教育部审定
2012

义务教育教科书

数学

七年级 下册

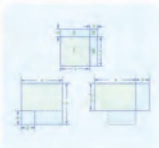
7

河北教育出版社

义 务 教 育 教 科 书

数学

七年级 下册



河北教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学．七年级．下册 / 杨俊英主编．--石家庄：河北教育出版社，2013.1（2019.11 重印）
义务教育教科书
ISBN 978-7-5434-9542-5

Ⅰ．①数… Ⅱ．①杨… Ⅲ．①中学数学课－初中－教材 Ⅳ．①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第168009号

主　　编　杨俊英
副 主 编　王洁敏　缴志清　程海奎
编　　者　（按姓氏笔画排序）
王　佐　李会芳　苏桂海　徐建乐　简　友

书　　名　义务教育教科书
数学　七年级　下册
责任编辑　王东芳　吴丽霞
责任印制　王淑英
装帧设计　呼玉迈
内文插图　老迈视觉设计工作室

出　　版　河北教育出版社　http://www.hbep.com
（石家庄市联盟路705号　邮政编码：050061）
发　　行　河北省新华书店
制　　版　保定市佳美制版中心
印　　刷　保定华升印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　10.25
字　　数　177千字
版　　次　2012年12月第1版
印　　次　2019年11月第8次印刷
印　　数　1 815 001—2 125 000
书　　号　ISBN 978-7-5434-9542-5
定　　价　9.85元
冀发改价格[2019]761号
冀 价 审　[2020]002071

购书电话：0311-88643600

遨游在数学世界中

亲爱的同学们：

我们又见面了，欢迎你们开始新学期的学习生活。

作为你们的老朋友，我们在为大家祝福的同时，诚挚地为你们送上一份礼物——义务教育教科书《数学》（七年级～九年级），让它陪伴你们欢度初中岁月，陪伴你们健康成长。

当你们拿到这本七年级下册教科书时，一定想了解它的特点、它的内容、它的一切。

在设计上，这本书有以下栏目。

观察与思考：通过观察、感悟和思考，期待你们获得正确的数学认知。

一起探究：和大家一起探究并认识数学知识、思想和方法，这会使你们有更大的收获。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学所不可缺少的。

大家谈谈：和同学们分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可或缺的学习环节。

在内容上，这本书共有六个篇章等待同学们去探究、去认识：

二元一次方程组——它是一种新的方程模型，具有重要的应用价值。

相交线与平行线——在平面上，两条直线的位置关系及其一些重要事实，也是几何学习最基本的内容之一。

整式的乘法——整式可以加减，也可以相乘。整式的乘法是整式的另一种运算。

三角形——在本章中，大家将重新认识三角形，以及边与边、角与角之间的关系。

一元一次不等式和一元一次不等式组——“相等”与“不相等”是现实世界中数量关系的两种基本表现形式，这里将帮助你们认识不等式及其解法。

因式分解——整式能进行因式分解。怎样分解，都有哪些方法，等待你们去揭示。

我们同欢乐，我们共追求。让我们携手前行，一起遨游数学新天地，继续收获丰硕的数学成果！

你们的编者朋友

2012 年 10 月

目　录

第六章

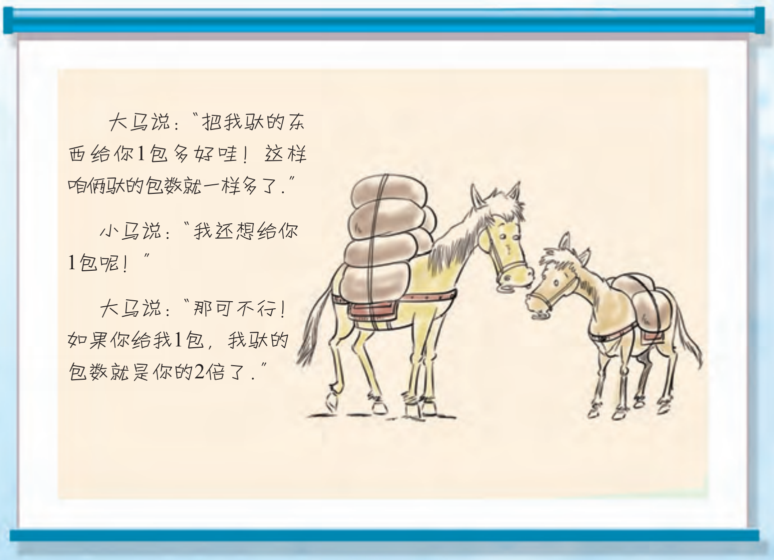
二元一次方程组

在本章中，我们将学习

- 二元一次方程组
- 二元一次方程组的解法
- 二元一次方程组的应用
- 简单的三元一次方程组*

$$\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

根据大马和小马的对话，你能求出大马和小马各驮了几包物品吗？



6.1 二元一次方程组

方程是解决实际问题的重要数学工具．我们已经学习了一元一次方程，从本节开始，我们研究二元一次方程组的解法及应用．

观察与思考

某酒厂有大小两种存酒的木桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 28 升，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 20 升．那么，1 个大桶和 1 个小桶分别可盛酒多少升？

观察下面解决问题的过程：

设一个未知数

设 1 个大桶盛酒 x 升，则 1 个小桶盛酒 $(28-5x)$ 升．

根据题意，列方程，得

$$x+5(28-5x)=20.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=5.$$

从而，得

$$28-5x=3.$$

即 1 个大桶盛酒 5 升，1 个小桶盛酒 3 升．

设两个未知数

设 1 个大桶盛酒 x 升，1 个小桶盛酒 y 升．

根据题意，可得方程

$$5x+y=28, \quad ①$$

$$x+5y=20. \quad ②$$

大桶和小桶的容积应当是同时满足方程①和②的未知数的值．

（1）比较方程 $x+5(28-5x)=20$ 和方程 $5x+y=28$ 及 $x+5y=20$，它们的共同点是什么，不同点是什么？

（2）$x=5$，$y=3$ 是否同时满足方程①和②？

像 $5x+y=28$ 和 $x+5y=20$ 这样，含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的方程，叫做**二元一次方程**（linear equation with two unknowns）．

使二元一次方程两边相等的两个未知数的值，叫做这个**二元一次方程的**

一组解.

如 $x=5$，$y=3$ 是方程 $5x+y=28$ 的一组解，也是方程 $x+5y=20$ 的一组解. 一般地，将二元一次方程的一组解记为$\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$的形式.

试着做做

已知甲数的 2 倍与乙数的 3 倍之和是 12，甲数的 3 倍与乙数的 2 倍之差是 5. 求这两个数.

（1）列一元一次方程求解.

（2）如果设甲数为 x，乙数为 y，请根据问题中的等量关系，列出含两个未知数的一组方程.

（3）用一元一次方程求得的甲数和乙数，代入(2)中所列的这组方程中，检验方程两边是否相等.

大家谈谈

结合以上两个问题，请你谈谈列“含一个未知数”的方程和列“含两个未知数”的方程的区别与联系.

一起探究

1. 对于二元一次方程，任意给定未知数 x 的一个值，你能求出满足方程的未知数 y 的值吗？填写下表.

$2x+3y=12$	x	…	2	3	4	5	…
	y	…					…
$3x-2y=5$	x	…	2	3	4	5	…
	y	…					…

2. 分别写出方程 $2x+3y=12$ 和方程 $3x-2y=5$ 的四组解. 你还能找出这两个方程的其他解吗？一个二元一次方程有多少组解？

3. 是否有同时满足这两个方程的一组解？若有，请你指出是哪组解.

由几个方程组成的一组方程叫做方程组. 含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的方程组，叫做**二元一次方程组**(system of linear equations of two unknowns). 二元一次方程组中方程的公共解叫做这个**二元一次方程组的解.**

一般地，二元一次方程组记作$\begin{cases}2x+3y=12,\\3x-2y=5\end{cases}$的形式，而$\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$是这个方程组的解.

现阶段，我们只研究含有两个方程的二元一次方程组.

练　习

1. 把方程 $2x+y=4$ 写成用含 x 的代数式表示 y 的形式：$y=$________.

2. 下列方程中，哪个是二元一次方程？

（1）$xy=3$；　　（2）$2x^2-y=9$；

（3）$\frac{1}{x}=x$；　　（4）$8x-y=3$.

3. 下列方程组中，哪个是二元一次方程组？

（1）$\begin{cases}x+y=3,\\2x+y=7;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}3a-2b=1,\\c+d=2;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x^2=4,\\y=nx;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}x+y=6,\\x^2-y=4.\end{cases}$

习　题

A　组

1. 已知二元一次方程 $2x+y=7$. 当 $x=3$ 时，$y=$____；当 $y=3$ 时，$x=$____.

2. 下列哪组 x，y 的值是方程组$\begin{cases}2x+y-46=0,\\3x+y-59=0\end{cases}$的解？

（1）$\begin{cases}x=-13,\\y=-20;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x=-13,\\y=20;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x=13,\\y=20;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}x=20,\\y=13.\end{cases}$

3. 已知 4 辆小卡车和 5 辆大卡车一次能运货 52 t，10 辆小卡车和 3 辆大卡车一次能运货 54 t. 设每辆小卡车每次能运货 x t，每辆大卡车每次能运货 y t，列二元一次方程组.

B 组

1. 某山区县的林地面积和耕地面积原来共有 180 km^2，该县响应国家“退耕还林”号召，将一部分耕地恢复为林地后，林地面积增加了 56%，耕地面积减少了 70%. 设原有耕地面积为 x km^2，林地面积为 y km^2，列二元一次方程组.

2. 某两位数，两个数位上的数之和为 11. 这个两位数加上 45，得到的两位数恰好等于原两位数的两个数字交换位置所表示的数. 求原两位数.

   (1) 列一元一次方程求解.

   (2) 设原两位数的十位数字为 x，个位数字为 y，列二元一次方程组.

   (3) 检验(1)中求得的结果是否满足(2)中的方程组.

6.2 二元一次方程组的解法

解二元一次方程组的基本方法是：通过“消元”，将二元一次方程组化为一元一次方程来求解．怎样进行“消元”呢?

一起探究

对于“鸡兔同笼”问题(上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何?)：

列一元一次方程

设鸡有 x 只．根据题意列方程，得

$$2x+4(35-x)=94. \quad *$$

解这个一元一次方程，得

$$x=23.$$

从而，得

$$35-23=12.$$

即鸡有 23 只，兔子有 12 只．

列二元一次方程组

设鸡有 x 只，兔子有 y 只．根据题意，可得方程组

$$\begin{cases} x+y=35, & ① \\ 2x+4y=94. & ② \end{cases}$$

由①，得

$$y=35-x. \quad ③$$

将③代入②，得

$$2x+4(35-x)=94. \quad ④$$

(1) 由方程组$\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94 \end{cases}$是怎样得出方程④的?

(2) 说明方程④和方程 $*$ 完全相同的理由．

(3) 你会解方程④吗? 由④解出 x 的值以后，怎样求出 y 的相应的值?

(4) 从中你能体会到怎样解二元一次方程组吗?

例 1 求二元一次方程组

$$\begin{cases} y=x-6, & ① \\ x+2y=9 & ② \end{cases}$$

的解．

解：将①代入②，得

$$x+2(x-6)=9.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=7.$$

将 $x=7$ 代入①，得

$$y=1.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=7,\\y=1.\end{cases}$$

将方程组中一个方程的某个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来，代入另一个方程中，消去一个未知数，得到一元一次方程，通过解一元一次方程，求得二元一次方程组的解. 这种解方程组的方法叫做**代入消元法**(elimination by substitution)，简称代入法.

求二元一次方程组的解的过程叫做解二元一次方程组.

大家谈谈

解二元一次方程组

$$\begin{cases}x+y=10, & ①\\x-2y=4. & ②\end{cases}$$

方程①可变形为

$$x=10-y. \qquad ③$$

将③代入②，得

$$10-y-2y=4.$$

解这个方程，得

$$y=2.$$

将 $y=2$ 代入③，得

$$x=8.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=8,\\y=2.\end{cases}$$

观察上面的解题过程，你还有其他的解法吗？请你试一试，并把你的想法和同学们进行交流.

练 习

用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-3, \\ 3x+2y=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x-y=27, \\ 2x+3y=3. \end{cases}$

习 题

A 组

解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+2, \\ 6x+5y=-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-5y=11, \\ x+4y=15; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 5x-3y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$

B 组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4x+3y=5, \\ x-2y=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2m-n=4, \\ 2m+3n=12. \end{cases}$

2. 大刚和小亮到同一家超市购买水果．大刚买了 2 kg 苹果和 3 kg 梨，共花了 26 元；小亮买了 1 kg 苹果和 1 kg 梨，共花了 11 元．设苹果和梨的价格分别为 x 元/千克和 y 元/千克，请你列出方程组，并求出苹果和梨的价格．

下面，我们进一步学习代入消元法．

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 3x+10y=14, & ① \\ 10x+15y=32. & ② \end{cases}$$

解：由方程①，得

$$3x=14-10y,$$

$$x=\frac{14-10y}{3}. \quad ③$$

将③代入②，整理，得

$$140-55y=96.$$

解这个一元一次方程，得

$$y=\frac{4}{5}.$$

将 $y=\frac{4}{5}$ 代入③，得

$$x=2.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=2,\\ y=\frac{4}{5}.\end{cases}$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases}7x+4y-10=0, & ①\\ 4x+2y-5=0. & ②\end{cases}$$

解：原方程组可化为

$$\begin{cases}7x+4y=10, & ③\\ 4x+2y=5. & ④\end{cases}$$

由方程④，得

$$y=\frac{5-4x}{2}. \quad ⑤$$

将⑤代入③，整理，得

$$10-x=10.$$

解得

$$x=0.$$

将 $x=0$ 代入⑤，得

$$y=\frac{5}{2}.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=0,\\ y=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

大家谈谈

结合下列实例和图示，说一说怎样运用“代入消元法”解二元一次方程组.

二元一次方程组 $\begin{cases} x=10-y, \\ x-2y=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{得解}} \begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases}$

$\downarrow$ 转化　　$\downarrow$ 代入消元　　　　　　　　$\uparrow$ 得解

一元一次方程 $(10-y)-2y=4 \xrightarrow{\text{求解}} y=2 \xrightarrow{\text{代入}} x=10-y \xrightarrow{\text{求解}} x=8$

练　习

用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 6x-5y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x+2y=15, \\ 8x+3y=23. \end{cases}$

习　题

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 7x-3y=-1, \\ 4x-5y=-17; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 10x+3y+1=0, \\ 4x+5y+8=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3a=5b, \\ 2a-3b=1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3m-5n=8, \\ 6m+5n-1=0. \end{cases}$

2. 一个两位数，十位上的数与个位上的数之和是 8，个位数字与十位数字交换后所得新数比原数大 18. 求这个两位数.

除了可以运用代入法解二元一次方程组外，还有其他方法解二元一次方程组吗？

一起探究

1. 观察二元一次方程组

$$\begin{cases} 5x+3y=16, & ① \\ 2x-3y=-2 & ② \end{cases}$$

中未知数的系数，有什么特点？

2. 根据你发现的特点，试解这个方程组.

小亮的思路(代入消元)

由②，得

$$3y=2x+2. \quad ③$$

将③代入①可消去未知数 y，得

$$5x+2x+2=16. \quad ④$$

解一元一次方程④，求出 x 的值后再代入①，得到方程组的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

小红的思路

两个方程中未知数 y 的系数互为相反数，将方程①、②左右两端分别相加，可消去未知数 y，得

$$5x+2x=16-2. \quad ⑤$$

解一元一次方程⑤，求出 x 的值后再代入①，得到方程组的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

3. 小亮和小红采用不同的方法，都先消去了未知数 y. 他们的解题依据是什么？

下面，我们按照小红的思路解方程组.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} 5x+3y=16, & ① \\ 2x-3y=-2. & ② \end{cases}$$

解：①＋②，得

$$7x=14,$$

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$10+3y=16,$$

$$y=2.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

当两个方程中同一个未知数的系数互为相反数或相等时，采用将两个方程左右两边分别相加(或相减)的方法“消元”较简便.

做一做

解方程组

$$\begin{cases}3x+2y=7,\\3x+y=5.\end{cases}$$

例 5 解方程组

$$\begin{cases}5x+6y=7, & ①\\2x+3y=4. & ②\end{cases}$$

> 两个未知数的系数既不相等，也不互为相反数，怎么办?

解：②×2，得

$$4x+6y=8. \quad ③$$

①－③，得

$$x=-1.$$

把 $x=-1$ 代入②，得

$$-2+3y=4,$$

$$y=2.$$

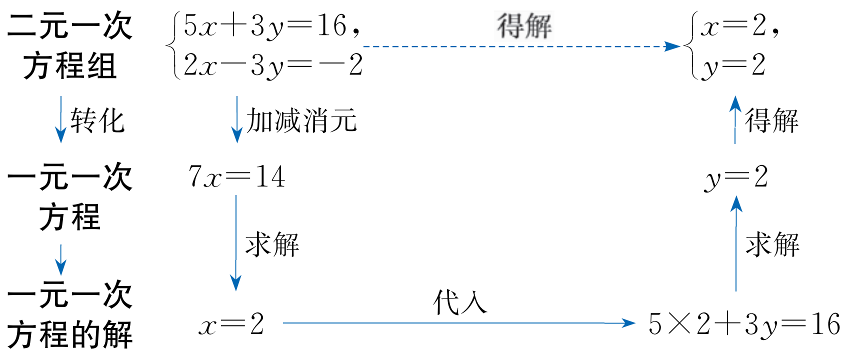
所以，原方程组的解为

$$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$$

将二元一次方程组中两个方程相加(或相减，或进行适当变形后再加减)，消去一个未知数，得到一元一次方程．通过求解一元一次方程，再求得二元一次方程组的解．这种解方程组的方法叫做**加减消元法**(elimination by addition or subtraction)，简称**加减法**.

大家谈谈

结合下列图示，谈一谈用加减消元法解二元一次方程组的基本过程是怎样的，解方程组时应注意哪些事项.



练　习

1. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+y=5,\\x-y=3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}m-n=1,\\2m+3n=7.\end{cases}$

2. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}7x-2y=3,\\9x+2y=-19;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+2y+2=0,\\7x-4y+41=0.\end{cases}$

习　题

A　组

1. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x+y=3,\\3x-y=7;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3y=17,\\2x+4y=16;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+9y=13,\\\dfrac{4}{3}(x-1)-y=\dfrac{1}{3};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=9,\\x-y=12.\end{cases}$

2. 若方程 $ax+by=10$ 的两组解是 $\begin{cases}x=6,\\y=-4\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 试求 a，b 的值.

B　组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x-6y=9,\\7x-4y=-5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3(x-1)=y+5,\\5(y-1)=3(x+5).\end{cases}$

2. 一个两位数，十位上的数与个位上的数之和是 7，如果把这个两位数加上 9，所得的两位数的个位数字、十位数字恰好分别是原来两位数的十位数字和个位数字. 求这个两位数.

6.3 二元一次方程组的应用

我们已经学习了二元一次方程组及其解法. 现在，利用二元一次方程组来解决一些实际问题.

大马和小马驮着货物在途中有一段对话，如下图.

根据大马和小马的对话，你能求出大马和小马各驮了几包货物吗?

一起探究

1. 大马的两句话，说出了两个等量关系，这两个等量关系是什么?

2. 如果设大马驮物 x 包，小马驮物 y 包，那么列出的二元一次方程组是怎样的?

3. 请你试着解出 2 中所列的二元一次方程组，并和同学们进行交流.

小明的解答过程如下:

解：因为

大马驮物包数 $-1=$ 小马驮物包数 $+1$,

大马驮物包数 $+1=$ (小马驮物包数 -1) $\times 2$.

所以，若设大马驮物 x 包，小马驮物 y 包，则有

$$\begin{cases} x-1=y+1, \\ x+1=2(y-1). \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} x-y=2, & ① \\ x-2y=-3. & ② \end{cases}$$

①−②，得

$$y=5.$$

将 $y=5$ 代入①，得

$$x=7.$$

所以，方程组的解为

$$\begin{cases}x=7,\\y=5.\end{cases}$$

你与小明的解答一样吗？

答：大马驮物 7 包，小马驮物 5 包.

例 1 化肥厂往某地区发运了两批化肥，第一批装满了 9 节火车车厢和25 辆卡车，共运走了 640 t；第二批装满了 12 节火车车厢和 10 辆卡车，共运走了 760 t. 平均每节火车车厢和每辆卡车分别装运化肥多少吨？

分析：本题中的等量关系是：

第一批，9 节火车车厢运货吨数＋25 辆卡车运货吨数＝640；

第二批，12 节火车车厢运货吨数＋10 辆卡车运货吨数＝760.

解：设平均每节火车车厢装运化肥 x t，每辆卡车装运化肥 y t.

根据题意，得

$$\begin{cases}9x+25y=640,\\12x+10y=760.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=60,\\y=4.\end{cases}$$

答：平均每节火车车厢装运化肥 60 t，每辆卡车装运化肥 4 t.

做一做

某车间有工人 660 名，生产甲、乙两种零件. 已知每人每天平均生产甲种零件 14 个或乙种零件 20 个，1 个甲种零件与 2 个乙种零件为一套. 如何调配人员可使每天生产的两种零件刚好配套？

（1）找出本题中的等量关系.

（2）适当设未知数，列出方程组.

（3）解这个方程组，并回答上面提出的问题.

大家谈谈

根据你的经验，写出用二元一次方程组解决实际问题的步骤，并与同学们交流.

练　习

1. 小华 4 年后的年龄与小丽 4 年前的年龄相等，3 年后，她们两人的年龄和等于她们年龄差的 3 倍. 求小华和小丽今年的年龄.

2. 一艘船在某河道上航行，已知顺水航行 45 km 需要 3 h，逆水航行 65 km 需要 5 h. 该船在静水中的速度与该河的水流速度分别是多少？

习　题

A　组

1. 我国是水资源相对缺乏的国家之一，水资源的人均占有量比世界人均占有量少 6 600 m^3，仅是世界人均占有量的 $\frac{1}{4}$. 分别求我国和世界水资源的人均占有量.
2. 去年春季，蔬菜种植场在 15 公顷的大棚地里分别种植了茄子和西红柿，总费用是 265 000 元. 其中，种植茄子每公顷的费用是 17 000 元，种植西红柿每公顷的费用是 18 000 元. 已知每公顷茄子可获利 24 000 元，每公顷西红柿可获利 26 000 元. 茄子和西红柿的种植面积各为多少公顷？种植场在这一季共获利多少元？

B　组

1. 某次知识竞赛共出了 25 道题，评分标准如下：答对 1 题加 4 分，答错 1 题扣 1 分，不答记 0 分. 已知李刚不答的题比答错的题多 2 道，他的总分为 74 分. 他答对、答错和不答的题各有多少道？

2. 甲、乙两人在 400 m 的环形跑道上练习赛跑. 若两人同时同地反向跑，则经过 25 s 第一次相遇；若两人同时同地同向跑，则经过 250 s 甲第一次追上乙. 甲、乙两人的速度各是多少?

下面，我们继续学习列二元一次方程组解决实际问题.

例 2 去年秋季，某校七年级和高中一年级招生总人数为 500 名，计划今年秋季七年级招生人数比去年增加 20%，高中一年级招生人数比去年增加 15%，这样，今年秋季七年级和高中一年级招生总人数将比去年招生总人数增加 18%. 今年秋季七年级和高中一年级各计划招生多少名?

分析：本题中的等量关系是：

去年，七年级人数＋高中一年级人数＝500；

今年，七年级人数＋高中一年级人数＝500(1＋18%)；

今年，七年级人数＝去年七年级人数＋增长数；

今年，高中一年级人数＝去年高中一年级人数＋增长数.

解：设去年七年级招生 x 名，高中一年级招生 y 名. 根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=500, \\ (1+20\%)x+(1+15\%)y=500\times(1+18\%). \end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases} x+y=500, \\ 24x+23y=11\ 800. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=300, \\ y=200. \end{cases}$$

所以

$$(1+20\%)x=(1+20\%)\times300=360,$$

$$(1+15\%)y=(1+15\%)\times200=230.$$

答：今年秋季七年级计划招生 360 名，高中一年级计划招生 230 名.

试着做做

请你将今年两个年级计划招生人数设为未知数，列方程组解答例 2 中的问题，并与上面的解答过程比较，看看哪种解法较简便些.

一起探究

小明为了测得火车过桥时的速度和火车的长度，在一铁路桥旁进行观察：火车从开始上桥到完全过桥共用 26 s，整列火车完全在桥上的时间为 14 s. 已知桥长1 000 m. 你能根据小明获得的数据求出火车的速度和长度吗?

（1）问题中涉及了哪些量?

（2）画示意图，并寻找等量关系.

（3）用 x，y 分别表示火车的速度(m/s)和长度(m)，列方程组.

（4）解答上面的问题.

练　习

1. 某种过季商品打折销售. 如果按定价的七五折销售，每件将赔 25 元；如果按定价的九折出售，每件将赚 20 元. 这种商品每件的定价是多少元，进价是多少元?

2. 3 月 12 日是我国的植树节. 这一天，某校七年级共有 240 名学生参加义务植树活动. 如果平均每人每天挖树坑 6 个或栽树 10 棵，那么，怎样安排学生才能使这一天挖出的树坑全部栽上树苗?

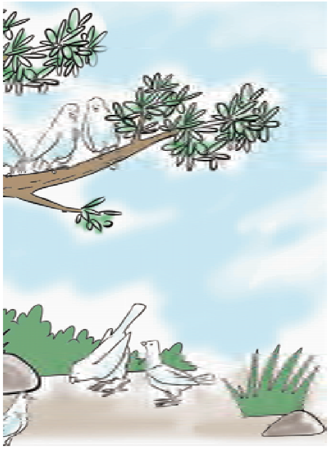
习　题

A　组

1. 某公司甲、乙两个销售点 1 月份的总销售额为 50 000 元. 2 月份，甲销售点的销售额比 1 月份增加了 5%，乙销售点的销售额比 1 月份增加了 7.5%. 这样，两个销售点 2 月份比 1 月份共增加销售额 3 000 元. 两个销售点 1 月份的销售额分别是多少?

2. 甲、乙两车相距 100 km，两车同时出发. 如果同向而行，乙车经过 4 h 可追上甲车；如果相向而行，两车经过 0.8 h 相遇. 求甲、乙两车的速度.

B 组



1.《一千零一夜》中有这样一段文字：有一群鸽子，其中一部分在树上欢歌，另一部分在地上觅食. 树上的一只鸽子对地上觅食的鸽子说："若从你们中飞上来 1 只，则树下的鸽子就是整个鸽群的 $\frac{1}{3}$；若从树上飞下去 1 只，则树上、树下的鸽子就一样多了." 你知道树上、树下各有多少只鸽子吗？试列方程组解答.

2. 某酒店客房部有三人间、双人间客房. 三人间的价格为 150 元/天，双人间的价格为 140 元/天. 为吸引游客，该酒店实行了团体入住五折优惠的措施. 一个 50 人的旅游团优惠期间到该酒店入住，住了一些三人间和双人间. 若每间客房正好住满，且一天共花去住宿费 1 510 元，则该旅游团住了三人间和双人间客房各多少间？

6.4 简单的三元一次方程组*

我们已经学习了利用代入消元法和加减消元法对二元一次方程组进行求解. 在本节中，我们将用消元的方法，对简单的三元一次方程组进行求解.

类似于二元一次方程，我们把含有三个未知数，并且含未知数的项的次数都是 1 的方程，叫做**三元一次方程**(linear equation with three unknowns).

含有三个未知数，并且含未知数的项的次数都是 1 的方程组，叫做**三元一次方程组**(system of linear equations of three unknowns). 三元一次方程组中各方程的公共解叫做这个三元一次方程组的解.

$$\begin{cases}x+5y+z=1,\\3x-y+z=12,\\2x-y+4z=27,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-6,\\y-7z=0,\\2x-y+z=18,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=26,\\x+z=9,\\2x-y-7z=-3\end{cases}$$

都是三元一次方程组.

观察与思考

对于求解三元一次方程组

$$\begin{cases}x+y+z=5, & ①\\x-y-5z=1, & ②\\2x-3y+z=14, & ③\end{cases}$$

类比解二元一次方程组的方法，我们可以研究解三元一次方程组的方法.

小亮的想法是：①×5+②，再③−①，消去未知数 z，得到一个二元一次方程组

$$\begin{cases}6x+4y=26, & ④\\x-4y=9. & ⑤\end{cases}$$

解得 x，y 后代入①求出 z，从而求得三元一次方程组的解.

(1) 你能否先消去未知数 x 或 y，最后求得三元一次方程组的解？

(2) 试着解一解这个方程组，并与同学们交流.

标有 * 的内容为选学内容.

例 解方程组

$$\begin{cases} x-z=4, & ① \\ x-y+z=1, & ② \\ 2x+3y+2z=17. & ③ \end{cases}$$

解：由①，得

$$z=x-4. \quad ④$$

将④分别代入②，③，得

$$\begin{cases} 2x-y=5, & ⑤ \\ 4x+3y=25. & ⑥ \end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

把 $x=4$ 代入①，得

$$z=0.$$

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=4, \\ y=3, \\ z=0. \end{cases}$$

做一做

已知小明与爸爸、妈妈的年龄之和为 108 岁，爸爸比妈妈大 2 岁，小明与妈妈的年龄之和比爸爸大 12 岁．他们的年龄分别是多少？

（1）在本题中，有几个等量关系？请你分别表示出来.

（2）如果设爸爸的年龄是 x 岁，妈妈的年龄是 y 岁，小明的年龄是 z 岁，请列出方程组.

（3）解这个方程组.

大家谈谈

请结合下列图示，谈一谈解三元一次方程组的基本方法和步骤.

三元一次方程组 $\begin{cases}x+y+z=5,\\x-y-5z=1,\\2x-3y+z=14\end{cases} \xrightarrow{\text{得解}} \begin{cases}x=5,\\y=-1,\\z=1\end{cases}$

$\downarrow$ 转化 $\qquad \downarrow$ 消元 $\qquad\qquad\qquad \uparrow$ 得解

$x+y+z=5$

$\uparrow$ 代入

二元一次方程组 $\begin{cases}6x+4y=26,\\x-4y=9\end{cases} \qquad \begin{cases}x=5,\\y=-1\end{cases}$

$\downarrow$ 转化 $\qquad \downarrow$ 求解 $\qquad\qquad\qquad \uparrow$ 得解

一元一次方程 $7x=35 \xrightarrow{\text{求解}} x=5 \xrightarrow{\text{代入}} x-4y=9$

解三元一次方程组的基本思想就是“转化”. 通过消元，将“三元”转化为“二元”，再将“二元”转化为“一元”，通过求一元一次方程的解，进而求得二元一次方程组的解，最后求得三元一次方程组的解.

练　习

解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+y=1,\\x+z=6,\\y+z=3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-y+z=11,\\x+y-z=5,\\x-y-z=1.\end{cases}$

习　题

A　组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x-z=-4,\\x+y-z=-1,\\z-2y=-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-y-z=0,\\x+y-3z=4,\\2x-5y+7z=21.\end{cases}$

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+y=7, \\ 2x-5y+3z=-6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y+z=6, \\ x+y-z=0, \\ 2x-3y+8z=33. \end{cases}$

B 组

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-y-2z=10, \\ y-3z=-4, \\ 3x-y+5z=21; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y-3x-2z=1, \\ x+2y+3z=9, \\ 5x-7y+z=34. \end{cases}$

2. 在我国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题：上等谷 3 束，中等谷 2 束，下等谷 1 束，共 39 斗；上等谷 2 束，中等谷 3 束，下等谷 1 束，共 34 斗；上等谷 1 束，中等谷 2 束，下等谷 3 束，共 26 斗. 求上、中、下三等谷每束各是几斗.

数学活动

一元一次方程的“试位解法”

一元一次方程的写法和解法都经历了漫长的岁月才发展成为现在的样子．阿默士是用一大串符号表示一元一次方程的，并且是用算术的方法来解的．笛卡儿(法国数学家，1596～1650 年)给出了一元一次方程现在的写法和解法．古代数学家曾用“试位法”来解一元一次方程．

以 $4x+8=0$ 为例．任取 x 的两个不同的值 x_1，x_2(比如 $x_1=1$，$x_2=2$)，将它们分别代入方程的左边，并设 $4x_1+8=d_1$，$4x_2+8=d_2$(此时 $d_1=12$，$d_2=16$)，则

$$x=\frac{d_1x_2-d_2x_1}{d_1-d_2}=\frac{12\times2-16\times1}{12-16}=-2$$

是 $4x+8=0$ 的解．一般称这种解法为“试位法”．

活动一：仍以 $4x+8=0$ 为例．请你另取 x 的两个不同的值 x'_1，x'_2，并按上述方法进行计算，看其结果是不是原方程的解．

活动二：说明用试位法解一元一次方程的道理．

我们知道，一元一次方程 $ax+b=0(a\neq0$，a，b 为已知数)的解是 $x=-\frac{b}{a}$.

试位法：任取 x 的两个不同的值 x_1，x_2，代入上述方程的左边，并设

$$ax_1+b=d_1, \tag{1}$$

$$ax_2+b=d_2. \tag{2}$$

如果 $d_1=0$(或 $d_2=0$)，那么 $x=x_1$(或 $x=x_2$)即为原方程的解．不然，

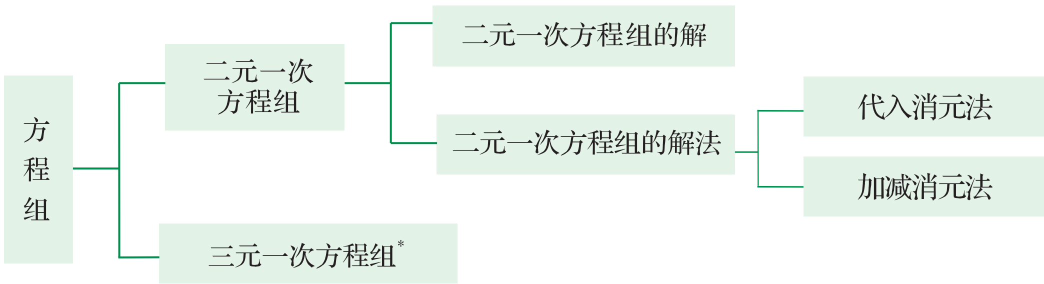
$$x=\frac{d_1x_2-d_2x_1}{d_1-d_2}\ (d_1-d_2\neq0)$$

是原方程的解．试对此给出说明．

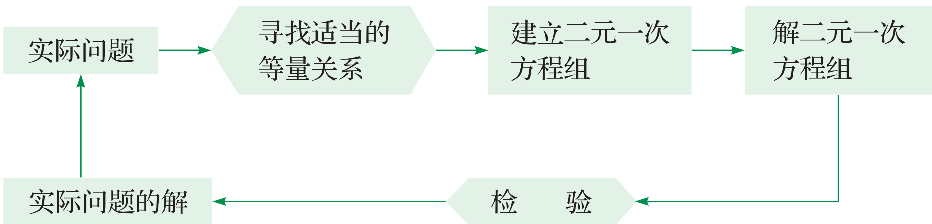
回顾与反思

在本章中，我们学习了二元一次方程组和三元一次方程组的解法，并且学会了用二元一次方程组来解决一些简单的实际问题.

一、知识结构



用二元一次方程组解决实际问题的过程：



二、总结与反思

同一元一次方程一样，二元一次方程组也是解决现实世界中数量之间相等关系的重要数学工具.

1. 列二元一次方程组和列一元一次方程解决实际问题的思路是相同的. 有些含两个未知数的实际问题用只设一个未知数列方程的办法求解往往较困难，若设两个未知数列方程组，则常常因等量关系比较容易表示而使列方程变得简单.

2. 解二元一次方程组的基本思路是：通过“消元”，把二元一次方程组转化为一元一次方程，逐步实现化“未知”为“已知”的目的. 这就是“化归”的数学思想.

3. 解二元一次方程组的基本方法有____________________；

解三元一次方程组的基本方法有____________________.

4. 解二元一次方程组的一般步骤是____.

5. 用二元一次方程组解决实际问题的一般步骤是____________________

____.

三、注意事项

在列方程组解应用题时，应注意在求出方程组的解后要进行检验，使它既满足方程组，又符合题意.

复 习 题

A 组

1. 填空：

(1) 已知 $3x-y=4$. 若用含 x 的代数式表示 y，则 $y=$________.

(2) 在 $2x+\frac{1}{3}y=1$ 中，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=$_____；当 $y=3$ 时，$x=$_____.

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+4y=7,\\5x-y=4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3y=5,\\4x-3y=7;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y-2z=1,\\x+3z=-2,\\3x-5y+z=21;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x+y+2z=7,\\x-2y-z=-4,\\2x+3y+z=18.\end{cases}$

3. 已知华氏温度 y(℉)与摄氏温度 x(℃)满足 $y=kx+b$. 当 $x=10$ 时，$y=50$；当 $x=20$ 时，$y=68$. 求 k，b 的值，并写出 y 与 x 间的关系式.

4. 七年级(二)班选出部分同学参加夏令营，分成红、蓝两队，红队戴红帽子，蓝队戴蓝帽子. 一个红队队员说，我看见的是红队人数与蓝队人数相等；一个蓝队队员说，我看见的是红队人数是蓝队人数的 2 倍. 求红队人数和蓝队人数.

5. 七年级两个班共 88 名同学给学校花坛栽种花卉，(一)班同学平均每人栽种 8 棵，(二)班同学平均每人栽种 10 棵，两个班共栽种 788 棵. 求这两个班各有多少同学.

6. 某工程队承包了两项工程. 第一项工程甲组做了 10 天，乙组做了 8 天完成，共获报酬 12 800 元；第二项工程甲组做了 8 天，乙组做了 12 天完成，共获报酬 13 600 元. 甲、乙两组平均每做工一天各应得报酬多少元?

7. 甲、乙两人相距 27 km. 若两人同时出发相向而行，则出发后 1.5 h 相遇；若两人仍是相向而行，但甲比乙先出发 30 min，则乙出发 70 min 后两人相遇. 求甲、乙两人的速度.
8. 已知一个三角形的周长为 24 cm，其中两条边的长度之和等于第三条边长的 3 倍，而这两边长度的差等于第三条边长的$\frac{1}{2}$. 求这个三角形的三边长.

B 组

1. 已知$\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$和$\begin{cases}x=4,\\y=1\end{cases}$都是方程 $mx+ny=8$ 的解，求 m，n 的值.
2. 已知 $2x-3y=5x+2y=1$，求 x，y 的值.
3. 关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}mx+ny=8,\\2mx-3ny=-4\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$求 m 和 n 的值.
4. 如图，在图(1)中，各行、各列及对角线上的三个数之和都相等.
   (1) 请你求出 x，y 的值.
   (2) 把满足(1)的其他 6 个数填入图(2)中的方格内.

$2x$	3	2
	y	-3
		$4y$

(1)

	3	2
		-3

(2)

(第 4 题)

5. 小亮跟爸爸于 9 月初和 10 月初两次到超市购买食品.

根据打折前后花 30 元所购买物品的数量，你能求出打折前牛奶和面包的单价各是多少元吗？

C 组

1. 某服装厂接到生产一种工作服的订货任务，要求在规定期限内完成．按原来的生产进度，每天只能生产这种服装 150 套，在规定的期限内只能完成订货量的$\frac{4}{5}$．现在，工厂改进了生产流程，每天可生产这种工作服 200 套．按现在的生产进度，不仅比规定的期限少用 1 天，而且比订货量多生产了 25 套．客户订做的工作服是多少套，要求完成的期限是多少天？
2. 制造某种产品需要 A 和 B 两种原料．其中 A 种原料的价格为 50 元/千克，B 种原料的价格为 40 元/千克．一段时间后，这两种原料的价格进行了调整，A 种原料价格上涨了 10%，B 种原料价格下降了 15%．经核算，产品的成本仍然不变．已知生产这种产品需 A，B 两种原料共 11 000 kg．A 种原料和 B 种原料各需多少？
3. 某城市为了缓解缺水状况，计划实施一项引水工程，要把 200 km 外的河水引到城市中来．该市把这个工程交给了甲、乙两个施工队，工期为 50 天．甲、乙两队合作施工了 30 天后，乙队因另外有任务需要离开 10 天，于是甲队加快施工速度，每天多修 0.6 km．乙队回来后，为了保证工期，甲队保持现在的施工速度不变，乙队每天比原来多修 0.4 km，结果工程如期完工．甲、乙两队原计划每天各施工多少千米？

第七章

相交线与平行线

在本章中，我们将学习

- 命题
- 相交线、平行线
- 直线相交所成的角
- 两直线平行的判定与性质
- 图形的平移

图中哪些线是相交的？ 哪些线是平行的？ 其中的哪些角具有特殊的位置和数量关系？

$\angle 1=\angle 2$

$a/\!/b$

7.1 命　题

对某一事物进行研究并交流，必然要借助于有关的名称，同时也经常需要对一些问题作出判断，并对判断说明理由.

“正整数、0 和负整数统称为整数.” 这是整数的定义.

“有公共端点的两条射线组成的图形叫做角.” 这是角的定义.

“含有未知数的等式叫做方程.” 这是方程的定义.

大家谈谈

你能说出偶数、单项式、两点间的距离分别是怎样定义的吗?

在对“角”和“有理数”有了更多的认识后，形成了如下一些判断：

(1) 两个直角相等.

(2) 两个锐角之和是钝角.

(3) 同角的余角相等.

(4) 两个负数，绝对值大的反而小.

(5) 负数与负数的差仍是负数.

(6) 负数的奇次幂是负数.

上面的六个语句，都是对一件事情作出判断的句子. 像这样，能够进行肯定或者否定判断的语句，叫做**命题**(proposition).

一般地，命题都是由条件和结论两部分组成的.

命题常写成“如果……那么……”的形式. “如果”引出的部分是条件，“那么”引出的部分是结论.

例如，负数的奇次幂是负数，可写为：如果一个数是负数，那么它的奇次幂是负数. 同角的余角相等，可写为：如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等.

做一做

下列各语句中，哪些是命题，哪些不是命题？是命题的，请你先将它改写为“如果……那么……”的形式，再指出命题的条件和结论.

（1）正方形的对边相等.

（2）连接 A，B 两点.

（3）相等的两个角是锐角.

（4）延长线段 AB 到点 C，使 $AC=2AB$.

（5）同角的补角相等.

（6）-4 大于 -2 吗？

在命题中，既有正确的命题，也有不正确的命题. 我们把正确的命题叫做**真命题**（true proposition），把不正确的命题叫做**假命题**（false proposition）.

> 请指出前面的命题中，哪些是真命题，哪些是假命题.

“同角的余角相等”是一个真命题. 因为，如果设$\angle\alpha$的余角是$\angle\beta$和$\angle\gamma$，那么$\angle\alpha+\angle\beta=90^\circ$，$\angle\alpha+\angle\gamma=90^\circ$，从而有$\angle\beta=\angle\gamma$.

“两个锐角之和是钝角”是一个假命题. 如$\angle1=15^\circ$和$\angle2=30^\circ$是两个锐角，但是$\angle1+\angle2=45^\circ$，不是钝角. 这个命题不正确，所以它是一个假命题.

要说明一个命题是假命题，只要举出一个符合命题条件，但不符合命题结论的例子就可以了. 像这样的例子叫做**反例**（counter example）.

例 1 举例说明“两个负数之差是负数”是假命题.

说明：设 $a=-2$，$b=-5$，（符合命题的条件）

则 $a-b=(-2)-(-5)=3$，不是负数.（不符合命题的结论）

所以“两个负数之差是负数”是假命题.

练 习

1. 下列各语句中，哪些是命题？是命题的，请你先将它改写为“如果……那么……”的形式，再找出命题的条件和结论.

（1）画一个角等于已知角.

（2）互为相反数的两个数的和为 0.

（3）当 $a=b$ 时，有 $a^2=b^2$.

（4）当 $a^2=b^2$ 时，有 $a=b$.

2. 指出第 1 题中的假命题，并用举反例的方法说明.

习 题

1. 指出下列命题中的条件和结论：

（1）如果两个角的和等于 180°，那么这两个角互为补角.

（2）等式两边都加上同一个数或同一个整式，等式仍然成立.

（3）两个钝角相等.

（4）如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$.

2. 写出三个命题，并判断它们的真假. 如果有假命题，说出理由.

观察与思考

1. 在图 7-1-1 中，AB 和 CD 是直线吗？请你先观察，后判断，然后利用直尺验证你的结论是否正确.

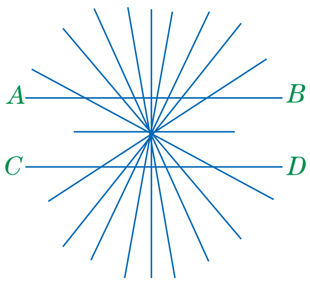


图 7-1-1

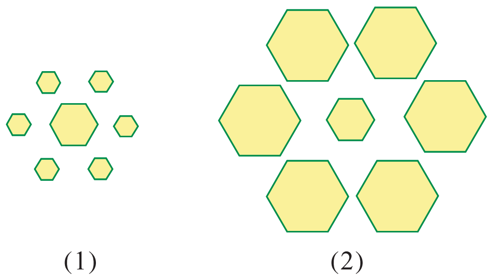


图 7-1-2

2. 在图 7-1-2 中，（1）和（2）两图中间的两个正六边形大小一样吗？请你先观察，后判断，然后利用叠合法验证你的判断是否正确.

3. 如果 $a=-b$，那么 $a^2=b^2$. 由此得出：当 $a=-b$ 时，$a^3=b^3$. 你认为后一个命题正确吗？为什么？

由观察、实验、归纳和类比等方法得出的命题，可能是真命题，也可能是假命题. 判断命题的真假需要说明理由，这个过程就是说理.

有些命题经过实践检验被公认为真命题，我们把这样的命题叫做

基本事实. 如“过平面上两点，有且只有一条直线”“两点之间的连线中，线段最短”等都是基本事实. 等式的性质也可以看做基本事实.

一起探究

观察相邻两个奇数的和：

1　3　5　7　9　…

4　8　12　16　…

（1）相邻两个奇数的和与 4 之间有什么关系？请提出你的猜想.

（2）通过说理，验证你的猜想正确与否.

> 人们经常用实验、归纳的方法去发现命题.

例 2　如图 7－1－3，说明“如果 C，D 是线段 AB 上的两点，且 $AC=DB$，那么 $AD=CB$”是真命题.

图 7－1－3

理由：因为　$AC=DB$（已知），

所以　$AC+CD=DB+CD$（等量加等量，和相等）.

所以　$AD=CB$（线段和的定义）.

像例题这样，依据已有的事实(包括定义、基本事实、已被确认的真命题)，按照确定的规则，得到某个具体结论的推理就是演绎推理.

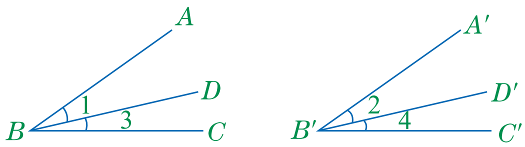
有些真命题，它们的正确性已经过演绎推理得到证实，并被作为判定其他命题真假的依据，这些命题叫做**定理**(theorem).

练　习

1. “$a^2>a$”是真命题还是假命题？请说明理由.

2. 阅读下面命题及其说理过程，在括号内填上推理的依据.

命题：如图，如果$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle 1=\angle 2$，那么$\angle 3=\angle 4$.



（第 2 题）

理由：因为　$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle 1=\angle 2$，（　　　　　　　　）

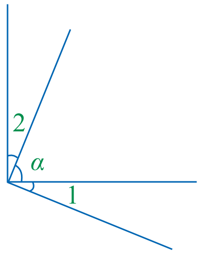
所以　$\angle ABC-\angle 1=\angle A'B'C'-\angle 2$（　　　　　　　　）.

又因为　$\angle 3=\angle ABC-\angle 1$，$\angle 4=\angle A'B'C'-\angle 2$，（两角差的定义）

所以　$\angle 3=\angle 4$（等量代换）.

习　题

1. 对“如果$\angle 1$和$\angle 2$都是$\angle\alpha$的余角，那么$\angle 1=\angle 2$”的说理过程，在括号内填上依据.



（第 1 题）

理由：因为　$\angle 1+\angle\alpha=90°$（已知），

所以　$\angle 1=90°-\angle\alpha$（等式的性质）.

因为　$\angle 2+\angle\alpha=90°$（　　　　　　　　），

所以　$\angle 2=90°-\angle\alpha$（　　　　　　　　）.

所以　$\angle 1=\angle 2$（　　　　　　）.

2. 说明“与一个偶数前后相邻的两个偶数之和，一定是 4 的倍数”是一个真命题.

7.2 相交线

在同一个平面内，两条直线的位置关系只有相交或不相交．在本节中，我们将研究两条直线相交构成的角及与其相关的一些问题．

观察与思考

在平面上任意画出两条直线，这两条直线的位置关系有几种可能？

下面探究当两条直线相交时，它们所构成的角之间的关系．

如图 7－2－1，两条直线 l_1，l_2 相交于点 O，形成四个角：$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$．$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 具有公共顶点 O，并且两边互为反向延长线．我们把具有这种特殊位置关系的两个角叫做**对顶角**（vertical angles）．

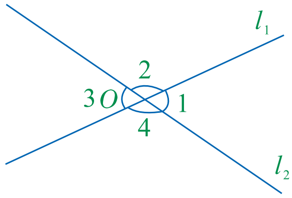


图 7－2－1

$\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角．

对顶角的大小有什么关系呢？

一起探究

1．如图 7－2－1，两条直线 l_1，l_2 相交于点 O，当一条直线绕点 O 转动时，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 同时增大或同时减小．你能猜想出 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的大小关系吗？

2．你能用测量或拼叠的方法验证你的猜想吗？试试看．

3．你能从“同角的补角相等”这一事实出发，用说理的方法来验证你的猜想吗？

下面，我们对猜想“对顶角相等”的正确性给予说明．

如图 7－2－1，已知 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是对顶角，那么 $\angle 1=\angle 3$．

理由：因为　$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 互补，

所以　$\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）．

对顶角相等.

观察与思考

如图 7－2－2，一条直线 c 分别与两条直线 a，b 相交（也说直线 a，b 被直线 c 所截），构成八个角.

（1）观察∠1 和∠5，∠2 和∠6，∠3 和∠7，∠4 和∠8 的位置关系，试描述它们的位置特征.

（2）∠3 和∠6，∠4 和∠5 各有什么位置特征？

（3）∠3 和∠5，∠4 和∠6 各有什么位置特征？

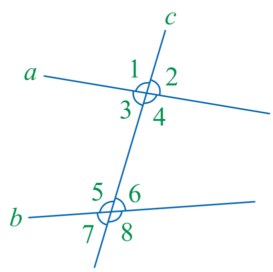


图 7－2－2

我们把具有∠1 和∠5 这样位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles）. ∠2 和∠6，∠3 和∠7，∠4 和∠8 都是同位角.

把具有∠3 和∠6 这样位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）. ∠4 和∠5 也是内错角.

把具有∠3 和∠5 这样位置关系的一对角叫做**同旁内角**（interior angles on the same side）. ∠4 和∠6 也是同旁内角.

做一做

请你在图 7－2－3 的基础上分别画出符合下列各条件的角：

（1）与∠ABC 是对顶角.

（2）与∠ABC 是同位角.

（3）与∠ABC 是内错角.

（4）与∠ABC 是同旁内角.

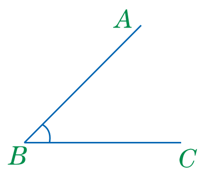
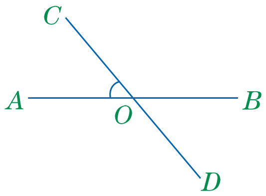


图 7－2－3

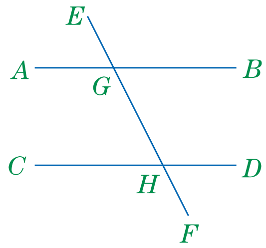
练　习

1. 填空：

如图，已知∠AOC=50°，那么，∠AOD=________，∠BOD=________，∠BOC=________.



（第 1 题）



（第 2 题）

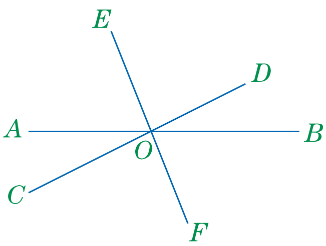
2. 直线 AB，CD 被直线 EF 所截，交点分别为 G，H，所有的同位角、内错角、同旁内角、对顶角各有多少对？分别写出两对来，填入下表.

名　称	对　数	举　例
对顶角		
同位角		
内错角		
同旁内角		

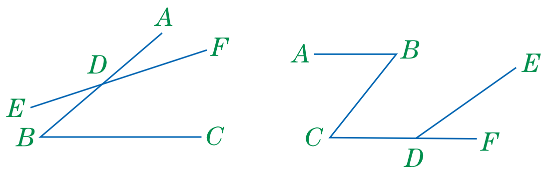
习　题

A　组

1. 如图，直线 AB，CD，EF 都经过点 O，图中有几对对顶角？请以等式的形式把它们写出来.



（第 1 题）



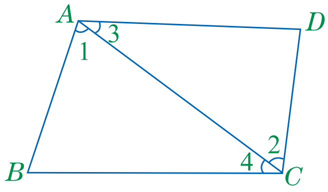
(1)　　(2)

（第 2 题）

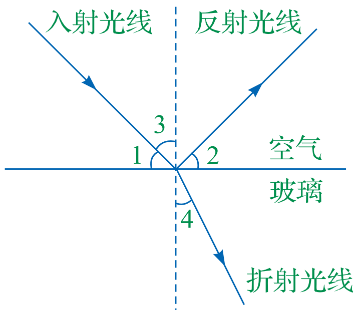
2. 如图，请分别写出各图中的一对同位角、内错角和同旁内角.

B　组

1. 如图，$\angle 1$ 和 $\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各是由哪两条直线被哪一条直线所截形成的？它们是具有什么位置关系的角？



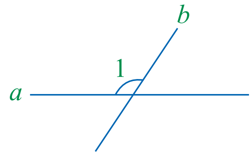
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 光线从空气射入玻璃时，光的传播方向发生了改变，一部分光线通过玻璃表面反射形成反射光线，一部分光线穿过玻璃发生了折射，如图所示. 由科学实验知道，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 4<\angle 3$，那么$\angle 1$和$\angle 2$是对顶角吗，$\angle 3$和$\angle 4$是对顶角吗？为什么？

3. 如图，两条直线 a，b 相交，请你再画一条直线 c，构成八个角，并分别找出与$\angle 1$是对顶角、同位角、内错角、同旁内角的角.



（第 3 题）

如图 7－2－4，两条直线 AB 和 CD 相交于点 O. 把直线 CD 绕点 O 按逆时针方向转动，当 $\angle BOD=90^\circ$ 时，如图 7－2－5，称直线 AB 和 CD 互相**垂直**(perpendicular)，记作“$AB\perp CD$”，读作“AB 垂直于 CD”. AB 是 CD 的垂线，CD 也是 AB 的垂线. 它们的交点 O 叫做**垂足**(foot of a perpendicular).

你能举出生活中反映“两直线垂直”的例子吗？

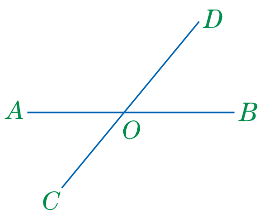


图 7－2－4

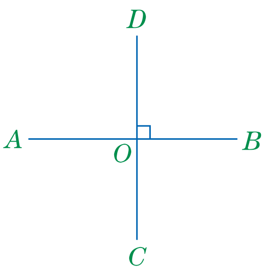


图 7－2－5

想一想，其他三个角都是什么角？

已知直线 AB 及 AB 上一点 C. 利用三角尺，可以按图 7－2－6 所示的方法，画出经过点 C 的 AB 的垂线.

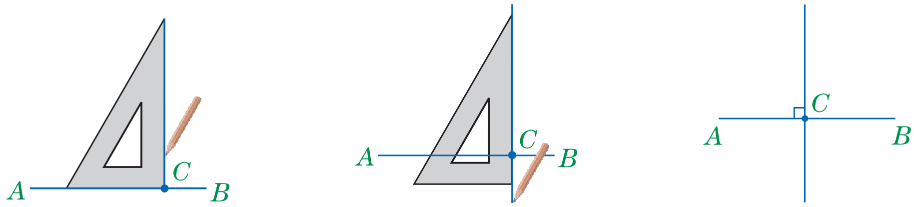


图 7－2－6

试着做做

1. 你能借助三角尺或量角器经过直线 AB 外一点 C 画出 AB 的垂线吗？试一试.

2. 经过直线上或直线外一点画该直线的垂线，可以画几条？

基本事实　**经过直线上或直线外一点，有且只有一条直线与已知直线垂直.**

一起探究

如图 7－2－7，C 是直线 AB 外一点，且 $CD \perp AB$，垂足为 D，即 CD 是点 C 到 AB 的垂线段. 再经过点 C 向直线 AB 任意引两条线段 CE，CF.

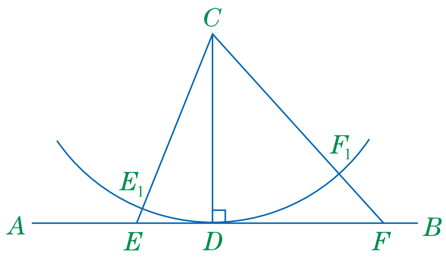


图 7－2－7

（1）猜想线段 CE，CD，CF 哪一条最短.

（2）以点 C 为圆心，CD 的长为半径画弧，圆弧分别与线段 CE，CF 相交于点 E_1，F_1. 线段 CE_1，CD，CF_1 相等吗？由此能进一步验证你的猜想吗？

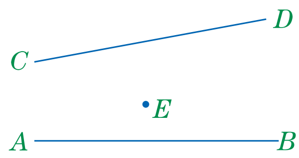
通过上面的探究，我们得到：

直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.

我们把垂线段 CD 的长度称为**点 C 到直线 AB 的距离.**

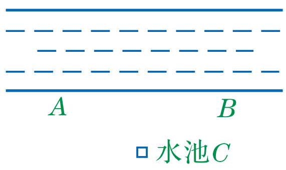
练 习

1. 如图，已知直线 AB，CD 和点 E，过点 E 分别画出直线 AB，CD 的垂线.

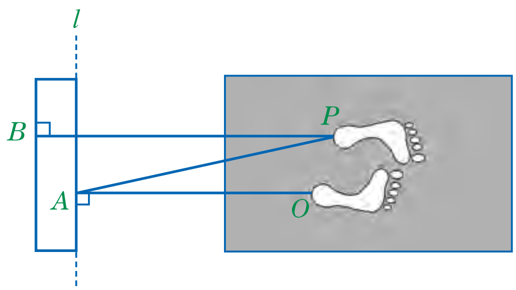


（第 1 题）

2. 如图，要把河中的水引到水池 C，在河岸 AB 的什么地方开始挖渠，才能使水渠的长度最短？



（第 2 题）



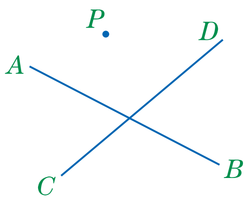
（第 3 题）

3. 如图，在测量跳远成绩的示意图中，直线 l 是起跳线，BP，AP，AO 中哪一条线段的长度是跳远的成绩？

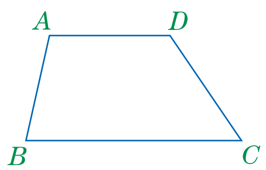
习 题

A 组

1. 经过点 P 分别画直线 AB 和 CD 的垂线，使用刻度尺分别测量点 P 到直线 AB 和 CD 的距离.（精确到 1 mm）



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，经过点 A，D 画 BC 的垂线段 AE，DF. 分别量出点 A，D 到 BC 的距离.（精确到 1 mm）

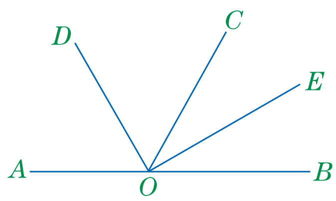
3. 一个正方形的两条对角线有什么位置关系？画一画，量一量.

B 组

1. 给下面命题的说理过程填写依据.

已知：如图，O 是直线 AB 上的一点，OD 是 $\angle AOC$ 的平分线，OE 是 $\angle COB$ 的平分线.

对 $OD \perp OE$ 说明理由.



（第 1 题）

理由：因为 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$（　　　　　　），

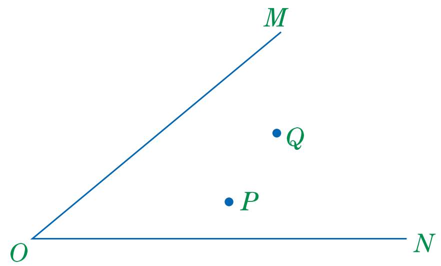
$\angle COE=\frac{1}{2}\angle COB$（　　　　　　），

所以 $\angle DOC+\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle COB=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COB)$（　　　　　　）.

所以 $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$（两角和的定义）.

所以 $OD \perp OE$（　　　　　　）.

2. 如图，P，Q 是 $\angle MON$ 内的两点，请由点 P，Q 分别向 $\angle MON$ 的两边画垂线 PA，PB 和 QC，QD，垂足分别为 A，B，C，D. 通过观察与测量，对 $\angle APB$ 和 $\angle CQD$ 的大小关系提出你的猜想.

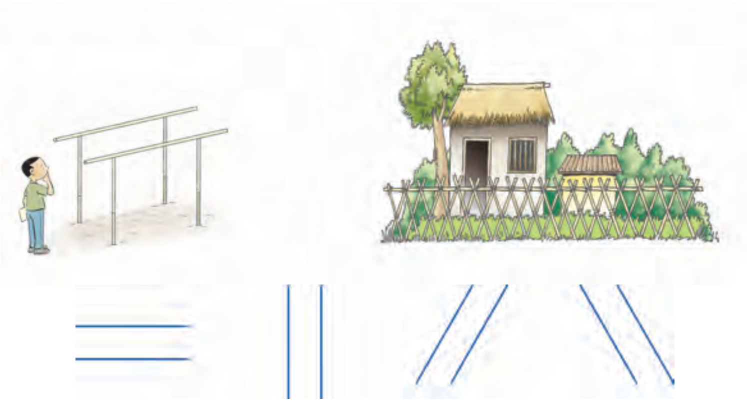


（第 2 题）

7.3 平行线

平行是两条直线的一种特殊位置关系. 在本节中，我们将认识平行线，并了解如何画两条平行线.

你能从下列事物中看到平行线吗?



在同一平面内，不相交的两条直线叫做**平行线**(parallel lines).

平行线的表示：

图　形	符　号	读　法
A —— B C —— D	$AB/\!/CD$	直线 AB 平行于直线 CD，或直线 AB 与 CD 平行
a —— b ——	$a/\!/b$	直线 a 平行于直线 b，或直线 a 与 b 平行

试着做做

如图 7－3－1，直线 $a/\!/b$. A，B 为直线 a 上的任意两点.

（1）请用三角尺分别画出点 A 和点 B 到直线 b 的垂线段 AM，BN，观察并度量 AM 和 BN，看看它们的长度有什么关系.

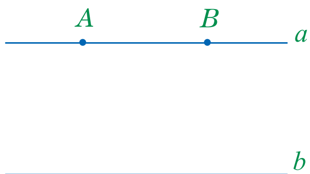


图 7－3－1

（2）在直线 a 上另取一点 C，画出点 C 到直线 b 的垂线段．它的长度与 AM，BN 的长度相等吗？

事实上，若直线 $a/\!/b$，则直线 a 上任意一点到直线 b 的距离都相等．这个距离就叫做平行线 a 与 b 之间的距离．

两条平行线之间的距离处处相等．

已知一条直线 a，怎样画出另一条直线 b，使它和直线 a 平行呢？在实际中，人们常用如下的方法(图 7－3－2)：

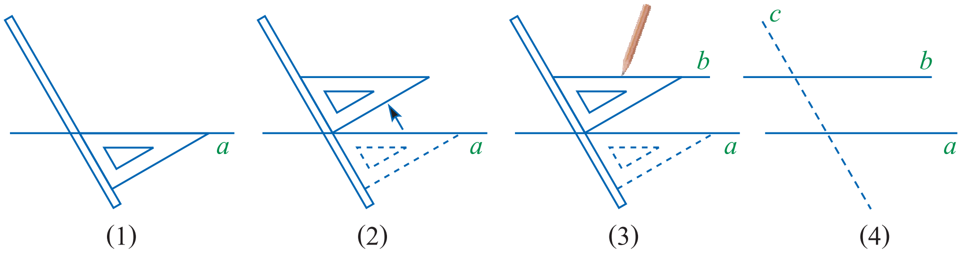


图 7－3－2

观察与思考

观察上面画平行线的过程．

（1）如果在直线 a 外任意取一点 C，你能过点 C 画出与直线 a 平行的直线吗？这样的直线能画出多少条？

（2）如图 7－3－2(4)中，只要哪对角相等，就可使 $a/\!/b$？在图 7－3－2(4)中指出这样的角．

基本事实　**经过已知直线外一点，有且只有一条直线和已知直线平行．**

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．简单地说，就是：

基本事实　**同位角相等，两直线平行．**

例 如图 7－3－3，$\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$. 直线 a 与 b 平行吗？为什么？

解：$a /\!/ b$.

理由是：

因为 $\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，（已知）

所以 $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

所以 $a /\!/ b$（同位角相等，两直线平行）.

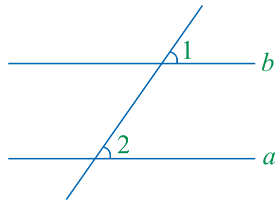


图 7－3－3

在对命题进行说理的过程中，经常会使用“因为”“所以”两个词，为简单起见，今后我们用符号“$\because$”表示“因为”，用“$\therefore$”表示“所以”.

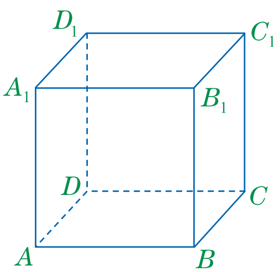
练 习

1. 如图所示是一个正方体.

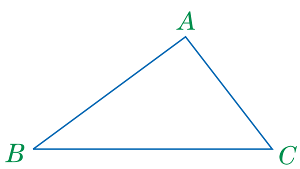
（1）写出三对互相垂直的棱，并用符号表示.

（2）写出三对互相平行的棱，用符号表示并指出它们之间的距离.

（3）观察棱 AB 和 B_1C_1，它们所在的直线相交吗？它们所在的直线平行吗？请你说明理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

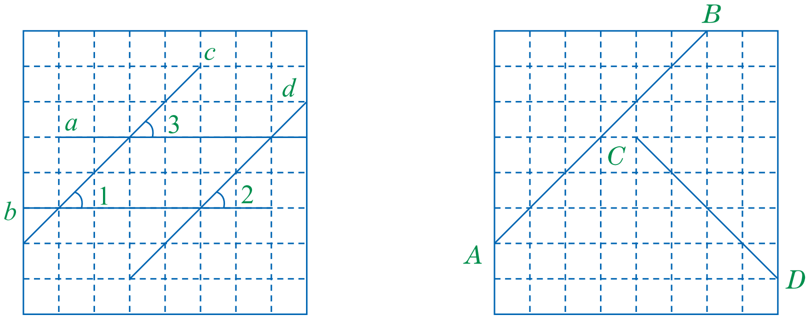
2. 如图，过点 A 画直线 MN 平行于 BC.

习 题

A 组

1. 图中每个小方格都是正方形.

（1）在图(1)中，哪些直线是平行的？说出你的理由.

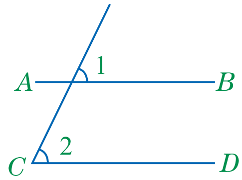


(1) (2)

（第 1 题）

（2）借助于网格，在图(2)中画出分别与 AB，CD 平行的两条直线.

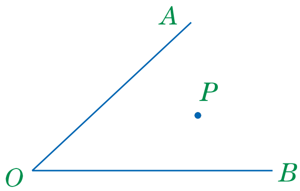
2. 如图，$\angle 1=64^\circ$，$\angle 2=64^\circ$，AB 与 CD 平行吗？说明理由.



（第 2 题）

B 组

1. 如图，过点 P 画直线 PE 平行于 OA，PE 与 OB 相交于点 E；画直线 PH 平行于 OB，PH 与 OA 相交于点 H.



（第 1 题）

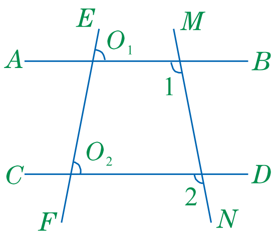
2. 填空．如图：

（1）∵ $\angle EO_1B=64^\circ$，$\angle EO_2D=64^\circ$，（已知）

∴ ______ // ______ （　　　　　　）.

（2）∵ $\angle 1=\angle 2$（已知），

∴ ______ // ______ （　　　　　　）.



（第 2 题）

3. 填空．如图：

（1）∵ $\angle NDC=\angle NAM$（已知），

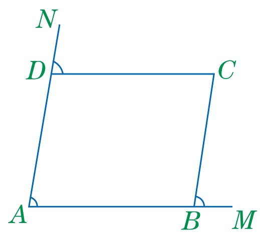
∴ ______ // ______ （　　　　　　）.

（2）∵ $\angle NAM=\angle CBM$（已知），

∴ ______ // ______ （　　　　　　）.

（3）∵ $\angle NDC=\angle NAM$，$\angle NAM=\angle CBM$，（已知）

∴ ________ = ________ （等量代换）.



（第 3 题）

7.4 平行线的判定

我们已经确认了“同位角相等，两直线平行”，这是判定平行线的基本事实．根据这条基本事实，可以说明平行线的判定定理．

观察与思考

我们已经知道：同位角相等，两条直线平行．即在图 7－4－1 中，如果 $\angle 2=\angle 3$，那么 $AB/\!/CD$．

小亮和小红经过认真观察有了新的发现．

小亮的发现

因为 $\angle 1=\angle 3$（对顶角相等），如果 $\angle 1=\angle 2$，那么就能推出 $\angle 2=\angle 3$，于是就有 $AB/\!/CD$．

小红的发现

因为 $\angle 3+\angle 4=180^\circ$（平角定义），如果 $\angle 2+\angle 4=180^\circ$，那么就能推出 $\angle 2=\angle 3$，于是就有 $AB/\!/CD$．

（1）你认为小亮和小红的想法正确吗？

（2）阅读下面这两个命题的说理过程，在括号内填写依据．

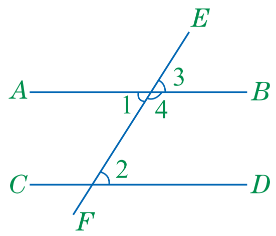


图 7－4－1

命题 1 已知：如图 7－4－1，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1=\angle 2$.

对 $AB/\!/CD$ 说明理由．

理由：$\because$ $\angle 1=\angle 2$（　　　　　　　），

$\angle 1=\angle 3$（　　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$（　　　　　　　）．

$\therefore$ $AB/\!/CD$（　　　　　　　）．

命题 2 已知：如图 7－4－1，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 2+\angle 4=180^\circ$.

对 $AB/\!/CD$ 说明理由．

理由：$\because$ $\angle 2+\angle 4=180^\circ$（　　　　　　　），

$\angle 3+\angle 4=180^\circ$（　　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 2=180^\circ-\angle 4$，$\angle 3=180^\circ-\angle 4$.（　　　　　　　）

$\therefore\ \angle 2=\angle 3$（　　　　　　　）.

$\therefore\ AB /\!/ CD$（　　　　　　　）.

由此得到定理：两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等（或者同旁内角互补），那么这两条直线平行.

简单地说，就是：

内错角相等，两直线平行.

同旁内角互补，两直线平行.

例 如图 7-4-2，已知直线 AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1=60^\circ$，$\angle 2=120^\circ$.

对 $AB /\!/ CD$ 说明理由.

理由：$\because\ \angle 1+\angle 2=60^\circ+120^\circ=180^\circ$（已知），

$\angle 2=\angle 4$（对顶角相等），

$\therefore\ \angle 1+\angle 4=180^\circ$（等量代换）.

$\therefore\ AB /\!/ CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

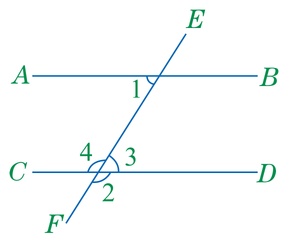
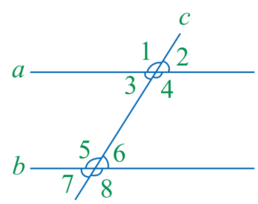


图 7-4-2

练　习

1. 如图，直线 a，b 被直线 c 所截，如果同位角 $\angle 1=\angle 5$，请你写出图中其他相等的同位角、所有相等的内错角、所有互补的同旁内角.



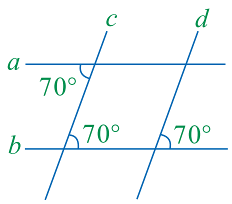
（第 1 题）

2. 对于上面例题中的命题，请你试着写出用“内错角相等，两直线平行”或“同位角相等，两直线平行”进行说理的过程.

习　题

A　组

1. 如图，请你找出图中互相平行的直线，并说明理由.



（第 1 题）

2. 将下面的说理过程补充完整. 如图，直线 CD，EF 被直线 AB 所截.

(1) ∵ $\angle 1=\angle 2$（已知），

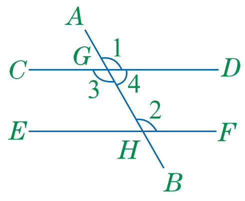
∴ $CD/\!/EF$（　　　　　　　　　　）.

(2) ∵ ________ = ________（已知），

∴ $CD/\!/EF$（内错角相等，两直线平行）.

(3) ∵ ________ + ________ $=180^\circ$（已知），

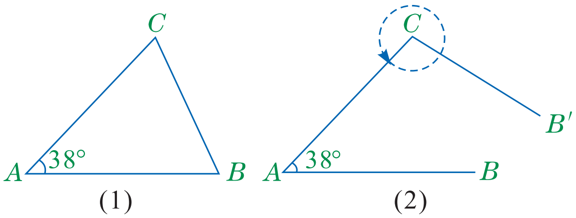
∴ $CD/\!/EF$（同旁内角互补，两直线平行）.



（第 2 题）

B 组

1. 如图(1)，在三角形 ABC 中，$\angle A=38^\circ$，BC 边绕点 C 按逆时针方向旋转一周回到原来的位置. 在旋转的过程中(图(2))，是否有一位置使 $CB'/\!/AB$？如果有这样的位置，请你画出示意图，并写出判断它们平行的理由.



（第 1 题）

2. 如图，直线 a，b 被直线 c 所截. 若 $\angle 1+\angle 7=180^\circ$，则 $a/\!/b$. 在下面说理过程中的括号里填写说理依据.

方法一：∵ $\angle 1+\angle 7=180^\circ$（　　　　　　　　），

而 $\angle 1+\angle 3=180^\circ$（　　　　　　　　），

∴ $\angle 7=\angle 3$（　　　　　　　　）.

∴ $a/\!/b$（　　　　　　　　）.

方法二：∵ $\angle 1+\angle 7=180^\circ$（　　　　　　　　），

$\angle 1+\angle 3=180^\circ$（　　　　　　　　），

∴ $\angle 7=\angle 3$（　　　　　　　　）.

又 $\angle 7=\angle 6$（　　　　　　　　），

∴ $\angle 3=\angle 6$（　　　　　　　　）.

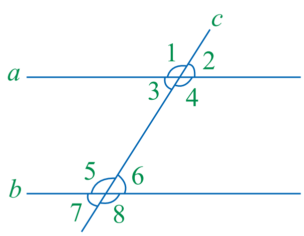
∴ $a/\!/b$（　　　　　　　　）.

方法三：∵ $\angle 1+\angle 7=180^\circ$（　　　　　　　　），

而 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 7=\angle 6$，（　　　　　　　　）

∴ $\angle 4+\angle 6=180^\circ$（　　　　　　　　）.

∴ $a/\!/b$（　　　　　　　　）.



（第 2 题）

7.5 平行线的性质

受两条直线平行判定方法研究过程的启发，下面，我们用一条直线去截两条平行线来探索在这种情况下同位角、内错角、同旁内角有什么样的特殊关系.

一起探究

如图 7-5-1，已知直线 $a /\!/ b$，且被直线 c 所截.

(1) 猜想同位角$\angle 1$与$\angle 5$的大小有什么关系，用量角器量一量，验证你的猜想.

(2) 图中其他的同位角是否也相等呢？和同学交流.

(3) 请你画一条直线 d，使它和 a，b 都相交，度量其中任意一对同位角，看其大小有什么关系.

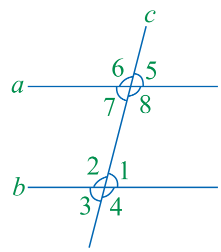


图 7-5-1

平行线性质定理[1]：两条平行线被第三条直线所截，同位角相等. 简称为：

两直线平行，同位角相等.

大家谈谈

如图 7-5-1，已知直线 $a /\!/ b$，且它们被直线 c 所截. 由平行线性质定理，可得$\angle 1=\angle 5$.

(1) 由$\angle 1=\angle 5$能推出$\angle 1$与$\angle 7$相等吗？$\angle 2$与$\angle 8$也相等吗？为什么？

(2) 由$\angle 1=\angle 5$能推出两对同旁内角互补吗？为什么？

事实上，如图 7-5-2，直线 $AB /\!/ CD$，AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1$和$\angle 2$是内错角.

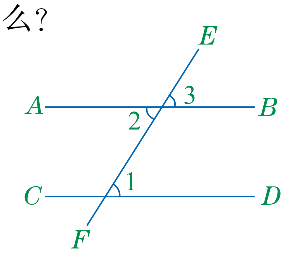


图 7-5-2

[1] 此定理将在以后说明理由.

对$\angle 1=\angle 2$说理过程如下：

$\because$ $AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ $\angle 2=\angle 3$（对顶角相等），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

做一做

已知：如图 7－5－3，直线 $AB /\!/ CD$，AB，CD 被直线 EF 所截，$\angle 1$ 和$\angle 2$ 是同旁内角.

对$\angle 1+\angle 2=180°$说明理由.

理由：$\because$ $AB /\!/ CD$（　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（　　　　　）.

$\because$ $\angle 3+\angle 2=180°$（　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=180°$（　　　　　）.

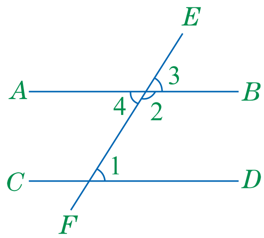


图 7－5－3

还有其他的说理方法吗？

于是得到两个平行线性质定理：两条平行线被第三条直线所截，内错角相等，同旁内角互补. 简称为：

两直线平行，内错角相等.

两直线平行，同旁内角互补.

例 1 已知：如图 7－5－4，$a /\!/ b$，$c /\!/ d$，$\angle 1=73°$. 求$\angle 2$ 和$\angle 3$ 的度数.

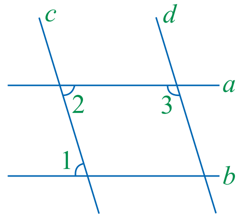


图 7－5－4

解：$\because$ $a /\!/ b$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

$\because$ $\angle 1=73°$（已知），

$\therefore$ $\angle 2=73°$（等量代换）.

$\because$ $c /\!/ d$（已知），

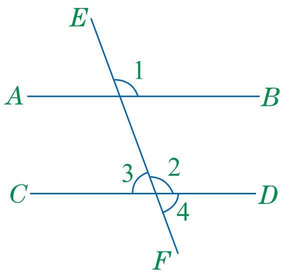
$\therefore$ $\angle 2+\angle 3=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\therefore$ $\angle 3=180°-\angle 2$（等式的性质）.

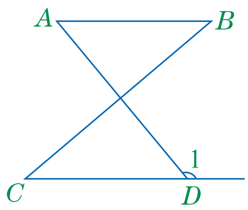
$\therefore$ $\angle 3=180°-73°=107°$（等量代换）.

练　习

1. 如图，已知 $AB/\!/CD$，$\angle 1=110^\circ$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 下面写出了命题“如图，如果 $\angle B=\angle C$，那么 $\angle A+\angle 1=180^\circ$”的说理过程，请你填空：

∵ $\angle B=\angle C$（　　　　　　　　　），

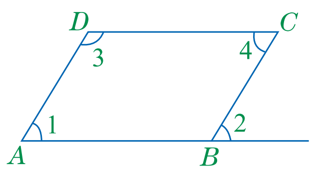
∴ ________ $/\!/$ ________（　　　　　　　　　）.

∴ $\angle A+\angle 1=180^\circ$（　　　　　　　　　）.

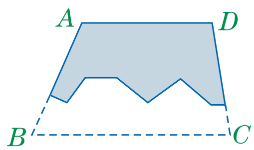
习　题

A　组

1. 如图，$AB/\!/DC$，$AD/\!/BC$，且 $\angle 1=60^\circ$. 求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



（第 1 题）

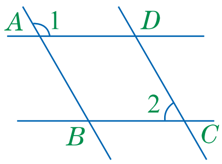


（第 2 题）

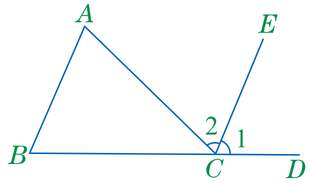
2. 如图，已知一工件 $ABCD$，它的下半部已经残缺. 只知道 $AD/\!/BC$，并且量得 $\angle A=115^\circ$，$\angle D=99^\circ$. 你能算出残缺的下半部 $\angle B$ 和 $\angle C$ 两个角的度数吗？写出理由.

B 组

1. 如图，直线 $AD /\!/ BC$，$AB /\!/ DC$，$\angle 1=120°$. 求$\angle 2$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点 B，C，D 在同一条直线上，$\angle A=\angle B$. 如果 $CE /\!/ AB$，那么 $\angle 1=\angle 2$. 对以下说理过程填空：

∵ $CE /\!/ AB$（已知），

∴ $\angle 1=$________（　　　　　　　），

　$\angle 2=$________（　　　　　　　）.

∵ $\angle A=\angle B$（已知），

∴ $\angle 1=\angle 2$（　　　　　　　）.

例 2 已知：如图 7－5－5，$\angle 1=\angle 2$.

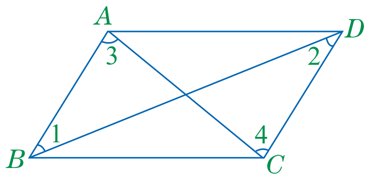


图 7－5－5

> 分析：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是 AB，CD 被 BD 所截得的内错角，由$\angle 1=\angle 2$ 可得 $AB /\!/ CD$. $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 是 AB，CD 被 AC 所截得的内错角，由 $AB /\!/ CD$，可得$\angle 3=\angle 4$.

对$\angle 3=\angle 4$ 说明理由.

理由：∵ $\angle 1=\angle 2$（已知），

∴ $AB /\!/ CD$（内错角相等，两直线平行）.

∴ $\angle 3=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

一起探究

1. 先画直线 l_1，再画直线 l_2，l_3 分别与 l_1 平行.

2. 观察画出的图形，直线 l_2 与 l_3 有怎样的位置关系？提出猜想，并对猜想的正确与否说明理由.

事实上，如图 7－5－6，如果 $a/\!/b$，$a/\!/c$，那么 $b/\!/c$.

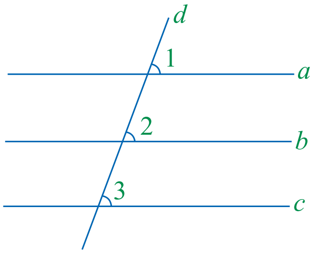


图 7－5－6

分析：由 $a/\!/b$，可得$\angle 1=\angle 2$. 由 $a/\!/c$ 可得$\angle 1=\angle 3$. 由等量代换可得$\angle 2=\angle 3$. 由同位角相等，两直线平行，可得 $b/\!/c$.

理由：$\because$ $a/\!/b$（　　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（　　　　　　　）.

$\because$ $a/\!/c$（　　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（　　　　　　　）.

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$（　　　　　　　）.

$\therefore$ $b/\!/c$（　　　　　　　）.

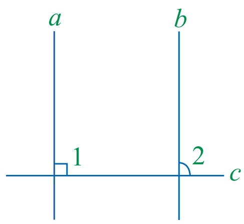
还有其他的说理方法吗？

平行于同一条直线的两条直线平行.

练　习

为下面的说理过程填空：

已知：如图，直线 a，b 被直线 c 所截，$a/\!/b$，$a\perp c$. 对 $b\perp c$ 说明理由.



理由：$\because$ $a/\!/b$（　　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1=$________（　　　　　　　）.

$\because$ $\angle 1=90^\circ$（　　　　　　　），

$\therefore$ $\angle 2=$________（　　　　　　　）.

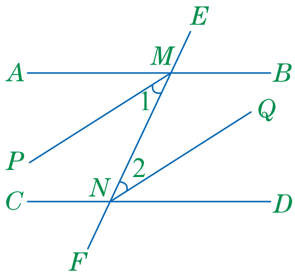
$\therefore$ $b\perp c$（　　　　　　　）.

习 题

A 组

填空：

已知：如图，如果 $AB /\!/ CD$，AB，CD 与直线 EF 分别相交于点 M 和 N，MP 平分 $\angle AMF$，NQ 平分 $\angle END$.



对 $MP /\!/ NQ$ 说明理由.

理由：$\because$ $AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore$ $\angle AMF=$________（　　　　　）.

$\because$ MP 平分 $\angle AMF$（已知），

$\therefore$ $\angle 1=\dfrac{1}{2}$________（角平分线的定义）.

同理 $\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle END$，

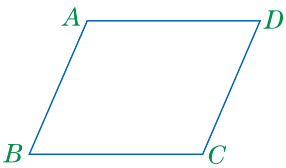
$\therefore$ $\angle 1=$________（　　　　　）.

$\therefore$ $MP /\!/ NQ$（　　　　　）.

> “同理”是指和前边的推导过程与依据道理相同.

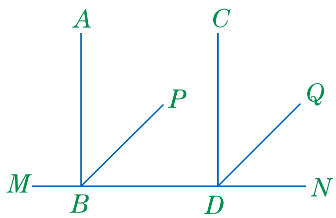
B 组

1. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，$\angle B=\angle D$.
   对 $AD /\!/ BC$ 说明理由.



（第 1 题）

2. 如图，如果 $AB \perp MN$ 于点 B，$CD \perp MN$ 于点 D，BP 为 $\angle ABN$ 的平分线，DQ 为 $\angle CDN$ 的平分线，那么 $BP /\!/ DQ$. 请你写出说理过程.



（第 2 题）

7.6 图形的平移

在学习了平行线之后，我们容易联想到小学已学过的“图形的平移”．下面，我们来探究二者之间的内在联系．

观察与思考

1．观察图 7－6－1 中物体的运动情况，思考下面的问题：

在平直的铁轨上行驶的列车　　正被吊起的重物　　自动扶梯上的购物车

图 7－6－1

（1）图中正在运动的物体，由一个位置移动到另一个位置后，它们的形状、大小是否发生了变化？

（2）在上述物体的移动过程中，同一个物体的不同部位（如沿一段直轨行驶的列车的车头和车尾）移动的方向是否相同？移动的距离是否相等？

（3）请你再说出一个类似于上面物体移动的实例．

2．如果把在一个笔直的河道上平稳漂流的竹筏看做四边形 $ABCD$，那么，竹筏在水面上由一个位置漂流到另一个位置，就像图 7－6－2 所示的四边形 $ABCD$ 平行移动到四边形 $A'B'C'D'$ 的位置．

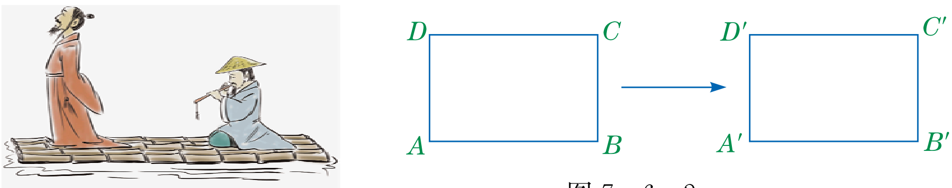


图 7－6－2

（1）你认为四边形 $ABCD$ 平行移动到四边形 $A'B'C'D'$ 后，形状和大小是否发生了变化？

（2）当 AD 移动到 $A'D'$，BC 移动到 $B'C'$ 时，你认为它们移动的方向和距离分别有什么关系？把你的想法与同学进行交流.

像图 7－6－2 那样，在平面内，一个图形由一个位置沿某个方向移动到另一个位置，这样的图形运动叫做**平移**（translation）.

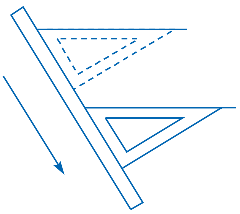
显然，图形的平移不改变它的形状和大小.

在图 7－6－2 中，四边形 $ABCD$ 经平移后得到四边形 $A'B'C'D'$. 我们把点 A 和点 A' 叫做对应点，线段 AB 与线段 $A'B'$ 叫做对应线段，$\angle A$ 和 $\angle A'$ 叫做对应角.

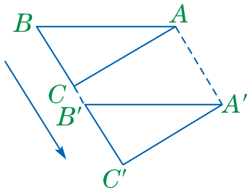
请你指出其他的对应点、对应线段和对应角.

一起探究

如图 7－6－3(1)所示，将三角尺的一边紧靠着固定的直尺推动，其结论是将三角形 ABC 沿 BC 方向平移到三角形 $A'B'C'$ 所在位置，如图 7－6－3(2).



(1)



(2)

图 7－6－3

（1）在图 7－6－3(2)中，指出对应线段，并说明对应线段之间有什么关系；指出对应角，并说明对应角之间有什么关系.

（2）在图 7－6－3(2)中，对应点的连线 AA'，BB'，CC' 之间具有什么位置关系和数量关系？

在平面内，一个图形平移后得到的图形与原图形的对应线段相等，对应角相等，各对应点所连接的线段平行(或在同一条直线上)且相等.

例 如图 7－6－4，网格图中小方格都是边长为 1 个单位长度的小正方形.

（1）请你画出将三角形 ABC 向右平移 5 个单位长度后的图形. 连接各对对应点，并指出相等的线段和相等的角.

(2) 请指出图中(包括新画出的)所有分别互相平行的线段.

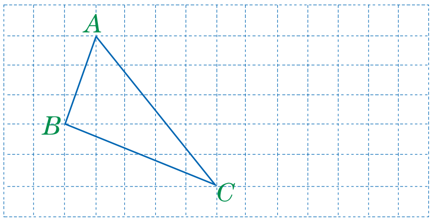


图 7-6-4

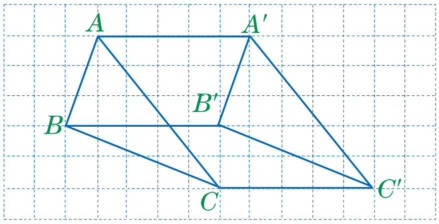


图 7-6-5

解：(1) 如图 7-6-5，三角形 $A'B'C'$即为所求.

相等的线段分为两类：

对应线段相等，即 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AC=A'C'$.

对应点所连接的线段都相等，即 $AA'=BB'=CC'$.

对应角相等，即 $\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

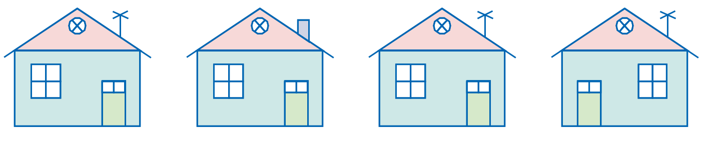
(2) 平行的线段也分为两类：

对应线段平行，即 $AB/\!/A'B'$，$BC/\!/B'C'$，$AC/\!/A'C'$.

各对应点所连接的线段平行，即 $AA'/\!/BB'/\!/CC'$.

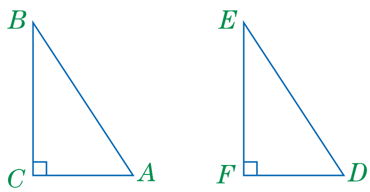
练　习

1. 如图，在图案(2)、(3)、(4)中，哪个是由图案(1)向右平移得到的?



(第 1 题)

2. 如图，直角三角形 DEF 是由直角三角形 ABC 经过平移得到的，请写出它们的对应点、对应线段和对应角.



(第 2 题)

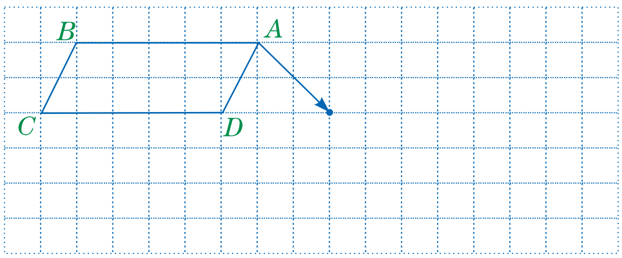
习 题

A 组

1. 如图，请画出把线段 AB，CD 分别按箭头所指的方向平移 3 cm 后的图形. 连接各对对应点，并指出相等的线段、平行的线段和相等的角.

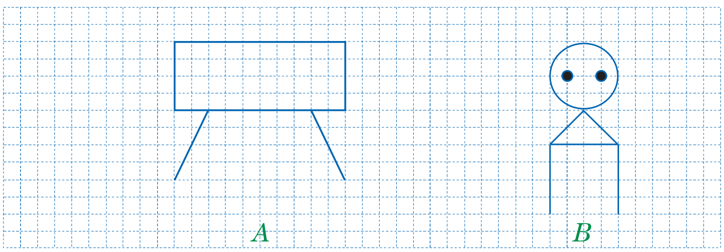
（第 1 题）

2. 在网格图中，把四边形 $ABCD$ 按箭头指示的方向平移，并使点 A 移到箭头标示的格点处. 请你画出平移后的图形.



（第 2 题）

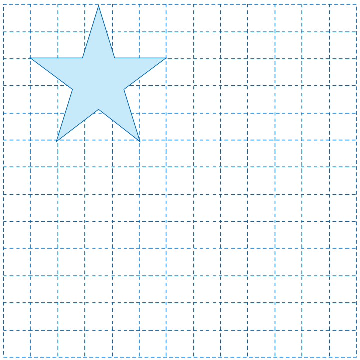
3. 如图，网格图中的每一格的边长为 1 个单位长度. 把图形 A 向左平移 2 个单位长度，把图形 B 向左平移 5 个单位长度. 请画出平移后的图形.



（第 3 题）

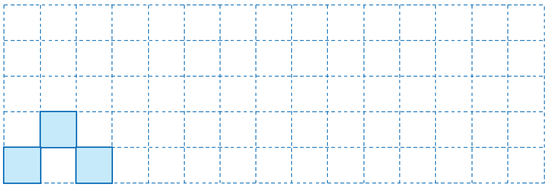
B 组

1. 如图，把网格图中的五角星先向右平移 6 格，再把向右平移后的图形向下平移 7 格，请画出每次平移后的图形.



（第 1 题）

2. 如图，如果把网格图中的三个涂了色的小正方形看做一个图形，把它在网格中进行多次平移，能不能将所有方格填满？如果填不满，怎样平移可使剩余的方格最少？最少剩余几个方格？



（第 2 题）

回顾与反思

一、知识结构

1. 在本章中，我们学习了有关命题与说理的知识，如下表：

- 命题
  - 假命题
  - 真命题
    - 基本事实
    - 定理
- 基本事实、定义 → 说理的依据
- 说理的依据、说理的过程 → 演绎推理

2. 在本章中，我们还学习了相交线、平行线的有关知识，其内容及关系如下图所示：

- 平面内两条直线的位置关系
  - 两条直线相交
    - 对顶角 —— 对顶角相等
    - 垂线 —— 点到直线的距离
  - 两条直线被第三条直线所截 —— 同位角、内错角、同旁内角
  - 两条直线平行（图形的平移）
    - 过直线外一点有且只有一条直线和已知直线平行
    - 两条直线平行的判定
      - 同位角相等，两直线平行
      - 内错角相等，两直线平行
      - 同旁内角互补，两直线平行
    - 两条直线平行的性质
      - 两直线平行，同位角相等
      - 两直线平行，内错角相等
      - 两直线平行，同旁内角互补
      - 平行线间的距离处处相等

二、总结与反思

1. 命题是对一件事情作出判断的语句. 命题由条件和结论两部分组成，常常写成“如果……那么……”的形式. 正确的命题叫做真命题，不正确的命题叫做假命题. 经过实践验证的真命题称为基本事实，经过演绎推理得到的重要的真命题叫做定理.

2. 本章同时关注两种推理，既关注“借助已有的知识和经验，借助图形的直观，通过操作、度量，运用合情推理或图形运动等方法探索、发现图形可能具有的性质”，也关注从定义和基本事实出发去探索、研究图形性质的演绎推理. 回顾“对顶角相等”的发现与对其正确性的说明，谈谈你对两种推理的认识.

在同一平面内，经过一点有且只有一条直线和已知直线垂直.

直线外一点与直线上各点的连线中，垂线段最短.

3. 在同一平面内，两条直线的位置关系有________和________. 请你借助熟悉的事物和几何图形，对直线的这两种位置关系提出自己的猜想，并加以说明.

4. 用一条直线去截两条直线，构成八个角，其中有四对同位角，两对内错角，两对同旁内角. 我们可借助同位角、内错角的相等以及同旁内角的互补来判定两直线平行.

5. 我们通常借助三角尺上的直角或量角器画已知直线的垂线（以后还有更严谨的作法），用移动三角尺的方法画平行线（这实际上是用同位角相等来保证这两条直线平行）.

6. 判定两条直线平行的方法有：____.

7. 平行线的性质有：____.

8. 图形的平移具有的性质：对应线段平行且相等，对应角相等，对应点所连成的线段平行(或共线)且相等.

复　习　题

A　组

1. 写出下列命题的条件和结论：

(1) 能被 2 整除的数一定是偶数.

(2) 两直线平行，同旁内角互补.

(3) 平行于同一条直线的两条直线平行.

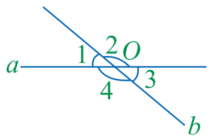
2. 请你举反例说明下列命题是假命题：

(1) 相等的角是直角.

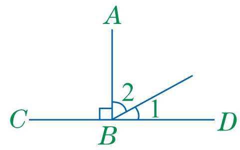
(2) 如果 $a+b=0$，那么 $a=0$，$b=0$.

(3) 如果 $\angle 1>\angle 2$，那么 $\angle 1$ 是钝角.

3. 如图，直线 a，b 交于点 O，$\angle 1=40^\circ$. 求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



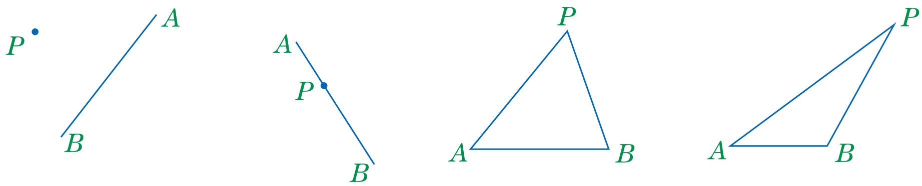
（第 3 题）



（第 4 题）

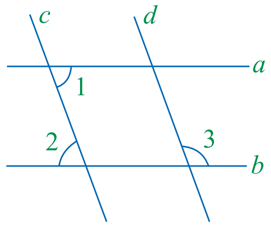
4. 如图，$AB\perp CD$，$\angle 1=30^\circ$. 求 $\angle 2$ 的度数.

5. 在各图中，分别过点 P 画 AB 的垂线.

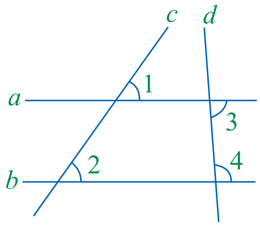


（第 5 题）

6. 如图，直线 $a/\!/b$，$c/\!/d$，$\angle 1=70^\circ$. 求 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的度数.



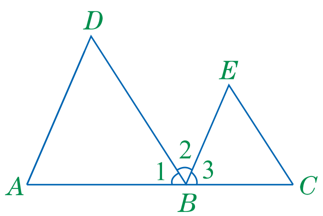
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，$\angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，$\angle 3=85^\circ$. 求 $\angle 4$ 的度数.

8. 如图，填空：



（第 8 题）

(1) ∵ $\angle A=\angle 3$（已知），

∴ ________ // ________（　　　　　　　）.

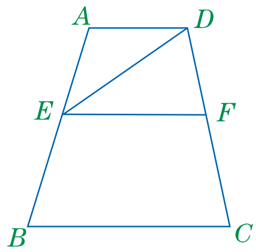
(2) ∵ $\angle 2=\angle E$（已知），

∴ ________ // ________（　　　　　　　）.

(3) ∵ $\angle A+$________$=180^\circ$（已知），

∴ $AD/\!/BE$（　　　　　　　）.

9. 完成下列说理过程，并在括号内填上相应的依据.



（第 9(1)题）

(1) 如图，∵ $\angle ADE=\angle DEF$（已知），

∴ $AD/\!/$________（　　　　　）.

又∵ $\angle EFC+\angle C=180^\circ$（已知），

∴ $EF/\!/$________（　　　　　）.

∴ ________ // ________（　　　　　）.

(2) 如图，∵ $DE/\!/AB$（已知），

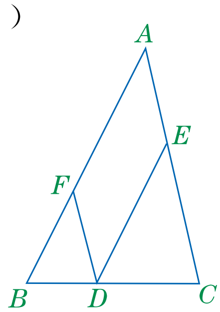
∴ $\angle B=$________，$\angle A=$________，（　　　　　　　）

$\angle$________$=\angle$________（两直线平行，内错角相等），

$\angle$________$+\angle$________$=180^\circ$，

$\angle$________$+\angle$________$=180^\circ$，

$\angle$________$+\angle$________$=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）.



（第 9(2)题）

10. 填空：

(1) 已知：如图，$AB/\!/CD$，$\angle 1=70^\circ$，$\angle 2=55^\circ$. 对 EG 平分$\angle BEF$ 说明理由.

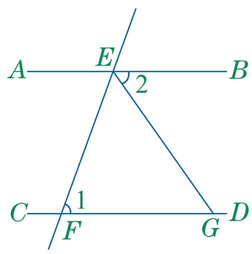
理由：∵ $AB/\!/CD$（已知），

∴ $\angle 1+\angle$________$=180^\circ$（　　　　　　）.

∴ $\angle$________$=180^\circ-\angle 1=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

∵ $\angle 2=55^\circ=\dfrac{1}{2}\angle$________（　　　　　　），

∴ EG 是$\angle BEF$ 的平分线.



（第 10(1)题）

(2) 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$，点 B，E 分别在线段 AC，DF 上.

对$\angle A=\angle F$说明理由.

理由：$\because$ $\angle 1=\angle 2$（已知），

$\angle 3=\angle 2$（　　　　　），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$（　　　　　）.

$\therefore$ ________$/\!/$________（　　　　　）.

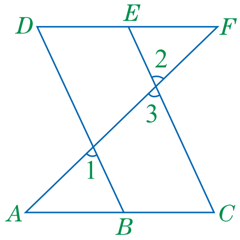
$\therefore$ $\angle C=$________（两直线平行，同位角相等）.

又$\because$ $\angle C=\angle D$（已知），

$\therefore$ ________$=\angle D$（等量代换）.

$\therefore$ $AC/\!/$________（　　　　　）.

$\therefore$ $\angle A=\angle F$（　　　　　）.



（第 10(2)题）

B 组

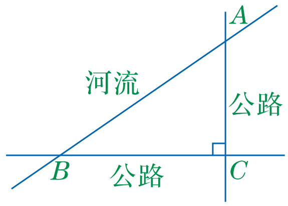
1. 任意画一个三角形 ABC，再延长 BC 至点 E，以点 C 为顶点，在$\angle ACE$内画$\angle ACD=\angle A$. 说明$\angle DCE$等于三角形 ABC 中的哪个角.

2. 如图，点 C 表示村庄，AC，BC 是两条公路，AB 是河流. 点 A 和点 B 处各有一座小桥.

   (1) 量出点 A 到 BC 的图上距离.

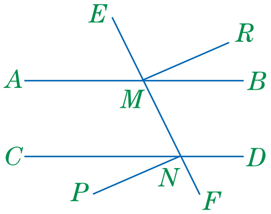
   (2) 量出点 C 到 AB 的图上距离.

   (3) 如果此图是按 1∶1 000 000 的比例画出的，算出(1)和(2)中的实际距离.



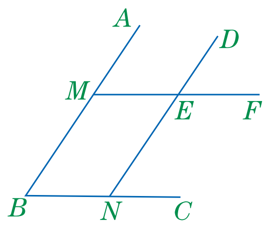
（第 2 题）

3. 如图，已知 $AB/\!/CD$，EF 与 AB，CD 相交于点 M，N，$\angle BMR=\angle CNP$，试说明 $MR/\!/NP$ 的理由.



（第 3 题）

4. 请你阅读并分析下面(1)题的说理过程，然后写出(2)题的说理过程.



（第 4 题）

(1)已知：如图，$AB /\!/ DN$，$MF /\!/ BC$.

对$\angle ABC=\angle DEF$说明理由.

理由：$\because$ $AB /\!/ DN$（已知），

$\therefore$ $\angle ABC=\angle DNC$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because$ $MF /\!/ BC$（已知），

$\therefore$ $\angle DNC=\angle DEF$（两直线平行，同位角相等）.

$\therefore$ $\angle ABC=\angle DEF$（等量代换）.

(2)已知：如图，$AB /\!/ DN$，$\angle ABC=\angle DEF$.

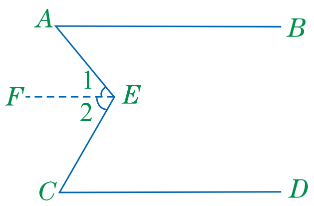
对$BC /\!/ MF$说明理由.

C 组

1. 阅读(1)题的说理过程，写出(2)题的说理过程.

(1)已知：如图，$AB /\!/ CD$.

对$\angle AEC=\angle BAE+\angle DCE$说明理由.



（第 1(1)题）

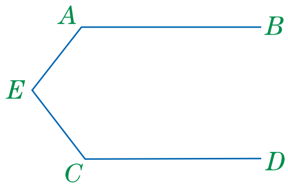
理由：作$EF /\!/ AB$，则有$EF /\!/ CD$（平行于同一条直线的两条直线平行）.

$\therefore$ $\angle 1=\angle BAE$，$\angle 2=\angle DCE$.（两直线平行，内错角相等）

$\therefore$ $\angle AEC=\angle 1+\angle 2=\angle BAE+\angle DCE$（等量代换）.

(2)已知：如图，$AB /\!/ CD$.

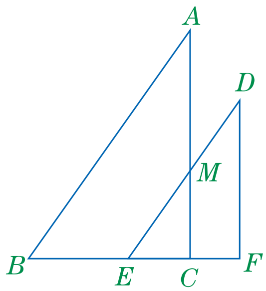
对$\angle BAE+\angle AEC+\angle DCE=360^{\circ}$说明理由.



(第 1(2)题)

2. 已知：如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB /\!/ DE$，$\angle A=\angle D$，$AC \perp BF$，AC 与 DE 相交于点 M.

对 $DF \perp BF$ 说明理由.



(第 2 题)

第八章

整式的乘法

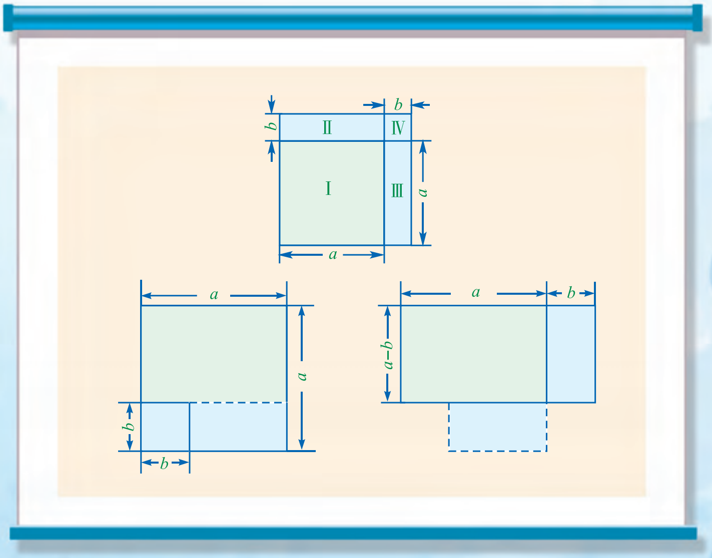
在本章中，我们将学习

- 幂的运算
- 整式的乘法
- 乘法公式
- 科学记数法

你能用下面的图解释这两个公式吗？

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$，

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.



8.1 同底数幂的乘法

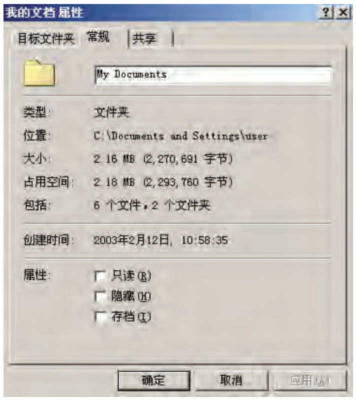
在生活或数学学习中，经常会遇到同底数幂相乘的问题．这一节我们就来研究同底数幂相乘的运算性质．

计算机存储容量的基本单位是字节，用 B 表示．一般用 kB(千字节)、MB(兆字节)或 GB(吉字节)作为储存容量的计量单位，它们之间的关系为

$$1\ \text{kB}=2^{10}\ \text{B},\ 1\ \text{MB}=2^{10}\ \text{kB},\ 1\ \text{GB}=2^{10}\ \text{MB}.$$

那么，1 MB 等于多少字节呢？

这个问题就是计算 $2^{10}\times 2^{10}$．用幂的形式表示，计算结果是什么呢？



一起探究

回顾乘方的意义：$2^3=2\times2\times2$，$2^4=2\times2\times2\times2$．

1．用幂表示下列各式的结果：

（1）$2^4\times2^3=$__________；

（2）$2^{10}\times2^{10}=$__________；

（3）$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=$__________；

（4）$a^2\cdot a^3=$__________．

2．通过上面的计算，关于两个同底数幂相乘的结果，你发现了什么规律？

3．若 m，n 是正整数，根据你发现的规律，用幂的形式表示 $a^m\cdot a^n$．

一般地，对于正整数 m，n，有

$$\begin{aligned}&a^m\cdot a^n\\=\ &(\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{m个a})(\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个a})\\=\ &\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{(m+n)个a}\\=\ &a^{m+n}.\end{aligned}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 是正整数}).$$

同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

利用这个性质可以直接进行同底数幂的乘法运算.

例 1 把下列各式表示成幂的形式：

(1) $2^6 \times 2^3$；　　(2) $a^2 \cdot a^4$；

(3) $x^m \cdot x^{m+1}$；　　(4) $a \cdot a^2 \cdot a^3$.

解：(1) $2^6 \times 2^3 = 2^{6+3} = 2^9$.

(2) $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$.

(3) $x^m \cdot x^{m+1} = x^{m+(m+1)} = x^{2m+1}$.

(4) $a \cdot a^2 \cdot a^3 = a^{1+2+3} = a^6$.

三个或三个以上的同底数幂相乘，幂的运算性质仍然适用.

例 2 太阳系的形状像一个以太阳为中心的大圆盘，光通过这个圆盘半径的时间约为 2×10^4 s，光的速度约为 3×10^5 km/s. 求太阳系的直径.

解：$\quad 2\times3\times10^5\times2\times10^4$

$=12\times10^9$(km).

答：太阳系的直径约为 12×10^9 km.

练　习

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $a^2 \cdot a^3 = a^5$.

(2) $b \cdot b = 2b$.

(3) $a \cdot a^3 = a^3$.

(4) $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$.

2. 计算：

(1) $10^5 \times 10^4$；　　(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4$；

(3) $(-2)^2 \cdot (-2)^5$；　　(4) $b^2 \cdot b^4 \cdot b^5$.

3. 用幂的形式表示下列问题的结果：

(1) 2 个棱长为 2 cm 的正方体的体积的和是________ cm^3.

(2) 9 个棱长为 3 cm 的正方体的体积的和是________ cm^3.

习 题

A 组

1. 计算下列各题，结果用幂的形式表示.

(1) $10^4\times10^7$；　(2) $2^6\times2^5$；

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$；　(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^4\times\left(\frac{1}{5}\right)^5$；

(5) $(-3)^3\times(-3)^4$；　(6) $(-7)^2\times(-7)^4$.

2. 计算：

(1) $x^4\cdot x^8$；　(2) $-d\cdot d^3$；

(3) $a^m\cdot a^{n+1}$；　(4) $a\cdot a^3\cdot a^5$.

3. 计算：

(1) $a^2\cdot a^n\cdot a^{n+1}$；　(2) $x^m\cdot x^{m+1}\cdot x^{m+2}$.

4. 地球的质量约为 5.98×10^{24} kg，太阳质量是地球质量的 3.3×10^5 倍. 求太阳的质量.

B 组

1. (1) 将 $(a+b)^2\cdot(a+b)^3$ 表示成以 $a+b$ 为底的幂.

(2) 将 $(x-y)^4\cdot(y-x)^3$ 表示成以 $x-y$ 为底的幂.

2. 计算：

(1) $x\cdot x^2\cdot x^3+x^2\cdot x^4$；　(2) $x^2\cdot x^5-x\cdot x^2\cdot x^4$.

3. 设 n 是正整数，计算：

(1) $2^{n+1}-2^n$；　(2) $4\times5^n-5^{n+1}$.

8.2 幂的乘方与积的乘方

如果几个同底数幂的指数都相同，那么同底数幂相乘的结果可以用幂的乘方表示. 本节我们探究幂的乘方与积的乘方的运算性质.

根据计算机存储容量单位之间的关系，我们知道：

$$1\ \text{GB}=2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\ \text{B}.$$

一起探究

1. 依据同底数幂乘法的性质，$2^{10}\times2^{10}\times2^{10}=$________.

根据乘方的意义，$2^{10}\times2^{10}\times2^{10}$可以表示为________.

由此，能得到什么结论?

2. $(10^2)^3$ 表示 3 个10^2 相乘，$(10^2)^3=10^{(\quad)}$.

$(a^3)^4$ 表示 4 个 a^3 相乘，$(a^3)^4=a^{(\quad)}$.

3. 观察上面各式中幂指数之间的关系，猜想：若 m，n 是正整数，则 $(a^m)^n=$________.

事实上，根据乘方的意义及同底数幂乘法的性质，对于正整数 m，n，有

$$\begin{aligned}&(a^m)^n\\=&\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}^{n个a^m}\\=&a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n个m}}\\=&a^{mn}.\end{aligned}$$

$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 是正整数）.

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

运用这个性质可以直接进行幂的乘方运算.

例 1 计算：

(1) $(10^3)^4$；　(2) $(c^2)^3$；　(3) $(a^4)^m$.

解：（1）$(10^3)^4=10^{3\times4}=10^{12}$.

（2）$(c^2)^3=c^{2\times3}=c^6$.

（3）$(a^4)^m=a^{4\times m}=a^{4m}$.

例 2 计算：

（1）$x\cdot(x^2)^3$； （2）$a\cdot a^2\cdot a^3-(a^2)^3$.

解：（1）$x\cdot(x^2)^3=x\cdot x^{2\times3}=x\cdot x^6=x^7$.

（2）$a\cdot a^2\cdot a^3-(a^2)^3=a^6-a^6=0$.

先算乘方，再算乘法.

练 习

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

（1）$(a^2)^3=a^5$； （2）$a^2\cdot a^3=a^6$；

（3）$a^3+a^3=a^6$； （4）$(a^m)^n=(a^n)^m$（m，n 都是正整数）.

2. 计算：

（1）$(7^2)^3$； （2）$(b^4)^3$；

（3）$(a^3)^2\cdot a^2$； （4）$(x^m)^4\cdot x^3$；

（5）$(m^2)^n\cdot m^{n+1}$； （6）$x^m\cdot(x^{2m})^3$.

习 题

A 组

1. 填空：

（1）$(3^3)^3=3^{(\quad)}$； （2）$(2^3)^4=2^{(\quad)}$；

（3）$9^4=3^{(\quad)}$； （4）$[(-3)^3]^5=-3^{(\quad)}$.

2. 设 m，n 是正整数，计算：

（1）$(5^8)^n$； （2）$(7^m)^5$；

（3）$(9^8)^n$； （4）$(2^m)^n$；

（5）$(m^2)^n\cdot m^n$； （6）$(y^n)^2\cdot(y^3)^m$.

3. 计算：

（1）$(a^2)^4\cdot a^2+2(a^3)^2\cdot(a^2)^2$；

（2）$3(x^2)^2\cdot x^3-x\cdot(x^2)^3$.

B 组

1. (1) 将$[(a+b)^2]^4$表示成以$a+b$为底的幂.

   (2) 将$[(2x+y)^3]^2$表示成以$2x+y$为底的幂.

2. (1) 已知$(x^2)^m=x^8$，求m.

   (2) 已知$a^m=4$，$a^n=8$，求a^{2m+3n}.

计算$4^6\times0.25^6$.

小明认为$4^6\times0.25^6=(4\times0.25)^6$，马上得出结果为1. 你认为他这样计算有道理吗?

一般地，如果n是正整数，$(ab)^n=a^nb^n$成立吗?

一起探究

1. 观察下面的运算过程，指出每步运算的依据.

$$\begin{aligned}&(3\times7)^2\\=&(3\times7)\cdot(3\times7)\quad(\qquad\qquad\qquad)\\=&(3\times3)\cdot(7\times7)\quad(\qquad\qquad\qquad)\\=&3^2\times7^2.\qquad\qquad\quad(\qquad\qquad\qquad)\end{aligned}$$

2. 按照上面的方法,完成下面的填空.

$(ab)^2=$____________________;

$(ab)^3=$____________________.

3. 试着归纳:如果n是正整数,$(ab)^n=$________.

一般地,若n是正整数,则有

$$\begin{aligned}&(ab)^n\\=&\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n个ab}\\=&\overbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}^{n个a}\cdot\overbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}^{n个b}\\=&a^nb^n.\end{aligned}$$

$(ab)^n=a^nb^n$(n是正整数).

积的乘方,等于各因式乘方的积.

运用这个性质可以直接进行积的乘方运算.

大家谈谈

对三个或三个以上因式积的乘方，积的乘方的性质是否也成立？

例 3 计算：

（1）$(2x)^2$；（2）$(3ab)^3$；

（3）$(-2b^2)^3$；（4）$(-xy^3)^2$；

（5）$(2a^2)^3+(-3a^3)^2+(a^2)^2\cdot a^2$.

解：（1）$(2x)^2=2^2\cdot x^2=4x^2$.

（2）$(3ab)^3=3^3a^3b^3=27a^3b^3$.

（3）$(-2b^2)^3=(-2)^3\ (b^2)^3=-8b^6$.

（4）$(-xy^3)^2=\ (-1)^2\cdot x^2\cdot(y^3)^2=x^2y^6$.

> $-xy^3$ 的系数是-1.

（5）
$$\begin{aligned}&(2a^2)^3+(-3a^3)^2+(a^2)^2\cdot a^2\\=&2^3\cdot(a^2)^3+(-3)^2\cdot(a^3)^2+(a^2)^2\cdot a^2\\=&8a^6+9a^6+a^4\cdot a^2\\=&8a^6+9a^6+a^6\\=&18a^6.\end{aligned}$$

例 4 球体表面积的计算公式是 $S=4\pi r^2$. 地球可以近似地看成一个球体，它的半径 r 约为 6.37×10^6 m. 地球的表面积大约是多少平方米？（π 取 3.14）

解：
$$\begin{aligned}S&=4\pi r^2\\&=4\times3.14\times(6.37\times10^6)^2\\&=4\times3.14\times6.37^2\times10^{12}\\&\approx5.10\times10^{14}(\mathrm{m}^2).\end{aligned}$$

答：地球的表面积大约是 5.10×10^{14} m^2.

练　习

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

（1）$(2a)^2=2a^2$；（2）$(ab^2)^3=a^3b^2$；

（3）$(-3a^2)^3=-9a^4$；（4）$(2ab^2)^2=4a^2b^2$.

2. 计算：

(1) $(3a)^4$；　　(2) $(-2x^2)^3$；

(3) $(-x^2y^3)^3$；　　(4) $(-3x^2)^3\cdot(3x)^2$.

3. 比一比谁算得快，并进行交流.

(1) $2^5\times5^5$；　　(2) $(-4)^4\times0.25^4$；

(3) $8^{2\,011}\times0.125^{2\,011}$；　　(4) $(-4)^6\times0.25^5$.

习　题

A　组

1. 计算：

(1) $(x^2y)^5$；　　(2) $(-3x)^3$；

(3) $-(y^4)^2$；　　(4) $-(m^n)^3$.

2. 计算：

(1) $(-mn^2)^3$；　　(2) $(x^3)^2\cdot(x^2)^3$；

(3) $(2ab^3)^2\cdot(ab)^2$；　　(4) $-3x^2\cdot(-x)^2$.

3. 计算：

(1) $(-x^2)^3+(-3x^2)^2\cdot x^2$；

(2) $(ab^2)^3+(ab^2)^2\cdot ab^2$.

B　组

1. 计算：

(1) $5^9\times0.2^8$；　　(2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^9\times\left(\frac{3}{2}\right)^9$；　　(3) $2^2\times4^2\times5^6$.

2. 已知 $3^{x+1}\times5^{x+1}=15^{2x-3}$，求 x 的值.

8.3 同底数幂的除法

我们知道 $5^5 \div 5^2 = 5^3$. 如果将 $a^m \div a^n$ 表示成以 a 为底的幂的形式，结果是什么呢？

一起探究

1. 计算下列各题，用幂的形式表示结果，并说明计算的依据.

(1) $5^5 \div 5^3 =$__________________.

(2) $(-3)^5 \div (-3)^3 =$_______________.

(3) 如果 $a \neq 0$，那么 $a^6 \div a^3 =$__________________.

(4) 如果 $a \neq 0$，那么 $a^{10} \div a^4 =$________________.

2. 观察上面计算结果中幂指数之间的关系，如果 $a \neq 0$，m，n 是正整数，且 $m > n$，那么 $a^m \div a^n =$________.

事实上，根据除法和乘方的意义，有

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{(m-n)\text{个}a} = a^{m-n}.$$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$，m，n 是正整数，且 $m > n$).

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

设 $a \neq 0$，对于正整数 m，n，当 $m < n$ 时，

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(n-m)\text{个}a}} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

即

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

观察与思考

已知 m，n 是正整数，$a\neq0$，为了使 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 在 $m\leqslant n$ 时仍然成立：

（1）当 $m<n$ 时，$m-n<0$，应该如何规定 a^{m-n} 的意义？

（2）当 $m=n$ 时，$m-n=0$，应该如何规定 a^0 的意义？

我们规定：

$a^0=1(a\neq0)$，即任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq0$，$p$ 是正整数)，即任何不等于 0 的数的 $-p$ 次幂，等于这个数的 p 次幂的倒数.

这样，对于任意正整数 m，n，都有：

> $\boldsymbol{a^m\div a^n=a^{m-n}}$ **(**$\boldsymbol{a\neq0}$**，**$\boldsymbol{m}$**，**$\boldsymbol{n}$ **是正整数).**
>
> **同底数幂相除，底数不变，指数相减.**

例 计算：

（1）$10^6\div10^2$；（2）$2^3\div2^5$；

（3）$5^m\div5^{m-1}$；（4）$a^n\div a^{n+1}$ $(a\neq0)$.

解：（1）$10^6\div10^2=10^{6-2}=10^4$.

（2）$2^3\div2^5=2^{3-5}=2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

（3）$5^m\div5^{m-1}=5^{m-(m-1)}=5$.

（4）$a^n\div a^{n+1}=a^{n-(n+1)}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

练 习

1. 下面的运算是否正确？如果不正确，请改正过来.

（1）$a^4\div a^3=a^7$.（2）$a^2\div a^5=a^{10}$.

（3）$a\div a^4=a^3$.（4）$a^6\div a^3=a^2$.

2. 计算：

(1) $a^6\div a^4$；　　(2) $x^3\div x^5$；

(3) $(-10)^8\div(-10)^4$；　　(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4\div\left(-\frac{1}{3}\right)^6$.

3. 将 2^3 分别除以 2^2，2^3，2^4，结果各是多少？

习　题

A　组

1. 下面的运算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(-1)^0=-1$.　　(2) $(-2)^{-3}=\frac{1}{2^3}$.

(3) $5^{-1}=-5$.　　(4) $(-3)^{-4}=3^4$.

2. 计算：

(1) $10^8\div10^3$；　　(2) $3^3\div3^5$；　　(3) $10^0\div10^2$.

3. 计算：

(1) $(a^3)^2\div a^4$；　　(2) $(x^2)^2\cdot x\div x^5$.

4. 计算：

(1) $2^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$；　　(2) $2^{-2}+(3\ 721-4\ 568)^0$.

B　组

1. 计算：

(1) $(x^2)^6\div x^7$；　　(2) $(a^3)^2\div(a^4\cdot a^2)$.

2. 计算：

(1) $(x-2y)^m\div(x-2y)^5$　$(x-2y\neq0)$；

(2) $(ab)^6\cdot(ab)^2\div(ab)^7$.

3. 计算：

(1) $2^3\div2^{-2}$；　　(2) $a^3\cdot a^2\div a^{-3}$.

8.4 整式的乘法

整式包括单项式和多项式，因此，整式乘法可分为单项式与单项式相乘、单项式与多项式相乘和多项式与多项式相乘.

试着做做

根据乘法的运算律和同底数幂相乘的运算性质计算：

（1）$2a \cdot 3a=$____________$=$____________.

（2）$2a \cdot 3ab=$____________$=$____________.

（3）$4xy \cdot 5x^2y=$____________$=$____________.

一般地，我们有：

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，其余字母连同它们的指数作为积的一个因式.

例 1 计算：

（1）$4x \cdot 3xy$；（2）$(-2x) \cdot (-3x^2y)$.

解：（1）
$$\begin{aligned}&4x \cdot 3xy\\=&(4\times3) \cdot (x \cdot x) \cdot y\\=&12x^2y.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&(-2x) \cdot (-3x^2y)\\=&[(-2)\times(-3)] \cdot (x \cdot x^2) \cdot y\\=&6x^3y.\end{aligned}$$

例 2 计算：

（1）$-2a \cdot \frac{1}{2}ab^2 \cdot 3a^2bc$；（2）$(-ab^2)^2 \cdot (-5ab)$.

解：（1）
$$\begin{aligned}&-2a \cdot \frac{1}{2}ab^2 \cdot 3a^2bc\\=&(-2)\times\frac{1}{2}\times3 \cdot (a \cdot a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot c\\=&-3a^4b^3c.\end{aligned}$$

(2) $(-ab^2)^2\cdot(-5ab)$

$=(-1)^2\cdot a^2\cdot b^4\cdot(-5)ab$

$=(-5)(a^2\cdot a)(b^4\cdot b)$

$=-5a^3b^5$.

练　习

1. 下面的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $2x^2\cdot 3x^3=5x^5$.　　(2) $4a^3\cdot a^4=4a^{12}$.

(3) $2x\cdot 5x^2=10x^2$.　　(4) $6a^4\cdot 2a^2=12a^2$.

2. 计算：

(1) $2x^2\cdot(-xy)$；　　(2) $(-2a^2b)\cdot\frac{1}{4}abc$；

(3) $(-2xy^2)\cdot(3x^2y)^2$；　　(4) $(-2a^2c)^2\cdot(-3ab^2)$.

习　题

A　组

1. 计算：

(1) $ab\cdot a^2$；　　(2) $\frac{6}{5}a^3\cdot 5bc^2$；

(3) $-\frac{1}{2}xy^2\cdot(-5xy)$；　　(4) $(-2x^3yz)\cdot xy^2$.

2. 计算：

(1) $(-a)\cdot(-a)^2\cdot a^3$；　　(2) $(-xy)\cdot\frac{1}{2}x^2y\cdot 4xy^2$；

(3) $2mn\cdot\left(-\frac{1}{2}mn\right)\cdot(-3n)$；　　(4) $(-3a^2)\cdot 2ab^3\cdot\left(-\frac{1}{3}a^3b\right)$.

3. 计算：

(1) $ab\cdot(-a)^2$；　　(2) $4ab^2\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)^2$；

(3) $\frac{1}{2}xy\cdot(4xy^2)^2$；　　(4) $(-3x^2y)\cdot\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2$.

B 组

计算：

（1）$(-3xy^2)^2+(-4xy^3)(-xy)$；

（2）$(2xy^2)(-3xy^2)+(5xy^3)(-xy)$.

怎样计算 $m(a+b)$ 呢？

m 是一个单项式，$a+b$ 是一个多项式，这是一个单项式与多项式相乘的问题.

由于字母 m，a，b 都代表数，所以可以用分配律进行计算，即

$$m(a+b)=ma+mb.$$

大家谈谈

1. 观察图 8-4-1，请解释等式 $m(a+b)=ma+mb$ 的几何意义.

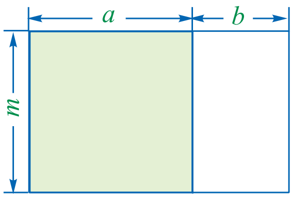


图 8-4-1

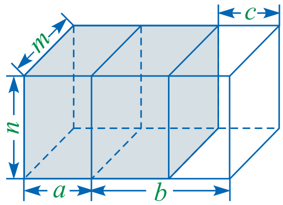


图 8-4-2

2. 计算 $mn(a+b-c)$，并根据图 8-4-2，对这个结果进行解释.

单项式与多项式相乘，用单项式去乘多项式的每一项，再把积相加.

例 3 计算：

（1）$ab(a^2+b^2)$；　　（2）$-x(2x-3)$.

解：（1）$ab(a^2+b^2)$

$=ab\cdot a^2+ab\cdot b^2$

$=a^3b+ab^3$.

（2）$-x(2x-3)$

$=(-x)\cdot(2x)+(-x)\cdot(-3)$

$=-2x^2+3x$.

例 4 先化简，再求值：

$$a^2(a+1)-a(a^2-1).$$

其中，$a=5$.

解：$a^2(a+1)-a(a^2-1)$

$=a^3+a^2-a^3+a$

$=a^2+a.$

当 $a=5$ 时，原式$=5^2+5=30$.

练 习

1. 计算：

(1) $8b^2(2a^2-ab-b^2)$； (2) $\frac{2}{3}ab^2(3a-6b)$.

2. 先化简，再求值：

$$2x(x-3y-1)+y(6x-y+2).$$

其中，$x=-3$，$y=2$.

习 题

A 组

1. 计算：

(1) $3x(4x^2y-2xy^2)$； (2) $3a(2a^2-a+2)$；

(3) $(-2ab)^2\cdot(3a+2b-1)$； (4) $\left(\frac{3}{4}xy-\frac{1}{2}y-y^2\right)\cdot(-4x)$.

2. 计算：

(1) $a(a-b)+3b(a+4b)$；

(2) $3a(a^2+3a-2)-3(a^3+2a^2-a+1)$；

(3) $2x(-xy)^2-x^2(x^2y^2-y^2)$.

3. 先化简，再求值：

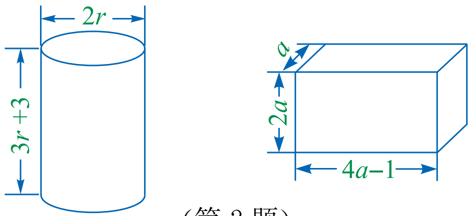
$$ab(ab-2a+2)-2b(a^2b-2ab+2a).$$

其中，$a=-1$，$b=-2$.

4. 解方程：$x(x-3)+2x(x+2)=3x^2-5$.

B 组

1. 计算：$2ab(a^2b+ab-ab^2)-ab^2(a^2-2ab+2a)$.
2. 计算下列物体的体积和表面积：



（第 2 题）

张伯伯准备把长为 m m，宽为 a m 的长方形鱼塘进行扩建，使得长再增加 n m，宽再增加 b m（图 8－4－3）.

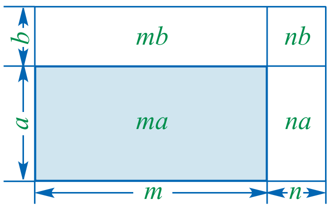


图 8－4－3

一起探究

1. 试用不同的方法表示扩建后鱼塘的面积.
2. 对于扩建后鱼塘的面积得到了下面四种结果：

（1）$(m+n)(a+b)$；　　（2）$(m+n)a+(m+n)b$；

（3）$(a+b)m+(a+b)n$；　　（4）$ma+mb+na+nb$.

请你结合图 8－4－3 对这些结果给出合理的解释.

3. $(m+n)(a+b)$是两个多项式相乘，用分配律说明下面的等式成立：

$$(m+n)(a+b)=ma+na+mb+nb.$$

大家谈谈

多项式与多项式相乘是怎样化为单项式与单项式相乘的？

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

多项式与多项式相乘的过程可以示例为：

$$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$$

例 5 计算：

(1) $(x-2)(x+1)$；　　　　(2) $\left(\frac{1}{3}a-2\right)(3a-2)$.

解：(1) $(x-2)(x+1)$

$=x^2+x-2x-2$

$=x^2-x-2$.

(2) $\left(\frac{1}{3}a-2\right)(3a-2)$

$=a^2-\frac{2}{3}a-6a+4$

$=a^2-\frac{20}{3}a+4$.

例 6 计算：

(1) $(x+3y)(2x-y)$；　　　　(2) $(-3x+2b)(2x-4b)$.

解：(1) $(x+3y)(2x-y)$

$=2x^2-xy+6xy-3y^2$

$=2x^2+5xy-3y^2$.

(2) $(-3x+2b)(2x-4b)$

$=-6x^2+12bx+4bx-8b^2$

$=-6x^2+16bx-8b^2$.

练　习

1. 计算：

(1) $(x+2)(2x-4)$；　　　　(2) $(x+2y)(3a+4b)$.

2. 先化简，再求值：

$$5x(2x+1)-(2x+3)(5x-1).$$

其中，$x=13$.

习　题

A　组

1. 计算：

(1) $(x-1)(x-2)$；　　　　(2) $(x+3)(x-4)$；

(3) $(3x+4)(2x-1)$；　　　　(4) $(x+y)(2a-b)$.

2. 计算：

(1) $(x+y)(2x-3y)$；　　(2) $(4x-3y)(y+4x)$；

(3) $(x+y)^2$；　　(4) $(a+m)(a-m)$.

3. 计算：

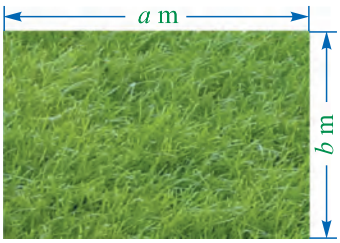
(1) $(a-1)(a-2)-a(a-5)$；　　(2) $3x(x+2)-(x+1)(3x-4)$.

4. 解方程：

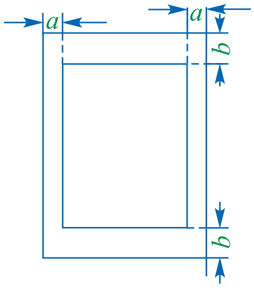
(1) $6x(x-2)-(x-2)(3x-1)=3x^2-8$；

(2) $(x-2)(2x-5)-2(x-1)(x+1)=3$.

5. 公园内有一块长方形的草坪，如图，它的长为 a m，宽为 b m. 现计划扩建，将这块草坪的长和宽都增加 10 m. 扩建后，草坪的面积将增加多少平方米？



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 我们用的书除中间的文字区域外，通常在它的左右两边都留有宽为 a 的空白，顶部和底部都留有宽为 b 的空白，如图. 若纸的长和宽分别为 x，y，求中间文字区域的面积.

B 组

1. 计算：

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$；　　(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. 计算：

(1) $(a+b)^3$；　　(2) $(a-b)^3$.

8.5 乘法公式

在进行多项式与多项式相乘时，往往会遇到一些特殊形式的多项式相乘，其结果也很特殊．我们把它们作为乘法公式直接使用．

由多项式的乘法，得

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

两个二项式相乘，一般应有四项．那么两个二项式具备什么特征，合并同类项后的结果是一个二项式呢？

一起探究

1．计算：

（1）$(x+1)(x-1)=$______________．

（2）$(a+2)(a-2)=$______________．

（3）$(2x+1)(2x-1)=$______________．

（4）$(a+b)(a-b)=$______________．

2．上面四个式子中，两个乘式之间有什么特点？

3．乘积合并同类项后是几项式？这个多项式有什么特点？

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差．

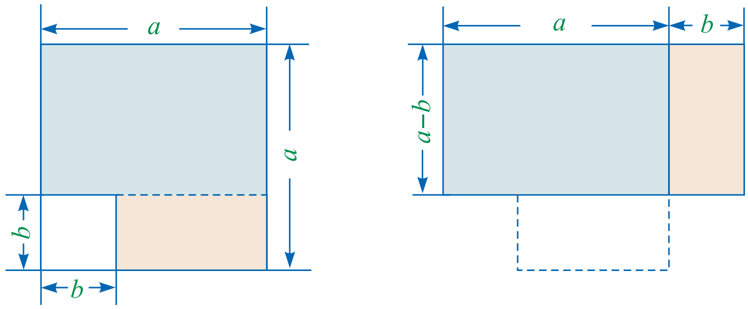
这个公式叫做平方差公式．

观察与思考

如图 8-5-1(1)，在一个边长为 a 的正方形中，剪去一个边长为 b 的小正方形，再将余下的部分剪拼成一个长方形(图 8-5-1(2))．

（1）两个图形(着色部分)的面积之间有什么关系？

（2）请你结合图形，对平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 进行解释．



（1）　　　　　　（2）

图 8－5－1

做一做

按要求填写下面的表格：

算　式	与平方差公式中 a 对应的项	与平方差公式中 b 对应的项	写成“a^2-b^2”的形式	计算结果
$(m+2)(m-2)$				
$(2m+3)(2m-3)$				
$(x+2y)(-x+2y)$				
$(1+3y)(1-3y)$				

例 1　计算：

（1）$(2x+y)(2x-y)$；

（2）$\left(\frac{2}{3}x+5y\right)\left(\frac{2}{3}x-5y\right)$；

（3）$(-5a+3b)(-5a-3b)$.

解：（1）

$$\begin{aligned}&(2x+y)(2x-y)\\=&(2x)^2-y^2\\=&4x^2-y^2.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3}x+5y\right)\left(\frac{2}{3}x-5y\right)\\=&\left(\frac{2}{3}x\right)^2-(5y)^2\\=&\frac{4}{9}x^2-25y^2.\end{aligned}$$

(3) $(-5a+3b)(-5a-3b)$

$=(-5a)^2-(3b)^2$

$=25a^2-9b^2$.

练 习

1. 计算：

(1) $(x-2)(x+2)$；　　(2) $(x+2y)(x-2y)$；

(3) $(3m+2n)(3m-2n)$；　　(4) $(4a+3b)(3b-4a)$.

2. 用平方差公式计算：

(1) $998\times1\ 002$；　　(2) 395×405.

习 题

A 组

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

(1) $(-m-2n)(m-2n)=m^2-2n^2$.

(2) $(-a+b)(-a-b)=-a^2-b^2$.

2. 计算：

(1) $(3x+4)(3x-4)$；　　(2) $(3a-4b)(-4b-3a)$；

(3) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{3}b\right)$；　　(4) $\left(a^2+\frac{1}{2}b^2\right)\left(a^2-\frac{1}{2}b^2\right)$.

3. 用平方差公式计算：

(1) 99×101；　　(2) 39.8×40.2.

4. 解下列方程：

(1) $4x^2+x-(2x-3)(2x+3)=1$；

(2) $2(x+3)(3-x)+2x+2x^2=20$.

B 组

1. (1) 用简便方法计算：

$19\times21=$______；$29\times31=$______；$39\times41=$______；$49\times51=$______.

（2）你发现了什么规律？请用含有字母的式子表示出来.

2. 运用平方差公式计算：$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)$.

3. 说明：两个相邻的奇数的平方差一定是 8 的倍数.

回顾多项式与多项式的乘法，计算$(a+b)^2$：

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2\\
=&(a+b)(a+b)\\
=&a(a+b)+b(a+b)\\
=&a^2+ab+ab+b^2\\
=&a^2+2ab+b^2.
\end{aligned}
$$

一起探究

（1）请你仿照上面的方法，计算$(a-b)^2$. 在上面的等式中用$-b$替换b，看看得到的结果是否相同.

（2）比较$(a+b)^2$，$(a-b)^2$的计算结果，在结构上各有什么特点？

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;}$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.}$$

两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们的积的 2 倍.

这两个等式分别叫做两数和、两数差的**完全平方公式**.

观察与思考

1. 如图 8－5－2，将边长为 $a+b$ 的正方形分割成四部分，请用不同的方法分别表示出这个正方形的面积.

2. 请给出完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的几何解释.

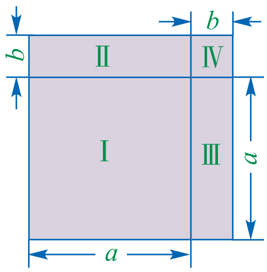


图 8－5－2

做一做

填写下面的表格：

算式	与公式中 a 对应的项	与公式中 b 对应的项	利用公式得出计算结果
$(2x+3)^2$			
$(m+2n)^2$			
$(2b-c)^2$			
$(3m-2)^2$			

例 2 计算：

（1）$(x+3y)^2$；（2）$\left(\frac{1}{3}ab-cm\right)^2$；（3）$(-4a-3b)^2$.

解：（1）
$$\begin{aligned}&(x+3y)^2\\=&x^2+2x(3y)+(3y)^2\\=&x^2+6xy+9y^2.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{3}ab-cm\right)^2\\=&\left(\frac{1}{3}ab\right)^2-2\left(\frac{1}{3}ab\right)(cm)+(cm)^2\\=&\frac{1}{9}a^2b^2-\frac{2}{3}abcm+c^2m^2.\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}&(-4a-3b)^2\\=&(4a+3b)^2\\=&(4a)^2+2(4a)(3b)+(3b)^2\\=&16a^2+24ab+9b^2.\end{aligned}$$

还有其他计算方法吗？

练 习

1. 用完全平方公式计算：

（1）$(1+a)^2$；（2）$(2a-1)^2$；（3）$(3a+b)^2$；

（4）$\left(2n-\frac{1}{4}\right)^2$；（5）$\left(2n-\frac{2}{3}m\right)^2$；（6）$\left(-2x-\frac{1}{3}y\right)^2$.

2. 用完全平方公式计算：

（1）98^2；　　（2）101^2.

习　题

A　组

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，请改正过来.

（1）$(a+b)^2=a^2+b^2$.　　（2）$(a-b)^2=a^2-b^2$.

（3）$(-a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.　　（4）$(-a-b)^2=a^2-2ab-b^2$.

2. 计算：

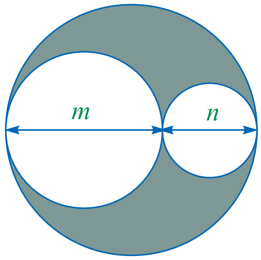
（1）$\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2$；　　（2）$(2x+5)^2$；　　（3）$(3y-4)^2$.

3. 用完全平方公式计算：

（1）201^2；　　（2）898^2.

4. 一个正方形，如果边长增加 3 m，它的面积就增加 39 m^2. 求这个正方形的边长.

5. 三个圆的位置如图所示，m，n 分别是两个较小的圆的直径，$m+n$ 是最大的圆的直径. 求图中阴影部分的面积.



（第 5 题）

B　组

1. 计算：

（1）$(x+5)^2-(x-5)^2$；

（2）$(a+b+c)(a+b-c)$；

（3）$(a+b-c)(a-b+c)$.

2. 计算：

（1）$(a+b+c)^2$；　　（2）$(a+b)^2(a-b)^2$.

3. 在计算 15×15，25×25，…，95×95 时，小明是这样做的：

$$15\times15=1\times2\times100+25=225,$$
$$25\times25=2\times3\times100+25=625,$$
$$35\times35=3\times4\times100+25=1\ 225,$$
$$\vdots$$

请你运用整式乘法的有关知识说明小明做法的正确性.

读一读

杨辉三角

完全平方公式为：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

由此，我们自然会想到 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$，$(a+b)^5$，…的展开式是什么.

根据多项式乘法，我们把 $(a+b)^n$（$n=0$，1，2，…）的展开式及其系数写成下面的形式：

二项式的乘方	展开结果	系数
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$a+b$	1　1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1　2　1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1　3　3　1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1　4　6　4　1
⋮	⋮	⋮

在展开式中，a 是按其幂指数由高到低排列的，b 是按其幂指数由低到高排列的；首项 a 的次数与末项 b 的次数相同，都等于二项式乘方的次数；各项中 a，b 的指数和也等于二项式乘方的次数；展开式中的项数比二项式乘方的次数多 1.

展开式各项的系数的规律：每一行首末两项系数都是 1，中间各项系数等于它上一行相邻的两个系数之和，第 n 行系数的和等于 2^{n-1}. 按照这个规律，可以把 $(a+b)^n$（$n=6$，7，…）的展开式中各项的系数直接写出来. 例如，$(a+b)^6$ 的展开式中，各项的系数分别为 1，6，15，20，15，6，1.

上面这个三角形系数表叫做杨辉三角形，又称为贾宪三角形，在国外被称为帕斯卡三角形. 杨辉三角形还有许多奇妙的性质，留给有兴趣的同学继续探索吧！

8.6 科学记数法

我们经常会遇到一些较大的数或较小的数，这些数读写都很不方便，这就需要一种新的记数方法——科学记数法．下面，我们将学习用科学记数法表示数．

观察与思考

观察下面问题中出现的数．

（1）据我国第六次人口普查的统计数据，到 2010 年 10 月底，我国人口约为1 370 000 000人，其中城镇人口约为 666 000 000 人．

（2）人体红细胞的平均直径为 0．000 007 7 m．

（3）1 μs(微秒)＝0．000 001 s．

（4）纳米是长度单位，1 nm(纳米)＝0．000 001 mm．

像 1 370 000 000 这样的大数和 0．000 001 这样的小数，怎样表示更简单些呢？

我们可以借助于 10 的幂的形式来表示这些数．如：

$$1\ 370\ 000\ 000=1.37\times10^{9},$$

$$666\ 000\ 000=6.66\times10^{8},$$

$$0.000\ 007\ 7=7.7\times10^{-6},$$

$$0.000\ 001=1\times10^{-6}.$$

为了记数方便和表示形式的规范，我们作如下规定：

把一个较大的数或较小的数写成 $a\times10^{n}$ $(1\leqslant a<10$，n 为整数)的形式，这种记数方法叫做**科学记数法**(scientific notation)．

例 1 用科学记数法表示下列各数：

（1）3 515 000；　　（2）10 300 000；

（3）0．000 005；　　（4）0．000 000 012．

解：（1）$3\ 515\ 000=3.515\times1\ 000\ 000=3.515\times10^{6}$．

（2）$10\ 300\ 000=1.03\times10\ 000\ 000=1.03\times10^{7}$．

(3) $0.000\ 005=5\times0.000\ 001=5\times\dfrac{1}{1\ 000\ 000}=5\times10^{-6}$.

(4) $0.000\ 000\ 012$

$=1.2\times0.000\ 000\ 01$

$=1.2\times\dfrac{1}{100\ 000\ 000}$

$=1.2\times10^{-8}$.

例 2 光年是一个长度单位，是指光行走一年的距离，一般被用于计算恒星间的距离.

(1) 已知光的速度约为 3×10^{5} km/s，如果按 1 年为 365 天，每天为 8.64×10^{4} s 计算，1 光年约等于多少千米?

(2) 太阳系以外离地球最近的恒星是比邻星，它与地球的距离大约为 3.99×10^{13} km. 比邻星与地球的距离约合多少光年?

解：(1) $3\times10^{5}\times8.64\times10^{4}\times365$

$=9\ 460.8\times10^{9}$

$\approx9.46\times10^{12}$(km) .

结果用科学记数法表示.

(2) $\dfrac{3.99\times10^{13}}{9.46\times10^{12}}$

$\approx0.422\times10$

$=4.22$(光年).

答：1 光年约等于 9.46×10^{12} km，比邻星与地球的距离约合 4.22 光年.

练 习

1. 用科学记数法表示下列各数：

350 000，2 400 000，506 000，100 000 000.

2. 用科学记数法表示下列各数：

0.000 000 009，0.000 57，0.000 001 09.

3. 纳米技术是能够操作细小到 0.1 nm～100 nm 物件的一类高新技术. 纳米是长度单位，1 nm 等于 0.000 000 001 m. 请用科学记数法表示 0.000 000 001.

4. 在人体内，某种细胞的直径是 0.000 001 56 m. 请用科学记数法表示 0.000 001 56.

习 题

A 组

1. 用科学记数法表示下列各数：

   (1) 2 400 000；　　(2) 110 000 000.

2. 用科学记数法表示下列各数：

   (1) 0.000 000 001 12；　　(2) 0.000 000 127；

   (3) 0.000 000 081 3；　　(4) 0.000 000 000 33.

3. 请你用科学记数法表示下列横线上的数：

   (1) 地球得到太阳释放出的能量，相当于全世界所有电站总发电量的<u>100 000</u>倍.

   (2) 人的大脑皮层约有<u>14 000 000 000</u>个神经细胞(神经元). 一个人如果活 100 岁，经常使用的脑神经细胞只不过有<u>1 000 000 000</u>多个.

   (3) 在标准状况下，空气的密度是<u>0.001 293</u> g/cm^3.

B 组

1. 某圆形湖面的半径为 5×10^3 m，请计算湖面的面积.（π 取 3.14）
2. 太阳可以近似地看成球体. 已知太阳的半径约为 6.96×10^8 m，太阳的体积大约是多少？（π 取 3.14，$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其中，V，r 分别为球的体积与半径.）
3. 光的速度约为 3×10^5 km/s，太阳光照射到地球上大约需要 5×10^2 s. 地球与太阳的距离大约是多少？

回顾与反思

一、知识结构

- 整式的乘法
  - 幂的运算性质
    - 同底数幂相乘：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
    - 幂的乘方：$(a^m)^n = a^{mn}$
    - 积的乘方：$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
    - 同底数幂相除：$a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0)$
  - 整式乘法
    - 单项式乘单项式
    - 单项式乘多项式（用分配律转化 → 单项式乘单项式）
    - 多项式乘多项式（用分配律转化 → 单项式乘多项式）
    - 乘法公式
      - $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
      - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
  - 科学记数法：$N = a \times 10^n (1 \leqslant a < 10, n$是整数$)$

二、总结与反思

1. 幂的运算性质是从特殊到一般归纳得到的.

2. 整式相乘的结果仍然是整式. 整式相乘的过程，实质是利用分配律，逐步向单项式乘单项式转化的过程，如

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

3. 利用乘法公式进行整式的乘法运算时，因为公式中的字母可以是数或字母，也可以是一个整式，所以，在使用公式时，要注意符合公式的结构特征.

4. 同底数幂相乘的性质是______________________________；

同底数幂相除的性质是______________________________；

幂的乘方的性质是______________________________；

积的乘方的性质是______________________________.

三、注意事项

1. 运用乘法公式进行计算时，有时需要对相乘的多项式进行变形，使其符合公式的条件.

2. 在幂的运算性质中，在规定 $a^0=1$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$时，要求 $a\neq0$.

复 习 题

A 组

1. 计算：

(1) $a^m a^{n+2}$；　　(2) a^2a^3a；

(3) $(-m^3)^2$；　　(4) $(-2a^2b)^3$；

(5) $(-a)^2(-a^2)^2a$；　　(6) $(x^2)^3x\div x^4$.

2. 计算：

(1) $(-3x)(6x^2)$；　　(2) $(-2a^2b)(-3ab)$；

(3) $\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)(-9x^2)$；　　(4) $a(b+c-2)$；

(5) $(-x)(2x+1)$.

3. 计算：

(1) $(x+2)(x-3)$；　　(2) $(2a+3b)(2a-5b)$；

(3) $(3x-2)(4x+5)$；　　(4) $(2a+b)(c+2d)$；

(5) $(5x+y)(5x-y)$；　　(6) $\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}y\right)\left(\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{3}x\right)$；

(7) $\left(2a+\dfrac{1}{2}b\right)^2$；　　(8) $\left(\dfrac{2}{3}c-\dfrac{1}{2}d\right)^2$.

4. 计算：

(1) $x(3x^2+x)-x^2(3x+2)$；

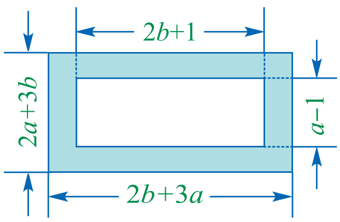
(2) $(x+2)^2-x(x-2)$；

(3) $4(x-2)^2-(2x+3)(2x-3)$；

(4) $(1+3a)(1-3a)+(1+3a)^2$.

5. 计算图中阴影部分的面积.

6. 某种电子计算机每秒可进行 4×10^9 次运算. 它工作 5×10^2 s，可进行多少次运算？



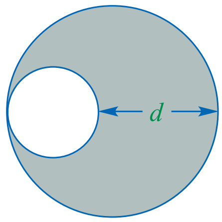
(第 5 题)

7. 一种光盘的存储容量是每张 700 MB. 如果每本书按 2×10^5 个汉字计算，一张光盘能存储多少本这样的书？（1 个汉字占 2 字节）

8. 如图，大圆的直径为 a，两圆直径之差为 d.

(1) 求小圆的直径及阴影部分的面积 S.

(2) 当 $a=5$ cm，$d=3$ cm，π 取 3.14 时，求 S 的近似值.



（第 8 题）

9. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 100 000 000；　　(2) 152 400 000；

(3) 0.000 009 075；　　(4) 0.000 000 000 063.

B 组

1. 计算：$(a-b+c)^2$.

2. 已知 $a+b=3$，$a^2+b^2=5$，求 ab 的值.

3. 已知 $x+y=10$，$xy=24$，求 x^2+y^2 的值.

4. 已知 $x^2-px+ab=(x+a)(x+b)$，用 a，b 表示 p.

5. 已知 a，b 满足 $(a+b)^2=1$ 和 $(a-b)^2=25$，求 a^2+b^2+ab 的值.

6. 把 20 cm 长的一根铁丝分成两段，将每一段围成一个正方形. 如果这两个正方形的面积之差是 5 cm^2，求这两段铁丝的长.

C 组

1. 计算：$999\times999+1\,999$.

2. (1) 利用多项式乘法将 $(x+1)(x+2)(x+3)$ 展开.

(2) 在上面展开式中，x^2，x 的系数及常数项与 1，2，3 的关系分别是什么？

3. 证明 $81^4-27^5-9^7$ 能被 5 整除.