经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 2（必修）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　王尚志　王希平

编写人员（按 姓 氏 笔 画 排 序）

王希平　王尚志　许　勇

何　明　张世永　张守和

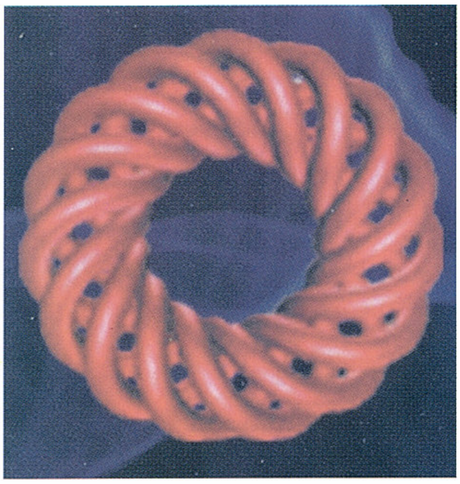
北京师范大学出版社

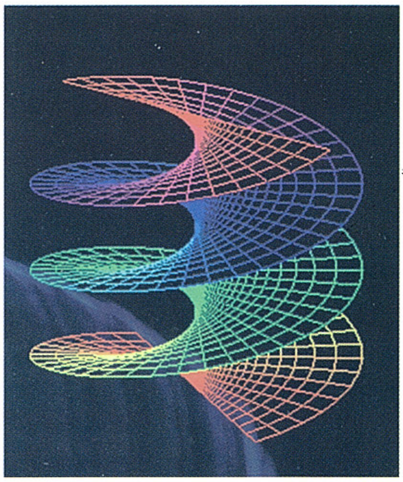
·北 京·

微分几何图形欣赏

微分几何是微积分在几何上的应用.我不能不提它的曲线论在分子生物学上的作用.我们知道，DNA 的构造是双螺旋线.

——著名数学家　陈省身

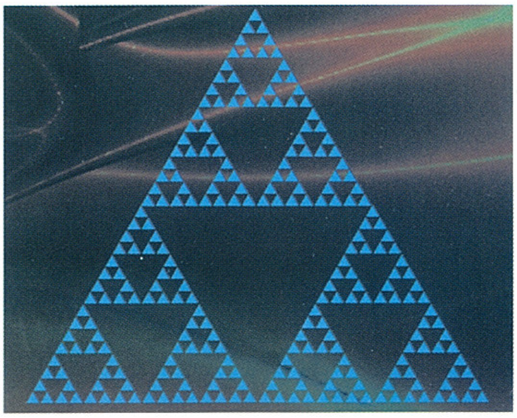
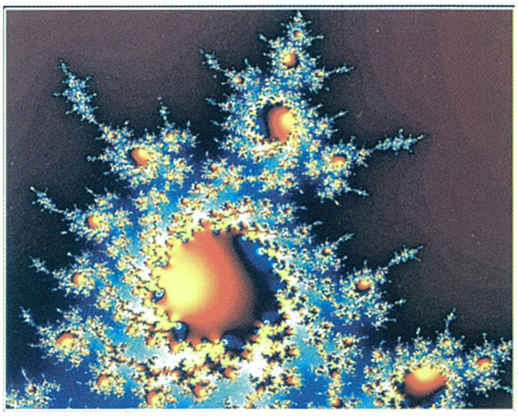
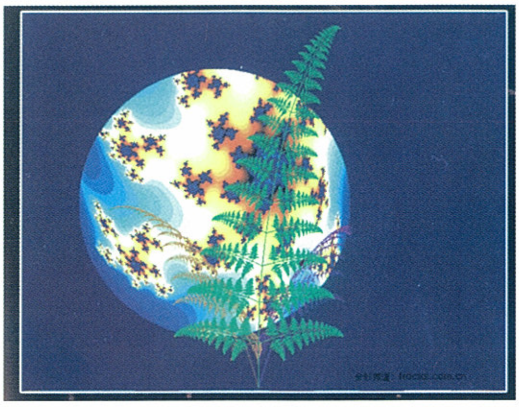
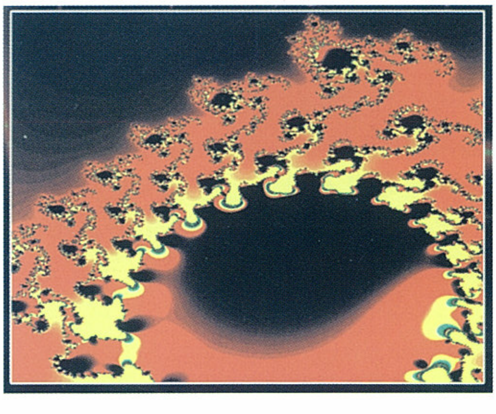




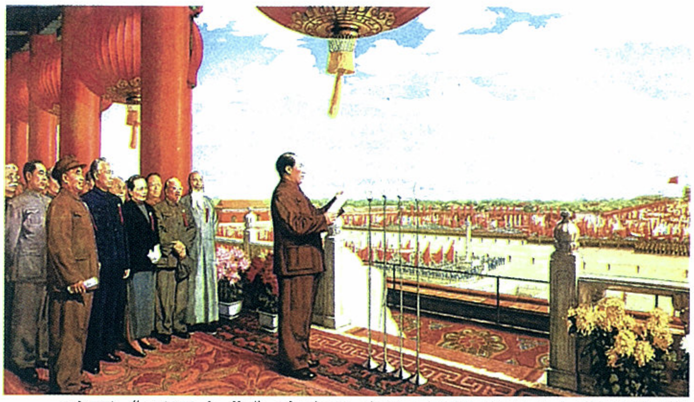
分形几何图形欣赏

分形是相对欧几里得几何学中的整形而言的. 分形的创始人法国数学家芒德布罗把分形定义为:一个不规则的几何形体,但在不同的尺度下看它,具有相同或相似的结构.

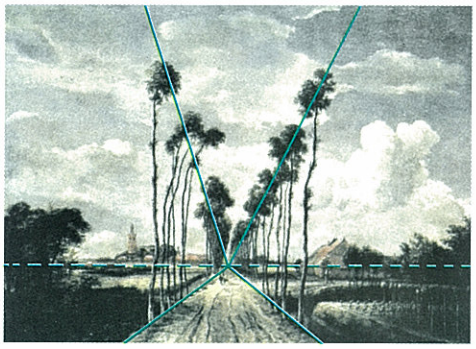
如今在生态学、天文学、气象学、电影摄影学和经济学等方面都能找到分形的用处,而且对“病态曲线”的研究已形成新的数学分支——分形几何学.

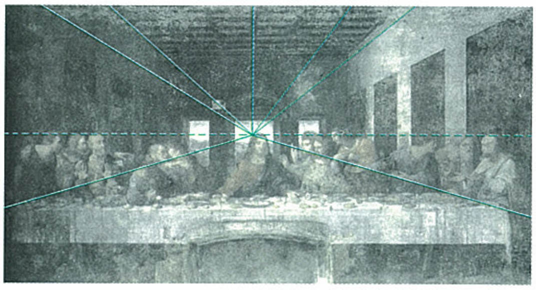
射影几何图形欣赏



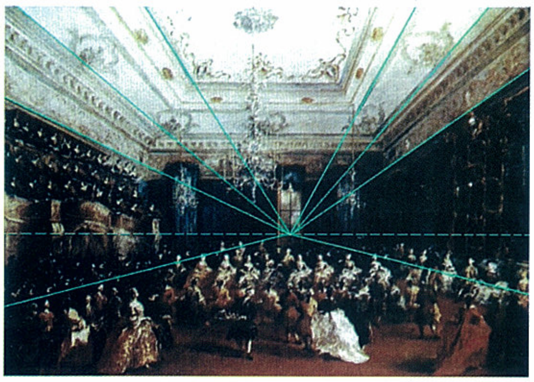
油画《开国大典》真实地表现了我国开国大典时壮观盛大的场景．画家在构图、设色、人物等场面的处理上，体现出了一个泱泱大国的气魄和风度．



17世纪荷兰画家霍贝玛的风景画《乡村小道》．画面在道路及两旁的树林、远处的村落、人物都完全符合透视原理．



意大利伟大的艺术家达·芬奇的《最后的晚餐》．沿着餐桌坐着耶稣的12个门徒，形成4组，耶稣坐在餐桌的中央．



这幅画突出表现了一个盛大音乐会的豪华气派，展现了贵族的城市生活，是对当时现实生活的真实写照．

意大利画家卡纳列托的代表作之一《柱廊》．强烈的透视使柱廊在画面上形成斜角，把画面分成明与暗两大块，有一种透明的空气感．

中华世纪坛

北京西客站

植物园

遗传信息库——DNA双螺旋结构

居室

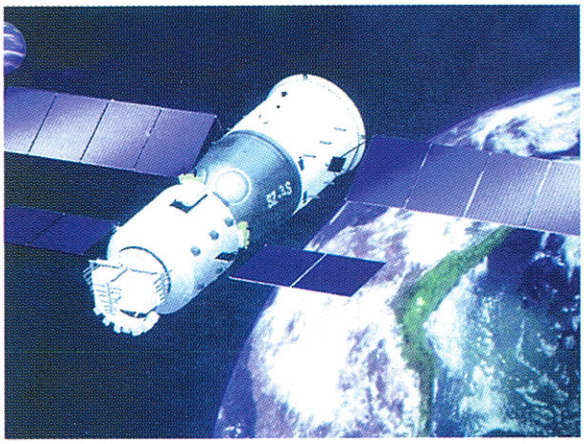
居室

一般地说，复杂的空间图形是由近似于柱、锥、台、球等简单的空间图形组成的，请注意以上图中这些简单的空间图形所起的作用.

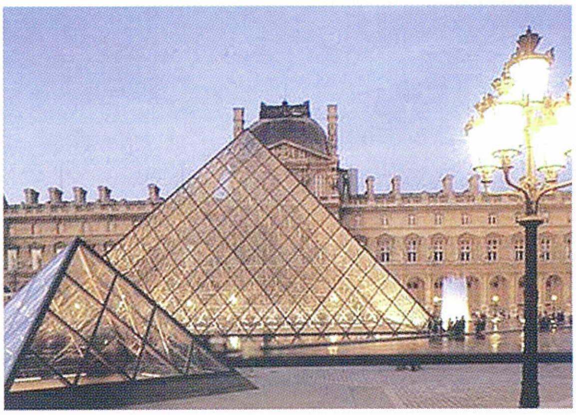
空间图形欣赏

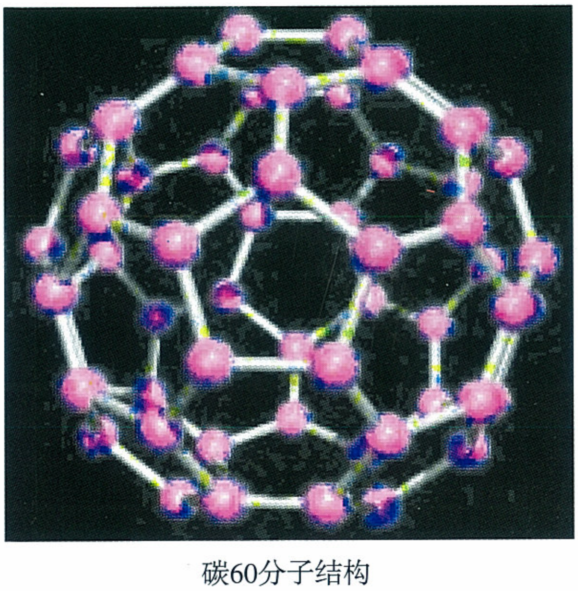
我们生活在丰富的图形世界中，从巨大的天体到微小的原子，自然界展现了丰富多彩的几何图形，请看下列图片，你能从中找到哪些熟悉的简单的空间图形.

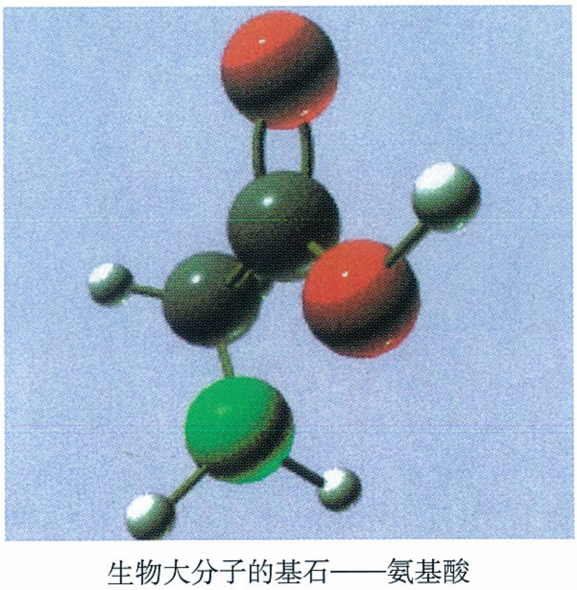

“神舟”五号发射成功


遨游太空


水立方


卢浮宫


碳60分子结构


生物大分子的基石——氨基酸

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26 册书组成：必修教材有5 册；选修系列1 有2 册，选修系列2 有3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3 有6 册，选修系列4 有10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为A，B 两组；还有一类是复习题，分为A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

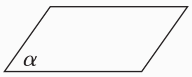
我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811.

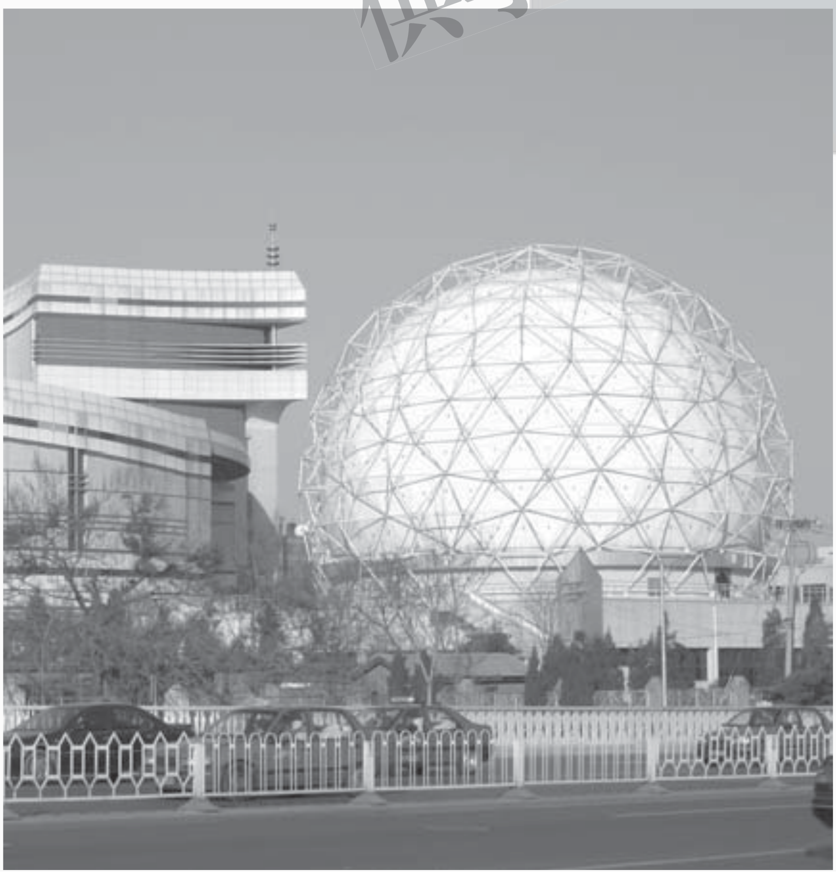
目　录

第一章 立体几何初步

三维空间是人类生存的现实空间. 生活中蕴涵着丰富的几何图形. 本章将以具体的立体图形，特别是以长方体为背景，通过直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等方法，了解简单几何体的基本特性及其直观图和三视图，理解空间中的点、线、面的位置关系，并能用数学语言对某些位置关系进行描述和论证. 培养和发展空间想象、推理论证和运用图形语言进行交流的能力.

平面是空间最基本的图形. 平整的桌面、平静的湖面都给人平面的印象，平面是无限延展的. 一般地，我们用平行四边形表示平面(如图)，记为平面 α 或平面 $ABCD$.



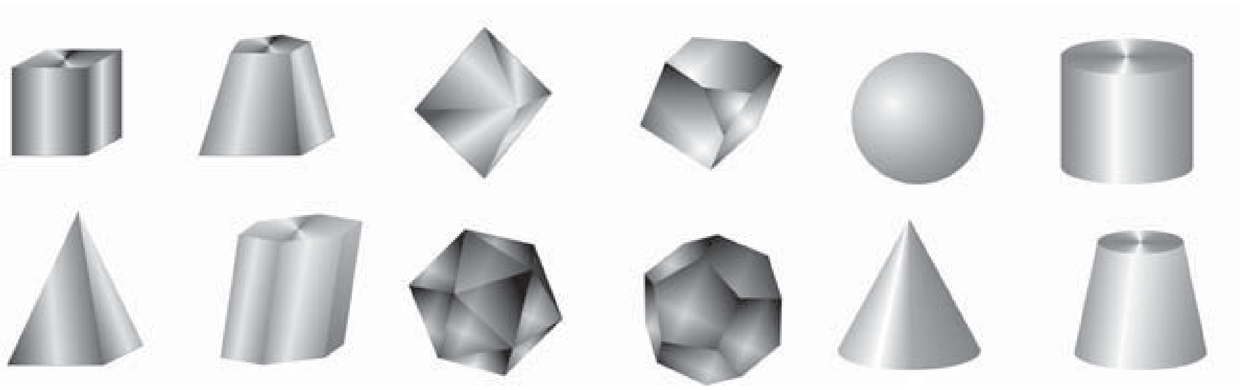


经过 2 000 年之后，正多面体居然会在化合物里有用，有些数学家正在研究正多面体和分子结构间的关系. 这表明，当年数学家的一种空想，经历了这么长的时间之后，竟然是很“实用”的.

——著名数学家陈省身

§1 简 单 几 何 体

我们生活空间里有各式各样的几何体，请看下面的图形.



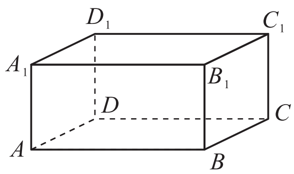


图 1-1

我们最熟悉的几何体是长方体. 在如图 1-1 所示的长方体中，相对的两个面 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 所在的平面是无公共点的，我们称无公共点的两个平面是平行的；棱 AA_1 所在直线和棱 AB、棱 AD 分别垂直，事实上，棱 AA_1 所在的直线与 $ABCD$ 所在平面内的任意一条直线都垂直，我们把直线和平面的这种关系称为直线与平面垂直. 长方体是数学中最基本的几何图形，在后面学习中，将发挥重要作用.

1.1 简 单 旋 转 体

一、球

人类赖以生存的地球，天体中的月亮、太阳，人们体育比赛中用到的足球、乒乓球等，都给我们球的形象.

以半圆的直径所在的直线为旋转轴，将半圆旋转所形成的曲面叫作球面. 球面所围成的几何体叫作球体，简称球. 半圆的圆心叫作球心. 连接球心和球面上任意一点的线段叫作球的半径. 连接球面上两点并且过球心的线段叫作球的直径.

一条平面曲线绕着它所在的平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫作**旋转面**；封闭的旋转面围成的几何体叫作**旋转体**. 显然，球面是旋转面，球体是旋转体.

二、圆柱、圆锥、圆台

分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫作圆柱、圆锥、圆台(图 1-2).

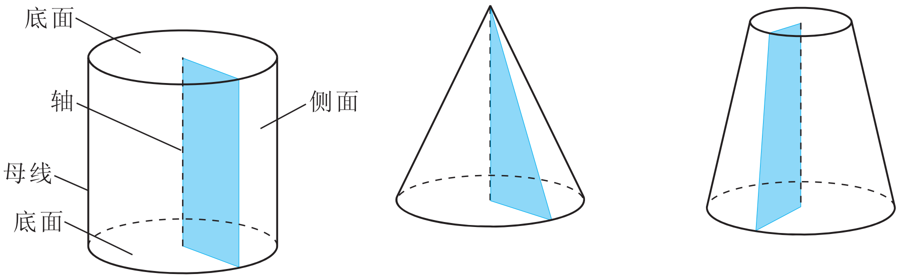


图 1-2

在旋转轴上这条边的长度叫作它们的高，垂直于旋转轴的边旋转而成的圆面叫作它们的底面，不垂直于旋转轴的边旋转而成的曲面叫作它们的侧面，无论转到什么位置，这条边都叫作侧面的母线.

圆柱、圆锥、圆台都是旋转体.

圆台也可以看作是用平行于圆锥底面的平面截这个圆锥而得到的.

1.2 简 单 多 面 体

我们把若干个平面多边形围成的几何体叫作多面体. 其中棱柱、棱锥、棱台是**简单多面体**.

一、棱柱

房屋建筑中的立柱、木工师傅加工的木条、建筑用的方砖等都给我们棱柱的形象.

两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，这些面围成的几何体叫作棱柱.

这里的两个互相平行的面叫作棱柱的底面，其余各面叫作棱柱的侧面，棱柱的侧面是平行四边形.

两个面的公共边叫作棱柱的棱，其中两个侧面的公共边叫作棱柱的侧棱，底面多边形与侧面的公共顶点叫作棱柱的顶点(图 1-3).

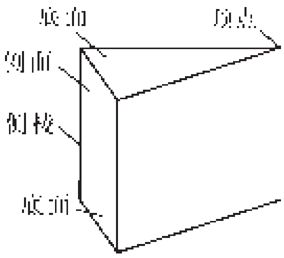


图 1-3

我们把侧棱垂直于底面的棱柱叫作直棱柱，底面是正多边形的直棱柱叫作正棱柱. 棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形……我们把这样的棱柱分别叫作三棱柱、四棱柱、五棱柱……(图 1-4).

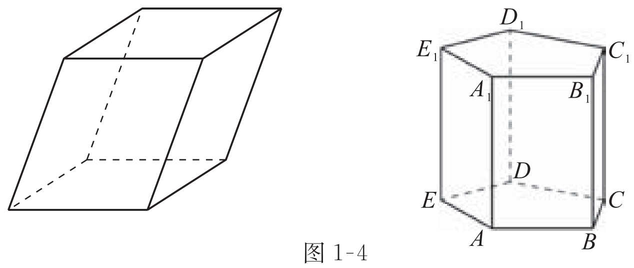
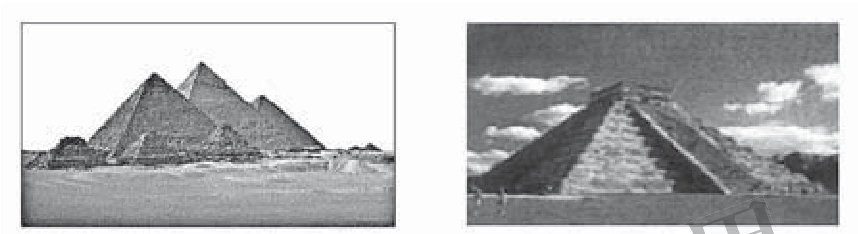


图 1-4

通常用底面各顶点的字母表示棱柱．如图 1-4 中的五棱柱记作：五棱柱 $ABCDE\text{-}A_1B_1C_1D_1E_1$．

二、棱锥、棱台

金字塔、大江截流用的四面体水泥块、建筑工地打桩用的水泥桩头等物体，都给我们棱锥的形象．



有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，这些面围成的几何体叫作棱锥，如图 1-5 中的棱锥记作：三棱锥 $S\text{-}ABC$．

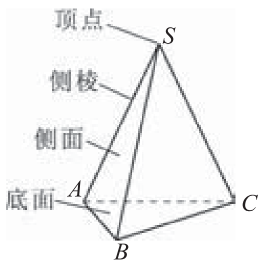


图 1-5

如果棱锥的底面是正多边形，且各侧面全等，就称作正棱锥，如图 1-6 中的正棱锥记作：正四棱锥 $S\text{-}ABCD$．

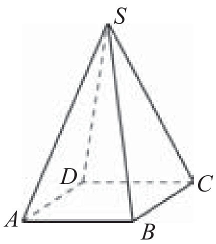


图 1-6

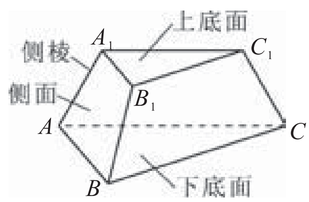


图 1-7

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分叫作棱台，如图 1-7 中棱台记作：三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$．

用正棱锥截得的棱台叫作正棱台．正棱台的侧面是全等的等腰梯形，如图 1-8 中的正棱台记作：正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$．

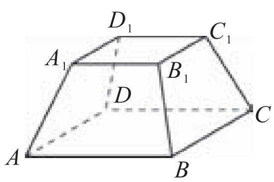
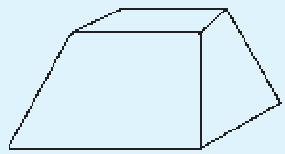


图 1-8

类似于棱柱，棱锥和棱台也有三棱锥、四棱锥和三棱台、四棱台等．三棱锥也叫作四面体（图 1-5）．

练 习

1. 球、圆柱、圆锥和圆台过轴的截面分别是什么图形?
2. 斜棱柱的侧面中可能有矩形吗?
3. 图中的几何体是不是棱台?



(第 3 题)

习 题 1—1

A 组

1. 底面是正多边形的棱锥是正棱锥吗?
2. 探索长方体棱长和对角线长的关系.
3. 举出生活中的球、圆柱、圆锥、圆台、棱柱、棱锥、棱台的实例.

B 组

1. 用厚纸做一个正四棱锥的模型.
2. 用两个截面将三棱柱分成三个三棱锥.

§2　直　观　图

我们知道，图画、照片等都是空间图形在平面上的反映，通过对图像、照片的研究可以了解空间图形的一些性质和特征. 把空间图形在平面上反映出来，是一件很有意义的事情.

我们可以用直观图表示空间图形. 图 1-9 就是正方体的直观图. 直观图有较强的立体感.

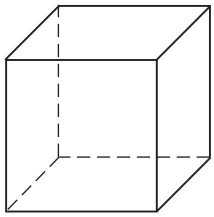


图 1-9

下面我们介绍基本几何体的直观图的画法.

例 1　画水平放置的正六边形的直观图.

解　画法：

(1) 在已知图形（正六边形）所在平面上建立平面直角坐标系 xOy. 另选一平面画直观图，先画 x'轴和 y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$（图 1-10）.

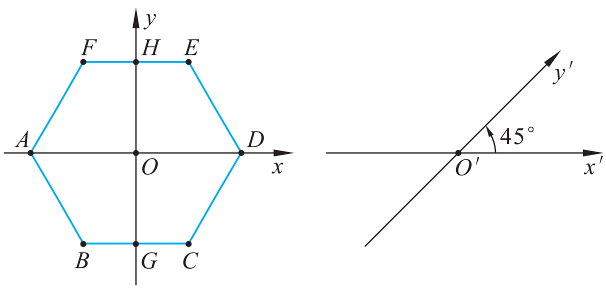


图 1-10

(2) 将已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段在直观图中分别画成平行于 x'轴和 y'轴的线段，且已知图形中平行于 x 轴的线段在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，在直观图中长度为原来的$\frac{1}{2}$（图 1-11）.

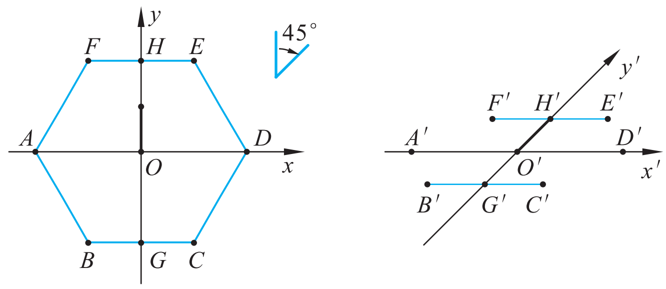


图 1-11

(3) 连线成图(擦去辅助线)(图 1-12).

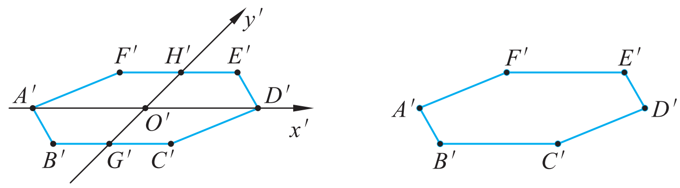


图 1-12

上面画直观图的方法叫**斜二测画法**,这种画法的规则是:

(1) 在已知图形中建立直角坐标系 xOy. 画直观图时,它们分别对应 x'轴和 y'轴,两轴交于点 O',使$\angle x'O'y'=45°$,它们确定的平面表示水平平面;

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x'轴和 y'轴的线段;

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段,在直观图中保持原长度不变;平行于 y 轴的线段,长度为原来的$\frac{1}{2}$.

当我们将正六边形看作圆的内接正六边形时,可以近似得到圆的直观图画法(图 1-13). 即将圆任意 n 等分,作此正 n 边形的直观图,当 n 非常大时,平滑连接各顶点,可近似得到圆的直观图.

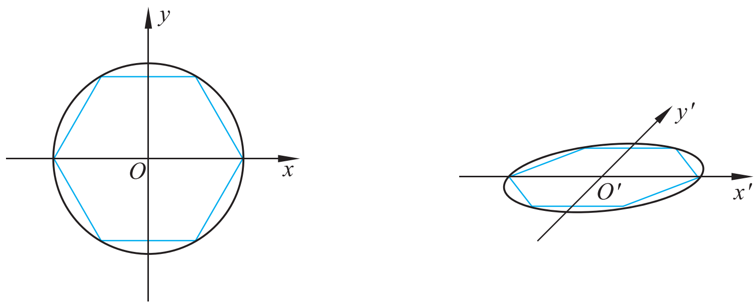
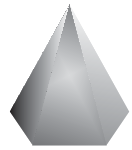


图 1-13

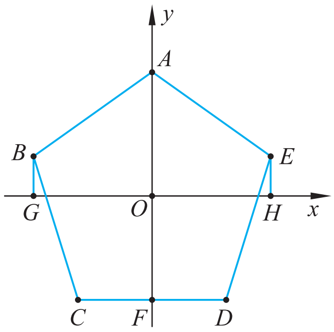
立体图形与平面图形相比多了一个 z 轴,其直观图中对应于 z 轴的是 z'轴,平面 $x'O'y'$表示水平平面,平面 $y'O'z'$和 $x'O'z'$表示直立平面. 平行于 z 轴的线段,在直观图中平行性和长度都不变.

例 2　画正五棱锥的直观图.

解　画法：



(1) 画底面(根据平面图形的直观图画法)(图 1-14)；



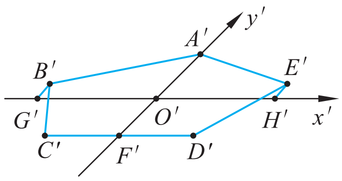


图 1-14

(2) 画 z'轴(z'轴与 x'轴的交角为 90°)，并画高[1](与原长相等)，连线成图(图 1-15)；

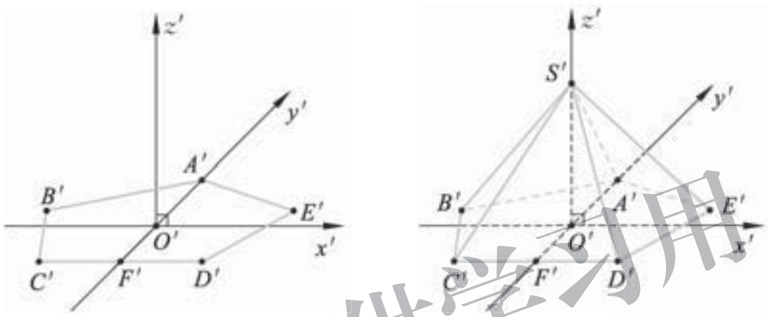


图 1-15

(3) 擦去辅助线，被遮线画虚线.

[1] 棱锥(圆锥)的高是指从顶点向底面作垂线，顶点与垂足(垂线与底面的交点)间的距离.

圆台(棱台)的高是指从圆台(棱台)一个底面上一点向另一个底面作垂线，这点和垂足之间的距离，即为两个平面之间的垂线段的长.

仿照前例，可得到圆柱的直观图的画法(图 1-16).

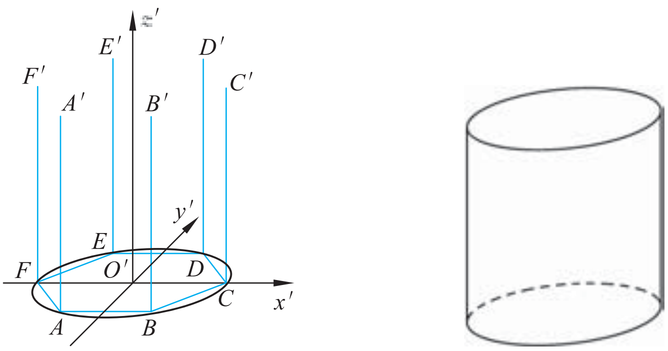


图 1-16

信息技术建议

用数学软件或图形计算器画基本几何体的直观图，可以体会到几何体的空间结构特点. 详细情况见本节后面的“信息技术应用”栏目.

你能画出正四棱台的直观图吗？请试一试.

在几何里所说的平面是无限延展的，通常我们只画出它的一部分来表示平面. 一般地，用平行四边形表示空间一个水平平面的直观图，并用希腊字母 α,β,γ 等来表示平面(图 1-17).

图 1-17

用斜二测画法画的直观图是根据平行投影的原理画出的图形，

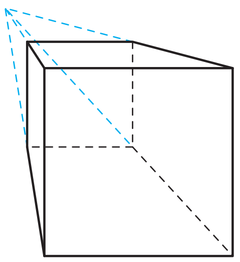


图 1-18

图中的投影线互相平行. 我们还可以根据中心投影的原理来表示空间图形，此时投影线相交于一点. 图 1-18 是正方体在中心投影下的直观图. 本书后面的彩色画页中还有根据中心投影原理画的透视画供同学们欣赏.

信息技术应用

用信息技术画基本几何体的直观图

用数学软件或图形计算器可以画出基本几何体的直观图.

任务一 画圆的直观图

1. 画圆 O，R 是控制圆的大小的点. 建立以点 O 为原点的平面直角坐标系 xOy，再新建一个坐标系 $x'O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45°$（图 1-19）.

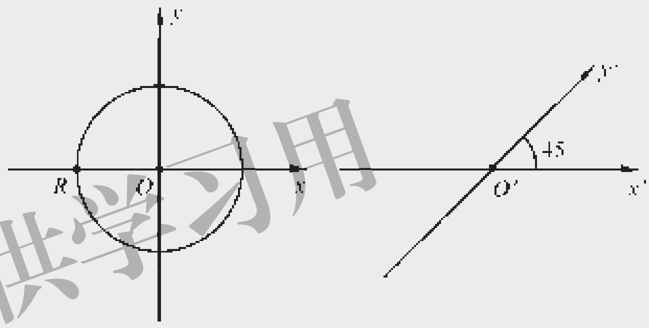


图 1-19

2. 在圆 O 上画一点 P，作 $PQ\perp x$ 轴，垂足为点 Q；标记向量[1] $\overrightarrow{OO'}$，按照这个向量把线段 QP 平移到 $Q'P'$，再以点 Q' 为中心，把线段 $Q'P'$ 顺时针旋转 45°，得到线段 $Q'P''$，再画线段 $Q'P''$ 的中点 P'''（图 1-20）.

[1] 向量的概念以后我们要学到.

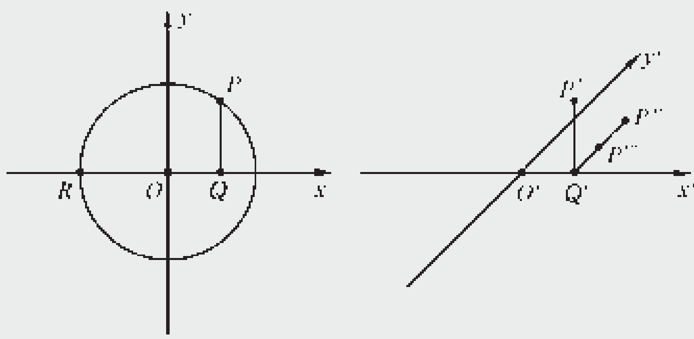


图 1-20

3. 选择点 P，P'''，作轨迹，得到圆 O 的直观图（图 1-21）.

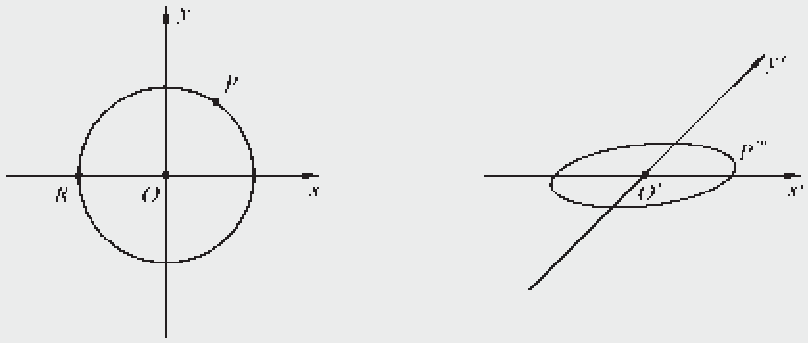


图 1-21

任务二　画正五棱锥的直观图

1. 画底面：画圆 O，点 R 是控制圆的大小的点. 建立以点 O 为原点的平面直角坐标系 xOy，再新建一个坐标系 $x'O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45°$. 在圆 O 上画一点 A，以点 O 为中心，把点 A 逆时针旋转 $72°$ 得到点 B，同样由点 B 得到点 C……依次作出五个点 A，B，C，D，E，顺次相连得到正五边形 $ABCDE$. 按照任务一的方法，分别作出正五边形 $ABCDE$ 的五个顶点在新坐标系 $x'O'y'$ 中的对应点 A'，B'，C'，D'，E'，顺次相连得到底面的直观图（图 1-22）.

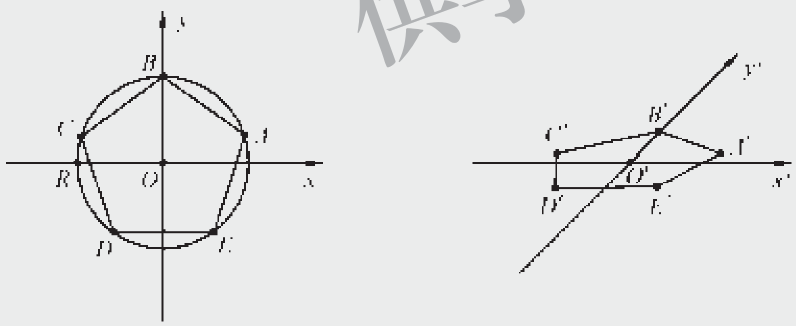


图 1-22

2. 画 z' 轴（z' 轴与 x' 轴的交角为 $90°$），在 z' 轴上画一点 P，作出正五棱锥的直观图，并用虚实线体现遮挡效果（图 1-23）；拖动点 A，改变正五棱锥的观察角度，体会它的空间结构特点.

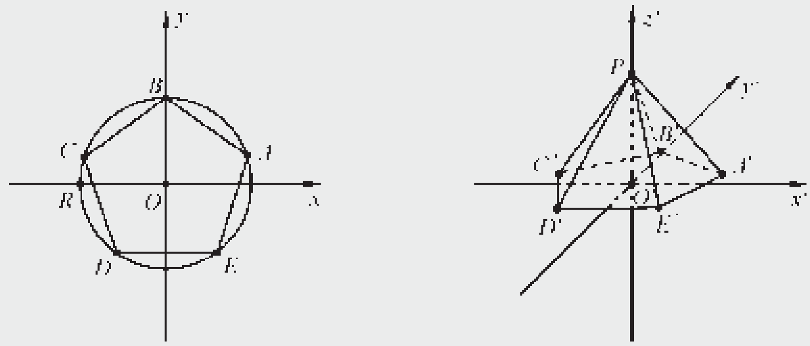


图 1-23

练 习

1. 画水平放置的正方形和正三角形的直观图.
2. 画出长、宽、高分别为 6 cm，4 cm，3 cm 的长方体的直观图.
3. 画圆柱的直观图.

习 题 1—2

A 组

1. 画水平放置的等腰梯形和平行四边形的直观图.
2. 画出底面边长为 4 cm，高为 5 cm 的正四棱锥的直观图.
3. 画一个底面边长为 3 cm，高为 4.5 cm 的正三棱柱的直观图.
4. 画出上、下底面边长分别为 3 cm 和 6 cm，高为 4 cm 的正四棱台的直观图.

B 组

观察你周围的建筑物，选择一个简单的，画出它的直观图.

§3　三　视　图

在初中，我们学过基本几何体（直棱柱、正棱锥、圆柱、圆锥、球）的三视图.下面是正六棱柱的三视图（图 1-24）.

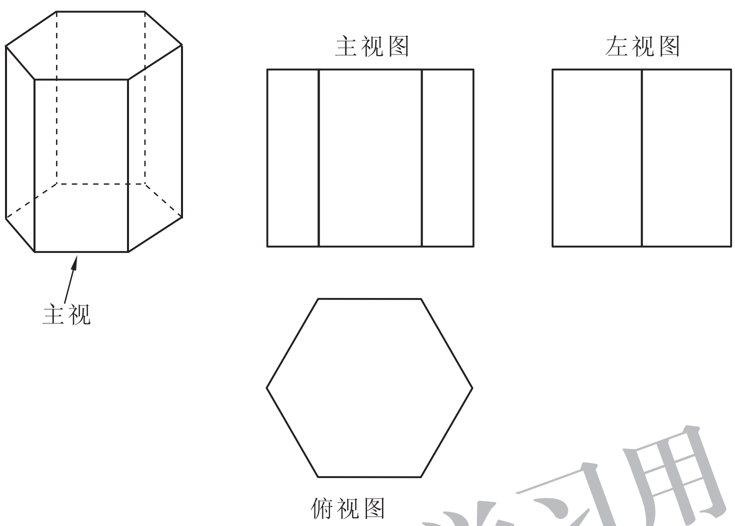


图 1-24

主视图又称为正视图.选择哪个方向画主视图，由观察者人为确定.侧视图可以是左侧视图，也可以是右侧视图，通常选择的是左侧视图，简称左视图.

3.1　简单组合体的三视图

一、三视图中的虚线

在初中，我们画棱柱的三视图时出现过虚线，在绘制三视图时，不可见边界轮廓线，用虚线画出.

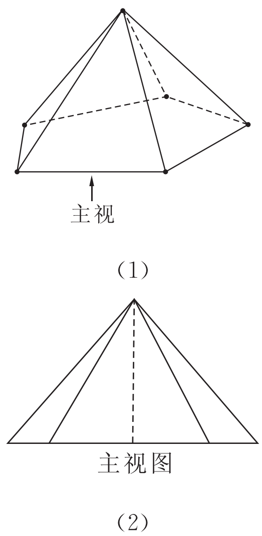


图 1-25

例 1　画出正五棱锥的主视图.

解　从主视方向看，该五棱锥有一条侧棱不可见（图 1-25（1）），在主视图中，这条不可见侧棱用虚线画出.如图 1-25（2）.

二、简单组合体

我们学过柱、锥、台、球等基本几何体，在实际生活中，常常见到由

它们形成的组合体，组合体有两种基本的组成形式：

（1）将基本几何体拼接成组合体，如图 1-26.

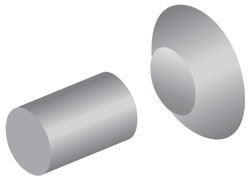
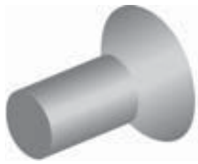



图 1-26

（2）从基本几何体中切掉或挖掉部分构成组合体，如图 1-27.

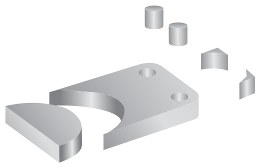



图 1-27

一般地，组合体是由上述两种方式综合生成的，如图 1-28.

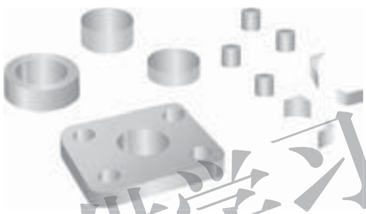
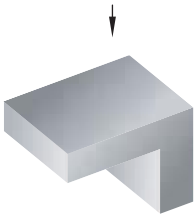



图 1-28

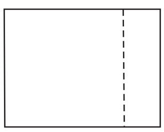
三、简单组合体的三视图

例 2　画出如图 1-29(1)所示物体的俯视图.

解　该物体可以看作是由两个长方体组合而成的，俯视有不可见边界轮廓线(用虚线表示)，如图 1-29(2)所示.



(1)



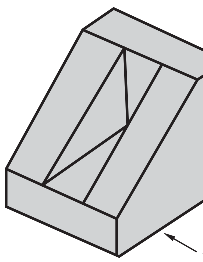
俯视图

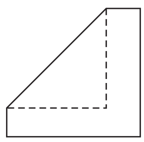
(2)

图 1-29

例 3　画出图 1-30(1)物体的主视图.

解　该物体可以看作是从长方体中先切掉一部分(三棱柱)，再挖掉一部分(三棱柱)得到的组合体，如图 1-30(2)所示.





主视图

(1)　　(2)

图 1-30

例 4　螺栓是棱柱和圆柱拼接成的组合体，如图 1-31 所示，画出它的三视图.

解　该物体是由一个正六棱柱和一个圆柱拼接而成的，主视图反映正六棱柱的三个侧面和圆柱侧面，左视图反映正六棱柱的两个侧面和圆柱侧面，俯视图反映该物体投影后是一个正六边形和一个圆（中心重合）.

它的三视图为图 1-32.

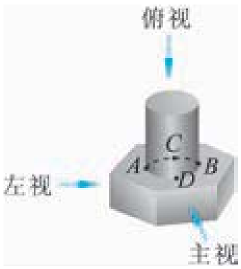


图 1-31

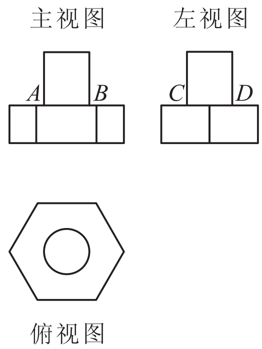


图 1-32

例 5　画出如图 1-33 所示组合体的三视图.

解　这是一个轴承架的模型（有轴承孔），它是由两个长方体和一个半圆柱体拼接而成，并挖去了一个与该半圆柱同心的圆柱（形成圆孔）. 它的视图是轴对称图形，轴承架上的圆孔，在主视图和俯视图中为不可见轮廓线，用虚线画出. 它的三视图为图 1-34.

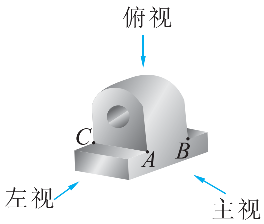


图 1-33

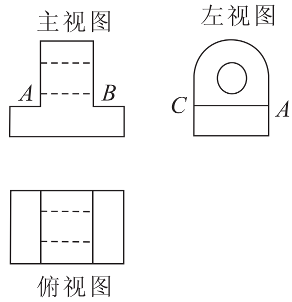


图 1-34

绘制三视图时，要注意：

1. 主、俯视图长对正；主、左视图高平齐；俯、左视图宽相等，前后对应.

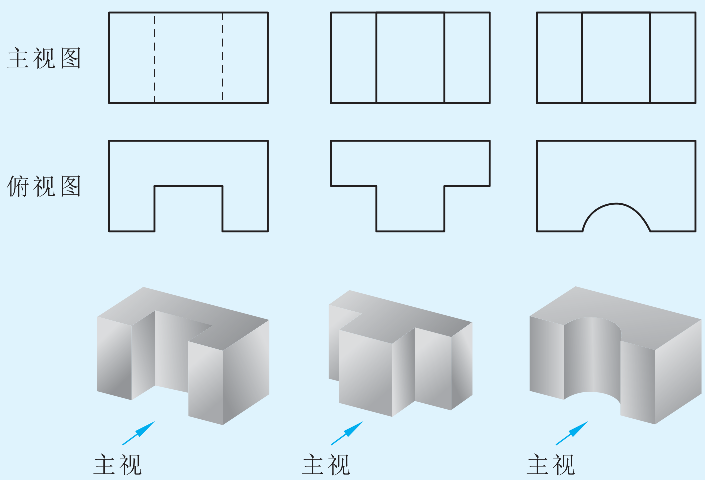
2. 在三视图中，需要画出所有的轮廓线，其中，视线所见的轮廓线画实线，看不见的轮廓线画虚线.

3. 同一物体放置的位置不同，所画的三视图可能不同.

4. 清楚简单组合体是由哪几个基本几何体组成的，并注意它们的组成方式，特别是它们的交线位置.

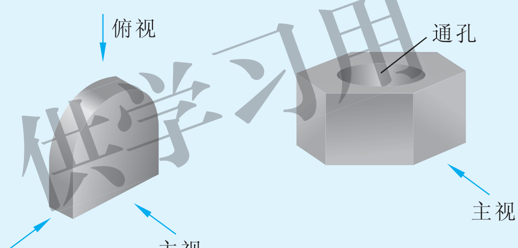
练 习

1. 判断以下物体的主视图和俯视图有无错误，如果有错，请改正，并分别画出它们的左视图.



（第 1 题）

2. 标出下列几何体的视图方向，并画出它们的三视图.



（第 2 题）

3.2 由三视图还原成实物图

我们由实物图可以画出它的三视图，实际生产中，工人要根据三视图加工零件，需要由三视图还原成实物. 这要求我们能由三视图想象它的空间实物形状.

例 6 图 1-35 是 4 个三视图和 4 个实物图，请将三视图和实物图正确配对.

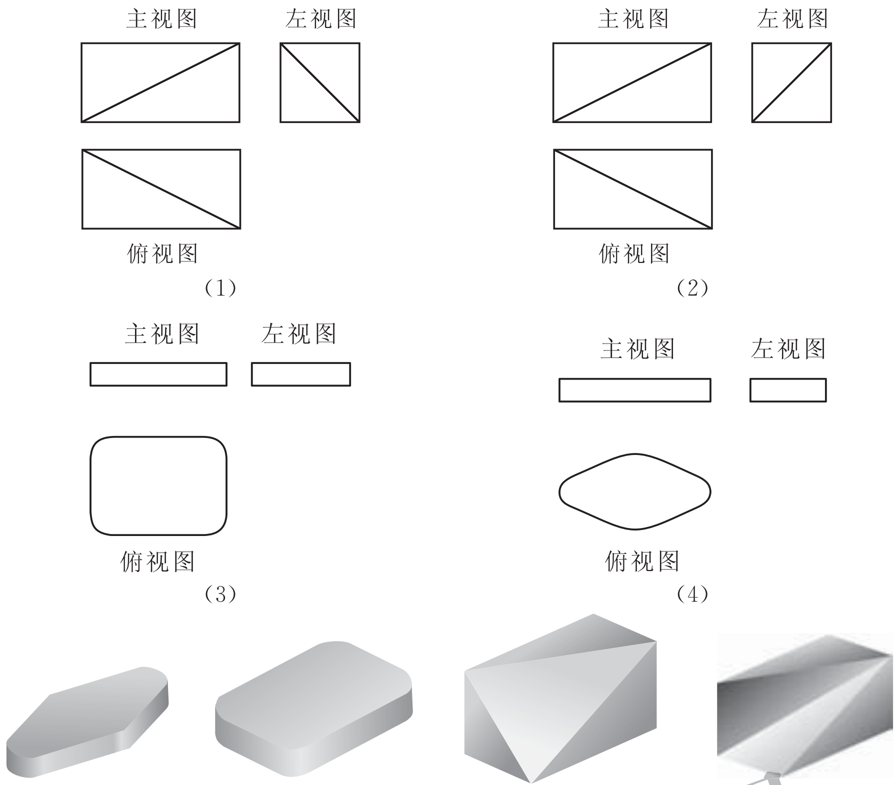


图 1-35

解　(1)的实物图形是 C;由(3)和(4)的俯视图可以看出:(3)(4)分别对应 B,A,于是(2)对应 D.

例 7　根据三视图想象物体原形,并画出物体的实物草图:

(1) 三视图 1-36;

(2) 三视图 1-37.

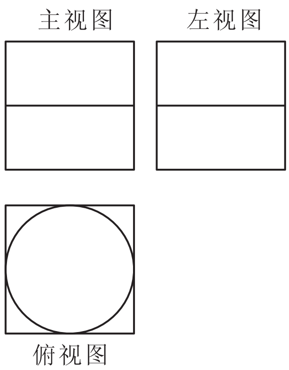


图 1-36

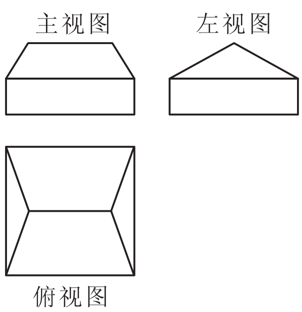
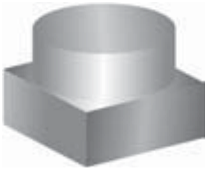


图 1-37

解　(1) 由俯视图并结合其他两个视图可以看出,这个物体是由一个圆柱和一个正四棱柱组合而成,圆柱的下底面圆和正四棱柱的上底面正方形内切. 它的实物草图如图 1-38(1);


(1)

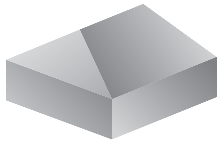

(2)

图 1-38

(2) 由三视图知，该物体下部分是一个长方体，上部分的表面是两个等腰梯形和两个等腰三角形，它的实物草图如图 1-38(2).

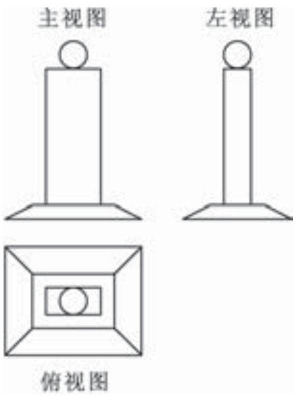


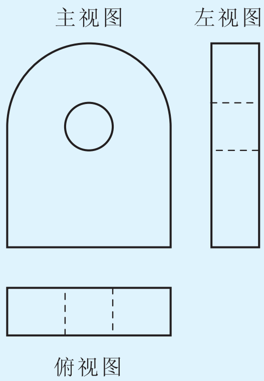
图 1-39

思考交流

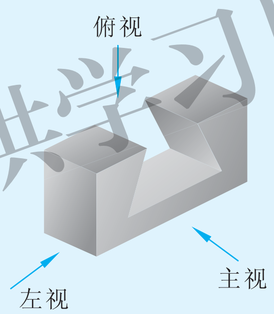
图 1-39 是一个奖杯的三视图，请画出它的实物图，并与同伴交流.

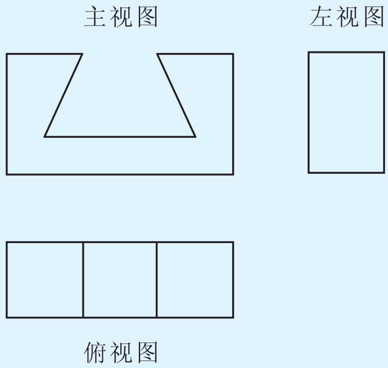
练　习

1. 请根据三视图想象物体原形，并画出它的实物图.
2. 下列物体的三视图有无错误？如果有，请指出并改正.



（第 1 题）



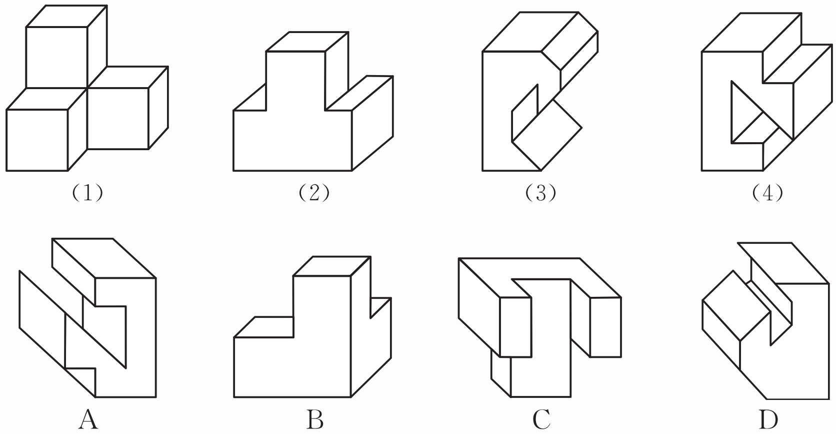


（第 2 题）

习 题 1—3

A　组

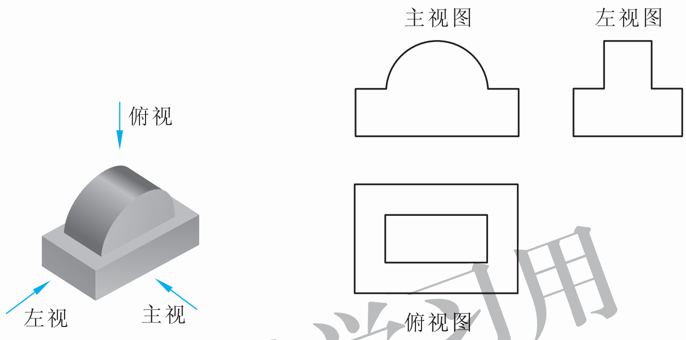
1. 下图中展示的是将 4 个正方体各自分割成两部分的不同放置，这些正方体的第一部分在位置(1)～(4)上，第二部分在位置 A～D 上. 请为(1)～(4)的每一部分在 A～D 中找出它的配对部分，用线连上.



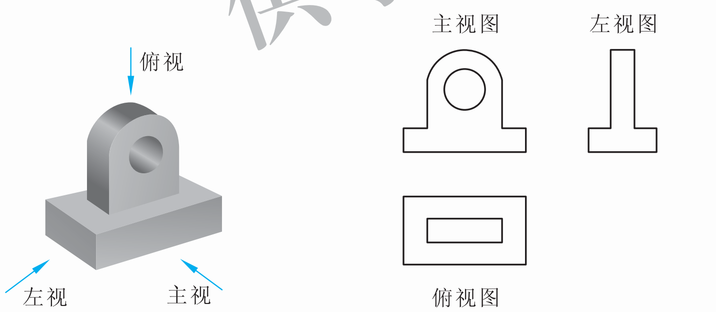
（第 1 题）

2. 添线补全下面物体的三视图.

(1)

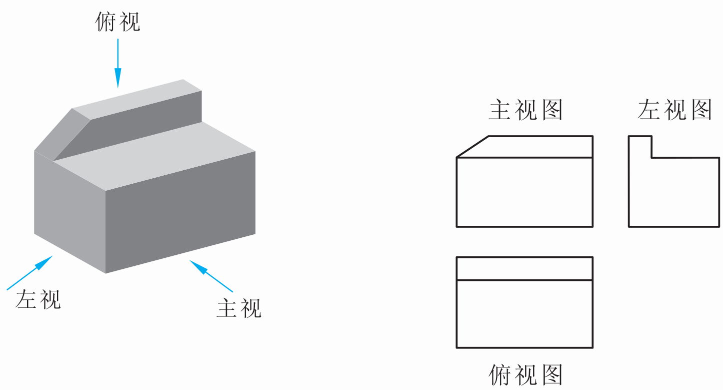


(2)



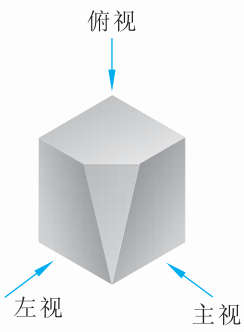
（第 2 题）

3. 下列物体的三视图有无错误？如果有，请指出并改正.

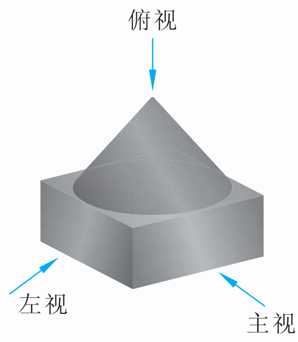


（第 3 题）

4. 画出下列几何体的三视图.



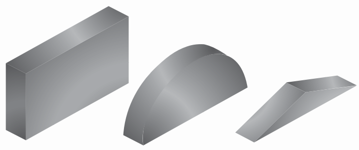
(1)



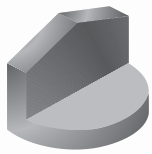
(2)

(第 4 题)

5. 由下图(1)中的三个几何体可组成不同的组合体,如(2)(3)(4).请分别画出它们的三视图.

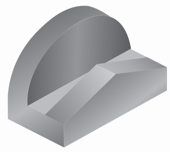


(1)



(2)

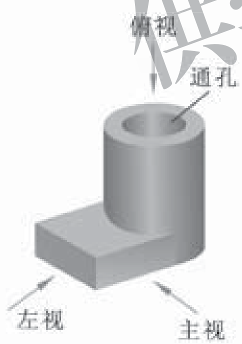
(3)



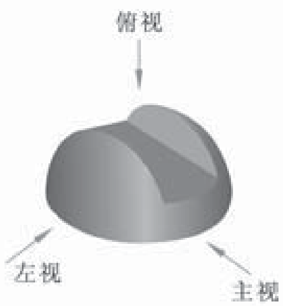
(4)

(第 5 题)

6. 画出下列几何体的三视图.



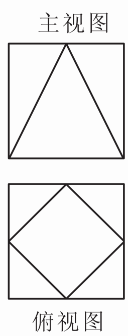
(1)



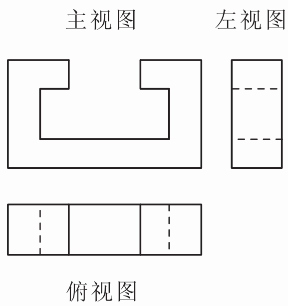
(2)

(第 6 题)

7. 根据以下三视图想象物体原形,并分别画出物体的实物图.



(1)



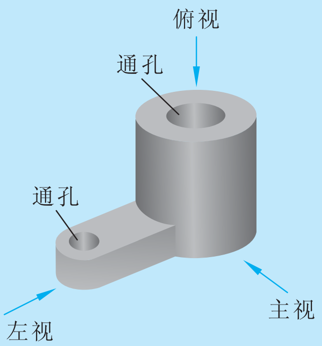
(2)

(第 7 题)

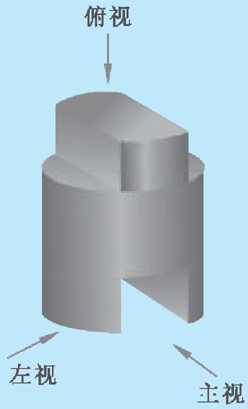
B 组

1. 画出你家中的一个茶杯的三视图.

2. 画出下面几何体的三视图.



(1)



(2)

(第 2 题)

§4　空间图形的基本关系与公理

4.1　空间图形基本关系的认识

空间图形是丰富的，它由一些基本的图形：点、线、面所组成. 认识清楚它们的位置关系，对于我们认识空间图形是很重要的.

实例分析

长方体是我们最常见的空间图形，如图 1-40 所示. 一般我们把长方体记为：长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$. 为了直观地了解点、线、面的位置关系，我们先观察长方体.

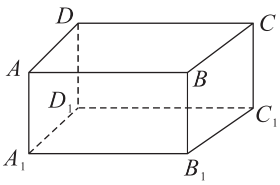
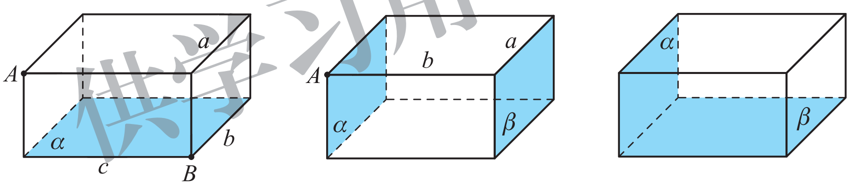


图 1-40



(1)　(2)　(3)

图 1-41

观察如图 1-41(1)～(3)所示的长方体，我们知道长方体有 8 个顶点、12 条棱、6 个表面. 12 条棱对应 12 条棱所在的直线，6 个表面对应 6 个表面所在的平面. 这些直线、平面及顶点的位置关系有哪些呢?

抽象概括

空间图形的基本关系主要指的是：空间中点与直线、点与平面、直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系.

1. 空间点与直线的位置关系有两种：

点在直线上和点在直线外. 如图 1-41(1)中，点 B 在直线 b 上，但在直线 a 外，记作：$B\in b, B\notin a$.

2. 空间点与平面的位置关系有两种：

点在平面内和点在平面外. 如图 1-41(1)中，点 B 在平面 α 内，但

点 A 在平面 α 外，记作：$B\in\alpha$，$A\notin\alpha$.

直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系将在后面讨论.

练　习

1. 观察图 1-41 所示的长方体，再举出一些点与直线、点与平面的位置关系的例子.
2. 观察你周围的空间图形，举出一些点与直线、点与平面的位置关系的例子.

4.2　空间图形的公理

在初中数学学习中，我们用基本事实（公理）刻画了平面上的基本图形（点、直线）以及它们最基本的性质，并在此基础上推导出了一些其他的性质. 例如，我们学过以下一些基本事实（公理）：

两点确定一条直线.

两点之间线段最短.

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

同样，在生产与生活中，人们把经过长期观察与实践总结出的平面的一些最基本性质当作公理，作为进一步推理的基础.

两点确定一条直线，那么怎样确定一个平面呢？

在日常生活中，照相机的三脚架，施工用的支脚架等，都是由不在一条直线上的三个脚（点）支撑，这样，可以使这些物体平稳放置（图 1-42）. 上面的事实与类似的经验可以归结为下面的公理：

图 1-42

公理 1　过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面（即可以确定一个平面）.

这个公理刻画了平面的性质. 由这个公理，再结合初中学的“两

点确定一条直线”容易得到以下三个推论：

推论 1：一条直线和直线外一点确定一个平面.

推论 2：两条相交直线确定一个平面.

推论 3：两条平行直线确定一个平面.

公理 1 及其推论给出了确定平面的依据.

例如，长方体中，不共线的三点 A，C，D_1 确定平面 ACD_1（图 1-43(1)）；直线 BC_1 和直线外一点 A 确定平面 ABC_1D_1（图 1-43(2)）.

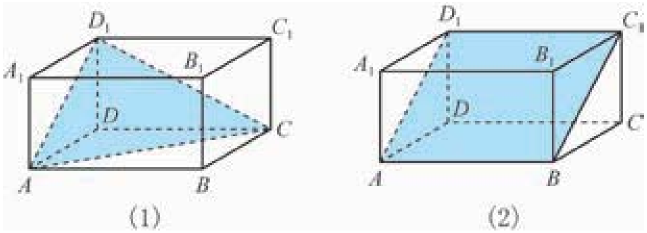


图 1-43

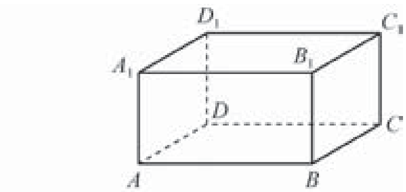


图 1-44

在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中（图 1-44），可以看到，A，B 两点在平面 $ABCD$ 内，那么整条直线 AB 都在平面 $ABCD$ 内；A，A_1 两点在平面 A_1ADD_1 内，那么直线 AA_1 上的所有点都在平面 A_1ADD_1 内. 我们把它作为公理.

公理 2　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内（即直线在平面内）.

公理 2 也可以用符号表示为：

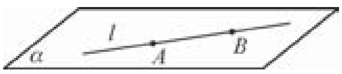


图 1-45

如图 1-45 所示，给定点 A，B 和直线 l 以及平面 α. 若 $A\in l$，$B\in l$，且 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，则 $l\subsetneqq\alpha$.

这一公理反映了平面：直、平，弯曲的面就不具有这个性质. 这个公理表达了直线与平面的位置关系：直线 AB 在平面 $ABCD$ 内；直线 AB 与平面相交；直线 AB 与平面不相交，即平行.

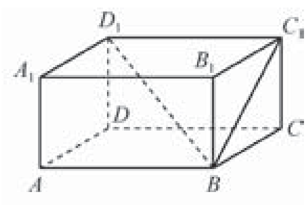


图 1-46

如图 1-46 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB 在平面 $ABCD$ 内，直线 D_1B 与平面 $ABCD$ 相交，直线 A_1B_1 平行于平面 $ABCD$. 记作：直线 $AB\subsetneqq$ 平面 $ABCD$，直线 $D_1B\cap$ 平面 $ABCD=B$，直线 $A_1B_1\parallel$ 平面 $ABCD$.

长方体的任意两个面，要么平行，要么交于一条直线. 这个事实可以抽象为一条公理.

公理 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

公理 3 也可以用符号表示为：

给定点 P 以及平面 α,β，若点 $P\in\alpha$ ，且 $P\in\beta$. 则存在直线 l，使得 $\alpha\cap\beta=l$，且 $P\in l$（图 1-47）.

公理 3 表达了平面与平面的位置关系：两个平面重合；两个平面相交于一条直线（相交平面）；两个平面不相交（称这两个平面平行）.

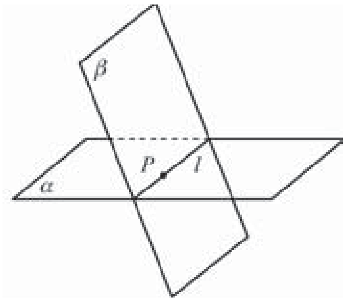


图 1-47

在初中，学习了“在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.”

这个性质可以推广到空间，作为空间平行直线的基本性质：

公理 4　平行于同一条直线的两条直线平行.

这个公理表明，空间平行于一条已知直线的所有直线都互相平行. 它给出了判断空间两条直线平行的依据. 公理 4 表述的性质通常叫作空间平行线的传递性.

根据公理 4，我们可以知道，空间两条直线的位置关系可以是：

相交，如图 1-48(1)所示，$a\cap b=A$；

平行，如图 1-48(2)所示，$a/\!/b$；

无论相交还是平行，它们都共面.

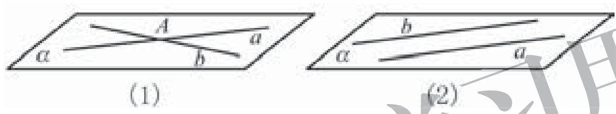


图 1-48

空间两条直线还有第三种位置关系，如图 1-49 所示的长方体中，直线 AD 与直线 BB_1；直线 AD 与直线 BD_1，它们不同在任何一个平面内.

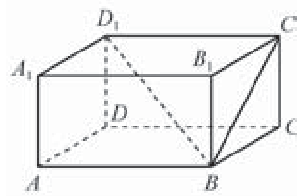


图 1-49

我们把不共面（不同在任何一个平面内）的两条直线叫作**异面直线**.

这样空间两条直线的位置关系有且只有三种：

共面直线 $\begin{cases}\text{相交直线：在同一平面内，有且只有一个公共点.}\\\text{平行直线：在同一平面内，没有公共点.}\end{cases}$

异面直线：不共面的两条直线，没有公共点.

为了表示异面直线 a,b 不共面的特点，作图时，通常用一个或两个平面衬托. 如图 1-50 所示.

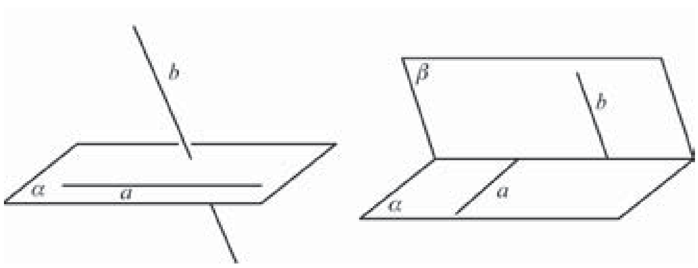


图 1-50

思考交流

我们了解了空间点、直线和平面的基本位置关系，请分析出如图1-49所示的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中点、线、面的位置关系，并总结空间点、线、面间的基本关系，及公理在刻画点、线、面位置关系中的作用.

练 习 1

1. 一扇门用两个合叶和一把锁就可以固定了，你知道其中的道理吗？
2. M 为直线 l 上的点，且点 M 不在平面 α 内，则 l 与 α 的公共点最多有________个.
3. 过已知直线外的一个点最多可以作________条直线和已知直线平行.
4. 给你6根等长的火柴棒，最多能做几个等边三角形？你做出的图形中有几个顶点、几条边、几个面？

在平面内，如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.（图1-51(1)，$AO /\!/ A'O'$，$BC /\!/ B'O'$，$\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$ 相等，$\angle AOC$ 和 $\angle A'O'B'$ 互补.）

如图1-51(2)，在空间中亦有：

定理　空间中，如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

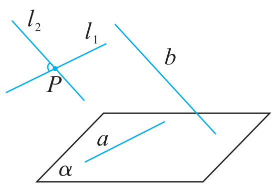
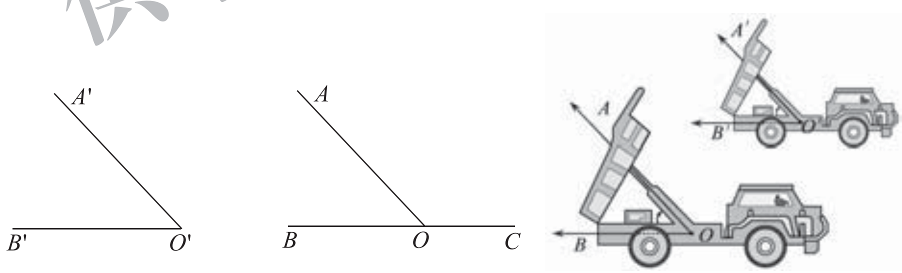


图 1-52



(1)　　(2)

图 1-51

❶四个顶点不在同一平面内的四边形叫作空间四边形.

如图1-52所示，过空间任意一点 P 分别引两条异面直线 a，b 的平行线 l_1，l_2（$a /\!/ l_1$，$b /\!/ l_2$），这两条相交直线所成的锐角（或直角）就是**异面直线 a，b 所成的角**. 如果两条异面直线所成的角是直角，我们称这两条直线互相垂直，记作：$a \perp b$.

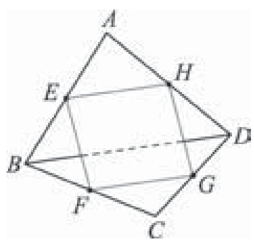


图 1-53

例 1　在空间四边形❶ $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明　如图1-53，连接 BD.

因为 FG 是 $\triangle CBD$ 的中位线，所以

$$FG /\!/ BD,\quad FG=\frac{1}{2}BD.$$

又因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以

$$EH /\!/ BD,\quad EH=\frac{1}{2}BD.$$

根据公理 4，$FG /\!/ EH$，且 $FG=EH$.

所以，四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

例 2　如图 1-54，将无盖正方体纸盒展开，直线 AB，CD 在原正方体中的位置关系是(　　).

A. 平行　　B. 相交且垂直　　C. 异面直线　　D. 相交成 60°

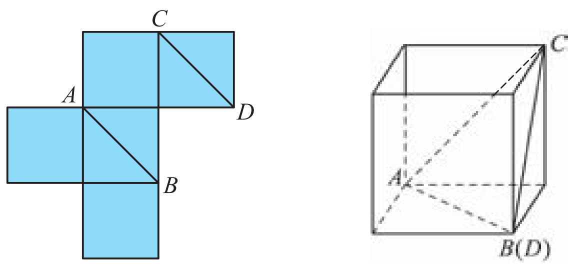


图 1-54

解　将上面的展开图还原成正方体，点 B 与点 D 重合. 容易知道 $AB=BC=CA$，从而 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以选 D.

练 习 2

1. 已知 $AB /\!/ PQ$，$BC /\!/ QR$，$\angle ABC=30°$，则 $\angle PQR$ 等于(　　).

   A. 30°　　B. 30°或 150°　　C. 150°　　D. 以上结论都不对

2. 在空间，下列命题正确的个数为(　　).

   (1) 有两组对边相等的四边形是平行四边形；

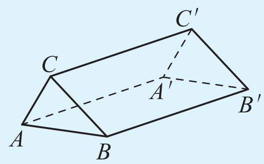
   (2) 四边相等的四边形是菱形；

   (3) 平行于同一条直线的两条直线平行；

   (4) 有两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，并且 $AA' /\!/ BB'$，$AA'=BB'$，$BB' /\!/ CC'$，$BB'=CC'$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



(第 3 题)

习 题 1—4

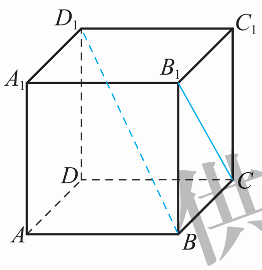
A 组

1. 经过空间三点一定能确定一个平面吗?
2. 已知$\triangle ABC$的两边AC,BC分别交平面α于点M,N,设直线AB与平面α交于点O,则点O与直线MN的位置关系如何?
3. 观察下面的图形,指出它们表示的空间图形的不同之处.

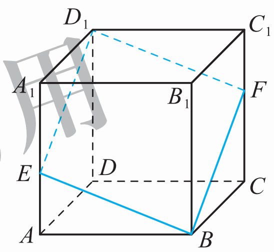
(1)　　(2)

(第 3 题)

4. 如图,正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,哪几条棱所在直线与棱AB所在直线是异面直线? 哪几条棱所在直线与直线B_1C是异面直线? 哪几条棱所在直线与直线BD_1是异面直线?



(第 4 题)

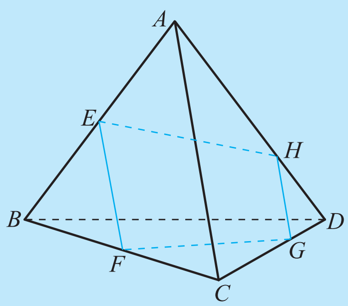


(第 5 题)

5. 如图,已知E,F分别是正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱AA_1和棱CC_1上的点,且$AE=C_1F$. 求证:四边形$EBFD_1$是平行四边形.

B 组

1. 三条直线经过同一点,过每两条直线作一个平面,则可以作______个不同的平面. 这些平面把空间分为________部分.
2. 如图,$ABCD$为空间四边形,点E,F分别是AB,BC的中点,点G,H分别在CD,AD上,且$DH=\frac{1}{3}AD$,$DG=\frac{1}{3}CD$. 求证:直线EH,FG必相交于一点,且这个交点在直线BD上.

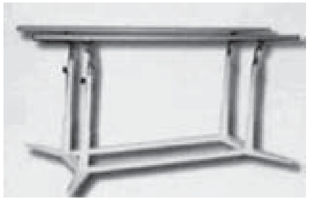


(第 2 题)

§5　平 行 关 系

5.1　平行关系的判定

一、直线与平面平行的判定



问题提出

我们知道，一条直线和一个平面有三种位置关系（图 1-55）：直线 a 在平面 α 内（记作 $a \subsetneqq \alpha$），直线 a 与平面 α 相交（记作 $a \cap \alpha = A$），直线 a 与平面 α 平行（记作 $a /\!/ \alpha$）.

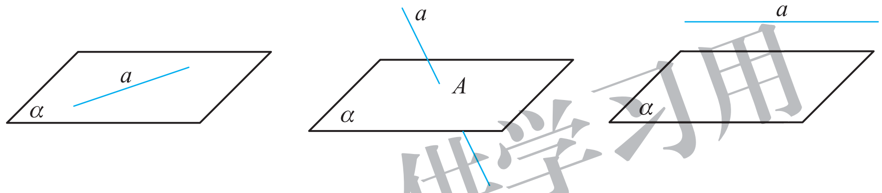


图 1-55

如何判定一条直线和一个平面平行呢？

观察如图 1-56(1)(2)所示的长方体，我们可以知道：

直线 a 不在平面 α 内，直线 b 在平面 α 内，$a /\!/ b$，这时，$a /\!/ \alpha$.

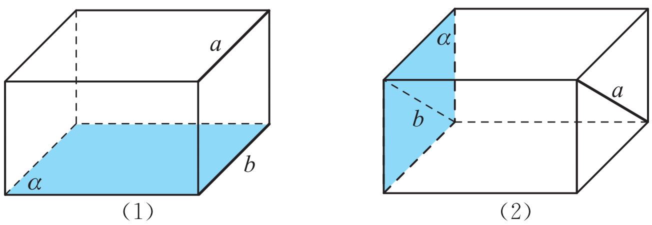


图 1-56

抽象概括

定理 5.1　若平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.

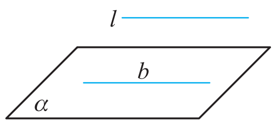


图 1-57

我们通常把这个定理叫作直线和平面平行的判定定理，可以表示为：若直线 $l \not\subset$ 平面 α，直线 $b \subsetneqq \alpha$，$l /\!/ b$，则 $l /\!/ \alpha$（图 1-57）.

在画直线和平面平行时，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形内的一条线段平行或与平行四边形的一边平行(图 1-58).

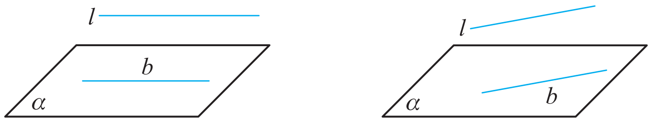


图 1-58

家庭中安装方形镜子时，为了使镜子的上边框与天花板平行，只需要使镜子的上边框与天花板和墙面的交线平行，显然用到了这个判定定理；安装教室里的日光灯，也用到了这个判定定理. 你还能举出生活中应用此判定定理的其他例子吗？

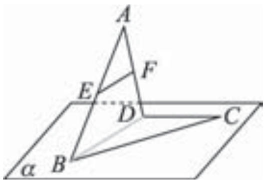


图 1-59

例 1　空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB，AD 的中点. 判断 EF 与平面 BCD 的位置关系.

解　设由相交直线 BC，CD 所确定的平面为 α，如图 1-59，连接 BD. 易见，EF 不在平面 α 内. 由于 E，F 分别为 AB，AD 的中点，所以 $EF /\!/ BD$. 又 BD 在平面 α 内，所以 $EF /\!/ \alpha$.

例 2　如图 1-60 所示，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，AD 的中点. 试指出图中满足线面平行位置关系的所有情况.

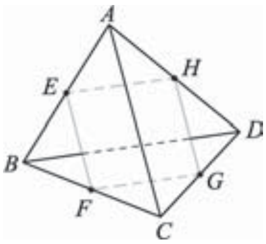


图 1-60

解　由 $EF /\!/ AC /\!/ HG$，得

(1) $EF /\!/$ 平面 ACD；

(2) $AC /\!/$ 平面 $EFGH$；

(3) $HG /\!/$ 平面 ABC.

由 $BD /\!/ EH /\!/ FG$，得

(4) $BD /\!/$ 平面 $EFGH$；

(5) $EH /\!/$ 平面 BCD；

(6) $FG /\!/$ 平面 ABD.

二、平面与平面平行的判定

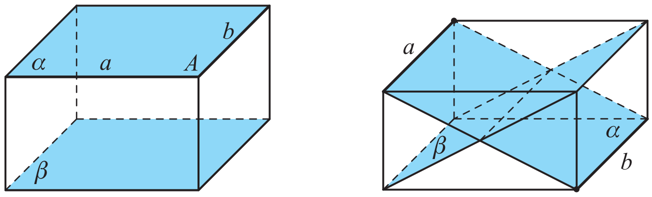
问题提出

如何判定两个平面互相平行呢？

先观察图 1-61(1)中的长方体,我们可以知道:

平面 α 内的直线 a 与直线 b 交于点 A,a//平面 β,b//平面 β,这时,α//β.

再观察图 1-61(2)中的长方体,虽然在平面 α 内的两条直线 a 与 b 都与平面 β 平行,但是 α 与 β 并不平行.



(1)　　(2)

图 1-61

抽象概括

定理 5.2　如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

我们通常把这个定理叫作平面和平面平行的判定定理,可以表示为:若直线 $a\not\subseteq$平面 β,直线 $b\not\subseteq\beta$,$a\subsetneqq$平面 α,$b\subsetneqq\alpha$,$a\cap b=A$,并且 $a/\!/\beta$,$b/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$(图 1-62).

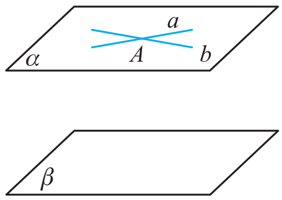
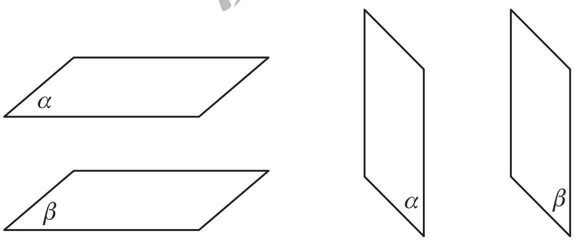


图 1-62

在画两个平行的平面时,通常把表示这两个平面的平行四边形的对应边画成互相平行的(图 1-63).



(1)　　(2)

图 1-63

例 3　已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,求证:

$$\text{平面 } AB_1D_1 /\!/ \text{平面 } C_1BD.$$

证明　如图 1-64 所示,$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,所以

$$BD/\!/B_1D_1.$$

又 $B_1D_1\subsetneqq$平面 AB_1D_1,从而

$$BD/\!/\text{平面 } AB_1D_1.$$

同理可证　$BC_1/\!/\text{平面 } AB_1D_1$.

又直线 BD 与直线 BC_1 交于点 B,因此

$$\text{平面 } C_1BD/\!/\text{平面 } AB_1D_1.$$

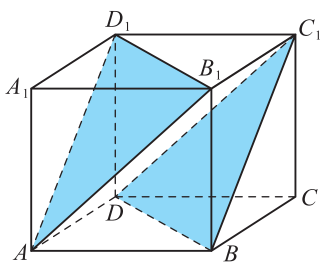


图 1-64

练 习

1. 观察教室内现有的物体.

   (1) 找出直线和平面平行的例子;

   (2) 找出两个平面互相平行的例子.

2. 过直线外一点与该直线平行的平面有________个. 过平面外一点与该平面平行的直线有________条.

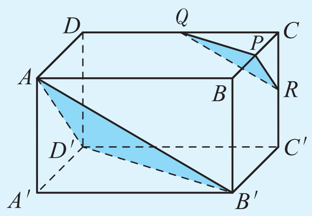
3. $\square ABCD$ 和$\square CDEF$ 有一公共边 CD,它们不在同一平面内,M 为 FC 的中点. 求证:$AF /\!/$ 平面 MBD.

4. 如图,长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,P,Q,R 分别为 BC,CD,CC' 的中点.

   (1) 判断直线 $B'D'$ 与平面 PQR 的位置关系;

   (2) 判断平面 $AB'D'$ 与平面 PQR 的位置关系;

   (3) 判断平面 PQR 与平面 $DD'B'B$ 的位置关系.



(第 4 题)

5.2 平行关系的性质

一、直线与平面平行的性质

观察图 1-65(1)(2)的长方体,我们可以知道:

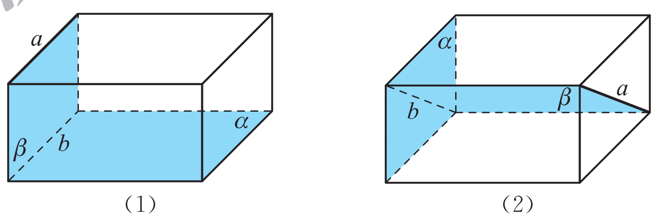


图 1-65

直线 $a /\!/$ 平面 α,经过 a 的平面 β 与 α 的交线是 b,这时,$a /\!/ b$.

一般地,如果直线 $l /\!/$ 平面 α,$l \subsetneqq$ 平面 β,$\alpha \cap \beta = b$,这时,直线 b 与 l 平行吗?

因为 $l /\!/ \alpha$,所以 l 和 α 没有公共点.

又因为 b 在 α 内,所以 l 和 b 也没有公共点.

而 l 和 b 都在平面 β 内,又没有公共点,所以 $l /\!/ b$(图 1-66).

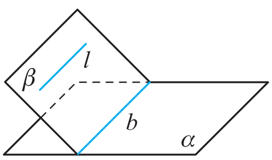


图 1-66

抽象概括

定理 5.3 如果一条直线与一个平面平行,那么过该直线的任意一个平面与已知平面的交线与该直线平行.

我们通常把这个定理叫作直线和平面平行的性质定理.

例 4　如图 1-67，A,B,C,D 在同一平面内，$AB /\!/$ 平面 α，$AC /\!/ BD$，且 AC,BD 与 α 分别交于点 C,D. 求证：$AC=BD$.

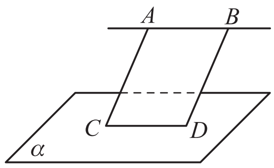


图 1-67

证明　连接 CD.

因为 A,B,C,D 在同一平面内，$AB /\!/$ 平面 α，所以

$$AB /\!/ CD.$$

又因为 $AC /\!/ BD$，所以四边形 $ABDC$ 是平行四边形，因此

$$AC=BD.$$

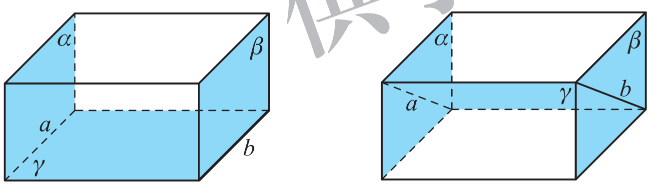
练　习　1

1. 如果直线 $a /\!/$ 平面 α，直线 $b \subsetneqq \alpha$，那么 a 与 b 一定平行吗？为什么？
2. 如果直线 $a /\!/$ 直线 b，且 $a /\!/$ 平面 α，那么 b 与 α 的位置关系是（　　）.

   A. 相交　　B. $b /\!/ \alpha$　　C. $b \subsetneqq \alpha$　　D. $b /\!/ \alpha$ 或 $b \subsetneqq \alpha$

二、平面与平面平行的性质

观察图 1-68(1)(2)的长方体，我们可以知道：平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，平面 γ 分别与 α,β 交于直线 a,b，这时，$a /\!/ b$.



(1)　　(2)

图 1-68

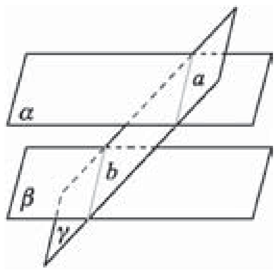


图 1-69

一般地，平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，平面 $\gamma \cap \alpha = a$，$\beta \cap \gamma = b$，这时，直线 b 与直线 a 平行吗？（图 1-69）

由于两条交线 a,b 分别在两个平行平面 α,β 内，所以 a 与 b 不相交，又 a,b 都在同一平面 γ 内，由平行线的定义可知 $a /\!/ b$.

抽象概括

定理 5.4　**如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行.**

我们通常把这个定理叫作平面和平面平行的性质定理.

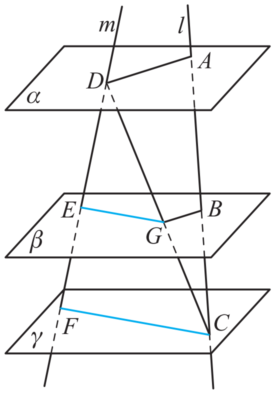


图 1-70

例 5 如图 1-70，平面 α,β,γ 两两平行，且直线 l 与 α,β,γ 分别相交于点 A,B,C，直线 m 与 α,β,γ 分别相交于点 D,E,F，$AB=6$，$BC=2$，$EF=3$. 求 DE 的长.

解 当直线 m 与 l 共面时，该平面与 α,β,γ 分别交于直线 AD，BE，CF，因为 α,β,γ 两两平行，所以 $AD/\!/BE/\!/CF$，故 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

当直线 m 与 l 不共面时，连接 DC.

设 DC 与 β 相交于点 G，则平面 ACD 与 α,β 分别相交于直线 AD，BG，平面 DCF 与 β,γ 分别相交于直线 GE，CF.

因为 α,β,γ 两两平行，所以

$$BG/\!/AD,\ GE/\!/CF.$$

因此 $$\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC},\ \frac{DG}{GC}=\frac{DE}{EF}.$$

所以 $$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

又因为 $AB=6$，$BC=2$，$EF=3$，所以，$DE=9$.

思考交流

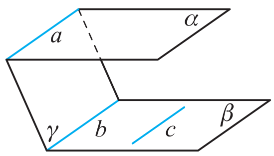


图 1-71

如图 1-71，平面 $\alpha/\!/$平面 β，平面 γ 与 α 交于直线 a，γ 与 β 交于直线 b，直线 c 在 β 内，且 $c/\!/b$.

（1）判断 c 与 a 的位置关系，并说明理由；

（2）判断 c 与 α 的位置关系，并说明理由.

练 习 2

1. 已知两条直线 m,n 及平面 α，判断下面四个命题是否正确：
   （1）若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$；
   （2）若 $m/\!/\alpha$，$m/\!/n$，则 $n/\!/\alpha$；
   （3）若 $m/\!/\alpha$，则 m 平行于 α 内所有直线；
   （4）若 m 平行于 α 内无数条直线，则 $m/\!/\alpha$.
2. 如果一条直线与两个平行平面中的一个平行，那么这条直线与另一个平面的位置关系是（　　）.
   A. 平行　　　　B. 相交
   C. 在平面内　　D. 平行或在平面内
3. 如果 3 个平面把空间分成 4 部分，那么这 3 个平面有怎样的位置关系？如果 3 个平面把空间分成 6 部分，那么这 3 个平面有怎样的位置关系？

习 题 1—5

A　组

1. 已知直线 a 和直线 a 外两点 A，B.

   （1）当直线 $AB /\!/ a$ 时，过 A，B 可作多少个平面与 a 平行？

   （2）当直线 AB 与 a 不平行时，过 A，B 可作多少个平面与 a 平行？

2. 已知直线 $m /\!/$ 平面 α，直线 n 在 α 内，则 m 与 n 的关系为（　　）.

   A. 平行　　　　B. 相交

   C. 平行或异面　　　　D. 相交或异面

3. 经过平面 α 外两点，作与 α 平行的平面，则这样的平面可以作（　　）.

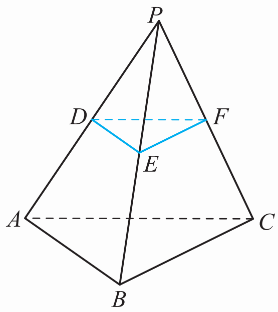
   A. 1 个或 2 个　　　　B. 0 个或 1 个

   C. 1 个　　　　D. 0 个

4. 在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，P，R 分别为 BC，CC' 上的动点，当点 P，R 满足什么条件时，$PR /\!/$ 平面 $AB'D'$？

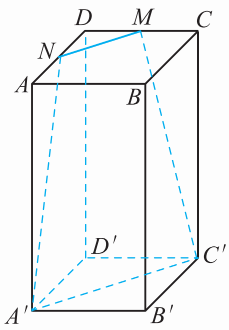
5. （1）平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行，问 $\alpha /\!/ \beta$ 是否正确，为什么？

   （2）平面 α 内的所有直线与平面 β 都平行，问 $\alpha /\!/ \beta$ 是否正确，为什么？



（第 6 题）

6. 如图，已知点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外任一点，点 D，E，F 分别在射线 PA，PB，PC 上，并且 $\dfrac{PD}{PA}=\dfrac{PE}{PB}=\dfrac{PF}{PC}$. 求证：平面 $DEF /\!/$ 平面 ABC.



（第 7 题）

7. 如图，$ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 为长方体，底面是边长为 a 的正方形，高为 $2a$，M，N 分别是 CD 和 AD 的中点.

   （1）判断四边形 $MNA'C'$ 的形状；

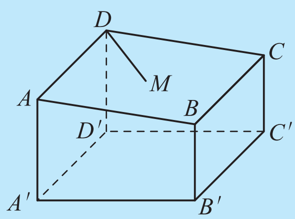
   （2）求四边形 $MNA'C'$ 的面积.

B　组

1. 设 A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点，M，N 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心. 求证：$MN /\!/$ 平面 BCD.

2. 木工小罗在处理如图所示的一块木料时，发现该木料表面 $ABCD$ 内有一裂纹 DM，已知 $B'C'$ 平行于平面 AC. 他打算经过点 M 和棱 $B'C'$ 将木料锯开，却不知如何画线，你能帮助他解决这个问题吗？

3. 已知 $ABCD$，$ABEF$ 是两个正方形，且不在一个平面内，M，N 分别是对角线 AC，FB 上的点，且 $AM=FN$. 求证：$MN /\!/$ 平面 CBE.



（第 2 题）

§6 垂直关系

6.1 垂直关系的判定

天安门广场上竖立的国旗杆与地面是垂直的，将书打开直立在水平桌面上，书脊和书的各页面都与桌面垂直.

一、直线与平面垂直的判定

问题提出

如图 1-72，拿一块教学用的直角三角板，放在墙角，使三角板的直角顶点 C 与墙角重合，直角边 AC 所在直线与墙角所在直线重合，将三角板绕 AC 转动，在转动过程中，直角边 CB 与地面紧贴，这就表示，AC 与地面垂直.

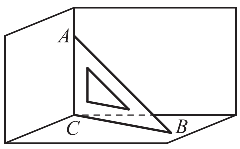


图 1-72

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，那么称这条直线和这个平面垂直.

如何判定一条直线和一个平面垂直呢？

先观察图 1-73(1)的长方体，我们可以知道：b，c 是平面 α 内的两条相交直线，直线 $a\perp b$，$a\perp c$，这时，$a\perp\alpha$.

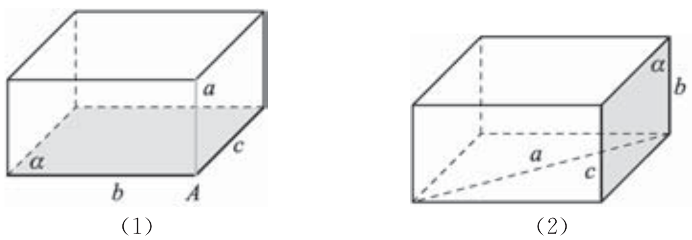


图 1-73

再观察图 1-73(2)的长方体，我们可以知道，平面 α 内的两条直线 b，c 不相交，虽然直线 a 与 b，c 都垂直，但是 a 与 α 不垂直.

抽象概括

定理 6.1　如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么该直线与此平面垂直.

我们通常把这个定理叫作直线和平面垂直的判定定理，可以表示为：若直线 $a \subsetneqq$ 平面 α，直线 $b \subsetneqq \alpha$，直线 $l \perp a$，$l \perp b$，$a \cap b = A$，则 $l \perp \alpha$（如图 1-74）.

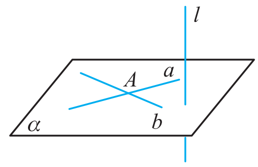


图 1-74

我们通常把表示直线的线段画成和表示平面的平行四边形的横边垂直（图 1-75）.

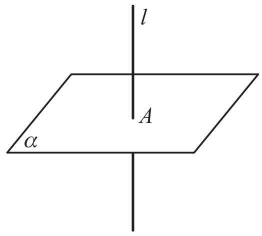


图 1-75

练　习 1

1. 观察教室内现有的物体，找出直线与平面垂直的例子.
2. 下列各种说法正确吗？为什么？
   (1) 如果一条直线和一个平面内的无数条直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直；
   (2) 如果一条直线和一个平面内的任何两条直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直；
   (3) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线和这个平面垂直.
3. 与不共线的三点距离都相等的点的个数是多少？

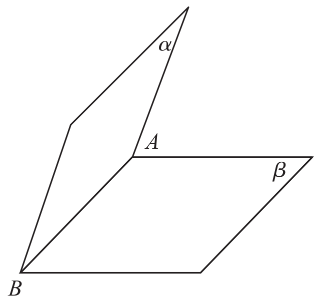
二、平面与平面垂直的判定

问题提出

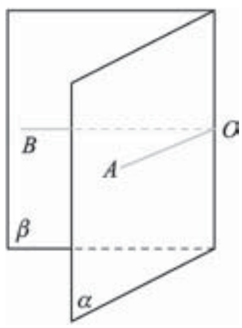
为了讨论两个平面相交的情况，我们需要引入有关的概念.

一个平面内的一条直线，把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫作**半平面**.

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作**二面角**，这条直线叫作**二面角的棱**，这两个半平面叫作**二面角的面**. 以直线 AB 为棱、半平面 α，β 为面的二面角，记作二面角 α-AB-β（图 1-76(1)）.



(1)



(2)

图 1-76

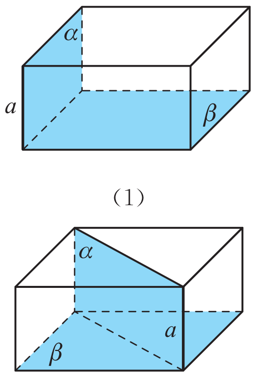
以二面角的棱上任一点为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫作**二面角的平面角**，如图 1-76(2)中的 $\angle AOB$. 平面角是直角的二面角叫作**直二面角**.

两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

将一支铅笔垂直于桌面，再用一本书紧贴着铅笔转动，观察书本和桌面的关系.

说　明

二面角的大小用它的平面角来度量，平面角的度数就是二面角的度数.



(1)

(2)

图 1-77

如何判定两个平面互相垂直呢？

观察图 1-77(1)(2)中的长方体，我们可以知道：平面 α 内的直线 a 与平面 β 垂直，这时，$\alpha\perp\beta$.

抽象概括

定理 6.2　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

我们通常把这个定理叫作平面和平面垂直的判定定理，可以表示为：若直线 $AB\subsetneqq$ 平面 β，$AB\perp$ 平面 α，则 $\beta\perp\alpha$(图 1-78).

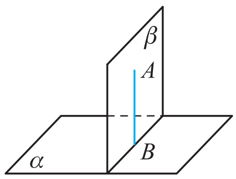
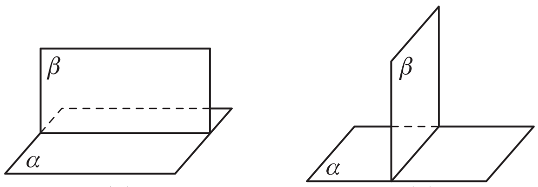


图 1-78



(1)　　(2)

图 1-79

在画两个垂直的平面时，通常把表示直立平面的平行四边形的竖边画成和表示水平平面的平行四边形的横边垂直(图 1-79).

建筑工人在准备砌墙时，常常在较高处固定一条端点系有铅锤的线，再沿着该线砌墙，就能保证所砌的墙面和水平面垂直. 实际上就用到了平面和平面垂直的判定定理.

你还能举出生活中的其他例子吗？

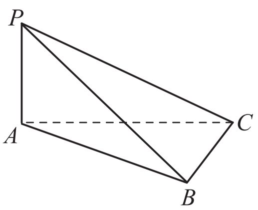


图 1-80

例 1　如图 1-80 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，$PA\perp$ 平面 ABC. 问：四面体 $PABC$ 中有几个直角三角形？

解　因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以

$$PA\perp AB, PA\perp AC, PA\perp BC.$$

所以$\triangle PAB$，$\triangle PAC$ 是直角三角形.

又 $PA\perp BC$，$AB\perp BC$，且 $PA\cap AB=A$，所以

$$BC\perp \text{平面 } PAB.$$

又 $PB\subsetneqq$ 平面 PAB，于是 $BC\perp PB$，

所以$\triangle PBC$ 也是直角三角形.

所以四面体 $PABC$ 中的四个面都是直角三角形.

思考交流

仔细观察，你可以从图 1-80 中得出几组互相垂直的平面？

例 2　如图 1-81，AB 为⊙O 的直径，⊙O 所在平面为 α，$PA\perp\alpha$ 于 A，C 为⊙O 上异于 A，B 的一点. 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.

证明　由 AB 为⊙O 的直径知，$BC\perp AC$.

又 $PA\perp\alpha$，$BC\subsetneqq\alpha$，所以 $PA\perp BC$.

而 $PA\cap AC=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAC.

又因为 $BC\subsetneqq$ 平面 PBC，从而，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.

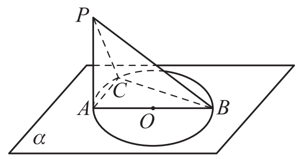


图 1-81

练　习　2

1. 观察教室内现有的物体，找出两个平面互相垂直的例子.
2. 画三个两两互相垂直的平面.
3. (1) 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，过 A_1，B，D 三个点作一个平面，请画出二面角 A_1-BD-A 的平面角，并说明作图的根据；

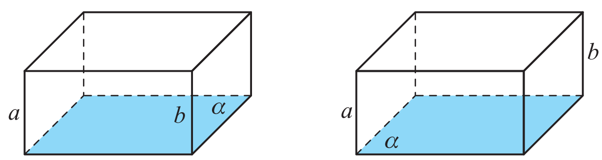
   (2) 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$. 请作出二面角 A-BD-C 的平面角，并说明作图的根据.
4. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 BB_1D_1D 与平面 BA_1C_1 的位置关系怎样？

6.2　垂直关系的性质

一、直线与平面垂直的性质

我们知道，“在平面内，如果两条直线同垂直于另一条直线，那么这两条直线平行”. 在空间中有相同或者类似的结论吗？

观察如图 1-82 所示的长方体，我们可以知道：直线 a 与直线 b 都垂直于平面 α，这时，$a/\!/b$.



(1)　　(2)

图 1-82

说　明

空间两条直线的垂直关系有两种情况：当两条直线在同一平面内时，为共面垂直，对这种垂直关系的判定，可以用平面几何的方法；当两条直线为异面直线时，称为异面垂直，以后我们还将学习用向量的方法加以判断.

一般地，如果直线 $a\perp$ 平面 α，直线 $b\perp\alpha$，这时，a 和 b 平行吗？

如图 1-83，假定 a 和 b 不平行.

设 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，垂足分别为 A，B.

过点 B 作 a 的平行线 b'，

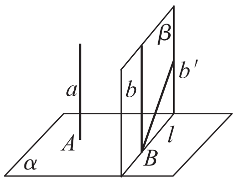


图 1-83

由异面直线垂直的定义，b' 与平面 α 内过点 A 的任意直线都垂直，也即有 $b'\perp\alpha$，

$b\cap b'=B$，故直线 b 与 b' 确定一个平面，记为 β，且记 $\alpha\cap\beta=l$，在平面 β 内，过点 B 有且仅有一条直线垂直于 l. 故 b' 与 b 重合，a 与 b 平行.

抽象概括

定理 6.3　如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

我们通常把这个定理叫作直线和平面垂直的性质定理.

例 3　如图 1-84，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，BD，BC'，DC' 分别为三条面对角线，$A'C$ 为一条体对角线.

求证：(1) $A'C\perp BD$；

(2) $A'C\perp$ 平面 DBC'.

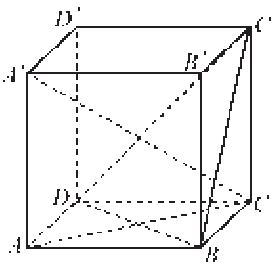


图 1-84

证明　(1) 连接 AC，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$A'A\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $A'A\perp BD$.

又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$.

又 $A'A\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 $A'AC$，从而 $A'C\perp BD$.

(2) 同理可证 $A'C\perp DC'$，而 $BD\cap DC'=D$，

所以 $A'C\perp$ 平面 DBC'.

二、平面与平面垂直的性质

观察图 1-85(1)(2)中的长方体，我们可以知道：

平面 $\alpha\perp$ 平面 β，α 内的直线 a 垂直于 α 与 β 的交线 b，这时，$a\perp\beta$.

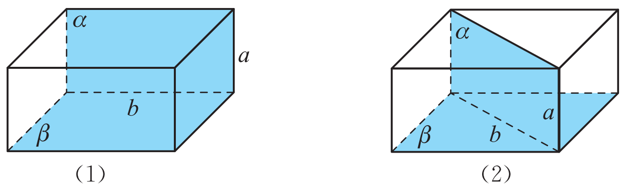


图 1-85

一般地，平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=MN$，$AB\subsetneqq\beta$，$AB\perp MN$ 于点 B，这时，直线 AB 和平面 α 垂直吗？

如图 1-86，在平面 α 内作直线 $BC \perp MN$，则 $\angle ABC$ 是二面角 α-MN-β 的平面角，因为平面 $\alpha \perp$ 平面 β，所以 $\angle ABC=90°$，即 $AB \perp BC$，又已知 $AB \perp MN$，从而 $AB \perp \alpha$.

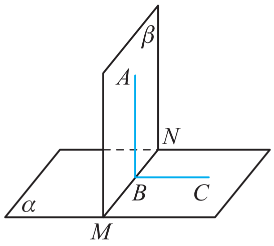


图 1-86

抽象概括

定理 6.4　两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

我们通常把这个定理叫作平面和平面垂直的性质定理.

例 4　如图 1-87，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，MN 在平面 $BCC'B'$ 内，$MN \perp BC$ 于点 M. 判断 MN 与 AB 的位置关系，并说明理由.

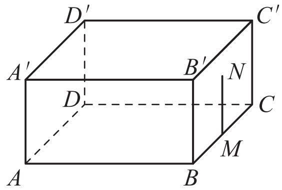


图 1-87

解　显然，平面 $BCC'B' \perp$ 平面 $ABCD$，交线为 BC. 因为 MN 在平面 $BCC'B'$ 内，且 $MN \perp BC$，所以

$$MN \perp \text{平面 } ABCD,$$

又 $AB \subsetneqq$ 平面 $ABCD$，从而　$MN \perp AB$.

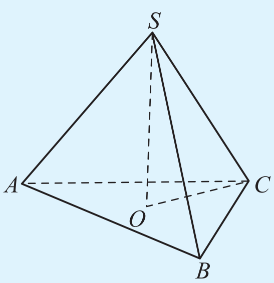
思考交流

从图 1-84 中，可以得出几组互相垂直的平面?

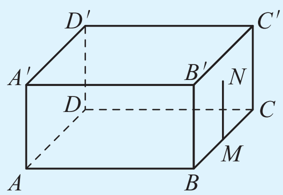
练　习

1. 通过一条线段的中点并且与这条线段垂直的平面，叫作这条线段的垂直平分面. 这个平面内任意一点到这条线段两端点的距离都相等吗? 为什么?
2. 空间四边形 $SABC$ 中，$SO \perp$ 平面 ABC，O 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

   求证：平面 $SOC \perp$ 平面 SAB.



（第 2 题）



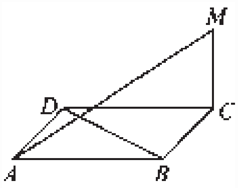
（第 3 题）

3. 如图，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，MN 在平面 $BCC'B'$ 内，$MN \perp BC$ 于点 M. 请你找出与直线 MN 垂直的直线和平面.

习 题 1—6

A 组

1. 三个角为直角的四边形一定是矩形吗？为什么？



（第 2 题）

2. 如图，如果 $MC\perp$ 菱形 $ABCD$ 所在平面，那么 MA 与 BD 的位置关系是（　　）.

   A. 平行　　　　　　B. 垂直相交

   C. 异面且垂直　　　D. 相交但不垂直

3. 经过平面 α 外一点和平面 α 内一点与平面 α 垂直的平面有（　　）.

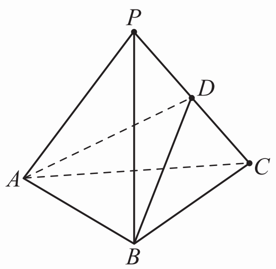
   A. 0 个　　B. 1 个　　C. 无数个　　D. 1 个或无数个

4. 已知$\triangle ABC$，直线 $m\perp AC$，$m\perp BC$，求证：$m\perp AB$.
5. 如图，P 为$\triangle ABC$ 所在平面外一点，$AP=AC$，$BP=BC$，D 为 PC 的中点，直线 PC 与平面 ABD 垂直吗？为什么？
6. 如图，$ABCD\text{-}A'B'C'D'$是正方体.

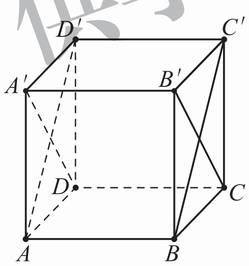
   (1) 判断直线 $B'C$ 与平面 $ABC'D'$的位置关系，并说明理由；

   (2) 判断平面 $BCC'B'$与平面 $ABC'D'$的位置关系，并说明理由；

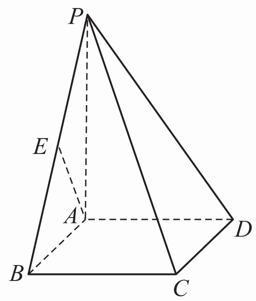
   (3) 判断平面 $A'B'CD$ 与平面 $ABC'D'$的位置关系，并说明理由.



（第 5 题）



（第 6 题）

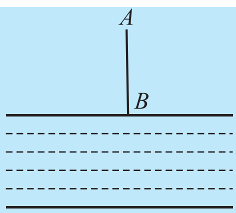


（第 7 题）

7. 如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AB$，点 E 是棱 PB 的中点. 求证：$AE\perp PC$.

B 组

1. 如图，在公路旁有一条河，河对岸有高为 24 m 的塔 AB，当公路与塔底点 B 都在水平面上时，如果只有测角器和皮尺作测量工具，能否求出塔顶与道路的距离？

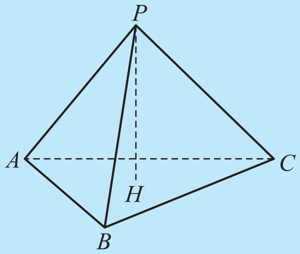


（第 1 题）

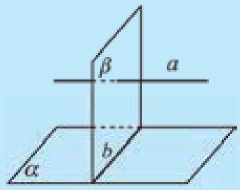
2. 如图，P 为$\triangle ABC$ 所在平面外一点，$PA\perp PB$，$PB\perp PC$，$PC\perp PA$，$PH\perp$平面 ABC 于 H. 求证：

(1) H 是$\triangle ABC$ 的垂心；

(2) $\triangle ABC$ 为锐角三角形.



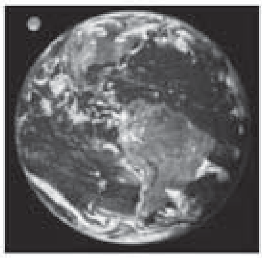
（第 2 题）

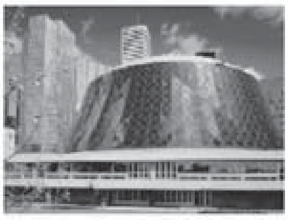


（第 3 题）

3. 如图，已知平面 $\alpha\perp$平面 β，$\alpha\cap\beta=b$，直线 a 在平面 α 外且 $a\perp\beta$. 求证：$a/\!/\alpha$.

§7 简单几何体的再认识





在本章§1已经初步认识了柱(棱柱和圆柱)、锥(棱锥和圆锥)、台(棱台和圆台)、球这些简单几何体的基本特征．在本节，我们将在点、线、面位置关系的知识基础上，继续研究这些简单几何体的某些特性．

7.1 柱、锥、台的侧面展开与面积

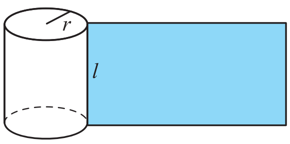
把柱、锥、台的侧面沿着它们的一条侧棱或母线剪开后展开在一个平面上，展开图的面积就是它们的侧面积.

下面我们来分析并找出它们侧面积的计算公式.

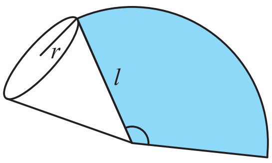
一、圆柱、圆锥、圆台

圆柱、圆锥的侧面展开图如图 1-88. 我们不难得到：

$$S_{圆柱侧}=2\pi rl,\quad S_{圆锥侧}=\pi rl.$$



(1)



(2)

图 1-88

其中 r 为底面半径，l 为侧面母线长.

如图 1-89，圆台可以看成是用平行于圆锥底面的平面截这个圆锥而得到的. 它的侧面展开图通常叫作**扇环**，由扇环可以求出圆台的侧面积.

我们不难得到：

$$S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)l.$$

其中 r_1，r_2 分别为上、下底面半径，l 为侧面母线长.

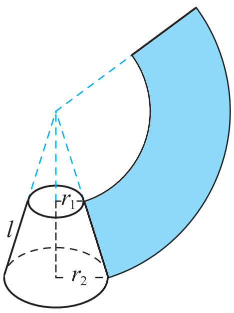


图 1-89

二、直棱柱、正棱锥、正棱台

直棱柱的侧面展开图如图 1- 90.

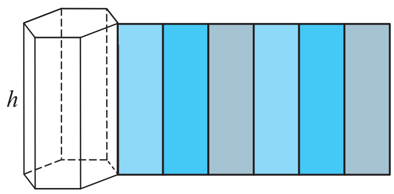


图 1-90

我们不难得到：

$$\boxed{S_{直棱柱侧}=ch.}$$

其中 c 为底面周长，h 为高.

正棱锥的侧面展开图如图 1-91.

我们不难得到：

$$\boxed{S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'.}$$

其中 c 为底面周长，h' 为斜高，即侧面等腰三角形的高.

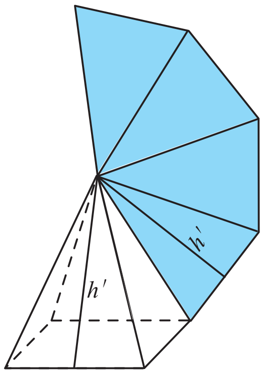


图 1-91

正棱台的侧面展开图如图 1-92.

我们不难得到：

$$\boxed{S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'.}$$

其中 c'，c 分别为上、下底面周长，h' 为斜高，即侧面等腰梯形的高.

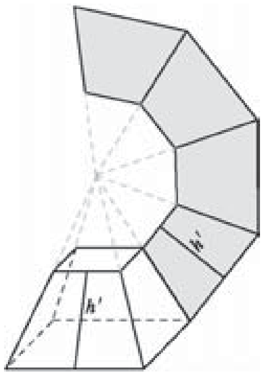


图 1-92

思考交流

将直棱柱、正棱锥、正棱台的侧面积公式进行类比，你能发现它们的联系和区别吗？

例 1　一个圆柱形的锅炉，底面直径 $d=1$ m，高 $h=2.3$ m. 求锅炉的表面积(保留 2 个有效数字).

解　$S=S_{侧面积}+2S_{底面积}=\pi dh+2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$=\pi\times1\times2.3+2\pi\times\frac{1}{4}\approx8.8(\text{m}^2).$

答：锅炉的表面积约为 8.8 m^2.

例 2　圆台的上、下底面半径分别是 10 cm 和 20 cm，它的侧面展开图的扇环的圆心角是 180°，那么圆台的侧面积是多少？(结果中保留 π)

解　如图 1-93，设上底面周长为 c.

因为扇环的圆心角是 180°，所以 $c=\pi\cdot SA$.

又因为 $c=2\pi\times10=20\pi$，所以 $SA=20$. 同理 $SB=40$.

所以　$AB=SB-SA=20$，

$S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)\cdot AB=\pi(10+20)\times20=600\pi(\text{cm}^2).$

答：圆台的侧面积为 600π cm^2.

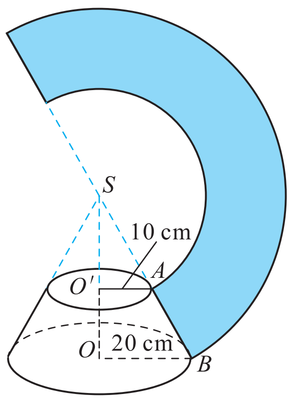


图 1-93

例 3　一个正三棱台的上、下底面边长分别为 3 cm 和 6 cm，高

是$\frac{3}{2}$ cm. 求正三棱台的侧面积.

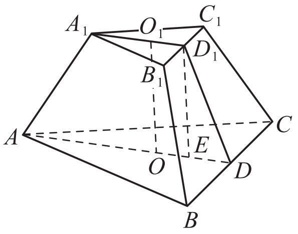


图 1-94

解 如图 1-94，O_1，O 分别是上、下底面中心，则 $O_1O=\frac{3}{2}$，连接 A_1O_1 并延长交 B_1C_1 于 D_1，连接 AO 并延长交 BC 于 D，过 D_1 作 $D_1E\perp AD$ 于 E. 在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1ED$ 中，

$$D_1E=O_1O=\frac{3}{2},$$

$$DE=DO-OE=DO-D_1O_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(6-3)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$DD_1=\sqrt{D_1E^2+DE^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3},$$

所以 $S_{\text{正三棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')\cdot DD_1=\frac{27\sqrt{3}}{2}(\mathrm{cm}^2)$.

答：三棱台的侧面积为$\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

练 习

1. 已知正六棱柱的高为 h，底面边长为 a，求表面积.
2. 从长方体一个顶点出发的三个面的面积分别为 6，8，12，求它的对角线的长.
3. 正四棱台的上、下两底面边长分别是 3，6，其侧面积等于两底面积之和，则其高和斜高分别是多少？
4. 要对一批圆锥形实心零部件的表面进行防腐处理，每平方厘米的加工处理费为 0.15 元. 已知圆锥底面直径与母线长相等，都等于 5 cm，问加工处理 1 000 个这样的零件，需加工处理费多少元？（精确到 0.01 元）

7.2 柱、锥、台的体积

一、棱柱和圆柱

我们知道，长方体的体积等于它的底面积乘高. 类似地，棱柱和圆柱的体积也等于它的底面积乘高. 即

$$\boxed{V_{\text{柱体}}=Sh.}$$

其中 S 为柱体的底面积，h 为柱体的高.

二、棱锥和圆锥

棱锥和圆锥的体积可用下面的公式来计算：

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$

其中 S 为锥体的底面积，h 为锥体的高.

例 4　埃及胡夫金字塔大约建于公元前 2580 年，其形状为正四棱锥. 金字塔高约 146.6 m，底面边长约 230.4 m. 问：这座金字塔的侧面积和体积各是多少？

解　如图 1-95，AC 为高，BC 为底面的边心距，则 $AC=146.6$ m，$BC=115.2$ m，底面周长 $c=4\times230.4$ m.

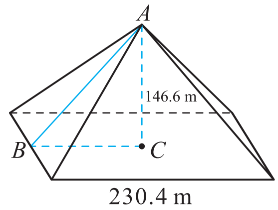


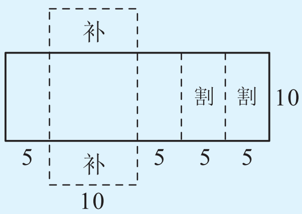
图 1-95

$$S_{侧面积}=\frac{1}{2}c\cdot AB=\frac{1}{2}\times4\times230.4\times\sqrt{115.2^2+146.6^2}$$
$$\approx85\,916.2(\text{m}^2),$$
$$V=\frac{1}{3}S\cdot AC=\frac{1}{3}\times230.4^2\times146.6$$
$$\approx2\,594\,046.0(\text{m}^3).$$

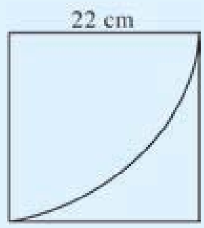
答：金字塔的侧面积约是 85 916.2 m^2，体积约是2 594 046.0 m^3.

练　习

1. 某自来水厂要制作一个无盖长方体水箱，所用材料的形状是矩形板，制作方案如图，求水箱的容积.
2. 一块正方形薄铁片的边长是 22 cm，以它的一个顶点为圆心，一边长为半径画弧，沿弧剪下一个扇形，用这块扇形铁板围成一个圆锥筒，求它的容积.



（第 1 题）



（第 2 题）

三、棱台和圆台

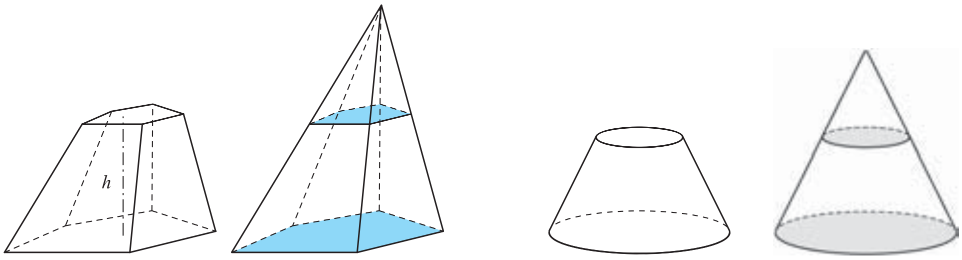
我们知道，用一个平行于底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫作棱台，所以，棱台的体积可用两个棱锥的体积的差来计算（图 1-96）.

计算公式如下：

$$V_{台体}=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})h.$$

其中 $S_{上}$，$S_{下}$ 分别为棱台的上、下底面积，h 为高.

实际上，圆台的体积也满足上述公式.



（1）　　　　（2）

图 1-96

例 5　已知一正四棱台的上底边长为 4 cm，下底边长为 8 cm，高为 3 cm. 求其体积.

解　$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}})h$

$=\frac{1}{3}(4^2+8^2+\sqrt{4^2\times 8^2})\times 3$

$=112(\text{cm}^3)$.

答：正四棱台的体积为 112 cm^3.

7.3　球

由前面的学习，我们已经知道球面可以由半圆绕直径旋转一周而得到. 模仿圆的定义，也可以把球面看作空间中到一个定点的距离等于定长的点的集合. 类似于圆的表示方法，球也可以用它的球心字母表示，例如球 O.

一、球的截面

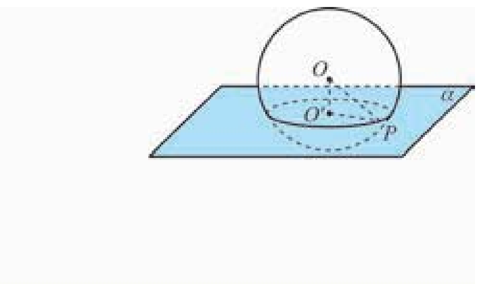


图 1-97

用一个平面 α 去截半径为 R 的球 O，若平面 α 经过球心 O，则平面与球面的公共点显然都是共面的且到球心 O 的距离都为 R，这说明过球心的平面截球面所得截线是以球心 O 为圆心的圆；当平面 α 不经过球心 O 时（图 1-97），不妨设 $OO'\perp$ 平面 α 于 O'，记 $OO'=d$，对于平面与球面的任意一个公共点 P，都满足 $OO'\perp O'P$，

所以 $O'P=\sqrt{R^2-d^2}$.

即此时截线是以 O' 为圆心、以 $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 为半径的圆.

球面被经过球心的平面截得的圆叫作**球的大圆**；被不经过球心的平面截得的圆叫作**球的小圆**.

二、球的切线

与圆类似，当直线与球有唯一交点时，称**直线与球相切**，其中它们的交点称为直线与球的**切点**.

思考交流

过球外一点 P，有无数条切线．那么所有切线的长度相等吗？所有切点组成什么图形？

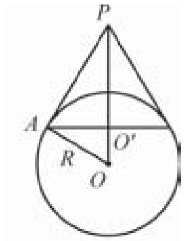


图 1-98

设过点 P 的直线与球 O 相切于点 A，则平面 POA 与球面的交线是球的大圆(图 1-98)，由直线与圆相切的性质可得 $OA\perp AP$，

所以　$AP=\sqrt{PO^2-R^2}$.

由于定点 P、球心 O 和切点构成的三角形形状恒定不变，设点 A 在 OP 上的垂足为 O'，则 AO' 长度恒定不变，即切点到直线 OP 的距离都相等.

这说明，**过球外一点的所有切线的长度都相等**，这些切点的集合是以 O' 为圆心、$O'A$ 为半径的圆，圆面 O' 及所有切线围成了一个圆锥(图 1-99).

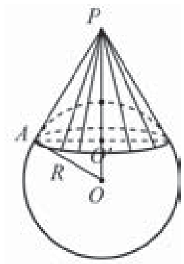
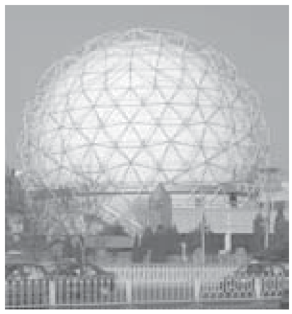


图 1-99

三、球的表面积和体积

球是我们日常生活中常见的图形，球的表面积和体积可用下面的公式来计算：

$$\boxed{S_{球面}=4\pi R^2,\quad V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.}$$



例 6　如图 1-100，一个圆锥形的空杯子上面放着一个半球形的冰激凌，如果冰激凌融化了，会溢出杯子吗？(假设冰激凌融化前后体积不变)

解　因为 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times4^3\approx134(\text{cm}^3)$，

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times12\approx201(\text{cm}^3),$$

$$V_{半球}<V_{圆锥},$$

所以，冰激凌融化了，不会溢出杯子.

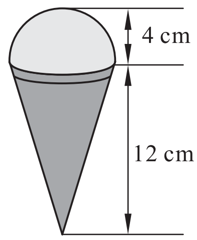


图 1-100

例 7　一个圆柱形的玻璃瓶的内半径为3 cm，瓶里所装的水深为8 cm，将一个钢球完全浸入水中，瓶中水的高度上升到 8.5 cm. 求

钢球的半径.

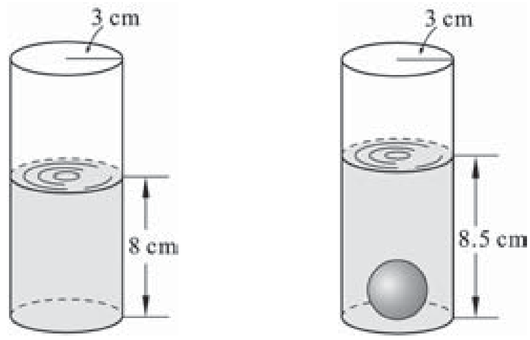


图 1-101

解　如图 1-101,设钢球半径为 R,则由题意有

$$\pi\times3^2\times8+\frac{4}{3}\pi R^3=\pi\times3^2\times8.5,$$

解得　　　　　　$R=1.5(\text{cm})$.

答:钢球的半径为 1.5 cm.

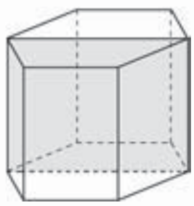
练　习

1. 某小区修建一个圆台形的花台,它的两底面半径分别为 1 m 和2 m,高为1 m,问:需要多少立方米土才能把花台填满?
2. 地球和火星都可看作近似球体,地球半径约为 6 370 km,火星的直径约为地球直径的一半.
   (1) 求地球的表面积和体积;
   (2) 火星的体积约为地球体积的几分之几?

习　题　1—7

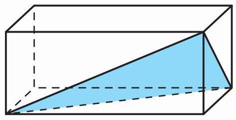
A　组

1. 圆柱、圆锥的底面半径与球的半径都为 r,圆柱、圆锥的高都是 $2r$. 求它们的体积之比.
2. 球表面积膨胀为原来的 2 倍,计算体积变为原来的几倍.
3. 长方体的长、宽、高的比为 1∶2∶3,对角线长是 $2\sqrt{14}$ cm. 求它的体积.
4. 一个正方体的顶点都在球面上,它的棱长是 4 cm. 求这个球的体积.
5. 如图,已知正六棱柱的最大对角面的面积为 4 m^2,互相平行的两个侧面的距离为 2 m,则这个六棱柱的体积为(　　).
   A. 3 m^3　　B. 6 m^3　　C. 12 m^3　　D. 以上都不对



(第 5 题)

6. 如图,沿长方体相邻三个面的对角线截去一个三棱锥,则三棱锥的体积是长方体体积的几分之几?



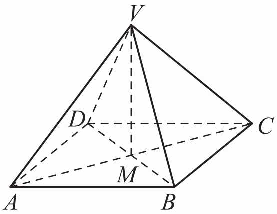
(第 6 题)

7. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,底面两边 $BC:AB=7:24$,对角面 ACC_1A_1 的面积是 50.求长方体的侧面积.

8. 如图,棱锥的底 $ABCD$ 是一个矩形,AC 与 BD 交于 M,VM 是棱锥的高,若 $VM=4$ cm,$AB=4$ cm,$VC=5$ cm,求棱锥的体积.

9. 求证:斜棱柱的侧面积等于它的直截面(垂直于侧棱并与每条侧棱都相交的截面)的周长与侧棱长的乘积.

10. 仓库的房顶呈正四棱锥形,量得底面的边长为 2.6 m,侧棱长2.1 m,现要在房顶上铺一层油毡纸,问:需要油毡纸的面积是多少?



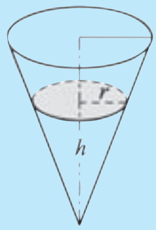
(第 8 题)

B　组

1. 如图,一个倒立的圆锥,底面半径为 10 cm,高为 15 cm,先将一定量的水注入其中,其形成的圆锥高为 h cm,底面半径为r cm.

(1) 求水的体积;

(2) 若形成的圆锥的体积恰为原来圆锥体积的一半,求 h 的值(精确到 0.01).



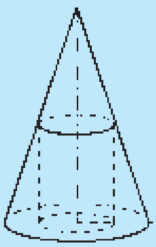
(第 1 题)

2. 如图,一个圆锥的底面半径为 2 cm,高为 6 cm,在其中有一个高为x cm的内接圆柱.

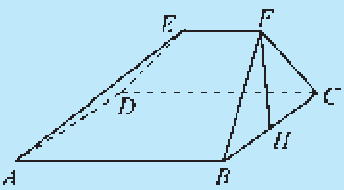
(1) 试用 x 表示圆柱的侧面积;

(2) 当 x 为何值时,圆柱的侧面积最大?

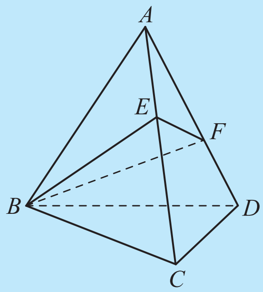
3. 如图,多面体 $ABCDEF$ 中,已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形,$EF\parallel AB$,平面 $FBC\perp$平面 $ABCD$. $\triangle FBC$ 中 BC 边上高 $FH=2$,$EF=\frac{3}{2}$. 求该多面体体积.



(第 2 题)



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,正三棱锥 $A\text{-}BCD$,底面边长为 a,侧棱长为 $2a$,E,F 分别为 AC,AD 上的动点,求截面 $\triangle BEF$ 周长的最小值和这时 E,F 的位置.

阅读材料

蜜 蜂 是 对 的

蜜蜂是勤劳的象征——筑造蜂房，酿造蜂蜜. 蜂房看上去像是由成千上万个六棱柱紧密排列组成的，从正面看，都是排列整齐的正六边形，但是就整个蜂房来看，蜂房的底是由三个相同的菱形组成的(图 1-102).

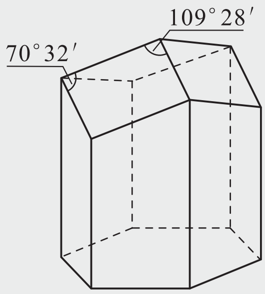


图 1-102

蜂房为什么要造成这种形状呢？一位古代的数学家帕普斯分析了蜂房的结构，他说，蜂房是盛装蜂蜜的库房，它是由许许多多的正六棱柱，一个挨一个，紧密地排列着的，中间没有一点空隙. 这种优美设计的最大优点，是避免杂物的掺入，怕弄脏了这些清洁的产品. 蜜蜂希望有匀称、规则的图案，也就是需要等边、等角的图形……能铺满整个平面区域的正多边形只有三种，即正三角形、正方形和正六边形. 蜜蜂凭着自己本能的智慧选择了角数最多的正六边形. 因为使用同样多的原材料，正六边形比正三角形和正方形具有最大的面积，从而可以储藏更多的蜂蜜.

后来，又有一些科学家对蜂房进行了观察，他们发现，蜂房底面菱形的钝角是 $109°28'$，锐角是 $70°32'$，而通过理论计算，得到的结果是：要消耗最少的材料，制成同样容积的蜂房，底面菱形的角度，就应该是这个答案，就是说，蜜蜂建造蜂房，所选择的方案是最为科学的.

原来，蜜蜂不但是勤劳的劳动者，还是聪明的建筑师呢.

课题学习

正方体截面的形状

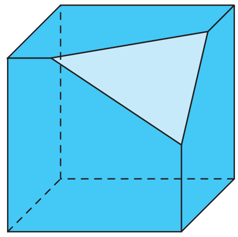


图 1-103

用一个平面去截正方体，截面的形状是什么样的？

一、回答下列问题

1. 给出分类的原则（例如：按截面图形的边数分类）．按照你的分类原则，能得到多少类不同的截面？设计一种方案，找到截得这些形状截面的方法，并在正方体中画出示意图．

2. 如果截面是三角形，你认为可以截出几类不同的三角形？

3. 如果截面是四边形，你认为可以截出几类不同的四边形？

*4. 证明上面的结果．

*5. 截面多边形的边数最多有几条？请说明理由．

*6. 截面可能是正多边形吗？可能有几种？画出示意图．

*7. 如果截面是三角形，其面积最大是多少？画出示意图．

*8. 你还能提出哪些相关的数学问题？

说　明

本教材中带“*”号的题为选做．

二、学习建议

1. 利用土豆、萝卜、橡皮泥等物品作切割实验进行研究．

2. 用透明材料制作一个中空的正方体，留出注水口，注入有色水，通过观察水面形状的方式进行实验研究．

3. 利用电脑或图形计算器，借助某些软件（如几何画板，Z+Z 智能平台等）进行模拟实验研究．

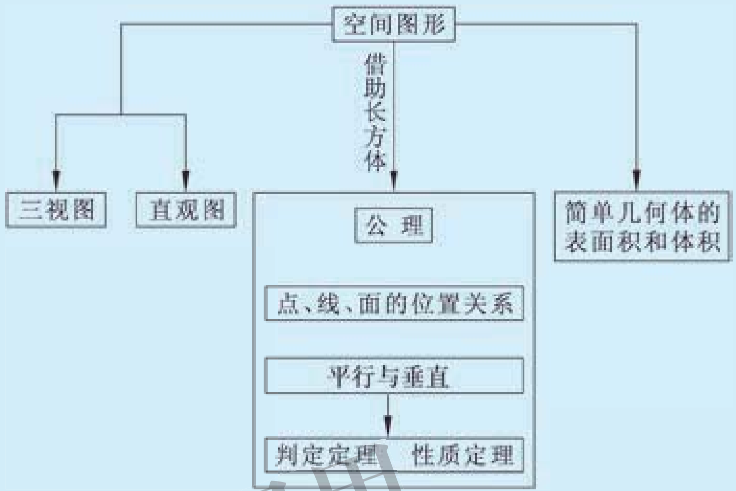
三、结果呈现

写一份学习报告．

◆ 本 章 小 结

一、内容提要

1. 本章主要知识结构参考图如下：



2. 空间平行关系与垂直关系的类比

		平行	垂直
直线与平面	公共点	0 个	1 个
直线与平面	判定定理	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行	如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么该直线与此平面垂直
直线与平面	性质定理	如果一条直线与一个平面平行，则过该直线的任意一个平面与此平面的交线与该直线平行	如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行
平面与平面	公共点	0 个	无数个
平面与平面	判定定理	如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行	如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直
平面与平面	性质定理	如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行	如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面

3. 面积与体积关系

（1）柱、锥、台的侧面积关系：

$$\boxed{S_{\text{正棱台或圆台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'}$$

$c'=c\downarrow$　　　　$\downarrow c'=0$

$$\boxed{S_{\text{正棱柱或圆柱侧}}=ch}\qquad\boxed{S_{\text{正棱锥或圆锥侧}}=\frac{1}{2}ch'}$$

其中 c'，c 分别为上、下底面周长，h' 为斜高或母线长，h 为正棱柱或圆柱的高.

（2）柱、锥、台的体积关系：

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{V_{台体}=\frac{1}{3}(S_上+S_下+\sqrt{S_上\cdot S_下})h} & \\ S_上=S_下\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow\ S_上=0 \\ \boxed{V_{柱体}=Sh} & & \boxed{V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh} \end{array}$$

其中 $S_上$，$S_下$ 分别为台体的上、下底面积，h 为高，S 为柱体或锥体的底面积.

（3）球的表面积和体积：

$$S_{球面}=4\pi R^2,\qquad V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

二、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求

（1）会画简单空间图形的简易组合体的三视图，能识别简单空间图形的简易组合体的三视图所表示的立体模型；会用斜二测画法画简单空间图形的直观图.

（2）能以长方体为载体，认识和理解空间的点、线、面之间的位置关系. 会用数学语言和符号语言表述线面、面面平行和垂直的性质与判定定理，并会用已知的公理和定理证明一些空间图形的位置关系的命题.

（3）会根据公式计算一些简单几何体的表面积与体积.

2. 需要注意的问题

（1）研究空间图形首先要建立它的几何模型，三视图与直观图是在平面上表示空间图形的两种重要方法，画图时首先要从实物图抽象出基本几何图形.

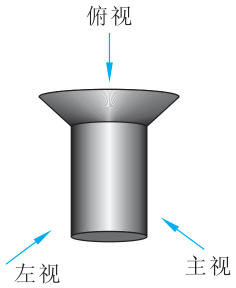
（2）对一般空间图形的研究可结合具体图形进行，要重视观察、操作、测量、论证等活动. 本章就是以长方体为载体来认识和理解并论证出空间的点、线、面之间的位置关系的，在学习中注意体会这种从具体到抽象的思考问题的方法.

（3）空间图形的问题经常要转化为平面图形的问题解决，学习中要注意与过去知识的联系，注意“类比”这种重要数学方法的应用.

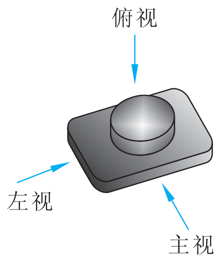
复 习 题 一

A 组

1. 画出组合体的三视图.



(1)



(2)

(第 1 题)

2. 请你为手机生产厂家设计一种手机外观款式,画出它的三视图,并画出它的实物图.

3. 用斜二测画法画出水平放置的菱形的直观图,该菱形的边长为 3 cm,一个锐角为 $60°$.

4. 正四棱柱的高是 4 cm,底面边长为 3 cm,画出它的直观图.

5. 一块西瓜切 2 刀,最多能切出几块? 如果切 3 刀呢?

6. 下列条件中,能判断两个平面平行的是(　　).

   A. 一个平面内的一条直线平行于另一个平面

   B. 一个平面内的两条直线平行于另一个平面

   C. 一个平面内有无数条直线平行于另一个平面

   D. 一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面

7. 已知直线 $m\perp$平面 α,直线 $n\subsetneqq$平面 β,下列说法正确吗? 为什么?

   (1) 若 $\alpha/\!/\beta$,则 $m\perp n$;　　(2) 若 $\alpha\perp\beta$,则 $m/\!/n$;

   (3) 若 $m/\!/n$,则 $\alpha\perp\beta$;　　(4) 若 $m\perp n$,则 $\alpha/\!/\beta$.

8. 已知直线 a,b,平面 α,β,γ,下列说法正确吗? 为什么?

   (1) 若 $a/\!/\alpha,a/\!/b,b\not\subset\alpha$,则 $b/\!/\alpha$;　　(2) 若 $\alpha/\!/\beta,\beta/\!/\gamma$,则 $\alpha/\!/\gamma$;

   (3) 若 $a\perp\alpha,b\perp a,b\not\subset\alpha$,则 $b/\!/\alpha$;　　(4) 若 $\alpha\perp\gamma,\beta/\!/\gamma$,则 $\alpha\perp\beta$.

9. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G,H 分别为 AA_1,CC_1,C_1D_1,D_1A_1 的中点,试判断四边形 $EFGH$ 的形状,并说明理由.

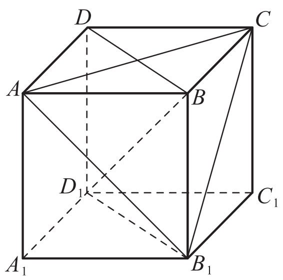
10. 如图,正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,求证:

    (1) $AC\perp$平面 B_1D_1DB;　　(2) $BD_1\perp$平面 ACB_1.

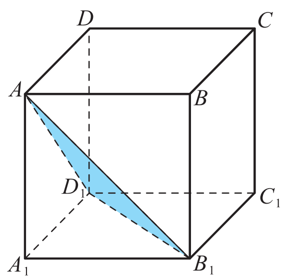
11. 如图,正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为$\sqrt{2}$.

    (1) 求$\triangle AB_1D_1$ 的面积;

    (2) 求三棱锥 $A\text{-}A_1B_1D_1$ 的体积.



（第 10 题）

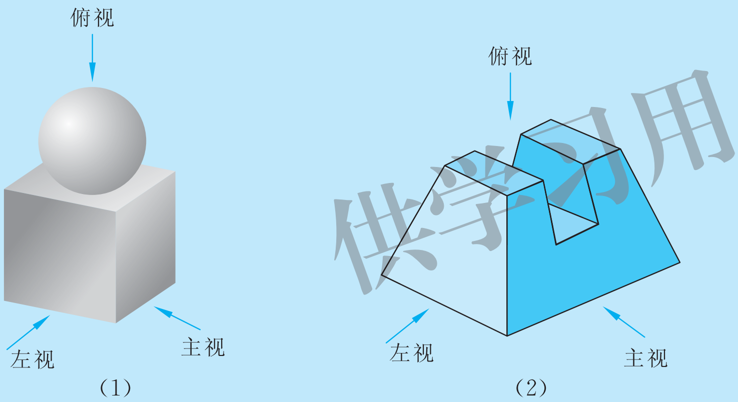


（第 11 题）

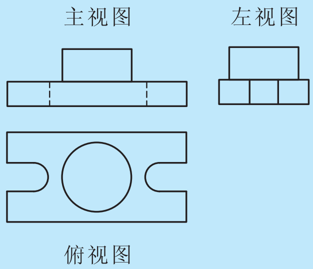
12. 一个直角三角形的两条直角边为 15 cm 和 20 cm，以一条直角边所在直线为轴旋转，求所生成旋转体的体积.
13. 一个正四棱台的斜高是 12 cm，侧棱的长是 13 cm，侧面积是720 cm^2. 求它的上、下底面的边长.
14. 正方体、底面直径和高相等的圆柱、球的体积相等时，哪一个的表面积最小？

B 组

1. 画出几何体的三视图.

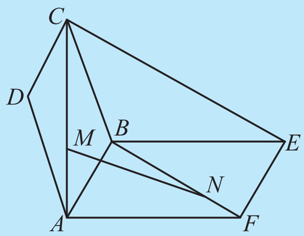


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 根据图中三视图想象物体原形，并画出其实物图.
3. 如图，设 $ABCD$ 和 $ABEF$ 均为平行四边形，它们不在同一平面内，M，N 分别为对角线 AC，BF 上的点，且 $AM : FN = AC : BF$. 求证：$MN /\!/$ 平面 BEC.
4. P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，Q 是 PA 的中点. 求证：$PC /\!/$ 平面 BDQ.
5. 已知正方体的棱长为 2，求它的内切球的表面积和体积.



（第 3 题）

C 组

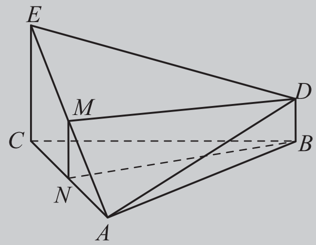
1. 已知：$\triangle ABC$ 为正三角形，$EC\perp$ 平面 ABC，$DB\perp$ 平面 ABC，且 EC，DB 在平面 ABC 的同侧，M 为 EA 的中点，$CE=CA=2BD$. 求证：

(1) $DE=DA$；

(2) 平面 $BDM\perp$ 平面 ECA；

(3) 平面 $DEA\perp$ 平面 ECA.

(提示：取 AC 中点 N，连接 MN，BN)



（第 1 题）

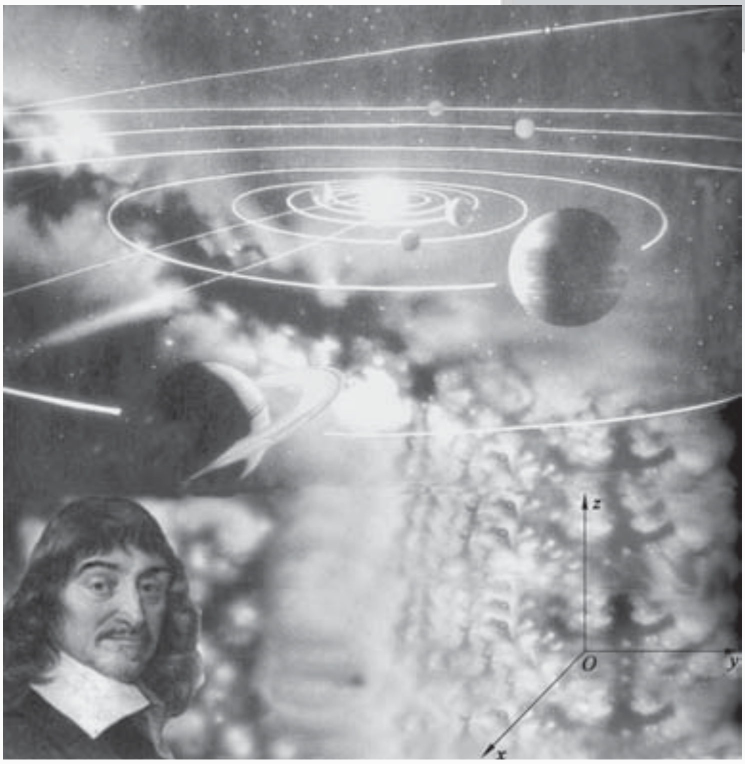
2. 一块木板上有三个孔（方孔、圆孔、三角孔），试设计一个几何体，使它能沿三个不同方向不留空隙地通过这三个孔，并画出该几何体的三视图.

（第 2 题）

第二章　解析几何初步

16 世纪以后，由于生产和科学技术的发展，天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需要. 比如，德国天文学家开普勒发现行星是绕着太阳沿着椭圆轨道运行的；意大利科学家伽利略发现投掷物的运动轨迹是抛物线. 这些发现都涉及圆锥曲线，要研究这些比较复杂的曲线，原先的一套方法显然已经不适应了，这就导致了解析几何的出现.

解析几何的基本思想是通过建立坐标系，把几何问题化成代数问题，用代数方法加以研究，同时，也可以提供一些代数问题的几何背景和解决思路. 本章将通过对直线与圆等内容的讨论，帮助我们体会解析几何的基本思想.



§1　直线与直线的方程

1.1　直线的倾斜角和斜率

一、直线的确定

问题提出

我们知道，平面上有很多不同的直线，它们的区别就在于位置的不同.

如图 2-1，过定点 $O(0,0)$ 的直线有无数条. 同样，如图 2-2，与 x 轴正方向所成的角为 30°的直线也有无数条.

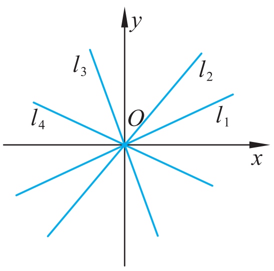


图 2-1

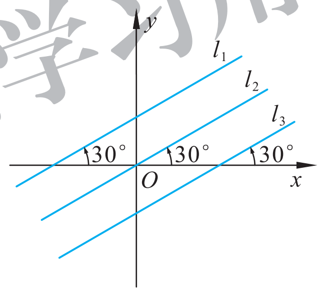


图 2-2

那么，在平面直角坐标系中，怎样刻画一条位置确定的直线呢?

观察图 2-3，我们发现，直线 l_1 过原点，并且与 x 轴的正方向所成的角等于 30°，这样，原点和 30°角就把直线 l_1 在平面直角坐标系中的位置确定了.

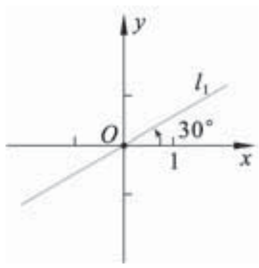


图 2-3

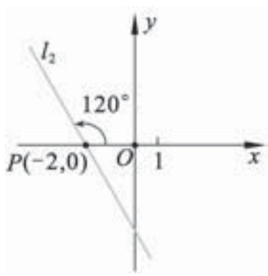


图 2-4

观察图 2-4，直线 l_2 经过点 $P(-2,0)$，并且与 x 轴的正方向所成的角等于 $120°$. 同样，直线 l_2 在平面直角坐标系中的位置也被确定下来了.

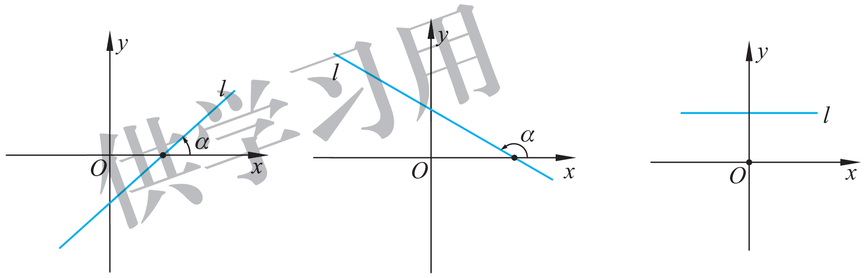
抽象概括

在平面直角坐标系中，确定直线位置的几何条件是：已知直线上的一个点和这条直线的方向.

二、直线的倾斜角和斜率

我们已经知道，一条直线由“一个点和一个方向”确定. 那么，在平面直角坐标系中，如何刻画直线的方向呢？

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线 l，把 x 轴（正方向）按逆时针方向绕着交点旋转到和直线 l 重合所成的角，叫作直线 l 的**倾斜角**，当直线 l 和 x 轴平行时，它的倾斜角为 $0°$. 通常倾斜角用 α 表示，倾斜角的取值范围为 $0°\leqslant\alpha<180°$，如图 2-5 所示.



（1）　　（2）　　（3）

图 2-5

在平面直角坐标系中，直线的倾斜角刻画了直线倾斜的程度. 在日常生活中，我们用坡度来刻画道路的“倾斜程度”，坡度即坡面的铅直高度和水平长度的比，这相当于在水平方向移动 1 km，在铅直方向上升或下降的数值（km）（图 2-6），这个比值就表示了坡度的大小. 这样的例子很多，比如，楼梯及屋顶的坡度等.

图 2-6

为了用坐标的方法刻画直线的倾斜角，我们引入直线**斜率**的概念.

先来看看过原点、倾斜角为 α 的直线的斜率.

(1)$0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$的直线的斜率

观察图 2-7，图中直线上的点 $O(0,0)$，$P(1,k)$，当横坐标 x 从 0 到 1 增加一个单位时，纵坐标 y 从 0 变化到 $k(k>0)$，我们称 k 为这条直线的斜率，不同的倾斜角对应不同的斜率.

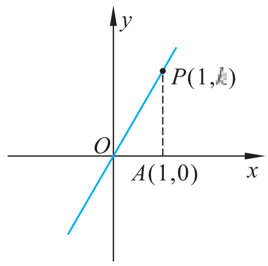


图 2-7

在图 2-8 中，由于$\triangle OPQ$与$\triangle ABC$相似，所以$\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{QP}{OQ}=k$，这样，斜率 k 可以用$\dfrac{CB}{AC}$来计算.

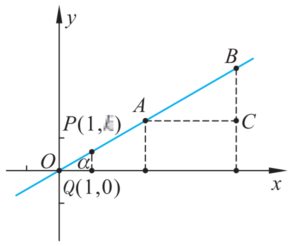


图 2-8

实际上斜率 k 就是这条直线倾斜角 α 的正切值. 通常我们把 $\tan\alpha$也叫作直线的斜率.

(2) $90^\circ<\alpha<180^\circ$的直线的斜率

观察图 2-9 中直线上的点 $O(0,0)$，$P(1,k)(k<0)$，当横坐标 x 从 0 到 1 增加一个单位时，纵坐标 y 从 0 变化到 $k(k<0)$，我们称 k 为这条直线的斜率.

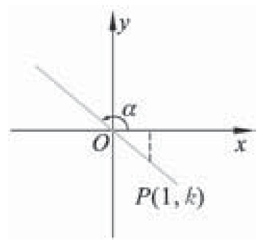


图 2-9

在以后的学习中，我们将知道，$90^\circ<\alpha<180^\circ$的直线的斜率也可以用它的倾斜角的正切值表示.

思考交流

(1)$0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$时，斜率是非负的，倾斜角变化时，直线的斜率如何变化?

(2)$90^\circ<\alpha<180^\circ$时，斜率是负的，倾斜角变化时，直线的斜率如何变化?

抽象概括

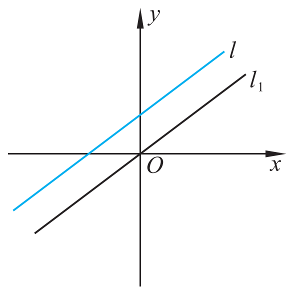


图 2-10

对于不过原点且不与 x 轴垂直的直线 l，我们总可以作一条过原点并且与它平行的直线 l_1(图 2-10)，由于两直线平行，倾斜角相等，于是可以用直线 l_1 的斜率来表示直线 l 的斜率. 因此，不过原点的直线也可以用斜率来刻画它的倾斜程度.

对于倾斜角 α 为 90°的直线，即与 x 轴垂直的直线，斜率不存在，它的倾斜程度不能用斜率来刻画，对于这种特殊情况，我们将单独讨论.

当倾斜角 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$时，斜率是非负的，倾斜角越大，直线的斜率就越大；当倾斜角 $90^\circ<\alpha<180^\circ$时，斜率是负的，倾斜角越大，直线的斜率就越大.

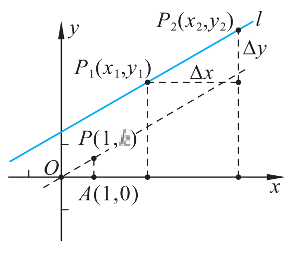


图 2-11

三、过两点的直线斜率的计算公式

如图 2-11，在直线 l 上任取两个不同点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$

（其中 $x_1 \neq x_2$）.

设 $\Delta x = x_2 - x_1$，$\Delta y = y_2 - y_1$.

由相似三角形的关系可得 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，

所以，直线斜率可以表示为

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}$$

其中 $x_1 \neq x_2$.

说　明

Δx 和 Δy 分别表示当点 P_1 变到点 P_2 时，x 的改变量和 y 的改变量.

例 1　求过已知两点的直线的斜率：

（1）直线 PQ 过点 $P(2,3)$，$Q(6,5)$；

（2）直线 AB 过点 $A(-3,5)$，$B(4,-2)$.

解　（1）如图 2-12，直线 PQ 的斜率 $k=\dfrac{5-3}{6-2}=\dfrac{1}{2}$；

（2）如图 2-13，直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{-2-5}{4-(-3)}=-1$.

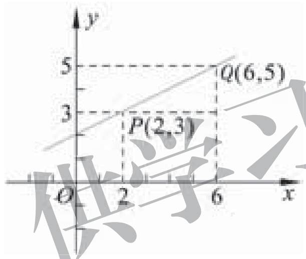


图 2-12

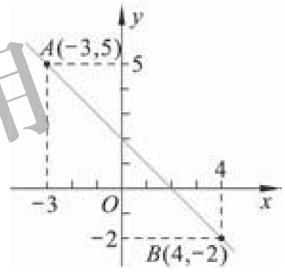
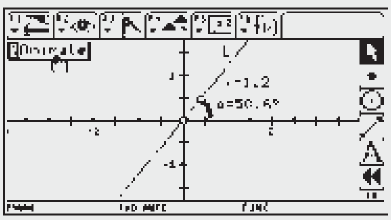


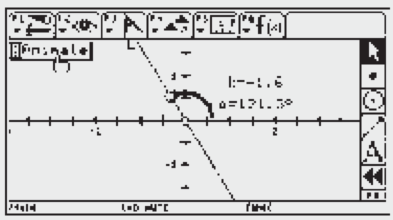
图 2-13

信息技术应用

倾斜角和斜率的关系

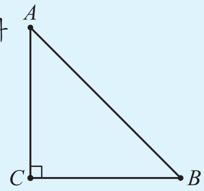
用数学软件或图形计算器动态呈现直线的变化过程，体会倾斜角和斜率之间的变化关系.





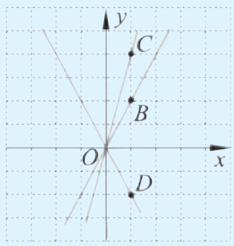
练　习

1. 在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=1$，建立适当的平面直角坐标系，指出斜边 AB 经过的一个点的坐标.

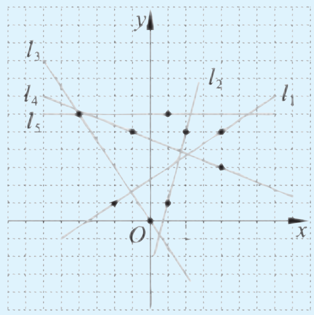


（第 1 题）

2. 给出实例说明在日常生活中如何用“一点和一个方向”确定一条直线.
3. 求图中直线 OB，OC，OD 的斜率.
4. 计算图中线段所在直线的斜率.



（第 3 题）



（第 4 题）

5. 在平面直角坐标系中，四边形 $EFGH$ 的顶点分别是 $E(0,0)$，$F(6,0)$，$G(7,4)$和 $H(4,8)$. 求：
   (1) 四边形 $EFGH$ 四条边所在直线的斜率；
   (2) 四边形 $EFGH$ 两条对角线所在直线的斜率.

1.2　直 线 的 方 程

一、直线方程的点斜式

在平面直角坐标系中，直线 l 过点 $P(0,3)$，斜率 $k=2$，$Q(x,y)$是直线 l 上不同于点 P 的任意一点，如图 2-14 所示 .

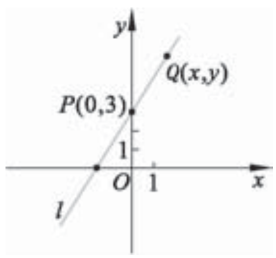


图 2-14

由于点 P，Q 都在 l 上，所以，可以用点 P，Q 的坐标来表示直线 l 的斜率，

$$\frac{y-3}{x-0}=2,$$

即得方程 $\qquad y=2x+3.$

这表明直线 l 上任一点的坐标(x,y)都满足 $y=2x+3$.

另外，满足方程 $y=2x+3$ 的每一个(x,y)所对应的点也都在直线 l 上.

抽象概括

一般地，如果一条直线 l 上任一点的坐标(x,y)都满足一个方程，满足该方程的每一个数对(x,y)所确定的点都在直线 l 上，我们就把这个方程称为直线 l 的方程. 如果已知直线 l 上一点 $P(x_0,y_0)$

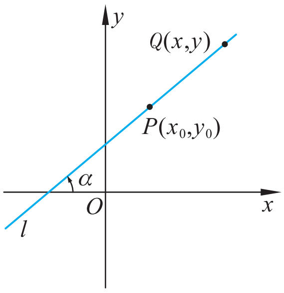


图 2-15

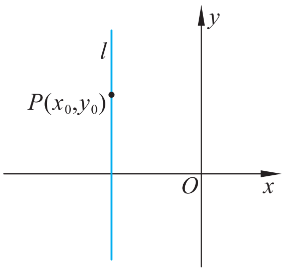


图 2-16

及斜率 k，可用上述方法求出直线 l 的方程.

如图 2-15 所示，设 $Q(x,y)$ 是直线 l 上不同于点 P 的任一点，由于点 P,Q 都在 l 上，所以，可以用点 P,Q 的坐标来表示直线 l 的斜率，于是可得以下方程：

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k,$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).}$$

这就是所求的过点 $P(x_0,y_0)$，斜率为 k 的直线 l 的方程，这个方程是由直线上的一点和斜率（一个方向）所确定的，称为直线方程的**点斜式**.

当直线 l 与 x 轴垂直时，斜率 k 不存在. 如果 l 经过点 $P(x_0,y_0)$，且与 x 轴垂直，则它的特点是：l 上任意一点的横坐标都是 x_0，所以直线 l 的方程为 $x=x_0$，如图 2-16.

例 2　分别求出通过点 $P(3,4)$ 且满足下列条件的直线方程，并画出图形：

（1）斜率 $k=2$；　（2）与 x 轴平行；　（3）与 x 轴垂直.

解　（1）这条直线经过点 $P(3,4)$，斜率 $k=2$，点斜式方程为

$$y-4=2(x-3),$$

可化为

$$2x-y-2=0.$$

如图 2-17 所示.

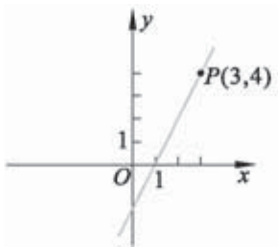


图 2-17

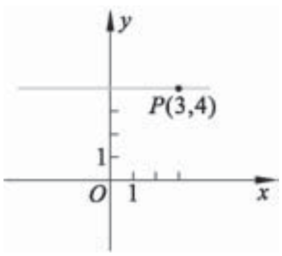


图 2-18

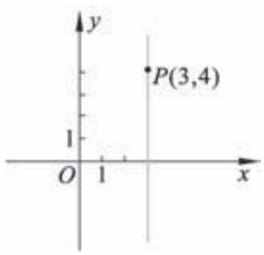


图 2-19

（2）由于直线经过点 $P(3,4)$ 且与 x 轴平行，即斜率 $k=0$，所以直线方程为

$$y=4.$$

如图 2-18 所示.

（3）由于直线经过点 $P(3,4)$ 且与 x 轴垂直，所以直线方程为

$$x=3.$$

如图 2-19 所示.

例 3　求经过点 $(0,b)$，斜率是 k 的直线方程.

解　由于这条直线经过点 $(0,b)$ 并且斜率是 k，所以，它的点斜式方程是

$$y-b=k(x-0),$$

可化为
$$y=kx+b\text{[1]}.$$

[1] 我们称 b 为直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距，称 $y=kx+b$ 为直线方程的斜截式.

例 4　求经过两点 $A(-5,0)$，$B(3,-3)$ 的直线方程.

解　根据经过两点的直线的斜率公式得直线 AB 的斜率

$$k=\frac{-3-0}{3-(-5)}=-\frac{3}{8}.$$

该直线的点斜式方程是

$$y-0=-\frac{3}{8}(x+5),$$

可化为
$$3x+8y+15=0.$$

如图 2-20 所示.

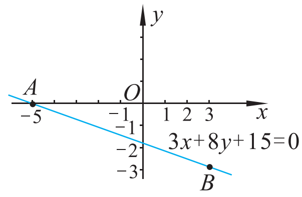


图 2-20

练　习　1

1. 写出下列直线的方程，并画出图形：
   (1) 经过点 $P(1,3)$，斜率是 1；
   (2) 经过点 $Q(-3,1)$，且与 x 轴平行；
   (3) 经过点 $R(-2,1)$，且与 x 轴垂直.
2. 已知直线的斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 y 轴上的截距是 -2，求此直线方程.
3. 写出经过下列两点的直线的点斜式方程，并画出图形：
   (1) $A(-2,-3)$，$B(0,0)$；　　(2) $C(2,1)$，$D(0,-1)$.

二、直线方程的两点式和一般式

如图 2-21 所示，如果已知直线 l 上两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$），如何求直线 l 的方程呢？

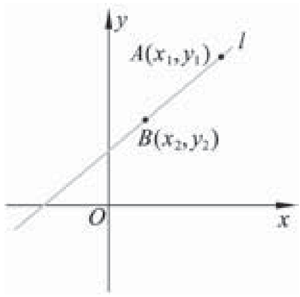


图 2-21

在例 4 中，我们通过具体的实例讨论了这个问题，它是具有一般性的.

我们首先可以根据 A，B 两点的坐标算出直线的斜率

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

由点斜式方程得
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

可化为
$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.}$$

这个方程称为直线方程的**两点式**.

例 5　求经过两点 $P(a,0)$，$Q(0,b)$ 的直线 l 的方程（其中 $ab\neq0$）.

解 因为直线 l 经过点 $P(a,0)$，$Q(0,b)$，所以直线 l 的两点式方程为

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

整理得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1❶.$$

❶通常称 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 为直线方程的截距式. 其中，a 为直线在 x 轴上的截距，b 为直线在 y 轴上的截距.

抽象概括

在平面直角坐标系中，直线可以分为两类：一类不与 x 轴垂直，一类与 x 轴垂直. 过点 $P(x_0,y_0)$ 与 x 轴不垂直的直线方程都可写成点斜式形式 $y-y_0=k(x-x_0)$，它可化为 $kx-y-kx_0+y_0=0$ 的形式，此方程是关于 x,y 的二元一次方程；而过点 $P(x_0,y_0)$ 且垂直于 x 轴的直线方程为 $x=x_0$，它可化为 $x+0\cdot y-x_0=0$，此方程也是关于 x,y 的二元一次方程.

由此可知，平面直角坐标系中任意一条直线都可以用关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A,B 不同时为 0）来表示.

反之，任何关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A,B 不同时为 0）都可以表示平面直角坐标系中的一条直线.

事实上，当 $B\neq 0$ 时，$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，它表示平面直角坐标系中一条不垂直于 x 轴的直线（其中 $-\frac{A}{B}$ 就是直线的斜率）.

当 $B=0$ 时，则 $A\neq 0$，所以有 $x=-\frac{C}{A}$，它表示平面直角坐标系中一条与 x 轴垂直的直线.

因此，关于 x,y 的二元一次方程

$$\boxed{Ax+By+C=0\ (A,B\text{ 不同时为 }0)}$$

表示的是一条直线，我们把它叫作**直线方程的一般式**.

例 6 如图 2-22，已知直线经过点 $A(4,-3)$，斜率为 $-\frac{2}{3}$. 求直线的点斜式方程，并化为一般式方程.

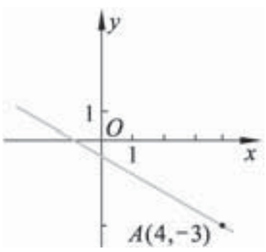


图 2-22

解 由已知及点斜式方程得

$$y+3=-\frac{2}{3}(x-4),$$

化为一般式方程为

$$2x+3y+1=0.$$

例 7 已知三角形三个顶点分别是 $A(-3,0)$，$B(2,-2)$，

$C(0,1)$. 求这个三角形三边各自所在直线的方程.

解　如图 2-23，因为直线 AB 过 $A(-3,0)$，$B(2,-2)$ 两点，由两点式方程得

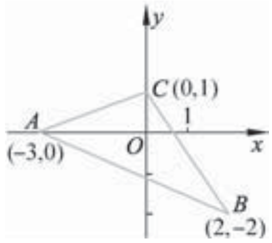


图 2-23

$$\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{-2-0}{2-(-3)},$$

整理得　$$2x+5y+6=0,$$

这就是直线 AB 的方程；

直线 AC 过 $A(-3,0)$，$C(0,1)$ 两点，由两点式方程得

$$\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{1-0}{0-(-3)},$$

整理得　$$x-3y+3=0,$$

这就是直线 AC 的方程；

直线 BC 的斜率是 $k=\frac{1-(-2)}{0-2}=-\frac{3}{2}$，过点 $C(0,1)$，由点斜式方程得

$$y-1=-\frac{3}{2}(x-0),$$

整理得　$$3x+2y-2=0,$$

这就是直线 BC 的方程.

例 8　已知直线 l 的方程为 $x-\sqrt{3}y+4=0$. 求直线 l 的倾斜角.

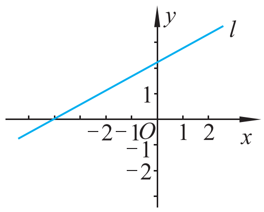


图 2-24

解　直线 l 的斜率 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，设直线 l 的倾斜角为 α，则

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad(0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ).$$

由于 $k>0$，所以 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，故直线 l 的倾斜角 $\alpha=30^\circ$（图 2-24）.

练　习 2

1. 求经过下列两点的直线方程：
   (1) $A(-3,2)$，$B(0,-3)$；　(2) $C(0,4)$，$D(4,0)$；
   (3) $E(3,2)$，$F(0,0)$；　(4) $G(2,2)$，$H(2,4)$.
2. 已知三角形三个顶点分别是 $A(7,4)$，$B(3,-1)$，$C(-5,2)$. 求这个三角形三边所在直线的方程.
3. 求经过点 $(-4,5)$，且斜率为 -2 的直线方程，并化为一般式.
4. 求经过点 $(0,-1)$，倾斜角为 60° 的直线方程，并化为一般式.
5. 求与直线 $x-2y=0$ 斜率相等，且过点 $(2,3)$ 的直线方程，并化为一般式.
6. 求过点 $(\sqrt{3},-5)$，倾斜角等于直线 $y=\sqrt{3}x+1$ 的倾斜角的一半的直线方程，并化为一般式.
7. 已知点 $P(3,m)$ 在过点 $M(2,-1)$ 和 $N(-3,4)$ 的直线上，求 m 的值.
8. 已知 $A(2,2)$，$B(2,5)$ 在直线 l 上，求 l 的方程.
9. 已知直线 $ax+my+2a=0\,(a\neq0)$ 过点 $(1,-\sqrt{3})$，求此直线的斜率.

1.3 两条直线的位置关系

在平面几何中，我们学习了两条直线平行或垂直的判定定理和性质定理. 那么，在平面直角坐标系中，怎样根据直线方程的特征判断两条直线的位置关系呢?

一、两条直线平行

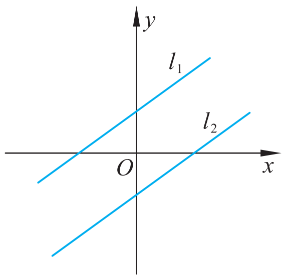


图 2-25

我们知道，斜率相等的两条直线倾斜角相等，它们相互平行；反之，两条直线平行，它们的倾斜角相等，若倾斜角不为 90°，则它们的斜率相等. 于是有以下结论：

(1) 两条不重合直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 和 $l_2: y=k_2x+b_2$ $(b_1 \neq b_2)$，若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $k_1=k_2$；反之，若 $k_1=k_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$(图 2-25).

(2) 如果 l_1, l_2 的斜率都不存在，那么它们的倾斜角都是 90°，从而它们互相平行或重合.

例 9 判断下列各对直线是否平行，并说明理由：

(1) $l_1: y=3x+2$；　$l_2: y=3x+5$；

(2) $l_1: y=2x+1$；　$l_2: y=3x$；

(3) $l_1: x=5$；　$l_2: x=8$.

解 (1) 设两直线的斜率分别是 k_1, k_2，在 y 轴上截距分别是 b_1，b_2，则 $k_1=3, b_1=2, k_2=3, b_2=5$. 因为 $k_1=k_2, b_1 \neq b_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

(2) 设两直线的斜率分别是 k_1, k_2，在 y 轴上截距分别是 b_1, b_2，则 $k_1=2, k_2=3, b_1=1, b_2=0$. 因为 $k_1 \neq k_2$，所以 l_1 与 l_2 不平行.

(3) 由方程可知，$l_1 \perp x$ 轴，$l_2 \perp x$ 轴，且两直线在 x 轴上截距不相等，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

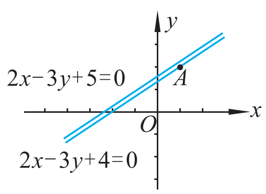


图 2-26

例 10 求过点 $A(1,2)$，且平行于直线 $2x-3y+5=0$ 的直线方程.

解 所求直线平行于直线 $2x-3y+5=0$，所以它们的斜率相等，都为 $k=\frac{2}{3}$，而所求直线过 $A(1,2)$，所以，所求直线的方程为

$$y-2=\frac{2}{3}(x-1),$$

即

$$2x-3y+4=0.$$

其图像如图 2-26 所示.

二、两条直线垂直

可否利用斜率判断两条直线垂直呢?

我们来看一个具体的问题：已知直线 $l_1: y=k_1x$，过原点作与 l_1 垂直的直线 l_2，求 l_2 的斜率.

如图 2-27，显然，l_1 与 l_2 相交于 $O(0,0)$，l_1 的斜率为 k_1. 设 l_2 的斜率是 k_2，在 l_1，l_2 上分别取 $T_1(1,k_1)$，$T_2(1,k_2)$，则 $OD\perp T_1T_2$，垂足为 $D(1,0)$. 设 $k_1>0$，则 $k_2<0$.

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $\triangle T_1OT_2$ 是直角三角形，$\angle T_1OT_2=90°$.

由相似三角形关系❶，可得 $|DT_1|\cdot|DT_2|=|OD|^2$，即

$$|k_1|\cdot|k_2|=1^2.$$

于是
$$k_1\cdot(-k_2)=1.$$

所以
$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

当直线 l_1，l_2 不经过原点时，可以过原点作两条直线，分别平行于直线 l_1，l_2，即可转化为上述情况.

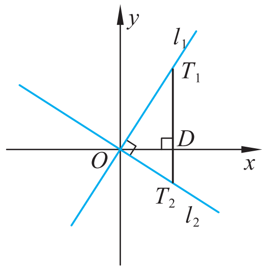


图 2-27

❶ 如图 2-27，在 Rt$\triangle T_1OT_2$ 中，$\angle T_1OT_2=90°$，由 $OD\perp T_1T_2$ 可得 $\triangle ODT_1\backsim\triangle T_2DO$，所以 $\frac{|DT_1|}{|OD|}=\frac{|OD|}{|DT_2|}$，即 $|DT_1|\cdot|DT_2|=|OD|^2$.

抽象概括

一般地，设直线 $l_1: y=k_1x+b_1$，直线 $l_2: y=k_2x+b_2$.

若 $l_1\perp l_2$，则 $k_1\cdot k_2=-1$；反之，若 $k_1\cdot k_2=-1$，则 $l_1\perp l_2$.

特别地，对于直线 $l_1: x=a$，直线 $l_2: y=b$，由于 $l_1\perp x$ 轴，$l_2\perp y$ 轴，所以 $l_1\perp l_2$.

例 11　判断下列两直线是否垂直，并说明理由：

(1) $l_1: y=4x+2$，　$l_2: y=-\frac{1}{4}x+5$；

(2) $l_1: 5x+3y=6$，　$l_2: 3x-5y=5$；

(3) $l_1: y=5$，　$l_2: x=8$.

解　(1) 设两直线的斜率分别是 k_1，k_2，则 $k_1=4$，$k_2=-\frac{1}{4}$，有

$$k_1\cdot k_2=4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-1,$$

所以 $l_1\perp l_2$.

(2) 设两直线的斜率分别是 k_1，k_2，则 $k_1=-\frac{5}{3}$，$k_2=\frac{3}{5}$，有

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{3}{5}=-1,$$

所以 $l_1\perp l_2$.

(3) 因为 l_1 平行于 x 轴，l_2 垂直于 x 轴，所以 $l_1\perp l_2$.

例 12　求过点 $A(3,2)$ 且垂直于直线 $4x+5y-8=0$ 的直线方程.

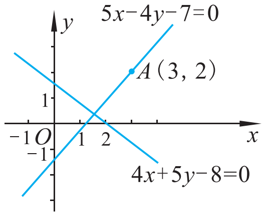


图 2-28

解 已知直线 $4x+5y-8=0$ 的斜率为 $-\frac{4}{5}$，所求直线与已知直线垂直，所以该直线的斜率为 $\frac{5}{4}$，且该直线过点 $A(3,2)$（图 2-28），因此所求直线方程为

$$y-2=\frac{5}{4}(x-3),$$

即

$$5x-4y-7=0.$$

信息技术应用

垂直直线的斜率关系

用数学软件或图形计算器动态呈现两条互相垂直的直线的变化过程，体会在变化中斜率之间的不变关系（图 2-29）.

图 2-29

练 习

1. 判断下列各对直线是否平行或垂直：

   (1) $3x-6y+4=0$ 与 $y=\frac{1}{2}x-1$；

   (2) $y=x+5$ 与 $4x+4y-3=0$；

   (3) $5x+2y=7$ 与 $2x+5y=3$；

   (4) $\sqrt{2}x-y+1=0$ 与 $\sqrt{2}x+2y+8=0$；

   (5) $x=2$ 与 $x=-5$；

   (6) $x=2$ 与 $y=-5$.

2. 求过 $A(1,2)$ 且分别适合下列条件的直线方程：

   (1) 平行于直线 $3x+y+4=0$； (2) 垂直于直线 $x-y+1=0$.

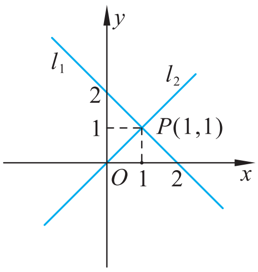


图 2-30

1.4 两条直线的交点

考察直线 l_1：$x+y=2$，l_2：$x-y=0$ 的位置关系，在平面直角坐标系中，我们画出这两条直线的图形，如图 2-30，显然这两条直线不

平行，可以看出它们的交点坐标是 $P(1,1)$. 那么怎样求出它们的交点坐标?

下面给出具体求法.

设 l_1 与 l_2 的交点为 $P(x,y)$，由于点 P 既在 l_1 上，又在 l_2 上，应该同时满足这两个方程，其坐标是这两个方程的解.

联立两个方程 $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

它对应的就是平面上的点 $P(1,1)$.

抽象概括

一般地，如果两条不重合的直线方程分别为

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0; \qquad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

要判断它们是否平行，即看它们的斜率是否相等. 如果不等，则两直线相交，问题就转化成二元一次方程组求解的问题.

两条直线相交，交点一定同时在这两条直线上，交点坐标是这两个方程组成的方程组的唯一解；反之，如果这两个二元一次方程组成的方程组只有一个解，那么以这个解为坐标的点，必是直线 l_1 和 l_2 的交点. 因此求两条直线的交点，就是求这两个直线方程的公共解.

例 13　求下列两条直线的交点:

$l_1: x+2y+1=0$，　　$l_2: -x+2y+2=0$.

解　解方程组 $\begin{cases} x+2y+1=0, \\ -x+2y+2=0, \end{cases}$

得
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

所以，这两条直线的交点是 $M\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{4}\right)$(图 2-31).

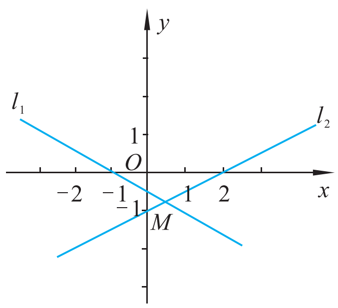


图 2-31

例 14　设三条直线 $l_1: x+y-1=0$，$l_2: kx-2y+3=0$，$l_3: x-(k+1)y-5=0$. 若这三条直线交于一点，求 k 的值.

解　解由 l_1，l_2 的方程组成的方程组 $\begin{cases} x+y-1=0, \\ kx-2y+3=0, \end{cases}$

得
$$\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2+k}, \\ y=\dfrac{3+k}{2+k}, \end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 的交点是 $P\left(\frac{-1}{2+k},\frac{3+k}{2+k}\right)$.

问题与思考

若 $k=-2$，三条直线 l_1, l_2, l_3 的位置关系会是什么情况？

又因为 l_1, l_2, l_3 交于一点，即点 P 坐标满足直线 l_3 的方程，

$$\frac{-1}{2+k}-(k+1)\frac{3+k}{2+k}-5=0,$$

解得　$k=-7$ 或 -2（舍去）．　所以　$k=-7$.

练　习

1. 求下列两条直线的交点：
   (1) $l_1: x-y=5$，　　$l_2: 2x+7=0$；
   (2) $l_1: y=\frac{1}{2}x+2$，　　$l_2: y=3x+7$.
2. 判定下列各对直线的位置关系，如果相交，求出交点坐标：
   (1) $l_1: 3x-2y=7$，　　$l_2: 7x+y=1$；
   (2) $l_1: 2x-6y+5=0$，　　$l_2: y=\frac{1}{3}(x+1)$；
   (3) $l_1: (\sqrt{2}-1)x+y=3$，　　$l_2: x+(1-\sqrt{2})y=2$.

1.5　平面直角坐标系中的距离公式

一、两点间的距离公式

平面上任给两点 A, B，用 $|AB|$ 表示两点间的距离．

在初中，我们已经学过数轴上两点间的距离公式(图 2-32).

$$|AB|=|x_B-x_A|.$$

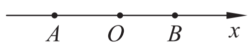


图 2-32

在平面直角坐标系中，若两点为 $A(-5,-2)$，$B(3,4)$，它们的距离是多少呢？

如图 2-33，过 A 作 y 轴的垂线，过 B 作 x 轴的垂线，二垂线交于点 $C(3,-2)$.

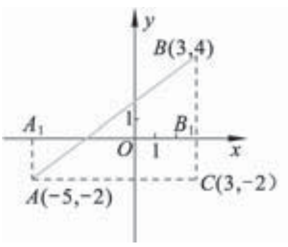


图 2-33

在 Rt△ACB 中，

$$|CA|=3-(-5)=8,$$
$$|BC|=4-(-2)=6.$$

由勾股定理可得 $|AB|=\sqrt{|CA|^2+|BC|^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

抽象概括

一般地，若两点 A，B 的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$（图 2-34），则有两点 A，B 间的距离公式

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

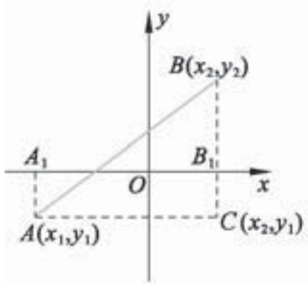


图 2-34

例 15　求下列两点间的距离：

(1) $A(-1,0)$，$B(2,3)$；　　(2) $A(4,3)$，$B(7,-1)$.

解　(1) $|AB|=\sqrt{(2+1)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$；

(2) $|AB|=\sqrt{(7-4)^2+(-1-3)^2}=5$.

例 16　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状．

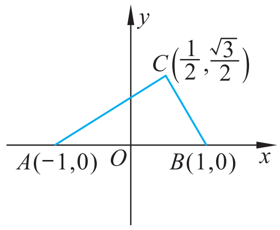


图 2-35

解　如图 2-35，因为

$$|BC|=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+3}{4}}=1,$$

$$|AB|=2,|AC|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3},$$

有
$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2,$$
所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形．

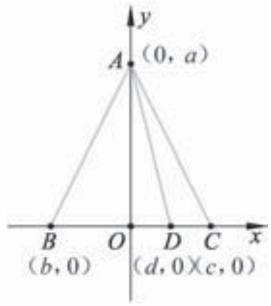


图 2-36

例 17　$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上任意一点（D 与 B，C 不重合），且 $|AB|^2=|AD|^2+|BD|\cdot|DC|$．求证：$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

解　作 $AO\perp BC$，垂足为 O，以 BC 所在直线为 x 轴，以 OA 所在直线为 y 轴，建立直角坐标系❶（图 2-36）．

设 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，$D(d,0)$．

因为 $|AB|^2=|AD|^2+|BD|\cdot|DC|$，所以，由距离公式可得

$$b^2+a^2=d^2+a^2+(d-b)(c-d),$$

即
$$-(d-b)(b+d)=(d-b)(c-d).$$

又
$$d-b\neq 0,$$

故
$$-b-d=c-d,$$

即
$$-b=c.$$

所以 $|AB|=|AC|$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形．

❶ 根据图形特点，建立适当的直角坐标系，利用坐标解决有关问题，这种方法叫坐标的方法，也称为解析法.

问题与思考

本题如果以 B 为坐标原点，以 BC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，结论如何证呢？如果以 BC 所在直线为 x 轴，以 BC 的中垂线为 y 轴呢？

练 习 1

1. 求下列两点间的距离：

(1) $A(-3,0)$，　$B(2,0)$；

(2) $C(2,1)$，　$D(-5,1)$；

(3) $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{2}\right)$，　$F\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. 已知点 $A(x,-5)$ 和 $B(0,10)$ 的距离为 17，求 x 的值.

二、点到直线的距离公式

我们知道，在平面几何中，求点 P 到直线 l 的距离的步骤如下：

先过点 P 作 l 的垂线 PH，垂足为 H. 再求出 PH 的长度，这就是点 P 到直线 l 的距离.

那么，在平面直角坐标系中，如何用坐标的方法求出点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离？

实例分析

下面我们计算点 $P(-3,5)$ 到直线 l：$3x-4y-5=0$ 的距离.

首先求出直线 l：$3x-4y-5=0$ 的斜率 $k=\frac{3}{4}$，所以与 l 垂直的直线斜率为 $-\frac{4}{3}$. 于是，过点 P 且与 l 垂直的直线方程是

$$y-5=-\frac{4}{3}(x+3).$$

解方程组 $\begin{cases}3x-4y-5=0,\\ y-5=-\frac{4}{3}(x+3),\end{cases}$ 得交点 $H\left(\frac{27}{25},-\frac{11}{25}\right)$，这点就是过点 P 作 l 的垂线的垂足(图 2-37).

由两点间的距离公式可得

$$|PH|=\sqrt{\left(-3-\frac{27}{25}\right)^2+\left(5+\frac{11}{25}\right)^2}=\frac{34}{5}.$$

信息技术建议

用数学软件或图形计算器测量点到直线的距离，体会求点到直线的距离的步骤.

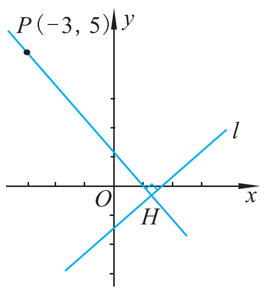


图 2-37

抽象概括

求点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离的一般步骤，其算法可用如下框图表示：

确定直线 l 的斜率 k

↓

求与 l 垂直直线的斜率 $k'=-\dfrac{1}{k}$

↓

求过点 P 垂直于 l 的直线 l' 的方程

↓

求 l 与 l' 的交点 H

↓

求点 P 与点 H 间的距离

↓

得到点 P 到 l 距离 $d=|PH|$

点 $P(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离记为 d，用上述方法，我们可以得到

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

这就是点 P 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式. 今后我们将用向量的方法证明这个公式.

例 18　(1) 求原点到直线 l_1：$5x-12y-9=0$ 的距离；

(2) 求点 $P(-1,2)$到直线 l_2：$2x+y-10=0$ 的距离 .

解　(1) 原点到直线 l_1 的距离 $d=\dfrac{|5\times0-12\times0-9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{9}{13}$；

(2) 点 P 到直线 l_2 的距离 $d=\dfrac{|2\times(-1)+2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$.

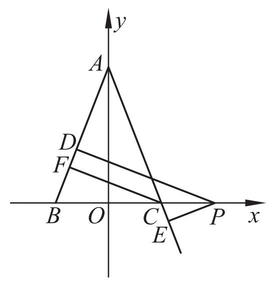


图 2-38

例 19　用解析法证明：等腰三角形底边延长线上一点到两腰的距离之差等于一腰上的高 .

证明　在△ABC 中，$AB=AC$，P 为 BC 延长线上一点，$PD\perp AB$ 于 D，$PE\perp AC$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F. 以 BC 所在直线为 x 轴，以 BC 的中垂线为 y 轴，建立直角坐标系(图 2-38).

设 $A(0,b)$，$B(-a,0)$，$C(a,0)$ $(a>0,b>0)$，则直线 AB 方程为 $bx-ay+ab=0$，直线 AC 方程为 $bx+ay-ab=0$，取 $P(x_0,0)$，使 $x_0>a$，则点 P 到直线 AB，AC 的距离分别为

$$|PD|=\frac{|bx_0-0+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bx_0+ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$|PE|=\frac{|bx_0+0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bx_0-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

点 C 到直线 AB 的距离为

信息技术建议

用数学软件或图形计算器动态呈现例 19 的图形的变化过程，体会在变化中的不变的数量关系.

$$|CF|=\frac{|ab+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

则
$$|PD|-|PE|=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=|CF|.$$

例 20 两平行直线 l_1，l_2 分别过 $A(1,0)$ 与 $B(0,5)$. 若 l_1 与 l_2 的距离为 5，求这两直线方程 .

解 显然，直线 l_1，l_2 均不与 x 轴垂直. 设 l_1 的方程为 $y=k(x-1)$，即 $kx-y-k=0$，则点 B 到 l_1 的距离为

$$\frac{|5+k|}{\sqrt{k^2+1}}=5,$$

所以 $k=0$ 或 $k=\frac{5}{12}$.

l_1 的方程为

$$y=0 \quad 或 \quad 5x-12y-5=0,$$

可得 l_2 的方程为

$$y=5 \quad 或 \quad y=\frac{5}{12}x+5.$$

故所求两直线方程分别为

$$l_1: y=0, \qquad l_2: y=5;$$

或
$$l_1: 5x-12y-5=0, \qquad l_2: 5x-12y+60=0.$$

练 习 2

1. 求下列点到直线的距离：

   (1) $(0,0)$，$3x-2y+4=0$；　　(2) $(-1,2)$，$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$；

   (3) $(2,-3)$，$x=y$.

2. 求下列两条平行直线的距离：

   (1) $3x-2y-1=0$，$3x-2y+6=0$；　　(2) $x+2y=0$，$2x+4y-7=0$.

习 题 2—1

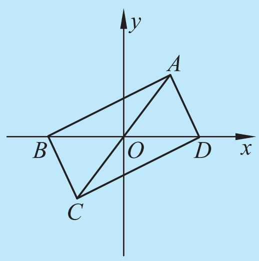
A 组

1. 已知点 $A(1,\sqrt{3})$，$B(-1,3\sqrt{3})$，求直线 AB 的斜率 .
2. 直线 l 经过原点与点 $(2,2)$，求它的斜率和倾斜角 .

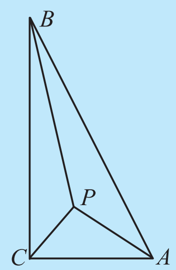
3. 已知点 $P(-2,m)$，$Q(m,4)$，且直线 PQ 的斜率为 1. 求 m 的值.
4. 已知一条直线过点 $P_1(2a,3b)$ 和 $P_2(4b,6a)$，并且 $a\neq 0$，求此直线的斜率.
5. 根据下列条件写出直线的方程：
   (1) 经过点 $A(-1,2)$，且与直线 $2x+4y+1=0$ 平行；
   (2) 经过点 $B(4,1)$，且与直线 $x+2y+3=0$ 垂直；
   (3) 经过点 $C(1,3)$，且垂直于过点 $M(1,2)$ 和点 $N(-2,-3)$ 的直线；
   (4) 经过点 $D(1,2)$，且平行于 x 轴；
   (5) 经过点 $E(4,3)$，且垂直于 x 轴.
6. 已知直线满足下列条件，求直线方程：
   (1) 经过两条直线 $x+2y-5=0$ 和 $3x-y-1=0$ 的交点，且平行于直线 $5x-y+100=0$；
   (2) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且垂直于直线 $6x-8y+3=0$.
7. 直线 $y=kx+3$ 与直线 $y=\frac{1}{k}x-5$ 的交点在直线 $y=x$ 上，求 k 的值.
8. 求经过两条直线 $2x-3y-3=0$ 和 $x+y+2=0$ 的交点，且与直线 $3x+y-1=0$ 平行的直线方程.
9. 求斜率为 -3，且与直线 $2x-y+4=0$ 的交点恰好在 x 轴上的直线方程.
10. 三条直线 $x+y-1=0$，$x-ay+8=0$，$2x+3y-5=0$ 共有两个不同交点. 求 a 的值.
11. 已知数轴上 A，B 两点的坐标 x_1，x_2 分别是
    (1) $x_1=8$，$x_2=-1$；
    (2) $x_1=-4$，$x_2=0$；
    (3) $x_1=2a-b$，$x_2=a-2b$.
    求 $|AB|$ 和 $|BA|$.
12. 已知某零件一个面上有 3 个孔，孔中心的坐标分别为 $A(-7,20)$，$B(-2,3)$，$C(0,-1)$. 求每两个孔中心的距离.
13. 在 y 轴上求一点 M，使 M 与点 $N(6,8)$ 的距离等于 10.

B　组

1. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的中心与原点重合，且对角线 BD 与 x 轴重合，A 在第一象限内，$|AB|=\sqrt{6}$，$|BC|=\sqrt{3}$. 求矩形各顶点的坐标.
2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，P 为三角形内一点，且 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCA}$. 求证：$|PA|^2+|PB|^2=5|PC|^2$.



（第 1 题）



（第 2 题）

§2　圆与圆的方程

2.1　圆的标准方程

一、确定圆的条件

我们在初中已经学习了圆的有关内容，圆的几何特征是圆上任一点到圆心的距离等于定长，这个定长称为半径. 一个圆的圆心位置和半径一旦给定，这个圆就被确定下来了.

在平面直角坐标系中，怎样用坐标的方法刻画圆呢？

二、圆的标准方程

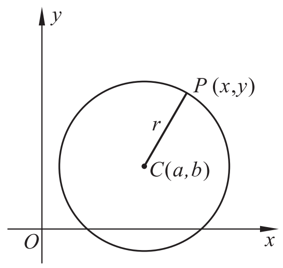


图 2-39

我们来求圆心为 $C(a,b)$，半径是 r 的圆的方程(图 2-39).

设 $P(x,y)$ 是圆上任意一点，根据圆的定义，点 P 到圆心 C 的距离等于 r. 由两点间距离公式，点 P 适合的条件可表示为

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r. \qquad ①$$

把①式两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.} \qquad ②$$

方程②就是圆心为 $C(a,b)$，半径是 r 的圆的方程. 不难看出，如果一个点 $P(x,y)$ 满足此方程，则 P 到圆心的距离为 r，这个点就在圆上. 我们把这个方程叫作**圆的标准方程**.

不难看出，满足方程的 x，y 为坐标所表示的点都在圆上，圆上的每一点的坐标都满足方程.

特别地，当圆心在坐标原点时，有 $a=b=0$，那么圆的方程为

$$\boxed{x^2+y^2=r^2.}$$

例 1　求以 $C(4,-6)$ 为圆心，半径等于 3 的圆的方程.

解　将圆心 $C(4,-6)$、半径等于 3 代入圆的标准方程，可得所求圆的方程为

$$(x-4)^2+(y+6)^2=9.$$

例 2　已知两点 $M_1(4,9)$ 和 $M_2(6,3)$. 求以 M_1M_2 为直径的圆的方程.

解　根据已知条件,圆心 $C(a,b)$ 是 M_1M_2 的中点,那么它的坐标为

$$a=\frac{4+6}{2}=5,\quad b=\frac{9+3}{2}=6,$$

根据两点间距离公式,得圆的半径

$$r=|CM_1|=\sqrt{(4-5)^2+(9-6)^2}=\sqrt{10}.$$

所求圆的方程是 $(x-5)^2+(y-6)^2=10$(图 2-40).

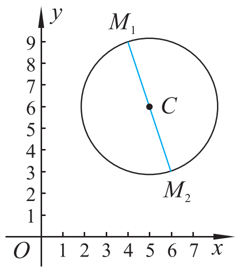


图 2-40

中点坐标

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

练　习

1. 写出下列各圆的方程:
   (1) 圆心在原点,半径为 5;
   (2) 经过点 $P(5,1)$,圆心在点 $C(6,-2)$;
   (3) 以 $A(2,5)$,$B(0,-1)$ 为直径的圆.
2. 下列方程分别表示什么图形?
   (1) $x^2+y^2=0$;
   (2) $(x-1)^2=8-(y+2)^2$;
   (3) $y=\sqrt{1-x^2}$.

2.2　圆的一般方程

从上一节的讨论我们知道圆心为 $C(a,b)$,半径是 r 的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

展开得
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

可见,任何一个圆的方程都可以写成下面的形式:

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.} \qquad ①$$

现在,我们来研究形如①的方程的曲线是否一定是圆.

将①的左边配方,得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时,方程①表示的是以 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心、$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆;

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①只有一个实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，所以方程①表示一个点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①没有实数解，因而它不表示任何图形.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①表示一个圆，称①为**圆的一般方程.**

例 3 求过点 $M(-1,1)$，且圆心与已知圆 C：$x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 相同的圆的方程.

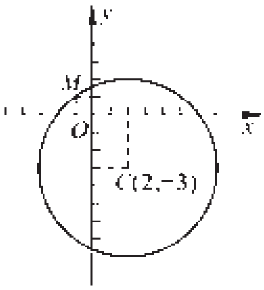


图 2-41

解 将已知圆的方程化为标准方程

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16,$$

圆心 C 的坐标为$(2,-3)$，半径为 4，故所求圆的半径为

$$r=|CM|=\sqrt{(2+1)^2+(-3-1)^2}=5.$$

所求圆的方程为$(x-2)^2+(y+3)^2=25$(图 2-41).

例 4 求过三点 $O(0,0)$，$M_1(1,1)$，$M_2(4,2)$的圆的方程，并指出这个圆的半径和圆心坐标.

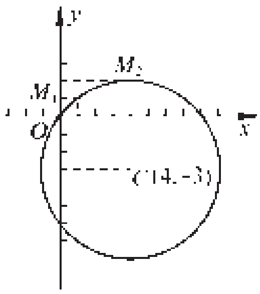


图 2-42

解 设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

由已知，点 $O(0,0)$，$M_1(1,1)$，$M_2(4,2)$的坐标满足上述方程，分别代入方程，可得关于 D，E，F 的三元一次方程组

$$\begin{cases}F=0,\\D+E+F+2=0,\\4D+2E+F+20=0.\end{cases}$$

解方程组得 $D=-8$，$E=6$，$F=0$，于是得到所求圆的方程为

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

不难看出，圆的半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=5$，圆心坐标是 $C(4,-3)$(图 2-42).

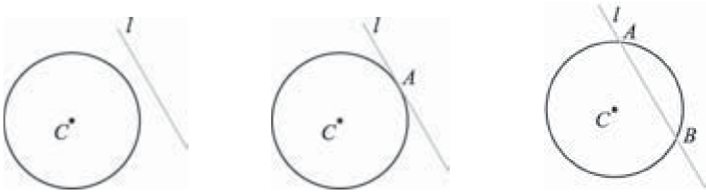
练 习

1. 求下列各圆的半径和圆心坐标：
   (1) $x^2+y^2-6x=0$；　　(2) $3x^2+3y^2+6x-12y+7=0$；
   (3) $x^2+y^2+2by=0$；　　(4) $x^2+y^2+2ax-b^2=0$.
2. 已知圆过点 $A(1,4)$，$B(3,-2)$，且圆心到直线 AB 的距离为 $\sqrt{10}$. 求这个圆的方程.

2.3　直线与圆、圆与圆的位置关系

一、直线与圆的位置关系

在平面几何中，我们已经学习了直线与圆的三种位置关系：直线与圆相离，直线与圆相切，直线与圆相交（图 2-43）.



直线与圆相离　　直线与圆相切　　直线与圆相交

图 2-43

下面我们来讨论如何用坐标的方法表示直线与圆的位置关系.

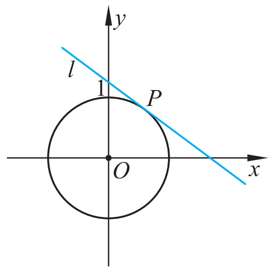


图 2-44

先看以下问题：已知直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$，判断它们的位置关系.

已知圆的圆心是 $O(0,0)$，半径是 $r=1$，圆心到直线的距离

$$d=\frac{|3\times0+4\times0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1=r,$$

所以，此直线与圆相切（图 2-44）.

此外，还可以根据方程组解的情况来判断直线和圆的位置关系.

建立方程组 $\begin{cases}3x+4y-5=0,\cdots\cdots①\\x^2+y^2=1,\cdots\cdots②\end{cases}$ 由①可知 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，代入②得 $x^2+\left(-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\right)^2=1$，化简得 $25x^2-30x+9=0$，求解此一元二次方程，$x=\frac{3}{5}$. 于是此方程组有唯一一个解 $\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=\frac{4}{5},\end{cases}$ 即此直线与圆只有一个公共点 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，从而直线与圆相切.

抽象概括

从上面的例子不难看出，直线与圆的位置关系可由圆心到直线的距离与半径的大小关系来决定，也可以根据方程组解的情况来决定.

一般地，已知直线 $Ax+By+C=0$ 和圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则圆心 (a,b) 到此直线的距离

$$d=\frac{|aA+bB+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当 $d>r$ 时，直线与圆相离；当 $d=r$ 时，直线与圆相切；当 $d<r$ 时，直线与圆相交.

此外，建立方程组 $\begin{cases}Ax+By+C=0,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\end{cases}$ 根据解的情况来判断此直线和圆的位置关系.

当方程组只有一个实数解时，直线与圆相切；当方程组有两个不同的实数解时，直线与圆相交；当方程组没有实数解时，直线与圆相离.

例 5 判断下列直线与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系：

(1) $x-y-2=0$； (2) $x+2y-1=0$.

解 已知圆的圆心为 $C(1,1)$，半径 $r=1$.

(1) 点 C 到直线 $x-y-2=0$ 的距离为

$$d_1=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}.$$

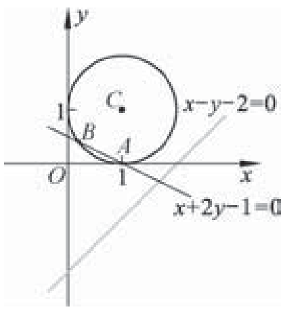


图 2-45

又 $r=1$，所以 $d_1>r$，可知直线与圆相离(图 2-45).

(2) 建立方程组 $\begin{cases}x+2y-1=0,\cdots\cdots①\\(x-1)^2+(y-1)^2=1,\cdots\cdots②\end{cases}$

由①可知 $x=-2y+1$，代入②得 $(-2y+1-1)^2+(y-1)^2=1$，化简得 $5y^2-2y=0$.

解此一元二次方程得 $y=0$ 或 $y=\frac{2}{5}$，

所以 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\y=\frac{2}{5}.\end{cases}$

故直线与圆相交于两个不同的点 $A(1,0)$，$B\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$(图2-45).

例 6 设直线 $mx-y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求实数 m 的值.

解 已知圆的圆心为 $O(0,0)$，半径 $r=1$，则 O 到已知直线的距离

$$d=\frac{|m\times0+(-1)\times0+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}.$$

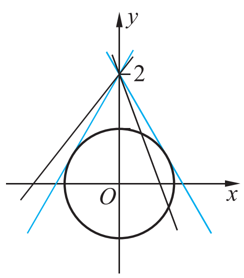


图 2-46

由已知得 $d=r$，即

$$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1,$$

解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

如图 2-46 所示.

练　习 1

1. 判断直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 $(x-3)^2+(y+5)^2=36$ 的位置关系.

2. 以 $C(1,3)$ 为圆心，$\frac{16}{5}$ 为半径的圆与直线 $3x-my-7=0$ 相切，求实数 m 的值.

二、圆与圆的位置关系

从图 2-47 可以看出，平面上两圆位置关系有五种，可以从两圆的圆心距与两圆半径的大小关系来判断.

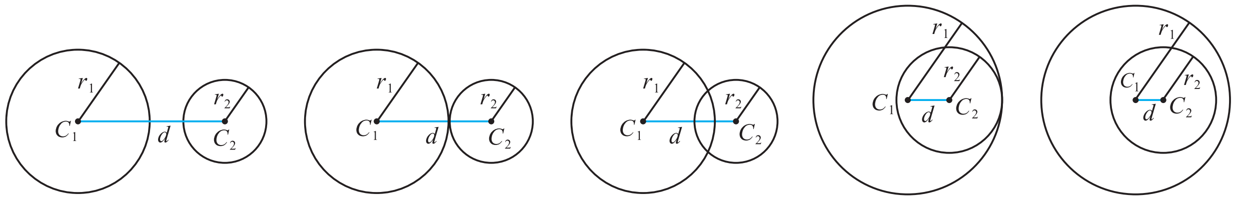


图 2-47

一般地，设圆 C_1 和 C_2 的方程分别为

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2,$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2,$$

则圆心分别为 $C_1(x_1, y_1)$，$C_2(x_2, y_2)$，半径分别为 r_1，r_2，圆心距

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

那么，当 $d>r_1+r_2$ 时，两圆相离；

当 $d=r_1+r_2$ 时，两圆外切；

当 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ 时，两圆相交；

当 $d=|r_1-r_2|$ 时，两圆内切；

当 $d<|r_1-r_2|$ 时，两圆内含.

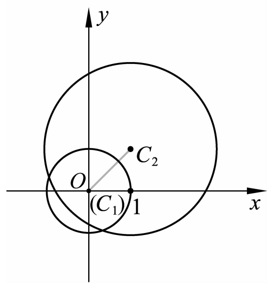


图 2-48

例 7　在平面直角坐标系中分别作出圆心为 $C_1(0,0)$，$C_2(1,1)$，半径分别为 1，2 的两圆，并判断两圆的位置关系.

解　作出两圆，如图 2-48 所示．

两圆半径分别记作 r_1 和 r_2，则 $r_1=1$，$r_2=2$，圆心距

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2},$$

于是，$1=|r_1-r_2|<d<r_1+r_2=3$，所以两圆相交.

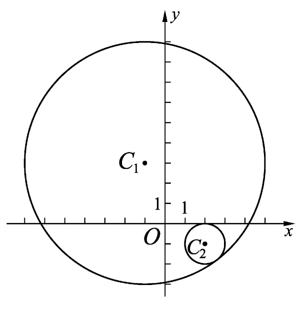


图 2-49

例 8　判断圆 C_1：$x^2+y^2+2x-6y-26=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 的位置关系，并画出图形.

解　由已知得：

圆 C_1：$(x+1)^2+(y-3)^2=36$，其圆心 $C_1(-1,3)$，半径 $r_1=6$；

圆 C_2：$(x-2)^2+(y+1)^2=1$，其圆心 $C_2(2,-1)$，半径 $r_2=1$.

于是
$$|C_1C_2|=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}=5.$$
又
$$|r_1-r_2|=5,$$
即
$$|C_1C_2|=|r_1-r_2|,$$
所以两圆内切.

如图 2-49 所示.

问题与思考

例 7、例 8 还有其他解法吗？请同学们思考与交流.

信息技术应用

用信息技术探究直线和圆的位置关系

使用数学软件或图形计算器探究以下问题.

问题 1　中点轨迹问题

(1) 点 P 在定圆 O 上运动，Q 是定点，取 PQ 中点 M，当点 P 在定圆 O 上运动时，追踪点 M，点 M 将会留下什么痕迹(也称为点 M 的轨迹)？(图 2-50)

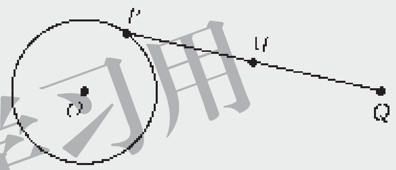


图 2-50

(2) 线段 PQ 定长为 l，动点 P 在定圆上运动，Q 在过圆心的定直线上运动，那么中点 M 的轨迹是什么样？(图 2-51)

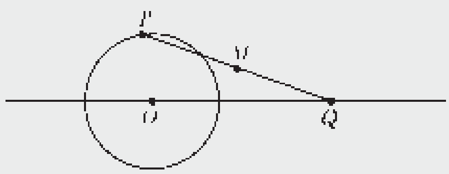


图 2-51

(3) 线段 PQ 定长为 l，两个端点分别在坐标轴上，那么中点 M 的轨迹是什么样？(图 2-52)

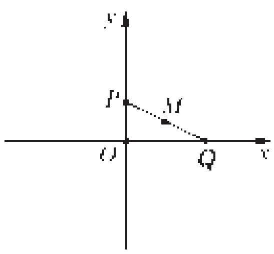


图 2-52

(4) 大家仿照上述例子，再编几个类似的中点轨迹问题.

问题 2　直线和两圆的位置与方程的关系

用数学软件或图形计算器作两个相交圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，半径分别为 r_1，r_2，交点为 M，N. 过点 M，N 作直线 l，在 l(线段 MN 外)上取一点 P，过点 P 分别作两个圆的切线 PE，PF(图 2-53).

(1) 显然直线 $l\perp O_1O_2$. 测量 $|PE|$，$|PF|$，猜想它们之间的关系，并加以证明；

（2）测量$\odot O_1$，$\odot O_2$ 以及直线 l 的方程，观察并猜想它们之间的关系，然后用数学软件或图形计算器加以验证；

*（3）证明（2）的结论；

（4）如果两圆相离或相切或内含，请用数学软件或图形计算器验证：是否也存在一条直线 l，具有上述（1）中的性质，如果存在，它的方程与两圆的方程有什么关系.

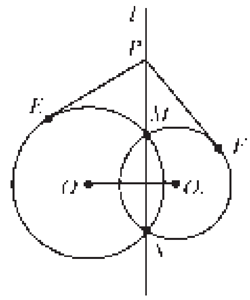


图 2-53

问题 3　和两个定圆相切的动圆圆心轨迹

已知：两个定圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，半径分别为 r_1，r_2，一动圆 M 和它们都外切（图 2-54）.

（1）如果两个定圆$\odot O_1$，$\odot O_2$ 相离，圆心 M 的轨迹是什么？

（2）如果两个定圆$\odot O_1$，$\odot O_2$ 外切，情况怎么样？

（3）如果两个定圆$\odot O_1$，$\odot O_2$ 相交呢？

（4）思考每种情况中的点 M 所满足的几何关系.

（5）如果动圆 M 和这两个定圆内切，思考（1），（2），（3），情况又会怎么样？

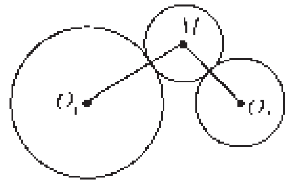


图 2-54

练　习 2

判断下列各题中两圆的位置关系：

（1）C_1：$x^2+y^2+2x-6y-26=0$，C_2：$x^2+y^2-4x+2y-4=0$；

（2）C_1：$(x+2)^2+(y-2)^2=13$，C_2：$(x-4)^2+(y+2)^2=13$；

（3）C_1：$x^2+y^2=9$，C_2：$(x-2)^2+y^2=1$.

习　题 2—2

A　组

1. 求满足下列条件的圆的方程，并分别画出它们的图形：

（1）经过点 $C(-1,1)$和 $D(1,3)$，圆心在 x 轴上；

（2）经过直线 $x+3y+7=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点，圆心为点$C(-1,1)$；

（3）经过点 $A(5,2)$和 $B(3,-2)$，圆心在直线 $2x-y=3$ 上.

2. 一个等腰三角形底边上的高等于 5，底边两端点的坐标是$(-4,0)$和$(4,0)$，求它的外接圆的方程.

3. 三条直线 $x-y-9=0$，$x+2y=0$，$3x-y-7=0$ 围成一个三角形，求该三角形的外接圆的方程.

4. （1）圆 $x^2+y^2=4$ 与直线 $y=2$ ________；

（2）圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=2$ ________；

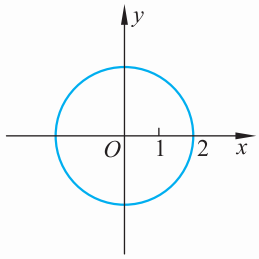
（3）圆 $x^2+y^2=4$ 与直线 $x=1$ ________.

5. 设已知圆如图，请按要求作圆：

（1）作与已知圆外切，且切点为(2，0)，半径为 1 的圆；

（2）作与已知圆内切，且切点为(2，0)，半径为 1 的圆；

（3）作与已知圆内含的圆.



（第 5 题）

6. 判断直线 $y=\frac{4}{3}x-\frac{50}{3}$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=100$ 的位置关系.

B 组

1. 试就 m 的值讨论直线 $x-my+2=0$ 和圆 $x^2+y^2=4$ 的关系.
2. 若圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $x=2$ 相切，求实数 r 的值；如果相离、相交又如何？
3. 作出圆 C_1：$x^2+(y-2)^2=9$ 与 C_2：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的图形，并说明两者的位置关系.

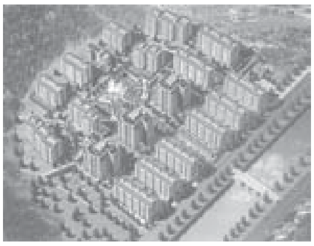
§3　空间直角坐标系

3.1　空间直角坐标系的建立

一、空间物体位置的描述

思考交流

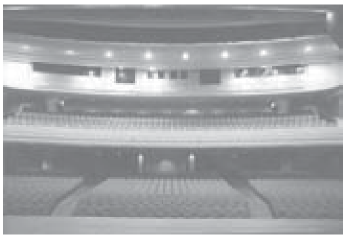
在日常生活中，常常需要确定空间物体的位置．根据你的生活经验，讨论下面问题.



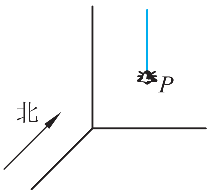
(1)如何确定住户在小区中的位置?

(2)如何确定办公室在大厦内的位置?

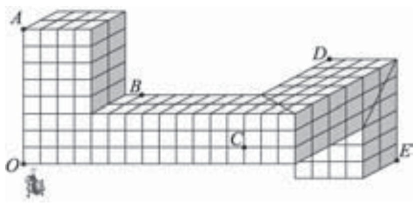
(3)如何在图书馆中查找某本书?



(4)如何在剧院中寻找自己的座位?



(5)如何确定吊灯在房间中的位置?



(6)一只小蚂蚁站在水泥构件 O 点处，在 A,B,C,D,E 处放有食物，如何告诉小蚂蚁食物的位置?

二、建立空间直角坐标系

在上面的实例中，我们感受到，在描述空间物体的位置时，仅有二维的平面直角坐标系是不够的，为此，我们通常在平面直角坐标系的基础上，通过原点 O，再增加一条与 xOy 平面垂直的 z 轴，如图 2-55，这样就建立了三个维度的空间直角坐标系.

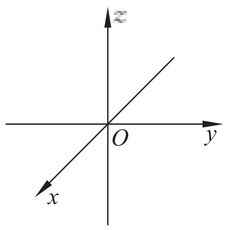


图 2-55

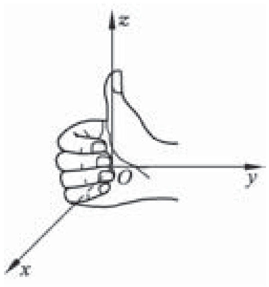


图 2-56

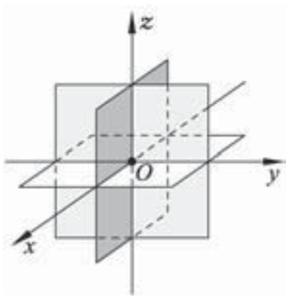


图 2-57

一般是将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，那么 z 轴就垂直于水平面. 它们的方向通常符合右手螺旋法则，即伸出右手，让四指与大拇指垂直，并使四指先指向 x 轴正方向，然后让四指沿握拳方向旋转 $90°$ 指向 y 轴正方向，此时大拇指的指向即为 z 轴正向. 我们也称这样的坐标系为右手系(图 2-56).

在空间直角坐标系中，O 叫作原点，x,y,z 轴统称为坐标轴. 由坐标轴确定的平面叫作坐标平面，x,y 轴确定的平面记作 xOy 平面，y,z 轴确定的平面记作 yOz 平面，x,z 轴确定的平面记作 xOz 平面，如图 2-57 所示.

3.2　空间直角坐标系中点的坐标

在空间直角坐标系中，如何用坐标来表示点的位置呢?

类似于平面直角坐标系中点的坐标表示，在空间直角坐标系中，我们可以用一个三元有序数组来刻画空间点的位置. 空间任意一点 P 的坐标记为 (x,y,z)，第一个是 x 坐标，第二个是 y 坐标，第三个是 z 坐标.

给定空间直角坐标系中的任意一个点 P，下面我们来确定点 P 的坐标.

如果点 P 在 xOy 平面上，如图 2-58，在 xOy 平面直角坐标系中点 P 的坐标是 (x,y)，我们把 x,y 看作点 P 在空间直角坐标系中的 x 坐标、y 坐标，点 P 的 z 坐标取为 0. 即点 P 在空间直角坐标系中的坐标为 $(x,y,0)$.

如果点 P 不在 xOy 平面上，过点 P 作 xOy 平面的垂线，垂足为 P'，P' 的坐标为 $(x,y,0)$，我们把 x,y 看作点 P 在空间直角坐标系中的 x 坐标、y 坐标，用实数 z 来表示点 P 的 z 坐标：如果点 P 与 z 轴的正半轴在 xOy 平面的同侧，如图 2-59，规定点 P 的 z 坐标为线段 $P'P$ 的长度；如果点 P 与 z 轴的正半轴在 xOy 平面的异侧，如图 2-60，规定点 P 的 z 坐标为线段 $P'P$ 的长度的相反数. 即点 P 在空间直角坐标系中的坐标为 (x,y,z).

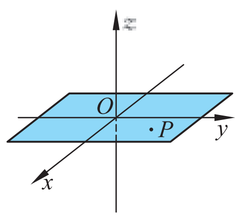


图 2-58

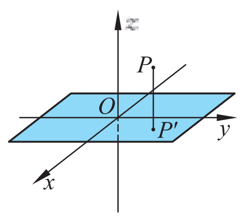


图 2-59

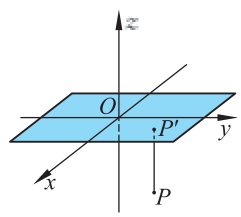


图 2-60

例 1　如图 2-61，点 P' 在 x 轴正半轴上，$|OP'|=2$，$P'P$ 在 xOz 平面上，且垂直于 x 轴，$|P'P|=1$. 求点 P' 和 P 的坐标.

解　点 P' 的坐标为 $(2,0,0)$，点 P 的坐标为 $(2,0,1)$ 或 $(2,0,-1)$.

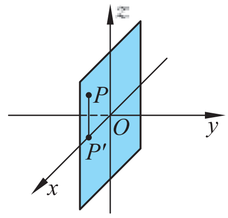


图 2-61

在空间直角坐标系中，给定点的坐标，如何确定点的位置呢？

已知点 $P(x,y,z)$，可以先确定点 $P'(x,y,0)$ 在 xOy 平面上的位置. $|P'P|=|z|$，如果 $z=0$，则点 P 即点 P'；如果 $z>0$，则点 P 与 z 轴的正半轴在 xOy 平面的同侧；如果 $z<0$，则点 P 与 z 轴的负半轴在 xOy 平面的同侧.

例 2　在空间直角坐标系中作出点 $P(3,-2,4)$.

解　先确定点 $P'(3,-2,0)$ 在 xOy 平面上的位置. 因为点 P 的 z 坐标为 4，则 $|P'P|=4$，且点 P 和 z 轴的正半轴在 xOy 平面的同侧，这样就确定了点 P 在空间直角坐标系中的位置，如图 2-62 所示.

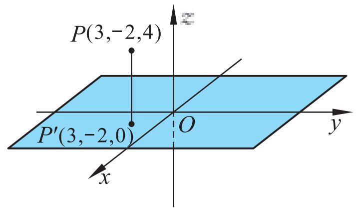


图 2-62

抽象概括

在空间直角坐标系中，对于空间任意一点 P，都可以用一个三元有序数组 (x,y,z) 来表示；反之，任何一个三元有序数组 (x,y,z)，都可以确定空间中的一个点 P. 这样，在空间直角坐标系中，点与三元有序数组之间就建立了一一对应的关系.

分析理解

对于空间直角坐标系中的任意一个点 $P(x,y,z)$，通过点 P 分别向坐标轴作垂面，构造一个以 O，P 为顶点的长方体（如图 2-63），则长方体在三条坐标轴上的顶点 P_1，P_2，P_3 的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；反之，给定空间直角坐标系中的任意一个点 P，通过点 P 分别向坐标轴作垂面，构造一个以 O，P 为顶点的长方体，如果长方体在三条坐标轴上的顶点 P_1，P_2，P_3 的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$，则点 P 的坐标为 (x,y,z).

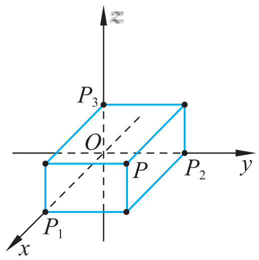


图 2-63

例 3　在同一个空间直角坐标系中画出下列各点：

$A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(3,2,0)$，$D(0,2,0)$，$A'(0,0,1)$，$B'(3,0,1)$，$C'(3,2,1)$，$D'(0,2,1)$.

解　在空间直角坐标系中，画出以上各点，如图 2-64，它们刚好是一个长方体的八个顶点.

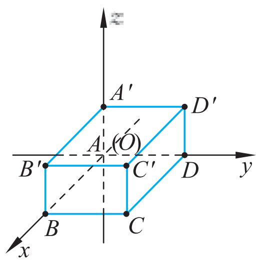
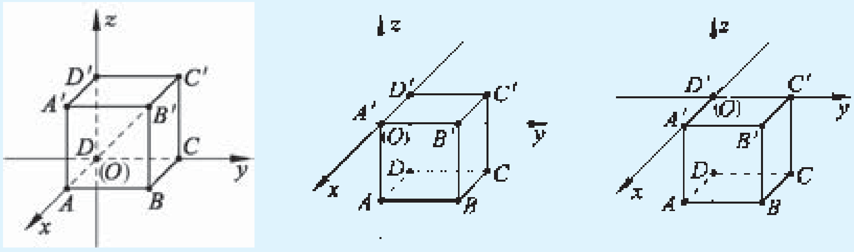


图 2-64

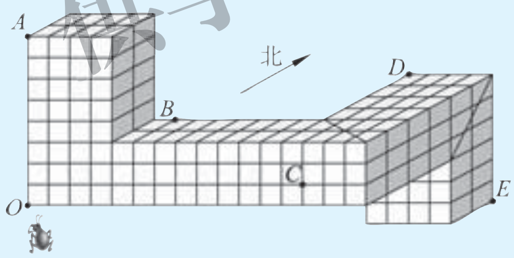
练 习

1. 如图，把棱长为单位 1 的立方体分别放到空间直角坐标系中的不同位置，分别说出立方体各个顶点的坐标.



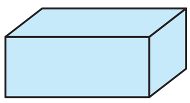
(1)　　(2)　（第 1 题）　　(3)

2. 在方格纸上先画出一个空间直角坐标系，然后标出下列各点：
   $A(0,1,-1)$，$B(0,0,5)$，$C(-1,1,2)$，$D(-2,0,0)$，$E(2,3,1)$.
3. 在空间直角坐标系中，自点 $M(-4,-2,3)$ 引各坐标平面和坐标轴的垂线. 求各垂足的坐标.
4. 在空间直角坐标系中，给定点 $M(1,-2,3)$，求它分别关于坐标平面、坐标轴和原点的对称点的坐标.
5. 在空间直角坐标系中，求点 $M(4,3,-5)$ 到各坐标轴和各坐标平面的距离.
6. 一只小蚂蚁站在水泥构件 O 点处，在 A,B,C,D,E 处放有食物，建立适当的空间直角坐标系，告诉小蚂蚁食物的准确位置.



（第 6 题）

3.3　空间两点间的距离公式



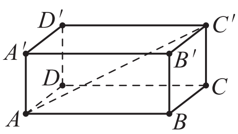


图 2-65

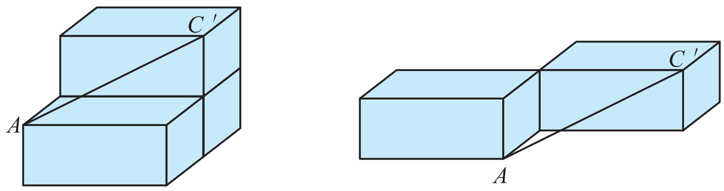
问题提出

长方体是常见的几何图形，连接长方体两个顶点 A，C' 的线段 AC' 称为**长方体的对角线**（图 2-65）.

建筑用砖通常是长方体，我们可以拿尺子测量出一块砖的长、宽和高，那么怎样测量它的对角线 AC' 的长度呢？直接测量比较困难，

我们可以用间接的方法去测量.

如果有三块砖，按照图 2-66(1)的方式码放，可以测量 AC' 的长度；如果有两块砖，按照图 2-66(2)的方式码放，也可以测量 AC' 的长度.



(1)　　　　(2)

图 2-66

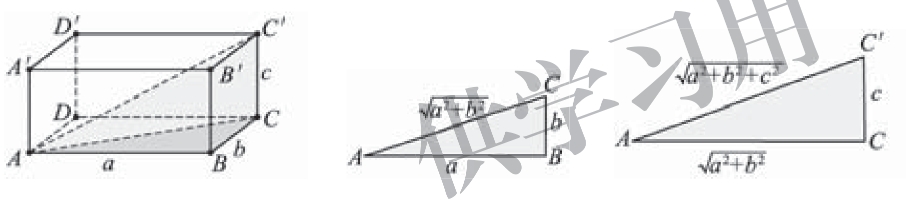
> **问题与思考**
>
> 在三块砖、两块砖的情况下，还有其他的测量方法吗？如果只给一块砖，你还能测量吗？

一、公式计算

如果一块砖的长、宽、高分别为 a,b,c，我们可以计算出对角线 AC' 的长度(图 2-67(1)).

在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理可知，$|AC|=\sqrt{a^2+b^2}$（图 2-67(2)).

而在 Rt$\triangle ACC'$ 中，$|AC'|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$（图 2-67(3)).



(1)　　　　(2)　　　　(3)

图 2-67

一般地，如果长方体的长、宽、高分别为 a,b,c，那么对角线长

$$\boxed{d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.} \qquad ①$$

二、坐标计算

给出空间两点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，如何利用点的坐标求它们的距离？

如果这两点中，一个是原点 $O(0,\ 0,\ 0)$，另一点不在坐标平面上，设为 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则作一个棱在坐标轴上、以 O,P 为顶点的长方体(图 2-68)，O,P 两点的距离就是长方体对角线的长，根据公式①，只需求出长方体的长、宽、高，便可求出 OP 的长.

易知，A,B,C 的坐标为 $A(x_0,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ y_0,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ z_0)$，所以 $|OA|=|x_0-0|=|x_0|$，同理有 $|OC|=|z_0-0|=|z_0|$，$|OB|=|y_0-0|=|y_0|$. 于是

> **信息技术建议**
>
> 用数学软件或图形计算器动态呈现图 2-68 到图 2-69 的变化过程以及相反的过程，体会空间两点间的距离与它们坐标之间的关系.

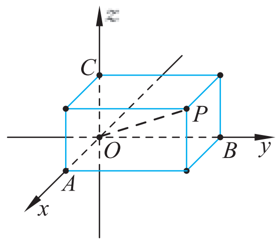


图 2-68

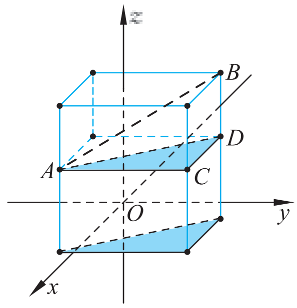


图 2-69

$$|OP|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}.$$

对于空间任意两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，我们作长方体，如图 2-69，AB 是长方体的对角线，长方体的每一条棱都与坐标轴平行. 为了求 AB 的长，我们只需求出 AC，CD 和 DB 的长. 易知，C，D 两点坐标分别为$(x_1,\ y_2,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_1)$.

由于 AC 平行于 y 轴，所以 $|AC|=|y_1-y_2|$，同理有 $|CD|=|x_1-x_2|$，$|DB|=|z_1-z_2|$.

再利用公式①，就有

$$|AB|=\sqrt{|AC|^2+|CD|^2+|DB|^2},$$

即
$$\boxed{|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.}$$

这就是空间两点间的距离公式.

例 4 给定空间直角坐标系，在 x 轴上找一点 P，使它与点 $P_0(4,1,2)$的距离为$\sqrt{30}$.

解 设点 P 的坐标是$(x,0,0)$，由题意，$|P_0P|=\sqrt{30}$，即

$$\sqrt{(x-4)^2+1^2+2^2}=\sqrt{30},$$

所以
$$(x-4)^2=25.$$

解得 $x=9$ 或 $x=-1$.

所以点 P 的坐标为$(9,0,0)$或$(-1,0,0)$.

例 5 在 xOy 平面内的直线 $x+y=1$ 上确定一点 M，使 M 到点 $N(6,5,1)$的距离最小.

解 由已知，可设 $M(x,1-x,0)$，则

$$|MN|=\sqrt{(x-6)^2+(1-x-5)^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{2(x-1)^2+51}.$$

所以，当 $x=1$ 时，$|MN|_{\min}=\sqrt{51}$. 故点 M 为$(1,0,0)$.

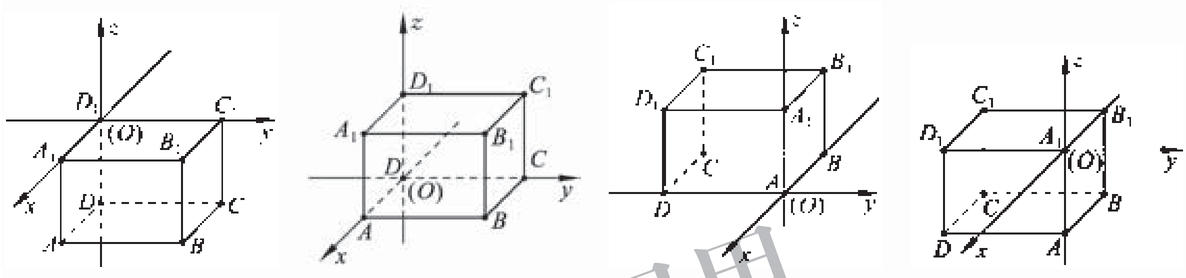
练　习

求点 $P(1,2,-2)$ 和点 $Q(-1,0,-1)$ 间的距离.

习　题　2—3

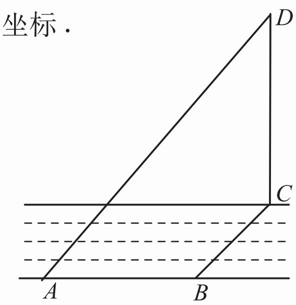
A　组

1. 如图,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=a$,$BC=b$,$CC_1=c$,将此长方体放到空间直角坐标系中的不同位置,分别说出长方体各个顶点的坐标.



(第 1 题)

2. 在方格纸上先画出一个空间直角坐标系,然后画出下列各点:
$A(1,2,4)$, $B(-1,2,4)$, $C(0,-1,-5)$, $D(-1,-4,-3)$.
3. 给定点 $P(3,-2,1)$,求它分别关于坐标平面、坐标轴和原点的对称点的坐标.
4. 求点 $N(3,-2,-4)$ 到原点、各坐标轴和各坐标平面的距离.
5. 在空间直角坐标系中,求点 $A(-3,2,-4)$ 和 $B(-4,3,1)$ 的距离.
6. 在空间直角坐标系中,已知 $\triangle ABC$ 顶点坐标分别是 $A(-1,2,3)$, $B(2,-2,3)$, $C\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},3\right)$. 求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.
7. 如图,在河的一侧有一塔 $CD=5$ m,河宽 $BC=3$ m,另一侧有点 A, $AB=4$ m,求点 A 与塔顶 D 的距离 AD.



(第 7 题)

B　组

在空间直角坐标系中,已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别是 $A(-1,-2,1)$, $B(2,3,-1)$, $C\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2},1,0\right)$. 求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.

阅读材料

笛卡儿与解析几何

从 16 世纪开始，由于制造业和航海业的迅猛发展，产生了许多迫切需要解决的实际问题，如航行中船的定位、速度问题等，这些问题向数学提出了挑战. 在这一形势下笛卡儿奠定了解析几何的基础.

笛卡儿

笛卡儿(Descartes，R. 1596—1650)出生于法国图朗(Tourainc)的一个古老的贵族家庭. 在学生时代，他就喜欢深思，并终生保持着这个习惯. 后来他回忆道，正是那些寂静的冥思才是他的哲学和数学思想的真正源泉. 青年时代的笛卡儿，开始了比以前更长时间、更努力、更忘我的思考，他推崇严格的数学推理. 1620 年前后，他证明了四次方程 $x^4+px^2+qx+r=0$ 的根可以通过抛物线和圆的交点求出，巧妙地把代数和几何结合起来了.

1637 年，他发表了重要著作《更好地指导和寻求真理的方法》(简称《方法论》)，在该书的第三个附录《几何学》中，他把代数方法应用于几何的作图问题中，指出了作图问题与求方程组的解之间的关系，明确地提出了曲线方程的思想、坐标的方法，把几何曲线表示成代数方程.《几何学》的发表，标志了解析几何的创立.

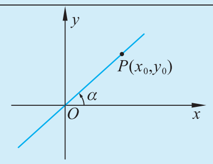
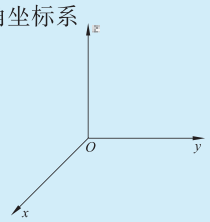
解析几何的创立，在数学史上具有划时代的意义. 恩格斯给出了极高的评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变量，有了变量，运动进入了数学；有了变量，辩证法进入了数学；有了变量，微分和积分也就立刻成为必要的了.”解析几何作为一种有效的数学工具，沟通了数学中数与形、代数与几何等基本对象之间的联系，使得几何问题可转化成代数运算来解决，也使得代数问题拥有几何背景而变得直观易懂.

资料来源：Bell，E. T. 数学精英. 北京：商务印书馆，1991

◆ 本章小结

一、本章要点

1. 知识内容

内容＼特征		几何特征	代数表示
直线与直线的方程	直线的确定	一点和直线的倾斜角	
	直线的斜率	直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度	$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\alpha$
	直线方程	直线的两个几何要素： 1. 已知一个点与斜率； 2. 已知两个点	1. 点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$； 2. 两点式：$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ （$x_1\neq x_2$）； 3. 一般式：$Ax+By+C=0$ （A，B 不同时为 0）
	两条不重合直线的位置关系	平行 相交（垂直）	当斜率存在时 1. $k_1=k_2$； 2. $k_1\neq k_2$（$k_1\cdot k_2=-1$）
	两点的距离 点到直线的距离	两点间的线段长度 点到直线的垂线段长度	1. $\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$； 2. $d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
圆与圆的方程	圆的标准方程 圆的一般方程	圆上任意一点与圆心的距离都等于半径的长度	1. 圆的标准方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$； 2. 圆的一般方程： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$
	直线与圆的位置关系	相离；相切；相交	$d>r$；$d=r$；$d<r$
	圆与圆的位置关系	相离；外切； 相交； 内切；内含	$\lvert C_1C_2\rvert>r_1+r_2$；$\lvert C_1C_2\rvert=r_1+r_2$； $\lvert r_1-r_2\rvert<\lvert C_1C_2\rvert<r_1+r_2$； $\lvert C_1C_2\rvert=\lvert r_1-r_2\rvert$；$\lvert C_1C_2\rvert<\lvert r_1-r_2\rvert$
空间直角坐标系	空间几何体的位置	三个维度	空间直角坐标系 
	空间中的点	空间直角坐标系中的点的坐标	三元有序数组 (x,y,z)
	空间两点间的距离	空间两点间线段的长度	$\lvert AB\rvert=$ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

2. 思想方法

解析几何是以几何体为研究对象，通过建立坐标系，把几何问题用坐标形式表示出来，进而转化为代数问题加以解决；解析几何还可以给代数问题提供几何解释和解决问题的思路.

二、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求

(1) 理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

(2) 掌握由直线上一点和斜率导出直线方程的方法；并掌握直线方程的点斜式、两点式、一般式，能根据条件熟练地求出直线的方程.

(3) 能根据斜率判定两条直线的平行与垂直，能求两条直线的交点坐标.

(4) 掌握平面直角坐标系中两点间的距离公式、点到直线的距离公式，并能简单应用.

(5) 掌握圆的标准方程和一般方程.

(6) 能根据直线、圆的方程，判定直线与圆、圆与圆的位置关系.

(7) 通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性，了解空间直角坐标系，并会用空间直角坐标系刻画点的位置，掌握空间两点间的距离公式.

2. 需要注意的问题

(1) 要重视观察、操作、测量等探究实践活动.

(2) 如何用斜率刻画直线的倾斜角，是掌握怎样刻画直线的关键.

(3) 在直线方程中，点斜式是基础，由此可以求出其他形式的直线方程.

(4) 要特别重视本章所介绍的新的数学方法——**坐标法**. 本章通过平面直角坐标系的建立，研究了直线和圆的有关问题，通过建立空间直角坐标系，刻画了点在空间的位置，并研究了空间两点间的距离等问题，这些问题都是用坐标法加以解决的.

(5) 直线和圆这两种基本几何图形，我们在初中已经学习了它们的几何性质，这里主要是通过直角坐标系重新进行研究，学习中要注意与初中的知识相联系.

(6) 要注意将几何问题转化为代数问题，同时要重视代数问题的几何背景，体会在这样的过程中所蕴涵的数形结合思想.

复 习 题 二

A　组

1. 已知直线 $y=2x+b$ 过点 $A(1,2)$ 与点 $B(3,m)$，求 $|AB|$.
2. 若 $a\in\mathbf{N}$，又三点 $A(a,0)$，$B(0,a+4)$，$C(1,3)$ 共线. 求 a 的值.
3. 求经过 $A(3,m)$，$B(m,1)$ 两点的直线的斜率.
4. 直线 l_1 的倾斜角 $\alpha=30^\circ$，直线 $l_2\perp l_1$. 求 l_2 的斜率.
5. 已知 $m\neq0$，求经过点 $(1,-1)$ 的直线 $ax+3my+2a=0$ 的斜率.
6. 一条直线经过点 $P_1(-2,3)$，倾斜角 $\alpha=45^\circ$，求这条直线的方程，并画出图形.
7. 若直线 $ax+2y+6=0$ 和直线 $x+a(a+1)y+(a^2-1)=0$ 垂直，求 a 的值.
8. 求与两坐标轴围成的三角形周长为 9，且斜率为 $-\dfrac{4}{3}$ 的直线方程.
9. 求经过点 $A(2,1)$，且与直线 $2x+y-10=0$ 垂直的直线的方程.
10. 求过点 $A(1,-4)$，且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线的方程.
11. 已知直线 l 通过直线 $6x-y+3=0$ 和 $3x+5y-4=0$ 的交点，且过点 $A(-2,-1)$. 求 l 的方程.
12. 三条直线 $3x+2y-6=0$，$3x+2my+18=0$，$3mx+2y+12=0$ 交于一点．求 m 的值.
13. 求与直线 $7x+24y-5=0$ 平行，且距离等于 3 的直线方程.
14. 已知直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 和圆 $x^2+y^2=4$，判断此直线与已知圆的位置关系.
15. 求圆心在直线 $x+y=0$ 上，且过两圆 $x^2+y^2-2x+10y-24=0$，$x^2+y^2+2x+2y-8=0$ 的交点的圆的方程.
16. 已知三角形三顶点 $A(4,0)$，$B(8,10)$，$C(0,6)$，求：
    (1) AC 边上的高所在的直线方程；
    (2) 过 A 点且平行于 BC 的直线方程.
17. 在空间直角坐标系中，求点 $A(1,-3,0)$ 和 $B(2,0,4)$ 的距离.

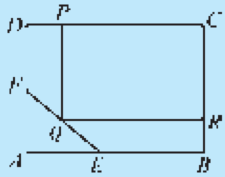
B　组

1. 已知 $A(4,5)$，$B(-2a,-3)$，$C(1,a)$ 三点共线. 求 a 的值.
2. 已知 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是斜率为 k 的直线上的两点. 求证：

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|\\&=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\,.\end{aligned}$$

3. 光线自点 $M(2,3)$ 射到点 $N(1,0)$ 后被 x 轴反射. 求反射光线所在直线的方程.
4. 若直线 $(3-a)x+(2a-1)y+7=0$ 与直线 $(2a+1)x+(a+5)y-6=0$ 互相垂直，求 a 的值.
5. 求经过 $A(0,-1)$ 和直线 $x+y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上的圆的方程.
6. 直线 l 与两坐标轴围成一个面积为 18 的等腰直角三角形. 求直线 l 的方程.

7. 为了绿化城市，准备在如图所示的区域内修建一个矩形 $PQRC$ 的草坪，且 $PQ /\!/ BC$，$RQ \perp BC$，另外 $\triangle AEF$ 的内部有一文物保护区不能占用，经测量 $AB=100$ m，$BC=80$ m，$AE=30$ m，$AF=20$ m，应如何设计才能使草坪的占地面积最大？



（第 7 题）

8. 设 $N(a,b,c)$ 是空间直角坐标系中的一点，求点 N 关于坐标平面 yOz 的对称点的坐标.

C 组

1. 求圆心在圆 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=2$ 上，且与 x 轴和直线 $x=-\frac{1}{2}$ 都相切的圆的方程.
2. 两点 $A(1,0)$，$B(3,2\sqrt{3})$ 到直线 l 的距离均等于 1，求直线 l 的方程.
3. 已知 x，y 满足 $x+y=3$，求证：$(x+5)^2+(y-2)^2\geqslant 18$.

探究活动 1

打 包 问 题

一、问题情境和探究任务

问题情境　有些商品是若干件装在一起按包销售的，例如，一包火柴中装有 10 盒火柴，一大包纸巾中装有 10 小包纸巾，一条香烟中装有 10 包香烟等. 不同商品的打包形式常常不同，请同学们收集一些这样的商品，先看其外观，再打开包装看内部的摆放形式.

哪一种包装形式更能节省外包装材料呢?

为了讨论方便，我们先来定义一种“规则打包”法，这是指包内的物体都是长方体，打包时要求包内的相邻两物必须以全等的两个侧面来对接，打包后的结果仍是一个长方体.

这样，我们就可以更数学化地提问：火柴等长方体的物品，按“规则打包”的方法将 10 包打成一个大包，表面积何时最小?

任务 1　请先就 10 包纸巾来讨论一下，按“规则打包”的形式将 10 包纸巾打成一个长方体的大包，怎样打包可使表面积最小?

任务 2　请根据得到的结果，分别给出将以下 10 件物品打包后，具有最小表面积的打包形式：

(1) 一盒火柴：长＝46 mm，宽＝36 mm，高＝16 mm；

(2) 一本书：长＝183 mm，宽＝129 mm，高＝20 mm.

任务 3　解决下面的问题：

(1) 不给出待打包的“基本长方体”的长(a)、宽(b)、高(c)的具体尺寸，而只给 $a\geqslant b\geqslant c$，你能知道按“规则打包”的形式将 10 个“基本长方体”打成一个长方体的大包，怎样打包可使表面积最小?

(2) 数学上得到的 10 包纸巾表面积最小的打包形式和纸巾实际的打包形式一致吗? 为什么?

(3) 将 6 包纸巾按“规则打包”的形式打成一包，表面积不同的打包方式有几种? 其中表面积最小的打包方式是怎样的?

*(4) 将上题中的 6 包改成 12 包或 8 包，结果怎样? 有没有一个更一般的处理这类问题的程序?

*(5) 你能设计一个其他类型的打包问题吗? 由打包问题你还能联想到哪些相关的问题? 你有解决这些问题的想法或方案吗?

二、实施建议

1. 可以组成学习探究小组，集体讨论，互相启发，分工合作，形成具体可行的探究方案，再形成每一个人的“成果报告”.

2. 对完成任务 1 的建议.

(1) 初步观察：先把 10 包纸巾摆成图 1 的样子，再改摆成图 2 的样子，哪一种摆法表面积小？

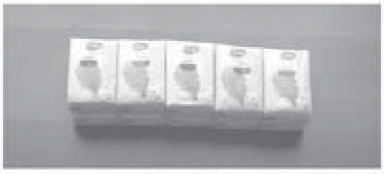


图 1

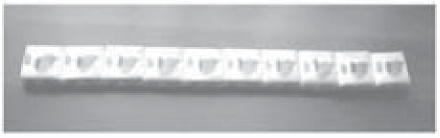


图 2

(2) 测量基本数据：一包纸巾的外形尺寸是多少？

(3) 分组讨论求解的方案：建议先试着摆出几种打包方案，对每一种打包方案由具体数据算出面积，再从中挑出最小的. 这样，按“规则打包”的规定，10 包纸巾打成一包，到底有几种不同的摆放方式，就是问题的难点和关键所在. 不妨动手摆一摆、画一画.

3. 对完成任务 3 的建议.

对应于每一种摆放形式，如果用 a，b，c 分别表示一个“基本长方体”的长、宽、高，其中 $a\geqslant b\geqslant c$，可以得到表面积表达式，用代数的方法比较大小.

4. “成果报告”的书写建议.

成果报告可以用下页的表格形式呈现.

5. 成果交流.

建议以小组为单位，选出代表，在班级中报告研究成果，交流研究体会.

6. 评价建议.

采用自评、互评、教师评价相结合的形式，要善于发现别人工作中的特色，可主要考虑以下几个方面：

(1) 结果：合理、清楚、简捷、正确；

(2) 独到的思考和发现；

(3) 提出有价值的求解设计和有见地的新问题；

（4）发挥组员的特长，体现合作学习的效果.

“打包问题”探究学习成果报告表

______年级__班　完成时间______

<table>
<tr><td colspan="2">1. 课题组成员、分工、贡献</td></tr>
<tr><td>成员姓名</td><td>分工与主要工作或贡献</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2. 探究的过程和结果</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. 参考文献</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. 成果的自我评价（请说明方法或原理的合理性、特色或创新点、不足之处等）</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. 拓展（选做）：在解决问题的过程中发现和提出的新问题，可以延伸或拓广的内容；得到的新结果或猜想等</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. 体会：描述在工作中的感受</td></tr>
</table>

探究活动 2

追及问题

一、问题情境和探究任务

问题情境　缉私大队的巡逻艇通过雷达发现在南偏西 20°，5 km 处的海面上有一条走私船，它正以 20 km/h 的速度向南偏东 40°的方向逃走. 已知巡逻艇的最大巡航速度为 30 km/h，并假设走私船在逃走时不改变它的航向.

任务 1　试确定一个追及走私船的最佳方案.

任务 2　将上述数据一般化，探求在什么条件下，巡逻艇能追到走私船.

任务 3　根据实际数据、再次应用得到的数学模型：假设走私船在点 $A(-6,-8)$的位置上，巡逻艇在原点的位置上，如果走私船的速度是巡逻艇速度的 2 倍，那么走私船的行进方向在什么范围时，巡逻艇可以将其捕获？如果两船等速，巡逻艇的油料仅够支持100 km的航程，问：是否可能捕获沿南偏东 60°方向逃走的走私船？

二、实施建议

1. 可以组成学习探究小组，集体讨论，互相启发，形成可行的探究方案，独立思考，完成每个人的“成果报告”.

2. 对完成任务 1 的建议.

用数学语言刻画问题，例如：建立适当的坐标系，表述“追上”和“最佳”等要点的数学含义.

3. 对完成任务 2 的建议.

设走私船和巡逻艇的速率比 $v_1 : v_2$ 为常数 k，以 k 为参数进行讨论.

4. “成果报告”的书写建议.

成果报告可以用下页的表格形式呈现.

5. 成果交流.

建议以小组为单位，选出代表，在班级中报告研究成果，交流研究体会.

6. 评价建议.

采用自评、互评、教师评价相结合的形式，应善于发现别人工作中

的特色，可主要考虑以下几个方面：

（1）求解过程和结果：合理、清楚、简捷、正确；

（2）独到的思考和发现；

（3）提出有价值的求解设计和有见地的新问题；

（4）发挥组员的特长，体现合作学习的效果.

“追及问题”探究学习成果报告表

______年级____ 班　　完成时间__________

1. 课题组成员、分工、贡献	
成员姓名	分工与主要工作或贡献
2. 探究的过程和结果	
3. 参考文献	
4. 成果的自我评价（请说明方法或原理的合理性、特色或创新点、不足之处等）	
5. 拓展（选做）：在解决问题的过程中发现和提出的新问题，可以延伸或拓广的内容；得到的新结果或猜想等	
6. 体会：描述在工作中的感受	

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
代数	algebra
几何	geometry
立体几何	solid geometry
度量	measure
三维空间	three-dimensional space
操作	operation
点	point
线	line
平面	plane
长方体	rectangular parallelepiped
相交	intersection
交线	line of intersection
公理	axiom
棱	edge
平行直线	parallel straight lines
平行平面	parallel planes
定理	theorem
命题	proposition
垂直平面	perpendicular planes
柱	cylinder
锥	cone
圆柱	circular cylinder
圆锥	circular cone
棱柱	prism
棱锥	pyramid
体积	volume
球面	sphere
直线	straight line
倾斜角	angle of inclination
斜率	slope
直线方程	equation of a straight line
点斜式	point slope form
圆	circle

标准方程	standard equation
坐标	coordinate
坐标轴	coordinate axis
代数方程	algebraic equation

附录 2

信息检索网址导引

基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介:基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站,内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面.网站在提供教学实例、教学课件的同时,也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　　记

本套教材是按照国家教育部于 2003 年 4 月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的. 我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值. 好学好用.

教材的建设是长期、艰巨的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持，促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序)：

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有(按姓氏笔画排序)：

任志瑜、李延林、吴会勇、张思明、张祥艳、岳昌庆、周莉莉、胡琴竹、赵霞.

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社