普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–1

几何证明选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　罗才忠　冼词学　范登晨　高存明

责任编辑　　龙正武

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4-1

B 版

几何证明选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

·

人民教育出版社　出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京瑞诚印刷有限公司印装　全国新华书店经销

·

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：3.75　字数：84 000

2007 年 4 月第 2 版　2010 年 4 月第 16 次印刷

ISBN 978-7-107-18837-4
G·11927（课）　定价：4.00元

本册导引

在初中，我们通过观察，直观地研讨了空间图形的基本概念和性质，并在适当的时候，揭示了它们之间的逻辑关系．首先探索了平行线的基本性质和三角形全等的条件，后来又研究了相似形的性质，主要是三角形相似的条件．人们在长期研究图形性质的过程中，发现图形性质之间存在着逻辑关系，只要承认若干条图形的基本性质是对的，则其他的图形的性质都可以从这些基本性质一步步地推演出来．这方面，古希腊几何学家作出了杰出的贡献．主要反映在欧几里得的《原本》上．这部著作，在人类历史上第一次给出了几何学严格的逻辑叙述．在长达两千多年时间中，一直是学习几何学的唯一指南，是培养学生逻辑思维能力的理想园地．

应该指出，我国数学家在几何学方面有着极其辉煌的成就．在我国劳动人民丰富实践的基础上，数学家们由观天测地，面积、容积的度量以及计时的研究，建立了具有我国特色的几何学体系．以长方形的计算方法为基础，由出入相补原理推导出平行四边形、梯形的面积的计算公式，由正方形面积的计算推出勾股定理，由对测量高度和距离的研究建立了平行与相似的理论；由祖暅原理推导出柱体、圆柱、圆锥和球的体积．我国对几何学的研究是走着一条“寓理于算”的道路，不仅通过面积和体积的计算推出许多图形的性质，而且在解决几何问题的过程中应用列方程解方程的代数原理．

推理的基本要求是推理的前提必须正确．前提正确，推出的结论才被认为是正确的．确定正确的前提也并非易事．我们学习相似的基础是线段的度量，即两条线段的比．初看起来，长度的度量是十分简单的事，但细加追究，就会发现大有文章．在几何学的发展中，古希腊毕达哥拉斯学派早先认为两个线段的比值一定是一个分数．后来他们进行了很长时期的钻研，才彻底弄清楚长度的度量理论．

本册我们主要采取寓理于算和演绎推理方法，进一步学习相似形和圆的性质，并使同学们感受逻辑推理的威力，进一步培养同学们的计算推理和综合推理的能力．

从小学我们就知道**长方形的面积等于长乘宽**．我国数学家采用十进位小数计算线段的长度，这样，通过单位逐步变小可以无限的量下去以达到任意的精确度．这实际上已说明了，当线段的长度是无限不循环小数（无理数）时，长方形的面积计算公式是正确的．以长方形面积计算为基础，通过出入相补原理，我们推出了平行四边形、梯形等图形的面积公式．这一章我们将以这些面积公式为基础来推导相似三角形的性质，并进一步研究与圆有关的线段的度量．

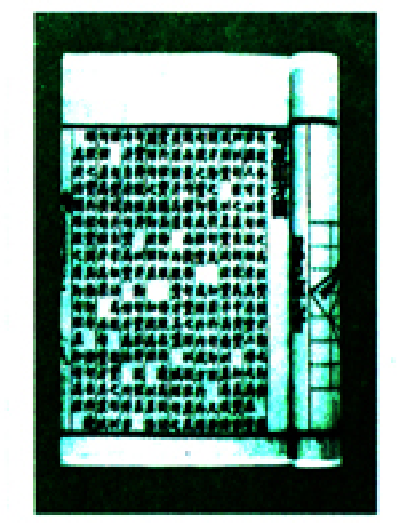
第二章，开始通过平行投影变换探索圆和椭圆之间的内在联系，然后使用圆柱或圆锥面的内切球推证圆锥曲线的有关性质，从中使我们感受到图形之间的逻辑关系以及内在和谐的美．

希望通过这一专题的学习，为大家今后进一步学习几何打下坚实的基础．

目　录

第一章　相似三角形定理与圆幂定理

本章采取我国古代数学家研究几何使用的“寓理于算”和综合推理的方法，学习相似形和圆的相关性质．我们以长度与面积的理论为基础，由三角形和梯形的面积公式证明相似形判定定理，并证明相似三角形的一些重要性质，进而探索直角三角形相似与锐角三角函数之间的内在联系，从中体会这些图形之间的逻辑关系．在第二大节应用相似三角形的性质研究与圆有关的角和成比例的线段．通过这一章的学习与训练，进一步提高大家对数学命题论证的能力和逻辑思维能力．



《周髀算经》

1.1　相似三角形

1.1.1　相似三角形判定定理

我们知道，形状相同的图形叫做相似形．在初中我们通过直观探索，得出了相似三角形的特征性质，这一节我们对相似三角形的判定方法和性质作一简要的回顾，并揭示它们之间的逻辑关系．

如果在两个三角形中，对应角相等、对应边成比例，则这两个三角形叫做相似三角形（similar triangle）．

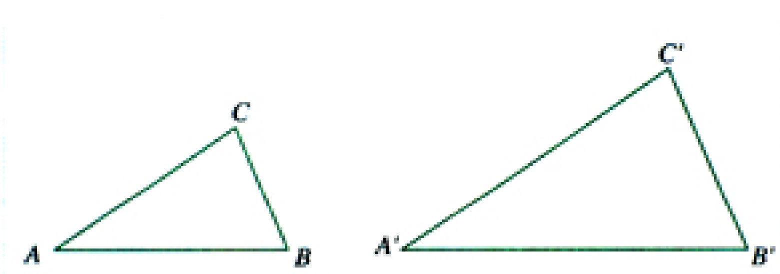


图 1-1

如图 1-1，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，如果

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k,$$

则$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是相似三角形．记作$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，读作：$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$．

设相似三角形对应边的比值为k，则k叫做相似比（或相似系数）．

我们已经知道，判定两个三角形是否相似，并不需要对定义中的条件逐一验证．在初中，已通过观察、实验，归纳出三个相似三角形判定定理：

判定定理 1 两角对应相等的两个三角形相似．

判定定理 2 三边对应成比例的两个三角形相似．

判定定理 3 两边对应成比例，并且夹角相等的两个三角形相似．

下面我们用面积公式证明第一个判定定理．

已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$（图 1-2）．

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$．

证明：由已知可推知$\angle C=\angle C'$．

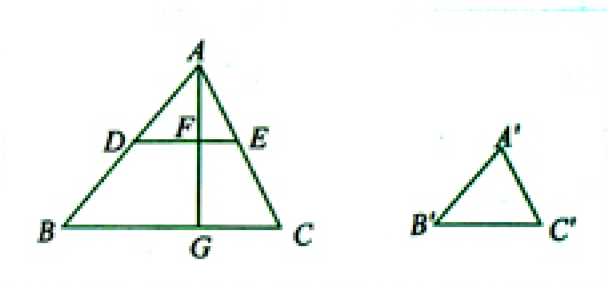


图 1-2

如果$AB=A'B'$，则$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，这时定理显然成立．

设$AB>A'B'$，在$\triangle ABC$的AB和AC边上分别截取$AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连接DE，得

$$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'.$$

于是$\angle B=\angle ADE$，所以$DE /\!/ BC$．

作BC边上的高AG，交DE于点F，则$AF \perp DE$．

用S表示图形的面积，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}+S_{\text{梯形}DBCE}.$$

即

$$\frac{1}{2}BC\times AG=\frac{1}{2}DE\times AF+\frac{1}{2}(DE+BC)\times(AG-AF).$$

展开合并，整理得$\frac{BC}{DE}=\frac{AG}{AF}$．因此

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{\frac{1}{2}BC\times AG}{\frac{1}{2}DE\times AF}$$

$$=\frac{BC}{DE}\cdot\frac{AG}{AF}$$

$$=\left(\frac{BC}{DE}\right)^2=\left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2. \quad ①$$

同理可证$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\left(\frac{AC}{A'C'}\right)^2$．所以

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

又因为$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，所以

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

下面我们证明判定定理 2.

已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

证明：如果$AB=A'B'$，则两个三角形全等，定理显然成立. 不妨设$AB>A'B'$.

在AB上截取线段$AD=A'B'$，过D作$DE\parallel BC$交边AC于点E，则

$$\angle ADE=\angle B,\ \angle AED=\angle C.$$

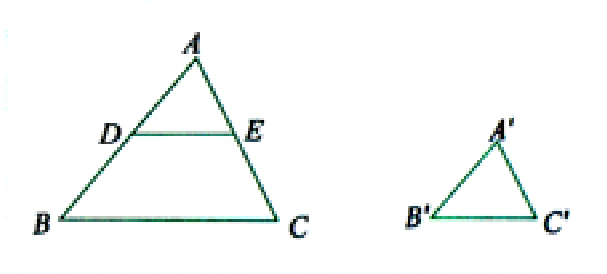


图 1-3

由判定定理 1，可得$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$. 故

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}.$$

又已知$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$. 由于$AD=A'B'$，所以

$$\frac{BC}{DE}=\frac{BC}{B'C'},\ \frac{AC}{AE}=\frac{AC}{A'C'},$$

所以$B'C'=DE$，$A'C'=AE$. 因此$\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$. 所以

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

用类似的方法可以证明判定定理 3，留给同学们作为练习.

例 1 已知点A，B，C在$\angle O$的一边l上，点A'，B'，C'在另一边l'上，并且直线$AB'\parallel BA'$，$BC'\parallel CB'$.

求证：$AC'\parallel CA'$.

证明：因为$AB'\parallel BA'$，$BC'\parallel CB'$，所以

$$\triangle OAB'\backsim\triangle OBA',\ \triangle OBC'\backsim\triangle OCB',$$

（相似三角形的判定定理 1）.

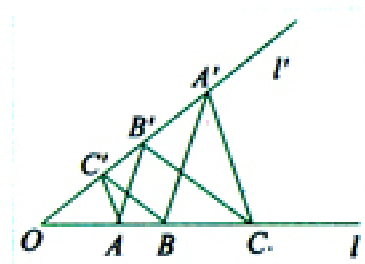


图 1-4

设两对相似三角形的相似比分别为k_1，k_2，则

$$OA=k_1OB,\ OB'=k_1OA',$$
$$OB=k_2OC,\ OC'=k_2OB',$$

所以

$$OA=k_1OB=(k_1k_2)OC,\ OC'=k_2OB'=(k_2k_1)\ OA',$$

所以$\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OC'}{OA'}=k_1k_2$.

又因为$\angle O$为$\triangle AOC'$和$\triangle COA'$的公共角，所以

$$\triangle OAC'\backsim\triangle OCA',\text{（判定定理 2）}$$

所以$\angle OAC'=\angle OCA'$.

因此$AC'\parallel CA'$.

例 2 求证：顺次连接三角形三边中点所得三角形与原三角形相似.

已知：如图 1-5，D，E，F分别是$\triangle ABC$三边BC，CA，AB的中点.

求证：$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

证明：因为 D，E，F 分别是$\triangle ABC$三边的中点，所以 DE，EF，FD 都是$\triangle ABC$的中位线，因此

$$EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC,\ DF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CA,\ DE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB,$$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}.$$

因此$\triangle EFD \backsim \triangle ABC$.（判定定理 2）

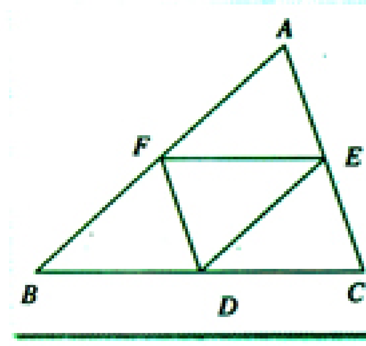


图 1-5

练习

1. 如果两个直角三角形满足下述条件之一，那么它们是相似三角形吗？为什么？
   （1）如果一个直角三角形的一个锐角等于另一个直角三角形的一个锐角；
   （2）如果一个直角三角形的两条直角边与另一个直角三角形的两条直角边对应成比例；
   （3）一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和直角边对应成比例.
2. 求证：顶角相等的两个等腰三角形相似.
3. 已知一个相似三角形的各边的比为 2∶2∶3，和它相似的另一三角形的最大边长为 15 cm，求这个三角形的其他边长.
4. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以 B 为圆心，BC 为半径画弧，交 AC 于点 D，求证：$BC^2=AC\cdot CD$.

1.1.2 相似三角形的性质

性质定理 1 相似三角形对应边上的高、中线和它们周长的比都等于相似比.

已知：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且相似比为 k，AD，AM 分别是$\triangle ABC$的 BC 边上的高、中线，$A'D'$，$A'M'$分别是$\triangle A'B'C'$的 $B'C'$边上的高、中线. 求证：

（1）$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AM}{A'M'}=k$；

（2）$\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$.

证明：（1）先证$\dfrac{AD}{A'D'}=k$. 如图 1-6.

因为$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，所以$\angle B=\angle B'$.

又因 $AD\perp BC$，$A'D'\perp B'C'$，所以

$$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'.$$

所以$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

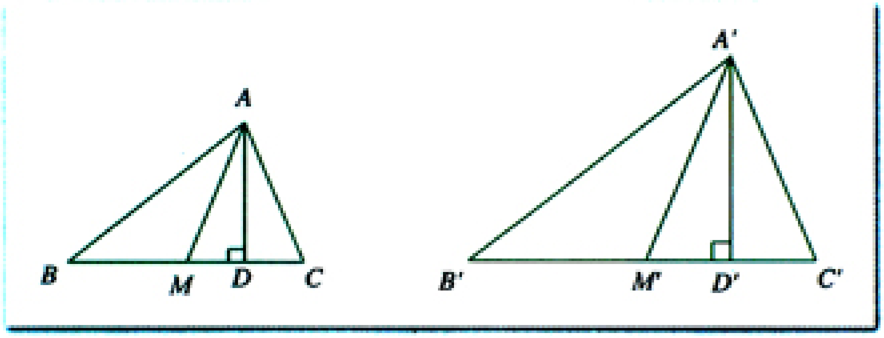


图 1-6

另一个等式，请同学们自己证明.

(2) 因为$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，所以可设

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k,$$

即 $AB=kA'B'$，$BC=kB'C'$，$CA=kC'A'$，由此得

$$AB+BC+CA=k(A'B'+B'C'+C'A'),$$

即 $\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$.

性质定理 2 相似三角形的面积比等于相似比的平方.

已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且相似比为 k（图 1-6）.

求证：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=k^2$.

证明：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}\cdot\dfrac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2$.

例 1 利用性质定理证明勾股定理.

已知：直角$\triangle ABC$，$\angle C$是直角.

求证：$AC^2+BC^2=AB^2$.

证明：如图 1-7，设 CD 是斜边 AB 上的高.

由$\angle A=\angle BCD$，$\angle B=\angle ACD$，可得

$$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle CBD.$$

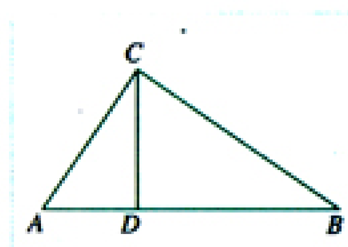


图 1-7

于是

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AC^2}{AB^2}, \quad ①$$

$$\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BC^2}{AB^2}, \quad ②$$

①和②两边相加，得

$$\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=\frac{S_{\triangle ACD}+S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}}=1,$$

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$.

这使我们再一次证明了勾股定理.

例 2 如图 1-8，$\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料，边 $BC=200$ mm，高 $AD=300$ mm，要把它加工成长是宽的 2 倍的矩形零件，使矩形较短的边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，求这个矩形零件的边长.

解 设矩形 $EFGH$ 为加工成的矩形零件，边 FG 在 BC 上，顶点 E，H 分别在 AB，AC 上，$\triangle ABC$ 的高 AD 与边 EH 相交于点 P. 设矩形的边长 EH 为 x mm.

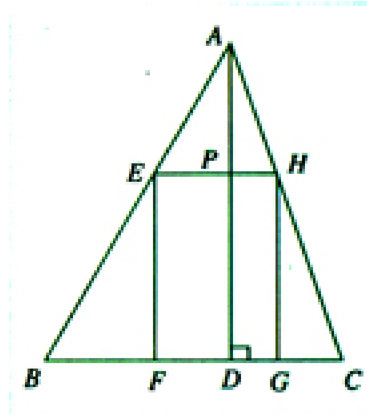


图 1-8

因为 $EH/\!/BC$，所以

$$\triangle AEH\backsim\triangle ABC.$$

所以$\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{EH}{BC}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

因此，$\dfrac{300-2x}{300}=\dfrac{x}{200}$. 解得

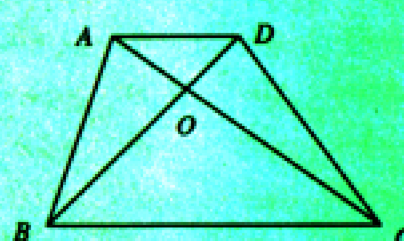
$$x=\frac{600}{7}\ (\text{mm});$$

$$2x=\frac{1\,200}{7}\ (\text{mm}).$$

答：加工成的矩形零件的边长分别为$\dfrac{600}{7}$ mm，$\dfrac{1\,200}{7}$ mm.

练习

1. 已知两个相似三角形对应边的比为 1∶4，则它们对应高的比是______，对应中线的比为______，对应角平分线的比为______.
2. 求证：相似三角形对应中线的比等于相似比.
3. 两个相似三角形的面积分别为 9 cm^2 和 25 cm^2，它们的周长相差 6 cm，则较大的三角形的周长为______ cm.
4. 已知梯形的上底为 4 cm，下底为 12 cm，高为6 cm，求这梯形两腰延长线的交点到下底的距离.
5. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，AC，BD 相交于 O，$AO=2$ cm，$AC=8$ cm，且 $S_{\triangle BCD}=6\ \text{cm}^2$，求 $S_{\triangle AOD}$.



（第 5 题）

思考与讨论

一个$\triangle ABC$ 的三条边分别为 4，5，6. 线段 a 长为 2，线段 b 长为 3，现要把线段 b 截成两段，使这两段与线段 a 组成的三角形与$\triangle ABC$ 相似，则线段 b 被截得的两段长分别是______和______. 若线段 b 长为 5.5 呢？

1.1.3 平行截割定理

平行截割定理 三条平行线截任两条直线，所截出的对应线成比例.

已知：$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，两条直线与 l_1，l_2，l_3 分别相交于点 A，B，C 与 D，E，F（图 1-9）.

求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

证明：过点 B 作 DF 的平行线分别与 l_1，l_3 相交于 G，H.

由于 $l_1 /\!/ l_3$，得

$$\angle GAB=\angle BCH，\angle BGA=\angle BHC，$$

所以$\triangle BCH \backsim \triangle BAG$.（相似三角形判定定理 1）

因此$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{GB}{BH}$.

又因四边形 $GBED$ 和 $BHFE$ 都是平行四边形，由此可得

$$GB=DE，BH=EF，$$

因此$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

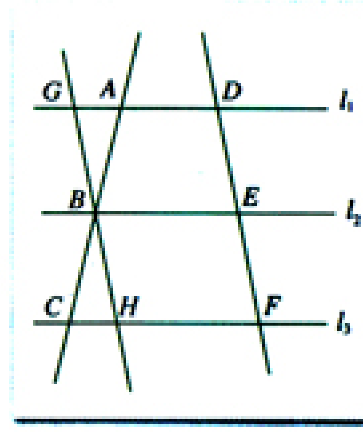


图 1-9

思考与讨论

定理中的三条直线可以换为任意多条直线吗？即：

已知 n 条互相平行的直线 l_1，l_2，$\cdots l_n$ 截任意两条直线 m_1，m_2 截得的两组线段依次为 a_1，a_2，$\cdots$，a_n；b_1，b_2，$\cdots$，b_n，比例式

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

成立吗？

推论 平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例.

想想看，经过三角形一边中点并且与另一边平行的直线，是否必平分第三边（图 1-10）？

例 已知：AT 为$\triangle ABC$ 的$\angle BAC$ 的角平分线（图 1-11）.

求证：$\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{AB}{AC}$.

证明：作 $CD /\!/ TA$ 交 BA 的延长线于点 D，则

$$\frac{BT}{TC}=\frac{BA}{AD}.$$

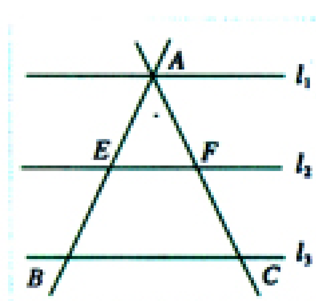


图 1-10

因为

$$\angle BAT=\angle CAT,\ \angle BAT=\angle ADC,$$
$$\angle CAT=\angle ACD,$$

所以$\angle ADC=\angle ACD$. 因此 $AC=AD$.

从而$\frac{BT}{TC}=\frac{AB}{AC}$.

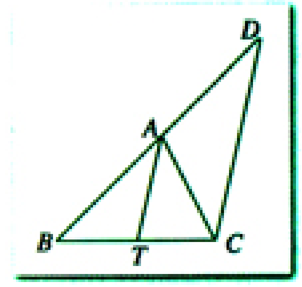


图 1-11

思考与讨论

如下图用一张矩形纸，你能折出一个等边三角形吗？先把矩形 $ABCD$ 纸对折，设折痕为 MN；然后放平再把 B 点叠在折痕线上，得到 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$，沿着 EB 线折叠，就能得到等边$\triangle EAF$. 想一想，为什么？

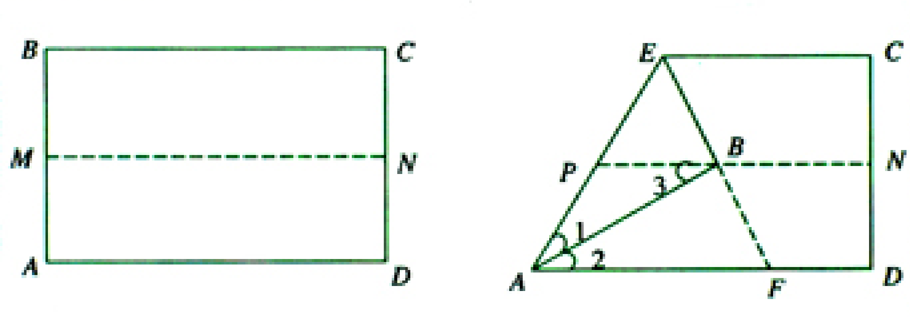
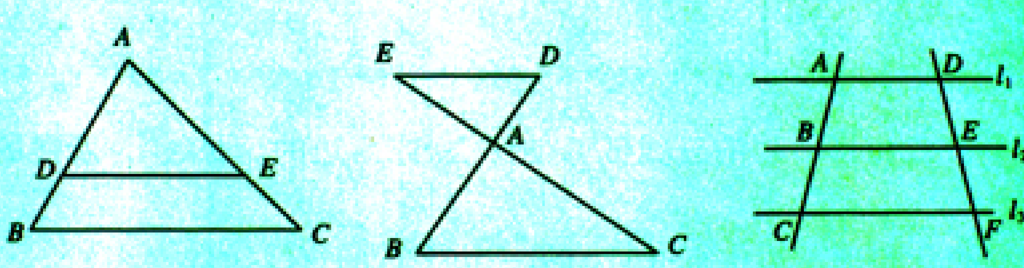


图 1-12

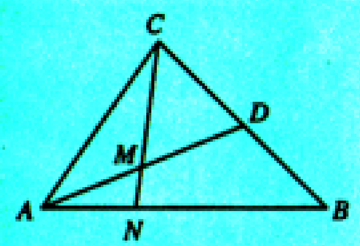
练习

1. 已知：如图，$DE/\!/BC$，$AB=12$，$AC=16$，$AD=7.5$，求 AE 的长.

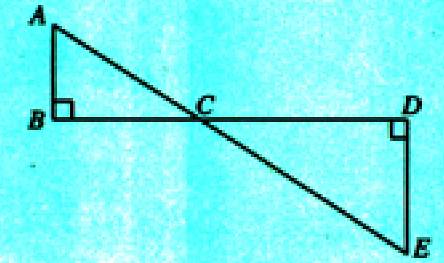


(第1题) (第2题) (第3题)

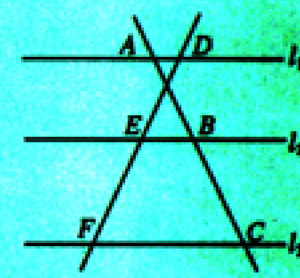
2. 已知：如图，$ED/\!/BC$，且 $AB=5$，$AC=7$，$AE=2.8$，求 BD 的长.
3. 已知：如图，$l_1/\!/l_2/\!/l_3$，$AB=a$，$BC=b$，$EF=c$，求 DE.
4. 如图，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，M 是 AD 的中点，CM 延长线交 AB 于 N，$AB=24$ cm，求 AN 的长.



（第 4 题）



（第5题）



（第6题）

5. 已知：如图，$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，垂足分别为 B，D.

求证：$\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{BC}{DC}$.

6. 已知：如图，$l_1/\!/l_2/\!/l_3$，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{m}{n}$.

求证：$\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{m}{m+n}$.

1.1.4 锐角三角函数与射影定理

由直角三角形相似的条件可知，含有相等锐角 α 的所有直角三角形都相似（图 1-13），由此我们定义了锐角三角函数(或三角比)：

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\ \cos\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},\ \tan\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}.$$

这就是说，在一个锐角等于 α 的所有直角三角形中，对边比斜边、邻边比斜边、对边比邻边的比值分别都相等.

由以上分析可知，锐角三角比不过是相似直角三角形性质的另一种表达形式. 这种表达方式更加精炼地表述了相似直角三角形的性质.

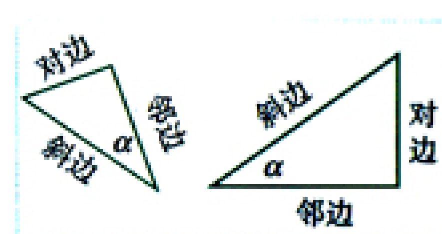


图 1-13

下面我们用锐角三角比，进一步研究直角三角形的一些重要性质.

已知：CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高（图 1-14）. 求证：

(1) $AC^2=AD\cdot AB$；

(2) $BC^2=BD\cdot AB$；

(3) $CD^2=AD\cdot BD$.

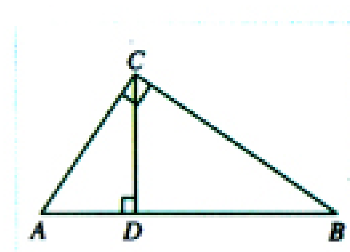


图 1-14

证明：(1) 在图 1-14 中，含有$\angle A$ 的直角三角形有两个，Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle ABC$，于是

$$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

因此 $AC^2=AD\cdot AB$.

(2) 含有 $\angle B$ 的直角三角形有两个，$\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，于是

$$\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}.$$

因此 $BC^2=BD\cdot AB$.

(3) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，$\angle A=\angle BCD$，于是 $\tan\angle A=\tan\angle BCD$，由此可得

$$\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD},$$

即 $CD^2=AD\cdot BD$.

目前，可以查到的证明勾股定理的方法有很多，你能用射影定理的结论证明勾股定理吗？

AD，BD 是直角边 AC，BC 在斜边 AB 上的正射影．所以上面得到的两个结论，通常叫做射影定理．射影定理可用自然语言叙述如下：

射影定理　直角三角形中，每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项；斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项．

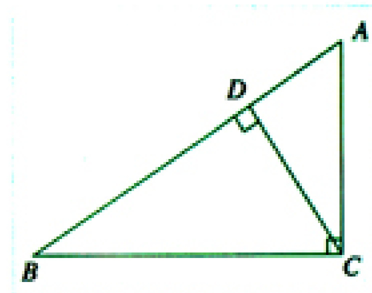


图 1-15

例　用射影定理证明勾股定理．

已知：$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\angle C=90°$（图 1-15）．

求证：$AC^2+BC^2=AB^2$.

证明：作 $CD\perp AB$ 于点 D，由射影定理，得

$$AC^2=AD\times AB, \quad ①$$
$$BC^2=BD\times AB. \quad ②$$

①+②，得

$$AC^2+BC^2=AB\cdot(AD+DB).$$

即 $AC^2+BC^2=AB^2$.

练习

1. CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高：

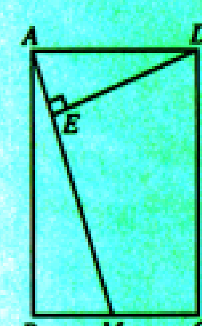
(1) 已知 $AD=4$ 厘米，$CD=6$ 厘米．求 BD 和 BC；

(2) 已知 $AB=15$ 厘米，$AC=9$ 厘米，求 CD 和 BD.

2. 设 CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高，求证：

(1) $\dfrac{AC^2}{CB^2}=\dfrac{AD}{DB}$；　　(2) $CA\cdot CD=CB\cdot AD$.

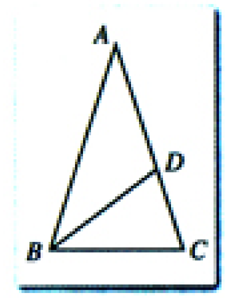
3. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，M 是 BC 的中点，$DE\perp AM$，E 是垂足，求证：$DE=\dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.



（第 3 题）

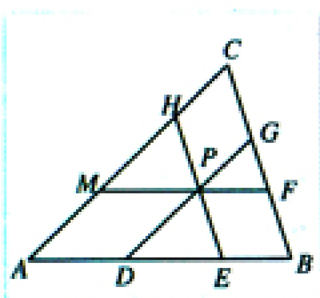
习题 1－1

1. 已知：如图，等腰△ABC中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，$\angle B$的平分线交AC于D. 求证：$BD^2=AC\cdot DC$.

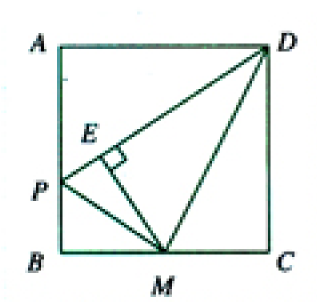


（第1题）

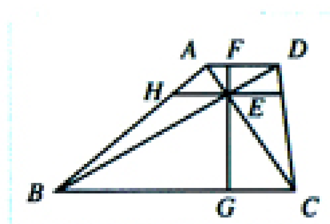
2. 已知：△ABC中，$\angle BAC$是直角，$AC>AB$，AD是高，M是BC的中点，求证：$AC^2-AB^2=2DM\cdot BC$.
3. △ABC中，$\angle BAC$是直角，AD是高，DE是△ABD的高，求证：$AD^2=AC\cdot DE$.
4. 如图，P是△ABC内一点，过点P作三边AB，BC，CA的平行线分别交其他两边分别为M，F；E，H；D，G，已知$AD:DE:EB=a:b:c$，求$S_{\triangle PHM}:S_{\triangle PDE}:S_{\triangle PGF}$.
5. 如图，已知M，P分别是正方形$ABCD$边BC，AB上的一点，过M作$ME\perp PD$，垂足为E，连接PM，DM，如果$ME^2=PE\cdot ED$，求证：△PBM∽△MCD.
6. △ABC中，$\angle BAC$是直角，AD是高，求证：
   (1) 如果$AB=2AC$，那么$5AD=2BC$；
   (2) 如果$BC=5DC$，那么$BC^2=5AC^2$.



（第4题）



（第5题）



（第7题）

7. 已知：如图，在梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，$AC\perp BD$，垂足为E，$\angle ABC=45°$，过E作AD的垂线交AD于F，交BC于G，过E作AD的平行线交AB于H. 求证：$FG^2=AF\cdot DF+BG\cdot CG+AH\cdot BH$.

1.2 圆周角与弦切角

1.2.1 圆的切线

如图1-16所示，任给一个圆和一条直线. 让我们考察圆心到直线的距离.

如果直线AB和⊙O的圆心O的距离OD大于圆的半径OC，则点D在圆外. 在直线AB上任取一点M，则

$$OM>OD>OC.$$

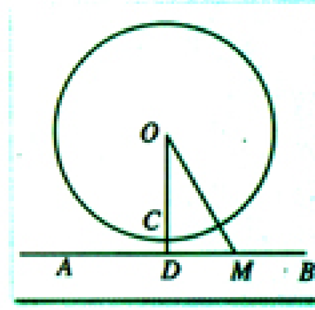


图 1-16

由此我们可以推知点 M 一定在⊙O 外，所以 AB 上任一点都在⊙O 外，于是⊙O 和直线 AB 便没有公共点．这种情况，我们说直线和圆相离．

容易证明，如果圆心到一条直线的距离小于半径，则这条直线和该圆一定相交于两点．这时我们说直线与圆相交，这条直线叫做圆的割线．

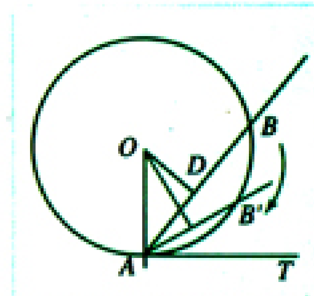


图 1-17

如图 1-17，设⊙O 的一条割线与⊙O 相交于 A，B 两点，让 AB 以点 A 为中心旋转，则另一交点 B 沿圆周向点 A 移动，同时圆心 O 到 AB 的距离 OD 逐渐增大，当点 B 与点 A 重合时，直线 AB 变为直线 AT，这时弦心距离 OD 长变为 OA．即，圆心 O 到直线 AT 的距离等于圆的半径，同时应有 $OA\perp AT$．直观上可以看到直线 AT 与圆只有一个公共点 A．

定义：如果一条直线与一圆只有一个公共点，则这条直线叫做这个圆的切线，公共点叫做切点．

在生产实践和日常生活中，常常会遇到直线与圆相切的问题．例如，火车的车轮与铁轨、传动带与转轮等．

下面我们来研究直线与圆相切的判定与性质．

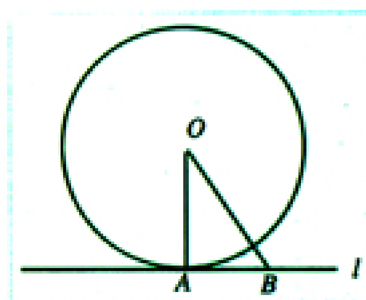


图 1-18

圆的切线判定定理　经过圆的半径的外端且垂直于这条半径的直线，是圆的切线．

已知：OA 是⊙O 的一条半径（图 1-18），直线 l 过点 A，并且 $l\perp OA$．

求证：l 是⊙O 的切线．

证明：设点 B 是 l 上不同于点 A 的任一点，则

$$OB>OA.$$

于是点 B 必在圆外，所以 l 和⊙O 只有一个公共点，即 l 与⊙O 相切．

圆的切线的性质定理　圆的切线垂直过切点的半径．

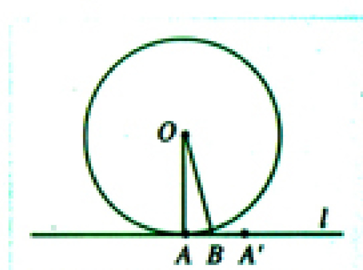


图 1-19

已知：直线 l 是⊙O 的切线，A 为切点(图 1-19)．

求证：$OA\perp l$．

证明：用反证法．

假如 l 不与 OA 垂直．自圆心 O 引 OB 垂直 l 于点 B，则以 OB 为对称轴，点 A 应有一个对称点 A' 在 l 上，由圆关于任一条直径成轴对称可知点 A' 也应当在圆上，这样 l 就和⊙O 有两个公共点了，这与已知 l 与⊙O 相切矛盾．

所以 $OA\perp l$．

注：这一定理和必修课程数学 2 中“立体几何初步”一章中的一些定理的证明应用了“反证法”：先设要证结论的反面成立；再由所设推出与已知矛盾，或与某个真命题矛盾，

或自相矛盾；从而否定所设，证出要证的结论．这种证题的方法叫做反证法

例 1 已知点 P 是⊙O 外一点(图 1-20)．

求作：⊙O 的过点 P 的切线．

作法：(1) 连接 OP；

(2) 以 OP 的中点 C 为圆心，OC 为半径作⊙C 与⊙O 相交于 A，B 两点；

(3) 作直线 PA，PB，则 PA，PB 就是所求作的切线．

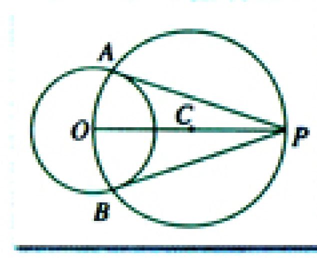
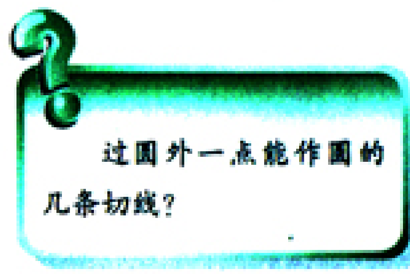


图 1-20

证明：因为$\angle OAP=\angle OBP=90°$(圆周角定理的推论 2)，所以 PA，PB 为⊙O 的切线(圆的切线判定定理)．

注：根据已知条件，使用允许的作图方法，经过有限步作图步骤，作出满足这些条件的图形，在几何中叫做作图题．在古希腊的几何作图中，作图工具也作了限制．常常限制只使用圆规和无刻度的直尺作图．这种限制对揭示图形性质、挑战人类的智慧以及训练初学者的逻辑思维能力方面起到过一定的作用．在练习中我们提供一些作图题供有兴趣的同学练习．



作为练习，请同学们自己证明切线的判定定理和性质定理的几个推论．

推论 1 从圆外的一个已知点所引的两条切线长相等．

推论 2 经过圆外的一个已知点和圆心的直线，平分从这点向圆所作的两条切线所夹的角．

例 2 已知$\triangle ABC$(图 1-21(1))，求作与$\triangle ABC$ 的三边都相切的圆．

作法：(1) 作$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线，设这两条角平分线相交于点 O；

(2) 从点 O 引 $OD\perp BC$，D 为垂足；

(3) 以 O 为圆心，OD 为半径作圆；

则此圆为所作的圆．

证明：(请同学们自己完成)．

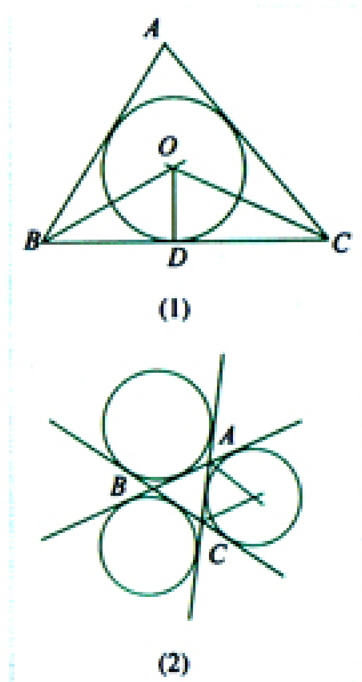


图 1-21

定义：与一三角形三边都相切的圆，叫做这个三角形的内切圆．与三角形的一边和其他两边的延长线都相切的圆，叫做三角形的旁切圆(图 1-21(2))．

显然一个三角形有三个旁切圆．

练习

1. 如何用圆心到一条直线的距离判定直线和圆的位置关系？
2. 任作一圆，过圆上任一点，用圆规和直尺作该圆的切线.
3. 已知一条直线和直线上一定点，用圆规和直尺求作一圆与已知直线相切于定点. 这样的圆可作多少个？这些圆的圆心组成什么样的图形？
4. 求证经过直径两个端点的两条切线互相平行.
5. 从圆外一点向圆引两条切线. 求证：连接这点和圆心的直线垂直平分连接两切点的线段.
6. 任作一个三角形，作它的内切圆和一个旁切圆.
7. 完成本节例 2 作三角形内切圆的证明.

1.2.2 圆周角定理

在初中我们已学过圆心角，如图 1-22 所示，$\angle AOB$ 为圆 O 的一个圆心角. $\overset{\frown}{AB}$为$\angle AOB$ 所对的弧，并规定$\overset{\frown}{AB}$与$\angle AOB$ 具有相同的度数. 例如，$\angle AOB$ 等于 $45°$，则$\overset{\frown}{AB}$也等于 $45°$.

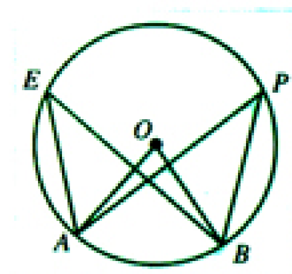


图 1-22

这一节，我们研究另两类与圆有关的角：圆周角和弦切角及其度量.

从$\odot O$ 上任一点 P 引两条分别与该圆相交于点 A 和 B 的射线 PA，PB，$\overset{\frown}{AB}$叫做$\angle APB$ 所对的弧，$\angle APB$ 叫做$\overset{\frown}{AB}$所对的**圆周角**.

不看下文，先想想看，$\overset{\frown}{AB}$上的圆周角的度数与$\overset{\frown}{AB}$所对圆心角的度数有什么关系？然后思考能否证明你的结论.

应用计算机软件（如几何画板）在屏幕上作一个圆，如图 1-22，使 P 点可以拖动.

1. 结合拖动 P 点，认识什么是圆心角，什么是圆周角.

2. 在拖动的过程中观察$\angle APB$ 度数的变化，及其与$\angle AOB$、$\angle AEB$ 的大小有什么关系.

通过第 2 步的观察，你可以提出什么猜想？

圆周角定理 圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半.

已知：$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角是$\angle BAC$，圆心角是$\angle BOC$(图 1-23).

求证：$\angle BAC$ 的度数$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$的度数[1].

分析：圆心与圆周角的位置关系有且仅有以下三种情况：

(1) 圆心在$\angle BAC$ 的一条边上，如图 1-23(1)；

(2) 圆心在$\angle BAC$ 的内部，如图 1-23(2)；

(3) 圆心在$\angle BAC$ 的外部，如图 1-23(3).

[1] 该式也可写成$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}°$.

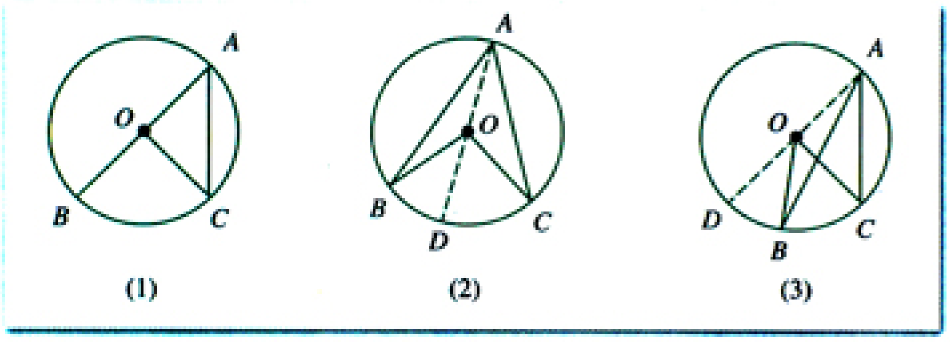


图 1-23

容易看出，只要证明情况(1)，对其他两种情况，只要作出直径 AD，就分别可把它们转化为情况(1)来证明.

证明：分三种情况讨论.

(1) 图 1-23(1)中，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一条边 BC 上.

作半径 OC，在 $\triangle AOC$ 中，因为 $OA=OC$，所以

$$\angle C=\angle BAC.$$

又因为 $\angle BOC$ 是 $\triangle AOC$ 的外角，所以

$$\angle BOC=\angle BAC+\angle C=2\angle BAC.$$

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

又知 $\angle BOC$ 的度数 $=\overset{\frown}{BC}$ 的度数，所以

$$\angle BAC \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}.$$

(2) 图 1-23(2)中，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部，作直径 AD，由结论(1)可得

$$\angle BAD \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数},$$

$$\angle DAC \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数}.$$

又因为 $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC$，所以

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数}$$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}.$$

(3) 图 1-23(3)中，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部，作直径 AD，由结论(1)可得

$$\angle BAD \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数},$$

$$\angle DAC \text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数}.$$

又因为 $\angle BAC=\angle DAC-\angle BAD$，所以

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数}$$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}.$$

因为圆心与圆周角的位置关系有且仅有以上三种情况，因而定理获证.

根据圆周角定理，请同学们自己证明下面的推论.

推论 1 直径(或半圆)所对的圆周角都是直角.

推论 2 同弧或等弧所对的圆周角相等.

推论 3 等于直角的圆周角所对的弦是圆的直径.

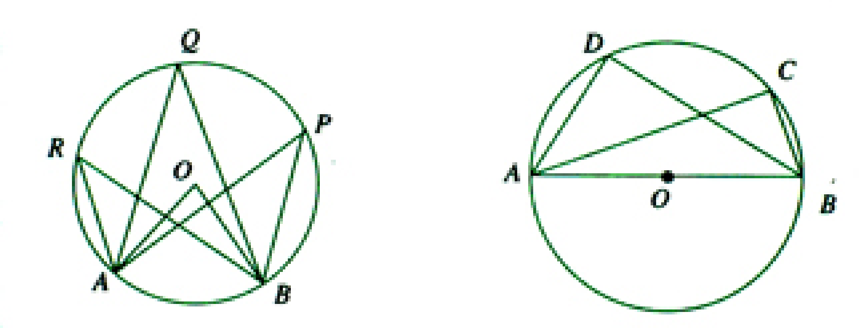


图 1-24

例 1 已知⊙O的两条弦AB，CD相交于圆内一点P（图 1-25）.

求证：$\angle APC$的度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$的度数.

证明：作弦AD，则$\angle APC=\angle A+\angle D$，所以

$\angle APC$的度数$=(\angle A+\angle D)$的度数

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})$的度数.（圆周角定理）

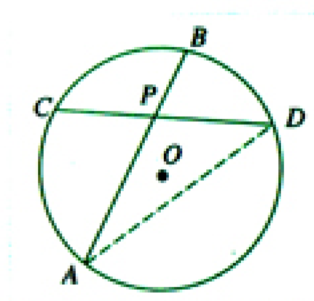


图 1-25

例 2 如图 1-26，AE是⊙O的直径，BC是⊙O的弦，过A作$AD\perp BC$交BC于D，连接AB，AC.

求证：$AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

分析：$AB\cdot AC=AE\cdot AD\Leftrightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$，$AB$，$AD$是Rt$\triangle ABD$的两条边，而$AC$，$AE$是$\triangle AEC$的两条边，因此，连接$CE$，证明$\triangle ABD\backsim\triangle AEC$是解决问题的关键.

证明：连接CE. 因为

$$\angle ADB=\angle ACE=90^\circ,$$

$$\angle B=\angle E,$$

所以$\triangle ABD\backsim\triangle AEC$. 因此

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}.$$

所以$AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

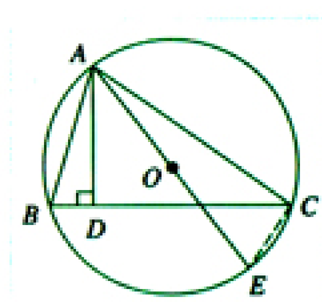


图 1-26

例 3 已知$\overset{\frown}{AB}$，且P，Q，R都在弦AB的同侧(图 1-27)，且点P在$\overset{\frown}{AB}$上，点Q在$\overset{\frown}{AB}$所在的圆内，点R在$\overset{\frown}{AB}$所在的圆外.

求证：$\angle AQB>\angle APB>\angle ARB$.

证明：延长 AQ 交弦 AB 于点 C，设 AR 与 $\overset{\frown}{AB}$ 相交于点 D，作弦 BC，BD，则有

$$\angle AQB>\angle ACB,\ \angle ADB>\angle ARB.$$

因为 $\angle ACB=\angle APB=\angle ADB$（推论 1），所以

$$\angle AQB>\angle APB>\angle ARB.$$

注：在证明圆的有关问题时，常常需要添加辅助线，构成直径上的圆周角，以便利用直径上的圆周角是直角这一性质.

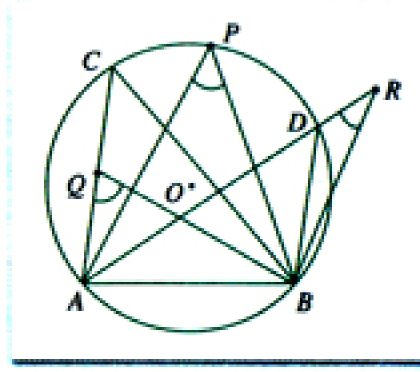
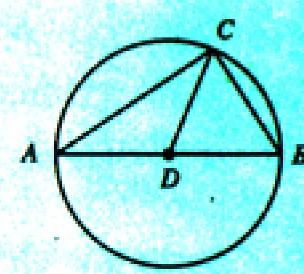


图 1-27

练习

1. 证明圆周角定理的三个推论.
2. 以等腰三角形的腰为直径所作的圆必平分底边.
3. 已知：CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$AB=2CD$，$\angle B=60°$.
   求证：$\triangle ABC$ 外接圆的半径等于 CB.



（第 3 题）

1.2.3 弦切角定理

如图 1-28 所示，PA 为 $\odot O$ 的弦，射线 PC 交 $\odot O$ 于 B. 让我们考察圆周角 $\angle APB$，顶点 P 不动，点 B 沿圆周向点 P 移动，当射线 PC 变为圆的切线时，终止移动. 这时，$\angle APC$ 的顶点在圆周上，一边和圆相交，另一边和圆相切于顶点 P，这样的角叫做弦切角. 图中 $\overset{\frown}{AmP}$ 叫做弦切角 $\angle APC$ 所夹的弧.

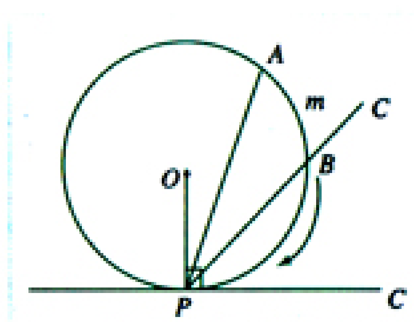


图 1-28

从上面的考察和弦切角的定义，你是否能够猜出，弦切角与它所夹弧的度数之间有什么关系吗?

弦切角定理 弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半.

已知：AC 是 $\odot O$ 的弦，AB 是 $\odot O$ 的切线，$\overset{\frown}{AmC}$ 是弦切角 $\angle BAC$ 所夹的弧，$\angle P$ 是 $\overset{\frown}{AmC}$ 所对的圆周角（图 1-29）.

求证：$\angle BAC$ 的度数 $=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AmC}$ 的度数.

分析：因为圆心与弦切角有且仅有如下三种位置关系：

（1）圆心在弦切角的边 AC 上，如图 1-29(1)；

（2）圆心在弦切角的外部，如图 1-29(2)；

(3) 圆心在弦切角的内部，如图 1-29(3).

因而，我们就分三种情况给予证明. 因为第一种情况较特殊，并且由“直径所对的圆周角是直角”易证得$\angle BAC=\angle P$. 其他两种情况只要过点 A 作直径 AQ，再借助其与直角的关系即可证明.

用计算机软件作图 1-28，拖动射线 PC 让点 B 在圆周上移动. 观察$\angle APC$与$\overset{\frown}{AmB}$度数的关系，当 PC 与$\odot O$相切，B 与 P 重合时，会出现什么情况?

由此你可以得出什么猜想?

证明：分三种情况讨论.

(1) 圆心 O 在$\angle BAC$的边 AC 上(图 1-29(1)).

因为 AB 是$\odot O$的切线，所以

$$\angle BAC=90^\circ.$$

又因为$\overset{\frown}{AmC}$是半圆，所以

$$\angle P=90^\circ.$$

所以$\angle BAC=\angle P$.

(2) 圆心 O 在$\angle BAC$的外部(图 1-29(2)).

作$\odot O$的直径 AQ，连接 CQ.

因为$\angle BAQ=\angle ACQ=90^\circ$，所以

$$\angle BAC=90^\circ-\angle 1,\ \angle Q=90^\circ-\angle 1.$$

所以$\angle BAC=\angle Q$.

又因为$\angle Q=\angle P$，所以

$$\angle BAC=\angle P.$$

(3) 圆心 O 在$\angle BAC$的内部(图 1-29(3)).

作$\odot O$的直径 AQ，连接 QP.

弦切角定理及前面圆周角定理的证明，都是分几种情况进行的，由此应体会和注意对问题进行分类讨论的方法.

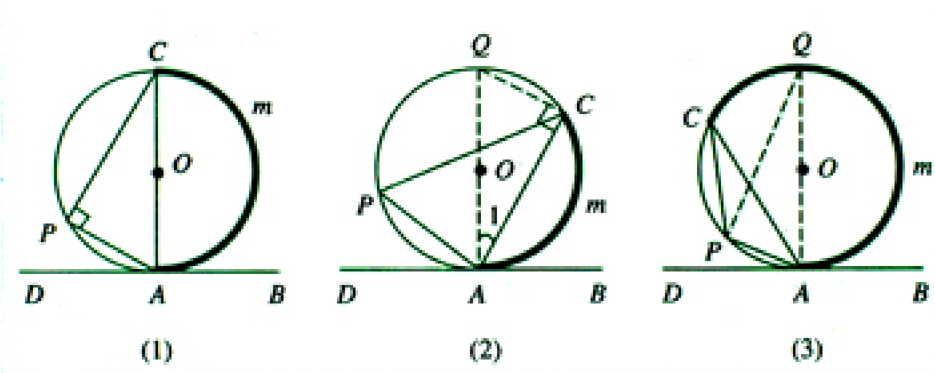


图 1-29

因为

$$\angle BAC=90^\circ+\angle QAC,\ \angle APC=90^\circ+\angle QPC,$$
$$\angle QAC=\angle QPC,$$

所以$\angle BAC=\angle P$.

因为圆心与弦切角有且仅有上述三种位置关系，所以

$$\angle BAC\text{ 的度数}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AmC}\text{的度数}.$$

推论 弦切角等于它所夹弧所对的圆周角.

例 1 如图 1-30，已知 AB 是⊙O 的直径，AC 是弦，直线 CE 和⊙O 切于点 C，$AD\perp CE$，垂足为 D.

求证：AC 平分$\angle BAD$.

证明：连接 BC.

因为 AB 是⊙O 的直径，所以

$$\angle ACB=90°.$$

所以$\angle B+\angle CAB=90°$.

因为 $AD\perp CE$，所以

$$\angle ADC=90°.$$

所以$\angle ACD+\angle DAC=90°$.

因为 AC 是弦，且 CE 和⊙O 切于点 C，所以

$$\angle ACD=\angle B,$$

所以$\angle DAC=\angle CAB$.

因此，AC 平分$\angle BAD$.

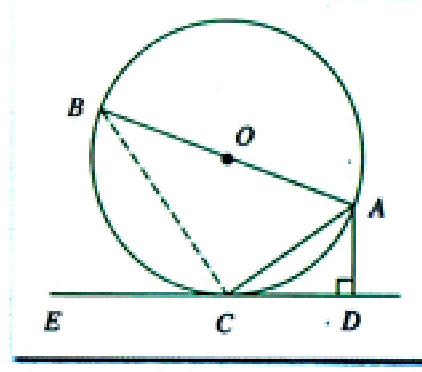


图 1-30

例 2 已知：如图 1-31，⊙O 和⊙O' 相交于 A，B 两点，过 A 作两圆的切线分别交两圆于 C，D.

求证：AB 是 BC 和 BD 的比例中项.

证明：因为 AC，AD 分别是两圆的切线，所以

$$\angle C=\angle 1,\ \angle 2=\angle D,$$

所以$\triangle ACB\backsim\triangle DAB$.

所以$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$，即

$$AB^2=BC\cdot BD,$$

所以 AB 是 BC 和 BD 的比例中项.

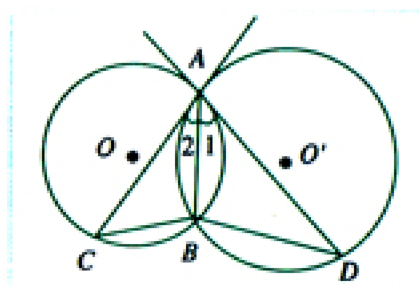
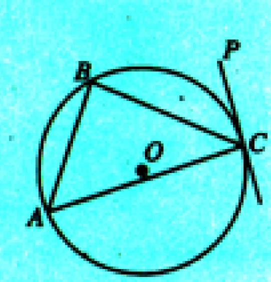


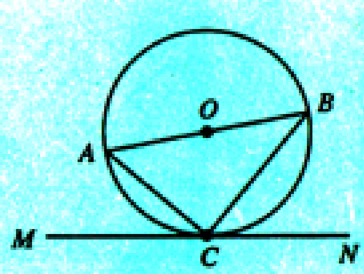
图 1-31

练习

1. ⊙O 上三点 A，B，C，PC 切⊙O 于 C，$\angle ABC=100°$，$\angle BCP=50°$，求$\angle AOB$ 的大小.



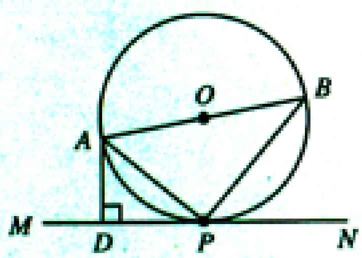
（第 1 题）



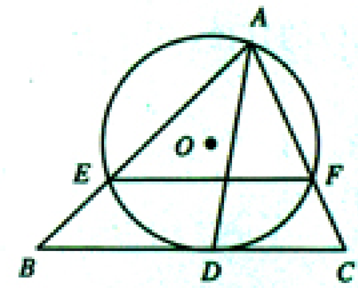
（第 2 题）

2. MN 切$\odot O$于C，AB是$\odot O$的直径，且$\angle CAB=53°$，求$\angle ACM$与$\angle BCN$的大小.

3. 如图，AB是$\odot O$的直径，MN切$\odot O$于P，$AD\perp MN$于D，求证：$AP^2=AD\cdot AB$.



（第3题）



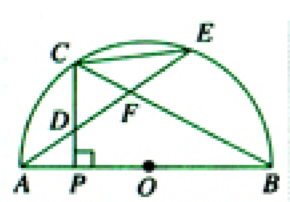
（第4题）

4. 如图，$\odot O$是过$\triangle ABC$顶点A且与BC边相切于D的圆，且AD是$\angle BAC$的平分线，$\odot O$与AB，AC分别交于E，F，求证：$EF/\!/BC$.

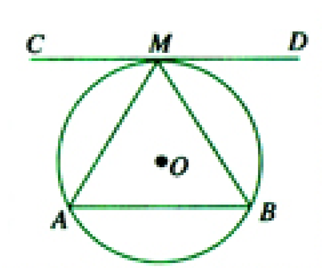
习题 1-2

1. 如图，AE是半圆的一条弦，C是$\overset{\frown}{AE}$的中点，$CP\perp AB$于P，弦AE交PC，CB于D，F. 求证：$AD=CD$.

2. 如图，AB是$\odot O$的弦，CD是经过$\odot O$上一点M的切线. 求证：
   （1）当$AB/\!/CD$时，$AM=MB$；
   （2）当$AM=MB$时，$AB/\!/CD$.

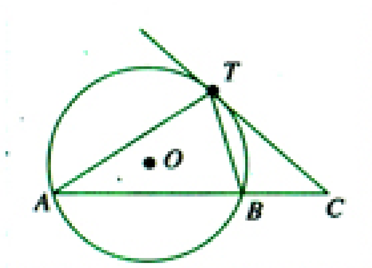


（第1题）

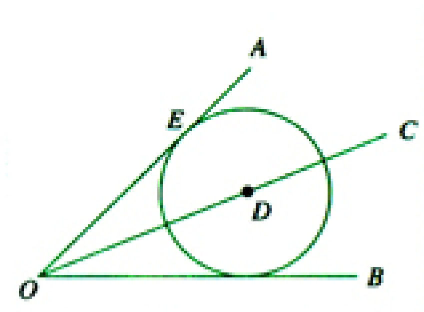


（第2题）

3. 如图，经过$\odot O$上的点T的切线和弦AB的延长线相交于点C，求证：$\angle ATC=\angle TBC$.



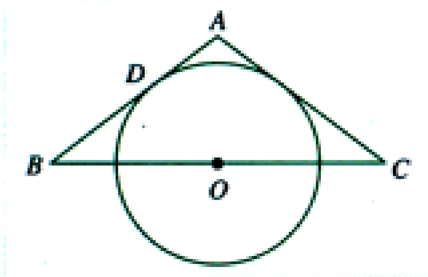
（第3题）



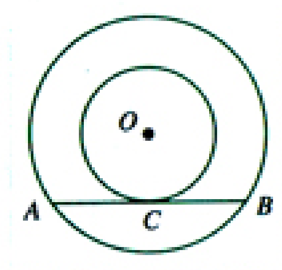
（第4题）

4. 已知：OC 平分 $\angle AOB$，D 是 OC 上任意一点，$\odot D$ 与 OA 相切于点 E. 求证：OB 与 $\odot D$ 相切.

5. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，O 是底边 BC 的中点，$\odot O$ 与腰 AB 相切于点 D. 求证：AC 与 $\odot O$ 相切.



（第 5 题）



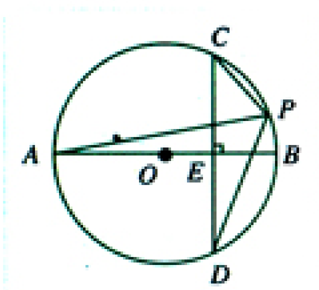
（第 6 题）

6. 如图的两个圆是以 O 为圆心的同心圆，大圆的弦 AB 是小圆的切线，C 为切点. 求证：C 是 AB 的中点.

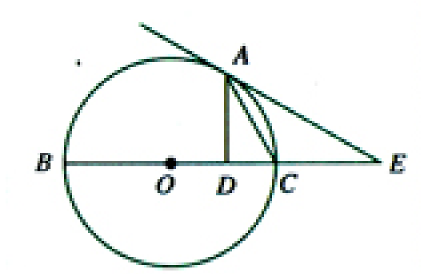
7. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，不是直径的弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，P 是 $\odot O$ 上不同于 CD 的任一点：

(1) 当点 P 在劣弧 CD 上运动时，$\angle APC$ 与 $\angle APD$ 的关系如何？请给予证明；

(2) 当点 P 在优弧 CD 上运动时，$\angle APC$ 与 $\angle APD$ 的关系如何？请给予证明.



（第 7 题）

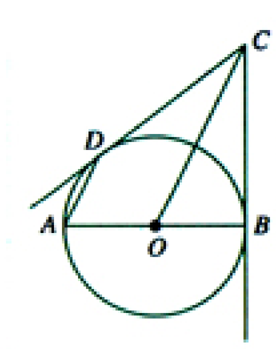


（第 8 题）

8. 已知：如图，BC 是 $\odot O$ 的直径，A 为 $\odot O$ 上一点，过 A 作 $\odot O$ 的切线交 BC 的延长线于 E，且 $AD\perp BC$ 于 D，连接 AC.

求证：AC 平分 $\angle DAE$.

9. 已知：AB 是 $\odot O$ 的直径，BC 是 $\odot O$ 的切线，切点为 B，OC 平行于弦 AD，求证：DC 是 $\odot O$ 的切线.

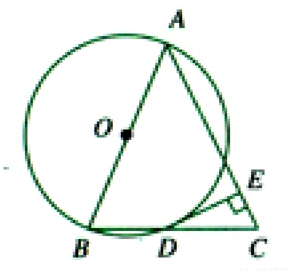


（第 9 题）

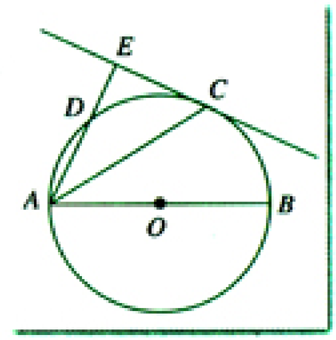
10. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于 D，过 D 作 AC 的垂线，垂足为 E.

求证：DE 是 $\odot O$ 的切线.

11. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上一点，直线 AD 和过 C 点的切线互相垂直，垂足为 E，求证：AC 平分 $\angle DAB$.



（第 10 题）



（第 11 题）

1.3 圆幂定理与圆内接四边形

1.3.1 圆幂定理

如图 1-32，如果弦 AB 和 CD 交于⊙O 内一点 P，则图中相等的角有哪些？由此能得到哪两个三角形相似？并推出哪些线段成比例？

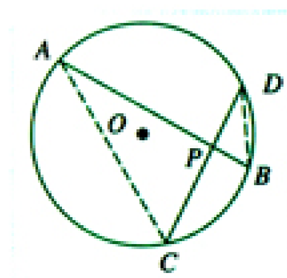


图 1-32

由上面的探讨，我们可得以下结论：

相交弦定理 圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.

已知：弦 AB 和 CD 交于⊙O 内一点 P（图 1-32）.

求证：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

证明：连接 AC，BD. 由圆周角定理可得

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle D \\ \angle C=\angle B\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

$$\Rightarrow PA : PD = PC : PB$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

用计算机作图 1-32，使 P 点可以在平面上拖动：(1) 研究相交弦定理中的结论是否还成立？(2) 当拖动 P 点到圆外且使直线 PAB 与圆相切时情况如何？

切割线定理 从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.

已知：如图 1-33，点 P 是⊙O 外一点，PT 是切线，T 是切点，割线 PBA 与⊙O 分别相交于点 B，A.

求证：$PT^2 = PA \cdot PB$.

证明：连接 TA，TB.

$$\left.\begin{array}{l}\angle BPT=\angle TPA \\ \angle 1=\angle A\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BPT \backsim \triangle TPA \Rightarrow PB : PT = PT : PA.$$

因此 $PT^2 = PA \cdot PB$.

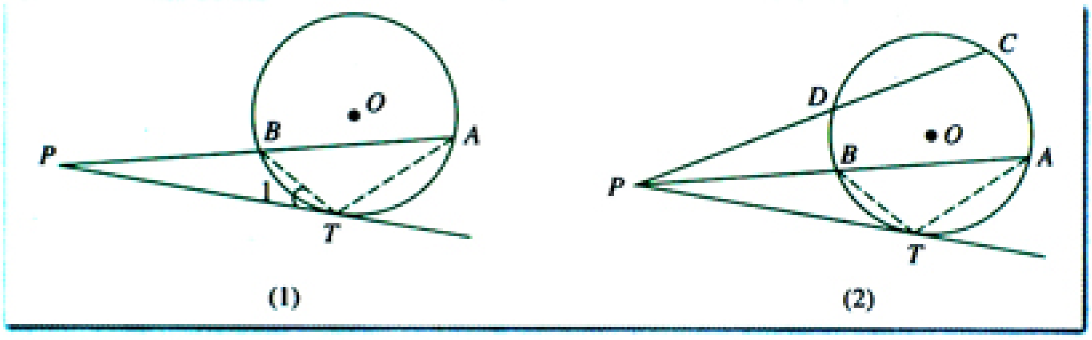


图 1-33

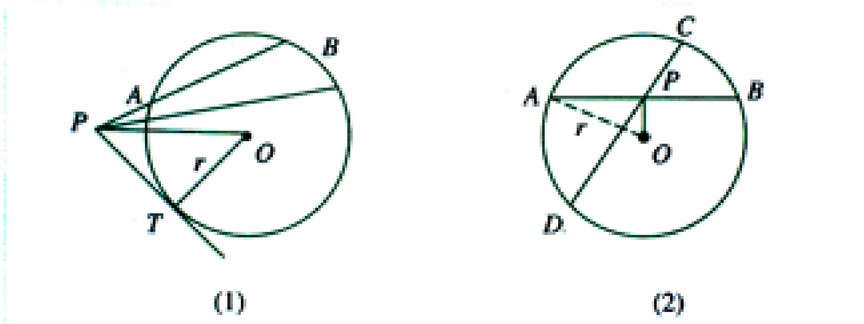


图 1-34

让我们对相交弦定理与切割线定理作进一步的分析.

观察图 1-34 的(1)和(2)，由切割线定理和相交弦定理不难看出，不论点 P 在圆内或圆外，通过圆的任一条割线交圆于 A，B 两点，只要点 P 的位置定了，则 $PA \cdot PB$ 都是定值. 设定值为 k，则：

当点 P 在圆外时，由切割线定理，可得

$$k=PA \cdot PB=PT^2=PO^2-r^2 \text{（}r\text{ 表示}\odot O\text{ 的半径）}.$$

当点 P 在圆内时，过点 P 作 AB 垂直 OP，则

$$k=PA \cdot PB=PA^2=r^2-PO^2.$$

如果点 P 在圆上，显然 $k=0$.

总结以上分析，我们得到：

圆幂定理[1] 已知$\odot(O, r)$，通过一定点 P，作$\odot O$ 的任一条割线交圆于 A，B 两点，则：

当点 P 在圆外时，$k=PO^2-r^2$；

当点 P 在圆内时，$k=r^2-OP^2$；

当点 P 在$\odot O$ 上时，$k=0$.

注

[1] 通常把这里的定值 k 称做点 P 对$\odot O$ 的“幂”，因此这一定理被称为“圆幂定理”.

例 1 已知圆中两条弦相交，第一条弦被交点分为 12 cm 和 16 cm 两段，第二条弦的长为 32 cm，求第二条弦被交点分成的两段的长.

解：设第二条弦被交点分成的一段长为 x cm，则另一段长为$(32-x)$cm，根据相交弦定理，有

$$x(32-x)=12\times16\text{，即 }x^2-32x+192=0.$$

解得 $x_1=8$ 或 $x_2=24$. 因此

$$32-x_1=24\text{，}32-x_2=8.$$

另一条弦被交点分成的两段长分别为 8 cm，24 cm.

例 2 已知：线段 a，b(图 1-35).

求作：线段 c，使 $c^2=ab$.

作法：1. 作线段 $AP=a$；

2. 延长 AP 到点 B，使 $PB=b$；

3. 以 AB 为直径作半圆；

4. 过点 P 作 $PC\perp AB$，交半圆于点 C.

PC 就是 a，b 的比例中项 c.

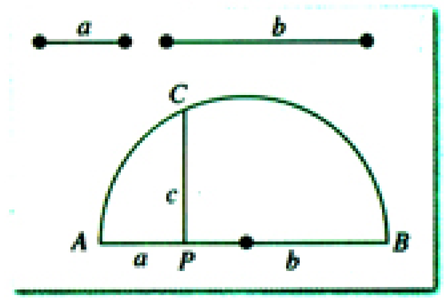


图 1-35

证明：(请同学们自己完成).

例 3 已知：如图 1-36，在⊙O 中，C 是⊙O 上异于 A，B 的一点，弦 AB 的延长线与过点 C 的切线相交于 P，过 B 作⊙O 的切线交 CP 于点 D，且 $\angle CDB=90°$，$CD=3$，$PD=4$. 求⊙O 的弦 AB 的长.

解：因为 DC 切⊙O 于点 C，DB 切⊙O 于点 B，所以

$$CD=BD=3,$$

因为 $\angle BDP=90°$，$PD=4$，所以

$$PB=\sqrt{BD^2+PD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

又因为 $PC^2=PB\cdot PA$，所以

$$(4+3)^2=5PA.$$

所以 $PA=\frac{49}{5}$. 因此

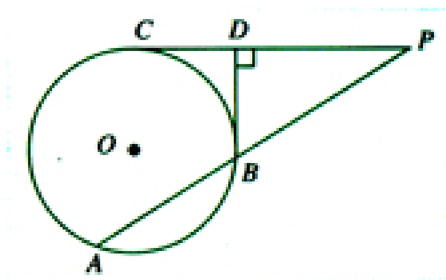


图 1-36

$$AB=PA-PB=\frac{49}{5}-5=\frac{24}{5}.$$

例 4 如图 1-37，PA，PB 切⊙O 于点 A，B，PC 是 $\angle BPA$ 的平分线，交⊙O 于 C，且 $PA=PB=80$ cm，$PC=40$ cm. 求⊙O 的直径.

解：因为 PC 是 $\angle BPA$ 的平分线，且 $PA=PB$，所以延长 PC 交⊙O 于另一点 D，则 CD 为⊙O 的直径.

设 $CD=x$.

因为 $PA^2=PC\cdot PD$，所以

$$80^2=40(40+x),$$

解此方程，得 $x=120$.

所以⊙O 的直径为 120 cm.

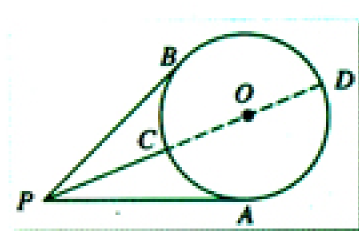


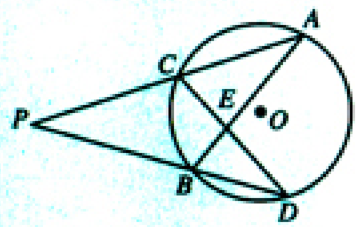
图 1-37

练习

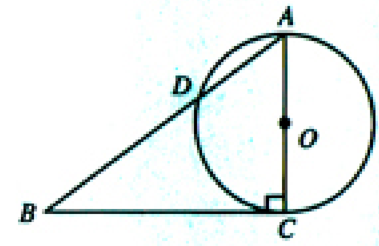
1. 选择题：如图，⊙O 的两条弦 AB，CD 相交于点 E，AC 和 DB 的延长线交于点 P，下列结论中成立的是(　　).

(A) $PC\cdot CA=PB\cdot BD$　　　　(B) $CE\cdot AE=BE\cdot ED$

(C) $CE \cdot CD = BE \cdot BA$　　(D) $PB \cdot PD = PC \cdot PA$



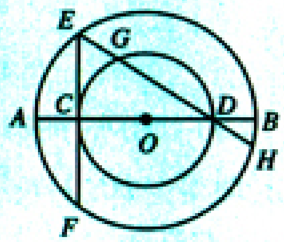
（第 1 题）



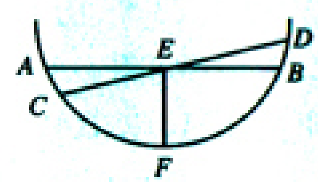
（第 2 题）

2. 已知：Rt△ABC 的两条直角边 AC，BC 的长分别为 3 cm，4 cm，以 AC 为直径作圆与斜边 AB 交于点 D. 求 BD 的长.

3. 如图，在两个同心圆中，AB 是大圆的直径，大圆的弦 EF 是小圆的切线，$OA=6$，$AC=2$. 求 EC.



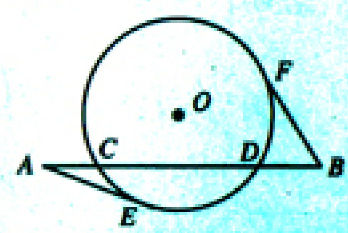
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图是一个圆弧的一部分，半径是 5，E 是 AB 的中点，已知弓形 AFB 的高 $EF=3$，$CE:ED=3:4$，求 CD 的长.

5. 如图，线段 AB 和⊙O 交于 C，D，$AC=BD$，AE，BF 分别切⊙O 于 E，F. 求证：$AE=BF$.



（第 5 题）

1.3.2 圆内接四边形的性质与判定

1. 圆内接四边形的性质

我们知道，圆的内接四边形的四个顶点都在同一个圆上，所以它的四个内角都是圆周角. 这样，我们就可以利用圆周角定理，来研究圆的内接四边形.

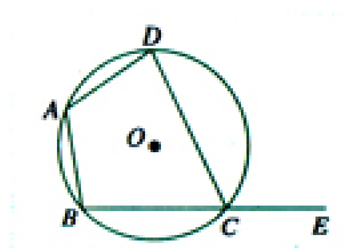


图 1-38

如图 1-38，已知四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形. ∠A 称为∠DCB 的对角，同时又称为外角∠DCE 的内对角.

请同学们自己证明下面的圆内接四边形的性质定理.

定理　圆的内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角.

例 1　如图 1-39，⊙O 和⊙O_1 相交于 A，B 两点，经过点 A，B 的直线 EF，MN 与两圆分别相交于 E，F；M，N.

求证：$EM \parallel FN$.

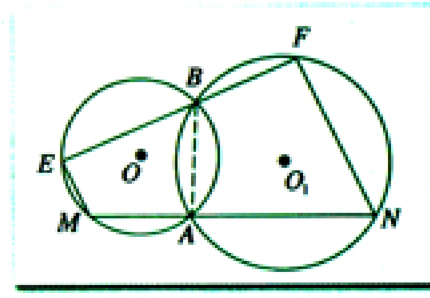


图 1-39

证明：连接 AB.

因为四边形 $ABEM$ 是⊙O 的内接四边形，所以

$$\angle ABF=\angle M.$$

又因为四边形 $ABFN$ 是⊙O_1 的内接四边形，所以

$$\angle ABF+\angle N=180°.$$

所以$\angle M+\angle N=180°$.

因此 $EM /\!/ FN$.

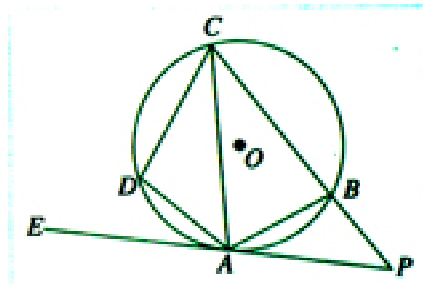


图 1-40

例 2 如图 1-40，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，过 A 作⊙O 的切线交 CB 的延长线于 P，已知$\angle EAD=\angle PCA$.

求证：$DA^2=CD\cdot BP$.

分析：要证明 $DA^2=CD\cdot BP$，先要分析线段 DA，CD，BP 所在三角形之间的关系．观察图形易知，如能证明$\triangle DCA\backsim\triangle BAP$，可得 $\dfrac{DA}{BP}=\dfrac{DC}{BA}$，再由$\angle EAD=\angle PCA$ 及其弦切角定理可得 $DA=BA$，从而能得出 $DA^2=CD\cdot BP$，所以解决本例的关键在于能否证明$\triangle DCA\backsim\triangle BAP$，由圆内接四边形性质定理得$\angle PBA=\angle D$，再由弦切角定理及题意所给的条件可证明$\angle PAB=\angle DCA$，这样问题获证.

证明：因为 EP 是⊙O 的切线，所以

$$\angle EAD=\angle DCA,\ \angle PAB=\angle PCA.$$

又因为$\angle EAD=\angle PCA$，所以

$$\angle DCA=\angle PAB=\angle PCA,$$

所以 $AD=AB$.

又因为圆内接四边形 $ABCD$，所以

$$\angle PBA=\angle D,$$

所以$\triangle DCA\backsim\triangle BAP$，因此

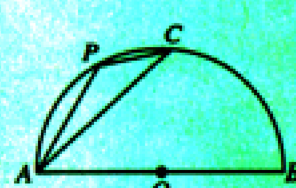
$$\frac{DA}{BP}=\frac{DC}{BA}.$$

因为 $AD=AB$，所以

$$DA^2=CD\cdot BP.$$

练习

1. 圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数的比是 $3:4:6$，求四边形各内角的度数.
2. 如图，AB 为半圆的直径，$\angle BAC=50°$，点 P 是$\overset{\frown}{AB}$上一动点．当 P 点在$\overset{\frown}{AB}$内运动时(不与 C 重合)，$\angle P$ 有何变化?

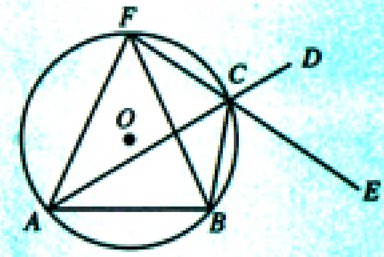


(第 2 题)

并求$\angle APC$的度数.

3. 求证：圆内接平行四边形是矩形.

4. 如图，已知CE是$\triangle ABC$的外角$\angle DCB$的平分线，CE的反向延长线与三角形ABC的外接圆相交于F. 求证：$FA=FB$.



（第 4 题）

2. 圆内接四边形的判定

我们知道，不在同一直线上的三个点确定一个圆. 那么在同一平面内，过不在同一直线上的四个点能否画一个圆？让我们一起探索四个点共圆的条件.

从圆的定义可得到：在平面内四个点A，B，C，D，只要它们与某定点O的距离相等，即$AO=BO=CO=DO$，就可得出这四个点在同一个圆上.

除此之外还有没有办法判定四点共圆呢？这就要先从圆内接四边形的性质定理的逆命题进行研究.

实际上，圆的内接四边形的性质定理有下面的逆定理：

定理 如果一个四边形的一组对角互补，那么这个四边形内接于圆.

已知：四边形$ABCD$中，$\angle B+\angle D=180°$(图 1-41）.

求证：四边形$ABCD$内接于圆.

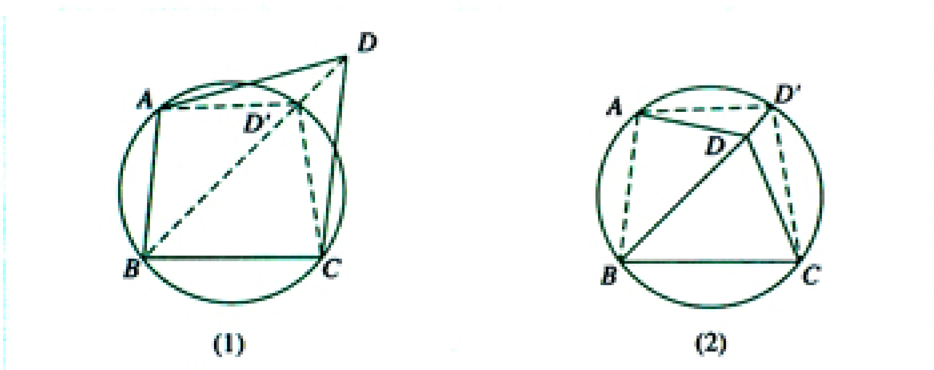


图 1-41

分析：要证明四边形$ABCD$内接于圆，即证明A，B，C，D四点在同一个圆上，因为A，B，C三点不在同一直线上，可以确定一个圆，所以只要证明第四点D也在这个圆上就可以了，但直接证明点D在圆上比较困难，现在我们采用一种间接证明的方法（反证法).

证明：经过四边形三个顶点A，B，C作$\odot O$.

假设点D不在圆上，那么只有两种情况：(1) 点D在圆外；(2) 点D在圆内.

(1) 假设点D在圆外(图 1-41(1))，连接BD交$\odot O$于点D'，连接AD'，CD'.

因为$\angle AD'B$，$\angle BD'C$分别是$\triangle AD'D$，$\triangle CD'D$的外角，所以

$$\angle AD'B > \angle ADB,$$
$$\angle BD'C > \angle BDC,$$

所以$\angle AD'B + \angle BD'C > \angle ADB + \angle BDC$，即

$$\angle AD'C > \angle ADC.$$

又因为$\angle ADC + \angle ABC = 180°$，所以

$$\angle AD'C + \angle ABC > 180°.$$

这与圆内接四边形性质定理矛盾.

所以点 D 不能在圆外.

(2)同(1)类似可证明点 D 不能在圆内(图 1-41(2)).

所以点 D 在$\odot O$上.

即四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形.

例 3 如果两个三角形有一条公共边，这条边所对的角相等，并且在公共边的同侧，那么这两个三角形有公共的外接圆.

已知：如图 1-42，$\angle C$，$\angle D$ 在 AB 同侧，$\angle C = \angle D$.

求证：$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$ 有公共的外接圆.

证明：如图 1-42，作$\triangle ABC$ 的外接$\odot O$，在$\odot O$ 的$\overset{\frown}{AB}$上取点E，使 E 与 C 在 AB 的两侧.

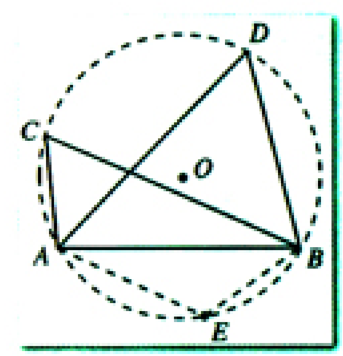


图 1-42

因为 A，E，B，C 四点共圆，所以

$$\angle ACB + \angle AEB = 180°.$$

又已知$\angle ACB = \angle ADB$，所以

$$\angle ADB + \angle AEB = 180°.$$

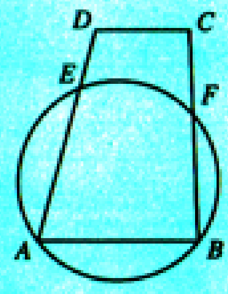
因此 A，E，B，D 四点共圆.

因为过不共线的三点 A，E，B 只有一个圆，即$\odot O$，所以 A，B，C，D 四点共圆.

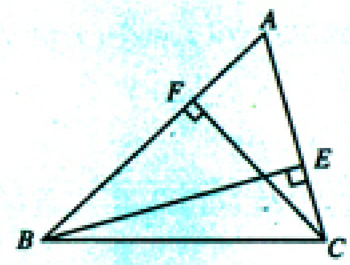
即$\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 有公共的外接圆.

练习

1. 按照图 1-41(2)，证明本节定理.
2. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$CD /\!/ AB$，过 A，B 两点的圆分别交 AD，CB 于 E，F. 求证：D，E，F，C 四点共圆.
3. 已知：如图，BE 和 CF 是$\triangle ABC$ 的高，求证：F，B，C，E 四点在同一个圆上.



（第 2 题）



（第 3 题）

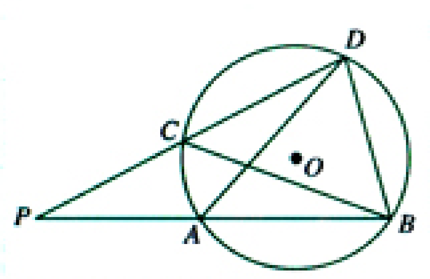
4. 求证：菱形各边的中点在同一个圆上.

5. 求证：一个外角等于它的内对角的四边形的四个顶点共圆.

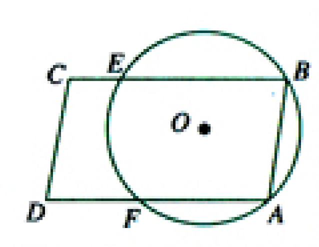
习题 1－3

1. 如图，经过圆外一点 P 的两条直线与⊙O 相交于 A，B 和 C，D 四点，在图中有几对相似三角形？为什么？

2. 已知：如图，▱$ABCD$ 中，过点 A，B 的圆与 BC，AD 分别交于点 E，F. 求证：C，D，E，F 四点在同一个圆上.

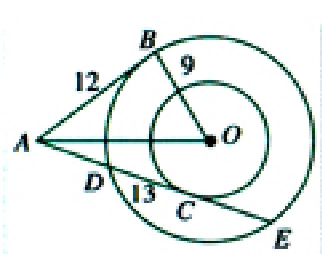


（第 1 题）

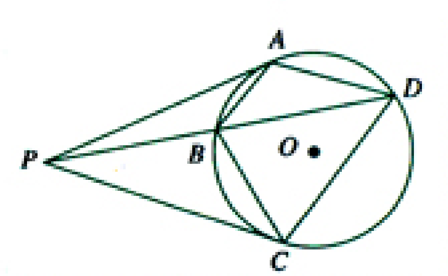


（第 2 题）

3. 如图，两个以 O 为圆心的同心圆，AB 切大圆于 B，AC 切小圆于 C，交大圆于 D，E，且大圆半径为 9. $AB=12$，$AC=13$，求小圆的半径和 AD.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，PA，PC 切⊙O 于 A，C，PBD 是⊙O 的割线.
求证：$AD \cdot BC=AB \cdot DC$.

5. 求证：任意平面四边形内角的平分线所成的四边形内接于圆.

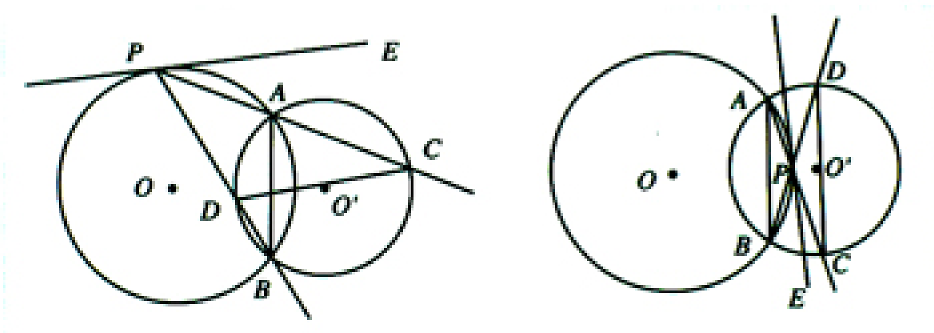
6. 过正方形对角线上任意一点，引两直线平行于边，那么这两直线与边的四个交点

同在一个圆上.

7. 已知：如图，⊙O和⊙O'相交于A，B，直线PE切⊙O于P，直线PA，PB和⊙O'的另一个交点分别是C，D.

求证：CD∥PE.

研究：点P在⊙O上任何位置时，结论都成立吗？

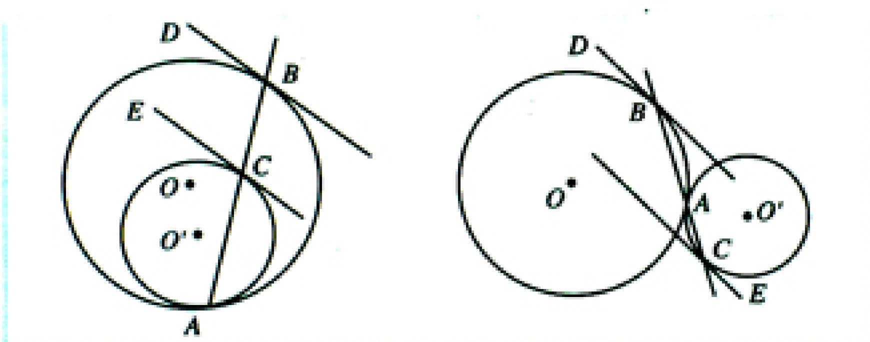


（第7题）

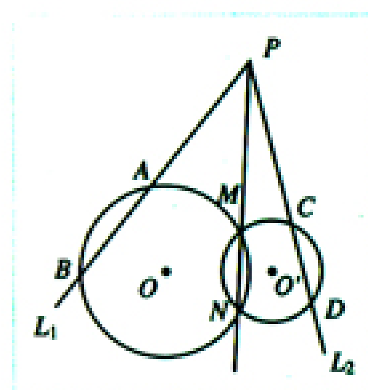
8. 已知：如图，⊙O和⊙O'相内切于点A，直线AB和⊙O的另一个交点为B，和⊙O'的另一个交点为C，BD，CE分别切⊙O，⊙O'于B，C.

求证：BD∥CE.

研究：两圆外切时结论还成立吗？



（第8题）



（第9题）

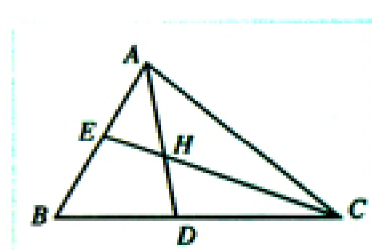
9. 已知：⊙O，⊙O'相交于M，N两点，P为直线MN上一点，过P的直线L_1，L_2分别交⊙O于A，B两点，交⊙O'于C，D两点.

求证：四边形$ABCD$内接于一个圆.

研究：两圆相切时，题中的结论还成立吗？

10. 已知：如图，△ABC中，$\angle B=60°$，AD，CE是角平分线.

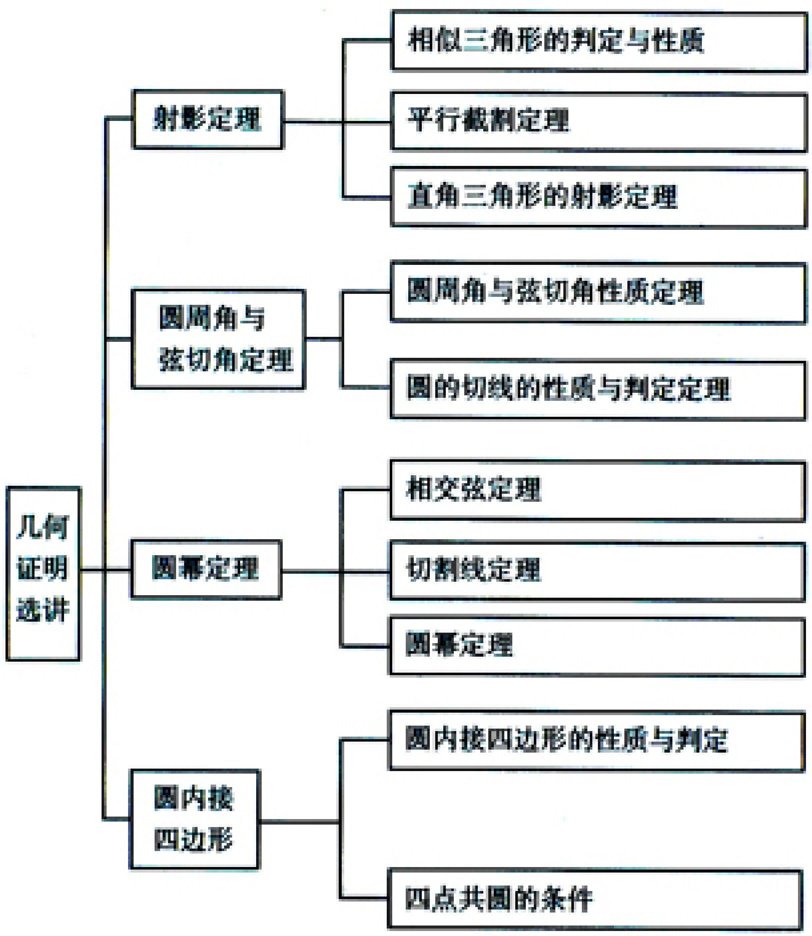
求证：$AE+CD=AC$.



（第10题）

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

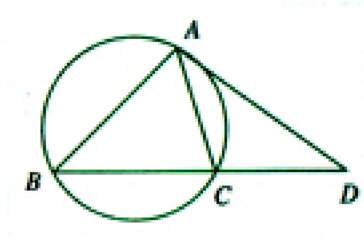
1. 你能证明长方形的面积公式吗？请与同学交流，看你的证明是否完善.
2. 两条线段的比值都是有理数吗？
3. 如何用面积公式证明相似三角形判定定理？
4. 如何从相似直角三角形的性质来定义锐角三角函数？如何用锐角三角函数证明射影定理？
5. 如何判定一条直线是圆的切线？

6. 讨论与圆有关的角之间的关系，写一篇小论文与同学交流.
7. 什么是圆幂定理？写一篇小论文，讨论圆幂定理的各种情况.
8. 如何用相似三角形的性质研究圆内接四边形的性质？

III 巩固与提高

1. 两个相似三角形的面积分别为 4 和 9，则这两个相似三角形的相似比为(　　).

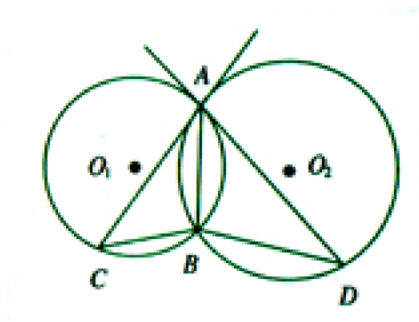
(A) $\frac{4}{9}$　　(B) $\frac{9}{4}$　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) $\frac{2}{3}$



(第 2 题)

2. 如图，已知△ABC 内接于圆，过点 A 的切线与 BC 的延长线交于点 D，如果 $\angle B=40°$，$\angle ACB=78°$. 则 $\angle D$ 等于(　　)度.

(A) 38　　(B) 28　　(C) 40　　(D) 78



(第 3 题)

3. 如图，已知⊙O_1 和⊙O_2 相交于 A，B 两点，AD 为⊙O_1 的切线并交⊙O_2 于 D，AC 为⊙O_2 的切线并交⊙O_1 于 C. 则(　　).

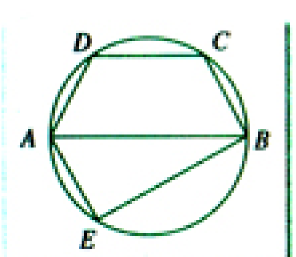
(A) $AB\cdot AD=AC\cdot BC$　　(B) $AB\cdot BC=AD\cdot BD$

(C) $AB^2=BC\cdot BD$　　(D) $AC^2=AB\cdot AD$

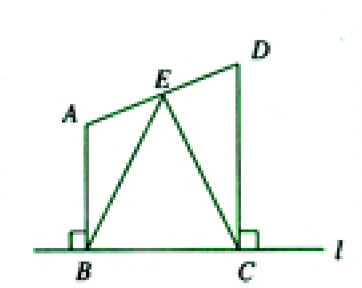
4. 如图，已知 A，B，C，D，E 为圆上五个点，且 $CD/\!/AB$，$AD=DC=BC$，$\angle ADC=120°$. 则 $\angle AEB$ 等于(　　)度.

(A) 50　　(B) 60　　(C) 80　　(D) 90

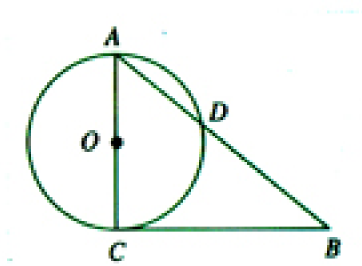
5. 如图，已知点 A，D 在直线 l 上的射影分别为 B，C，点 E 为线段 AD 的中点. 求证：$BE=CE$.



(第 4 题)



(第 5 题)



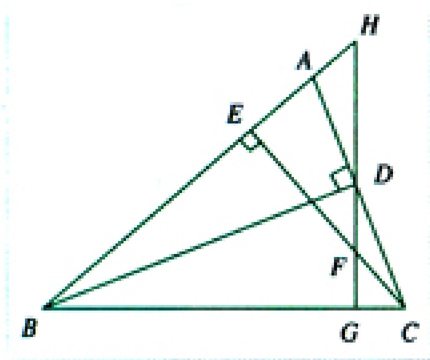
(第 6 题)

6. 如图，以 Rt△ABC 的直角边 AC 为直径作圆 O 交斜边于 D，$AC=6$，$AD=2$. 求 BD 和 BC.

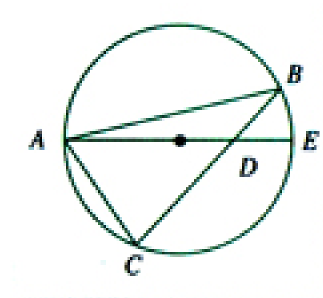
7. 如图，已知 BD，CE 是△ABC 的两条高，过点 D 的直线交 BC 和 BA 的延长线于 G，

H，交 CE 于 F，且 $\angle H=\angle BCF$. 求证：$GD^2=GF\cdot GH$.

8. 如图，已知 AE 是⊙O 的直径，弦 BC 与 AE 相交于 D. 求证：$\tan B\cdot\tan C=\frac{AD}{DE}$.

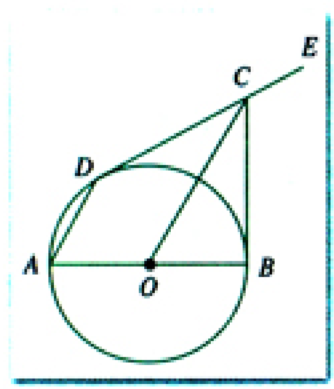


（第 7 题）

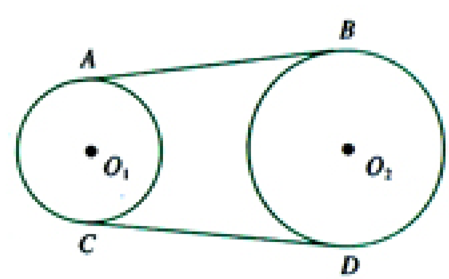


（第 8 题）

9. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，ED 切⊙O 于 D，过圆心 O 作 AD 的平行线交 DE 于 C. 求证：CB 是⊙O 切线.



（第 9 题）



（第 10 题）

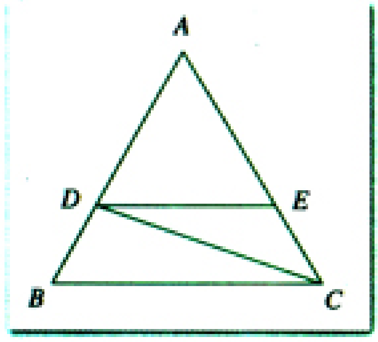
10. 如图，已知：AB，CD 是外离两圆⊙O_1 与⊙O_2 的外公切线，切点为 A，B，C，D. 求证：A，B，C，D 四点共圆.

11. [托勒密定理] 求证：圆内接四边形两组对边乘积之和等于对角线的乘积.（提示：已知圆内接四边形 $ABCD$. 在 BD 上取点 F，使得 $\angle BAF=\angle DAC$，再利用相似三角形的性质即可证明. 另外，请同学们思考其逆命题是否成立.）

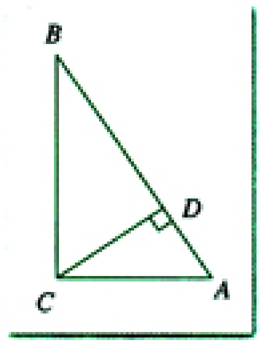
IV 自测与评估

1. 已知：如图，边长为 12 的正三角形 ABC，$DE/\!/BC$，$S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=4:9$，求 EC 的长.

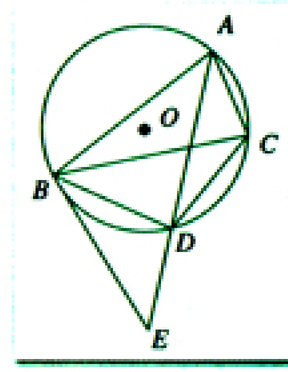
2. 已知：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，斜边上的高 $CD=5$ cm，$AD=3$ cm，求 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 各边的长度.



（第 1 题）



（第 2 题）

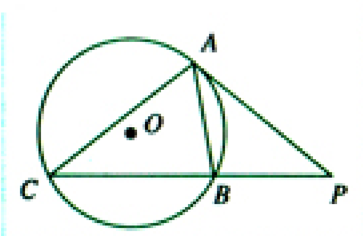


（第 3 题）

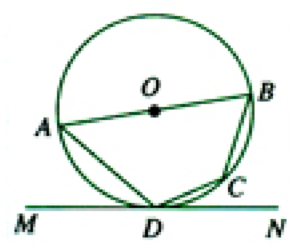
3. 已知：如图，A，B，C 是⊙O 上三个点，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，交⊙O 于 D，过 B 作⊙O 的切线交 AD 的延长线于 E，求证：

(1) BD 平分$\angle EBC$；　　(2) $AE \cdot DC = AB \cdot BE$

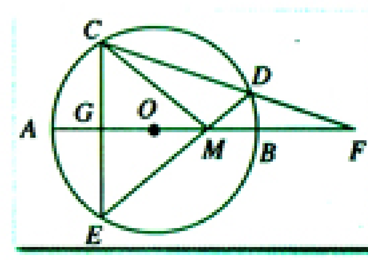
4. 如图，已知 PA 切⊙O 于点 A，割线 PBC 交⊙O 于点 B、C，若 $PA=6$，$PC=9$，求 BC 的长.



（第 4 题）



（第 5 题）

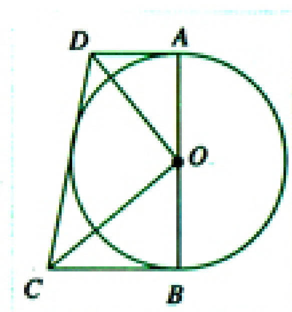


（第 6 题）

5. 如图，已知四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，且 AB 是⊙O 的直径，直线 MN 切⊙O 于 D，$\angle MDA=50^\circ$，求$\angle DCB$ 的大小.

6. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，过 OA 的中点 G 作弦 $CE \perp AB$ 于 G，点 D 为优弧$\overset{\frown}{CBE}$上（除点 B 外）一动点，过 D 分别作直线 CD，ED 交直线 AB 于点 F，M. 求证：$\angle FDM$ 为定值，并求这个值.

7. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，$DA \perp AB$ 于 A，而且 $DA /\!/ BC$，且$\angle COD=90^\circ$，求证：DC 是⊙O 的切线.



（第 7 题）

数学文化

阅读与欣赏

欧 几 里 得

欧几里得（Euclid，约前330—前275）是古希腊最伟大的数学家之一．早年在雅典受教育，熟知柏拉图的学说．公元前300年左右，受托勒密王（前364—前283）之邀，到埃及统治下的亚历山大城工作，长期从事教学、研究和著述．他写过不少数学、天文、光学和音乐方面的著作，而以巨著《原本》最闻名于世．《原本》原有13卷，后人又补充2卷．这本著作的原稿早已失传，现存的是公元4世纪末西翁的修订本和18世纪在梵蒂冈图书馆发现的希腊文手抄原本．这部西方世界现存最古老的数学著作，为两千年来用公理法建立演绎的数学体系树立了最早的典范．德摩根曾说，除了《圣经》，再没有任何一种书像《原本》这样拥有如此众多的读者，被译成如此多种语言．从1482年到19世纪末，《原本》的各种版本竟用各种语言出了1 000版以上．明朝万历年间（1607），徐光启和意大利传教士利玛窦把前6卷译成中文出版，定名为“几何原本”．“几何”这个数学名词就是这样来的．《几何原本》是中国近代翻译的第一部西方数学著作．

在《几何原本》中，欧几里得首先给出了点、线、面、角、垂直、平行等定义，接着给出了关于几何和关于量的十条公理，如“凡直角都相等”、“整体大于部分”以及后来引起许多纷争的“平行线公理”等等．公理后面是一个一个的命题及其证明，内容十分丰富．比如有平面作图，勾股定理，余弦定理，圆的各种性质，空间中平面和直线的垂直、平行和相交等关系，平行六面体、棱锥、棱柱、圆锥、圆柱，球等问题，此外还有比例的理论，正整数的性质与分类，无理量等等．公理化结构是近代数学的主要特征，而《几何原本》则是公理化结构的最早典范，它产生于两千多年前，这是难能可贵的．欧几里得完成巨著《几何原本》并不是偶然的．除了他自己的天分和勤奋外，在他之前已有许多希腊数学家作了大量的开拓性工作，积累起了许多数学知识．不过这些知识是零碎的、不连贯的，可以比作砖瓦、木石．欧几里得的伟大贡献在于他创造性地吸收并发展了前人的研究成果，用公理化方法建立起了一套完善的演绎体系，把这些零碎的、不连贯的数学知识进行分类、比较，揭示彼此间的内在联系，组织在一个严密的系统之中．就好像一位高明的建筑师把木石、砖瓦建成巍峨的大厦一样．

古籍中记述的两则故事说明了欧几里得的治学态度．一个故事说：托勒密国王问欧几里得，除了他的《几何原本》之外，有没有其他学习几何的捷径．欧几里得回答道：“几何无王者之道．”意思是在几何学里，没有专门为国王铺设的大路．这句话后来被引申为“求知无坦途”，成为千古传诵的箴言．另一个故事说：一个学生才开始学习第一个

命题，就问学了几何之后将得到些什么．欧几里得说："给他三个钱币，因为他想在学习中获取实利．"从古籍记载的这两则故事可知，欧几里得主张学习必须循序渐进、刻苦钻研，不赞成投机取巧、急功近利的作风，也反对狭隘的实用观点．

除《几何原本》外，欧几里得还有不少著作，如《已知数》、《图形的分割》、《纠错集》、《圆锥曲线》、《曲面轨迹》、《观测天文学》等，可惜大都失传．不过，经过两千多年历史的考验，影响最大的仍然是《几何原本》．

附 录

不可公度线段的发现与逼近法

在几何学的发展中，人们对两条线段的比的认识经历了非常艰辛的历史过程. 回顾这一段历史对我们现在学习数学也有着重要的意义.

公元前六、五世纪，古希腊几何学家曾经论断：

"任意两个线段的比都是可公度的."

这就是说，对任意两条线段 a，b 总可以找到适当的线段 u，使得 a，b 的长度都是 u 的整数倍，即存在实数 m，n，使

$$a=mu，b=nu，$$

于是$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

即这两条线段的比是一个分数.

古希腊几何学家以上述论断为基础，对许多重要的几何定理给出了证明. 例如长方形面积等于长乘宽；相似三角形的判定定理等. 大家肯定会记得在小学学习长方形面积公式时，先对长和宽都是整数的情形进行验证，如果是一位小数我们就把单位化小，取其单位长十分之一进行度量，这样就把要度量的长方形分割为更小的正方形去进行度量，从而再一次的验证了长方形的面积等于长乘宽. 大家当时不知是否想过，是否存在这样的线段，无论用多么小的单位去量，都会量不尽？这个问题如果用实践的办法是很难回答的.

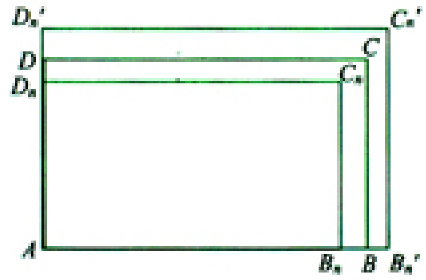
古希腊的几何学家，经过了一段时期的思考和研究，最后推翻了上述结论.

公元前五世纪中期，古希腊几何学家希伯斯发现并证明五边形的边长和对角线长是不可同时公度的. 它们的比值不能用分数来表示. 随后几何学家又证明了正方形的对角线与边长的比也不能用分数来表示. 这些发现在数学发展史中是划时代的，这说明基于"两条线段的比是一个分数"所证明的定理都是不完全的. 这就动摇了古希腊整个几何理论的基础，给古希腊的推理几何学带来了空前的危机和挑战.

如何来解决这个危机？古希腊几何学家大约经过半个世纪的努力研究，终于建立了一套理论，克服了"不可公度"的障碍. 这套理论的核心思想是逼近法. 下面说明，用逼近法证明长方形面积公式的主要思路，从而领略一下逼近法的思想.

设长方形的边长分别为 a，b，如果用单位长 u 能整量 a 和 b，即存在 l 和 w 使

$$\frac{a}{u}=l,\ \frac{b}{u}=w.$$



即 a，b 的长都可用分数来表示．对这种情形，我们总可通过平行分割的办法，加以证明．证明留给同学作为练习．下面我们来证明 l 和 w 不是分数的情况．

已知长方形 $ABCD$．如图，我们可以取适当的单位长 u，作两个长方形序列，一组在长方形的内部，其他的长和宽都小于原长方形长和宽，记为 $\{AB_nC_nD_n\}$，另一组长和宽都大于原长方形长和宽，记为 $\{AB_n'C_n'D_n'\}$．存在序列 $\{l_n\}$，$\{w_n\}$，$\{l_n'\}$，$\{w_n'\}$，使

长方形 $AB_nC_nD_n$ 的边长 $AB_n=l_nu$，$AD_n=w_nu$，

长方形 $AB_n'C_n'D_n'$ 的边长 $AB_n'=l_n'u$，$AD_n'=w_n'u$．

于是有

长方形 $AB_nC_nD_n$ 的面积 $\leqslant$ 长方形 $ABCD$ 的面积 $\leqslant$ 长方形 $AB_n'C_n'D_n'$ 的面积.

上面的不等式左右两个长方形的边长都可用分数表示，所以

$$l_nw_n\leqslant lw\leqslant l_n'w_n'.$$

我们可通过单位逐渐变小，使 l_n，w_n 逐渐增大，l_n'，w_n' 逐渐变小．于是夹逼原长形的两个长方形的面积差 $l_n'w_n'-l_nw_n$ 逐渐变小，可以想像，它们最后必然相等．当然被夹在中间的数 lw 也必然与它们相等.

这说明，长方形的面积在任何情况下都等于长乘宽.

长方形面积公式是我们推导其他图形面积的基础．本章的相似三角形第一个判定定理也是由三角形面积和梯形面积公式推出的．只有完全的证明了长方形的面积公式，才能说明我们在本章的一些证明是正确的.

请同学们再一次想一想，弄清楚两条线段比值的意义何在.

理性证明是数学的本质所在.

圆柱、圆锥与圆锥曲线

本章第一大节是论证平行投影的性质，然后通过平行投影变换在圆柱面内探索圆与椭圆之间的关系．第二大节，用圆柱或圆锥面的内切球探索圆锥曲线的特征性质，各自给出椭圆、双曲线、抛物线的定义，以及它们的统一定义，揭示它们之间的内在联系．

Dandelin 双球

2.1 平行投影与圆柱面的平面截线

2.1.1 平行投影的性质

在数学 2 的立体几何初步中，我们学习了平行投影的有关概念和性质．我们知道：

如果直线 l 与平面 α 相交(图 2-1)．过任一个图形 F 上任一点 M 作直线平行于 l，交平面 α 于点 M'，则点 M' 叫做点 M 在平面 α 内关于直线 l 的平行投影(或象)．如果图形 F 上的所有点在平面 α 内关于直线 l 的平行投影构成图形 F'，则 F' 叫做图形 F 在 α 内关于直线 l 的平行投影．平面 α 叫做投射面，l 叫做投射线．

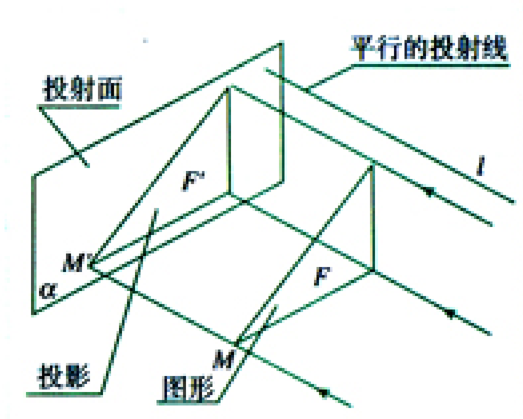


图 2-1

另外还通过实验和观察，归纳出平行投影具有下述性质(直线与投影线不平行)：

1. 直线或线段的平行投影仍是直线或线段；
2. 平行直线的平行投影是平行或重合的直线(图 2-2(1))；
3. 平行于投射面的线段，它的投影与这条线段平行且等长；
4. 与投射面平行的平面图形，它的投影与这个图形全等(图2-22)；
5. 在同一直线或平行直线上，两条线段平行投影的比等于这两条线段的比(图 2-2)．

我们来证明(1)和(5)，其他作为练习，请同学们自己证明．

如图 2-2(2)，设线段 AB 的两个端点 A，B 在平面 α 内的投影为 A'，B'．

因为 $AA' \parallel BB'$，所以它们确定一平面 ABA'，并且 $A'B'$ 为平面 ABA' 和平面 α 的交线．

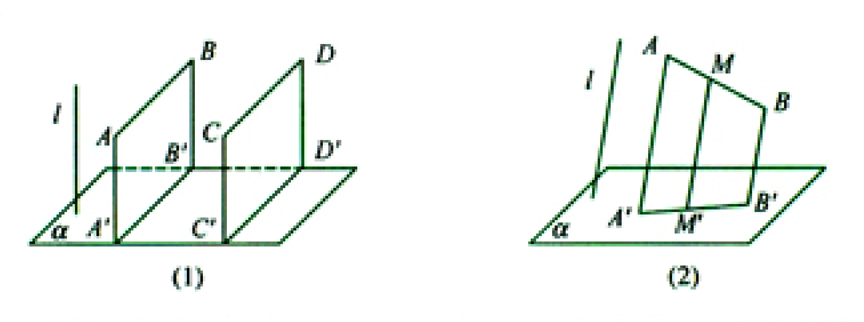


图 2-2

在 AB 上任取一点 M，设 M'是 M 的平行投影，则 M'既在平面 α 内，又在平面 ABA' 内，所以它一定在交线 $A'B'$上；反之对 $A'B'$上任一点 M'，可求得一点 M 与 M'对应. 因此可证，直线或线段的平行射影仍是直线或线段. 如果线段 AB 在平面 α 内关于直线 l 的平行投影是$A'B'$(图 2-2)，点 M 在 AB 上，且 $AM : MB=m : n$，则点 M 的平行投影 M' 在$A'B'$上，由平行线分线段成比例定理得

$$A'M' : M'B'=m : n.$$

2.1.2 圆柱面的平面截线

我们知道，如果一个平面垂直于一圆柱的轴，截圆柱所得的截线为一圆. 现在我们来考察，如果一个平面与圆柱的轴所成角为锐角，截圆柱所得的截线的形状是什么样的.

如图 2-3，设⊙O 为垂直于圆柱轴线所截得的圆. 一平面 σ 与圆柱的轴线所成的角为锐角 α，它与圆柱所截得的曲线，记为 m. 让我们来研究⊙O 与曲线 m 的关系.

显然，曲线 m 是⊙O 在平面 σ 内的平行射影，同样⊙O 为曲线 m 在⊙O 所在平面(记为 δ)内的平行射影(正射影). 由平行射影的性质，圆心 O 在平面 σ 内的射影 O' 为曲线 m 的对称中心(平行投影后线段的中点仍为中点).

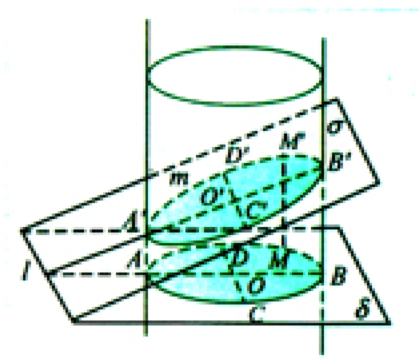


图 2-3

设平面 σ 与⊙O 所在平面 δ 的交线为 l. 在平面 δ 内，过圆心 O 作 l 的垂线交⊙O 于 A，B 两点，设 A，B 在平面 σ 投影为 A'，B'，作与⊙O 直径 AB 垂直的直径 CD，设直径在平面 σ 内的射影为 $C'D'$，则 $C'D' /\!/ l$.

因此，由平行投影的性质可得

$$CD \underline{/\!/} C'D'.$$

由以上分析可看到，⊙O 内与 CD 平行的弦在平面 σ 内的平行射影，其长度不变，平行于 AB 的弦在平面 σ 内的平行射影，其长度发生了变化(拉长). 例如

$$AB=A'B'\cos\alpha，即\ A'B'=\frac{AB}{\cos\alpha}.$$

下面，我们证明曲线 m 是一个椭圆.

如图 2-3，分别以⊙O，⊙O'的圆心为两个坐标原点，AB，$A'B'$为横轴，CD，$C'D'$为纵轴建立两个直角坐标系 xOy 和 $x'O'y'$.

设 $M(x, y)$ 为⊙O 上任一点，点 M 在曲线 m 上的平行投影为点 M'，在坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为 (x', y')，根据平行投影的性质和线段在平面内投影的计算公式，可得

$$x'=\frac{x}{\cos\alpha}, \quad y'=y. \tag{①}$$

设⊙O 的半径为 r，则得⊙O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$.

由①式，解出 x，y，代入⊙O 的方程，整理可得

$$\frac{x'^2}{(r\sec\alpha)^2}+\frac{y'^2}{r^2}=1.$$

这个方程表示一个椭圆，所以曲线 m 是一个椭圆.

习题 2-1

1. 证明本小节所述的平行投影的性质 2、3、4.
2. 平行四边形的平行投影还是平行四边形吗？梯形呢？
3. 已知一平面垂直于圆柱的轴线，其截线为⊙$(O, 3)$，另一截平面与圆柱轴线所成的角为 60°，截线为椭圆. 求椭圆截线的两个焦点之间的距离.
4. 证明：凡正射影为圆的曲线是椭圆.

2.2 用内切球探索圆锥曲线的性质

2.2.1 球的切线与切平面

1. 球的切线

以点 O 为球心，r 半径的球记为球 $O(O, r)$.

如图 2-4 所示. 给定一个球 $O(O, r)$，过该球的任一条半径 OM 的外端 M，作 OM 的垂线 MN，容易证明直线 MN 与球 O 只有唯一的公共点 M（请同学类比圆的切线性质，自己证明）.

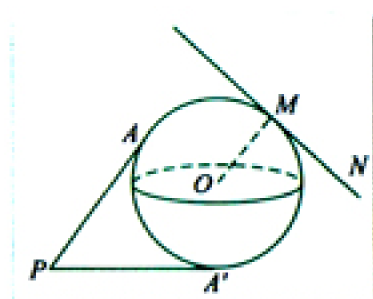


图 2-4

定义 与球只有唯一公共点的直线叫做球的切线

与圆的切线类似，球的切线具有下述性质：

球的切线垂直于过切点的半径.

如果球的切线通过一点 P（图 2-4），切点为 A，则称线段 PA 的长为从点 P 引的球的切线长.

与圆的切线长类似，球的切线长具有下述性质：

从球外任一点引该球的所有切线长相等.

2. 球的切平面

如图 2-5 所示，过球 O 的一条半径 OM 的外端 M，作与 OM 垂直的平面 δ，则容易证明平面 δ 与球 O 只有唯一的公共点 M(请同学自己证明).

定义　与球只有唯一公共点的平面叫做球的切平面.

可以证明：

一个球的切平面，垂直于过切点的半径.

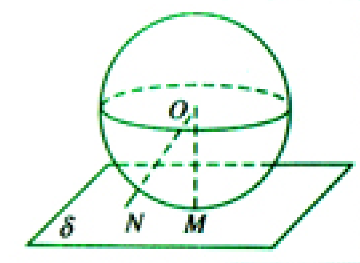


图 2-5

事实上，如果在切平面内，过切点任意作两条直线，则这两条直线都是球的切线. 根据球的切线的性质，这两条直线垂直于过切点的半径，所以切平面垂直于过切点的半径.

练习

请参照第一章中证明圆的切线性质的证明方法，证明以下球的切线与切平面的性质：

1. 证明过球的半径的外端与半径垂直的直线与球只有唯一一个公共点.
2. 证明过球的半径的外端与半径垂直的平面与球只有唯一一个公共点.
3. 证明本小节所述的球的切线的性质.

2.2.2　圆柱面的内切球与圆柱面的平面截线

如图 2-6 所示，在圆柱面❶的轴上任取一点 C，过 C 作垂直于轴的平面 δ，则平面 δ 在圆柱面上的截线是$\odot(C, r)$. 以 C 为球心，r 为半径作球，则$\odot(C, r)$也是球与圆柱面所有公共点的集合.

在 $\odot(C, r)$上任取一点 H，则 CH 与过点 H 的母线垂直. 过球半径的外端与该球半径垂直的直线，都是球的切线，于是圆柱面的每一条母线都与球相切，易证，所有切点的集合是半径为 r 的圆，此圆称做切点圆. 这时，我们说圆柱面与球面相切，该球叫做圆柱面的内切球.

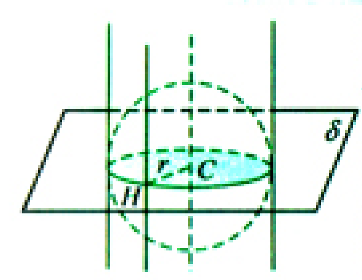


图 2-6

如果平面 δ 与圆柱面的轴线垂直，则平面 δ 截圆柱面所得的截线是一个圆，此时称 δ 平面为圆柱面的直截面

如果平面 δ 与圆柱面的轴线所成的角为锐角，此时称平面 σ 为斜截面，下面我们用圆

❶ 一条直线绕着与它平行的一条直线旋转一周，形成的曲面叫做圆柱面. 这条直线叫做圆柱面的母线，平行直线叫做圆柱面的轴.

柱面的内切球去探求椭圆的特征性质.

如图 2-7 所示，设一平面 σ 与圆柱面轴线所成的角为 α ($0°<\alpha<90°$). 截得的曲线记为 m. 如图 2-7 所示，取半径等于圆柱面内切球半径 r 的两个球，从平面 σ 的上方或下方放入圆柱面内(这两个球为圆柱面的两个内切球)，并使它们分别与平面 σ 相切，设切点分别为 F_1 和 F_2(这样的两个球存在吗？如果不存在，下面的证明，将无意义).

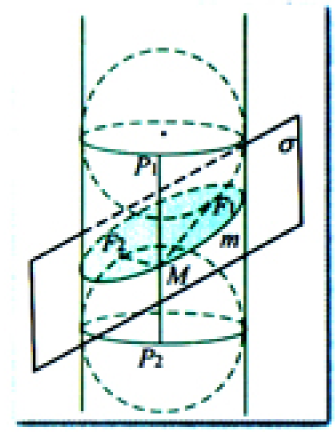


图 2-7

在截线 m 上任取一点 M，连接 MF_1 和 MF_2；过点 M 作圆柱面的母线，分别与两个球相切于点 P_1 和 P_2. MP_1 和 MF_1，MP_2 和 MF_2 分别都是同一点引同一球的两条切线，所以

$$MP_1=MF_1，MP_2=MF_2，$$
$$MF_1+MF_2=MP_1+MP_2=P_1P_2.$$

由于 P_1P_2 的长与点 M 的选择无关，所以对曲线 m 上任一点 M，到两个切点的距离和等于定长(P_1P_2 的长).

还可证明，在平面 δ 内，除曲线 m 上的点外，其他各点都不具有上述性质. 由此可见，上述性质是椭圆的一个特征性质. 因此我们可用这个性质来定义椭圆. 即

在一个平面内，到两个定点距离和等于定长(大于两定点的距离)的点的轨迹，叫做椭圆.

上面作出的圆柱面的两个内切球，叫做 Dandelin[1] 双球.

注

[1] Dandelin 是比利时的数学家

练习

1. 已知平面 δ 斜截一内切球半径为 r 的圆柱面，轴线与平面 δ 所成的角为 α，求证存在圆柱面的内切球与平面 δ 相切(图 2-10).
   (提示：作一平面平行于平面 δ 并且与 δ 的距离等于圆柱面内切球的半径，该平面与圆柱面的轴线相交于一点，则这一点为所求内切球的球心.)
2. 已知圆柱面内切球的半径等于 2 cm，一个截割圆柱的平面与圆柱面的轴线成 $60°$，从割平面上下放入圆柱面的两个内切球，并且它们都与截平面相切，求两个内切球的球心间的距离.

2.2.3 圆锥面及其内切球

1. 圆锥面

一条直线绕着与它相交成定角 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的另一条直线旋转一周，形成的曲面叫做圆锥面．这条直线叫做圆锥面的母线，另一条直线叫做圆锥面的轴．

母线与轴的交点叫做圆锥面的顶点，如图 2-8．顶点为 S 的圆锥面通常记作圆锥面 S．通过圆锥面的轴的平面叫做圆锥面的轴截面

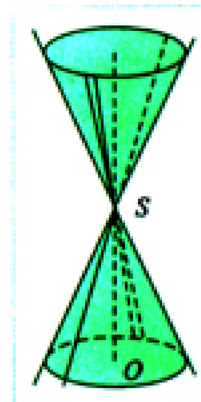


图 2-8

圆锥面有以下一些基本性质．证明留给同学们作为练习．

性质 1　圆锥面的轴线和每一母线的夹角相等．

性质 2　如果一平面垂直于圆锥面的轴线，则其截圆锥面所得的截线是圆．

2. 圆锥面的内切球及性质

如图 2-9 所示，设圆锥面 S 的母线与轴线的夹角为 α，在圆锥面 S 的轴线上任取一个与顶点 S 不同的点 O，设 SA 为任一条母线，作 $OH\perp SA$ 于点 H，则

$$OH=SO\sin\alpha.$$

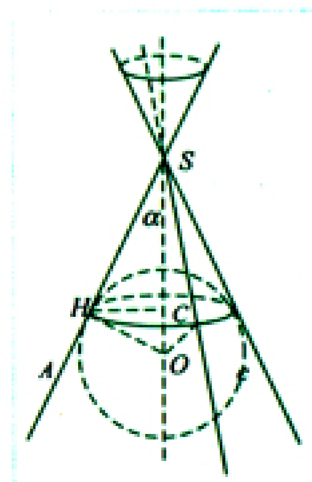


图 2-9

由此可知，点 O 到圆锥面 S 每一条母线的距离都相等．以 O 为球心，OH 为球的半径作球 O，则每一条母线都与球 O 相切．于是，从 S 出发的每一条切线长相等，切点在轴上的正投影都落在同一点 C，所有切点与点 C 的距离相等，并且在通过点 C 且垂直于轴线的同一平面上，所以圆锥面 S 的每一条母线与球 O 相切的切点的轨迹是一个圆．这个圆通常称做切点圆，球 O 叫做圆锥面 S 的内切球．

由以上分析可知，圆锥面与内切球的交线是一个圆，并且该圆所在平面垂直于该圆锥面的轴线．

例　已知一圆锥面 S，其轴为 Sx，一平面 σ 不过顶点 S 并与圆锥面 S 的轴线相交于点 M（图 2-10）．求证存在圆锥面的内切球与平面 σ 相切．

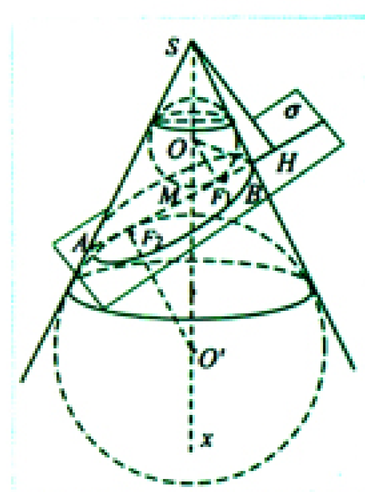


图 2-10

证明：过顶点 S 作直线垂直平面 σ 于点 H，则平面 $SMH\perp$ 平面 σ，MH 为这两个平面的交线．由于平面 SMH 过圆锥面的轴线 Sx，所以圆锥面 S 关于这个平面成镜面对称．设平面 SMH 和锥面分别相交于母线 SA，SB，则 A，B 在直线 MH 上．

作 $\angle SBM$ 的平分线交轴线 Sx 于点 O，作 $OF_1\perp AB$ 于 F_1，以 O 为球心，OF_1 为球的半径作球 O，则球 O 与平面 σ 相切于

点 F_1.

由于 BO 是 $\angle SBA$ 的平分线，所以点 O 到 SB 的距离等于球 O 的半径 OF_1，因此球 O 与母线 SB 相切.

因为圆锥的所有母线与其轴线的夹角相等，所以球 O 与所有的母线相切.

总结以上讨论，可知球 O 既与圆锥面 S 相切，又与平面 σ 相切.

同理可以证明，在平面 σ 的下方仍然存在一个球，既是圆锥面 S 的内切球，又与平面 σ 相切(图 2-10).

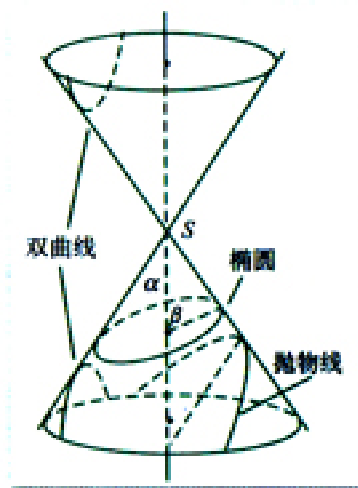


图 2-11

3. 圆锥面的平面截线

如图 2-11 所示，已知圆锥面 S，其轴线与母线成 α 角：用一个不通过顶点 S 并且与 S 的轴线成 β 角的平面 σ 去截圆锥面 S，对

$$\beta>\alpha，\beta=\alpha，\beta<\alpha$$

这三种不同的情况，所截得的曲线具有不同的性状. 下面我们对每一种情况进行研究.

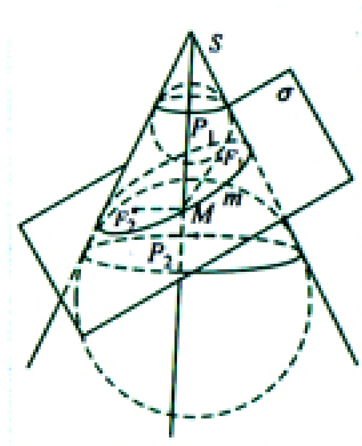


图 2-12

(Ⅰ) $\beta>\alpha$(图 2-12). 设平面 σ 与圆锥面 S 截得的曲线为 m.

在平面 σ 的上、下，分别作圆锥面 S 的两个内切球，并且与平面 σ 分别相切于点 F_1，F_2(参见上一小节例)，连接 MF_1 和 MF_2. 在 m 上任取一点 M，作圆锥面的母线 SM，并与内切球分别相切于点 P_1，P_2.

因为 MP_1 和 MF_1，MP_2 和 MF_2 分别都是同一点引同一球的两条切线，所以

$$MF_1=MP_1，\quad MF_2=MP_2(切线长相等).$$

因此 $MF_1+MF_2=MP_1+MP_2=P_1P_2$.

由于 P_1P_2 的长与点 M 在截线 m 上的选取无关，因此，它是一个常数. 还可证明，截线 m 外的点到两个切点的距离之和不等于这个常数. 因此，在平面 σ 内的截线 m 为到两定点距离之和等于定长点的轨迹. 满足这个条件的点轨迹是一个椭圆.

(Ⅱ) $\beta<\alpha$(图 2-13). 设平面 σ 与圆锥面 S 截得的曲线为 m.

不难发现，截线 m 被分为上下两个分支，截线 m 叫做双曲线.

与用两个内切球研究截线为椭圆的情况类似，我们用内切球研究双曲线的特征性质.

在由顶点 S 分开的锥面的上下两部分内，并在截平面 σ 的同一侧，分别作圆锥面 S 的两个内切球与平面 σ 分别相切于点 F_1，F_2(你能证明这两个内切球存在吗？这两个球也称为 Dandelin 双球)，在 m 上任取一点 M，连接 MF_1 和 MF_2. 作圆锥面的母线 SM，并与内切球分别相切于点 Q_1，Q_2.

因为 MQ_1 和 MF_1，MQ_2 和 MF_2 分别都是同一点引同一球的两条切线，所以

$$MF_1=MQ_1,\ MF_2=MQ_2\text{（切线长相等）}.$$

由图 2-13 容易看出，

$$MF_1-MF_2=MQ_1-MQ_2=Q_1Q_2.$$

由于 Q_1Q_2 的长与点 M 的选取无关，因此，它是一个常数.

因此，在平面 σ 内，截线 m 上任一点到两定点距离之差等于常数. 还可证明，在平面 σ 内，截线 m 外的点与 F_1 和 F_2 的距离之差不等于这一常数.

由上面的分析，上述截线的特征性质可作为双曲线的定义，即：

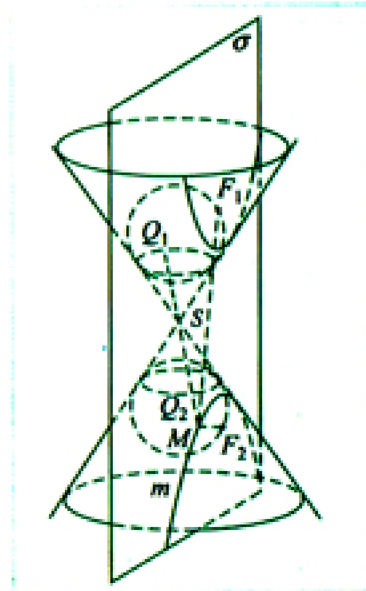


图 2-13

到两定点的距离之差的绝对值等于常数的点的轨迹，叫做双曲线. 两个定点叫做双曲线的焦点.

（Ⅲ）$\alpha=\beta$（图 2-14）. 设平面 σ 与圆锥面 S 截得的曲线为 m.

不难发现，当 $\alpha=\beta$ 时，平面 σ 只与圆锥面 S 开口向上或向下的一部分相交. 这时曲线 m 叫做抛物线.

我们仍用圆锥面的内切球，寻求抛物线的特征性质.

设一圆锥面的内切球 O 与平面 σ 相切于点 F（这个内切球是存在的，请同学们自己证明），内切球 O 与圆锥面相切于⊙C，设⊙C 所在平面为 δ. 于是平面 δ 与圆锥面的轴线垂直.

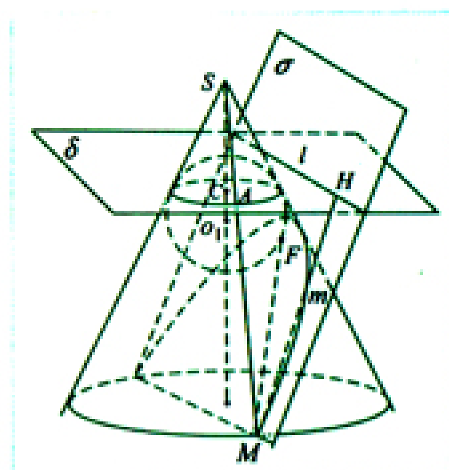


图 2-14

设平面 σ 和平面 δ 的交线为直线 l.

在截线 m 上任取一点 M，作 MH 垂直于交线 l 于点 H，再作母线 SM 交⊙C 于点 A.

因为 $\alpha=\beta$，所以平面 δ 的两条斜线段 MA，MH 与圆锥面的轴线所成的角相等，因此

$$MA=MF,\text{（切线长相等）}$$

又知 $MA=MH$，所以

$$MH=MF.$$

这就是说，曲线 m 上的任一点 M 到定直线 l 与到定点 F 的距离相等.

可以证明，平面 σ 内，不在曲线 m 上的点 M，都有 $MH\neq MF$.

由此可知，抛物线是平面内到定点与到定直线距离相等的点的轨迹. 这个定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线.

由于椭圆、双曲线和抛物线都可通过平面截圆锥面而得到，所以这三种曲线通常叫做圆锥曲线.

上述三种圆锥曲线的分析与证明结果，可归纳为如下定理：

定理 在空间给定一个圆锥面 S，轴线与母线的夹角为 α，任取一个不通过 S 的顶点的平面 σ，设其与轴线的夹角为 β(β 与轴线平行时，规定 $\beta=0$)，则：

(1) 当 $\beta>\alpha$ 时，平面 δ 与圆锥面的交线为椭圆；

(2) 当 $\beta=\alpha$ 时，平面 δ 与圆锥面的交线为抛物线；

(3) 当 $\beta<\alpha$ 时，平面 δ 与圆锥面的交线为双曲线.

探索与研究

1. 由圆锥面的定义，一个圆锥面 S 张口的大小和形状，完全由其母线和轴线的夹角 α(锐角)所决定，所以它是研究圆锥面几何性质的唯一的几何量．给定一个圆锥面 S，则 α 唯一确定.

设平面 δ 不通过圆锥面的顶点，并且与圆锥面所成的角为 β，考察当 β 在 0° 到 90° 变化时，平面 δ 截圆柱面 S 所得到的截线的形状变化的情况．当 β 从大于 α 并无限接近 α 变化时，体会截线形状的变化，并想象变化的极限情况.

2. 如图 2-15 中的两圆，$\odot O$ 和 $\odot O'$ 分别是 $\triangle SAB$ 的内切圆和旁切圆，整个图形绕轴线 SO 旋转一周，试问直线 SA，直线 SB，$\odot O$，$\odot O'$ 和线段 AB 的轨迹各是什么图形？与我们这小节研究的圆锥曲线有什么样的联系？

把你得到的结果写成小论文与同学交流.

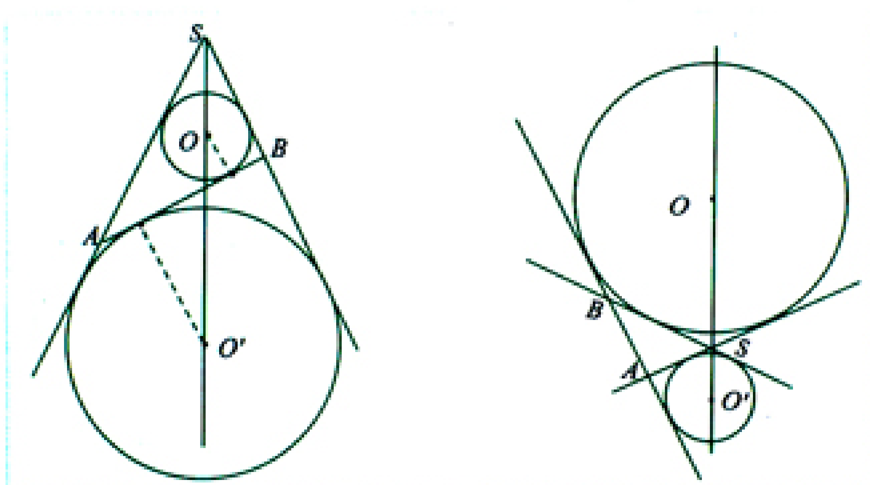


图 2-15

练习

1. 如果一平面通过圆锥面的顶点去截圆锥面，所得的截线会是什么样的图形？
2. 已知圆锥面 S，其母线与轴线的夹角为 30°，又有一平面 α 与圆锥面的轴线成 60° 角相交于点 C，且 $SC=4$，一球与锥面相切并在平面 α 的上方与平面 α 相

切，求此内切球的半径并画出它的直观图.

3. 设 F_1，F_2 是两个定点，且 $F_1F_2=3$，动点 M 分别满足条件：

(1) $MF_1+MF_2=5$； (2) $MF_1+MF_2=3$； (3) $MF_1+MF_2=2$.

说出点 M 的轨迹各是什么样的图形.

2.2.4 圆锥曲线的统一定义

上面我们曾用 Dandelin 双球，得出抛物线的特征性质：平面上到定点 F(焦点)的距离等于到一定直线 l(准线)的距离的动点的轨迹. 事实上，椭圆和双曲线也有类似的性质.

定理 除了圆之外，每一条圆锥曲线都是平面上到某个定点 F 和到某条定直线 l 的距离的比值等于常数的点的轨迹.

其中点 F 叫做圆锥曲线的**焦点**，直线叫做圆锥曲线的**准线**.

证明：假定曲线 c 是平面截一圆锥面所得到的截线(图 2-16)，作一圆锥面的内切球，并且与平面 σ 相切于点 F. 设切点圆所在的平面为 δ，并且 σ 与平面 δ 相交于直线 l .

在曲线 c 上任取一点 M，过 M 引锥线的母线，并与平面 σ 相交于点 A，再由点 M 作 l 的垂线 MH，H 为垂足.

作 MD 垂直于平面 δ 于点 D，在 Rt$\triangle MDH$ 和 Rt$\triangle MDA$ 中，设 $\angle HMD=\beta$ 和 $\angle AMD=\alpha$，则

$$MD=MA\cos\alpha,\ MD=MH\cos\beta,$$

即 $\dfrac{MA}{MH}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

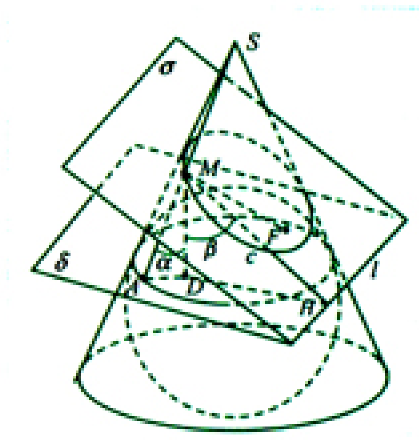


图 2-16

又因为 MF 和 MA 是同一球的两条切线段，所以 $MA=MF$. 因此

$$\frac{MF}{MH}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

因为 α，β 分别是平面 δ 与圆锥面的轴线及平面 σ 所成的角，它们都是定值，与点 M 的选取无关，所以比值 $\dfrac{MF}{MH}$ 与点 M 在曲线 c 上的选取无关. 定理得证.

令 $e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$，$e$ 叫做圆锥曲线的离心率.

由上一节，对椭圆和双曲线性质的讨论可知：

当 $\beta>\alpha$ 时，$\cos\beta<\cos\alpha$，$0<e<1$，截出的圆锥曲线为椭圆.

当 $\alpha=\beta$ 时，$\cos\alpha=\cos\beta$，$e=1$，截出的圆锥曲线为抛物线.

当 $\beta<\alpha$ 时，$\cos\beta>\cos\alpha$，$e>1$，截出的圆锥曲线为双曲线.

例 求证：通过椭圆的两个焦点的直线垂直于椭圆的一条准线.

证明：如图 2-17 所示，已知圆锥面 S. 平面 σ 截 S 所得截线为一椭圆. 圆锥面的两个内切球 O_1 和 O_2 分别与平面 σ 相切于点 F_1 和 F_2. 球 O_1 的切点圆所在的平面记为平面

δ，平面 δ 和平面 σ 相交于直线 l，则 l 为椭圆的准线.

分别作球的半径 O_1F_1 和 O_2F_2，则

$$O_1F_1 \perp \text{平面}\ \sigma,\ O_2F_2 \perp \text{平面}\ \delta$$

（切平面垂直于过切点的半径）.

因此 $O_1F_1 /\!/ O_2F_2$，O_1F_1 和 O_2F_2 确定一平面 $O_1O_2F_1$.

所以直线 F_1F_2 为平面 $O_1O_2F_1$ 与平面 σ 的交线，O_1O_2 与平面 σ 的交点必在 F_1F_2 上，并且 F_1F_2 为 O_1O_2 在平面 σ 内的射影.

又因为直线 l 是平面 σ 和平面 δ 的交线，所以 $O_1O_2 \perp l$，从而

$$F_1F_2 \perp l.\ \text{（三垂线定理）}$$

即通过椭圆两个焦点的直线垂直于椭圆的准线.

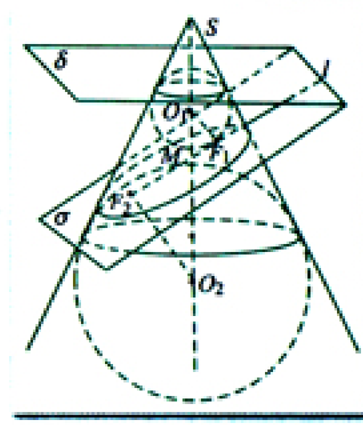


图 2-17

练习

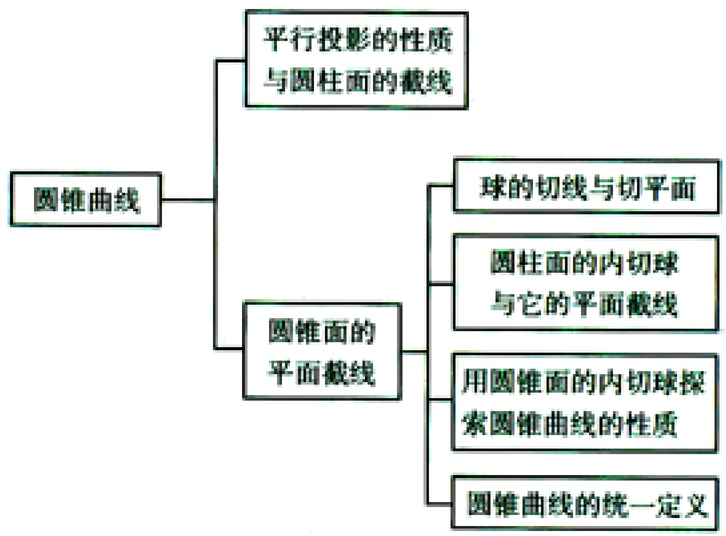
1. 在本节的定理中，研究 β 由 0° 变化到 90° 时，圆锥曲线形状的变化.
2. 当圆锥曲线为椭圆和双曲线时，它们的准线是否只有一条？如果还有一条，请说出两条准线的位置.

习题 2-2

1. 设已知椭圆的两个焦点为 F_1，F_2，且 M 为椭圆上任一点，并且 $MF_1+MF_2=2a(2a>|F_1F_2|)$，求证：满足 $PF_1+PF_2>2a$ 的点 P 都在这个椭圆的外部.
2. 在 2.2.4 的例题中，把椭圆改为双曲线，证明同样的结论.
3. 已知圆锥面 S，母线与轴线所成的角为 30°，在轴线上取一点 C，使 $SC=5$，通过点 C 作一截面 δ 使它与轴线所成的角为 45°，截出的圆锥曲线是什么样的图形？求它的离心率及圆锥曲线上任一点到两个焦点的距离之和.
4. 已知圆锥面 S，母线与轴线所成的角为 45°，在轴线上取一点 C，使 $SC=5$，过点 C 作一平面与轴线的夹角等于 30°，所截得的曲线是什么样的图形？求两个 Dandelin 双球的半径.
5. 根据各圆锥曲线的特征性质，求证椭圆、双曲线和抛物线都是轴对称图形. 对椭圆、双曲线，其中一条对称轴为通过两个焦点的直线，抛物线的对称轴为过焦点垂直于准线的直线. 它们还有另外的对称轴吗？

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

以下各思考题，都假定投射线不垂直于投射平面.

1. 如何由圆的切线性质得出球的切线和切平面的性质?
2. 图形在平面内的平行投影具有哪些性质? 你能证明圆的平行投影是椭圆吗?
3. 圆在平面上的中心投影是什么样的图形?
4. 球在平面上的平行投影和中心投影各是什么样的图形?
5. 如何证明圆柱面和圆锥面的内切球的切点集合是一个圆?
6. 怎样用 Dandelin 双球证明椭圆和双曲线的特征性质?

Ⅲ 巩固与提高

1. 设椭圆上任一点到两个焦点 F_1，F_2 的距离和等于 $2a$，直线 F_1F_2 与椭圆相交于 A，B，求证：$AB=2a$.

2. 已知一圆锥面 S 的轴线为 Sx，轴线与母线的夹角为 30°，在轴上取一点 O 使 $SO=3$ cm，球 O 与这个锥面相切，求球 O 的半径和切圆的半径.

3. 已知圆锥面 S 的母线与轴线的夹角为 30°，截平面与轴线的夹角为 45° 且与轴线相交于点 A，又 $SA=5$，求与截平面相切的两个圆锥面的内切球的半径.

4. 根据抛物线的定义，证明过焦点且垂直于准线的直线为抛物线的对称轴.

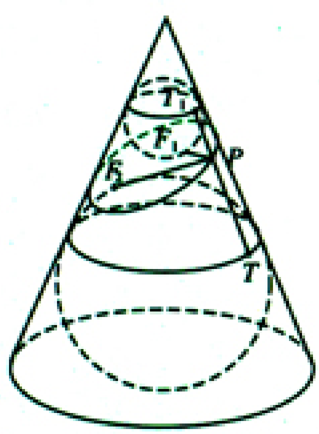
Ⅳ 自测与评估

研究用 Dandelin 双球寻求圆锥曲线特征性质的过程？写一份研究报告.

数　学　文　化　　阅读与欣赏

吉米拉·丹迪林

吉米拉·丹迪林(Dandelin)的父亲是一位法国官员，他的母亲来自现在位于比利时的埃诺市．1813 年，丹迪林考入巴黎综合工科大学，然而他的生涯受到了当时一系列动荡的政治事件的巨大影响．同年他就自愿入伍去抗击英军．



1814 年三月，丹迪林加入到奥地利、俄罗斯、普鲁士、不列颠联军共同抗击拿破仑的战争中，并在那场战争中负伤．在拿破仑兵败滑铁卢之后，丹迪林回到了比利时．1817 年，他加入了荷兰国籍．

丹迪林在数学上受到的影响最早来自于比他小两岁的凯特勒，他著名的定理（丹迪林双球）在 1822 年问世．丹迪林在圆锥面内的上下各塞进内切球，球面与切平面的切点就是焦点，利用点对球的切线等长以及子线（锥面上通过锥顶点的直线）在两等高水平面间距离固定的性质，可以得到椭圆和双曲线的轨迹性质．

这种手法很特别，谁会想到在锥面内塞刚刚好卡住的球进去，还上下各一个？那个卡住的点还刚好是焦点？抛物线只能塞一个球进去．丹迪林想到了添设辅助球的方法，巧妙地解决了这个问题．

丹迪林在立体投影、静力学、代数和概率论方面都有很深的造诣，他还给出了求代数方程的近似根的一种方法，现在称为丹迪林-格拉非方法．1825 年他被选为布鲁塞尔皇家科学院院士．

附 录

部分中英文词汇对照表

几何学	geometry
点	point
圆	circle
平行线	parallel lines
直线	straight line
曲线	curved line
定理	theorem
直角	right angle
相似三角形	similar Triangles
四边形	quadrilateral
圆锥面	civcular cone Surface
锥面	conical Surface
圆柱	civcular cylinder
圆柱面	civcular cylinder Surface
准线	directrix line
母线	generating Line
平面	plane
对称	symmetry
截线	transversal
割平面	cutting plane
焦点	focus
离心率	eccentricity
椭圆	ellipse
双曲线	hyperbola
抛物线	parabolas
锥的内切球	sphere touch the cone

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改主要成员有：

韩继清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颉、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的学校领导和师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523　010-58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组