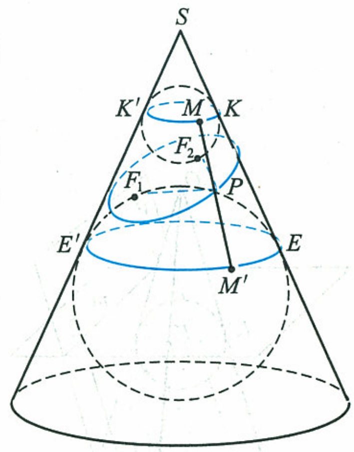


图 2-23

取交线 C 上任意一点 P，连接 PF_1，PF_2．过点 P 的圆锥母线交圆 KK' 于点 M，交圆 EE' 于点 M'，PF_2 和 PM 是过同一个焦球外一点 P 所作的两条切线，故

$$PF_2=PM.$$

同理　$PF_1=PM'$.

所以　$PF_1+PF_2=PM+PM'=MM'$，

即　　PF_1+PF_2 的长度为定值．

因此交线 C 为一个椭圆．

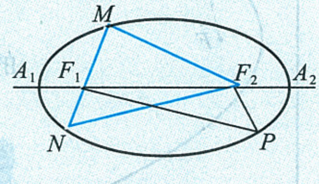
结论　当 $\theta>\sigma$（σ 为圆锥母线与轴的交角）时，平面截圆锥面所得的交线为椭圆．

练　习

1. 利用手中纸杯等物品制作一个平面截圆锥面（纸杯可以看成圆锥面的一部分）成椭圆的模型．
2. 讨论 θ 角的变化对椭圆形状的影响．
3. 如图，设过椭圆两焦点的直线交椭圆于点 A_1，A_2，点 P 为椭圆上的一点，且 $PF_1+PF_2=3$．

   (1) 利用椭圆的对称性计算 A_1A_2（椭圆的长轴长）；

   (2) 设 MN 是过点 F_1 的椭圆的弦，试求 $\triangle MNF_2$ 的周长．



（第 3 题）

下面再研究 $\theta<\sigma$ 时的情况.

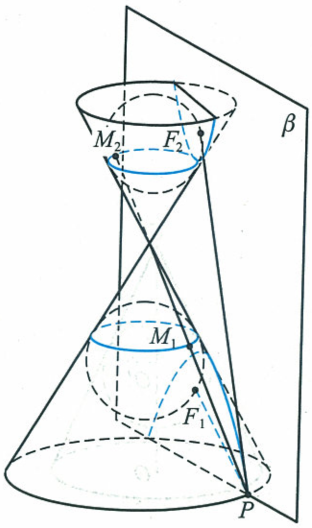


图 2-24

此时截面 β 与圆锥面上下两部分都相交. 这时的交线是什么图形呢?

如图 2-24,仿照 $\theta>\sigma$ 时的研究方法,在两部分圆锥面中各放入一个焦球(这两个焦球位于截面 β 的同侧).

类似地,我们可以通过考虑 PF_1 和 PF_2 之间的关系来研究该曲线的性质.

可以得到以下结论:如图 2-25,此时平面内的动点 P 到两定点 F_1 和 F_2 的距离差为常数(常数小于两定点间的距离). 我们称动点 P 的轨迹为双曲线,其中 F_1 和 F_2 称为双曲线的焦点.

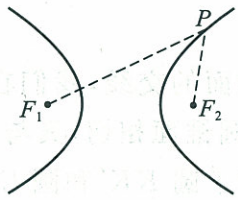


图 2-25

结论　当 $\theta<\sigma$ 时,平面截圆锥面所得的交线为双曲线.

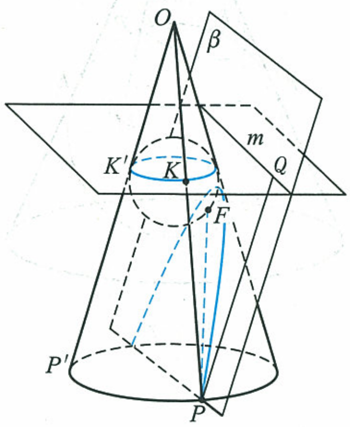


图 2-26

如果 $\theta=\sigma$,那么截面 β 和圆锥面一条母线平行,此时交线 C 又有什么特征呢?

如图 2-26,此时只能在截面 β 的一侧(含顶点 O)作出一个焦球. 焦球与圆锥面交于圆 KK',且与平面 β 切于点 F. 圆 KK' 所在平面与平面 β 交于直线 m.

设 P 是交线 C 上的任意一点,连接 OP 交圆 KK' 于点 K.

过点 P 作 m 的垂线 PQ,垂足为 Q,总可以找到平行于 PQ 的母线 $P'K'$,则

$$P'K'=PQ.$$

又因为

$$PF=PK,\ PK=P'K',$$

所以　$PF=PQ$.

以上推导过程与点 P 的位置无关,因此交线 C 上任意一点到 F 的距离与到直线 m 的距离始终相等.

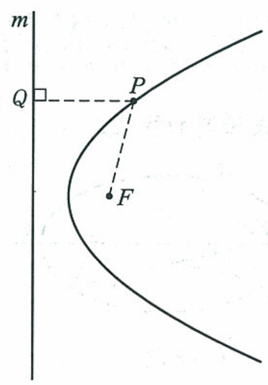


图 2-27

抽象概括

如图 2-27,平面上和定点 F 及定直线 m 距离相等的点的轨迹称为抛物线,其中 F 称为抛物线的焦点,直线 m 称为抛物线的准线.

结论　当 $\theta=\sigma$ 时，平面截圆锥面所得的交线为抛物线.

由于椭圆、抛物线、双曲线都由平面截圆锥面而产生，因此都称为圆锥曲线.

综上所述，可以得到：

定理　在空间，直线 l' 与 l 相交于点 O，其夹角为 σ，l' 绕 l 旋转一周得到以 O 为顶点、l' 为母线的圆锥面. 任取平面 β，若它与轴 l 的交角为 θ，则

(1) 当 $\theta>\sigma$ 时，平面 β 与圆锥面的交线为椭圆；

(2) 当 $\theta=\sigma$ 时，平面 β 与圆锥面的交线为抛物线；

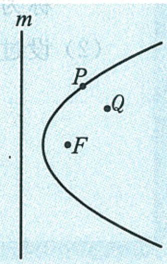
(3) 当 $\theta<\sigma$ 时，平面 β 与圆锥面的交线为双曲线.

思考交流

当 θ 由 0° 逐渐变化到与 σ 相等时，平面 β 与圆锥面的交线是怎样变化的？

练　习

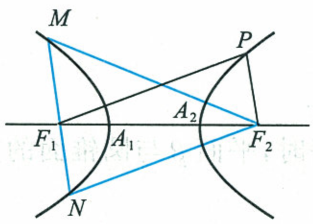
1. 利用纸杯制作一个平面截圆锥面得到抛物线的模型.
2. 如图，点 Q 在抛物线内，F 为抛物线的焦点，m 为抛物线的准线，点 P 是抛物线上的一动点，设 $PF+PQ$ 最小，试研究点 P 的位置，并说明理由.
3. 试研究以过抛物线的焦点的弦为直径的圆与抛物线的准线的位置关系.



（第 2 题）

习 题 2—4

1. 试举出双曲线的实例.
2. 试用手中的纸杯和硬纸板制作定理中的三种模型.
3. 在相距 1 400 m 的 A,B 两哨所,听到炮弹爆炸声的时间相差 3 s,且声速是 340 m/s,试研究爆炸点所在的轨迹形状.
4. 圆锥面与一个球面相交,球的球心在圆锥的顶点,球的半径等于圆锥的高,如果圆锥的侧面积被球面与圆锥面的交线所平分,那么圆锥的高与母线的夹角是多少?
5. 如图,设点 P 是双曲线右支上的一点,且 F_1,F_2 分别为左、右两个焦点,$PF_1-PF_2=2a$($a>0$,常数).



(第 5 题)

(1) 设过 F_1,F_2 的直线与双曲线的两支分别交于点 A_1,A_2,由双曲线的对称性,求 A_1A_2(A_1A_2 称为双曲线的实轴);

(2) 设过 F_1 的弦 MN 的长为 m,试求$\triangle MNF_2$ 的周长.

§5 圆锥曲线的几何性质

问题提出

在前面的学习中，我们知道平面内到定点的距离与到定直线的距离相等的点的轨迹称为抛物线. 那么椭圆、双曲线是否有类似的几何性质呢？

分析理解

如图 2-28，平面 β 与圆锥面相截，交线为一个椭圆.

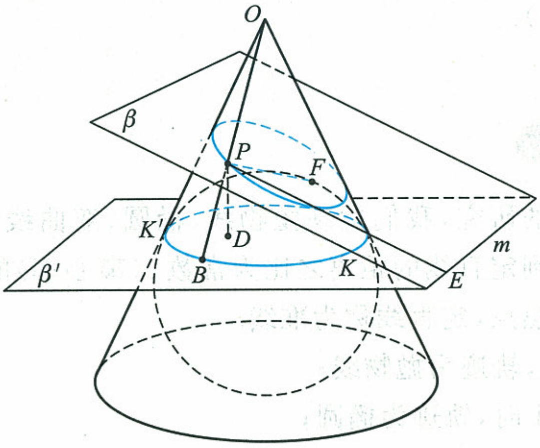


图 2-28

焦球与圆锥面的交线为圆 KK'，记这个圆所在的平面为 β'. 焦球切平面 β 于点 F，平面 β 与平面 β' 的交线为 m. P 为椭圆上的任意一点，连接 PF，作 $PE\perp m$，垂足为 E. 再过点 P 作平面 β' 的垂线 PD（D 为垂足），连接 OP 并延长，交圆 KK' 于点 B. 显然

$$\angle DPB=\sigma,\angle DPE=\theta.$$

于是

$$PE=\frac{PD}{\cos\theta},\quad PB=\frac{PD}{\cos\sigma}.$$

又因为 PF 与 PB 是从同一点 P 到焦球的切线，

所以 $PF=PB$.

所以 $\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{PB}{PE}=\dfrac{\cos\theta}{\cos\sigma}$.

又由于　$0<\sigma<\theta<90^\circ$，$0<\cos\theta<\cos\sigma<1$，

所以　$0<\dfrac{\cos\theta}{\cos\sigma}<1$（常数）.

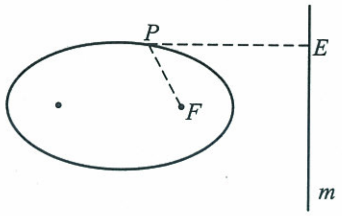


图 2-29

这就是说，椭圆上任意一点 P 到焦点 F 和直线 m（m 称为椭圆的一条准线）的距离之比为一个常数（如图 2-29），我们把这个常数 $e=\dfrac{\cos\theta}{\cos\sigma}$称为椭圆的离心率（$0<e<1$）.

思考交流

若 $0<\theta<\sigma<90^\circ$，则平面 β 与圆锥面的交线是双曲线，类比前面的研究，你能得出类似的几何性质吗？写出研究过程.

双曲线上任意一点 P 到焦点 F 和直线 m（m 称为双曲线的一条准线）的距离之比为一个常数，我们把这个常数 $e=\dfrac{\cos\theta}{\cos\sigma}$ 称为双曲线的离心率（$e>1$）.

抽象概括

通过上面的研究，我们发现抛物线、椭圆、双曲线都是平面上到定点的距离与到定直线的距离之比为常数 e（离心率）的动点的轨迹，此时定点称为焦点，定直线称为准线.

当 $e=1$ 时，轨迹为抛物线；

当 $0<e<1$ 时，轨迹为椭圆；

当 $e>1$ 时，轨迹为双曲线.

这就是圆锥曲线的统一定义.

我们在这里用综合几何的方法来研究圆锥曲线的几何性质，它是利用欧几里得公理方法在纯粹几何的基础上推导出圆锥曲线的几何性质，这一方法主要由比利时数学家丹德林（G. P. Dandelin）在 1822 年提出. 另外，我们还会在解析几何中利用坐标系研究圆锥曲线的几何性质.

探究研究

前面我们已经对椭圆有了一定的了解. 下面请同学们思考下列两个问题：

（1）椭圆的形状由哪些条件决定？

(2) 用平面截圆锥面，能得到所有形状的椭圆吗？

同样，对于双曲线和抛物线呢？

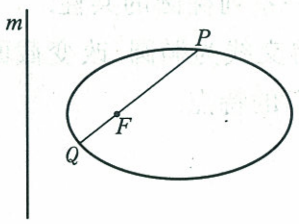
习 题 2—5

1. 如图，点 F 是椭圆的一个焦点，直线 m 是椭圆的准线，PQ 为过焦点 F 的一条弦．试研究以 PQ 为直径的圆与直线 m 的位置关系，并给出证明．

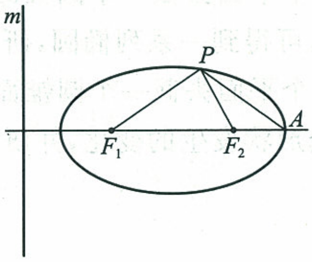
2. 如图，F_1，F_2 为椭圆的两个焦点，直线 m 为其准线．

   (1) 设椭圆的离心率 $e=\dfrac{2}{3}$，试确定点 P 的位置，使 $PA+\dfrac{3}{2}PF_1$ 取得最小值；

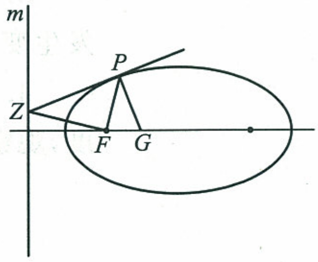
   (2) 设椭圆的长轴长等于 6，$AF_2=\sqrt{2}$，试求 $PA+PF_1$ 的最大值和最小值．



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 已知：如图，设 P 为椭圆上的任意一点，过点 P 作椭圆的切线，交准线 m 于点 Z，此时 $FZ\perp FP$，过点 P 作 PZ 的垂线交椭圆的长轴于点 G，椭圆的离心率为 e．求证：$FG=e\cdot FP$．

研究性学习

1. 在桌面上放有一个乒乓球，用一只手电筒照射这个乒乓球，请观察乒乓球在桌面上的影子的边缘的形状，并且观察当手电筒的位置发生改变时，影子边缘的形状所发生的变化. 说明这种现象，并写出一个研究报告.

2. 用一个平面去截一个圆柱面，所得交线为椭圆. 改变截面的角度，观察椭圆发生的变化，并研究这一系列椭圆的共性.

3. 用一个平面去截一个圆锥面，所得交线为椭圆. 当圆锥的锥角发生变化时，可得到一系列椭圆，研究这一系列椭圆的共性.

4. 用一个平面去截一个圆锥面，所得交线为椭圆. 改变截面的角度，观察交线形状发生的变化，并研究它们的特点.

◆ 本章小结建议

1. 本章用综合几何的方法研究了圆锥曲线，请同学们结合本章内容，进一步体会研究几何问题时“探索—发现—猜想—证明”的过程.

2. 圆锥曲线是数学中的重要内容之一，对它的研究有多种方法. 在选修 1 和选修 2 中，我们曾经用解析几何方法研究过圆锥曲线，本章又运用综合几何的方法研究它，请同学们比较这些不同的研究方法，并进一步总结、理解圆锥曲线的性质.

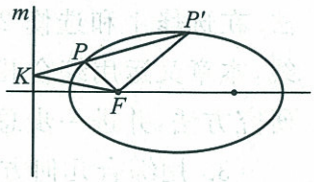
3. 用综合几何方法研究圆锥曲线的性质，这种做法始于古希腊，很多数学家对此有专门著作. 请同学们查阅有关资料，了解这一过程及其所蕴涵的数学思想方法.

复习题二

A 组

1. 在半径为 13 cm 的球面上有 A,B,C 三点，$AB=6$ cm，$BC=8$ cm，$CA=10$ cm，求过这三点的截面与球心 O 的距离.
2. 在球心的同一侧有相距 9 cm 的两个平行截面，它们的面积分别为 47π cm^2 和 400π cm^2，求球的半径.
3. 已知：如图，椭圆的弦 $P'P$ 的延长线交准线于点 K，F 为相应的焦点.

   求证：$\dfrac{KP}{KP'}=\dfrac{PF}{P'F}$.

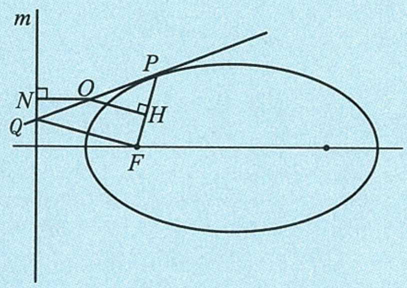


（第 3 题）

B 组

1. 平面 α 与圆柱的轴的夹角不变，而圆柱的半径在变化，那么截出的椭圆有什么特点？
2. 已知：如图，F 为椭圆的一个焦点，离心率为 e，点 P 是椭圆上的一点，过点 P 作椭圆的切线，与准线交于点 Q，此时 $QF\perp PF$. 设 O 是 PQ 上的任意一点，过点 O 作 $ON\perp m$，$OH\perp PF$，垂足分别为 N,H.

   求证：$FH=e\cdot ON$.



（第 2 题）

3. 完成一个学习总结报告，报告应包括：

   （1）知识总结：对本书整体结构和内容的理解，对数学证明的认识；

   （2）拓展：通过查阅资料、独立思考，对某些内容和应用进行进一步探讨；

   （3）学习本书的感受、体会.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
比	ratio
比例	proportion
比例线段	proportional segments
比例中项	mean term of proportion
相似形	similar figures
相似三角形	similar triangles
割线	secant line
公切线	common tangent
母线	generating line
圆柱	circular cylinder
圆锥	circular cone
椭圆	ellipse
双曲线	hyperbola
抛物线	parabola

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介：基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站，内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面．网站在提供教学实例、教学课件的同时，也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台．

后　记

本套教材是按照国家教育部于2003年4月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性,突出了数学的思想性和应用性,尊重学生的认知特点,创造多层次的学习活动,为不同的学生提供不同的发展平台,注意发挥数学的人文教育价值.

教材的建设是一项长期而艰巨的任务,每一位教师在教学实践中要自主地开发资源,创造性地使用教材.我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作,对教材的逐步完善提供大力支持,促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序):

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有林益生、翁凯庆.

由于时间仓促,教材中的错误在所难免,恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社